UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO E CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

RENATO JOSÉ MENEZES SILVA

EXPLORANDO A MATEMÁTICA DO JOGO TORRE DE HANÓI

Mossoró – RN
2018

RENATO JOSÉ MENEZES SILVA

EXPLORANDO A MATEMÁTICA DO JOGO TORRE DE HANÓI

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do programa de Pós- Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: Walter Martins Rodrigues

Mossoró – RN

2018

S586e Silva, Renato José Menezes Silva.
Explorando a Matemática do Jogo Torre de Hanói / Renato José Menezes Silva Silva. - 2018.
42 f. : il.

Orientador: Walter Martins Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2018.

1. Jogos. 2. Ensino de Matemática. 3. Torre de Hanói. I. Rodrigues, Walter Martins, orient. II. Título.

RENATO JOSE MENEZES SILVA

EXPLORANDO A MATEMÁTICA DO JOGO TORRE DE HANÓI

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 16 / 02 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Walter Martins Rodrigues

Dr. WALTER MARTINS RODRIGUES - UFERSA

Presidente

Dr. ANTONIO GOMES NUNES - UFERSA

Membro interno

Mariana de Brito Maia

Dra. MARIANA DE BRITO MAIA – UFERSA

Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2018.

A minha namorada e futura esposa, a qual amo imensamente, Jaqueline Santos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS, pelo dom da vida, pois sem isso nada disso seria possível.

A minha família, pelo apoio, motivação e palavras encorajadoras, ao se modo.

A minha queridíssima namorada, pois sempre fez acreditar e nunca me deixou desiste em circunstância alguma.

A toda a minha turma do PROFMAT, em especial ao meu amigo e companheiro de viagens e estudo, Edson.

Ao professor orientador, Walter Martins, pela paciência e disponibilidade sempre que solicitado, pela compreensão por entender minhas limitações e motivações.

E por fim, mas não menos importante, a toda instituição Ufersa, incluindo professores, coordenação e demais membros, pois sempre fui muito bem acolhido e atendido sempre que precisei.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o jogo Torre de Hanói, exploramos seu aspecto histórico e também seu potencial matemático. Começamos elaborando uma boa estratégia para vencer a Torre respeitando suas regras, essa estratégia nos servirá de base para demonstrações futuras. Por meio de observações notamos alguns padrões a cerca do número mínimo de movimentos para vencer o jogo e de cada peça, com isso é formulada uma teoria e em sequência são apresentadas algumas demonstrações. Seguindo mais a fundo, notamos uma estreita relação do jogo com o sistema de numeração binário, o que nos dá incríveis resultados, como determinar qual a exata peça deve ser movida em determinado movimento sem precisarmos realizar os anteriores. Outra aplicação dos números binários é determinar a posição exata de cada peça em determinado movimento.

Palavras-chave: Jogos, Ensino de Matemática, Torre de Hanói.

ABSTRACT

In this work we present the Tower of Hanoi game, we explore its historical aspect and also its mathematical potential. We started by developing a good strategy to sell the Tower respecting is rules, this strategy will serve as a basis for future demonstrations. Through observations we notice some patterns about the minimum number of movements to win the game and each piece, we formulate a theory and in sequence are present some demonstrations. Going deeper, we notice a close relationship between some demonstrations. Going deeper, we notice a close relationship between the game and the binary number system, which gives us incredible results, such as determining which exact piece should be moved in a certain movement without having to perform the previous ones. Another application of binary numbers is to determine the exact position of each part in a certain movement.

Keywords: Games, Mathematics Teaching, Tower of Hanoi

Lista de figuras

Lista de tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho não tem como objetivo principal desenvolvimento de um plano de aula de matemática utilizando como recurso o jogo Torre de Hanói, e sim explorar alguns pontos matemáticos que podem ser encontrados no jogo e que, em cima destes, o professor possa desenvolver seu próprio plano de ensino usando este material como referência matemática. Claro que o texto também pode ser usado para uma leitura puramente analítica.

No entanto, não podemos deixar de fazer alguma menção a cerca do uso de jogos no ensino de matemática, pois sem essa relação, o objetivo principal deste trabalho seria totalmente sem sentido.

Um dos grandes desafios no ensino de matemática atualmente é dar significado aos conteúdos ministrados em sala, é mostrar aos alunos uma aplicabilidade concreta daquilo que estão estudando ou estão prestes a estudar para que possam se sentir motivados, e os jogos, especificamente a Torre de Hanói, fazem isso muito bem, principalmente quando uma teoria matemática é desenvolvida a medida que o conhecimento sobre o jogo e como vencê-lo vai se aprofundando.

Muitas são as pesquisas sobre a aplicação e como devem ser inseridos os jogos em sala de aula, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s, 1998), do Ministério da Educação (MEC), apontam que:

> “Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas” (MEC, 1998: p. 46)

A seguir, apresentaremos um jogo com extremo potencial matemático, a Torre de Hanói, do qual desenvolveremos assuntos que podem ser trabalhados em diversos níveis de ensino, e como já enfatizamos, nosso propósito é disponibilizar um material de estudo aprofundado deste jogo, com diversas propriedades seguidas de demonstrações.

2 CONHECENDO O JOGO TORRE DE HANÓI

A Torre de Hanói é um jogo de estratégia do tipo quebra-cabeça inventado pelo matemático francês M. Édouard Lucas, quando era professor de matemática da Lycées Saint-Louis. O jogo foi proposto comercialmente em 1883 com oito discos e divulgado como problema no terceiro volume de seu livro Récréations Mathématiques. Posteriormente o quebra-cabeça foi apresentado de forma específica, mais completa e elaborada, em 1889, através de sua publicação "*Jeux Scientifiques pour servir à l'Histoire, à lÉnseignement et à la Pratique du Caucule et du Dessin – Premiére sèrie nº* 3. O jogo, também conhecido como *Torres de Brahma,* é contado em forma de uma lenda.

Figura 1: Imagem original da caixa do brinquedo

2.1 A Lenda

O mandarim N. Claus (de Sião) nos conta que viu, em suas viagens para a publicação dos escritos do ilustre Fer-Fer-Tam-Tam, no grande templo de Bénarès, sob o domo que marca o centro do mundo, três agulhas de diamante, assentadas sobre uma laje de latão, altas de um côvado e grossas como o corpo de uma abelha.

Sobre uma dessas agulhas, Deus empilhou, no começo dos séculos, sessenta e quatro discos de ouro puro, o maior repousando sobre a laje, e os outros, cada vez menores, sobrepostos até o pico. Está é a torre sagrada de Brahma. Dia e noite, os monges se sucedem ininterruptamente nos afazeres do altar, ocupados a transportar a torre da primeira agulha de diamante para a terceira, sem se descuidar das regras fixas impostas por Brahma, mover um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco fique acima de outro menor. Quando tudo estiver terminado, a torre e os Brâmenes cairão, e será o fim dos mundos.

O jogo chamou muita atenção, pois trazia consigo um problema: determinar o menor número possível de movimentos para transportar os discos da primeira para a terceira agulha de diamante. E ainda, qual seria, caso exista, uma sequência lógica para efetuar esses movimentos. Todas as demais descobertas referentes à Torre de Hanói partiram dessas duas perguntas iniciais.

A primeira demonstração matemática do problema foi apresentada ainda em 1883, num artigo de R. E. Allardice e A. Y. Fraser, intitulado La tour d’Hanoi publicado em *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.* A demonstração foi baseada na relação de recorrência que a Torre de Hanói apresenta.

Após fazermos uma análise das estratégias para vencer o jogo, apresentaremos a demonstração feita por R. E. Allardice e A. Y. Fraser, assim como também uma demonstração por indução do número mínimo de movimentos para completarmos o jogo e de outros fatos importantes que podem ser percebidos ao analisarmos o jogo.

3 UMA BOA ESTRATÉGIA PRA JOGAR BEM

O objetivo do jogo Torre de Hanói, como ficou claramente explícito na lenda, se resume a mover a torre com todos os discos da primeira haste para a terceira haste, respeitando as seguintes regras:

1) Só se pode mover um disco por vez;

2) Um disco nunca pode sobrepor um de diâmetro menor.

Antes de fazermos qualquer referência as estratégias de vencer o jogo, e ainda, como superar o quebra-cabeça usando um número mínimo de movimentos, vamos denotar algumas peças constituintes do jogo, para que possamos nos referir a elas com maior comodidade e entendimento.

