Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Construção do corpo dos números reais via cortes de Dedekind

Valmir Heráclito Nascimento Xavier

João Pessoa – PB
Agosto de 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Construção do corpo dos números reais via cortes de Dedekind

por

Valmir Heráclito Nascimento Xavier

sob a orientação do

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB
Agosto de 2017

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

X3c Xavier, Valmir Heráclito Nascimento.
Construção do corpo dos números reais via cortes de Dedekind / Valmir Heráclito Nascimento Xavier. - João Pessoa, 2017.
52 f. : il.

Orientação: Miriam da Silva Pereira.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Cortes de Dedekind. 3. Equação polinomial - Números racionais. I. Pereira, Miriam da Silva. II. Título.

UFPB/BC

Construção do corpo dos números reais via cortes de Dedekind

por

Valmir Heráclito Nascimento Xavier [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Teoria dos Números

Aprovada em 30 de agosto de 2017.

Banca Examinadora:

Miriam Silva Pereira

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira – UFPB
(Orientadora)

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB
(Co-Orientador)

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto – UFPB
(Examinador Interno)

Esteban Pereira da Silva

Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva – UFPB
(Examinador Externo)

[1] O autor foi bolsista do(a) .... durante a elaboração desta dissertação.

A Deus e aos meus pais

Agradecimentos

A Deus por me ter dado a oportunidade de ter participado do curso de mestrado na UFPB.

Aos meus pais, por estarem incondicionalmente ao meu lado no inicial de meus estudos.

À minha esposa Walquiria por estar ao meu lado nos momentos mais difícil desta jornada.

Aos professores da equipe PROFMAT/UFPB, em especial aos meus orientadores Professor Doutor Flank Bezerra e a Professora Doutora Miriam Pereira, por alem de abraçarem e orientarem minha pesquisa, deram um curso a parte sobre como digitar no LaTeX.

Aos meus colegas, pelos momentos agradáveis como o café que o Mailson trazia de Cajazeira e ainda chegava quentinho, como as discussões intermináveis com o "curitiano" Rômulo pelas bolachas horríveis que o mesmo trazia e ainda queria que a gente comece, assim como os companheiros de estrada Gustavo, Osvaldo e Adim. entre outros momento e colegas que me falha a memória, porém muito marcante neste jornada da minha vida, abraços a todos.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos a noção de cortes de Dedekind motivados pelo estudo da equação polinomial $x^2 = 2$ no corpo dos números racionais. Introduzimos as operações de adição, multiplicação entre cortes, bem como, a noção de valor absoluto e uma relação de ordem entre cortes. Provamos que o conjunto dos cortes de Dedekind munido das operações de adição e multiplicação possui estrutura de corpo ordenado. Apresentamos a construção do corpo dos números reais explorando o fato de que o corpo dos cortes de Dedekind é ordenado e completo.

Palavras-chave: corpo dos números racionais, corpo dos números reais, cortes de Dedeking, corpos algébricos.

Abstract

In this work, we present the notion of Dedekind cuts motivated by the study of the polynomial equation $x^2 = 2$ in the fields of rational numbers. We introduce the operations of addition and multiplication between cuts, as well as the notion of absolute value and order relation between cuts. We prove that the set of Dedekind cuts equippaded with the operations of addition and multiplication is an ordered field. We present the construction of the field of the real numbers by exploring the fact that the field of the Dedekind cuts are ordered and complete.

Keywords: field of the ractional numbers, field of the real numbers, Dedekind cuts, algebraic fields.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{N}$: Denota o conjunto dos números naturais; saber, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z}$: Denota o conjunto dos números inteiros;
- $n!$: Denota o fatorial de um número inteiro não negativo n; a saber, $0! := 1$ e $n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$;
- $\mathbb{Q}_-$: Denota o conjunto dos números racionais não positivos;
- $\mathbb{Q}_-^*$: Denota o conjunto dos números racionais negativos;
- $\mathbb{Q}_+$: Denota o conjunto dos números racionais não negativos;
- $\mathbb{Q}_+^*$: Denota o conjunto dos números racionais positivos;
- $\mathbb{Q}$: Denota o corpo dos números racionais;
- $\mathbb{R}$: Denota o corpo dos números reais;
- $\mathbb{K}$: Denota um corpo algébrico qualquer;
- $A + B$: Denota o conjunto $\{a + b; a \in A, b \in B\}$, onde $A, B \subset \mathbb{Q}$;
- $A \cdot B$: Denota o conjunto $\{a \cdot b; a \in A, b \in B\}$, onde $A, B \subset \mathbb{Q}$;
- $(A \cdot B)_+$: Denota o conjunto $\{a \cdot b; a \in A, b \in B, a \geq 0, b \geq 0\}$, onde $A, B \subset \mathbb{Q}$;
- (A, B): Denota um corte de Dedekind;
- r^*: Denota o corte de Dedekind (A_r, B_r), onde $r \in \mathbb{Q}$, $A_r = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$ e $B_r = \{x \in \mathbb{Q}; r \leq x\}$;
- $\mathcal{C}$: Denota o conjunto de todos os cortes de Dedekind;
- $X \backslash Y$: Denota o completar do conjunto Y em relação ao conjunto X.

Introdução

É sabido que com os axiomas de Peano podemos introduzir na literatura o conjunto dos números naturais, e usando relações de equivalência sobre o conjunto dos números naturais podemos introduzir o conjunto dos números inteiros. Por conseguinte, usando relações equivalência sobre o conjunto dos números inteiros podemos introduzir o conjunto dos números racionais. Uma vez conhecida a noção de corpo abstrato arquimediano e ordenado, podemos constatar que o conjunto dos números racionais munido das operações de adição e multiplicação entre números racionais, possui estrutura de corpo arquimediano e ordenado. Para mais detalhes, veja [2] e [4].

Explorando o corpo dos números racionais, estudamos a equação $x^2 - 2 = 0$ e somos levados aos conjuntos de aproximações F, por falta, e E das aproximações por excesso da solução da equação $x^2 - 2 = 0$, onde

$$\begin{aligned} F &= \{1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \ldots\} \text{ e} \\ E &= \{2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; \ldots\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Provamos que não existe elemento máximo em F, nem elemento mínimo em E, e por conseguinte, provaremos que os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\} \text{ e} \\ Y &= \mathbb{Q} \backslash X = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ ou } y^2 > 2\} \end{aligned} \tag{2}$$

são tais que X não possui elemento máximo em $\mathbb{Q}$, nem Y elemento mínimo em $\mathbb{Q}$. Estes fatos, nos motivaram a definir os chamados cortes de Dedekind, nome em homenagem ao matemático alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind (Braunschweig, 6 de outubro de 1831 – Braunschweig, 12 de fevereiro de 1916) aluno de doutorado do matemático também alemão Carl Friedrich Gauss[2]; a saber, um corte de Dedekind é um par ordenado (A, B) de conjuntos de números racionais satisfazendo as seguintes condições:

(i) Os conjuntos A e B são ambos não vazios tais que $A \cup B = \mathbb{Q}$;

[2]Título da tese de doutorado: *Über die Theorie der Eulerschen Integrale* (1852), veja [7].

(*ii*) Todo elemento de A é estritamente menor que todo elemento de B;

(*iii*) O conjunto A não possui elemento máximo.

Consta na literatura que a motivação do Dedekind para a introdução dos cortes se dá pela preocupação do mesmo em deixar clara a ideia de número irracional, para mais detalhes veja [6]. Por exemplo, a análise sobre os conjuntos E e F em (1), e X e Y em (2), nos leva considerar o corte de Dedekind (A, B), onde

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2 \text{ ou } x \leq 0\} \text{ e} \\ B &= \{x \in \mathbb{Q}; x^2 > 2 \text{ e } x > 0\}. \end{aligned}$$

Veremos que (A, B) de fato é um corte de Dedekind no Capítulo 2 deste trabalho, e este corte nos levará a conceber o que hoje entendemos como o número real $\sqrt{2}$. A título de motivação, adiantamos que o cortes de Dedekind do tipo (A_r, B_r), onde $r \in \mathbb{Q}$, e

$$\begin{aligned} A_r &= \{x \in \mathbb{Q}; x < r\} \text{ e} \\ B_r &= \{x \in \mathbb{Q}; x \geq r\}. \end{aligned}$$

nos levará a conceber o que hoje entendemos como o número real do tipo racional. O corte de Dedekind (A, B), onde

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{Q} \backslash B \text{ e} \\ B &= \left\{x \in \mathbb{Q};\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < x \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

nos levará a conceber o que hoje entendemos como o número real e. O corte de Dedekind (A, B), onde

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{Q} \backslash B \text{ e} \\ B &= \left\{x \in \mathbb{Q};\ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 4\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} < x \text{ para todo } m \in \mathbb{N},\ m \geq n\right\} \end{aligned}$$

nos levará a conceber o que hoje entendemos como o número real π para maiores detalhes veja o Capítulo 2 deste trabalho.

No que decorrer do trabalho daremos exemplos de cortes de Dedekind, definiremos uma operação adição e uma operação entre cortes de Dedekind, e provaremos que o conjunto dos cortes munido destas duas operações possui estrutura de corpo algébrico. Em seguida, definiremos uma relação de ordem total entre os cortes e provaremos que o corpo dos cortes de Dedekind possui estrutura de corpo ordenado, e finalmente provaremos que o corpo dos cortes é completo. A partir daí, veremos que somos levados a existência do que hoje entendemos como o corpo dos números reais e ao apelo intuitivo geométrico que temos sobre este último corpo. Para a execução deste projeto seguimos [1], [2], [4] e [5].

O nosso trabalho está dividido em três capítulos, a saber:

No Capítulo 1 iniciamos relembrando a definição de corpos algébricos abstratos, corpos ordenados e corpos ordenados completos. Também estudamos a equação algébrica $x^2 - 2 = 0$ sobre o corpo dos números racionais.

No Capítulo 2 introduzimos o conceito de cortes de Dedekind, munimos o conjunto dos cortes de Dedekind de uma operação de adição e multiplicação, além de uma relação de ordem total.

Finalmente, no Capítulo 3 provamos que o conjunto dos cortes de Dedekind munido das operação de adição e multiplicação definidas no Capítulo 2 possui estrutura de corpo algébrico, terminamos este capítulo provando que o corpo dos cortes de Dedekind possui estrutura de corpo ordenado completo e introduzindo o corpo dos números reais.

Capítulo 1

Corpos algébricos abstratos

Neste capítulo, introduzimos a noção de corpos algébricos abstratos, corpos ordenados e corpos ordenados completos. Também estudamos a equação $x^2 = 2$ sob a ótica do corpo dos números racionais. As principais referências para a elaboração deste capítulo do trabalho foram [1] e [3].

1.1 Preliminares

Definição 1.1. Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio. Um corpo algébrico é um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ munido de duas operações $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, chamadas respectivamente de *adição* e *multiplicação*, tais que para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$, as seguintes propriedades são válidas:

(i) $a + b = b + a$;

(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$;

(iii) Existe um elemento em $\mathbb{K}$ denotado por 0, tal que $0 + a = a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{K}$. O elemento 0 é chamado o zero de $\mathbb{K}$;

(iv) Existe $-a \in \mathbb{K}$ tal que $a + (-a) = -a + a = 0$. O elemento $-a$ é chamado o simétrico aditivo de a;

(v) $a \cdot b = b \cdot a$;

(vi) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(vii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

(viii) Existe um elemento em $\mathbb{K}$ denotado por 1 tal que $1 \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$. O elemento 1 é chamado unidade de $\mathbb{K}$;

(ix) Para todo $a \neq 0$ em $\mathbb{K}$ existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{K}$, denominado inverso multiplicativo de a tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Quando a estrutura matemática constituída de um conjunto $\mathbb{K}$ munidos das operações $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ for um corpo algébrico, eventualmente, fazemos referência a este corpo simplesmente por $\mathbb{K}$ e o elemento $a \cdot b$, desde que $a, b \in \mathbb{K}$, é denotado, simplesmente por ab.

