



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



# Um estudo sobre o volume do cone e da esfera sem o uso do Princípio de Cavalieri

Clebson Huan de Freitas

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Campina Grande - PB  
Maio/2018

F866e

Freitas, Clebson Huan de.

Um estudo sobre o volume do cone e da esfera sem o uso do Princípio de Cavalieri / Clebson Huan de Freitas. - Campina Grande, 2018.

44 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) ó Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.

"Orientação: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos".

Referências.

1. Supremo de um Conjunto. 2. Volume da Pirâmide. 3. Volume da Esfera. 4. Método da Exaustão. 5. Princípio de Cavalieri. I. Santos, Jefferson Abrantes dos. II. Título.

CDU 517.518.26(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



## **Um estudo sobre o volume do cone e da esfera sem o uso do Princípio de Cavalieri**

**por**

**Clebson Huan de Freitas<sup>†</sup>**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

---

<sup>†</sup>Bolsista CAPES

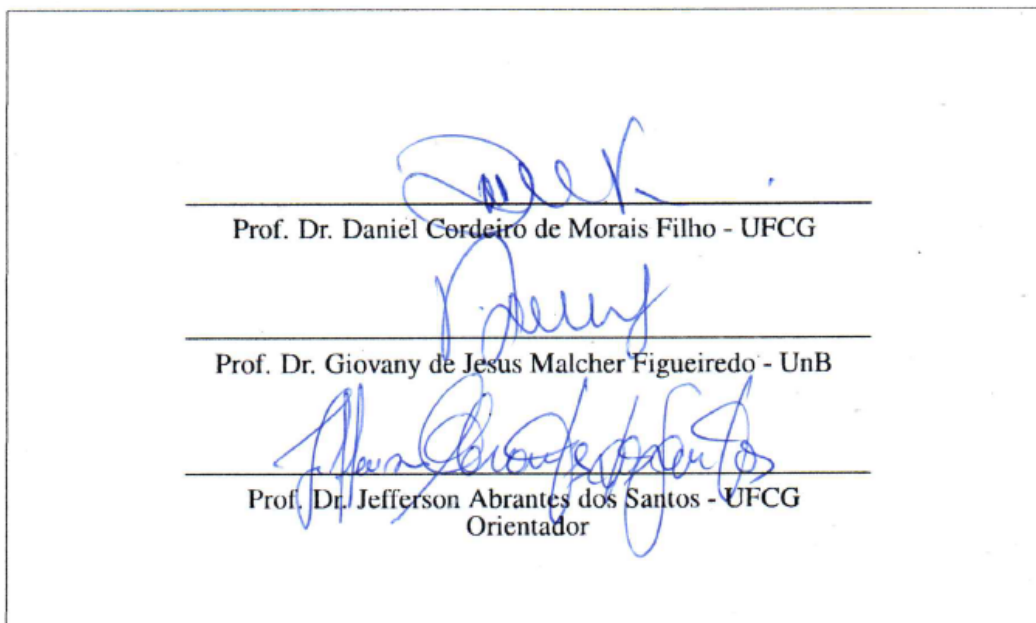
# Um estudo sobre o volume do cone e da esfera sem o uso do Princípio de Cavalieri

por

**Clebson Huan de Freitas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Unidade Acadêmica de Matemática  
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Mai/2018**

# Dedicatória

À meu filho, João Pedro.

# Agradecimentos

À Deus, por sempre está ao meu lado me dando forças para seguir e chegar ao fim de mais uma conquista e a realização de mais um sonho.

A minha família, em especial a minha esposa, Maria Gabriella, por sempre está ao meu lado nos momentos difíceis e cuidar do nosso filho enquanto eu me dedicava a escrita deste trabalho.

Ao corpo docente do PROFMAT/UFCG. Em especial ao professor Jefferson Abrantes dos Santos pela orientação deste trabalho e ao Coordenador do PROFMAT/UFCG, Luiz Antônio da Silva Medeiros, pela compreensão com quem mora distante do local de estudo.

Aos professores, Daniel Cordeiro de Moraes Filho e Giovany de Jesus Malcher Figueiredo por aceitarem participar da Banca.

Aos meus colegas de curso por sempre estarem próximos quando precisava.

Aos meus amigos e a todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta para a conquista desta vitória.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

# Resumo

Neste trabalho, utilizaremos o conceito de supremo de um conjunto para apresentar um método para a obtenção do volume de um sólido qualquer. A partir disso, deduziremos a fórmula para calcular o volume do cone e da esfera sem fazer uso do Princípio de Cavalieri. Também determinaremos a fórmula do volume da pirâmide utilizando, porém, o Método da Exaustão. Uma importante ferramenta que iremos utilizar neste trabalho será o conceito e os resultados de polígonos equidecomponíveis.

**Palavras Chaves:** Supremo de um conjunto. Volume da pirâmide. Volume da esfera. Método da Exaustão. Princípio de Cavalieri.

# Abstract

In this work, we will use the supremum concept of a set to present a method to obtain the volume of any solid. From then on, we will deduce the formula for calculating the volume of a cone and a sphere without making use of Cavalieri's Principle. We will also determine the formula for the volume of a pyramid, but using the Method of Exhaustion. An important tool we will use in this work is the concept and results of equidecomposable polygons.

**Keywords:** Supremum of a set. Volume of the pyramid. Volume of the sphere. Method of Exhaustion. Cavalieri's Principle.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Objetivos . . . . .	3
1.2	Organização . . . . .	3
1.3	Caráter da pesquisa . . . . .	4
1.4	Público-alvo . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Volume do paralelepípedo</b>	<b>5</b>
2.1	Supremo de um conjunto . . . . .	5
2.2	Volume de um sólido qualquer . . . . .	6
2.3	Volume do paralelepípedo . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Volume da pirâmide e do cone</b>	<b>19</b>
3.1	Volume do prisma . . . . .	19
3.2	Volume da pirâmide . . . . .	20
3.3	Volume do cone . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Volume da esfera</b>	<b>33</b>
4.1	Preliminares . . . . .	33
4.2	Volume da esfera . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>43</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>44</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Geometria Espacial é um dos assuntos abordados no Ensino Médio de forma muito superficial e, às vezes, nem chega a ser estudada em sala de aula. Um dos tópicos deste ramo da Matemática é o conceito e o estudo de volume de alguns sólidos geométricos. Entender o conceito de volume é muito importante, pois este está presente no nosso cotidiano como, por exemplo, para sabermos quantos litros de água cabem em uma cisterna ou caixa d'água.

Do ponto de vista intuitivo, o volume de um sólido pode ser entendido como a quantidade de espaço que esse sólido ocupa. Como calcular quanto esse sólido ocupa é algo trabalhoso dependendo de seu formato. Apesar de neste trabalho fornecermos um procedimento para o cálculo do volume de um sólido qualquer, vamos nos limitar, com esse processo, em determinar as fórmulas para o cálculo do volume do cone e da esfera.

O modo pelo qual a maioria dos autores dos livros didáticos abordam o método para a obtenção das fórmulas citadas no parágrafo anterior é fazendo uso do Princípio de Cavalieri. A proposta deste trabalho é fazer algo diferente, dando continuidade aos trabalhos dos colegas ALVES (vide [1]) e SILVA (vide [15]). Um de nossos propósitos é que este trabalho possa ser um projeto a ser desenvolvido com uma turma do Ensino Médio durante certo período.

Para alcançarmos o objetivo deste trabalho, vamos precisar do conceito e dos resultados de polígonos equidecomponíveis, que seria, de um modo prático, particionar um polígono em polígonos menores e, desses pedaços, podermos construir outros polígonos como se fosse um tipo de quebra-cabeça. Isso será sempre possível se os polígonos tiverem a mesma área. Esse resultado da Geometria Plana é o Teorema de Bolyai-Gerwien (veja mais detalhes como, por exemplo, a demonstração de casos particulares e depois a demonstração do caso geral em [14]).

Uma pergunta natural que surge daí é se poderíamos fazer isso com sólidos de mesmo volume. Ou seja, se sólidos têm mesmo volume, será que seria sempre possível quebrá-los em sólidos menores e obter o outro de mesmo volume? Esse caso, se sempre fosse possível, seria uma versão do Teorema de Bolyai-Gerwien para poliedros. Essa pergunta foi proposta pela primeira vez em 1844 por Bolyai e Gauss e depois, em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, por Hilbert, que ficou conhecido como o terceiro problema de Hilbert (vide [14]).

Um dos alunos de Hilbert, Max Dehn, estudou o problema e, em 1902, deu a resposta negativa. Ele mostrou que um cubo e um tetraedro regular de mesmo volume não são equidecomponíveis, ou seja, não é possível quebrar o cubo em sólidos menores e obter o tetraedro regular ou vice-versa. O leitor interessado poderá encontrar mais detalhes em [14].

Também faremos uso do método de Eudoxo, conhecido como Método da Exaustão, para determinar a fórmula para o cálculo do volume da pirâmide que foi feito por Euclides, em sua célebre obra *Os Elementos*. Já para o cálculo do volume do cone e da esfera, utilizaremos a ideia de supremo de um conjunto. A definição de supremo é vista na disciplina de Análise Real do curso de graduação em Matemática. Neste trabalho, observamos uma aplicação em Geometria da ideia de supremo de um conjunto que é uma continuidade aos trabalhos dos colegas ALVES (vide [1]) e SILVA (vide [15]).

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é dar continuidade aos estudos dos colegas ALVES (vide [1]) e SILVA (vide [15]) e apresentarmos uma demonstração para a obtenção da fórmula para o cálculo do volume do cone e da esfera sem utilizar o Princípio de Cavalieri e fazendo uso do conceito de supremo de um conjunto. Nossos objetivos específicos são:

- Definir supremo de um conjunto;
- Apresentar um método de como calcular o volume de um sólido qualquer;
- Definir e apresentar alguns resultados de polígonos equidecomponíveis;
- Calcular o volume de um paralelepípedo qualquer;
- Calcular o volume de um prisma de base triangular;
- Calcular o volume da pirâmide, do cone e da esfera.

## 1.2 Organização

Este trabalho está organizado em cinco capítulos da seguinte forma:

- No capítulo 1, apresentamos uma introdução sobre o trabalho e enfatizamos que este é uma continuidade dos estudos de ALVES (vide [1]) e SILVA (vide [15]).
- No capítulo 2, fazemos uma síntese do que foi feito pelos colegas ALVES e SILVA, apresentando os axiomas de volume, alguns resultados de polígonos equidecomponíveis e a fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo qualquer;
- No capítulo 3, deduzimos as fórmulas para o cálculo do volume do prisma, da pirâmide, do cone e do tronco de cone sem o uso do Princípio de Cavalieri.
- No capítulo 4, usamos o Princípio de Indução para demonstrarmos as fórmulas da soma dos  $n$  primeiros números naturais e a soma dos quadrados dos  $n$  primeiros números naturais. Enunciaremos e mostraremos a desigualdade das médias e, por último, deduziremos a fórmula para o cálculo do volume de uma esfera.
- No capítulo 5, finalizamos com nossas considerações finais.

### **1.3 Caráter da pesquisa**

A pesquisa é de caráter bibliográfico. Ela pode ser definida como aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, realizando-se o levantamento de informações, através de consultas a livros, monografias, dissertações, artigos publicados na internet e em sites de periódicos.

### **1.4 Público-alvo**

Este trabalho destina-se a professores do Ensino Médio e a alunos de graduação em Matemática que tenham interesse em aprofundar seus conhecimentos sobre o conceito de volume de sólidos geométricos. No caso de professores, pode-se utilizar este trabalho como ideia para um projeto a ser desenvolvido em sala de aula com uma turma de Ensino Médio.

# Capítulo 2

## Volume do paralelepípedo

Neste capítulo, um dos conceitos importantes que iremos abordar é o de supremo de um conjunto. Além disso, definiremos e provaremos alguns resultados de polígonos equidecomponíveis que serão fundamentais para demonstrarmos a fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo qualquer, reto ou oblíquo. Nesta parte de nosso estudo, utilizamos as referências [6], [7], [8], [13] e [15].

### 2.1 Supremo de um conjunto

A definição de supremo será muito importante e nos conduzirá a uma noção mais geral do que seja calcular o volume de um sólido qualquer. Além disso, nos fornecerá uma ferramenta eficiente para calcularmos, mais adiante, o volume do cone e da esfera. Agora, definamos conjuntos limitados superiormente.

**Definição 2.1** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  diz-se **limitado superiormente** quando existe algum  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq b$  para todo  $x \in X$ . Nesse caso, diz-se que  $b$  é uma **cota superior** para o conjunto  $X$ .

**Exemplo 2.1** Se  $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ , então  $X$  é limitado superiormente por 1 e, assim, 1 é uma cota superior do conjunto  $X$ .

**Definição 2.2** Seja  $X \subset \mathbb{R}$  limitado superiormente e não vazio. Um número  $b \in \mathbb{R}$  chama-se **supremo** do conjunto  $X$  quando é a menor das cotas superiores de  $X$ . Ou ainda,  $b$  é o supremo de  $X$  quando cumpre as duas condições a seguir:

S1. Para todo  $x \in X$ , tem-se  $x \leq b$ ;

S2. Se  $c \in \mathbb{R}$  é tal que  $x \leq c$  para todo  $x \in X$ , então  $b \leq c$ .

A condição S2 pode ser reformulada da seguinte maneira:

S2'. Se  $c < b$ , então existe  $x \in X$  com  $c < x$ .

Assim, S2' diz que nenhum número real menor do que  $b$  pode ser cota superior de  $X$ .

Às vezes, é conveniente exprimir S2' da seguinte forma:

S2''. Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in X$  tal que  $b - \varepsilon < x$ .

Escrevemos  $b = \sup X$  para indicar que  $b$  é o supremo do conjunto  $X$ .

**Exemplo 2.2** Seja  $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ . Então  $\sup X = 1$ .

De fato, temos que  $1/n \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agora, tendo em vista que  $1 \in X$ , todo  $c < 1$  não é cota superior de  $X$ . Logo,  $\sup X = 1$ .

Pela definição de supremo de um conjunto, é intuitivo observar que se um conjunto é limitado superiormente, esse possui supremo. Devido a isso, temos o Axioma 2.1 a seguir.