Os discos serão numerados de acordo com a sequencia dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, em ordem crescente de diâmetro, isto é, o menor disco será numerado por 1 (um) e o maior por n. As hastes serão representadas pelas letras A, B e C, onde A será a haste *inicial* (local da torre no início do jogo), B a haste *auxiliar* (usada como suporte para vencer o jogo) e C será a haste *final* (destino final da torre). Consideraremos o sentido $ABCA$ das hastes como sentido-horário.

Para nossa análise do jogo, sempre buscaremos vencê-lo transportando a torre da haste A para a haste C, no entanto, nada altera o problema se considerarmos B como haste final. Para tentarmos observar algumas estratégias para vencer o jogo com certa facilidade, vamos buscar resolver o problema inicial proposto pelo jogo, que é determinar o número mínimo de movimentos para uma quantidade dada de discos, posteriormente faremos a generalização. Para isso, vamos ver o que acontece quando jogamos com pequenas quantidades de discos, por exemplo, partindo de $n = 1, n = 2, n = 3, \dots$, até chegarmos a uma quantidade suficiente de discos que nos permita tirar algumas conclusões, mesmo que de maneira subjetiva.

Para $n = 1$, fica evidente que apenas 1 (um) movimento é suficiente, basta mover o disco 1 da haste A (*inicial*) para a haste C (*final*). Se $n = 2$, teremos que realizar 3 (três) movimentos, o disco 1 para a haste B (*auxiliar*), disco 2 para haste C (*final*) e por fim, o disco 1 para haste C (*final*). Doravante, por comodidade, vamos indicar uma jogada por um número acompanhado de uma letra, onde o número representa o disco movido e a letra corresponde à haste de destino ao final do movimento, por exemplo, ao escrever $3B$, entendemos que o disco 3 será movido para a haste B. Para $n = 3$, necessitaremos de 7 (sete) movimentos, que são: $1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C$ e $1C$. Com esses três valores de n e procedendo dessa maneira, aumentando o número de discos, já podemos fazer algumas considerações. Os resultados com até seis discos estão resumidos na tabela 1.

Nº de discos	Número de movimentos de cada disco						Total de movimentos
	$P_1(n)$	$P_2(n)$	$P_3(n)$	$P_4(n)$	$P_5(n)$	$P_6(n)$	
1	1	-	-	-	-	-	1
2	2	1	-	-	-	-	3
3	4	2	1	-	-	-	7
4	8	4	2	1	-	-	15
5	16	8	4	2	1	-	31
6	32	16	8	4	2	1	63

Tabela 1: Número de movimentos mínimos para até 6 discos

A notação $P_i(n)$ representa o número de movimentos do $i-ésimo$ disco para um total de n discos, portanto, devemos ter $i \leq n$, por exemplo, da tabela 1 podemos extrair $P_4(5) = 2$, isto indica que para uma torre com 5 (cinco) discos ($n = 5$), o quarto disco, segundo nossa notação, realizará 2 (dois) movimentos.

Observando a última coluna da tabela 1 podemos perceber um fato bastante intrigante, que o número de movimentos dobra e é acrescido de 1 (um) quando aumentamos um disco. No entanto, só com base na tabela 1, não podemos garantir que isso sempre aconteça com quaisquer número de discos, vamos avaliar os movimentos feitos durante o jogo a fim de justificar a veracidade da informação dada anteriormente.

Observe que os três primeiros movimentos para $n = 3$ foram iguais aos movimentos realizados para a torre de dois discos, $n = 2$, basta apenas que consideremos a haste C como *auxiliar* e a haste B como *final,* isto é, os três primeiro movimentos para $n = 3$ foram:

$1C, 2B$ e $1B$, equivalentemente a, 1 (*auxiliar*), 2 (*final*), 1(*final*).

Para a torre de dois discos tivemos:

$1B, 2C$ e $1C$, equivalentemente a, 1 (*auxiliar*), 2 (*final*), 1(*final*)

O mesmo acontece para os três últimos movimentos da torre com 3 discos, sendo A considerada a haste *auxiliar* e C a haste *final*. O movimento do disco 3, da haste A (*inicial*) para a haste C (*final*), foi intermediário a essas duas etapas, quando a torre de dois discos (discos 1 e 2) estava nas haste B.

O que fizemos acima para vencer o jogo com 3 discos foi transportar a torre com 2 discos para a haste B, realizando 3 movimentos, que corresponde a mesma quantia de movimentos para vencer o jogo com 2 discos, em seguida move-se o disco 3 (último disco da torre) para a haste final C, e por fim, leva-se a torre com dois discos que estava em B para C, novamente, com três movimentos. Portanto, o que fizemos foi “vencer” o jogo com 2 discos duas vezes e realizar um movimento intermediário com o terceiro disco, justificando a afirmação feita anteriormente para $n = 3$. Veja a figura 2.

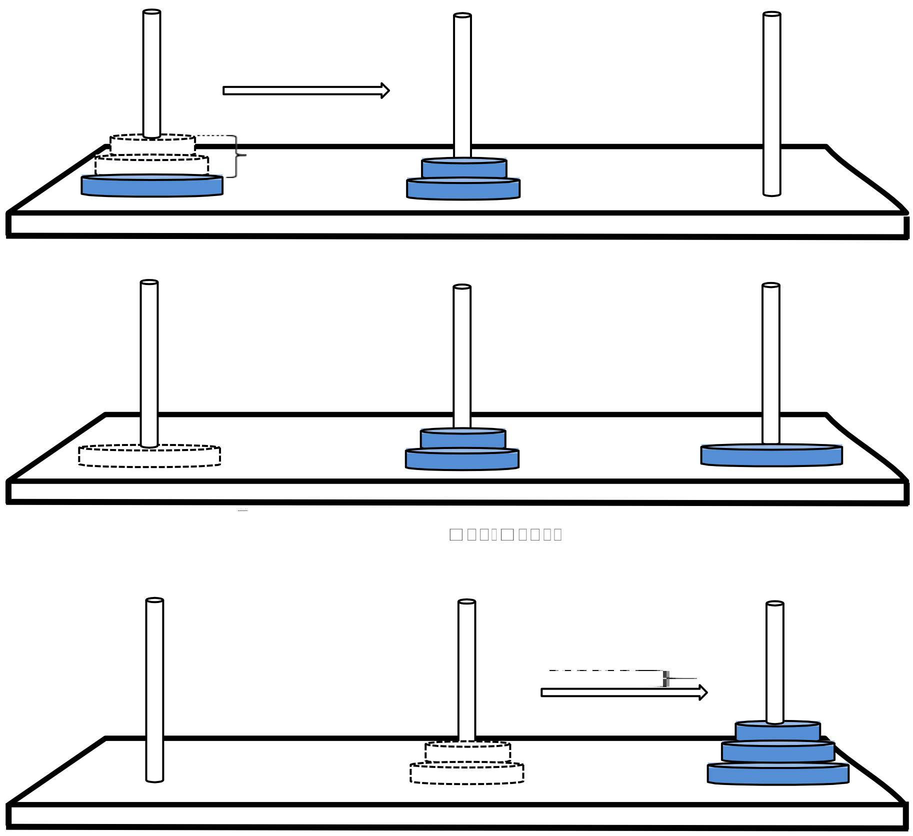

Figura 2: Sequencia de etapas para 3 discos

Se procedermos com raciocínios semelhantes, chegaremos a mesma conclusão para quaisquer número de discos. Em geral, sendo $P(n)$ o número de movimentos para transportar uma torre com n discos da haste A para a haste C. Então, com base na análise feita anteriormente podemos fazer isso da seguinte maneira: movemos a torre com $n-1$ discos da haste A para a haste B, considerado C como *auxiliar* e B como *final*, respeitando as regras jogo, portanto, em $P(n-1)$ movimentos, em seguida, passamos o disco n de A para C, com 1 movimento, e por fim, transportamos a torre que está em B ($n-1$ discos) para C, usando a haste A como *auxiliar*, novamente, com $P(n-1)$ movimentos. Com isso

$$P(n) = P(n-1) + 1 + P(n-1) = 2P(n-1) + 1$$

como ilustra a figura 3.