Observação 1.1. Seja qual for o corpo $\mathbb{K}$, observamos que existe um único elemento em $\mathbb{K}$ com a propriedade do elemento 0 definido no item (iii) da Definição 1.1. De fato, se existirem $0'$ e $0''$ elementos de $\mathbb{K}$ com a propriedade do item (iii) da Definição 1.1, devemos ter

$$0' = 0' + 0'' = 0'',$$

onde a primeira igualdade é válida porque $0''$ satisfaz o item (iii) da Definição 1.1, e a segunda igualdade é válida porque $0'$ satisfaz o item (iii) da Definição 1.1.

Observação 1.2. Existe um único elemento em $\mathbb{K}$ com a propriedade do simétrico aditivo de um elemento $a \in \mathbb{K}$. De fato, sejam $(-a)$ e $(-a^*)$ dois elementos de $\mathbb{K}$ com a propriedade do item (iv) da Definição 1.1, tais que $a + (-a) = 0$ e $a + (-a^*) = 0$. Temos, então:

$$(-a^*) = (-a^*) + 0 = (-a^*) + [a + (-a)] = [(-a^*) + a] + (-a) = 0 + (-a) = (-a).$$

Onde a primeira igualdade é valida, pois satisfaz o item (iii) da Definição 1.1, na passagem da segunda igualdade para a terceira utilizamos o item (ii) da Definição 1.1, e a ultima igualdade é válida porque satisfaz o item (iii) da Definição 1.1. Logo o elemento simétrico aditivo é único, como queríamos mostrar.

Observação 1.3. Existe um único elemento em $\mathbb{K}$ com a propriedade de ser a unidade de $\mathbb{K}$. De fato, se existirem $1'$ e $1''$ elementos de $\mathbb{K}$ com a propriedade do item (viii) da Definição 1.1, devemos ter

$$1' = 1'1'' = 1''$$

onde a primeira igualdade é válida porque $1''$ satisfaz o item (viii) da Definição 1.1, e a segunda igualdade é válida porque $1'$ satisfaz o item (viii) da Definição 1.1.

Observação 1.4. Para cada $a \in \mathbb{K}$ diferente de 0 existe um único inverso multiplicativo. De fato, Seja $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ e $a^{-1}, a_*^{-1} \in \mathbb{K}$ tais que $aa^{-1} = 1$ e $aa_*^{-1} = 1$. Assim,

$$aa^{-1} = aa_*^{-1} \Rightarrow (aa^{-1})a^{-1} = (aa_*^{-1})a^{-1} \Rightarrow a^{-1} = (aa^{-1})a_*^{-1} = a_*^{-1}.$$

Exemplo 1.1. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $+$ e $\cdot$ munido com as operações usuais de adição e multiplicação entre números racionais. Nestas condições $\mathbb{Q}$ é um corpo.

No exemplo acima, vimos que o conjunto dos números racionais munido das operações usuais de adiação e multiplicação entre números racionais constituem um corpo algébrico, é interessante notar que podemos considerar o conjunto dos números racionais contido em qualquer corpo algébrico $\mathbb{K}$, basta considerarmos a identificação: a unidade de um corpo $\mathbb{K}$ será identificado com o número 1, a soma da unidade do corpo $\mathbb{K}$ com ela mesma será identificado com o número 2, a soma da unidade do corpo $\mathbb{K}$ com o elemento do corpo $\mathbb{K}$ identificado com número 2 será identificado com o número 3, e seguindo com este argumento, podemos identificar um subconjunto de $\mathbb{K}$ com o conjunto dos inteiros positivos. Continuando, o elemento chamado o zero de $\mathbb{K}$ será identificado com o zero e se considerarmos o simétrico aditivo dos elementos de $\mathbb{K}$ identificamos com os inteiros positivos, podemos concluir que um subconjunto de $\mathbb{K}$ pode ser identificado com o conjunto dos inteiros, e portanto, seja qual for o corpo $\mathbb{K}$, temos:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}.$$

Finalmente, considerando o simétrico aditivo e inverso multiplicativo de todo elemento $a \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$ diferente de 0, a soma e multiplicação de dois qualquer destes elementos, bem como os elementos de $\mathbb{Z}$, podemos admitir que, seja qual for o corpo $\mathbb{K}$, temos:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}.$$

Mais precisamos, podemos provar o seguinte resultado. Embora não faremos a prova na integra aqui o argumento acima nos dá uma direção de como esta deve ser feita.

Teorema 1.1. *Existe uma função injetora $j : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todos $r, s \in \mathbb{Q}$ temos*

(a) $j(r + s) = j(r) + j(s)$;

(b) $j(-r) = -j(r)$;

(c) $j(rs) = j(r)j(s)$.

Exemplo 1.2. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[i] = \{a + ib; a, b \in \mathbb{Q},\ i^2 = -1\}$, $+$ e $\cdot$ as operações usuais de adição e multiplicação entre os elementos de $\mathbb{Q}[i]$; a saber, para todos $a + ib, c + id \in \mathbb{Q}[i]$, definimos

$$(a + ib) + (c + id) := a + c + i(b + d)$$

e

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + cb).$$

Exemplo 1.3. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; a_i \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$, $+$ e $\cdot$ as operações usuais de adição e multiplicação entre os elementos de $\mathbb{Q}[x]$; a saber, para todos $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Q}[x]$ com $m \leqslant n$, definimos

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$$
$$:= (0 + b_n)x^n + \cdots + (a_m + b_m)x^m + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

e

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \cdot (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$$
$$:= c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

onde

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

$$\vdots$$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0,\ k = 1, 2, 3, \ldots, m$$

$c_{m+1} = a_1 b_m + a_2 b_{m-1} + \cdots + a_n b_{m-n+1}$, $c_{m+2} = a_2 b_m + a_3 b_{m-2} + \cdots + a_n b_{m-n+2}, \ldots,$
$c_{m+n} = a_n b_m$.

Observamos que para cada termo da soma que gera c_k, a soma do índice de a com o índice de b sempre fornece o mesmo resultado de k.

Definição 1.2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo algébrico. Dizemos que $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado quando existir um conjunto $P \subset \mathbb{K}$, chamado o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{K}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:
(P_1) A soma e o produto de elementos positivos são positivos, ou seja,

$$x, y \in P \Rightarrow x + y \in P \text{ e } xy \in P.$$

(P_2) Dado $x \in \mathbb{K}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre:

$$\text{ou } x = 0,\ \text{ ou } x \in P,\ \text{ ou } -x \in P.$$

Assim, se indicarmos com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, temos $\mathbb{K} = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo os conjuntos P, $-P$ e $\{0\}$ dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ são chamados elementos negativos do corpo.

Observação 1.5. Em um corpo ordenado, se $a \neq 0$ então $a^2 \in P$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, ou $a \in P$ ou $-a \in P$. No primeiro caso $a^2 = aa \in P$. No segundo caso $a^2 = (-a)(-a) \in P$. Em particular, em um corpo ordenado $1 = 1 \cdot 1$ é sempre positivo. Assim $-1 \in -P$. portanto, em um corpo ordenado -1 não é quadrado de elemento algum.

Exemplo 1.4. O conjunto dos números racionais munido das operações usuais de adição e multiplicação entre números racionais é um corpo ordenado, no qual o conjunto P é formado pelos números racionais $\frac{p}{q}$ tais que $pq \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, isto significa que os inteiros p e q possuem o mesmo sinal.

No que segue, sempre que o corpo $\mathbb{K}$ for ordenado, o conjunto P será denotado por $\{x \in \mathbb{K}; 0 < x\}$, e denotamos

$$0 \leq x \Leftrightarrow 0 < x \text{ ou } x = 0.$$

Definição 1.3. Um conjunto $X \subset \mathbb{K}$ dizemos que X é limitado superiormente, quando existe algum $b \in \mathbb{K}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diremos que b é uma cota superior de X, analogamente, diremos que o conjunto $X \subset \mathbb{K}$ é limitado inferiormente, quando existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$, o número a chamaremos então uma cota inferior de X.

Definição 1.4. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $X \subset \mathbb{K}$ um conjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{K}$ chama-se *supremo* do conjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em $\mathbb{K}$.

Assim, para que $b \in \mathbb{K}$ seja supremo de um conjunto $X \subset \mathbb{K}$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

(S_1) Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

(S_2) Se $c \in \mathbb{K}$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$, então $c \leq b$.

Analogamente, um elemento $a \in \mathbb{K}$ chama-se ínfimo de um conjunto $Y \subset \mathbb{K}$, limitado inferiormente, quando a é a maior das cotas inferiores de $\mathbb{K}$. Para que $a \in \mathbb{K}$ seja ínfimo de $Y \subset \mathbb{K}$ é necessário e suficiente que as condições abaixo sejam satisfeitas:

(I_1) Para todo $y \in Y$ tem-se $y \leq a$;

(I_2) Se $c \in \mathbb{K}$ é tal que $c \leq y$ para todo $y \in Y$, então $c \leq a$.

Resulta da definição que, em um corpo ordenado completo, todo conjunto não vazio, limitado inferiormente, $X \subset \mathbb{K}$, possui ínfimo. Com efeito, dado Y seja $X = -Y$, isto é, $X = \{-y; y \in Y\}$. Então, X é não vazio e limitado superiormente; logo existe $a = supX$. Como se vê facilmente, tem-se $-a = inf\, Y$. De fato, seja $a = sup\, X$, existe $x \in X$ tal que $a \geq x$ então $-a \leq -x$, para todo $-x \in -X$. Então $-a$ é uma cota inferior para o conjunto $-X$, queremos mostrar que $-a$ é a maior das cotas inferiores de $-X$, como $a = sup\, X$ dado $\epsilon > 0$ tal que $a - \epsilon > x$ para todo $x \in X$, temos que $-a + \epsilon < -x$ para todo $-x \in -X$. Logo $-a = inf(-X)$, então: $-sup\, X = inf\, Y$.

Definição 1.5. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Dizemos que $\mathbb{K}$ é completo quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente $X \subset \mathbb{K}$ possui supremo em $\mathbb{K}$.

1.2 Planificando o problema do cubo

O seguinte problema nos motivará a definir no próximo capítulo os cortes de Dedekind, e estes serão utilizados no futuro para explicarmos a origem dos números reais.

Suponhamos que o corpo dos números racionais seja o maior, no sentido da inclusão, conjunto numérico conhecido. Vamos calcular a medida do lado de um quadrado, cuja área seja o dobro da área de um quadrado conhecido.

Consideramos um quadrado de lado a e seja x o lado do quadrado que se deseja determinar. Podemos traduzir matematicamente o problema com a equação

$$x^2 = 2a^2.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $a = 1$ e fixaremos nossa atenção na equação

$$x^2 = 2. \tag{1.1}$$

Afirmamos que a equação (1.1) não possui solução x em $\mathbb{Q}$, isto é, não existe racional x solução de (1.1). De fato, se existisse um racional $x = \frac{p}{q}$ com $q \neq 0$ e o máximo divisor comum de p e q é igual a um, logo p e q são primos entre si tal que

$$p^2 = 2q^2.$$

Então, p^2 é par, isto é, $p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$. Consequentemente, $4m^2 = 2q^2$ ou $q^2 = 2m^2$, isto implica que q^2 é par, isto é, q par. Portanto, p e q são pares o que conduz a uma contradição pois, por hipótese, eles são primos entre si.

Vamos analisar a (1.1) sob outro ponto de vista. Começaremos obtendo aproximações racionais da solução x de (1.1). Denominamos raiz quadrada de 2, a menos de uma unidade, por falta, ao maior número inteiro n tal que

$$n^2 < 2 < (n+1)^2. \tag{1.2}$$

O número $n+1$ é denominado de raiz quadrada de 2, a menos de uma unidade, por excesso, é claro que $n = 1$ em (1.2), implica que a solução de (1.1) satisfaz: $1 < x < 2$.

A seguir, fazemos aproximações decimais da solução x de (1.1), que se encontra entre 1 e 2. Denominamos raiz quadrada de 2 a menos de $\frac{1}{10}$ por falta, ao maior número inteiro de décimos cujo quadrado é menor do que 2, isto equivale a

$$\left(\frac{n}{10}\right)^2 < 2 < \left(\frac{n+1}{10}\right)^2.$$

O número $\frac{n+1}{10}$ é a raiz quadrada de 2 por excesso a menos de um décimo. Para o cálculo desta aproximação dividimos o segmento de reta [1, 2] em 10 partes iguais por meio dos pontos:

$$1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2.$$

Obtemos

$$(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2.$$

Assim, $1,4$ é a solução aproximada de (1.1) a menos de $\frac{1}{10}$ por falta e $1,5$ por excesso. Logo, a solução x da Equação (1.1) encontra-se no segmento de extremos $1,4$ e $1,5$.