**Axioma 2.1** *Todo conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , não-vazio e limitado superiormente, possui supremo.*

## 2.2 Volume de um sólido qualquer

Nesta seção, apresentaremos um modo de calcular o volume de um sólido qualquer. Utilizaremos essa técnica, mais adiante, para calcular o volume do cone e da esfera.

Antes disso, vejamos o que diz o Princípio de Cavalieri, que é empregado com bastante frequência nos livros didáticos para obtenção das fórmulas para o cálculo do volume dos principais sólidos geométricos (objetos tridimensionais definidos no espaço).

**Princípio de Cavalieri.** *Sejam dois sólidos geométricos  $A$  e  $B$  de mesma altura e áreas das bases (contidas em um mesmo plano  $\alpha$ ). Os sólidos  $A$  e  $B$  têm o mesmo volume se qualquer plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , determinar duas secções transversais com áreas iguais. Veja a Figura 2.1.*

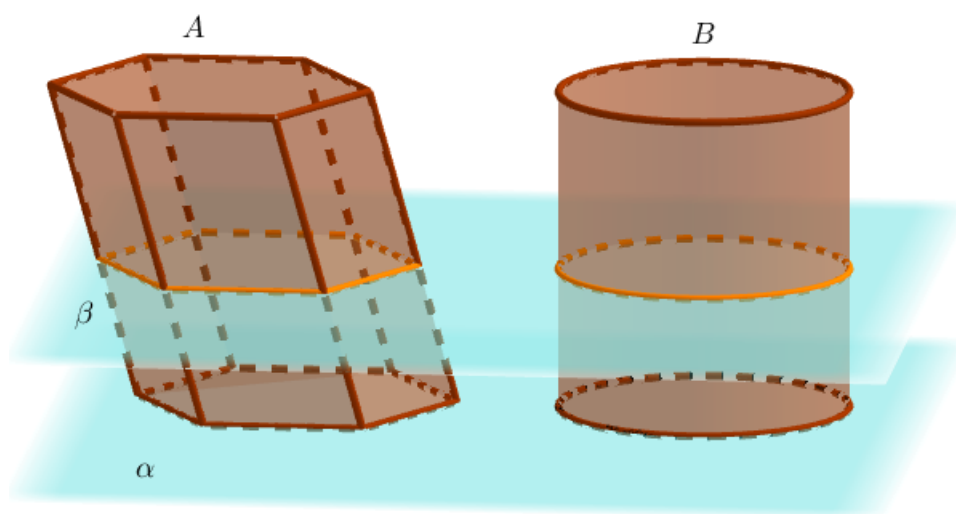


Figura 2.1: Sólidos  $A$  e  $B$  de mesma altura e áreas das bases.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

O Princípio de Cavalieri é bem engenhoso e é um modo utilizado para se obter as fórmulas para o cálculo do volume dos principais sólidos geométricos. Feito isso, como não utilizaremos esse Princípio neste trabalho, não mais o mencionaremos doravante.

Agora, consideremos  $P$  o conjunto de todos os sólidos onde é possível obtê-los após esticar e/ou repuxar, sem cortar ou furar uma esfera.

**Definição 2.3** Dizemos que dois sólidos  $P_0, P_1 \in P$  são congruentes quando um deles pode ser obtido do outro através de translações, rotações, simetrias ou composições desses movimentos.

Um dos sólidos que pertencem a  $P$  é o **paralelepípedo** que é um sólido delimitado por seis paralelogramos, cada um representando uma face desse sólido, com as faces opostas congruentes. Quando as faces do paralelepípedo são retângulos, ele é chamado de **paralelepípedo retângulo** ou **bloco retangular**.

Agora, vejamos a seguir os axiomas de volume que utilizaremos no desenvolvimento deste trabalho.

(I) Existe uma função  $V : P \rightarrow \mathbb{R}_+$  que associa a todo  $S \in P$  um número  $V(S) \in \mathbb{R}_+$ , chamado de **volume do sólido**  $S$ .

(II) Se dois sólidos  $S_1, S_2$  são congruentes, então

$$V(S_1) = V(S_2).$$

(III) Se um sólido  $S$  é formado pela reunião de um número finito de sólidos  $\{S_i\}_{i=1}^n$ , dois a dois disjuntos ou possuem em comum pontos de suas cascas, então o volume de  $S$  é a soma dos volumes dos sólidos  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , isto é,

$$V(S) = V\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n V(S_i).$$

(IV) Se  $S_1 \subset S_2$ , com  $S_1 \neq S_2$ ,

$$V(S_1) < V(S_2).$$

(V) Se  $x, y, z$  constituem as medidas de comprimento, largura e altura de um paralelepípedo retângulo, então seu volume será denotado por  $V(x, y, z)$  e, assumimos que,

$$V(1, 1, 1) = 1.$$

A definição a seguir nos auxiliará no método de como calcular o volume de um sólido qualquer. Claro que, na prática, fazer por este modo seria um trabalho árduo, mas esse procedimento nos fará determinar fórmulas com as quais será mais prático o cálculo do volume de alguns sólidos.

**Definição 2.4** Chama-se **poliedro retangular** o sólido formado pela união de um número finito de blocos retangulares sobrepostos.

A Figura 2.2 ilustra um poliedro retangular. Assim, o volume de um poliedro retangular, pelo Axioma III, é a soma dos volumes de cada bloco retangular que o constitui. Agora, se  $S$  é um sólido qualquer, então podemos aproximar o volume de  $S$  por poliedros retangulares da seguinte maneira: introduziremos a  $S$  um paralelepípedo qualquer  $B$ , com  $B \subset S$ , e, portanto,  $V(B) \leq V(S)$  (vide Axioma IV). Depois, adicionamos a  $B$  outros blocos retangulares, formando assim um poliedro retangular  $R$ , de modo que o volume desse Poliedro nunca ultrapasse o volume de  $S$ . Dessa forma, é possível nos aproximarmos cada vez mais de  $V(S)$  por volumes de poliedros retangulares. Isso significa que:

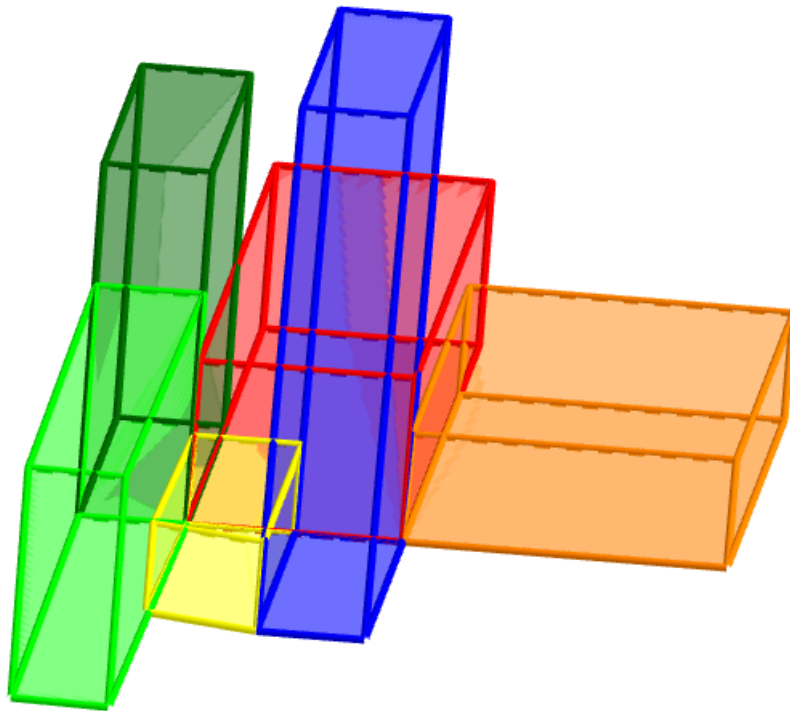


Figura 2.2: Poliedro retangular.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

(i) Pelo Axioma IV qualquer que seja o poliedro retangular  $R$ , com  $R \subset S$ , tem-se

$$V(R) \leq V(S);$$

(ii) Qualquer que seja o número real positivo  $a$ , com  $a < V(S)$ , sempre é possível encontrar um poliedro retangular  $R \subset S$ , com

$$a < V(R) \leq V(S).$$

Com isto, e de posse da ideia de supremo, podemos definir o volume de um sólido qualquer do seguinte modo: seja  $X$  o conjunto formado por números reais positivos dados por  $V(R)$ , de modo que  $R \subset S$ . Neste caso,  $X$  é um conjunto limitado, pois

$$0 < V(R) \leq V(S)$$

e, dessa forma,  $V(S)$  é uma cota superior do conjunto  $X$ . Mais ainda, dos itens (i) e (ii),  $V(S)$  é a menor das cotas superiores, ou seja,

$$V(S) = \sup X = \sup\{V(R); R \subset S \text{ e } R \text{ é um poliedro retangular}\}.$$

Assim, a função  $V$  de que trata o Axioma I pode ser entendida como a função  $V : P \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que

$$V(S) = \sup X = \sup\{V(R); R \subset S \text{ e } R \text{ é um poliedro retangular}\}.$$



Os demais axiomas também são satisfeitos por  $V$ . Caso o leitor tenha interesse, pode encontrar essa verificação em [15].

Observe que, nesse caso,  $R$  é um poliedro retangular. Mais adiante, capítulos 3 e 4, consideraremos, também para o conjunto  $X$ , outros sólidos como, por exemplo, pirâmides para o caso de calcular o volume do cone e troncos de cone para o caso do cálculo do volume da esfera. Faremos esse uso, posteriormente, sem maiores comentários.

## 2.3 Volume do paralelepípedo

O teorema a seguir nos fornece um resultado base que utilizaremos mais adiante para alcançarmos o propósito deste trabalho. Sua prova será omitida, porém poderá ser encontrada em [7] e [8].

**Teorema 2.1** *Se  $a, b$  e  $c$  são as dimensões de um paralelepípedo retângulo, então*

$$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c.$$

É perceptível, pelo Teorema 2.1, que o cálculo para determinar o volume de um paralelepípedo retângulo pode ser visto como sendo o produto da área da base pela altura, uma vez que a base desse sólido é um retângulo. Será que essa mesma fórmula será válida para paralelepípedo oblíquo? Responder essa pergunta será o objetivo desta seção.

**Teorema 2.2** *Se um paralelepípedo for cortado ao meio por um plano que passa por duas de suas arestas opostas (veja a Figura 2.3), então os prismas que ficam determinados por esse corte possuem o mesmo volume.*

**Demonstração.** Sejam  $ABCDEFGH$  um paralelepípedo e  $BCHE$  o plano que passa por duas de suas arestas opostas. Devemos mostrar que  $ABCDHE \equiv EFGHCB$ . Com efeito, perceba que a diagonal  $EB$  divide o paralelogramo  $ABFE$  em dois triângulos congruentes:  $ABE$  e  $FBE$ . De fato, como  $ABFE$  é um paralelogramo temos que  $EF \equiv AB$  e  $AE \equiv BF$  e como  $EB$  é comum a cada um desses triângulos, segue, pelo caso LLL, que  $ABE \equiv FEB$ . De modo análogo, tem-se  $CDH \equiv HGC$ . Além disso, como as faces opostas em um paralelepípedo são congruentes, segue que os paralelogramos  $ABCD$  e  $EFGH$  são congruentes, o mesmo ocorrendo com os paralelogramos  $ADHE$  e  $BCGF$ . Por fim, os prismas em questão têm a face  $BCHE$  em comum. Assim, os prismas  $ABCDHE$  e  $EFGHCB$  têm faces duas a duas congruentes. Logo, esses sólidos são congruentes e, pelo Axioma II, temos

$$V(ABCDHE) = V(EFGHCB),$$

como queríamos mostrar. ■

**Teorema 2.3** *Se dois paralelepípedos possuem mesma base, mesma altura e, além disso, as extremidades de suas arestas laterais são pontos colineares, então eles possuem o mesmo volume.*

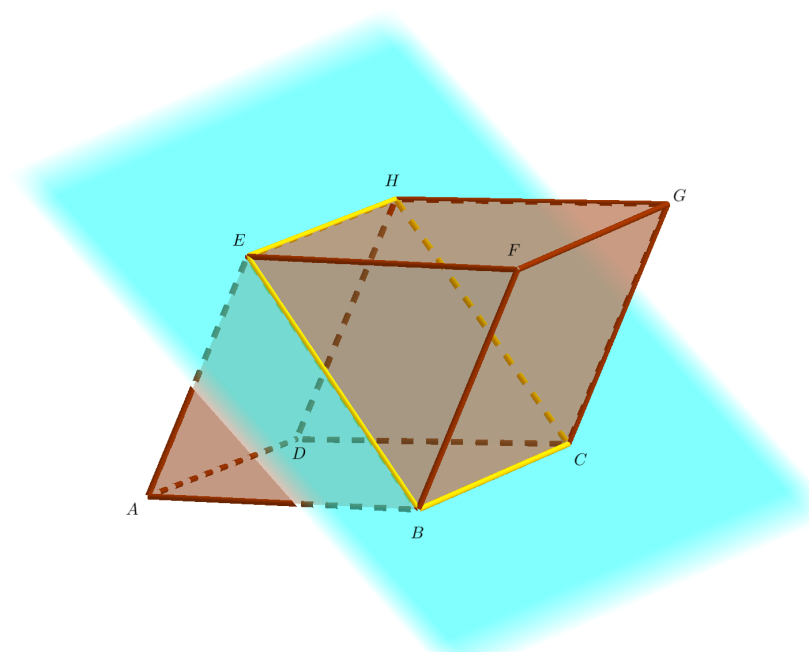


Figura 2.3: Plano passando por duas arestas opostas do paralelepípedo  $ABCDHEFG$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

**Demonstração.** Para demonstrar esse resultado, vamos dividir a prova em três casos.

**1° caso:** As faces superiores possuem um segmento em comum. Veja a Figura 2.4.

No paralelepípedo  $ABCDEFGH$ , podemos utilizar o resultado anterior e verificar que  $V(BCEFGH) = V(ABCEFG)$ . Ainda pelo mesmo resultado, no paralelepípedo  $ABCDEFIJ$ , temos  $V(ABCEFG) = V(IJEFAD)$ . Daí,  $V(BCEFGH) = V(IJEFAD)$ . Desses fatos,

$$V(ABCDEFGH) = V(ABCDEFIJ).$$

**2° caso:** Os paralelogramos que constituem a face superior possuem como intersecção um paralelogramo, veja a Figura 2.5.