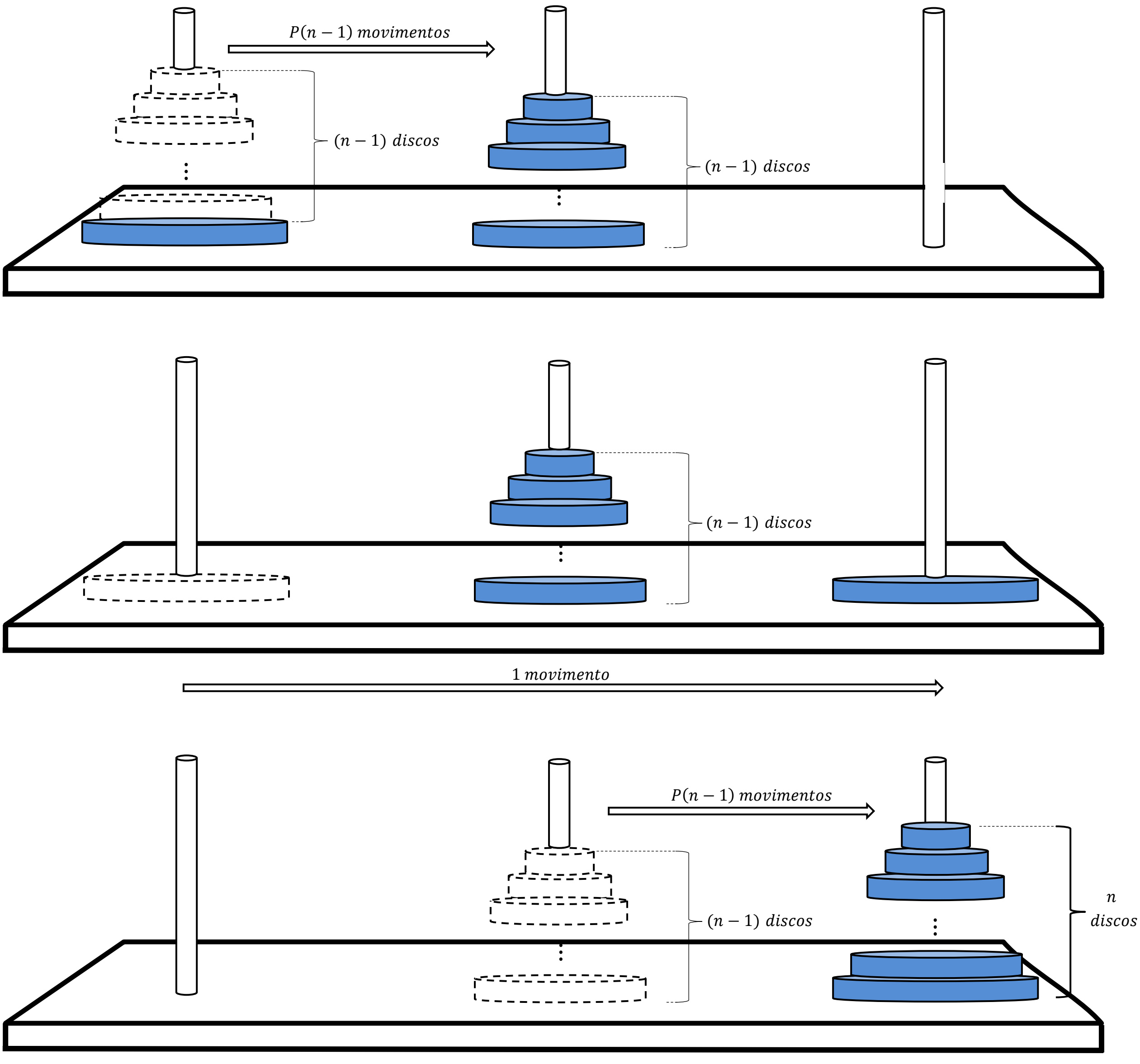

Figura 3: Sequencia das etapas para n discos

Diante de tudo isso, podemos formular uma boa estratégia para vencer o jogo, que consiste em dividi-lo em etapas, isto é, ao invés de tentarmos vencer o jogo com o número máximo de discos propostos, podemos reduzi-lo a transportar torres com menos discos, as quais sabemos manipular com segurança, para que no final tenhamos êxitos.

Por exemplo, para vencer o jogo com 2 discos basta que saibamos solucionar com 1 disco, para resolvermos com 3 discos basta saber com 2, que é saber com 1. Podemos reduzir o problema com um número qualquer de discos ao disco 1, raciocinando de maneira semelhante, ou seja, solucionar o jogo com quaisquer número de discos se resume a solucionar o jogo com 1 disco.

Além de ser uma boa estratégia para se jogar com Torre de Hanói, pois podemos sempre reduzir o nosso problema, esse fato será de grande valia para as demonstrações dos números de movimentos, tanto para transportar a torre, como dos movimentos individuais de cada disco.

4 NÚMERO MÍNIMO DE MOVIMENTOS

Neste tópico apresentaremos uma solução para o problema inicial proposto pelo quebra-cabeça, assim como uma demonstração pelo princípio de indução. Será feita uma análise do número de movimentos de cada disco particularmente, para consequentemente generalizarmos, seguindo de uma demonstração. A generalização do número de movimentos de cada disco nos permita encontrar outra maneira de solucionar a questão inicial da Torre de Hanói. Por fim, mostraremos como consistiu a primeira demonstração formal, do problema proposto por Eduard Lucas.

4.1 Número Mínimo de Movimentos para Transportar uma Torre com n Discos

Anteriormente, mostramos que o número de movimentos para mover a torre é dobrado e acrescido de uma unidade quando a aumentamos 1 disco, enunciaremos esse fato em forma de lema, pois será a chave para demonstrações futuras.

Lema 1: Seja $P(n)$ a proposição que nos dar o número mínimo de movimentos para mover a torre com n discos, $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$P(n) = 2P(n-1) + 1$$

Note que, esse lema não é de muita serventia quando queremos determinar o número de movimentos para grandes quantidades de discos, pois, necessitamos sempre determinar o número de movimentos com 1 disco, para que possamos determinar com 2 discos, para consequentemente determinarmos com 3 discos, e assim sucessivamente até chegarmos ao n desejado.

Vamos, agora, escrever $P(n)$ apenas como função de n, isto é, vamos determina-lo de modo que possamos dizer quantas jogadas mínimas são necessárias para vencer o jogo com um número qualquer de discos, independente se sabemos ou não quantas jogadas são necessárias com 1 disco a menos (que seria o $P(n-1)$). Observando bem algumas partes da tabela 1, percebemos que podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

Número de discos	Número de movimentos
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$
6	$63 = 2^6 - 1$

Tabela 2: Número de movimentos pra transportar a torre em função do número de discos

Dessa forma, somos levados a crer que $P(n)$ pode ser escrito por, $P(n) = 2^n - 1$, como enunciaremos na seguinte proposição.

Proposição 1: O número mínimo de movimentos para transportar uma torre com n disco da haste *inicial* para a *final*, denotado por $P(n)$, é dado por

$$P(n) = 2^n - 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

i. A proposição $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$, pois $P(1) = 2^1 - 1 = 1$, que é verificado diretamente no jogo.

ii. Vamos admitir que a proposição seja verdadeira para $n = k$, isto é, $P(k) = 2^k - 1$. De acordo com o lema 1, como ilustrado na figura 4, podemos concluir que

$$P(k+1) = 2P(k) + 1$$

como admitimos por hipótese que $P(k) = 2^k - 1$, então

$$P(k+1) = 2(2^k - 1) + 1$$

$$\Longrightarrow P(k+1) = 2^{k+1} - 1$$

portanto, partimos de $P(k)$ verdadeira e encontramos $P(k+1)$, logo, de acordo com o princípio de indução, $P(n)$ é verdadeira para todo n pertencente aos naturais.

4.2 Número Mínimo de Movimentos de cada Disco

A parte central da tabela 1, onde mostra o número de movimentos individuais de cada disco, nos dar números bastante intrigantes. Podemos perceber que à medida que aumentamos 1 disco, o número de movimentos de cada disco dobra, e o disco acrescentado realiza 1 movimento apenas, a saber, da haste A para a haste C. Comprovamos essa relação com até seis discos (ilustrado na tabela

1). Analisemos o comportamentos do disco 1, a fim de verificar se essa relação se mantem independente do número de discos.