Para obtermos das soluções aproximadas de (1.1) a menos de $\frac{1}{10^2}$ por falta e por excesso, dividimos o segmento de reta $[1,4; 1,5]$ em dez partes iguais por meio dos pontos:

$$1,4; 1,41; 1,42; 1,43; 1,44; 1,45; 1,46; 1,47; 1,48; 1,49; 1,5.$$

Procedemos como no caso anterior e obtemos:

$$(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2.$$

Isto é, $1,41$ é a solução de (1.1) a menos de $\frac{1}{100}$ por falta e $1,42$ por excesso. Logo, a solução x da Equação (1.1) encontra-se no intervalo da reta de extremos $1,41$ e $1,42$. Continuando o processo, de modo análogo aos casos acima, encontramos as soluções aproximadas a menos de

$$\frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \ldots, \frac{1}{10^n}.$$

Construímos os conjuntos de aproximações F, por falta e E, das aproximações por excesso da solução da Equação (1.1). Assim

$$F = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \ldots\} \tag{1.3}$$

e

$$E = \{2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; \ldots\}. \tag{1.4}$$

Os quadrados dos números de F são menores que 2 e os de E são maiores. De modo geral, os números de F são da forma: $1, a_1a_2 \ldots a_n$ e os de E, da forma, $1, a_1a_2 \ldots a_{(n+1)}$, sendo a_i um algarismo de 0 a 9. Portanto,

$$1, a_1a_2 \ldots a_n \ldots < x < 1, a_1a_2 \ldots a_{(n+1)} \ldots .$$

Representamos por x_n os elementos de F e por y_n os elementos de E, temos $x_n - y_n = \frac{1}{10^n}$ e $x_n < y_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Proposição 1.2. Dado $\delta = \frac{1}{10^k}, k = 1, 2, \ldots$, existem $x \in F$ e $y \in E$ tais que $y - x < \delta$.

Demonstração. De fato, seja $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^k}$. Logo, quaisquer $x_n \in F$ e $y_n \in E$, e com $n > k$ são tais que $y_n - x_n < \delta$ □

Proposição 1.3. Para cada $\delta = \frac{1}{10^k}$, k inteiro positivo, existem $x \in F$, $y \in E$, tais que $2x^2 < 2\delta$ e $y^2 < \delta$.

Demonstração. Como na Proposição 1.4, dado $\delta = \frac{1}{10^k}$ existem $x \in F$ e $y \in E$ tais que $yx < \frac{\delta}{4}$. Sendo x e y tais que $1 < x$ e $y < 2$, obtemos $y + x < 4$ e

$$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) < 4(y - x) < \delta.$$

De $x \in F$ e $y \in E$ resulta que $x^2 < 2$ e $2 < y^2$. Logo, adicionando e subtraindo 2 à desigualdade acima, encontramos $2y^2 + 2x^2 < \delta$, isto é $2y^2 < \delta$ e $2x^2 < \delta$. □

Proposição 1.4. Consideramos os conjuntos E e F definidos como em (1.3) e (1.4). Então não existe elemento máximo em F nem elemento mínimo em E.

Demonstração. De fato, para cada $x \in F$, aproximação por falta da solução da equação $x^2 = 2$, existe uma aproximação $x < x_1$ ainda por falta. O mesmo acontece com a classe E das aproximações por excesso da solução da equação $x^2 = 2$. □

Motivado pelos resultados obtidos acima concluímos que não existe solução racional para a Equação (1.1). Se consideramos os conjuntos

$$X = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

e

$$Y = \mathbb{Q}\backslash X = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ ou } y^2 > 2\}.$$

Como $x > 2$ o que implica $x^2 > 4$ e por conseguinte $x \notin X$, concluímos que $X \subset [0;2]$, logo X é um conjunto limitado de números racionais. Por outro lado, $Y \subset (0, +\infty)$, de modo que Y é limitado inferiormente. Mostraremos agora que não existem $sup\, X$ nem $inf\, Y$ em $\mathbb{Q}$. (É claro que existe $inf\, X = 0$, pois 0 é o menor elemento de X). Para isto, estabelecemos os seguintes fatos:

A) O conjunto X não possui elemento máximo. Com efeito, dado $x \in X$ (isto, é dado um número racional não negativo cujo quadrado é inferior a 2), tomamos um número racional $r < 1$ tal que $0 < r < \frac{2-x^2}{2x+1}$. Afirmamos que $x + r$ ainda pertence a X. Com efeito, de $r < 1$ segue-se $r^2 < r$. da outra desigualdade que r satisfaz, segue-se $r(2x + 1) < 2 - x^2$. Então,

$$(x + 2)^2 = x^2 + 2rx + r^2 < x^2 + 2rx + r = x^2 + r(2x + 1) < x^2 + 2 - x^2 = 2.$$

Assim, dado qualquer $x \in X$, existe um número maior, $x + r \in X$.

B) O conjunto Y não possui elemento mínimo. De fato, dado qualquer $y \in Y$, temos $y > 0$ e $y^2 > 2$. Logo podemos obter um número racional r tal que $0 < r < \frac{y^2-2}{2y}$. Então $2ry < y^2 - 2$ logo $(y - r)^2 = y^2 - 2ry + r^2 > y^2 - 2ry > 2$. Notemos também que $r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y}$, donde $r < y$, isto é, $y - r$ é positivo. Assim, dado $y \in Y$ arbitrário, podemos obter $y - r \in Y$, $y - r < y$.

C) Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$. com efeito, tem-se $x^2 < 2 < y^2$ e, portanto, $x^2 < y^2$. Como x e y são ambos positivos, conclui-se $x < y$. (A rigor, poderia ser $x = 0$, mas, neste caso, a conclusão $a < y$ é óbvia.)

Usando os fatos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ mostremos que, entre os números racionais, não existem $sup\, X$ nem $inf\, Y$.

Suponhamos, primeiro, que existisse $a = \sup\ X$. seria forçosamente $a > 0$. Não poderia ser $a^2 < 2$ porque isto obrigaria $a \in X$ e, então, a seria elemento máximo de X, que não existe, por **A** tão pouco poderia ser $a^2 < 2$, porque isto faria $a \in Y$. Como, em virtude de **B**, Y não possui elemento mínimo, existiria $b \in Y$, com $b < a$. Usando **C**, concluiríamos que $x < b < a$ para todo $x \in X$, o que contradiz ser $a = sup\, X$.

Assim, se existir $a = sup\, X$, então $a^2 = 2$, mas nenhum número racional existe com esta propriedade, de onde concluímos que em $\mathbb{Q}$ o conjunto X não possui supremo.

Um raciocínio inteiramente análogo, baseado nos fatos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, mostraria que o número $b = inf\, Y$, se existir, deve satisfazer $b^2 = 2$, e portanto, Y não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Ao mesmo tempo, estes argumentos mostram que, se existir um corpo no qual todo conjunto não vazio limitado superiormente possua supremo, existirá, nesse dito corpo, $a = sup\, X$, cujo quadrado, não podendo ser menor nem maior do que 2, deverá ser igual a 2, e escrevemos $a = \sqrt{2}$.

Observação 1.6. Note que se p é um número primo, então podemos considerar a equação

$$x^2 = p. \tag{1.5}$$

Usando um argumento análogo ao aplicado à equação (1.1) podemos concluir que a equação (1.5) também não admite solução no corpo dos números racionais.

Capítulo 2

Cortes de Dedekind

Neste capítulo, introduzimos a noção de cortes de Dedekind, uma relação de ordem entre cortes de Dedekind e uma operação de adição e uma operação de multiplicação entre cortes de Dedekind.

2.1 Definições básicas

Definição 2.1. Um corte de Dedekind é um par ordenado (A, B) de conjuntos de números racionais satisfazendo as seguintes condições:

(D_1) Os conjuntos A e B são ambos não vazios tais que $A \cup B = \mathbb{Q}$;

(D_2) Todo elemento de A é estritamente menor que todo elemento de B;

(D_3) O conjunto A não possui elemento máximo.

Dado um corte de Dedekind (A, B), o conjunto A é comumente denominado de conjunto minorante do corte e o conjunto B é comumente denominado de conjunto majorante do corte. Os elementos do conjunto minorante de um corte serão chamados de elementos minorante do corte de Dedekind, e os elementos do conjunto majorante de um corte de elementos majorantes do corte de Dedekind.

Definição 2.2. Sejam (A, B) e (D, E) cortes de Dedekind. Dizemos que (A, B) é igual (D, E) se, e somente se, o conjunto minorante de (A, B) for igual ao conjunto minorante de (D, E), isto é,

$$(A, B) = (D, E) \Leftrightarrow A = D.$$

Definição 2.3. Um corte (A, B) no qual o conjunto majorante não tem elemento mínimo e o conjunto minorante não tem elemento máximo em $\mathbb{Q}$ denomina-se um **corte irracional**.

Exemplo 2.1. Consideremos os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2 \text{ ou } x \leq 0\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 > 2 \text{ e } x > 0\}.$$

O par ordenado (A, B) é um corte de Dedekind. De fato, A e B são conjuntos não vazios e $A \cup B = \mathbb{Q}$, isto é, vale a condição (D_1) da Definição 2.1. Agora, provemos a condição(D_2) da Definição 2.1, ou seja, todo elemento de A é estritamente menor que todo elemento de B, pois se $a \in A$ e $b \in B$, logo $a^2 < 2$ ou $a \leq 0$, e $2 < b^2$ e $0 < b$. Então

$$a^2 < 2 < b^2 \Rightarrow a^2 < b^2 \Rightarrow |a| < b \Rightarrow -b < a < b,$$

e portanto, $a < b$. Finalmente, provemos a condição (D_3) da Definição 2.1 note que o conjunto A não tem elemento máximo, isto é, se $x \in A$, então existe y , $y \in A$, tal que $x < y$. De fato, seja $x = \frac{p}{q}$, e considere $y = \frac{np+1}{nq} \in A$, onde n é um inteiro positivo com que satisfaz a propriedade definida abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{(np+1)^2}{n^2q^2} < 2 &\Leftrightarrow n^2p^2 + 2np + 1 < 2n^2q^2 \\
&\Leftrightarrow (p^2 - 2q^2)n^2 + 2np + 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow n = \frac{-2p \pm \sqrt{(2p)^2 - 4(p^2 - 2q^2)1}}{2(p^2 - 2q^2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow n = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 - 4p^2 + 8q^2}}{2(p^2 - 2q^2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow n = \frac{-2p \pm 2q\sqrt{2}}{2(p^2 - 2q^2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow n = \frac{-p \pm q\sqrt{2}}{p^2 - 2q^2} < 0.
\end{aligned}$$

Notemos que $y \in A$, isto é, $0 \leq y$, $y \in \mathbb{Q}$ e $y^2 < 2$. De fato, como $x = \frac{p}{q} \in A$, temos, que $p^2 - 2q^2 < 0$. Logo, a desigualdade é verificada sempre que tomarmos $n > \max\left\{\frac{-p+q\sqrt{2}}{p^2-2q^2}, \frac{-p-q\sqrt{2}}{p^2-2q^2}\right\}$.

Proposição 2.1. A sequência de números racionais cujo termo geral é dado por $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ para $n \in \mathbb{N}$ é convergence. Além disso, seu limite não é número racional.

