UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI–ÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

A Natureza dos Logaritmos e Aplicações

FRANCISCO EDSON SOUSA DE MOURA

MOSSORÓ – RN

2018

FRANCISCO EDSON SOUSA DE MOURA

A Natureza dos Logaritmos e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal Rural do Semiárido, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues

MOSSORÓ – RN

2018

M929n MOURA, FRANCISCO EDSON.
A NATUREZA DOS LOGARITMOS E APLICAÇÕES / FRANCISCO EDSON MOURA. - 2018.
74 f. : il.

Orientador: WALTER MARTINS RODRIGUES.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2018.

1. LOGARITMOS. 2. FUNÇÕES. 3. APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS. I. MARTINS RODRIGUES, WALTER , orient. II. Título.

FRANCISCO EDSON SOUSA DE MOURA

A Natureza dos Logaritmos e Aplicações

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 16 / 02 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Walter Martins Rodrigues

Dr. WALTER MARTINS RODRIGUES - UFERSA

Presidente

Dr. ANTONIO GOMES NUNES - UFERSA

Membro interno

Mariana de Brito Maia

Dra. MARIANA DE BRITO MAIA – UFERSA

Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2018.

“A Matemática se vista corretamente, possui não só a verdade, como também a suprema beleza”.

Bertrand Russell

AGRADECIMENTOS

A Deus, acima de tudo.

A minha família, em especial a minha mãe Maria Eleuza Sousa de Moura.

Ao Professor Dr. Walter Martins Rodrigues pela orientação.

A todos os professores do curso do mestrado pela colaboração nas aulas ministradas.

RESUMO

O estudo dos logaritmos sem dúvida nenhuma é um desafio para os alunos no que diz respeito a compreensão e resolução de problemas e para os professores na apresentação do tema em questão. Esse trabalho tem por objetivo ajudar os professores em abordar uma parte dos logaritmos um pouco diferente. A princípio, se ver como o estudo desse tema é relatado pelos parâmetros curriculares e como geralmente é inserido no Enem. Após uma rápida revisão de exponenciais é introduzido a definição de logaritmos tomando como base o livro de Elon, 1996. Em seguida, é mostrado em detalhes um estudo sobre o número ***e*** utilizando juros e binômio de Newton, a função ln(x) e várias aplicações dos logaritmos. Por último, é apresentado uma sugestão para abordar a função exponencial em sala mostrando sua superioridade em relação as outras funções.

Palavras-chave: Logaritmos, funções, aplicações dos logaritmos.

ABSTRACT

The study of logarithms is undoubtedly a challenge for students in understanding and solving problems and for teachers in presenting the topic in question. This paper aims to help teachers approach a bit of the logarithms a bit differently. At first, we will see how the study of this theme is reported by the curricular parameters and how it is usually inserted in the Enem. After a rapid revision of exponentials is introduced the definition of logarithms based on the book of Elon, 1996. Next, is shown in detail a study on the number ***e*** using interest and binomial of Newton, the function ln(x) and several applications of logarithms. Finally, a suggestion is presented to address the exponential function in the room showing its superiority in relation to the other functions.

Keywords: Logarithms, functions, applications of logarithms.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

MACE – Metodologia de Apoio do Ceará: áreas de ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.

PCN+ - Parâmetros Curriculares Nacionais +.

OCEM – Orientações Curriculares do Ensino Médio.

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

Enem – Exame Nacional do Ensino Médio

Sumário

Introdução

A matemática em sua essência abstrata é considerada uma disciplina delicada de ensinar e aprender. E alguns tópicos desta matéria se destacam pela dificuldade de ensino-aprendizagem.

Este trabalho tem a finalidade de apresentar um tema explorado no primeiro ano do ensino médio, os logaritmos. Um tema que quando estudado é considerado assustador por parte dos alunos.

O principal motivo para a realização deste trabalho foi a falta do estudo desse tema quando passei pelo ensino médio. Consequentemente, tive dificuldades ao me deparar com os logaritmos na graduação, que devo salientar, foi muito superficial. Outro fator que pode ser destacado são as várias aplicações dos logaritmos.

Algo importantíssimo que podemos ressaltar no estudo dos logaritmos é perceber que as funções exponenciais aumentam ou diminuem rapidamente enquanto as funções logarítmicas ocorrem ao contrário, aumentam ou diminuem lentamente. Esta característica descreve vários fenômenos encontrados na física, biologia, economia, entre outras áreas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 dá-se ênfase as orientações dadas pelos PCN+, orientações curriculares tentando nortear a metodologia.

No capítulo 2 são mostradas as definições de exponenciais e logaritmos, funções logarítmicas e suas propriedades e teoremas.

No capítulo 3 é mostrado uma relação do número de Euler "***e***" com uma identidade trigonométrica famosa. Em seguida, abordaremos uma maneira de determinar o número de Euler utilizando matemática financeira. Será visto a função logarítmica que possui como base esse número importante. E finaliza mostrando algumas aplicações que são modelados através de funções exponenciais e logarítmicas.

No capítulo 4 é mostrada uma proposta para trabalhar na sala de aula relacionando algumas funções e ressaltando a superioridade da exponencial.