Se $n = 1$, o disco 1 faz 1 movimento, que obviamente é o número mínimo de jogadas com esse disco. Se $n = 2$, como já vimos, precisamos mover a torre com 1 disco para a haste B, do passo anterior sabemos que é necessário no mínimo 1 movimento, depois passamos o disco 2 para a haste C e, novamente movemos a torre com 1 disco de B para C, efetuando mais 1 movimento com o disco 1, totalizando 2 movimentos para $n = 2$. Para $n = 3$, transportamos a torre de 2 discos (discos 1 e 2) para a torre B, o disco 1, como vimos a pouco, realiza no mínimo 2 movimentos, passamos o disco 3 para da haste B para a C, o disco 1 realizará outros 2 movimentos quando levarmos a torre que está na haste B para C, somando 4 movimentos mínimos. Se procedermos com raciocínios semelhantes, veremos que o número mínimo de movimentos do disco 1 sempre dobra a medida que acrescentamos 1 disco a torre, isso é bastante óbvio, pois, como já sabemos, a torre com $(n - 1)$ discos (a torre acima do $n - ésimo$ disco), que contém o disco 1, é transportada duas vezes, onde em cada etapa realiza o mesmo número de movimentos, isto é, os movimentos mínimos que seriam necessários para vencer o jogo com $(n - 1)$ disco, portanto, o disco 1, efetuará duas vezes, ou o dobro, dos movimentos que fez com a torre com $n - 1$ discos pois, agora, a torre comporta n discos. Observe que o movimento intermediário não influi nos movimentos dos $(n - 1)$ discos, pois é feito pelo $n - ésimo$ disco.

De maneira análoga, podemos avaliar cada disco individualmente e perceber que o número de movimentos de cada um dobra a medida que acrescentamos 1 disco a torre. Como explicitamos:

Lema 2: O número mínimo de movimentos de cada disco dobra a medida que é acrescentado 1 disco a torre e, este disco acrescentado, será movido uma única vez.

A parte central da tabela 1, como já mencionamos, pode ser reescrita da seguinte maneira:

Nº de discos	Número de movimentos de cada peça					
	$P_1(n)$	$P_2(n)$	$P_3(n)$	$P_4(n)$	$P_5(n)$	$P_6(n)$
1	$1 = 2^{1-1}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
2	$2 = 2^{2-1}$	$1 = 2^{2-2}$	$-$	$-$	$-$	$-$
3	$4 = 2^{3-1}$	$2 = 2^{3-2}$	$1 = 2^{3-3}$	$-$	$-$	$-$
4	$8 = 2^{4-1}$	$4 = 2^{4-2}$	$2 = 2^{4-3}$	$1 = 2^{4-4}$	$-$	$-$
5	$16 = 2^{5-1}$	$8 = 2^{5-2}$	$4 = 2^{5-3}$	$2 = 2^{5-4}$	$1 = 2^{5-5}$	$-$
6	$32 = 2^{6-1}$	$16 = 2^{6-2}$	$8 = 2^{6-3}$	$4 = 2^{6-4}$	$2 = 2^{6-5}$	$1 = 2^{6-6}$

Tabela 3: Número de movimentos de cada disco

Diante disso somos levados a crer que o número mínimo de movimentos de cada disco pode ser exposto em forma de potencia de 2, isso faz sentido, visto que esse número dobra quanto aumentamos um disco, e todos partem de 1 movimento, por exemplo, o disco 1 tem a forma $P_1(n) = 2^{n-1}$, onde n representa o número total de disco e $P_1(n)$ o número de seus movimentos.

Antes de fazermos a demonstração para o caso geral, isto é, um disco qualquer, vamos provar para um caso particular, o disco 1, já que fizemos toda a análise dos movimentos dos discos sobre ele e depois disso, seremos mais motivados ainda a acreditar na regularidade da tabela 3.

Proposição 2: Seja $P_1(n)$ a proposição que representa o número mínimo de movimentos da peça 1 para transportar a Torre de Hanói com n discos da haste A para a haste C. Então

$$P_1(n) = 2^{n-1}$$

Onde $n \in \mathbb{N}$ e indica o número total de discos da torre.

Demonstração

i. Para $n = 1$, $P_1(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$, que, obviamente, é verdadeiro, pois temos apenas 1 disco, que é ele mesmo.

ii. Admitindo que a proposição seja válida para $n = k$, isto é, $P_1(k) = 2^{k-1}$ é verdadeira, devemos mostra que $P_1(k+1) = 2^{(k+1)-1}$ também é.

Observe que, para transportamos k discos de A para C, precisamos de $P(k)$ movimentos e, consequentemente, o disco 1 faz $P_1(k) = 2^{k-1}$, pois foi o que impusemos como hipótese. Do lema 1, sabemos que para completarmos o jogo com $k+1$ discos, realizaremos duas vezes $P(k)$ movimentos com a torre de k discos (de A para B e de B para C), ou seja, o disco 1 realiza duas vezes $P_1(k)$ movimentos, pois o movimento intermediário corresponde ao $(k+1) - ésimo$ disco, como também é ressaltado no lema 2, portanto

$$P_1(k+1) = P_1(k) + P_1(k) = 2P_1(k)$$
$$\Longrightarrow P_1(k+1) = 2(2^{k-1})$$
$$\Longrightarrow P_1(k+1) = 2^{(k+1)-1}$$

como queríamos mostrar, logo, $P_1(n) = 2^{n-1}$, é verdadeira para todo n pertencente aos naturais.

Ainda com base na tabela 3, podemos perceber uma regularidade nos movimentos mínimos de cada disco, onde todos são obtidos de maneiras semelhantes, ou seja, o modo como calculamos os movimentos está relacionado com o número de discos e com o número que representa cada disco, emitiremos esse fato na próxima proposição.

Proposição 3: O número mínimo de movimentos feitos pelo $i - ésimo$ disco, para transportarmos uma torre com n discos da haste *inicial* para a *final*, é dado por:

$$P_i(n) = 2^{n-i}$$

com $i, n \in \mathbb{N}$ e $i \leq n$.

Demonstração

Se $n = 1 \Rightarrow i = 1$, com isso, caímos na proposição 2, então, não há o que demonstrar. Com $i = n \neq 1$, teremos, $P_i(n) = 2^{i-i} = 2^0 = 1$, que obviamente é verdadeiro, pois o $i - ésimo$ disco, será justamente o último, portanto, só fará uma jogada, como fica bem especificado no lema 2.

Em virtude disso, vamos considerar que $1 \leq i < n$. Manteremos o 1 para não sairmos da forma como utilizamos o Principio de Indução até aqui. Veja:

i. Se $n = 1$ não há o que demonstrar, pois, $n = 1 \Rightarrow i = 1$, portanto, $P_i(n) = P_1(1) = 1$.

Consideremos a proposição verdadeira para $n = k$, isto é, $P_i(k) = 2^{k-i}$, ou seja, para movermos uma torre com k discos, necessitamos fazer uma quantidade mínima de 2^{k-i} movimentos com o $i - ésimo$ 2^{k-i} disco. Precisamos mostrar agora que a proposição é também verdadeira para $(k + 1)$ discos.

Mas ora, para movermos uma torre com $(k + 1)$ discos da haste inicial para a final, precisamos, do lema 1, mover a torre com k discos duas vezes da haste *inicial* para a *final*, lembrando que no primeiro passagem da torre com k discos a haste B é considerada *final* e a C *auxiliar*, logicamente o $i - ésimo$ disco realizará duas vezes $P_i(k) = 2^{k-i}$ movimentos. Portanto

$$P_i(k + 1) = 2P_i(k) = 2.2^{k-1}$$

$$\Rightarrow P_i(k + 1) = 2^{(k+1)-1}$$

obtendo o que queríamos provar, portanto, de acordo com o princípio de indução, concluímos que a proposição $P_i(n) = 2^{n-i}$ é verdadeira para todo n pertencente aos naturais.

4.2.1 Número Mínimo de Movimentos como Progressão Geométrica

Em 4.2 provamos que o número mínimo de movimentos feito pelo $i - ésimo$ disco é dado por $P_i(n) = 2^{n-1}$, onde $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$. Para uma torre com n discos, podemos representar o os movimentos individuais de cada um sem nenhum problema, graças a proposição 3, como mostra a tabela 4.