Demonstração. A convergência da sequência cujo termo geral é dado por $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ segue do fato de que para todo $k \geq 4$, temos

$$2^k \leq k!$$

para todo $n \geq 4$ (isto pode ser provado usando o Princípio de Indução Finita) e

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k}$$

o que implica, que a sequência cujo termo geral é dado por $\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!}$ para $n \in \mathbb{N}$ é monótona e limitada, e portanto, convergente, e assim é a sequência cujo termo geral é dado por $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. No que segue, denotaremos o limite desta sequência por e, e assim, podemos usar também a notação

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Para concluir a prova da proposição, suponha por absurdo que e seja um número racional; a saber, $e = \frac{m}{n}$, onde m e $n \neq 0$ são números inteiros e o máximo divisor comum entre m e n é igual a 1. Note que

$$\frac{m}{n} = \Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big) + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$$

e assim

$$0 < \frac{m}{n} - \Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big) + \cdots \\
&\leq \frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}\Big) + \cdots \\
&< \frac{1}{n}\frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos

$$0 < \frac{m}{n} - \Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big) < \frac{1}{n}\frac{1}{n!}$$

e portanto

$$0 < n!\Big(\frac{m}{n} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!}\Big) < \frac{1}{n} \leq 1,$$

mas isto é um absurdo porque

$$n!\Big(\frac{m}{n}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!}\Big)=(n-1)!(m-n)!-n!-\cdots-1\in\mathbb{Z}.$$

$\square$

Exemplo 2.2. Consideremos os conjuntos

$$A=\mathbb{Q}\backslash B$$

e

$$B=\Big\{x\in\mathbb{Q};\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<x \text{ para todo } n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

O par ordenado (A,B) é um corte de Dedekind. De fato, A e B são conjuntos não vazios e $A\cup B=\mathbb{Q}$, isto é, vale a condição (D_1) da Definição 2.1. Agora, provemos a condição(D_2) da Definição 2.1, ou seja, todo elemento de A é estritamente menor que todo elemento de B, pois se $a\in A$ e $b\in A$, então para todo $n\in\mathbb{N}$

$$a<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<b.$$

Finalmente, provemos a condição(D_3) da Definição 2.1. Se o conjunto A possuísse elemento máximo este deveria ser o limite da sequência de números racionais cujo termo geral é dado por $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, mas isto é absurdo porque este limite embora exista não é um número racional como provamos na Proposição 2.1.

Observação 2.1. Assumindo que que a sequência de números racionais cujo termo geral é dado por $4\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}$ para $n\in\mathbb{N}$ é convergente, bem como provar que o limite desta sequência não é um número racional (usando a teoria das séries de números reais e a teoria de integração a Riemann não é difícil de provar esta afirmação). A rigor, seria interessante não fazer estas suposições e sim demonstrar estes fato, mas até onde sabemos não há provas para a convergência da sequência de números racionais cujo termo geral é dado por $4\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}$, nem da irracionalidade de seu limite usando argumentos que não dependam da existência de um corpo algébrico que tenha estritamente o corpo dos números racionais. Feito isto, se consideramos os conjuntos

$$A=\mathbb{Q}\backslash B$$

e

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Q};\ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 4\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1} < x \text{ para todo } m \in \mathbb{N},\ m \geq n \right\}$$

então o par ordenado (A, B) é um corte de Dedekind, e isto pode ser constado usando um argumento similar ao usado no Exemplo 2.2.

Observação 2.2. O corte (A, B) dado no Exemplo 2.1 é um corte irracional. De maneira geral, se p é um número primo, então (D, E), onde

$$D = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < p \text{ ou } x \geq 0\},$$

e

$$E = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 > p \text{ e } x > 0\}$$

é um exemplo de corte irracional.

Definição 2.4. Um corte (A, B) no qual o conjunto majorante tem elemento mínimo denomina-se um **corte racional**.

Exemplo 2.3. Seja r um número racional. Consideramos os conjuntos

$$A_r = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$$

e

$$B_r = \{x \in \mathbb{Q}; r \leq x\}.$$

O par ordenado (A_r, B_r) é um corte de Dedekind, o qual será denotado por r^*. De fato, a condição (D_1) da Definição 2.1 é verificada, pois é claro que A_r e B_r são conjuntos não vazios. Dado um número racional arbitrário x, temos $x \in A_r$ ou $x \in B_r$, logo $A_r \cup B_r = \mathbb{Q}$.

Sejam $a \in A_r$ e $b \in B_r$, temos $a < r$ e $r \leq b$, portanto $a < b$, logo vemos que a condição (D_2) da Definição 2.1 é satisfeita. O mesmo ocorre com a condição (D_3) da Definição 2.1 pois o conjunto A_r não tem elemento máximo, onde se $a \in A_r$, então $a < \frac{a+r}{2} < r$ e $\frac{a+r}{2} \in A_r$.

Observamos que, todo corte racional (A, B) é determinado por um número racional. De fato, seja $r = min(B)$, provaremos $r^* = (A, B)$. Conforme a Definição 2.2, é suficiente mostrar que $A_r = A$. Seja $x \in A_r$, então $x \in \mathbb{Q}$ e $x < r$, já que, (A, B) é um corte de Dedekind, devemos ter $x \in A$. Reciprocamente, se $x \in A$, uma vez que (A, B) é um corte de Dedekind, pela condição (D_2) da definição 2.1 devemos ter $x < r$, logo $x \in A_r$.

2.2 Relação de ordem

A partir deste momento, denotamos por $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os cortes de Dedekind.

Definição 2.5. Sejam (A, B) e (D, E) cortes de Dedekind. Dizemos que (A, B) é menor do que (D, E) e escrevemos $(A, B) < (D, E)$, quando $D \backslash A \neq \emptyset$.

Exemplo 2.4. Vamos mostrar que o corte de Dedekind 3^* é menor do que o corte 5^*. De fato

$$3^* = (A_3, B_3), \text{ onde } A_3 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 3\},$$

e

$$5^* = (A_5, B_5), \text{ onde } A_5 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 5\},$$

o que implica que

$$A_5 \backslash A_3 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 5\} \backslash \{x \in \mathbb{Q}; x < 3\} \neq \emptyset.$$

Logo, como queríamos demostrar $3^* < 5^*$.

Exemplo 2.5. Vamos mostrar que o corte 2^* é menor do que o corte (A, B) dado no Exemplo 2.1. De fato

$$A_2 \backslash A = \{x \in \mathbb{Q}; x < 2\} \backslash \{x \in \mathbb{Q}_+^*; x^2 < 2 \text{ ou } x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{Q}; 0 < x^2 < 2\} \neq \emptyset$$

Logo, como queríamos demostrar $(A, B) < 2^*$, onde (A, B) é dado no Exemplo 2.1.

Exemplo 2.6. Seja r um número racional positivo. Vamos mostrar que 0^* é menor do que o corte r^*. De fato,

$$A_r \backslash A_0 = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\} \backslash \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\} = \{x \in \mathbb{Q}; 0 \leq x < r\} \neq \emptyset$$

Logo, como queríamos demostrar $0^* < r^*$.

Definição 2.6. Um corte de Dedekind (A, B) é chamado corte positivo se $0^* = (A_0, B_0) < (A, B)$. Agora, se $(A, B) \in \mathcal{C}$ é tal que $(A, B) < 0^*$, o corte (A, B) é chamado corte negativo.

Teorema 2.2. *(Tricotomia) Dados (A, B) e (D, E) cortes de Dedekind. Apenas uma, e somente uma, das afirmações a seguir é verdadeira*

$$\text{ou } (A, B) = (D, E) \text{ ou } (A, B) < (D, E) \text{ ou } (D, E) < (A, B).$$

Demonstração. Note que, se $(A,B)=(D,E)$, então pela Definição 2.2 $A=D$, e assim $A\backslash D=\emptyset$ e $D\backslash A=\emptyset$ o que impossibilita $(A,B)<(D,E)$ e $(D,E)<(A,B)$ de ocorrerem.

Suponhamos agora que as possibilidades $(A,B)<(D,E)$ e $(D,E)<(A,B)$ ocorram simultaneamente, então $D\backslash A=\emptyset$ e $A\backslash D$, logo existem $d\in D\backslash A$ e $a\in A\backslash D$, e consequentemente $d\in D$ e $a\notin D$, o que implica $d<a$, logo se $a\in A$ e $d\notin A$, o que é absurdo.

Logo, concluímos que no máximo uma das três possibilidade ocorre. Finalmente, provaremos agora que uma delas necessariamente ocorre. Sabemos que

$$\text{ou } (A,B)=(D,E) \text{ ou } (A,B)\neq(D,E).$$

No caso em que $(A,B)=(D,E)$ nada a provar. Agora, se $(A,B)\neq(D,E)$, então pela Definição 2.2, devemos ter $A\neq D$, o que implica que ou $A\backslash D\neq\emptyset$ ou $D\backslash A\neq\emptyset$.

Se $A\backslash D\neq\emptyset$ então $(D,E)<(A,B)$ e se $D\backslash A\neq\emptyset$ então $(A,B)<(D,E)$. □

Definição 2.7. Sejam (A,B) e (D,E) cortes de Dedekind. Dizemos que (A,B) é menor ou igual ao (D,E) e escrevemos $(A,B)\leq(D,E)$, quando $(A,B)<(D,E)$ ou $(A,B)=(D,E)$.

Proposição 2.3. Sejam $(A,B),(D,E)$ e (F,G) cortes de Dedekind. A relação 'menor ou igual a' satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(A,B)\leq(A,B)$;

(ii) Se $(A,B)\leq(D,E)$ e $(D,E)\leq(A,B)$, então $(A,B)=(D,E)$;

(iii) Se $(A,B)\leq(D,E)$ e $(D,E)\leq(F,G)$, então $(A,B)\leq(F,G)$.

Demonstração. (i) Seja $(A,B)\in\mathcal{C}$ já que $A=A$ temos $(A,B)=(A,B)$ e, portanto, $(A,B)\leq(A,B)$;

(ii) Sejam$(A,B),(D,E)\in\mathcal{C}$ com $(A,B)\leq(D,E)$ e $(D,E)\leq(A,B)$. Se fosse $(A,B)\neq(D,E)$, pelo Teorema 2.2 deveríamos ter ou $(A,B)<(D,E)$, ou $(D,E)<(A,B)$, caso $(A,B)<(D,E)$ fosse a única afirmação verdadeira, concluiríamos que $(D,E)<(A,B)$ e $(A,B)=(D,E)$ são falsas, logo, não valeria $(D,E)\leq(A,B)$, o que é um absurdo. O mesmo argumento pode ser usado caso admitíssemos que $(D,E)<(A,B)$ fosse a única afirmação verdadeira.
Logo, $(A,B)=(D,E)$;

(iii) Sejam $(A,B)\leq(D,E)$ e $(D,E)\leq(F,G)$. Se fosse $(F,G)<(A,B)$, teríamos $A\backslash F\neq\emptyset$, ou seja, existiria $a\in A$ e $a\notin F$. Por conseguinte poderíamos concluir que: se $a \in D$, então $D \backslash F \neq \emptyset$, logo $(F,G) < (D,E)$, o que contraria o fato de que $(D,E) \leq (F,G)$.

Por outro lado, se $a \notin D$, então $A \backslash D \neq \emptyset$, logo $(D,E) < (A,B)$, o que contraria o fato de que $(A,B) \leq (D,E)$. Logo, $(A,B) \leq (F,G)$. □

Teorema 2.4. *O conjunto dos cortes de Dedekind da forma (A_n, B_n) com $n \in \mathbb{N}$ é ilimitado superiormente em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. De fato, suponha por absurdo que o conjunto dos cortes de Dedekind da forma (A_n, B_n) com $n \in \mathbb{N}$ é limitado superiormente, isto é, existe um corte $(A,B) \in \mathcal{C}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$(A_n, B_n) \leq (A,B).$$

Isto implica que, $A \backslash A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas isto é absurdo. □

2.3 Operações de adição e multiplicação entre cortes de Dedekind

Nesta seção, definimos no conjunto de todos os cortes de Dedekind, operações de adição e multiplicação, que vão dar ao conjunto $\mathcal{C}$ a estrutura de corpo.

Teorema 2.5. *Sejam (A,B) e (D,E) cortes de Dedekind. O par ordenado de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ definido por*

$$(F,G) = (A,B) + (D,E) := (A + D, (A+D)^c),$$

onde

$$A + D = \{a + d; a \in A \text{ e } d \in D\}$$

e

$$(A+D)^c = \mathbb{Q} \backslash (A+D)$$

é um corte de Dedekind.

Demonstração. Mostraremos que (F,G) satisfaz as três condições da Definição 2.1.