Note que o sólido  $ABCDFELK$  é comum a ambos os paralelepípedos. Então, basta mostrarmos que os sólidos  $EFIJAD$  e  $GHLKBC$  têm o mesmo volume. Para tanto, mostraremos que  $EFIJAD \equiv GHLKBC$ . Com efeito, como as extremidades das arestas laterais desses paralelepípedos são pontos colineares, temos que

$$\overline{JK} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{EG} \quad \text{e} \quad \overline{FH} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{IL}.$$

Daí,

$$\overline{JE} = \overline{JK} - \overline{EK} = \overline{EG} - \overline{EK} = \overline{KG} \quad \text{e} \quad \overline{IF} = \overline{IL} - \overline{FL} = \overline{FH} - \overline{FL} = \overline{LH}.$$

Além disso, como  $ABCDFEGH$  e  $ABCDIJKL$  são paralelepípedos, segue que os paralelogramos  $EFIJ$  e  $KLHG$  são congruentes. Pelo mesmo fato, são congruentes os triângulos:  $AJE$  e  $BGK$ ;  $DIF$  e  $CLH$  e os paralelogramos:  $BCHG$  e  $ADFE$ ;  $ADIJ$  e  $BCLK$ . Como

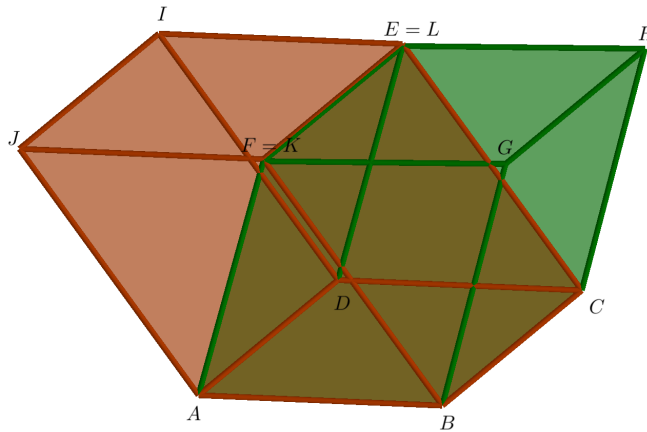


Figura 2.4: Segmento  $\overline{EF}$  comum aos paralelepípedos  $ABCDEFGH$  e  $ABCDEFIJ$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

os sólidos  $EFIJAD$  e  $GHLKBC$  têm as faces duas a duas congruentes, temos  $EFIJAD \equiv GHLKBC$ . Daí, segue pelo Axioma II (vide capítulo 2),  $V(EFIJAD) = V(GHLKBC)$ , como queríamos mostrar.

**3º caso:** Os paralelogramos que constituem a face superior possuem intersecção vazia como mostra a Figura 2.6.

Consideremos o caso em que  $\overline{KF} \leq \overline{JK}$ . Inicialmente, considere dois pontos,  $M$  e  $N$ , pertencentes aos segmentos  $JK$  e  $FG$ , respectivamente, de modo que  $\overline{MN} \equiv \overline{AB}$ . De maneira análoga, fixe os pontos  $P$  e  $O$  pertencentes aos segmentos  $IL$  e  $EH$ , respectivamente, de sorte que  $\overline{PO} \equiv \overline{DC}$ ,  $\overline{PD} \parallel \overline{MA}$  e  $\overline{CO} \parallel \overline{BN}$ . Assim, por construção, obtemos o paralelepípedo  $ABCDPMNO$  (veja Figura 2.7) que, pelos casos anteriores já provados, possui o mesmo volume que os paralelepípedos  $ABCDIJKL$  e  $ABCDEFGH$ . Logo,

$$V(ABCDEFGH) = V(ABCDIJKL).$$

O caso em que  $\overline{KF} > \overline{JK}$ , basta escolhermos um certo número de paralelepípedos de modo que podemos recair nos 1º e/ou 2º casos. ■

**Teorema 2.4** *Se paralelepípedos tiverem mesma base e mesma altura, então eles têm o mesmo volume.*

**Demonstração:** Sejam  $ABCDIJKL$  e  $ABCDPMNO$  dois paralelepípedos dados como na Figura 2.8.

Daí, podemos construir um paralelepípedo  $ABCDEFGH$  (veja a Figura 2.8) de modo que suas arestas superiores são colineares com as arestas superiores dos outros dois paralelepípedos. Logo, pelo Teorema 2.3, os paralelepípedos  $ABCDIJKL$ ,  $ABCDPMNO$  e  $ABCDEFGH$  têm o mesmo volume. E, portanto,

$$V(ABCDIJKL) = V(ABCDPMNO).$$

■

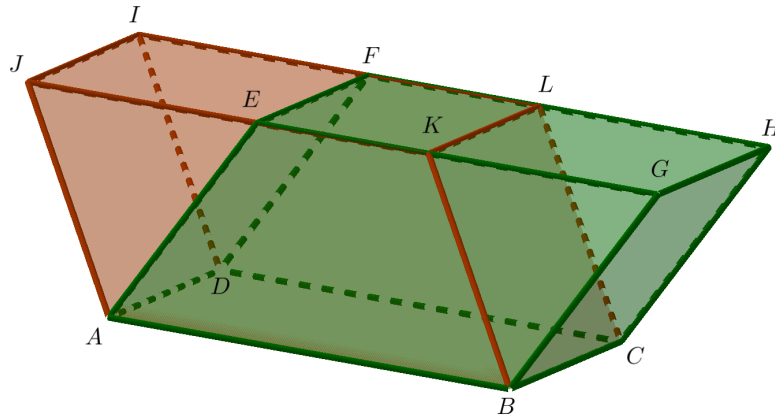


Figura 2.5: Paralelogramo  $EFLK$  comum aos paralelepípedos  $ABCDFEGH$  e  $ABCDIJKL$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

A definição a seguir e os resultados associados à mesma serão fundamentais para demonstrarmos que o volume de um paralelepípedo qualquer é igual ao produto da área da base pela sua respectiva altura.

**Definição 2.5** *Dois polígonos,  $P$  e  $P'$ , são ditos **equidecomponíveis** quando existem decomposições*

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$$

e

$$P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n$$

de tal modo que cada polígono  $P_i$  é congruente ao polígono  $P'_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Além disso, exige-se que os polígonos  $P_{i,s}$  tenham seus interiores, dois a dois disjuntos, o mesmo ocorrendo com os  $P'_i$ .

**Lema 2.1** *Se um polígono  $P$  é equidecomponível a um polígono  $P'$ , e o polígono  $P'$  é equidecomponível a um polígono  $P''$ , então os polígonos  $P$  e  $P''$  também são equidecomponíveis.*

**Demonstração.** Como  $P$  é equidecomponível a  $P'$ , segue que existem as decomposições

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n \quad \text{e} \quad P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n,$$

tais que  $P_i \equiv P'_i$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Isso significa que podemos reorganizar os polígonos  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$  para resultarem em  $P$  ou podemos reorganizar os polígonos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  para resultarem em  $P'$ . Por outro lado,  $P'$  é equidecomponível a  $P''$ , assim existe uma decomposição em polígonos de  $P'$  que, reorganizados, resultam em  $P''$ . Mas  $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  resulta em  $P'$ , então a união  $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  pode ser decomposta em polígonos menores ainda, ou não, de modo que essa nova decomposição forma  $P''$ . Logo,  $P$  e  $P''$  são equidecomponíveis. ■

O Lema 2.2, a seguir, é um resultado da Geometria plana que estabelece condições suficientes para que dois paralelogramos sejam equidecomponíveis. A notação  $A(ABC)$  será utilizada para indicar a área do polígono  $ABC$ .

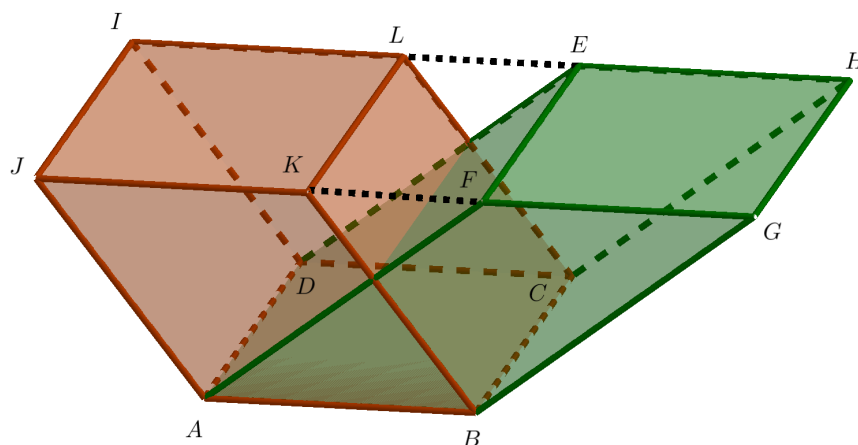


Figura 2.6: Faces superiores dos paralelepípedos  $ABCDEFGH$  e  $ABCDIJKL$  com intersecção vazia.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

**Lema 2.2** *Se dois paralelogramos possuem mesma base e áreas iguais, então eles são equidecomponíveis.*

**Demonstração:** Sejam  $ABCD$  e  $ABEF$  dois paralelogramos que têm  $\overline{AB}$  como base comum e  $A(ABCD) = A(ABEF)$ . Assim, suas alturas possuem mesma medida, o que implica dizer que os segmentos  $\overline{CD}$  e  $\overline{EF}$  estão sobre uma mesma reta. Se esses dois segmentos coincidirem, teremos, então, dois paralelogramos congruentes e assim possuem mesma área, provando o resultado. Agora, se  $\overline{CD} \neq \overline{EF}$  tracemos na reta  $AB$ , consecutivamente, uma série de segmentos congruentes ao segmento  $AB$ . Em seguida, em cada vértice desses segmentos, tracemos retas paralelas aos segmentos  $AD$  e  $AF$  formando assim polígonos, conforme mostra a Figura 2.9.

Dessa forma, os polígonos 1, 2, 3 e 4 compõem ambos os paralelogramos  $ABCD$  e  $ABEF$ . Logo, esses polígonos são equidecomponíveis. ■

O lema a seguir é válido para quaisquer polígonos de mesma área. Esse resultado da Geometria plana é conhecido como Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien (vide [14]). Porém, neste trabalho, vamos nos restringir apenas a paralelogramos.

**Lema 2.3** *Se dois paralelogramos possuem mesma área, então eles são equidecomponíveis.*

**Demonstração:** Sejam  $ABCD$  e  $EFGH$  dois paralelogramos de mesma área, como ilustra a Figura 2.10.

Sem perda de generalidade, dentre  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{EF}$  e  $\overline{FG}$ , considere  $\overline{AB}$  como o de maior medida. Conforme mostra a Figura 2.11, considere o ponto  $P$  pertencente à reta  $GH$  em que  $P$  está situado à esquerda de  $H$ , de modo que  $\overline{PE} \equiv \overline{AB}$ , e seja  $\gamma$  a circunferência de raio  $\overline{AB}$  e de centro  $E$ .

Como  $\overline{AB} > \overline{EH}$ , então teremos dois pontos de intersecção da circunferência com a reta  $GH$ . Daí, temos que o paralelogramo  $EFQP$  tem um lado comum e mesma área que o retângulo  $EFGH$ , que também é um paralelogramo. Pelo Lema 2.2, segue que  $EFGH$  e

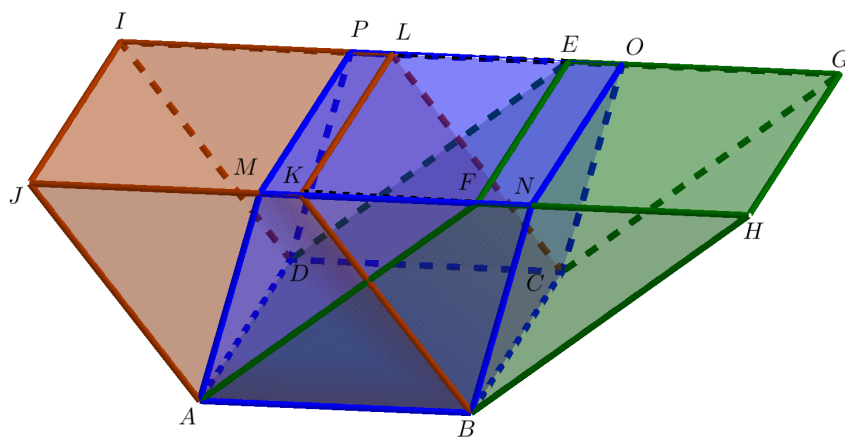


Figura 2.7: Construção do paralelepípedo  $ABCDPMNO$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

$EFQP$  são equidecomponíveis. Analogamente,  $EFQP$  e  $ABCD$  são equidecomponíveis. E segue do Lema 2.1, que  $ABCD$  e  $EFGH$  são equidecomponíveis. ■

Retomando para a Geometria espacial, verificaremos agora que se dois paralelepípedos possuírem mesmas alturas e mesmas bases será suficiente para que estes possuam mesmo volume.

**Teorema 2.5** *Se dois paralelepípedos possuem mesma altura e bases com a mesma área, então eles têm o mesmo volume.*

**Demonstração:** Sejam  $P$  e  $P'$  dois paralelepípedos com a mesma altura e bases  $B$  e  $B'$ , respectivamente, com mesma área, conforme ilustra a Figura 2.12.

Como  $B$  e  $B'$  têm a mesma área, segue do Lema 2.3 que  $B$  e  $B'$  são equidecomponíveis, ou seja, é possível escrever  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$  como união de  $n$  partes disjuntas, de modo que  $B' = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ . Assim, podemos decompor os paralelepípedos  $P$  e  $P'$  em  $n$  outros paralelepípedos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , com a base de  $P_i$  sendo  $B_i$  para  $i = 1, \dots, n$ , e tais que  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  e  $P' = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  onde para,  $i \neq j$ , os paralelepípedos  $P_i, P_j$  têm uma face em comum ou intersecção vazia. Daí, segue do Axioma III que  $P$  e  $P'$  têm o mesmo volume. ■

**Teorema 2.6** *O volume de um paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela sua respectiva altura.*

**Demonstração:** Considere um paralelepípedo  $ABCDEFGH$  de base  $ABCD$  e altura  $h$ , conforme ilustra a Figura 2.13.