Número de discos	Número mínimo de movimentos de cada discos							
	$P_1(n)$	$P_2(n)$	$P_3(n)$	$\cdots$	$P_i(n)$	$\cdots$	$P_{n-1}(n)$	$P_n(n)$
n	2^{n-1}	2^{n-2}	2^{n-3}	$\cdots$	2^{n-i}	$\cdots$	2	1

Tabela 4: Generalização do número de movimentos de cada disco

Logicamente, o número mínimo de movimentos para solucionarmos o jogo com n discos pode ser determinado somando número mínimo de movimentos de cada disco individualmente. Note que os movimentos de cada disco apresentados na tabela 6 estão em progressão geométrica ($P.G$) de razão $q = 1/2$, onde o primeiro termo é $a_1 = 2^{n-1}$ e o último termo é $a_n = 1$, logo, o número de movimentos mínimos, $P(n)$, para passarmos a torre de n discos da haste A para a C é igual a soma S_n dos termos da $P.G$ acima, que é dada por:

$$P(n) = S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{1.\frac{1}{2} - 2^{n-1}}{\frac{1}{2} - 1} = (-2)\left(\frac{1}{2} - 2^{n-1}\right) = 2^n - 1$$

4.3 A Demonstração por Recorrência

Como já frisamos, a primeira demonstração matemática formal, graças a recorrência na sequencia dos movimentos, foi apresentada em 1884, num artigo de R. E. Allardice e A. Y. Fraser, intitulado La tour d'Hanoi publicado em *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.*

4.3.1 Recorrência

Uma equação ou uma sequencia tem caráter de recorrência quando é definida em termos dela própria, ou seja, cada termo é determinado por uma dada função dos termos anteriores. Dado um inteiro positivo k, uma sequencia recorrente de ordem k é uma sequência e que cada termo é determinado como uma função dos k termos anteriores.

$$x_{n+k} = f\left(x_{n+k-1}, x_{n+k-2,}\ \cdots, x_{n+1}, x_n\right)$$

Uma das sequências de recorrências mais famosa é a *Sequência de Fibonacc*i, onde o primeiro e o segundo elemento são 1 e os restantes são obtidos somando-se os dois anteriores a ele.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \forall x \in \mathbb{N}, x > 2$$

Recorrência nos dar uma ideia de: se a instância que estamos interessados é pequena, resolvemo-la diretamente, como pudermos. Se a instância é grande, reduzimo-la a uma instancia menor do mesmo problema. Esta ideia de recorrência nos da um direcionamento em sua aplicação nos fractais, e consequentemente na resolução da torre de Hanói pelo método dos fractais, a qual, não será abordada neste trabalho.

O leitor que estiver interessado em se aprofundar mais sobre as sequências recorrentes, é recomendado a referencia [9].

Demonstração por recorrência

Já sabemos que o número mínimo de movimentos $P(n)$, para n discos, pode ser dado por:

$$P(n) = 2P(n-1) + 1$$

onde $P(n-1)$ é o número mínimo de movimentos para transportarmos $n-1$ discos.

Somando-se 1 a ambos os membros da igualdade acima, obtemos:

$$P(n) + 1 = 2P(n-1) + 1 + 1 = 2[P(n-1) + 1].$$

Usando a relação acima e sabendo que

$$P(n) + 1 = 2[P(n-1) + 1]$$

podemos concluir que

$$P(n-1) + 1 = 2[P(n-2) + 1]$$

portanto

$$P(n) + 1 = 2P(n-1) + 1 + 1 = 2\{2[P(n-2) + 1]\} = 2^2[P(n-2) + 1]$$

Observe que sempre que tomamos o elemento seguinte da sequencia $\{n-1, n-2, \dots, 2, 1\}$ um fator multiplicativo 2 aparece, logo, se reduzirmos a sequencia de $n-1$ até 1, teremos $n-1$ fatores de 2, multiplicando-se. Como segue

$$P(n) + 1 = 2^{n-1}[P(1) + 1]$$

como $P(1) = 1$, temos

$$P(n) + 1 = 2^{n-1}.2 = 2^n$$

$$\Rightarrow P(n) = 2^n - 1$$

5 UMA VISÃO BINÁRIA DO JOGO

O sistema numérico binário nos permite fazer uma análise bastante aprofundada do jogo Torre de Hanói, já que os movimentos dos discos, assim como o da torre, podem ser facilmente convertidos para esse sistema de numeração em questão e que, por sinal, são números bem particulares. Vejamos como fica a tabela 1 se a convertermos para esta base.

Nº de Discos (n)	Número de movimentos de cada disco						Total de movimentos
	$P_1(n)$	$P_2(n)$	$P_3(n)$	$P_4(n)$	$P_5(n)$	$P_6(n)$	
1	1						1
2	10	1					11
3	100	10	1				111
4	1000	100	10	1			1111
5	10000	1000	100	10	1		11111
6	100000	10000	1000	100	10	1	111111

Tabela 5: Número de movimentos totais e dos discos em binário

Como o número de movimentos de cada disco dobra a medida que aumentamos 1 disco a torre, então, podemos expressar o número de movimentos de um disco qualquer em binário da seguinte maneira:

$$P_i(n) = 1\,\underbrace{000 \cdots 00}_{n-i \text{ termos}}$$

A notação binária nos concede também achar a solução do problema proposto pelo jogo de outra maneira, basta que somemos, em binário, o numero de movimentos de cada disco. Como segue

$$\begin{array}{rcccl}
 & 1 & = & 2^0 & (\text{disco n}) \\
 & 10 & = & 2^1 & (\text{disco n} - 1) \\
 & 100 & = & 2^2 & (\text{disco n} - 2) \\
 & 1000 & = & 2^3 & (\text{disco n} - 3) \\
 & & \cdots & & \\
+ & 1000\cdots00000 & = & 2^{n-1} & (\text{disco } 1) \\
\hline
 & 11111\cdots1111 & = & 2^n - 1 &
\end{array}$$

Observe que $1111_{(2)} = 15_{(10)} = (2^5 - 1)_{(10)} = (10000 - 1)_{(2)}$, com esse exemplo de transições de números em sistema binário e decimal e a notação dos movimentos em binário de um disco qualquer, fica fácil identificar o que se foi feito acima até chegarmos a fórmula, apesar de não estar explicito as quantidades de termos de cada parcela.

5.1 O Comportamento de cada disco com auxílio dos números binários

Com auxílio dos números binários, podemos avaliar o comportamento dos discos em qualquer etapa do jogo, isto é, podemos dizer qual disco será movido em determinada jogada independente se sabemos ou não quais foram os movimentos anteriores, Para fazermos essa análise, consideraremos uma torre com 5 discos, possuindo um total de 31 movimentos.

Representaremos a sequencia dos 31 movimentos por meio de uma tira com 31 espaços, sendo que cada espaço, iniciando da esquerda para a direita, será preenchido com o número correspondente ao disco movimentado, isto é, o primeiro espaço será preenchido com o número do primeiro disco movido, o segundo espaço com o número do segundo disco movido e assim sucessivamente.

Por meio do algoritmo recorrente, que foi gerado pela estratégia de como vencer o jogo, sabemos que para vencer o jogo com 5 discos, precisamos transpor a torre de 4 discos para a haste *auxiliar* e usando a haste *final* como *auxiliar*, como já sabemos, são necessários 15 movimentos, em seguida, com o movimento intermediário passamos os último disco (no nosso caso é o disco 5) da haste *inicial* para a *fina*l, e por fim, passamos a torre com 4 discos da haste *auxiliar* para a *final*, usando a haste *inicial* como *auxiliar*. Note que o movimento feito com o disco 5 foi 16º (décimo sexto) movimento, que corresponde justamente ao intermediário (veja o lema 2). Com isso, começamos a completar a faixa.

															5															

Figura 4: Sequência dos movimentos, disco 5

Agora observe que, para transpormos a torre com 4 discos da haste inicial para a auxiliar (primeira parte da estratégia de jogo), como já sabemos utilizamos 15 movimentos, se analisarmos somente esses 4 discos e fizermos uma avaliação semelhante ao que fizemos com a torre com 5 discos, veremos que o disco 4 realizará o movimento intermediário, e será justamente no 8º (oitavo movimento). Mas note que temos que mover a torre com 4 discos outra vez (terceira parte da estratégia de jogo), novamente com 15 movimentos, logo após o movimento intermediário do disco 5, como o disco 5 moveu-se no décimo sexto movimento, a terceira etapa será a partir do décimo sétimo ao trigésimo primeiro movimento, portanto, o movimento intermediário (corresponde ao disco 4), será o vigésimo quarto. Com isso, seguimos completando:

							4								5								4							

Figura 5: Sequência dos movimentos, discos 4 e 5

Agora para analisarmos a torre com 3 discos, e consequentemente o terceiro disco, temos de estar conscientes que para transpormos a torre com 5 discos, precisamos transportar a torre com 4 discos 2 vezes, e para transportarmos está, precisamos mover a torre com 3 discos 4 vezes, duas para o primeiro transporte e mais duas para o segundo transporte da torre com 4 discos.