Já que $A \cup B = D \cup E = \mathbb{Q}$ e $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$ e $E \neq \emptyset$, devemos ter $A + D \neq \emptyset$. Sejam $b \in B$ e $e \in E$, então $b + e \in B + E$. Notemos que para todo $a \in A$ e $d \in D$, temos $a < b$ e $d < e$, portanto para todo $a + d \in A + D$, o que implica em $a + d < b + e$, logo $b + e \notin A + D$ o que implica que $b + e \in (A+D)^c$.

Além disso, $(A+D)\cup(A+D)^c = \mathbb{Q}$. E, portanto, a condição (D_1) da Definição 2.1 é válida, e o argumento usado acima também garante que a condição (D_2) da Definição 2.1 é valida. Finalmente, já que os conjuntos A e D não possuem elementos máximos, o conjunto $A+D = \{a+d; a \in A, d \in D\}$ também não possui elemento máximo, logo satisfazendo a condição (D_3) da Definição 2.1. □

Definição 2.8. Sejam (A, B) e (D, E) cortes de Dedekind não negativos. Definiremos a adição $(A, B) + (D, E)$ como sendo o corte de Dedekind (F, G) definido no Teorema 2.5.

Exemplo 2.7. Neste exemplo vamos mostrar que a adição dos cortes de Dedekind 2^* e 5^* é igual ao corte de Dedekind 7^*. De fato, como

$$2^* = (A_2, B_2) \text{ onde } A_2 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 2\}$$

e

$$5^* = (A_5, B_5) \text{ onde } A_5 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 5\}$$

somando os conjuntos A_2 e A_5, obtemos o conjunto A_7, e já que $\mathbb{Q}\setminus A_7 = B_7$ obtemos a igualdade de cortes $(A_2, B_2) + (A_5, B_5) = (A_7, B_7)$ em outras palavras, temos

$$2^* + 5^* = (A_7, B_7) = 7^*,$$

pois $A_r^c = B_r$.

Mais geralmente, temos

Exemplo 2.8. Dados r e s números racionais, então

$$r^* + s^* = s^* + r^* = (r+s)^*.$$

De fato,

$$A_r + A_s = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\} + \{x \in \mathbb{Q}; x < s\} = \{x \in \mathbb{Q}; x < r+s\} = A_{r+s}.$$

e

$$A_s + A_r = \{x \in \mathbb{Q}; x < s\} + \{x \in \mathbb{Q}; x < r\} = \{x \in \mathbb{Q}; x < s+r = r+s\} = A_{r+s}.$$

Em particular, concluímos que o corte $0^* = (A_0, B_0)$ é um elemento neutro da adição.

Teorema 2.6. *Sejam (A, B), (D, E) e (F, G) cortes de Dedekind. As seguintes propriedades são válidas.*

(i) *(Comutatividade)* $(A, B) + (D, E) = (D, E) + (A, B)$;

(ii) *(Associatividade)* $[(A, B) + (D, E)] + (F, G) = (D, E) + [(A, B) + (F, G)]$.

(iii) *(Existência e unicidade do elemento neutro da adição) O corte* $0^* = (A_0, B_0)$ *é o único corte tal que*

$$0^* + (A, B) = (A, B) + 0^* = (A, B).$$

Demonstração. Prova do item (i). Basta notar que

$$\begin{aligned}(A, B) + (D, E) &= (\{a + d; a \in A \text{ e } d \in D\}, \{a + d; a \in A \text{ e } d \in D\}^c)\\ &= (\{d + a; a \in A \text{ e } d \in D\}, \{d + a; a \in A \text{ e } d \in D\}^c)\\ &= (D, E) + (A, B).\end{aligned}$$

Prova do item (ii). Basta notar que

$$(A, B) + (D, E) = (\{a + d; a \in A \text{ e } d \in D\}, \{a + d; a \in A \text{ e } d \in D\}^c)$$

e

$$\begin{aligned}&[(A, B) + (D, E)] + (F, G)\\ &= (\{(a + d) + f; a \in A, d \in D \text{ e } f \in F\}, \{(a + d) + f; a \in A, d \in D \text{ e } f \in F\}^c)\\ &= (\{a + (d + f); a \in A, d \in D \text{ e } f \in F\}, \{a + (d + f); a \in A, d \in D \text{ e } f \in F\}^c)\\ &= (D, E) + [(A, B) + (F, G)]\end{aligned}$$

e isto encerra a demonstração.

Prova do item (iii). Basta notar que o elemento neutro da adição é único, para isto suponha que (O, U) é um elemento da adição, então usando o Exemplo 2.8 temos

$$(O, U) = 0^* + (O, U) = (O, U) + 0^* = 0^*. \quad \square$$

Definição 2.9. Sejam (A, B) e (D, E) cortes de Dedekind não negativos. Definiremos a multiplicação entre os cortes (A, B) e (D, E) da seguinte forma

$$(A, B) \cdot (D, E) = ((A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-, [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-]^c),$$

onde

$$(A \cdot D)_+ = \{ad;\ a \in A,\ d \in D,\ a \geq 0,\ d \geq 0\},$$

e

$$\mathbb{Q}_-^* = \{r \in \mathbb{Q};\ r < 0\}.$$

Exemplo 2.9. Vamos mostrar neste exemplo a seguinte multiplicação entre cortes de Dedekind

$$2^* \cdot 3^* = 6^*$$

como $2^* = (A_2, B_2)$ e $3^* = (A_3, B_3)$ temos que:

$$(A_2 \cdot A_3)_+ \cup \mathbb{Q}_-^* = \{r \in \mathbb{Q};\ r < 0 \text{ ou } r < 6\} = A_6 \Rightarrow 2^* \cdot 3^* = (A_6, B_6) = 6^*.$$

Teorema 2.7. *Sejam (A, B) e (D, E) cortes de Dedekind não negativos. O par ordenado de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ definido por*

$$(F, G) = (A, B) \cdot (D, E) := ((A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*, [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*]^c),$$

onde

$$(A \cdot D)_+ = \{a \cdot d; a \in A, d \in D,\ a \geq 0,\ d \geq 0\} \text{ e } \mathbb{Q}_-^* = \{r \in \mathbb{Q}; r < 0\}$$

e

$$[(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*]^c = \mathbb{Q} \backslash [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*]$$

é um corte de Dedekind.

Demonstração. (i) Primeiramente, provaremos a propriedade D_1 da Definição 2.1, que $F = (A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*$ e $G = [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*]^c$ são conjuntos não vazios e $F \cup G = \mathbb{Q}$.

Notemos que $F \neq \emptyset$, porque $\mathbb{Q}_-^* \neq \emptyset$ e além disso,

$$G = [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*]^c = (A \cdot D)_+^c \cap (\mathbb{Q}_-^*)^c = (A \cdot D)_+^c \cap \{r \in \mathbb{Q};\ 0 \leq r\}.$$

Sendo $0^* \leq (A, B)$ e $0^* \leq (D, E)$, temos que $A \backslash A_0 \neq \emptyset$ ou $A = A_0$ e $D \backslash A_0 \neq \emptyset$ ou $D = A_0$, logo existem $a \in \mathbb{Q}$ com $0 \leq a$ e $d \in \mathbb{Q}$ com $0 \leq d$ isto é, $0 \leq ad$. Sendo $B \neq \emptyset$ e $E \neq \emptyset$, tomamos $b \in B$ e $c \in E$ e notemos que $bc \in B \cdot E \subset (A \cdot D)^c$.

Além disso, se escolhermos $b \in B$ com $0 \leq a < b$ e $0 \leq d < e$ (devido a propriedade D_2 da Definição 2.1) devemos ter $0 \leq be$, e portanto

$$be \in (A \cdot D)_+^c \cap \{r \in \mathbb{Q}; 0 \leq r\} = G, \text{ e assim } G \neq \emptyset.$$

Finalmente $F \cup G = [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*] \cup [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*]^c = \mathbb{Q}$.

(ii) provaremos a propriedade D_2 da Definição 2.1. Sejam $f \in (A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^* = F$ e $g \in [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*]^c = G$, devemos provar que para todo $f \in F$ e $g \in G$ devemos ter $f < g$.

Notamos que $g \in [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*]^c = (A \cdot D)_+^c \cap \{r \in \mathbb{Q};\ r \geq 0\}$. Se $f \in \mathbb{Q}$ e $f < 0$, sendo $g \in \mathbb{Q}$ e $g \geq 0$, temos $f < g$.

Por outro lado, se $f \in (A \cdot D)_+$, então $f = ad$, onde $a \in A$ e $d \in D$, e sendo $g \in (A \cdot D)_+^c$, então $g = be$, onde $b \in A^c = B$ ou $e \in E^c = D$. Daí pela definição 2.1, em um corte de dedekind (A, B) temos que para todo $a \in A$ e $b \in B$ temos que $a < b$, o mesmo para o corte de Dedekind (D, E) para todo $d \in D$ e $e \in E$, temos que $ad < be$ com $ad \in F$ e $be \in G$ para o corte de Dedekind (F, G). Então para todo elemento $f \in F$ é menor que $g \in G$, ou seja $f < g$.

(iii) Agora provaremos a propriedade (D_3) da Definição 2.1, que o conjunto $F = (A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}_-^*$ não possui elemento máximo. Suponha, por absurdo que o conjunto F tenha um elemento máximo m. Note que o m não pertence a $\mathbb{Q}_-^*$ pois qualquer elemento $x \in \mathbb{Q}_-^*$ é estritamente negativo e, como os elementos de A e D são positivos segue que qualquer $f \in (A \cdot D)_+$ tambem é positivo e, portanto, $x < f$.

Logo, se m existir temos que $m \in (A \cdot D)_+$. Assim, existem $a \in A$ e $d \in D$ tal que $m = ad$. Afirmação, a deve ser o elemento máximo de A (caso análogo para $d \in D$). Suponhamos que exista $a' \in A$ tal que $a < a'$. Então tomando $d \in D$ temos $ad < a'd$, isto é, $m < a'd$, o que é uma contradição com o fato de m ser elemento máximo de $(A \cdot D)_+$. □

Definição 2.10. Sejam (A, B) e (D, E) cortes de Dedekind não negativos. Definimos a multiplicação $(A, B) \cdot (D, E)$, ou simplesmente $(A, B)(D, E)$, como sendo o corte (F, G) definido no Teorema 2.7.

Exemplo 2.10. Veremos neste exemplo a seguinte multiplicação entre cortes de Dedekind,

$$2^* \cdot 4^* = 8^*$$

como $2^* = (A_2, B_2)$ e $4^* = (A_4, B_4)$ pela Definição 2.9 temos

$$(A_2 \cdot A_4)_+ = \{ab;\ a \in A_2,\ b \in B_4,\ a \geq 0,\ b \geq 0\} \cup \mathbb{Q}_-^* = A_8$$

e como $B_8 = A_8^c$ logo temos que :

$$2^* \cdot 4^* = (A_2, B_2)(A_4, B_4) = (A_8, B_8) = 8^*.$$

Observação 2.3. Para definir multiplicação entre cortes de Dedekind, que contêm fatores negativos, introduzimos a noção de valor absoluto de um corte de Dedekind, similar à definição de módulo de um número inteiro.

Proposição 2.8. Seja (A, B) um corte de Dedekind. Consideramos equação

$$X + (A, B) = 0^*, \text{ onde } 0^* = (A_0, B_0). \tag{2.1}$$

Então, existe um único corte de Dedekind (D, E) que é solução da equação (2.1), onde

$$D := \{r \in \mathbb{Q}; -r \notin A \text{ e } -r \text{ não é cota superior mínima de A}\}$$

e

$$E = D^c.$$

No que segue, o corte de Dedekind (D, E) será denotado por $-(A, B)$.

Demonstração. Inicialmente, vamos provar que (D, E) é um corte de Dedekind. De fato, para condição (D_1) da Definição 2.1 note que como A e B são conjuntos não vazios segue que existem racionais r, s tais que $r \in A$ e $s \notin A$, isto é $-r \notin D$ e $-s \in D$. Logo D e E são não vazios e $D \cup E = \mathbb{Q}$. Agora, sejam $r \in D$ e $e \in E$. Então, $-r \in B$ e não é cota superior mínima de A e $-e \in A$. Como (A, B) é um corte obtemos $-e < -r$, isto é, $r < e$ donde segue a Propriedade (D_2) da Definição 2.1.