Considere  $r, s$  e  $t$ , retas contidas no plano  $ABCD$ , de sorte que,  $r$  é perpendicular ao segmento  $AB$  e passa por  $A$ ,  $s$  é perpendicular ao segmento  $AB$  e passa por  $B$ ,  $t$  é paralela a  $AB$  passando por  $D$  e  $C$  e intersecta as retas  $r$  e  $s$  nos pontos  $A'$  e  $B'$ , conforme mostra a Figura 2.14.

Agora, tracemos dois planos perpendiculares à base  $ABCD$ :  $\alpha$  que passa por  $\overline{AA'}$  e  $\beta$  que passa por  $\overline{BB'}$ . Assim, fixando  $A_1, C_1, B_1$  e  $D_1$  como as intersecções entre as retas

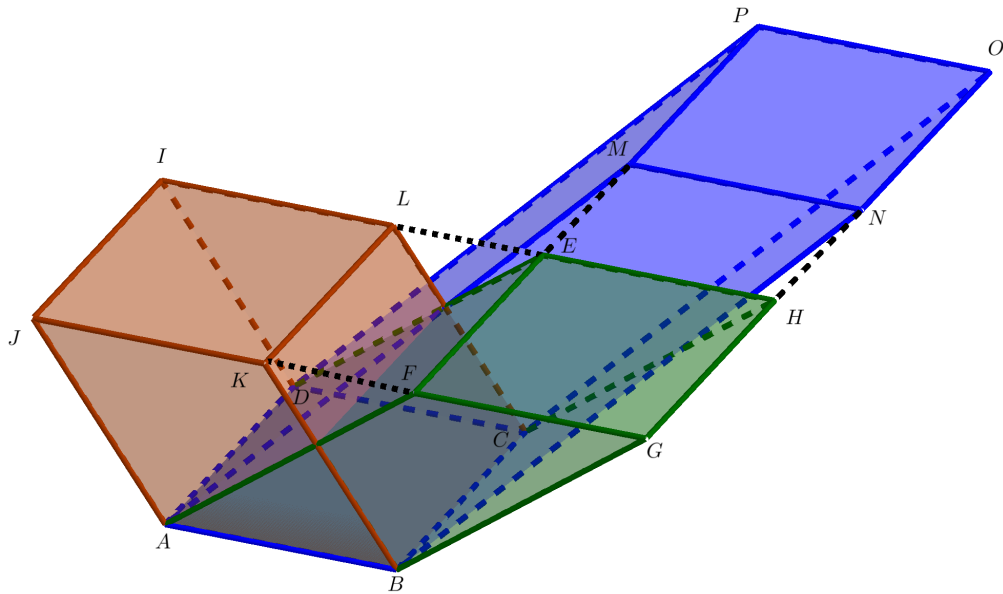


Figura 2.8: Paralelepípedos com mesma base e mesma altura.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

$FG$  e  $EH$  com os planos  $\alpha$  e  $\beta$ , obtemos um paralelepípedo retângulo  $ABCDB_1A_1C_1D_1$  que possui base  $ABB'A'$  com mesma área que o quadrilátero  $ABCD$  (base do paralelepípedo  $ABCDEF GH$ ) e mesma altura  $h$  do paralelepípedo  $ABCDEF GH$  (veja a Figura 2.14).

Logo, pelo Teorema 2.5, os paralelepípedos  $ABCDB_1A_1C_1D_1$  e  $ABCDEF GH$  possuem o mesmo volume. Segue do Teorema 2.1 que

$$V(ABCDEF GH) = V(ABCDB_1A_1C_1D_1) = A(ABB'A') \cdot h = A(ABCD) \cdot h,$$

isto é,

$$V(ABCDEF GH) = A(ABCD) \cdot h,$$

como queríamos mostrar.

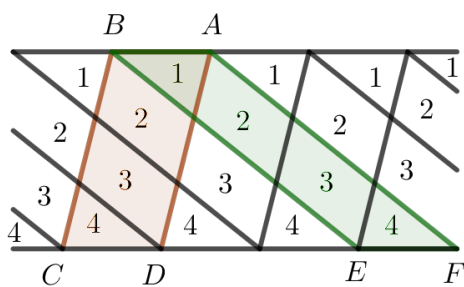


Figura 2.9: Paralelogramos  $ABCD$  e  $ABEF$  com mesma base e áreas iguais.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

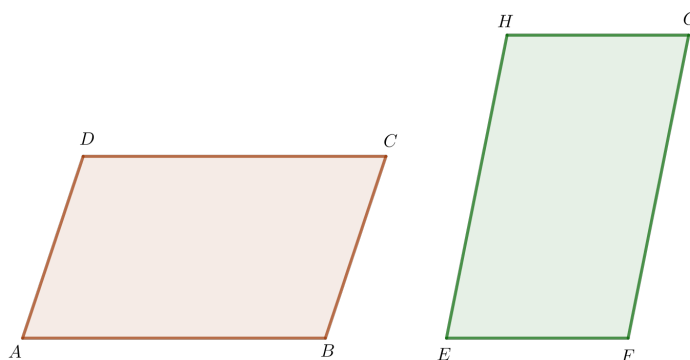


Figura 2.10: Paralelogramos  $ABCD$  e  $EFGH$  com mesma área.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

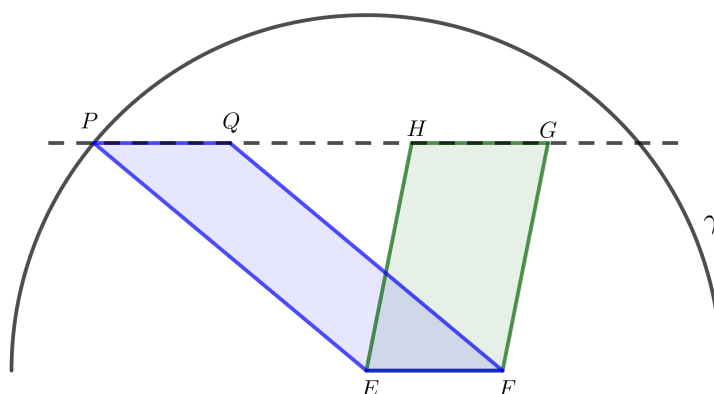


Figura 2.11: Circunferência de raio  $\overline{AB}$  e de centro  $E$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.



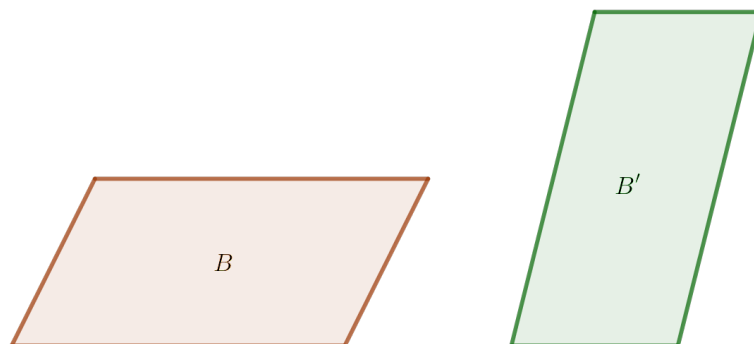


Figura 2.12: Bases  $B$  e  $B'$  com mesma área.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

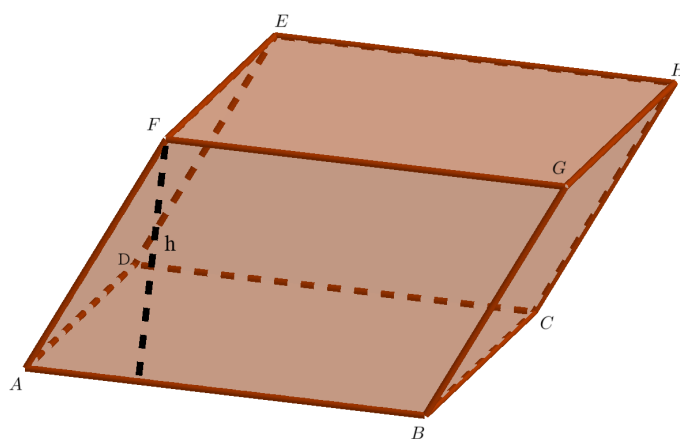


Figura 2.13: Paralelepípedo  $ABCDEFGH$  de base  $ABCD$  e altura  $h$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

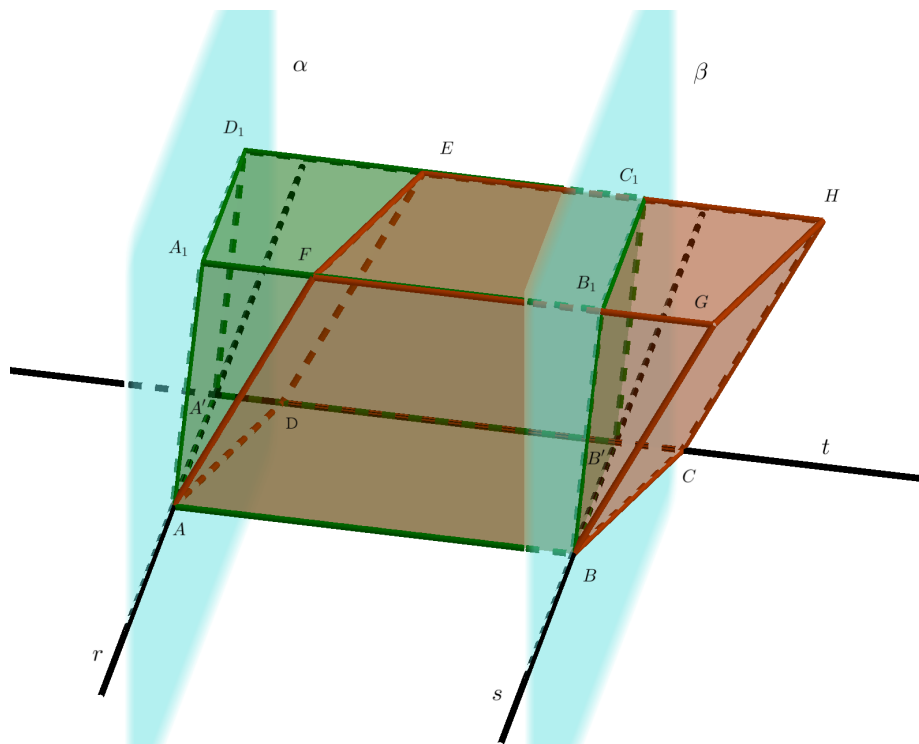


Figura 2.14: Construção do paralelepípedo  $ABCDB_1A_1C_1D_1$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

# Capítulo 3

## Volume da pirâmide e do cone

Neste capítulo, usaremos o método da exaustão para calcular o volume da pirâmide. Para o volume do cone, faremos uso do conceito de supremo de um conjunto. Ao final, demonstraremos a fórmula para o cálculo do volume de um tronco de cone que será fundamental para calcular o volume da esfera no capítulo seguinte. Aqui, utilizamos as referências [1], [2], [3], [4], [5] e [13].

### 3.1 Volume do prisma

Apesar de não abordarmos neste trabalho a fórmula para o cálculo do volume do cilindro (para este caso vide [1]), iniciamos este capítulo com a definição do mesmo com o objetivo de definir prisma como um caso particular de cilindro.

**Definição 3.1** *Sejam  $F$  uma figura plana contida em um plano  $\pi$  e  $g$  um segmento de reta não paralelo a este plano. A reunião de todos os segmentos de retas com origem em  $F$ , paralelos e congruentes a  $g$  é chamada de **cilindro**  $C$ , de **base**  $F$  e **geratriz**  $g$ .*

**Definição 3.2** *Quando a base do cilindro é um polígono, denominamos esse sólido de **prisma**.*

A Figura 3.1 ilustra exemplos de cilindro e de prisma.

**Teorema 3.1** *O volume de um prisma de base triangular é igual ao produto da área da base pela respectiva altura.*

**Demonstração:** Seja  $ABCA_1B_1C_1$  um prisma de base  $ABC$  e altura  $h$ . Traçando as paralelas convenientes, completamos o prisma, conforme mostra a Figura 3.2, e formamos o paralelepípedo  $ABDCA_1B_1D_1C_1$ .

Como em paralelogramos os lados opostos são congruentes, segue que o prisma  $BCDB_1C_1D_1$  agregado é congruente ao prisma inicial  $ABCA_1B_1C_1$  e, pelo Axioma II (vide capítulo 2), esses prismas têm o mesmo volume. Note que a diagonal  $\overline{BC}$  do quadrilátero  $ABDC$  o divide em dois triângulos congruentes:  $ABC$  e  $DBC$ . Daí,  $A(ABDC) = 2 \cdot A(ABC)$ . Pelo Teorema 2.6, o volume do paralelepípedo  $ABDCA_1B_1C_1D_1$  é dado por

$$V(ABDCA_1B_1C_1D_1) = A(ABDC) \cdot h = 2 \cdot A(ABC) \cdot h. \quad (3.1)$$

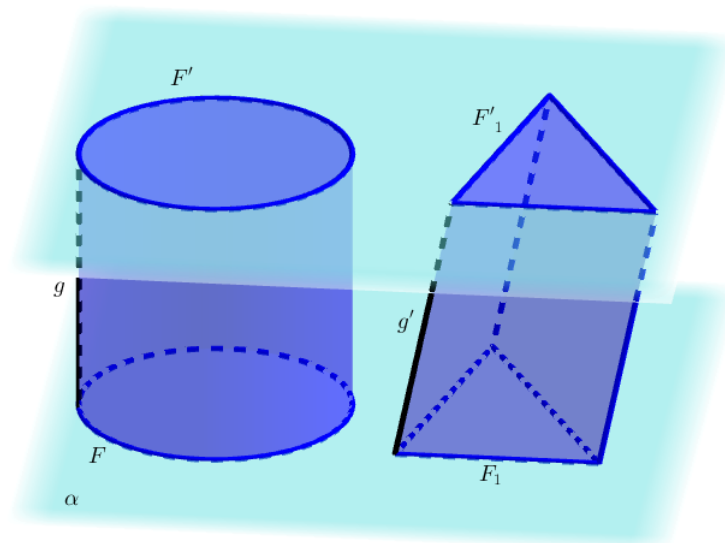


Figura 3.1: Cilindro de base  $F$  e prisma de base  $F_1$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Por outro lado,

$$V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = 2 \cdot V(ABCA_1 B_1 C_1). \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2), temos

$$2 \cdot V(ABCA_1 B_1 C_1) = 2 \cdot A(ABC) \cdot h,$$

donde

$$V(ABCA_1 B_1 C_1) = A(ABC) \cdot h,$$

como queríamos demonstrar. ■

## 3.2 Volume da pirâmide

Antes de definir cone e, conseqüentemente, pirâmide, vejamos a definição de polígono convexo.