Já sabemos que precisamos de 7 movimentos para mover a torre com 3 discos e que, o terceiro disco realiza o movimento intermediário, com isso, podemos completar a faixa com os movimentos correspondentes ao disco 3, que serão justamente os espaços intermediários aos seguintes intervalos de movimentos 1º~7º; 9º~15º; 17º~23º e 25º~31º, que correspondem justamente as sequencias de passos onde estamos movendo cada uma das quatro vezes a torre com 3 discos e os movimentos que estão faltando para completar-se os 31, são justamente os efetuados pelos discos 4 e 5. Portanto

			3				4				3				5				3				4				3			

Figura 6: Sequência dos movimentos, discos 3,4 e 5

Raciocinando de maneira equivalente ao que fizemos para os discos 5,4 e 3, completamos a faixa da seguinte forma:

1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1

Figura 7: Sequência completa dos 31 movimentos

Observe que essa sequencia é a ideal para vencer o jogo com o número mínimo de movimentos que por sua vez, tem uma estreita relação com ou números binários, ou melhor dizendo, tem uma relação no modo como se da a construção dos números binários, relação essa que apresentaremos a seguir.

Um contador binário segue um encadeamento de estados que corresponde a sequência do código binário natural. Esta sequência de estados corresponde a sequência de contagem do contador. Num contador binário de bits, a sequência de contagem corresponde aos números entre $0_{(10)}$ e $2^n - 1_{(10)}$ (observe a relação com a quantidade total de movimentos para vencer o jogo), por exemplo, um contador binário de 4 bits efetua uma contagem de 0 a 15.

O nosso contador binário, de caráter ilustrativo, será representado, a grosso modo, por 5 lâmpadas enfileiradas, onde cada lâmpada representa 1 bit, portanto, faremos uma construção de 1 a 31. Quando a lâmpada estiver acessa simula que o bit a que ela está associado possui valor lógico 1 e uma lâmpada apagada indica valo lógico 0, ressaltando que a contagem dos bits é feita da direita para a esquerda.

Na intenção de associar esse contador binário com a construção feita anteriormente, vamos supor que cada lâmpada esta associada a um disco, note que como temos 5 lâmpadas, então, serão 5 discos e como já sabemos, para vencer o jogo, serão necessários 31 movimentos, que corresponde justamente ao total de números representados pelo contador binário. A primeira lâmpada (contando da direita para a esquerda) representa o disco1, a segunda o disco 2, e assim sucessivamente. Até chegar a ultima lâmpada que estará associada ao disco 5.

Para entendermos melhor o contador binário, vamos considerar um exemplo, suponha que na contagem estamos no número 17, então, qual a situação do contador nessa hora? Para sabermos, convertemos o número de decimal para o sistema binário, a saber, $17_{(10)} = 10001_{(2)}$, ou seja, a primeira e a quinta lâmpada possuem valor lógico 1 e as restantes, valor lógico 0. O contador deve ter a seguinte configuração:

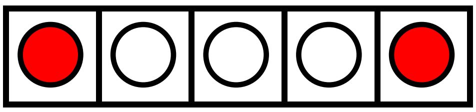

Figura 8: Estado do contador binário representado o número 17.

Note que o processo de contagem se dar através do ascender e apagar das lâmpadas, esse fato será importante para uma visualização mais clara do que atingiremos posteriormente.

Associando o contador binário com a sequência de movimentos dos discos, observamos que à medida que se sucede a contagem, a lâmpada acesa corresponde ao disco que deve ser movimentado. Ressaltamos que não é a lâmpada acessa que indica o disco a ser movido, pois há alguns números binários que necessitam mais do que uma lâmpada com valor lógico 1, e sim a ultima lâmpada que foi acessa para formar o número. Veja a figura 8.

Tomemos como exemplo o 25º (vigésimo quinto) movimento, perceba que do vigésimo quarto movimento para o vigésimo quinto, a lâmpada que ascendeu foi a número 1 (não importa se apagarem algumas), portanto, o vigésimo quinto movimento, se estiver jogando corretamente, deve ser feito pelo disco1.

De uma maneira mais formal, mais geral e mais compreensível, podemos dizer que o disco 1 é o movimentado sempre que o número do movimento, em binário, termina em $1_{(2)}$move-se o disco 2 sempre que número correspondente a jogada terminar em $10_{(2)}$, o disco 3 se terminar em $100_{(2)}$, assim, o $i-ésimo$ disco será movido se o numero da jogada correspondente terminar em:

$$1\,\underbrace{0000\cdots000}_{i-1\text{ termos}}$$

Para constarmos isso, note que o disco 1 move-se no primeiro movimento ($1_{(2)}$) e a partir disso basta somar $2_{(10)} = 10_{(2)}$ ao primeiro movimento (a partir da primeira jogada do disco 1, a cada duas jogadas uma é feita por ele) e obtemos o segundo movimento, somamos o mesmo valor ao segundo e obtemos o terceiro movimento, e assim sucessivamente para obtermos quanto movimentos desejarmos. Observe, pelas propriedades de soma de binários, a terminação em 1 nunca se altera, e ainda, as jogadas do disco 1 correspondem a todas as jogadas ímpares, que são justamente todos os números terminados em 1 na notação binária.

Jogadas	Movimentos					Jogadas	Movimentos				
	Disco 5	Disco 4	Disco 3	Disco 2	Disco 1		Disco 5	Disco 4	Disco 3	Disco 2	Disco 1
1	○	○	○	○	●	17	●	○	○	○	●
2	○	○	○	●	○	18	●	○	○	●	○
3	○	○	○	●	●	19	●	○	○	●	●
4	○	○	●	○	○	20	●	○	●	○	○
5	○	○	●	○	●	21	●	○	●	○	●
6	○	○	●	●	○	22	●	○	●	●	○
7	○	○	●	●	●	23	●	○	●	●	●
8	○	●	○	○	○	24	●	●	○	○	○
9	○	●	○	○	●	25	●	●	○	○	●
10	○	●	○	●	○	26	●	●	○	●	○
11	○	●	○	●	●	27	●	●	○	●	●
12	○	●	●	○	○	28	●	●	●	○	○
13	○	●	●	○	●	29	●	●	●	○	●
14	○	●	●	●	○	30	●	●	●	●	○
15	○	●	●	●	●	31	●	●	●	●	●
16	●	○	○	○	○						

Figura 9: Contador binário

Para o segundo disco, seu primeiro movimento é na segunda jogada (10_2) e a partir desse ele move-se a cada quatro jogadas, isto é, basta somarmos quatro $\left(4_{(10)} = 100_{(2)}\right)$ ao seu primeiro movimento e obteremos o segundo movimento, que será na sexta jogada $\left(6_{(10)} = 110_{(2)}\right)$, o terceiro movimento na décima jogada $\left(10_{(10)} = 1010_{(2)}\right)$, as próxima jogadas são obtidas de maneira análoga. Do mesmo modo que o disco 1, podemos perceber que a terminação 10 não se altera, devido o termo somado ser 100 (veja que os números binários terminados em 10, correspondem, no sistema decimal, a sequencia dos números $2, 6, 10, 14, \cdots$, perceba a relação com os movimentos do disco 2).

De maneira equivalente, podemos fazer essa análise para qualquer disco, para verificar sua veracidade e saber que os movimentos contemplam todos os números binários da respectiva forma em questão, basta saber que o disco 1 move-se a cada duas jogas a partir da primeira, o disco 2 a cada quatro jogadas, o disco 3 a cada 8 jogadas e assim, portanto, o $i - \acute{e}simo$ disco a cada 2^i jogadas.

Essa análise binária dos movimentos de cada disco nos permite identificar qual disco deve ser movimento em qualquer jogada tomada aleatoriamente, por exemplo, para determinarmos qual disco deve ser movido no 216º (ducentésimo décimo sexto) movimento, basta toma-lo em binário, como

$$216_{(10)} = 110110000_{(2)}$$

podemos determinar o disco movido com base na terminação do binário, que, por sua vez, será o disco 5, pois termina em $10000_{(2)}$.

5.2 A Posição de cada Disco

Ao término deste tópico, seremos capazes de determinar a posição específica de todos os discos em qualquer fase do jogo, isto é, em qualquer jogada, independente se efetuamos ou não as anteriores. É claro que estamos considerando um jogo realizado no número mínimo de movimentos. Mas antes de falarmos diretamente sobre isso, vamos considerar algumas características do sentido dos movimentos dos discos, de qual jogada é a mais apropriada em determinada situação, entre outros fatores. Para que o objetivo final seja atingido com clareza, e que também podem ser usados como uma boa estratégia para vencer o jogo.