Para a propriedade (D_3) da Definição 2.1 seja $d \in D$ vamos mostrar que existe $s \in D$ tal que $d < s$. Como $-d$ é cota superior de A mas não é mínima, então existe $t \in \mathbb{Q}$, $-t < -d$, tal que $-t$ é cota superior de A e, portanto, $-t \notin A$. Seja $s = \frac{r+t}{2}$, assim $-t < -s < -r$, de modo que $-s$ é cota superior de A mas não é mínima, logo $s \in D$ e $r < s$,.

Vamos provar agora que o corte (D, E) é solução da equação (2.1). De fato

$$A + D = \{r \in \mathbb{Q}; r < 0\} = A_0,$$

pois $-r \in B$ para todo $r \in D$ e $a < -r$ para todos $a \in A$ e $r \in D$. Portanto,

$$(A, B) + (D, E) = (A_0, B_0) = 0^*.$$

Finalmente, vamos provar que (D, E) é a única solução da equação (2.1). Suponhamos que (D', E') também é solução da equação (2.1), assim

$$\begin{aligned}(D', E') &= (D', E') + 0^* \\ &= (D', E') + [(D, E) + (A, B)] = \\ &= (D', E') + [(A, B) + (D, E)] = \\ &= [(D', E') + (A, B)] + (D, E) = \\ &= 0^* + (D, E) \\ &= (D, E).\end{aligned}$$

e isto encerra a demonstração. $\square$

Lema 2.9. Se (A, B) é um corte de Dedekind negativo, então $-(A, B)$ é um corte de Dedekind positivo, isto é, $0^* < -(A, B)$.

Demonstração. Seja $(D, E) = -(A, B)$. Se (A, B) é um corte de Dedekind negativo, então $A_0 \backslash A \neq \emptyset$, ou seja, existe $a < 0$ com $a \notin A$. Para constatar que $D \backslash A_0 \neq \emptyset$, basta notar que $a = -(-a) \in B$ e que existe em B elemento menor do que a (caso contrário, a seria elemento mínimo de B), isto implica que $-a \in D$ e $-a > 0$. Logo, $0^* < (D, E)$. $\square$

Observação 2.4. É sábido que a soma de cortes de Dedekind é um corte de Dedekind, por simplicidade de notação, se (A, B) e (D, E) forem cortes de Dedekind, denotaremos a soma $(A, B) + [-(D, E)]$ simplesmente por $(A, B) - (D, E)$. Desta forma, usando o Teorema 2.6, temos

$$-(A, B) + (D, E) = (D, E) + [-(A, B)] = (D, E) - (A, B).$$

Definição 2.11. A cada corte de Dedekind (A, B) associamos um corte de Dedekind $|(A, B)|$ que chamamos valor absoluto de (A, B), definido por

$$|(A, B)| = \begin{cases} (A, B), & \text{se } 0^* \leq (A, B), \\ -(A, B), & \text{se } (A, B) < 0^*. \end{cases}$$

Com isso, usando o Lemma 2.9 podemos concluir que o corte valor absoluto é sempre um corte não negativo.

Exemplo 2.11. Vejamos que

$$|2^*| = 2^*,$$

porque $2^* = (A_2, B_2)$, onde $A_2 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 2\}$ e $0^* = (A_0, B_0)$, com

$A_0 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\}$. Como

$$A_2 \setminus A_0 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 2\} \setminus \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\} = \{x \in \mathbb{Q};\, 0 \leq x < 2\}$$

então $0^* < 2^*$, e portanto $|2^*| = 2^*$.

Proposição 2.10. Sejam $(A, B), (D, E)$ e (F, G) cortes de Dedekind. As seguintes afirmações são verdadeiras.

(i) $-[-(A, B)] = (A, B)$;

(ii) $|(A, B)| = |-(A, B)|$;

(iii) $(A, B) - [-(D, E)] = (A, B) + (D, E)$;

(iv) $-(A, B) - (D, E) = -[(A, B) + (D, E)]$;

Demonstração. Prova do item (i). Basta notar que

$$(A, B) + [-(A, B)] = -(A, B) + (A, B) = 0^*$$

e portanto, $(A, B) = -[-(A, B)]$.

Prova do item (ii). Sendo (A, B) um corte de Dedekind, temos

$$|-(A, B)| = \begin{cases} -(A, B), & \text{se } 0^* \leq -(A, B), \\ (A, B), & \text{se } -(A, B) < 0^*. \end{cases}$$

Usando o Lema 2.9 e fato de que $|0^*| = 0^* = -0^*$, concluímos que

$$|-(A, B)| = \begin{cases} (A, B), & \text{se } 0^* < (A, B), \\ -(A, B), & \text{se } (A, B) \leq 0^*. \end{cases}$$

Prova do item (iii). Basta notar que $-[-(D, E)] = (D, E)$.

Prova do item (iv). Basta notar que

$$-(A, B) - (D, E) + [(A, B) + (D, E)] = 0^*.$$

e isto encerra a demonstração. □

Definição 2.12. Sejam (A, B) e (D, E) cortes de Dedekind. Definiremos, o produto entre os cortes (A, B) e (D, E) como sendo:

$$(A,B)\cdot(D,E)=\begin{cases}-(|(A,B)||(D,E)|), & \text{se } (A,B)<0^* \text{ e } 0^*\leq(D,E);\\ -(|(A,B)||(D,E)|), & \text{se } 0^*\leq(A,B) \text{ e } (D,E)<0^*;\\ |(A,B)||(D,E)|, & \text{se } (A,B)<0^* \text{ e } (D,E)<0^*.\end{cases}$$

Às vezes, denotaremos o corte de Dedekind $(A, B)\cdot(D, E)$ simplesmente por $(A, B)(D, E)$.

Exemplo 2.12. Vamos dar dar um exemplo de multiplicação entre cortes de sinais diferentes, tal que

$$2^* \cdot (-3)^* = -6^*$$

como já mostramos que $|2^*| = 2$ e $|(-3)^*| = 3^*$, porque $3^* = (A_3, B_3)$, onde

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 3\} \text{ e } 0^* = (A_0, B_0), \text{ com } A_0 = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0\}.$$

Assim

$$A_3 \setminus A_0 = \{x \in \mathbb{Q}; x < 3\} \setminus \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\} = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 \leq x < 3\},$$

e temos que $0^* < 3^*$, e portanto $|3^*| = 3^*$. Logo, sabemos $0^* < 2$ e $(-3)^* < 0^*$, então

$$2^* \cdot (-3)^* = -|2^*||(-3^*)| = -2^* \cdot 3^* = -6^*.$$

Já que definimos a adição e multiplicação para os cortes de Dedekind podemos afirmar que:

Lema 2.11. Sejam (A, B) e (D, E) cortes de Dedekind. Então as seguintes propriedades são válidas.

(i) Se (A, B) e (D, E) são cortes de Dedekind negativos, então o corte de Dedekind $(A, B) + (D, E)$ negativo;

(ii) Se (A, B) e (D, E) são cortes de Dedekind negativos, então o corte de Dedekind $(A, B)(D, E)$ positivo;

(iii) Se (A, B) é um corte de Dedekind negativo e (D, E) é um corte de Dedekind positivo, então o corte de Dedekind $(A, B)(D, E)$ negativo

(iv) Se (A, B) e (D, E) são cortes de Dedekind positivos, então o corte de Dedekind $(A, B) + (D, E)$ positivo;

Demonstração. Prova do item (i). Sendo (A, B) e (D, E) são cortes de Dedekind negativos, existem $a < 0$ com $a \notin A$ e $d < 0$ com $d \notin D$, então $a+d < 0$ e $a+d \in A+D$, o que significa que $A_0 \backslash (A + D) \neq \emptyset$.

Prova do item (ii). Segue imediatamente da Definição 2.12.

Prova do item (iii). Segue imediatamente da Definição 2.12, Proposição 2.10 e do item (ii).

Prova do item (iv). Segue imediatamente do Lema 2.9 e item (i). □

Teorema 2.12. *Sejam $(A, B), (D, E)$ e (F, G) cortes de Dedekind. Então as seguintes propriedades são válidas.*

(i) *se $(A, B) < (D, E)$ e $(D, E) < (F, G)$, então $(A, B) < (F, G)$;*

(ii) *Se $(A, B) < (D, E)$, então $(A, B) + (F, G) < (A, B) + (F, G)$;*

(iii) *Se $(A, B) < (D, E)$, e $0^* < (F, G)$, então $(A, B)(F, G) < (D, E)(F, G)$;*

(iv) *Se $(A, B) < (D, E)$, e $(F, G) < 0^*$, então $(D, E)(F, G) < (A, B)(F, G)$.*

Demonstração. Nesta demonstração denotaremos por $\mathcal{P}$ o conjunto dos elementos positivos da coleção dos cortes de Dedekind.

(i) Dizer $(A, B) < (D, E)$ e $(D, E) < (F, G)$ significa que, $(D, E) - (A, B) \in \mathcal{P}$ e $(F, G) - (D, E) \in \mathcal{P}$. Logo

$$[(F, G) - (D, E)] + [(D, E) - (A, B)] \in \mathcal{P},$$

ou seja, $(F, G) - (A, B) \in \mathcal{P}$, o que significa $(A, B) < (F, G)$.

(ii) Se $(A, B) < (D, E)$, então $(D, E) - (A, B) \in \mathcal{P}$, onde

$$[(D, E) + (F, G)] - [(A, B) + (F, G)] = (D, E) - (A, B) \in \mathcal{P},$$

e isto significa que $[(A, B) + (F, G)] < [(D, E) + (F, G)]$.

(iii) Se $(A, B) < (D, E)$ e $0^* < (F, G)$, então $(D, E) - (A, B) \in \mathcal{P}$ e $(F, G) \in \mathcal{P}$. Logo

$$[(D, E) - (A, B)](F, G) \in \mathcal{P},$$

isto é $(D, E)(F, G) - (A, B)(F, G) \in \mathcal{P}$, o que significa $(A, B)(F, G) < (D, E)(F, G)$.

(iv) Se $(A, B) < (D, E)$ e $(F, G) < 0^*$, então $(D, E) - (A, B) \in P$ e $-(F, G) \in \mathcal{P}$, e por conseguinte,

$$[(D, E) - (A, B)][-(F, G)] \in \mathcal{P},$$

isto é

$$(A, B)(F, G) - (D, E)(F, G) \in \mathcal{P},$$

o que significa $(D, E)(F, G) < (A, B)(F, G)$. $\square$

Capítulo 3

O corpo dos números reais

Neste capítulo, provamos que o conjunto dos cortes de Dedekind, munido das operações de adição e multiplicação definidas no Capítulo 2 é um corpo algébrico, conforme a definição apresentada no Capítulo 1.

3.1 Corpo ordenado completo

Esta seção é dedicada a provar que o conjunto de cortes é um corpo ordenado completo. Como no Capítulo 2, denotamos por C o conjunto de todos os cortes de Dedekind.