**Definição 3.3** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 3$ , e  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pontos distintos do plano. Dizemos que  $A_1 A_2 \dots A_n$  é um **polígono (convexo)** se, para  $1 \leq i \leq n$ , a reta  $A_i A_{i+1}$  não contém nenhum outro ponto  $A_j$ , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui consideramos  $A_1 = A_{n+1}$ ).*

A Figura 3.3 ilustra exemplo de polígono, não-polígono e polígono convexo.

Os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são os **vértices** do polígono; os segmentos  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$  (ou, por vezes, seus comprimentos) são os **lados** do polígono.

**Definição 3.4** *Um **cone**  $K$ , tendo como **base** uma figura plana  $F$ , e como **vértice** o ponto  $V$  situado fora do plano de  $F$ , é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto  $V$  a todos os pontos de  $F$ .*

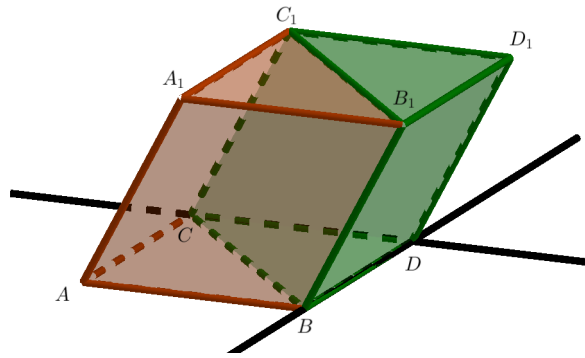


Figura 3.2: Prisma  $ABCA_1B_1C_1$  e paralelepípedo  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

O plano  $F$ , que contém a base do cone  $K$ , será considerado horizontal. A distância do vértice  $V$  a este plano chama-se **altura** do cone.

**Definição 3.5** *Um cone cuja base é um polígono convexo chama-se **pirâmide**.*

A Figura 3.4 ilustra exemplo de cone e uma pirâmide de base pentagonal.

Neste trabalho, iremos abordar apenas pirâmides cuja base é um polígono convexo. As faces laterais de uma pirâmide qualquer são triângulos. Uma pirâmide cuja base também é um triângulo chama-se **tetraedro** ou **pirâmide de base triangular** ou simplesmente **pirâmide triangular**.

As demonstrações do Teorema 3.2 e do Lema 3.1 a seguir serão omitidas, mas caso o leitor tenha interesse poderá encontrá-las em [12]. Esses resultados serão importantes para demonstrarmos o Teorema 3.3.

**Teorema 3.2 (Teorema da base média)** *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Se  $MN$  é a base média de  $ABC$  relativa a  $BC$ , então a reta  $MN$  é paralela a reta  $BC$ . Reciprocamente, se pelo ponto médio  $M$  do lado  $AB$  traçarmos a paralela ao lado  $BC$ , então tal reta intersecta o lado  $AC$  em seu ponto médio  $N$ . Ademais, em qualquer um dos casos acima, temos*

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}.$$

**Lema 3.1** *Dois planos distintos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos se, e somente se, existirem retas  $r, s \subset \alpha$ , concorrentes e paralelas a  $\beta$ .*

Na demonstração do resultado a seguir, que será fundamental para demonstrarmos o Teorema 3.3, utilizaremos o Método da Exaustão. Essa prova que faremos, em linguagem moderna, foi dada por Euclides em um de seus livros (livro XII) de sua célebre obra *Os Elementos* (vide [5]).

**Teorema 3.3** *Pirâmides triangulares de mesma altura e cujas bases têm mesma área têm, necessariamente, o mesmo volume.*

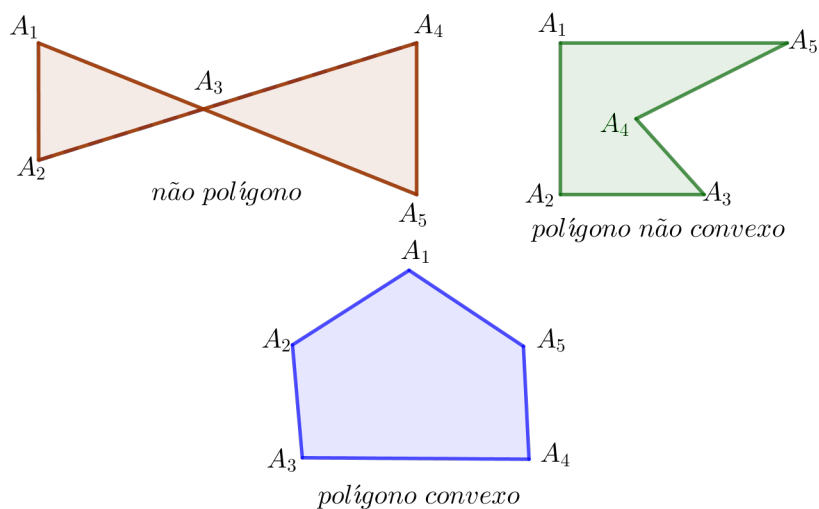


Figura 3.3: Exemplos de polígonos e não-polígonos.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

**Demonstração.** Sejam  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  duas pirâmides de mesma altura  $h$ , cujas bases  $BCD$  e  $B'C'D'$  têm a mesma área. Sejam  $E, F, G, H, J, K$  os pontos médios das arestas de  $ABCD$ .

Podemos decompor a pirâmide  $ABCD$  em quatro partes: as pirâmides menores  $P_1 = AEF G$  e  $P_2 = FBKH$  e dois prismas triangulares  $T_1 = EFGJHC$  e  $T_2 = DJHKFG$ , conforme mostra a Figura 3.5.

**Afirmção 1:** As pirâmides  $P_1$  e  $P_2$  são congruentes.

Como  $F$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$ , segue que  $\overline{BF} \equiv \overline{FA}$ . Uma vez que  $F$  e  $G$  são os pontos médios das arestas  $\overline{AB}$  e  $\overline{AD}$  tem-se, pelo Teorema da base média, que  $\overline{FG} \equiv \frac{1}{2}\overline{BD}$  e  $\overline{FG}$  é paralelo a  $\overline{BD}$ . Daí, e como  $K$  é o ponto médio de  $\overline{BD}$ , temos que  $\overline{FG} = \overline{BK}$  e  $F\hat{B}K \equiv A\hat{F}G$ . Assim, pelo caso LAL os triângulos  $AFG$  e  $FBK$  são congruentes, isto é,  $\Delta AFG \equiv \Delta FBK$ .

Com um raciocínio análogo ao que fizemos acima, mostra-se também que:  $\Delta AEF \equiv \Delta FHB$ ,  $\Delta AEG \equiv \Delta FHK$  e  $\Delta EFG \equiv \Delta HBK$ . Como as pirâmides  $P_1$  e  $P_2$  têm suas faces duas a duas congruentes, segue que  $P_1 \equiv P_2$ , mostrando, assim, a Afirmção 1. E pelo Axioma II (vide capítulo 2)

$$V(P_1) = V(P_2). \quad (3.3)$$

Com uma argumentação análoga a da prova da Afirmção 1, mostra-se que:  $\Delta JDK \equiv \Delta CJH \equiv \Delta KHJ$ . Assim, a área do paralelogramo  $DJHK$  é o dobro da área do triângulo  $CHJ$ , isto é,

$$A(JHKD) = 2 \cdot A(CHJ). \quad (3.4)$$

Se ao prisma  $T_2$  juntarmos outro prisma  $\tilde{T}_2$  congruente a  $T_2$  (veja a Figura 3.6) obtemos um paralelepípedo  $P'$ , onde  $V(P') = 2 \cdot V(T_2)$ .

Por outro lado,  $P'$  tem a mesma altura que o prisma  $T_1$  com base  $CHJ$ . Daí, observando que a base de  $P'$  é dada por  $JAKD$ , segue de (3.4) que  $V(P') = 2 \cdot V(T_1)$ . Logo,

$$V(T_2) = V(T_1). \quad (3.5)$$

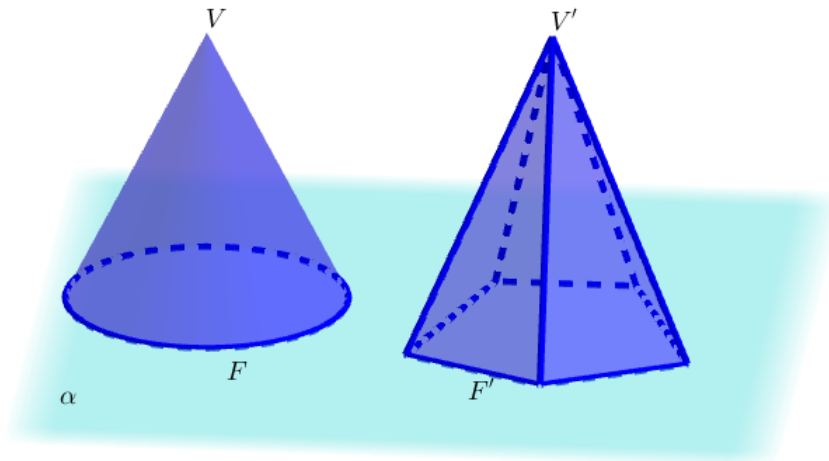


Figura 3.4: Cone de base  $F$  e vértice  $V$  e pirâmide de base  $F'$  e vértice  $V'$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Ademais, como  $P_1$  e  $T_1$  têm a mesma base  $EFG$  e a mesma altura, segue que

$$V(P_1) < V(T_1), \quad (3.6)$$

pois  $T_1$  é um prisma, enquanto que  $P_1$  é uma pirâmide. Combinando as igualdades (3.3) e (3.5), temos

$$\begin{aligned} V(ABCD) &= V(P_1) + V(P_2) + V(T_1) + V(T_2) \\ &= 2V(P_1) + 2V(T_1) \end{aligned}$$

donde,

$$V(P_1) + V(T_1) = \frac{V(ABCD)}{2}.$$

Deste fato, segue de (3.5) e (3.6) que

$$V(T_1 \cup T_2) = V(T_2) + V(T_1) > \frac{V(ABCD)}{2}, \quad (3.7)$$

isto é, o volume da união  $T_1 \cup T_2$  é maior do que a metade do volume da pirâmide  $ABCD$ .

Analogamente ao que foi feito com a pirâmide  $ABCD$ , podemos dividir  $A'B'C'D'$  em duas pirâmides  $P'_1$  e  $P'_2$  congruentes, isto é,

$$P'_1 \cong P'_2 \quad (3.8)$$

e dois prismas  $T'_1$  e  $T'_2$ , de modo que

$$V(T'_1 \cup T'_2) > \frac{V(A'B'C'D')}{2} \text{ e } V(T'_2) = V(T'_1). \quad (3.9)$$

**Afirmção 2:**  $T'_1$  e  $T_1$  têm a mesma altura.

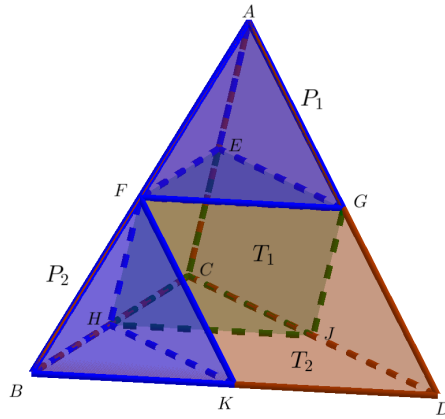


Figura 3.5: Pirâmides  $ABCD$ ,  $AEFG$  e  $FBKH$  e prismas  $T_1$  e  $T_2$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

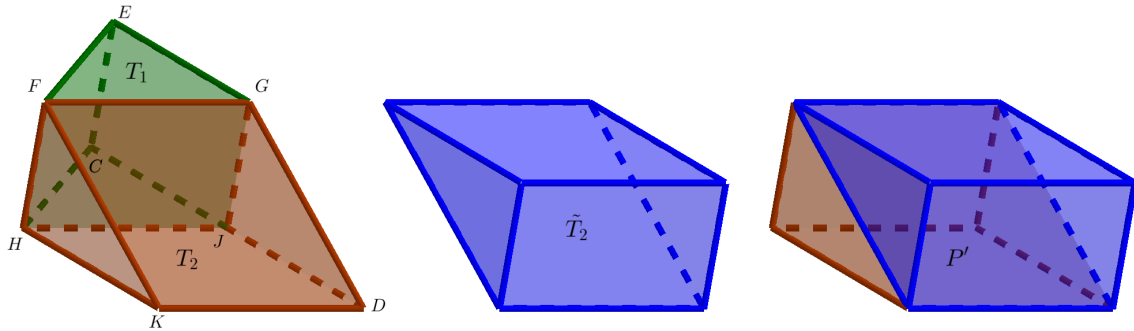


Figura 3.6: Prismas  $T_1, T_2$  e  $\tilde{T}_2$  e paralelepípedo  $P'$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

O plano que contém  $EFG$  é paralelo ao plano que contém  $CBD$ , pois  $\overline{EF} \parallel \overline{CB}$  e  $\overline{EG} \parallel \overline{CD}$  e os segmentos  $\overline{EF}$  e  $\overline{EG}$  concorrem no ponto  $E$  (vide Lema 3.1). Como as alturas de  $P_1$  e  $P_2$  são iguais, pois são congruentes, e as alturas de  $P_2$  e  $T_1$  também são iguais, segue que as alturas de  $P_1$  e  $T_1$  são iguais. Isso nos garante que a distância entre os planos  $EFG$  e  $BCD$  é a metade da altura  $h$  de  $ABCD$ . Agora, uma vez que as alturas das pirâmides  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  são iguais a  $h$ , temos também que a distância entre  $EFG$  e  $B'C'D'$  é igual à metade de  $h$  (veja a Figura 3.7).