Capítulo 1: Logaritmos e Escola

Ensinar Matemática sempre foi um desafio constante na vida de um professor se tratando especialmente na parte didática, e por esse e outros motivos tem-se buscado mudanças no modo de transmitir o tema em questão. Pode-se ver isso na Metodologia de Apoio do Ceará (MACE): área de ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, o documento afirma

> O ensino da Matemática tem sido objeto de pesquisas e reflexões por parte de expressivo número de estudiosos da matéria. Considerado por pesquisadores e professores como uma disciplina basilar na formação das competências cognitivas, têm surgido variadas alternativas metodológicas para o trabalho na sala de aula com os conhecimentos matemáticos. (p. 16)

Segundo (PCN+, 2006, p. 111), "a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional". Por consequência a matemática deve ser vivenciada. E é dever do professor fazer com que essa vivência seja prazerosa e útil tanto para o presente quanto para o futuro. O PCN+ diz ainda que

> [...] a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber. (p. 111)

O trecho acima nos mostra que o ensino da Matemática ultrapassa a ideia de apenas decorarmos fórmulas, e sim enxerga-la como a ciência que é, associando-a as outras áreas do conhecimento.

Reforçando ainda um pouco mais, o (PCN+, 2006, p. 119) diz que para explorar conteúdos relativos aos temas números, álgebra, medidas, geometria e noções de estatística e probabilidade envolve diferentes formas do pensar em Matemática, diferentes contextos para as aplicações, bem como a existência de razões históricas que deram origem e importância a esses conhecimentos. Mas para evitar a quantidade excessiva de informações, é preciso fazer um recorte, usando alguns critérios orientadores deste processo de seleção de temas. Nota-se que ao mesmo tempo em que os professores devem abordar todos os conteúdos citados, devem também se atentar ao que será necessário ou não. As Orientações Curriculares do Ensino Médio (OCEM) reforçam essas mesmas ideias

> Para a escolha de conteúdo, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (OCEM, 2006, p. 69)

Percebe-se claramente que o contexto histórico é bastante mencionado tentando nos mostrar sua importância na abordagem de um determinado conteúdo, e que também o modo de trabalhar os conteúdos deva levar aos alunos um valor formativo estabelecendo hipóteses, tirando conclusões, criando modelos entre outras competências.

Sobre o ensino da Matemática, a álgebra desempenha um importante papel na vivência cotidiana enquanto linguagem, como pode encontrar na variedade de gráficos e tabelas, e também como instrumento de cálculos de natureza financeira. Como cita (PCN+, 2006, p.121)

> Esse tema possui fortemente o caráter de linguagem com seus códigos (números e letras) e regras (as propriedades das operações), formando os termos desta linguagem que são as expressões que, por sua vez, compõe as igualdades e desigualdades.

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, desenvolvendo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, o estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. No mesmo contexto podemos perceber que geralmente o ensino de funções requer como pré-requisito o estudo dos números reais, conjuntos e suas operações. Entretanto, o mesmo cita que todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Notamos claramente que a abordagem feita tradicionalmente pode ser reorganizada, dependendo do que será cobrado dentro do tema funções.

Sobre as funções em particular as exponenciais e logarítmicas o PCN+ fala que

> O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. (PCN+, 2006, p.121)

Mas sejamos bastantes cuidadosos ao abordar tal conteúdo e não se estender demais em alguns tópicos como a resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo, podem ser suprimidas. Como já dito anteriormente, cabe ao professor lapidar os conteúdos para serem aproveitados da melhor maneira possível.

De acordo com PCNEM o documento afirma

> A reforma curricular do Ensino Médio estabelece a divisão do conhecimento escolar em áreas, uma vez que entende os conhecimentos cada vez mais imbricados aos conhecedores, seja no campo técnico-científico, seja no âmbito do cotidiano da vida social. A organização em três áreas – Linguagens, Códigos e suas

> Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias [...]. (PCNEM, 2000, p. 18)

Podemos observar nesse trecho duas importâncias que se ressaltam: uma é a mudança no currículo do ensino médio tentando de alguma forma interligar setores que compartilham objetos de estudos; e outra a introdução da tecnologia nas três áreas citadas, já que indiscutivelmente é algo cada vez mais presente nas vidas das pessoas. Podemos ver essa ideia ser reforçada no (PCN+, 2006, p. 127) onde diz "Nesse contexto, as calculadoras e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo em que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os *softwares"*.

Observa-se que para um ensino qualitativo o professor precisará de suporte tanto para os conteúdos definidos quanto para sua abordagem metodológica. Para isso foi criado uma sequência de competências e habilidades onde as mesmas são utilizadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), ou no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), capaz de organizar e estruturar o ensino, no que diz respeito a grande área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, que elegeu três grandes competências como podemos ver:

> 1) Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
> 2) Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
> 3) Contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. (PCN+, 2006, p. 113).

Percebemos que essas competências não são dependentes, ou seja, pode se trabalhar com apenas duas delas de acordo com a situação. Podemos destacar na competência 3, por exemplo, que necessitamos compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social. Na Matemática pode-se tomar como exemplo (PCN+) ao se perceber a origem do uso dos logaritmos [...] “como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século XVI, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos” [...].