Teorema 3.1. *Sejam $(A, B), (D, E)$ e (F, G) cortes de Dedekind. Então, as seguintes afirmações são válidas.*

(i) *(Comutatividade da adição) $(A, B) + (D, E) = (D, E) + (A, B)$;*

(ii) *(Associatividade da adição) $(A, B)+[(C, D)+(F, G)] = [(A, B)+(C, D)]+(F, G)$;*

(iii) *(Existência e unicidade do elemento neutro da adição) O corte $0^* = (A_0, B_0)$ é o único corte tal que*

$$0^* + (A, B) = (A, B) + 0^* = (A, B).$$

(iv) *(Existência e unicidade do elemento simétrico da adição) Para todo corte (A, B) existe o corte $-(A, B)$ definido na Proposição 2.8, tal que*

$$(A, B) + [-(A, B)] = -(A, B) + (A, B) = 0^*.$$

O corte $-(A, B)$ é chamado o simétrico aditivo de (A, B);

(*v*) *(Comutatividade da multiplicação)* $(A,B)(D,E) = (D,E)(A,B)$;

(*vi*) *(Associatividade da multiplicação)* $(A,B)[(D,E)(F,G)] = [(A,B)(D,E)](F,G)$;

(*vii*) *(Existência e unicidade do elemento neutro da adição) O corte* $1^* = (A_1, B_1)$, *onde* $A_1 = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 1\}$ *e* $B_1 = \{x \in \mathbb{Q};\ 1 \leq x\}$ *é único elemento neutro da multiplicação, isto é,*

$$(A,B) = 1^*(A,B) = (A,B)1^*$$

para todo corte (A,B);

(*viii*) *(Existência e unicidade do elemento simétrico da multiplicação) Para todo corte* $(A,B) \neq 0^*$ *existe um único corte denotado por* $(A,B)^{-1}$ *tal que*

$$(A,B)^{-1}(A,B) = (A,B)(A,B)^{-1} = 1^*.$$

O corte $(A,B)^{-1}$ *é chamado o inverso multiplicativo do corte* (A,B);

(*ix*) $(F,G)[(A,B) + (D,E)] = (F,G)(A,B) + (F,G)(D,E)$;

Demonstração. As demonstrações dos itens $(i), (ii)$ e (iii) estão feitas no Teorema 2.6 e a demonstração do item (iv) está feita na Proposição 2.8.

Prova do item (v). Seja $(F,G) = (A,B)(D,E)$, então

$$F = (A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-, \text{ com } (A \cdot D)_+ = \{ad;\ a \in A,\ d \in D,\ a \geq 0,\ d \geq 0\},$$

e

$$G = [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-]^c.$$

Note que

$$(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}^*_- = (D \cdot A)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-,$$

e portanto

$$(A,B)(D,E) = (D,E)(A,B).$$

Prova do item (vi). Seja $(H,I) = (A,B)[(D,E)(F,G)]$, então

$$H = [A \cdot (D \cdot F)_+]_+ \cup \mathbb{Q}^*_-,$$

com

$$\begin{aligned}[A\cdot(D\cdot F)_+]_+ &= \{a(df);\ a\in A,\ d\in D,\ f\in F,\ a\geq 0,\ d\geq 0,\ \ f\geq 0,\}\\ &= \{(ad)f;\ a\in A,\ d\in D,\ f\in F,\ a\geq 0,\ d\geq 0,\ \ f\geq 0,\}\\ &= [(A\cdot D)_+\cdot F]_+,\end{aligned}$$

e portanto

$$(A,B)[(D,E)(F,G)] = [(A,B)(D,E)](F,G).$$

Prova do item (vii). Seja $(A,B)\in\mathcal{C}$, então provaremos que Primeiro, note que $0^* < 1^*$, e portanto $|1^*| = 1^*$. Com isso, usando a Definição 2.12 podemos concluir que

$$1^*(A,B) = \begin{cases} |(A,B)|, & \text{se } 0^*\leq (A,B);\\ -|(A,B)|, & \text{se } (A,B) < 0^*,\end{cases}$$

isto é,

$$1^*(A,B) = (A,B),$$

e usando o item (v), temos

$$(A,B) = (A,B)1^* = 1^*(A,B).$$

A unicidade do corte 1^* como elemento neutro da multiplicação se dá pelo fato de que se (D,E) também é elemento neutro da multiplicação, então

$$(D,E) = 1^*(D,E) = 1^*.$$

Prova do item $(viii)$. Inicialmente, suponha que $0^* < (A,B)$. Defina o par ordenador de subconjuntos de números racionais (D,E), onde

$$D = \mathbb{Q}_-\cup\left\{p\in\mathbb{Q};\ p>0,\ \frac{1}{p}\in B \text{ e } \frac{1}{p} \text{ não é o mínimo de } B\right\}$$

e

$$E = D^c.$$

Vamos mostrar que (D,E) é o único corte de Dedekind tal que

$$(A,B)(D,E) = (D,E)(A,B) = 1^*.$$

(1) Notemos que (D,E) é um corte de Dedekind. De fato, como $\mathbb{Q}_-\subset D$ temos $D\neq\emptyset$. Também, existe um racional positivo $p\in A$ e como $p = \frac{1}{\frac{1}{p}}$ isto significa

que $\frac{1}{p} \notin D$, e consequentemente $E \neq \emptyset$. Além disso, $\mathbb{Q} = D \cup E$.

Agora, seja $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < p$ para todo $p \in E$. Vamos mostrar que $q \in D$. Se $q \leq 0$, então $q \in D$. Por outro lado, se $q > 0$, então $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ temos e $\frac{1}{p}$ é elemento de B que não é mínimo em B. Assim, $\frac{1}{q} \in B$ e $\frac{1}{q}$ não é o mínimo de B, e assim, $q \in D$.

Finalmente, para provarmos que D não possui elemento máximo seja $p \in D$. Se $p \leq 0$ como D contém números racionais positivos segue que existe algum $s \in D$ com $p < s$. Agora, se $0 < p$, temos $\frac{1}{p} \in B$ e $\frac{1}{p}$ não é o mínimo de B. Desta forma, existe um número racional $r \in B$ tal que $r < \frac{1}{p}$. Seja s um número racional com $r < s < \frac{1}{p}$. Então $s \in B$ e s não é o mínimo de B. Como $s = \frac{1}{\frac{1}{s}}$ então $\frac{1}{s} \in D$ e $p < \frac{1}{s}$.

(2) Mostremos que $(A, B)(D, E) = (D, E)(A, B) = 1^*$.

1. Seja $r \in (A \cdot D)_+$ com $0 < r$. Então, $r = pq$ com $p \in A$ e $q \in D$. Então, $\frac{1}{q}$ é elemento de B e, assim $p < \frac{1}{q}$. Consequentemente, $pq < 1$, de onde $r = pq \in A_1$.
2. Seja $r \in A_1$. Se $r \leq 0$, é claro que $r \in (A \cdot D)_+$. Agora, se $0 < r < 1$ existem números racionais $p \in A$ e $q \in B$, com q não é o mínimo de B, tais que $\frac{p}{q} = r$, donde $r = p\frac{1}{q}$ com $p \in A$ e $\frac{1}{q} \in D$, isto é, $r \in (A \cdot D)_+$.

(3) O corte (D, E) é o único corte com a propriedade $(A, B)(D, E) = 1^*$. Suponhamos que existe um corte $(A, B)_*$ tal que $(A, B)(A, B)_* = 1^*$. Então,

$$\begin{aligned}
(A, B)_* &= (A, B)_*[(A, B)(D, E)] \\
&= [(A, B)_*(A, B)](D, E) \\
&= 1^*(D, E) \\
&= (D, E).
\end{aligned}$$

Portanto, $(A, B)_* = (D, E)$ como queríamos mostrar. O corte (D, E) é denotado por $(A, B)^{-1}$. O caso em que $(A, B) < 0^*$ é tratado de forma similar.

Prova do item (ix). A distributividade da multiplicação em relação à adição será inicialmente demonstrada para cortes $(A, B), (D, E), (F, G) \geq 0^*$. Os demais casos são consequência deste e das propriedades já estudadas, principalmente as regras de sinais apresentadas na Proposição 2.10. Denotamos por $(H, I) = (A, B)[(D, E) + (F, G)]$ e $(J, K) = (A, B)(D, E) + (A, B)(F, G)$. Lembarmos que

$$(D, E) + (F, G) = (D + E, (D + E)^c)$$

e

$$H = [A \cdot (D+F)]_+ \cup \mathbb{Q}^*_- = \{r \in \mathbb{Q};\ r = aq \text{ com } \ 0 \leq a \in A \text{ e } 0 \leq q \in D+F\} \cup \mathbb{Q}^*_-.$$

Seja $q \in D+F$, então $q = d+f$, com $d \in D$ e $f \in F$. Logo, os elementos de H são racionais negativos, ou são da forma: $r = aq = ad + af$, com $0 \leq a \in A$, $d \in D$, $f \in F$. Ou seja, $ad \in (A \cdot D)_+$ e $af \in (A \cdot F)_+$, e consequentemente

$$r = ad + af \in (A \cdot D)_+ + (A \cdot F)_+$$

isto nos leva a concluir que

$$H \subset [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-] + [(A \cdot F)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-].$$

Por outro lado, sendo $(J,K) = (J,K) = (A,B)(D,E) + (A,B)(F,G)$, temos

$$J = [(A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-] + [(A \cdot F)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-].$$

Considerando $r \in J$, temos $r = v + u$, onde $v \in (A \cdot D)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-$ e $u \in (A \cdot F)_+ \cup \mathbb{Q}^*_-$, e mais precisamente alguns casos a considerar:

(1) $r = v + u,$ com $v, u \in \mathbb{Q}^*_-$;

(2) $r = v + a"f",$ com $v \in \mathbb{Q}^*_-,\ 0 \leq a" \in A$ e $0 \leq f" \in F$;

(3) $r = a'd' + u,$ com $u \in \mathbb{Q}^*_-, 0 \leq a' \in A$ e $0 \leq d' \in D$;

(4) $r = a'd' + a"f",$ com $0 \leq a' \in A$, $0 \leq d' \in D$, $0 \leq a" \in A$ e $0 \leq f" \in F$.

Não é difícil concluir que seja qual o tipo acima do número r entre os tipos de 1 a 4, podemos concluir que

$$r \in [A \cdot (D+F)]_+ \cup \mathbb{Q}^*_- = H.$$

Daí, temos

$$J \subset [A \cdot (D+F)]_+ \cup \mathbb{Q}^*_-,$$

e portanto,

$$(F,G)[(A,B) + (D,E)] = (F,G)(A,B) + (F,G)(D,E). \quad \square$$

Até agora, provamos que o conjunto dos cortes de Dedekind é um corpo. Vamos mostrar que o corpo dos cortes é ordenado, isto é, satisfaz as condições da Definição 1.2 do Capítulo 1.

Teorema 3.2. *O corpo dos corte de Dedekind é ordenado.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P} = \{(A, B) \in \mathcal{C};\, 0^* < (A, B)\}$. Vamos mostrar que as condições (P_1) e (P_2) da Definição 1.2 são satisfeitas, isto é, dados $(A, B), (D, E) \in P$ vamos mostrar que $(A, B) + (D, E) \in \mathcal{P}$ e $(A, B)(D, E) \in \mathcal{P}$. De fato, existem $a \in A$ e $d \in D$ tais que $0 < a$ e $0 < b$. Como a e b são números racionais temos que $0 < a+b$ e $0 < ab$, isto é, $(A + D)\backslash A_0 \neq \emptyset$ e $A \cdot D\backslash A_0 \neq \emptyset$ como queríamos demonstrar. □

Concluímos assim que o conjunto dos cortes de Dedekind $\mathcal{C}$ munido da operação de adição e multiplicação definidas no capítulo anterior é um corpo algébrico ordenado. O próximo resultado garante que $\mathcal{C}$ munido da operação de adição e multiplicação é um corpo ordenado arquimediano.

Teorema 3.3. *O corpo dos corte de Dedekind é arquimediano.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 2.4. □

Teorema 3.4. *Seja $j : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{C}$ dada por $j(r) = r^*$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. A aplicação j é injetora. Além disso, para todos $r, s \in \mathbb{Q}$ temos*

(a) $j(r + s) = j(r) + j(s)$;

(b) $j(-r) = -j(r)$;

(c) $j(rs) = j(r)j(s)$;

(d) $r < s$ *se, e somente se,* $j(r) < j(s)$..

Demonstração. Consideremos dois números racionais diferentes r e s. Se $r < s$ e tome $t = \frac{r+s}{2}$. Notamos que $t \in A_s$ porém $t \notin A_r$, isto é, $r^* \neq s^*$. Assim, j é injetora.

(a) Temos que $j(r+s) = (r+s)^*$ e o fato de que $(r+s)^* = r^* + s^*$ segue do Exemplo 2.8.

(b) Temos que $j(-r) = (A_{-r}, B_{-r})$ e denotamos o corte $-(A_r, B_r)$ por (D, E). Temos que $x \in A_{-r}$ se, e somente se, $x < -r$, isto é, $-x \notin A_r$ e não é cota superior mínima de A_r. Da definição de $-(A_r, B_r)$ isto é equivalente a dizer que $-x \in D$. Usando essas equivalências concluímos, pela definição de j, que $j(-r) = -j(r)$.