5.2.1 A Direção dos Movimentos

Já sabemos como construir a sequencia de movimentos dos discos, como vimos anteriormente, basta relacioná-los com os números binários. Avaliaremos agora se cada disco move-se em determinado sentido, ou seja, em sentido horário (para direita) ou anti-horário (para esquerda). Lembrando que definimos o sentido $ABCA$ das torres como horário (direito), portanto, $ACBA$ será o sentido anti-horário.

Necessitamos de dois algoritmos para descrever esse fato, mas, para encontrarmos esse algoritmo interativo, precisamos estar cientes que o menor disco se move, uma vez sim, uma vez não. Obviamente, o primeiro movimento do jogo deve ser feito pelo disco 1. Está claro que depois de mover o disco 1, devemos mover outro disco, no caso o disco 2, pois se movêssemos o disco 1 novamente, estaríamos efetuando na segunda jogada um movimento que poderia ser feito na primeira. Este movimento, do disco 2, deve ser feito no poste onde não estar o disco 1. Para o terceiro movimento temos apenas duas alternativas: ou movemos o disco 2 e desfazemos a jogada 2, o que não faz sentido, ou então movemos o disco 1 novamente. Procedendo com as demais jogadas, sempre cairemos nessa situação.

Além disso, na jogada que não for do disco 1, não há nenhuma dúvida de para onde e qual disco devemos mover, pois, só temos três hastes, uma onde está acomodado o disco 1, logo podemos desconsidera-lo pois não podemos mover nenhum disco para cima dele, o que resta agora são duas hastes, portanto, deve-se mover o menor dos dois que não seja o disco 1, para cima do maior. Consequentemente, o segredo principal para superar o jogo no número mínimo de movimentos é saber para onde devemos mover o disco 1, o qual sempre possui duas possibilidades. Esta questão pode ser respondida com as seguintes regras:

- O menor disco deve sempre se mover ciclicamente na mesma direção, no sentido horário (de A para B, B para C e de C para A) ou no sentido anti-horário (de A para C, C para B e de B para A), se o número de discos for *par* ou *ímpar*, respectivamente.

- O disco pequeno deve sempre ser colocado sobre um disco *par,* e ainda, deve mover-se inicialmente para C, se o número de discos for *ímpar*, ou então para B se for*par*.

Peter Buneman e Leon Levy, por conta da primeira regra, descobriram o seguinte algoritmo:

1) Se n é *par*, mova o disco 1 no sentido horário, se for *ímpar*, mova-o para a esquerda.
2) Se todos os discos estão em C, está tudo terminado. Se não, movemos um disco distinto do menor e voltamos ao passo 1.

Tendo em conta a segunda regra acima, este algoritmo poderia ser rescrito da seguinte forma:

1) Se for possível, leve o disco 1 sobre um disco *par*. Se não for possível, leve-o para a haste B se n é *par* ou para a haste C se n é *ímpar*.
2) Se todos os discos estão em C, está tudo terminado. Se não, movemos um disco distinto do menor e voltamos ao passo 1.

Para entendermos melhor a aplicação desse algoritmo, podemos pintar os discos *pares* de uma cor, e os *ímpares* de outra. Para facilitar ainda mais, podemos pintar as bases das hastes que vão comportar os discos com as cores adequadas. Veja a figura 9.

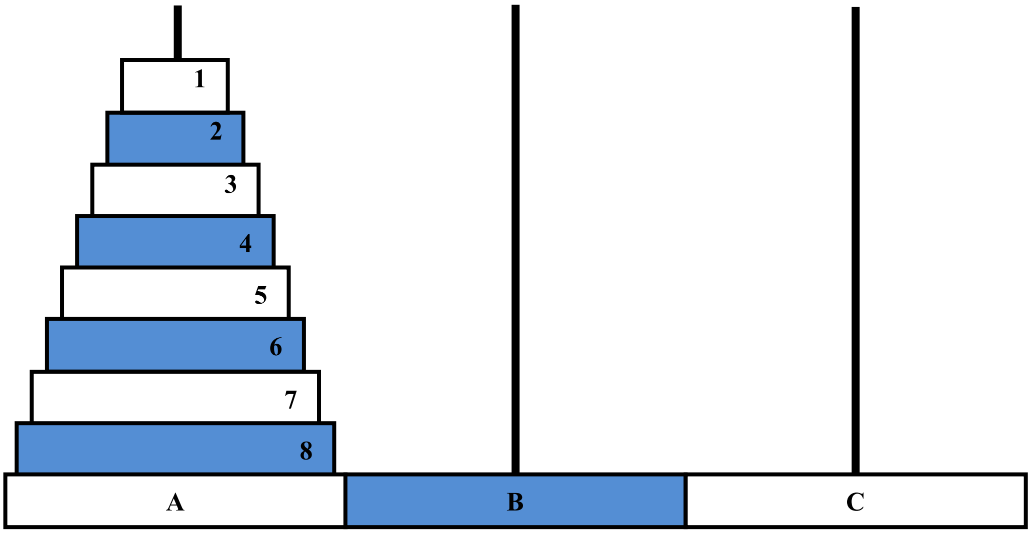

Figura 10: Representação da paridade

Na figura, usamos 8 discos, pois era o número vendido no brinquedo original. As bases A, B e C, podem ser vistas como os discos 9, 10 e 11, respectivamente. Com esta nova versão do quebra-cabeça, fazendo uso das cores, podemos escrever o algoritmo da seguinte maneira:

1) Mova o disco 1 sobre um disco (ou uma base, caso seja o primeiro movimento do jogo) que não seja de sua mesma cor;

2) Se todos os discos estão em C, fim. Se não, mova um disco distinto do 1 e volte ao passo 1.

O disco pequeno, não é único que nunca é colocado sobre outro disco de mesma cor, em nenhum momento há dois discos da mesma cor juntos, ou seja, um sobre o outro. Em geral, se quisermos vencer o jogo com o número mínimo de movimentos, não devemos jamais colocar dois discos *pares* ou dois discos *ímpares* juntos. Chamaremos esse fato de paridade.

Como vimos, o menor disco move-se sempre no mesmo sentido, pra a direita se n é *par*, ou para esquerda quando n for *ímpar*, isso também não acontece somente com o disco 1, todos os discos movem-se em algum sentido que não se altera, a saber, o mesmo que o disco 1, se o disco for *ímpar*, ou contrário ao disco 1, se o disco for *par*. Em outras palavras, todos os discos *ímpares* movimenta-se no mesmo sentido e os *pares* também se movimentam no mesmo sentido, oposto ao dos *ímpares*. O valor de n determinará este sentido.

Feita toda está construção, podemos voltar ao objetivo deste tópico, que consiste em determinar a posição de cada disco em determinada situação do jogo. O método que utilizaremos para fazer isso foi desenvolvido por Timothy R. S. Walsh, que consiste em colocar os discos em ordem decrescente de tamanho.

A ideia chave para este método é que o $k - ésimo$ disco encontra-se acima do $(k+1) - ésimo$ disco se, e somente se, na representação binária do número do movimento em questão (contando da esquerda para direita), os valores associados a esses movimentos coincidem. Com esse fato e a paridade dos discos descrita anteriormente, podemos determinar a posição exata de cada disco em qualquer jogada. Para facilitar ainda mais, vamos preencher a base das hastes com discos $(n+1)$, $(n+2)$ e $(n+3)$. O disco n é o único que não faz uso dessas regras, no entanto, é fácil determinarmos sua posição. O disco n estará na haste inicial se seu bit correspondente for 0 (significa que foram feitas menos de metade das jogadas), ou estará na final se for 1 (indicando que já foi movido, e este realiza apenas um movimento). Vejamos um exemplo para que o método de Timothy R. S. Walsh fique mais claro.

Exemplo1: Determine a posição de cada disco em uma torre com 9 discos após efetuada a 136º (centésima trigésima sexta) jogada.

Solução:

A resolução do problema será feita passo a passo, onde cada um será ilustrado. Manteremos a diferença de cores entre disco *pares* e *ímpares* para facilitar a visualização, no entanto, não colocaremos as bases 10, 11 e 12, pois com um pouco de esforço a mais, conseguiremos realizar a tarefa, veja.

Transformando o movimento 136 em binário obtemos: 010001000. Já sabemos que cada valor representa um disco, começando da direita para esquerda, do disco 1 ao 9, respectivamente.