De modo análogo ao que foi feito com a pirâmide  $ABCD$ , o plano  $E'F'G'$  é paralelo ao plano  $B'C'D'$  e dista de  $B'C'D'$  a metade de  $h$ . Isso completa a prova da Afirmação 2.

Agora, usando (3.4) e o fato de que  $\Delta CHJ \equiv \Delta HBK$  temos

$$A(BCD) = 4 \cdot A(CHJ). \quad (3.10)$$

De modo análogo,

$$A(B'C'D') = 4 \cdot A(C'H'J'). \quad (3.11)$$



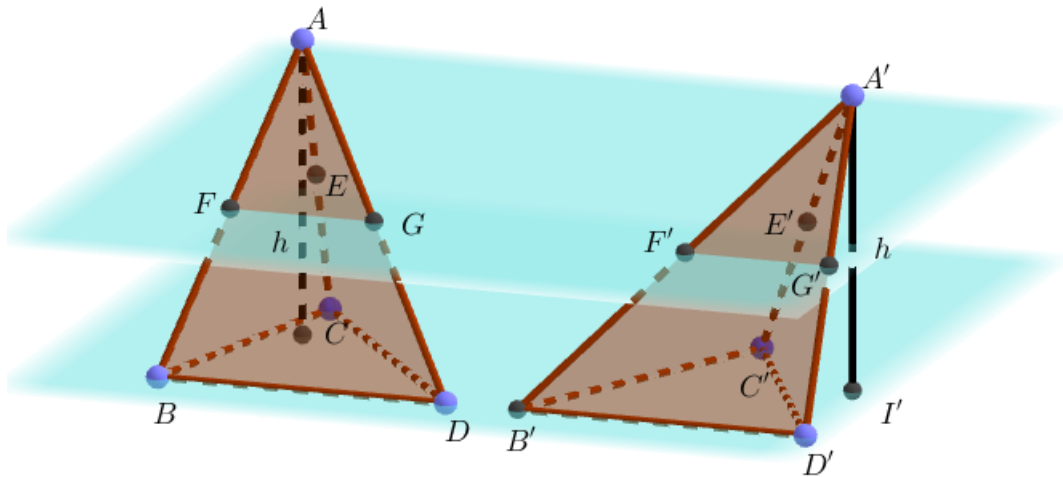


Figura 3.7: Pirâmides  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  de alturas  $h$  e  $h'$ , respectivamente.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

De (3.10) e (3.11), e pelo fato de que as pirâmides  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  possuem bases com mesma área, tem-se

$$A(CHJ) = A(C'H'J'). \quad (3.12)$$

Desse fato, da Afirmação 1 e da congruência (3.8) segue que as bases das pirâmides menores  $P_1, P_2, P'_1$  e  $P'_2$  possuem mesma área. Ainda pela igualdade (3.12), concluímos que os prismas  $T'_1$  e  $T_1$  possuem mesma área da base e, pela Afirmação 2,  $T'_1$  e  $T_1$  possuem o mesmo volume. Daí, usando (3.5) e (3.9), segue que os prismas  $T_1, T_2, T'_1$  e  $T'_2$  possuem o mesmo volume.

Assim, é possível repetirmos esse processo de modo indutivo, dividindo as pirâmides menores ( $P_1, P_2, P'_1$  e  $P'_2$ ) da mesma forma (já que todas essas pirâmides têm sempre a mesma área da base e alturas em comum), de modo que mais da metade de seus volumes sejam cobertos pela união de dois prismas. Ademais, os prismas obtidos nessas decomposições sempre têm o mesmo volume. Então, a possível diferença dos volumes das pirâmides correspondentes estaria nas pirâmides menores a cada decomposição, desde que repetida o mesmo número de vezes em cada pirâmide original.

Sejam  $V = V(ABCD)$  e  $V' = V(A'B'C'D')$ . Se  $V > V'$ , então  $V - V' > 0$ , ou seja, a diferença  $V - V'$  é um número positivo. Uma vez que os prismas resultantes a cada decomposição possuem volume maior do que a metade do volume da pirâmide inicial (vide (3.7) e (3.9)), percebemos que as pirâmides menores, parte residual que resultam de cada processo de decomposição, têm cada vez volumes menores que a metade do volume da pirâmides iniciais. Assim, podemos realizar o procedimento descrito acima e conseguir uma parte residual em cada pirâmide original que seja menor do que o número  $c = V - V'$ , ou seja, existiriam números  $a =$  parte residual de  $V$ ,  $b =$  parte residual de  $V'$  tais que  $a < c$  e  $b < c$ , que é um absurdo uma vez que  $c = a - b$  ou  $c = b - a$ .

De modo análogo, considerando o caso em que  $V' > V$ , também chegamos a uma contradição. Portanto,  $V = V'$ . ■

**Teorema 3.4** *Uma pirâmide triangular tem volume igual a um terço do volume de um prisma triangular de mesma base e mesma altura.*

**Demonstração.** Seja  $P = DEFB$  uma pirâmide triangular e seja  $T$  o prisma triangular  $ABCDEF$ , com mesma base e mesma altura que  $P$ . Desse modo, podemos dividir o prisma  $T$  em três pirâmides:  $P$ ,  $P_1 = ABCF$  e  $P_2 = ABDF$  (veja a Figura 3.8).

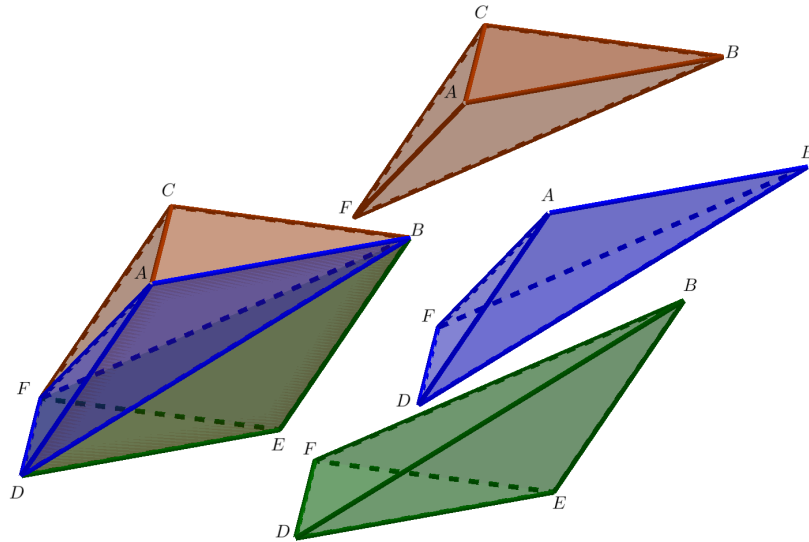


Figura 3.8: Prisma  $T$  e pirâmides  $P$ ,  $P_1 = ABCF$  e  $P_2 = ABDF$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

As pirâmides  $P$  e  $P_1$  têm mesma altura e, pela definição de prisma, os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes e, assim, possuem a mesma área. Logo, pelo Teorema 3.3, temos

$$V(P) = V(P_1). \quad (3.13)$$

Por outro lado, uma vez que o paralelogramo  $ABED$  é a união dos triângulos  $BDE$  e  $ABD$ , que são as bases das pirâmides  $P$  e  $P_2$ , respectivamente, a distância do ponto  $F$  (vértice das pirâmides  $P$  e  $P_2$ ) ao plano que contém o paralelogramo  $ABED$  pode ser considerada como altura comum das pirâmides  $P$  e  $P_2$ . Além disso, como  $ABED$  é um paralelogramo e  $\overline{BD}$  é uma de suas diagonais, segue, pelo caso LLL, que  $\Delta ABD \cong \Delta EDB$ . Assim, os triângulos  $ABD$  e  $BDE$  possuem a mesma área. Por estes fatos, concluímos, do Teorema 3.3, que

$$V(P) = V(P_2). \quad (3.14)$$

Como  $V(T) = V(P) + V(P_1) + V(P_2)$ , segue, de (3.13) e (3.14), que

$$V(P) = \frac{1}{3} \cdot V(T).$$

Ou ainda, como o prisma  $T$  e a pirâmide  $P$  têm mesma altura e mesma área da base, sendo  $b$  a área da base de  $P$  e  $h$  a sua altura, segue, do Teorema 3.1, que

$$V(P) = \frac{1}{3} \cdot b \cdot h.$$

■

**Teorema 3.5** *O volume de uma pirâmide qualquer é um terço do produto da área da sua base pela respectiva altura.*

**Demonstração.** Sejam  $P$  uma pirâmide de altura  $h$  e  $P_n$  o polígono de  $n$  lados que compõe sua base. Considere  $O$  um ponto qualquer interior a  $P_n$  e  $b$  a área da base de  $P$ . Sendo  $A_1, A_2, \dots, A_n$  os vértices de  $P_n$ , então podemos decompor  $P_n$  em  $n$  triângulos dois a dois disjuntos, são eles:  $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_nA_1$ . Se  $b_i$  é a área do  $i$ -ésimo triângulo, então

$$b = \sum_{i=1}^n b_i.$$

Sendo  $T_i$  o  $i$ -ésimo triângulo, podemos ver  $P$  como a união disjunta de  $n$  pirâmides,  $\tilde{P}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , onde cada uma têm  $T_i$  como base. Daí, e do Axioma III (vide capítulo 2), temos

$$V(P) = \sum_{i=1}^n V(\tilde{P}_i).$$

Como as pirâmides  $\tilde{P}_i$  têm a mesma altura  $h$ , pelo Teorema 3.4, temos que

$$V(P) = \frac{1}{3} \cdot b_1 h + \frac{1}{3} \cdot b_2 h + \dots + \frac{1}{3} \cdot b_n h.$$

Como  $\frac{1}{3} \cdot h$  é comum a todas as parcelas acima, podemos reescrever a última igualdade da seguinte forma

$$V(P) = \frac{1}{3} \cdot h(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \frac{1}{3} \cdot bh,$$

como queríamos mostrar. ■

### 3.3 Volume do cone

Para deduzirmos a fórmula do volume do cone, precisamos de dois resultados auxiliares. As demonstrações dos mesmos podem ser encontradas em [2] (Lema 3.2) e [11] (Lema 3.3).

**Lema 3.2** *Seja  $P_n$  um polígono de  $n$  lados inscrito em uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . A área de  $P_n$  é dada por*

$$A(P_n) = \frac{1}{2} nr^2 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right).$$

**Lema 3.3** *Para  $x > 0$ , bem próximo de zero, temos  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$  bem próximo de 1, e menor que 1, isto é,*

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1 \quad e \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1,$$

para  $x \approx 0$  e  $x > 0$ .

O Lema 3.3 nos diz que quando  $x$  assume valores próximos de zero, o quociente  $\frac{\text{sen}x}{x}$  se aproxima de 1 e nunca assume o valor 1.

Seja  $C$  um cone e  $P_n$  uma pirâmide cuja base é um polígono regular de  $n$  lados, inscrito na base de  $C$ , a fim de calcular o volume de  $C$ , percebemos que conforme o número de lados do polígono da base de  $P_n$  aumenta, o volume de  $P_n$  se aproxima cada vez mais do volume de  $C$ . Essa ideia é a que iremos utilizar para provar o Teorema 3.6, a seguir, que nos diz como calcular o volume de um cone de base circular.

Essa demonstração segue as mesmas linhas que aparecem no trabalho de ALVES (vide [1]) e SILVA (vide [15]). Dessa forma, a prova do resultado que segue terá as mesmas linhas do que foi feito por ALVES e SILVA na demonstração do volume do cilindro circular reto e inclinado.

**Teorema 3.6** *O volume do cone  $C$  de altura  $h$  e base circular com centro  $O$  e raio  $r$ , é dado por um terço do produto da área da base pela altura, ou seja,*

$$V(C) = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

**Demonstração.** Seja  $P_n$  uma pirâmide cuja base é um polígono regular de  $n$  lados, inscrito na base de  $C$ .

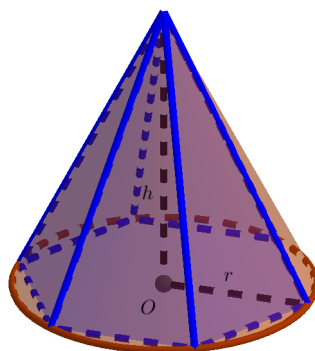


Figura 3.9: Caso particular de uma pirâmide de base hexagonal inscrita no cone  $C$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Considere  $X$  o conjunto de todos os poliedros retangulares  $R$  contidos em  $C$ . Vimos no capítulo 2 que

$$V(C) = \sup_{R \in X} V(R).$$

Note que para cada  $R \in X$  existe  $n_0$  suficientemente grande, tal que  $R \subset P_{n_0} \subset C$ . Daí, e do Axioma IV (vide capítulo 2), segue que

$$V(R) \leq V(P_{n_0}) \leq V(C). \tag{3.15}$$

Mostraremos agora que  $\sup_{R \in X} V(R) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n)$ . Com efeito, suponha, por absurdo, que

$$\sup_{R \in X} V(R) > \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n).$$

Assim, existe  $R_0 \in X$  tal que

$$V(P_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) < V(R_0), \forall n \in \mathbb{N},$$

que é uma contradição, de acordo com (3.15). Logo,

$$\sup_{R \in X} V(R) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n). \quad (3.16)$$

Por outro lado, temos que

$$\sup_{R \in X} V(R) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n).$$

De fato, desde que  $P_n \in X$ , o supremo do conjunto  $\{V(R); R \in X\}$  é uma cota superior para o conjunto  $\{V(P_n); n \in \mathbb{N}\}$ . Logo, pela definição de supremo, temos

$$\sup_{R \in X} V(R) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n). \quad (3.17)$$

De (3.16) e (3.17)

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) = \sup_{R \in X} V(R), \quad (3.18)$$

deste feito,

$$V(C) = \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n).$$

Agora, iremos utilizar a igualdade anterior para provar, finalmente, que

$$V(C) = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Com efeito, do Teorema 3.5 e do Lema 3.2 temos que o volume de  $P_n$  é dado por

$$V(P_n) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} h n r^2 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right).$$

Como  $\frac{2\pi}{n} > 0$  e  $\frac{2\pi}{n} \approx 0$ , para  $n$  suficientemente grande, segue, do Lema 3.3, que

$$V(P_n) = \frac{1}{3} \pi h r^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{\frac{2\pi}{n}} \right) \approx \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{e} \quad V(P_n) < \frac{1}{3} \pi r^2 h, \quad (3.19)$$

para  $n$  suficientemente grande.