(c) Vamos provar apenas no caso em que $r > 0$ e $s > 0$ os outros casos são feitos de maneira análoga. Mostremos que $A_{rs} = A_r A_s$. Seja $x \in A_{rs}$, então podemos escrever

$$x = \left(\frac{rs + x}{2s}\right)\left(\frac{2sx}{rs + x}\right)$$

e como $\frac{rs+x}{2s} < r$ e $\frac{2sx}{rs+x} < s$. Disso resulta, $\frac{rs+x}{2s} \in A_r$ e $\frac{2sx}{rs+x} \in A_s$. Assim, $x \in A_r A_s$ e, portanto, $A_{rs} \subset A_r A_s$. Por outro lado, seja $y \in A_r A_s$. Então, $y < 0$ ou $y = uv$ para $0 \leq u < r$ e $0 \leq v < s$. Logo, $y < 0$ ou $y = uv < rs$, isto é, $y \in A_{rs}$ e $A_{rs} \subset A_r A_s$.

(d) Sejam r, $s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < s$, então $A_r \subset A_s$. Assim, $A_s \backslash A_r$, isto é, $r^* < s^*$. $\square$

Segue do teorema anterior que podemos obter uma cópia algébrica do conjunto dos números racionais em $\mathcal{C}$, uma vez que $j(\mathbb{Q})$, exatamente o conjunto dos cortes racionais. A identificação de $j(\mathbb{Q})$ com $\mathbb{Q}$ nos permitem escrever $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$. Assim, o conjunto $\mathcal{C} \backslash j(\mathbb{Q})$ é denominado o conjunto dos cortes irracionais.

No próximo objetivo é mostrar que o corpo dos Cortes de Dedekind é completo.

Teorema 3.5. *Se (A, B) e (D, E) são cortes de Dedekind e $(A, B) < (D, E)$, então existe um corte racional r^* tal que $(A, B) < r^* < (D, E)$.*

Demonstração. Se $(A, B) < (D, E)$, existe um número racional s tal que $s \in D$ e $s \notin A$. Escolhemos um racional $r > s$ de modo que $r \in D$. Como $r \in D$ e $r \notin r^*$, temos $r^* < (D, E)$. Como $s \in r^*$ e $s \notin A$, temos $(A, B) < r^*$. $\square$

Teorema 3.6. *Sejam α e β subconjuntos de $\mathcal{C}$ tais que:*

(i) $\mathcal{C} = \alpha \cup \beta$;

(ii) $\alpha \cap \beta = \emptyset$;

(iii) $\alpha \neq \emptyset$ *e* $\beta \neq \emptyset$;

(iv) *Se $(A, B) \in \alpha$ e $(D, E) \in \beta$, então $(A, B) < (D, E)$.*

Nessas condições existe um, e apenas um, corte de Dedekind (F, G) tal que $(A, B) \leq (F, G) \leq (D, E)$, para todo $(A, B) \in \alpha$ e para todo $(D, E) \in \beta$.

Demonstração. Vamos provar inicialmente a unicidade. Suponhamos que existam dois cortes $(F, G)_1$ e $(F, G)_2$, tais que a conclusão do teorema seja verificada e, suponhamos que $(F, G)_1 < (F, G)_2$. Assim, pelo teorema anterior existe um corte de Dedekind racional $(F, G)_3$ tal que $(F, G)_1 < (F, G)_3 < (F, G)_2$,. Como $(F, G)_3 < (F, G)_2$ segue $(F, G)_3 \in \alpha$, pois $(F, G)_3 < (F, G)_2 \leq (D, E)$. Analogamente como $(F, G)_1 < (F, G)_3$, resulta $(F, G)_3 \in \beta$. Obtemos então, $(F, G)_3 \in \alpha \cap \beta$, o que é uma contradição.

Agora provaremos a existência do corte de Dedekind (F, G). Sejam F o conjunto de todos os números racionais p que pertencem a algum corte em α e $G = F^c$. Vamos mostrar inicialmente que (F, G) é um corte. De fato,

(1) Veja que $F \neq \emptyset$ pois $\alpha \neq \emptyset$. Além disso, seja $(D, E) \in \beta$ e $s \notin D$ um racional. Como para todo $(A, B) \in \alpha$, $A \subset F$, então $s \notin A$ para algum A tal que $(A, B) \in \alpha$, pois $(A, B) < (D, E)$. Portanto, $s \notin F$. Além disso, $\mathbb{Q} = F \cup G$;

(2) Se $r \in F$ e $s < r$ um racional. Então $r \in A$ para algum A tal que $(A, B) \in \alpha$ e, como $s < r$, então $s \in A$ de onde segue que $s \in F$;

(3) Se $r \in F$, então $r \in A$ para algum A tal que $(A, B) \in \alpha$. Logo, existe $r < s$ com $s \in A$. Logo, $s \in F$.

Agora, é imediato que $(A, B) \leq (F, G)$ qualquer que seja $(A, B) \in \alpha$. Mostremos que $(F, G) \leq (D, E)$, para todo $(D, E) \in \beta$. Suponhamos que exista $(D, E) \in \beta$ com $(D, E) < (F, G)$. Neste caso, existe um racional $r \in F \backslash D$. Assim, r é um elemento de algum conjunto A que determina um corte $(A, B) \in \alpha$ e como $r \notin D$, obtemos $(D, E) < (A, B)$, contrariando a hipótese (iv). □

Apesar da semelhança entre as propriedades aritméticas e de ordem entre $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{C}$ o último teorema contém a essência da importante propriedade que diferencia o conjunto dos número racionais e o conjunto de todos os cortes de Dedekind em $\mathbb{Q}$. No Exemplo 2.1 consideramos os seguintes subconjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q}_+;\, x^2 < 2 \text{ e } x \leq 0\} \text{ e } B = \{a \in \mathbb{Q}_+;\, 2 < x^2 \text{ e } 0 < x\},$$

e mostramos no Capítulo 2 que A e B satisfazem as hipóteses do Teorema 3.6 para $\mathbb{Q}$ fazendo o papel de $\mathcal{C}$, mas que não existe $r \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $s \leq r$, para todo $s \in A$ e $r \leq t$, para todo $t \in B$.

Com isso, notemos que o Exemplo 2.1 nos diz, informalmente, que em $\mathbb{Q}$ existem "lacunas".

Corolário 3.7. Nas condições do teorema anterior, ou existe em α um máximo, ou, em β um mínimo.

Demonstração. Seja (F, G) o corte definido na prova do teorema anterior. Então, (F, G) está em α ou em β, pela hipótese (i) e, por (ii), em apenas um desses conjuntos.

Se $(F, G) \in \alpha$, então (F, G) é elemento máximo de A e, se $(F, G) \in \beta$, (F, G) é elemento mínimo de B. □

A existência do corte (F, G) é o que garante que as "lacunas"que existiam em $\mathbb{Q}$ são agora estão preenchidas.

Teorema 3.8. *Todo subconjunto não vazio de $\mathcal{C}$ limitado superiormente admite supremo.*

Demonstração. Seja $X \neq \emptyset$ subconjunto de $\mathcal{C}$ limitado superiormente. Consideramos os seguintes conjuntos

$$\alpha = \{(A, B) \in \mathcal{C};\ \text{existe } (D, E) \in X \text{ tal que } (A, B) \leq (D, E)\}$$

e β o complementar de α em $\mathcal{C}$. Observamos que nenhum elemento de α é cota superior para X e todo elemento de β é cota superior para X. Para mostrar que X tem supremo vamos mostrar que β tem ínfimo.

Notamos que os conjutos α e β satisfazem as hipóteses do Teorema 3.6. De fato, é imediato que $\alpha \cup \beta = \mathcal{C}$, $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Além disso, dado $(A, B) \in X$ temos F é não vazio temos que α e β são não vazios. Por outro lado, sejam $(A, B) \in \alpha$ e $(D, E) \in \beta$. Então, existe $(F, G) \in X$ tal que $(A, B) < (F, G)$ e $(F, G) \leq (D, E)$. Portanto $(A, B) < (D, E)$, isto é a condição (d) do Teorema 3.6 é satisfeita.

Portanto, pelo corolário acima α possui máximo ou β possui mínimo. Vamos mostrar que o primeiro caso não acontece. De fato, seja $(A, B) \in \alpha$ então exise $(D, E) \in X$ tal que $(A, B) < (D, E)$. Pelo Teorema 3.6 existe um corte (A', B') tal que $(A, B) < (A', B') < (D, E)$. Como $(A', B') < (D, E)$ temos $(A', B') \in \alpha$, isto é, α não pode possuir máximo. $\square$

Segue do Teorema anterior que o corpo dos cortes de Dedekind é completo. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 3.1. O conjunto de todos os cortes de Dedekind formado pelos cortes racionais e irracionais é chamado de o conjunto dos números reais e é denotado por $\mathbb{R}$. Cada corte em $\mathbb{R}$ é chamado de número real.

Uma questão fundamental na construção do conjunto dos números reais por meio de cortes de Dedekind em $\mathbb{Q}$, é saber se repetindo o processo em $\mathbb{R}$ encontramos novos objetos não pertencentes a $\mathbb{R}$. O próximo resultado diz que todo corte de Dedekind em $\mathbb{R}$ determina um objeto em $\mathbb{R}$. Intituivamente, isto equivale a dizer que podemos pensar em $\mathbb{R}$ geometricamente como um contínuo de pontos. Para provar isto podemos estender a definição de corte par o conjunto dos números reais da seguinte forma.

Definição 3.2. Um corte de Dedekind em $\mathbb{R}$ é um par ordenado (Δ, Λ) de conjuntos de números reais satisfazendo as seguintes condições:

(C_1) Os conjuntos Δ e Λ são ambos não vazios tais que $\Delta \cup \Lambda = \mathbb{R}$;

(C_2) Todo elemento de Δ é estritamente menor que todo elemento de Λ;

Teorema 3.9. *Todo corte de Dedekind em $\mathbb{R}$ determina um objeto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja (Δ, Λ) um corte de Dedekind em $\mathbb{R}$. Logo, podemos afirmar que

(i) Todo número real pertence exclusivamente ou a Δ, ou a Λ;

(ii) Todo número real $s_1 \in \Delta$ é menor que todo número real $s_2 \in \Lambda$.

Provaremos que Δ possui um elemento máximo ou Λ possui um elemento mínimo. Consideremos (A, B) um corte de Dedekind em $\mathbb{Q}$, onde A é construído pelos racionais de Δ e B é construído pelos racionais Λ. Então (A, B) está associado a um número $\alpha \in \mathbb{R}$ e α pertence a Δ ou a Λ. Demonstraremos que se $\alpha \in \Delta$, então ele é elemento máximo de Δ, ou que se $\alpha \in \Lambda$ então ele é mínimo de Λ. De fato suponha que, $\alpha \in \Delta$. Seja $\beta \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < \beta$ e $r \in \mathbb{R}$ com $\alpha < r < \beta$. Então, sendo $\alpha < r$ temos $r \in B \subset \Lambda$, pois $\alpha = (A, B)$, temos, porém, $r < \beta$ então $\beta \in \Lambda$.

Portanto, todo número real maior que α pertence a Λ. Logo, não existe em Δ um número real maior que α. Assim, α é máximo de Δ. □

Referências Bibliográficas

[1] Clark, H. R., Límaco, J., Malta S. M., Medeiros, L. A., *Lições de Análise Matemática*, Rio de Janeiro - RJ, 2006.

[2] Ferreira, J., *A construção dos números*, 2.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2011

[3] Lima, E. L., *Curso de análise*, 13a. Edição, **1**, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[4] Machado, G. M., *A construção dos números*, Trabalho de Conclusão do Curso, Universidade Federal de São Carlos,São Carlos-SP, Brasil, 2014.

[5] Souto, M. A., *Cortes de Dedekind*, Universidade Federal do Ceará, Verão, 2006.

[6] Sítio da internet: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Dedekind.html, visitado em 13 de agosto de 2017.

[7] Sítio da internet: https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=18233, visitado em 13 de agosto de 2017.