Como já foi dito, começaremos a análise da esquerda para a direita, portanto, do maior disco. Vemos que o bit associado ao disco 9 está com valor lógico 0, portanto ainda não foi movido, logo está na primeira haste.

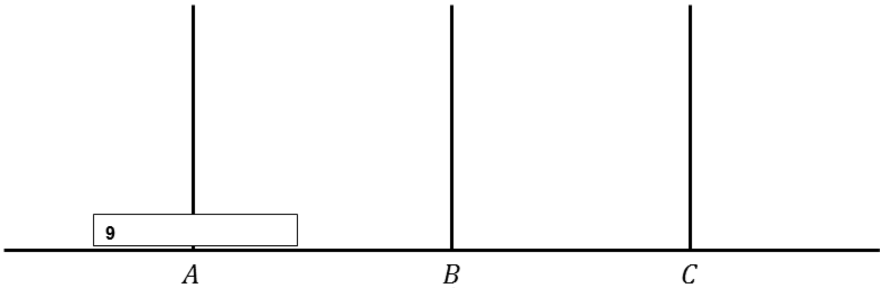

Figura 11 (a): Aplicação do método de Timothy R. S. Walsh

O disco 8 possui valor binário 1, diferente ao do disco 9, portanto não está sobre ele, logo, está sobre a haste B ou C, como o disco 8 faz somente dois movimentos, sendo que o último é para a haste final C (sobrepondo o disco 9), concluímos que ele esta sobre a haste B, pois o disco 9 ainda não foi movido para C, para que pudesse acomoda-lo.

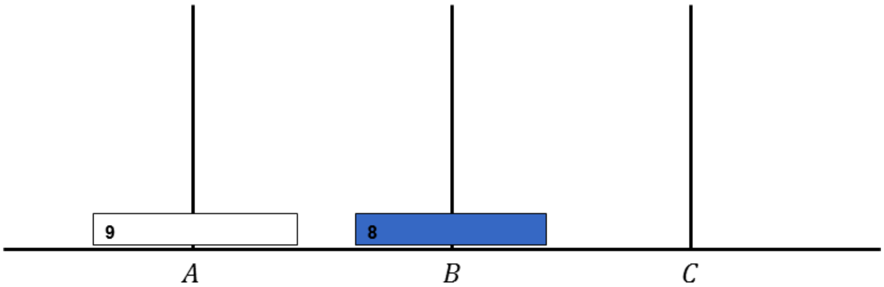

Figura 11 (b): Aplicação do método de Timothy R. S. Walsh

O disco 7 possui valor lógico 0, deste modo não está sobre o disco 8, tão pouco sobre o disco 9, devido a paridade, logo está nas haste final C, e sobre ele estão os disco 6 e 5, pois possuem também o mesmo valor lógico 0.

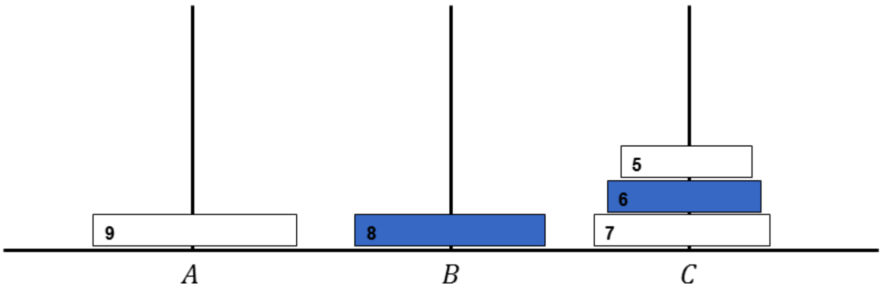

Figura 11 (c): Aplicação do método de Timothy R. S. Walsh

O disco 4 não está sobre o disco 5 pois possui valor 1, também não está sobre o disco 8 por paridade, logo, está sobre o disco 9, na haste A.

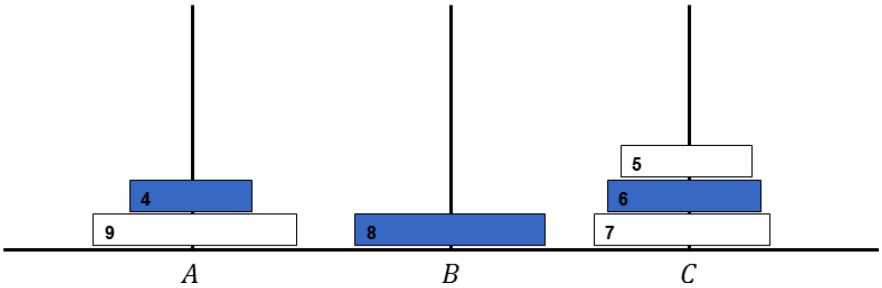

Figura 10 (d): Aplicação do método de Timothy R. S. Walsh

O disco 3, por sua vez, tem valor 0, diferente do disco 4, logo não está sobre ele, e por paridade, concluímos que ele não está sobre o disco 5, estando, portanto, sobre o disco 8, na haste B. Como os bits correspondentes aos discos 2 e 1 possuem o mesmo valor que o do disco 3, valor 0, estes, estão empilhados sobre o disco 3. Finalizando, dessa forma, a estrutura da torre ao término da centésima trigésima sexta jogada.

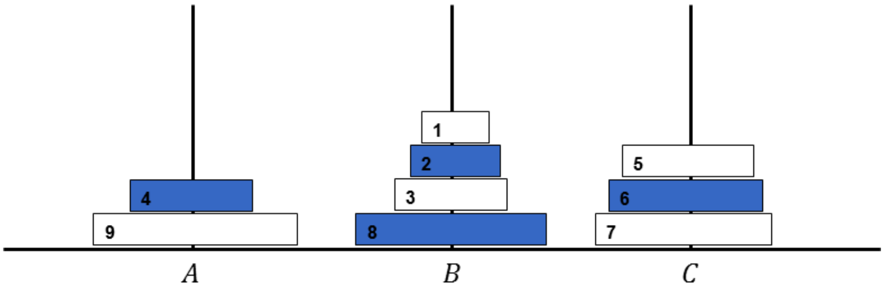

Figura 11 (e): Término da aplicação do método de Timothy R. S. Walsh

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A produção deste texto foi extremamente gratificante devido ao fato da maior parte das propriedades do jogo terem sido feitas através da observação de padrões por meio de sucessivas repetições, desde propriedades mais simples, como número mínimo de movimentos para vencer o jogo (pergunta mais obvia quando se é apresentado ao jogo), como fatos mais complexos.

Além disso, estamos orgulhosos em apresentar aqui alguns aspectos do jogo pouco, ou nada, explorado pela literatura que temos, como alguns resultados relacionados com os números binários.

Esperamos que trabalho possa servir de referência tanto para pessoas que buscam inovar sua aula com algum recurso, e buscam a aplicação da matemática nos diversos ambientes e situações, como para os amantes da matemática, que não dispensam um bom texto e buscam ampliar e aprofundar cada vez mais seus conhecimentos.

7 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

[1] WATANABE, Renate. *Vale para 1, para2, para 3, ... Vale para sempre?* Revista do professor de matemática – RPM, nº 9, p.32.

[2] SANTOS, T. Naia. *Variante da Torre Hanói*. Universidade de São Paulo – USP, Brasil, p. 107.

[3] PEREIRA, Antônio; RODRIGUES, Rosália. *O problema das Torres de Hanói: a lenda, algoritmos e generalizações*. Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

[4] BRANDÃO, Tomás. *Contadores*. In: BRANDÃO, Tomás. *Circuitos Sequenciais*. Lisboa: Instituto Universitário de Lisboa – Departamento de Ciência e Tecnologia da Informação, 2009. p. 40 – 44.

[5] REINA, Rodolfo Valeiras. *La Torre de Hanoi*. Disponível em: http://www.rodoval.com /heureka/hanoi/. Acesso no dia: 23/10/2012.

[6] LUCAS, M. Édouard. *Récréations Mathématiques*. Vol. III, Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1893.

[7] R. E. Allardice; A. Y. Fraser. *La Tour d'Hanoi*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, volume 2,1883. p.50-53

[8] COSTA, Eli B. Liberato. *A História da Ciência e o Ensino da Recursividade: as Torres de Hanóis*. História da Ciência e Ensino. Volume 4, 2011. p. 38-48.

[9] MOREIRA, Carlos Gustavo. *Sequências Recorrentes.* IMPA.

[10] MEC - Ministério da Educação - Secretaria de Educação Fundamental - *PCN's: Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.