Afirmamos que  $\frac{1}{3} \pi r^2 h$  é a menor das cotas superiores para o conjunto  $\{V(P_n); n \in \mathbb{N}\}$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , existe, por (3.19),  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 < \frac{1}{3} \pi r^2 h - V(P_{n_0}) < \varepsilon,$$

isto é,

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h - \varepsilon < V(P_{n_0}).$$

Logo,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

o que implica de (3.18) que

$$V(C) = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

como queríamos mostrar. ■

Para atingir nosso objetivo do próximo capítulo, necessitaremos da fórmula para o cálculo do volume do tronco de cone cuja base é um círculo. Por isso, nos restringiremos apenas a cone de base circular na definição a seguir.

**Definição 3.6** *Sejam  $K$  um cone de base circular  $C$ ,  $\alpha$  um plano paralelo ao plano da base de  $K$  não contendo  $C$ ,  $C'$  a intersecção de  $\alpha$  com  $K$  e  $T'$  a parte de  $K$  entre  $C$  e  $C'$ . Denomina-se **tronco de cone** a figura espacial formada por  $T'$ ,  $C$  e  $C'$ .*

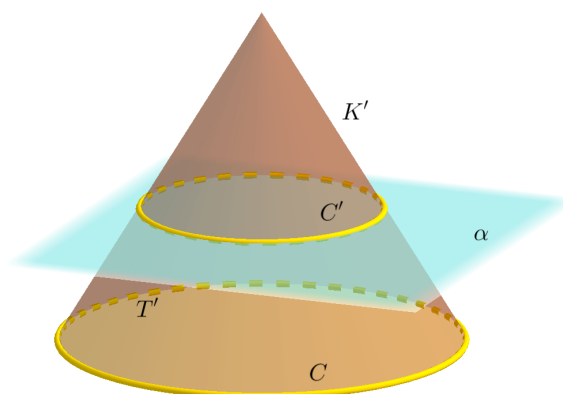


Figura 3.10: Tronco de cone formado por  $T'$ ,  $C$  e  $C'$  obtido a partir do cone  $K$ .

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Observando a Figura 3.10, notamos que o plano  $\alpha$  dá origem a um outro cone  $K'$  de base  $C'$ . Além disso, todo tronco de cone é obtido através de um cone. Na definição anterior, o tronco possui bases menor e maior:  $C'$  e  $C$ , respectivamente. A distância entre  $C$  e  $C'$  é denominada a altura do tronco de cone. Observamos que, como  $C$  e  $C'$  são círculos, cada base do tronco terá um respectivo raio.

**Teorema 3.7** *O volume do tronco de cone ( $V_{TC}$ ) de altura  $h$ , raio da base menor  $r$  e raio da base maior  $R$  é dado por*

$$V_{TC} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2).$$

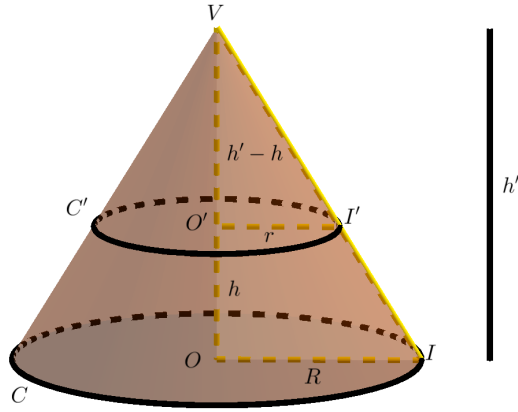


Figura 3.11: Cones  $K$  e  $K'$  de bases  $C$  e  $C'$ , respectivamente.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

**Demonstração.** Sejam  $C$  e  $C'$  as bases maior e menor do tronco, respectivamente, e  $V$  o vértice do cone  $K'$  de base  $C'$  que completa o tronco e forma um cone  $K$  de vértice  $V$  e base  $C$ . Sejam  $O$  e  $O'$  o centro de  $C$  e  $C'$ , respectivamente, e  $h'$  a altura do cone  $K$ .

Assim, a altura do cone  $K'$  é dada por  $h' - h$ . Considere, agora,  $t$  a reta que passa por  $O$  intersectando  $C$  em  $I$  e  $t'$  a reta que passa por  $O'$  paralelamente a  $r$  e intersecta  $C'$  em  $I'$  (veja a Figura 3.11). Note que o triângulo  $VO'I'$  é semelhante, pelo caso AA, ao triângulo  $VOI$ , isto é,  $VO'I' \sim VOI$ . Daí, temos

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'I'}{OI} \Leftrightarrow \frac{h' - h}{h'} = \frac{r}{R},$$

consequentemente

$$R(h' - h) = rh' \Leftrightarrow Rh' - rh' = Rh$$

e, portanto,

$$h' = \frac{Rh}{R - r}. \quad (3.20)$$

Além disso,  $V_{TC} = V(K) - V(K')$ . Por esses fatos, segue do Teorema 3.6 e da igualdade (3.20) que

$$\begin{aligned} V_{TC} &= \frac{\pi h' R^2}{3} - \frac{\pi (h' - h) r^2}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \left[ \frac{Rh}{R - r} R^2 - \left( \frac{Rh}{R - r} - h \right) r^2 \right] \\ &= \frac{\pi h}{3(R - r)} [R^3 - (R - (R - r)) r^2], \end{aligned}$$

assim,

$$V_{TC} = \frac{\pi h}{3(R - r)} [R^3 - r^3]. \quad (3.21)$$

Como  $R^3 - r^3 = (R - r)(R^2 + R \cdot h + r^2)$ , segue de (3.21), que

$$V_{TC} = \frac{\pi h}{3(R - r)}(R - r)(R^2 + R \cdot h + r^2),$$

donde

$$V_{TC} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R \cdot h + r^2),$$

como queríamos mostrar. ■



# Capítulo 4

## Volume da esfera

Neste capítulo, faremos uso de duas fórmulas de somas, dos  $n$  primeiros termos e dos quadrados dos  $n$  primeiros números naturais, e utilizaremos o Princípio de Indução Finita para demonstrar essas fórmulas. A desigualdade das médias aritmética e geométrica (Lema 4.1) também será crucial para chegarmos no Teorema 4.1 (Volume da esfera).

A demonstração da fórmula para o cálculo do volume de uma esfera, da forma como fizemos, não é encontrada na Literatura. Nossa ideia foi utilizar a desigualdade das médias junto ao conceito de supremo de um conjunto para chegarmos em tal resultado. Porém, essa demonstração que fizemos foi baseada nas referências [1] e [9]. No presente capítulo, utilizamos as referências [1], [8], [9] e [10].

### 4.1 Preliminares

O lema a seguir é um resultado clássico conhecido na Literatura como a desigualdade das médias geométrica e aritmética. O caso de que tratamos, que é o de nosso interesse, é o em que são considerados apenas dois termos, uma vez que o resultado também pode ser demonstrado para o caso em que há  $n$  termos.

**Lema 4.1** *Sejam  $x, y$  números reais não-negativos. Então,  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $x = y$ .*

**Demonstração.** Sabemos que para quaisquer que sejam  $x, y \in \mathbb{R}^+$  têm-se  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ . Daí,

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq x + y,$$

donde

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Agora, se  $\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$ , então

$$\begin{aligned} (\sqrt{xy})^2 &= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow xy = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \\ &\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 4xy \\ &\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0, \end{aligned}$$

donde

$$(x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y.$$

Reciprocamente, se  $x = y$ , temos que

$$\sqrt{xy} - \frac{x+y}{2} = \sqrt{x^2} - \frac{2x}{2}.$$

Como  $x, y$  são reais não-negativos, segue que

$$\sqrt{xy} - \frac{x+y}{2} = x - x = 0,$$

consequentemente,

$$\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2},$$

como queríamos mostrar. ■

Como consequência do Lema 4.1, temos o Lema 4.2 a seguir cuja prova será omitida por fazer uso do conceito de limite que foge do escopo deste trabalho. No entanto, é um resultado intuitivo, uma vez que temos o Lema 4.1 (desigualdade das médias aritmética e geométrica), pois, se  $\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$  somente quando  $x = y$ , é natural se pensar que quando  $x$  é próximo de  $y$  teremos  $\sqrt{xy}$  próximo de  $\frac{x+y}{2}$ .

**Lema 4.2** *Se  $x$  é suficientemente próximo de  $y$ , então  $\sqrt{xy}$  é suficientemente próximo de  $\frac{x+y}{2}$ , isto é,*

$$x \approx y \Rightarrow \sqrt{xy} \approx \frac{x+y}{2}.$$

O Lema 4.1 nos diz que a média aritmética de quaisquer dois números reais não-negativos é sempre maior ou igual que a média geométrica desses números, enquanto que o Lema 4.2 nos informa que se dois números reais quaisquer são suficientemente próximos, então a média aritmética será suficientemente próxima da média geométrica.

Para a prova dos lemas a seguir, que também serão importantes para demonstrarmos a fórmula para o cálculo do volume da esfera, faremos uso do

**Princípio de Indução Finita.** *Seja  $P(n)$  uma propriedade relativa ao número natural  $n$ . Suponhamos que:*

- (i)  $P(1)$  é válida;
- (ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a validade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n+1)$ .

Então,  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

A verificação de que  $P(1)$  é válida costuma ser chamada de *caso base* de uma demonstração por indução, enquanto a demonstração de que a validade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n+1)$  é chamada de *passo de indução*. Na condição (ii), a validade de  $P(n)$  é chamada de *hipótese de indução*.

**Lema 4.3** A soma dos  $n$  primeiros números naturais é dada pela expressão  $\frac{n(n+1)}{2}$ , isto é,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Demonstração.** Note que,  $P(1)$  é válida, pois

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Agora, suponha que  $P(n)$  seja válida, ou seja, que

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (4.1)$$

para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Provaremos, agora, que  $P(n+1)$  também é válida. Com efeito, usando a hipótese de indução (4.1), temos

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1). \quad (4.2)$$

Por outro lado,

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (4.3)$$

Usando (4.2) e (4.3), obtemos

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

e, portanto,  $P(n+1)$  também é válida. Logo, pelo Princípio de Indução Finita

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N},$$

como queríamos demonstrar. ■

**Lema 4.4** A soma dos quadrados dos  $n$  primeiros números naturais é dada pela expressão  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , ou seja,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Demonstração.** Observe que  $P(1)$  é válida. De fato, uma vez que

$$1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6},$$

$P(1)$  é válida. Agora, suponha a propriedade válida para  $n$ , isto é,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (4.4)$$

Provaremos que  $P(n+1)$  também é válida. Com efeito, usando a hipótese de indução (4.4), temos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \quad (4.5)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= (n+1) \left[ \frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right] \\ &= (n+1) \left[ \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \right] \\ &= (n+1) \left[ \frac{2n^2 + 4n + 3n + 6}{6} \right] \\ &= (n+1) \left[ \frac{2n(n+2) + 3(n+2)}{6} \right], \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}. \quad (4.6)$$

De (4.5) e (4.6),

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[2(n+1)+1](n+2)}{6}$$

e, portanto,  $P(n+1)$  também é válida. Logo, pelo Princípio de Indução Finita, temos que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , como queríamos demonstrar. ■

## 4.2 Volume da esfera

O objetivo desta seção é demonstrarmos a fórmula para o cálculo do volume da esfera. Para esse feito, utilizaremos os resultados da seção 4.1 como também o embasamento teórico feito nos capítulos 2 e 3. Agora, definamos esfera.

**Definição 4.1** *Sejam  $C_0$  um ponto do espaço e  $r$  um número real positivo. Chama-se **esfera** de raio  $r$  e centro  $C_0$  o conjunto de pontos do espaço que equidistam de  $C_0$  a uma distância  $r$ .*

Se  $\alpha$  é um plano qualquer que passa pelo centro da esfera, então  $\alpha$  divide a mesma em duas partes congruentes e, portanto, de mesmo volume, sendo cada parte dessa divisão denominada **semi-esfera**.

Para demonstrarmos a fórmula para o cálculo do volume da esfera, Teorema 4.1 a seguir, de raio  $R$  e centro  $C_0$ , iremos aproximar a semi-esfera por uma união de troncos de cone  $\{T_i\}$ 's da seguinte forma:

dividimos o raio  $R$  em  $n$  partes congruentes obtendo os pontos  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . (4.7)

Então o  $i$ -ésimo tronco  $T_i$  possui centro nas bases maior e menor como sendo,  $C_i$  e  $C_{i-1}$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , respectivamente. As bases dos  $n$  troncos serão paralelas ao plano que contém o círculo da base da semi-esfera e perpendiculares ao raio  $R$ , ortogonal a este plano (veja a Figura 4.1).

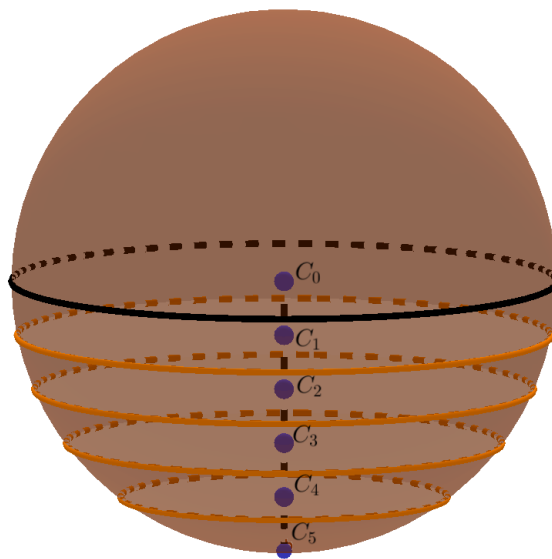


Figura 4.1: Esfera de centro  $C_0$  e raio  $R$  fatiado em  $n = 5$  partes congruentes.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Quanto maior for a partição (o valor de  $n$ ) mais a soma dos volumes dos troncos se aproximará do volume da esfera. Faremos o procedimento do parágrafo anterior com a semi-esfera no intuito de calcular seu volume e depois multiplicarmos por dois e, assim, obter o volume da esfera.

A demonstração do Teorema 4.1, a seguir, não é encontrada na Literatura, mas é uma ideia baseada nas referências [1] e [9].

**Teorema 4.1** *O volume de uma esfera de raio  $R$  é dado por  $\frac{4\pi R^3}{3}$ .*

**Demonstração:** Seja  $S$  uma semi-esfera de centro  $C_0$  e raio  $R > 0$  e seja  $X$  o conjunto de todos os poliedros retangulares  $R$  contidos em  $S$ . Vimos no capítulo 2 que

$$V(S) = \sup_{R \in X} V(R).$$

Se  $T_n$  é a união de  $n$  troncos de cones contidos em  $S$  dados como (4.7), então pode-se mostrar, analogamente ao feito para o cone no capítulo 3, que

$$\sup_{R \in X} V(R) = \sup_{n \in \mathbb{N}} V(T_n),$$

e, conseqüentemente,

$$V(S) = \sup_{n \in \mathbb{N}} V(T_n). \quad (4.8)$$

Sejam  $R_k$  e  $r_k$  o raio maior e menor do  $k$ -ésimo tronco, respectivamente. Observe que  $\overline{C_0 C_{k-1}} = \frac{R}{n}(k-1)$  e  $\overline{C_0 C_k} = \frac{R}{n}k$ . Deste modo,  $r_k$  será um dos catetos do triângulo retângulo de hipotenusa  $R$  e segundo cateto  $\frac{R}{n}k$ , enquanto  $R_k$  será um dos catetos do triângulo retângulo de hipotenusa  $R$  e segundo cateto  $\frac{R}{n}(k-1)$  (veja a Figura 4.2).

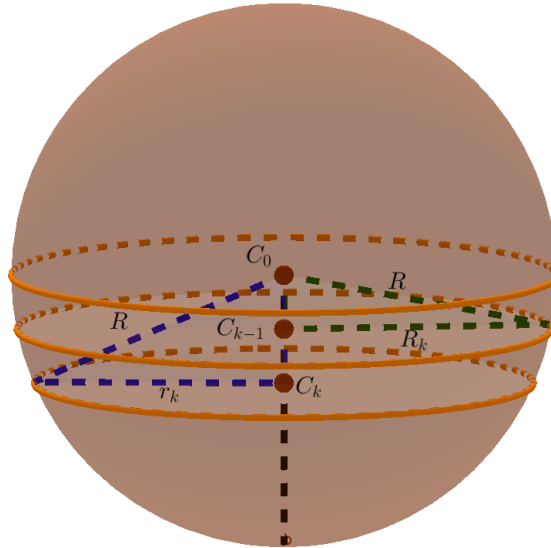


Figura 4.2:  $k$ -ésimo tronco de cone.

Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Então, por Pitágoras, temos

$$R^2 = \left(\frac{R}{n}k\right)^2 + (r_k)^2 \Rightarrow r_k^2 = R^2 - \frac{R^2}{n^2}k^2,$$

isto é,

$$r_k^2 = R^2 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right). \quad (4.9)$$

De modo análogo, para  $R_k$ , temos

$$R^2 = \left[\frac{R}{n}(k-1)\right]^2 + (R_k)^2 \Rightarrow R_k^2 = R^2 \left[1 - \frac{(k-1)^2}{n^2}\right]. \quad (4.10)$$

Note que a altura de cada tronco de cone é constante e igual a  $\frac{R}{n}$ . Assim, se  $V_k$  é o volume do  $k$ -ésimo tronco, então de (4.9), (4.10) e do Teorema 3.7, temos

$$V_k = \frac{\pi R}{3n} \left[ R^2 \left( 1 - \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) + R^2 \sqrt{1 - \frac{(k-1)^2}{n^2}} \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} + R^2 \left( 1 - \frac{k^2}{n^2} \right) \right],$$

ou ainda

$$V_k = \frac{\pi R^3}{3n} \left[ \left( 1 - \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) + \sqrt{1 - \frac{(k-1)^2}{n^2}} \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} + \left( 1 - \frac{k^2}{n^2} \right) \right].$$

Fazendo  $a_k = 1 - \frac{(k-1)^2}{n^2}$  e  $b_k = 1 - \frac{k^2}{n^2}$ , temos que

$$V_k = \frac{\pi R^3}{3n} (a_k + \sqrt{a_k} \sqrt{b_k} + b_k). \quad (4.11)$$

Pelo Lema 4.1, temos

$$\sqrt{a_k} \sqrt{b_k} \leq \frac{a_k + b_k}{2} \Rightarrow \sqrt{a_k} \sqrt{b_k} + a_k + b_k \leq \frac{a_k + b_k}{2} + a_k + b_k,$$

donde

$$a_k + \sqrt{a_k} \sqrt{b_k} + b_k \leq \frac{3}{2}(a_k + b_k). \quad (4.12)$$

De (4.11) e (4.12),

$$V_k \leq \frac{\pi R^3}{3n} \frac{3}{2}(a_k + b_k),$$

ou seja,

$$V_k \leq \frac{\pi R^3}{2n}(a_k + b_k), \text{ para cada } k = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(T_n) &= V_1 + V_2 + \dots + V_n \\ &\leq \frac{\pi R^3}{2n}(a_1 + b_1) + \frac{\pi R^3}{2n}(a_2 + b_2) + \dots + \frac{\pi R^3}{2n}(a_n + b_n) \\ &= \frac{\pi R^3}{2} \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$V(T_n) \leq \frac{\pi R^3}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right). \quad (4.13)$$

Calculamos as somas  $\sum_{k=1}^n a_k$  e  $\sum_{k=1}^n b_k$ . Temos que,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left[ 1 - \frac{(k-1)^2}{n^2} \right] = \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1)^2,$$

donde segue-se, pelo fato  $(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1$ , que

$$\sum_{k=1}^n a_k = n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 1.$$

Utilizando os Lemas 4.3 e 4.4, obtemos

$$\sum_{k=1}^n a_k = n - \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n},$$

donde

$$\sum_{k=1}^n a_k = n - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) (2n+1) + 1,$$

e, portanto,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 1 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}. \quad (4.14)$$

Além disso,

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Pelo Lema 4.4, obtemos

$$\sum_{k=1}^n b_k = n - \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) (2n+1),$$

implicando que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k = 1 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \quad (4.15)$$

De (4.13), (4.14) e (4.15)

$$V(T_n) \leq \frac{\pi R^3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right].$$

Sendo assim, para  $n$  suficientemente grande, obtemos

$$V(T_n) \leq \frac{\pi R^3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Com isso, mostramos que  $\frac{2\pi R^3}{3}$  é uma cota superior para o conjunto  $\{V(T_n); n \in \mathbb{N}\}$ .

Afirmamos, agora, que  $\frac{2\pi R^3}{3}$  é a menor das cotas superiores para o conjunto  $\{V(T_n); n \in \mathbb{N}\}$ . De fato, para  $n$  suficientemente grande, temos que

$$a_k \approx b_k \text{ para cada } k = 1, \dots, n,$$



pois para cada  $k = 1, \dots, n$  temos

$$0 \leq a_k - b_k = -\frac{(k-1)^2}{n^2} + \frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2 - k^2 + 2k - 1}{n^2} \leq \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \approx 0,$$

para  $n$  suficientemente grande. Por esse fato, segue do Lema 4.2 que

$$\sqrt{a_k}\sqrt{b_k} \approx \frac{a_k + b_k}{2}, k = 1, \dots, n$$

para  $n$  suficientemente grande. Isso significa que dado  $\varepsilon > 0$ , temos, para  $n$  suficientemente grande, que

$$0 < \frac{a_k + b_k}{2} - \sqrt{a_k}\sqrt{b_k} < \varepsilon$$

(aqui está sendo usado, também, o fato da média geométrica ser sempre menor que a média aritmética, vide Lema 4.1). Assim, fixado  $\varepsilon > 0$ , se considerarmos  $\varepsilon' = \frac{3\varepsilon}{2\pi R^3} > 0$ , temos, para  $n$  suficientemente grande,

$$0 < \frac{a_k + b_k}{2} - \sqrt{a_k}\sqrt{b_k} < \frac{3\varepsilon}{2\pi R^3}. \quad (4.16)$$

Uma vez que

$$V(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\pi R^3}{3n} (a_k + \sqrt{a_k}\sqrt{b_k} + b_k),$$

segue, de (4.16), que

$$V(T_n) > \sum_{k=1}^n \frac{\pi R^3}{3n} \left[ a_k + b_k + \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{3\varepsilon}{2\pi R^3} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\pi R^3}{3n} \left[ \frac{3}{2}(a_k + b_k) - \frac{3\varepsilon}{2\pi R^3} \right].$$

Portanto,

$$V(T_n) > \frac{\pi R^3}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_k + b_k}{n} - \frac{\pi R^3}{3n} \cdot \frac{3n\varepsilon}{2\pi R^3},$$

donde

$$V(T_n) > \frac{\pi R^3}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_k + b_k}{n} - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.17)$$

Por outro lado, de (4.14) e (4.15)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k + b_k}{n} &= 2 - \frac{2}{6} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) - \frac{6}{2n} \right] \\ &= 2 - \frac{1}{3} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) - \frac{3}{n} \right] \\ &= 2 - \frac{1}{3} \left[ 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{3}{n} \right] \\ &= 2 - \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{1}{2n^2} \right] \\ &< \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

e, além disso,

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k + b_k}{n} \approx \frac{4}{3},$$

para  $n$  suficientemente grande. Desses fatos, dado

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{\pi R^3} > 0,$$

temos

$$0 < \frac{4}{3} - \sum_{k=1}^n \frac{a_k + b_k}{n} < \varepsilon'', \quad (4.18)$$

para  $n$  suficientemente grande. De (4.17) e (4.18)

$$V(T_n) > \frac{\pi R^3}{2} \left( \frac{4}{3} - \varepsilon'' \right) - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2\pi R^3}{3} - \varepsilon,$$

para  $n$  suficientemente grande. Isso mostra que

$$c_\varepsilon := \frac{2\pi R^3}{3} - \varepsilon, \varepsilon > 0,$$

não é mais cota superior para o conjunto  $\{V(T_n); n \in \mathbb{N}\}$  e, assim, segue, do fato de  $\frac{2\pi R^3}{3}$  ser uma cota superior para o conjunto  $\{V(T_n); n \in \mathbb{N}\}$ , que

$$V(S) = \sup_{n \in \mathbb{N}} V(T_n) = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Lembrando que  $V(S)$  é o volume da semi-esfera. Para obtermos o volume da esfera multiplicamos  $V(S)$  por dois. Portanto,

$$V_{esfera} = 2 \cdot \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3},$$

como queríamos demonstrar. ■

# Capítulo 5

## Conclusões

Podemos perceber que calcular volumes de sólidos geométricos, em geral, é um processo trabalhoso. Porém, para alguns sólidos, esse processo pode ser simplificado através das fórmulas que conduz a tais cálculos. Determinar essas fórmulas é algo bem engenhoso, seja utilizando o Princípio de Cavalieri, seja utilizando o procedimento aqui exposto.

Vimos também que utilizar o conceito de polígonos equidecomponíveis para determinar a fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo qualquer é um processo bem construtivo e que pode ser utilizado pelos professores do Ensino Médio em sala de aula, desde que tenham tempo hábil para tal.

A ideia de supremo empregada neste trabalho nos faz olhar de um modo prático, aplicada na determinação das fórmulas de alguns sólidos geométricos utilizando as ideias formais de supremo. A ideia de limite também é empregada durante o trabalho, mas de modo intuitivo e, assim, pode ser trabalhada em sala de aula sem falar, necessariamente, da definição de limite.

Além disso, o professor aprofunda seus conhecimentos sobre o conceito de volume dos principais sólidos geométricos e os alunos veem sentido nas fórmulas para o cálculo do volume desses sólidos. Isto é, as fórmulas não são simplesmente apresentadas, mas são construídas e, portanto, justificadas.

Por fim, enfatizamos que trabalhar Geometria Espacial no Ensino Médio é algo de suma importância, uma vez que seus conceitos estão diretamente ligados ao cotidiano. Em particular, é imprescindível discutir em sala de aula o conceito de volume em sua totalidade. Ou seja, não apenas apresentar as fórmulas para o cálculo do volume dos principais sólidos geométricos, mas construí-las, junto aos alunos seja utilizando o Princípio de Cavalieri ou as ideias deste trabalho.

# Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, F. F. F. **Estudo sobre o Conceito de Volume**. 2014. 34f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014.
- [2] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 10 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [3] CARVALHO, P. C. P. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. vol 1. 8 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [4] \_\_\_\_\_. **A Matemática do Ensino Médio**. vol 2. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- [5] Euclides. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- [6] LIMA, E. L. **Análise Real. Funções de uma Variável Real**. vol. 1. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [7] \_\_\_\_\_. **Áreas e Volumes: Fundamentos da Matemática Elementar**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1973.
- [8] \_\_\_\_\_. **Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [9] LIMA, F. N. **Estudo Sobre o Cálculo de Áreas e Volumes Utilizando o Método de Exaustão e o Princípio de Cavalieri**. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [10] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [11] NETO, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [12] \_\_\_\_\_. **Geometria**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [13] NETO, A. P. **Volume e o Princípio de Cavalieri**. Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 2 - Volumes e Áreas de Prismas e Pirâmides. Terceiro Ano - Médio. Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br/>. Acesso em: 20/01/2018.
- [14] SALEHYAN, P; DIAS, R. **Congruência por Corte e Terceiro Problema de Hilbert**. 2014.
- [15] SILVA, L. D. **Utilizando o Método de Aproximação por Falta para o Cálculo do Volume do Cilindro**. 2018. 37f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2018.