Podemos reforçar o que diz o parágrafo anterior em outro trecho (PCN+, 2006, p. 129) que “Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações problema, preferencialmente tomadas em contexto real”. E finaliza dizendo, “A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado”. No entanto, devemos ser cuidadosos ao escolher os problemas e como abordá-los, e é importante deixar que os alunos pensem por si mesmos, especialmente quando seu pensamento estiver incorreto devemos apenas faze-lo se questionar e tentar enxergar onde o erro aconteceu. Vejamos o que diz o PCNEM

> Enfim, a aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias indicam a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade. (PCNEM, 2000, p. 20)

Em poucas palavras, isto quer dizer que estes conhecimentos são necessários para que os alunos continuem a se desenvolver, e consequentemente se aperfeiçoando durante sua vida, adquirindo autonomia e confiança em seu próprio conhecimento.

Quando trata do ensino de logaritmos deve levar em consideração tanto a forma como este conhecimento nos foi legado pela história da Matemática quanto o modo que seu ensino é recomendado pelos documentos oficiais (Merichelli e Allevato, 2010). Como podemos ver em Eves (2011, p.347),

> Durante anos ensinou-se a calcular com logaritmos na escola de segundo grau ou no início dos cursos superiores de Matemática e também por muitos anos a régua de cálculo logarítmica foi o símbolo do estudante de engenharia do campus universitário.

No entanto, com o passar dos anos tanto o ensino quanto o estudo de tal tema tiveram que se adaptar ao avanço da tecnologia. Em seu livro ele diz que

> Com o advento das espantosas e cada vez mais baratas calculadoras portáteis, ninguém mais em sã consciência usa uma tábua de logaritmos ou uma régua de cálculos para fins computacionais. O ensino dos logaritmos, como um instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas [...]. A função logaritmo, porém, nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino de matemática (EVES, 2011, p. 347).

Ressaltando a opinião de EVES, temos o seguinte trecho das Orientações Curriculares para o Ensino Médio menciona o seguinte trecho “O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas do conhecimento [...]. Procedimentos de resoluções de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. ” (BRASIL, 2006, p. 75)

Para Elon Lages Lima (1996) o ensino dos logaritmos deveria ser ensinado geometricamente, pois apresenta uma vantagem incontestável de simplicidade conceitual e técnica. Ele ainda complementa

> “A definição geométrica depende apenas do conceito de área de uma figura plana e a propriedade fundamental l(x.y) = l(x) + l(y) resulta meramente do fato de que a área de um retângulo não se altera quando se multiplica sua base por um número e se divide a altura pelo mesmo número. [...] o número *e* surge de modo natural e os logaritmos que se definem dessa maneira são os de base *e*”.

De acordo com Karrer realmente essa definição tem a vantagem de apresentar o número irracional ***e*** de forma simples e natural, entretanto “não há como desenvolvê-la na primeira série do ensino médio, pelo motivo de envolver conteúdos que só serão trabalhados em alguns cursos do ensino superior” (KARRER, 1999, p.48). E como podemos perceber o método defendido por Elon não é o utilizado pelos autores atuais, que definem logaritmos como a inversa das exponenciais.

Quando se trata do Enem, podemos perceber claramente através de uma pesquisa que o tema logaritmos/exponencial não é tão explorado como outros assuntos dentro da Matemática.

De acordo com o quadro abaixo podemos perceber a frequência com que o tema citado aparece nas provas do Enem desde 2009.

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Logaritmos (número de questões)	0	0	1	0	1	0	1	2
Exponenciais (número de questões)	1	0	0	0	0	0	1	0

Quadro 1. Número de questões no ENEM sobre logaritmos e exponenciais

O novo modelo de prova do Enem começou no ano de 2009 e segue o mesmo padrão, com 45 questões de Matemática onde todas são contextualizadas, isto é, apresentam aplicações da Matemática a realidade. O fato é que elaborar boas questões contextualizadas não é uma tarefa simples. Como diz Cláudio Buffara em seu artigo "[...] a fim de contornar a complexidade dos problemas reais, a banca do Enem às vezes produz enunciados confusos, recorre a simplificações excessivas e descreve situações irreais". Além disso, ele complementa dizendo "A ausência de questões abstratas numa prova tão abrangente e decisiva como o Enem fatalmente impactará os currículos de Matemática das escolas. É altamente provável que esses passem a enfatizar cada vez mais as aplicações da Matemática [...]".

O modelo aplicado pelo Enem pode ser bom, mas ao mesmo tempo pode levar adiante o problema de "banir" as questões de cunho abstrato como mostra uma pesquisa realizada por Kaminski que diz "quem adquire uma dada habilidade matemática de forma abstrata adquire também maior facilidade para transferir essa habilidade, aplicando-a em situações diversas, do que aqueles que adquirem a habilidade no contexto de um problema específico". Óbvio que o objetivo de uma educação matemática é formar pessoas capazes de adaptar e aplicar seus conhecimentos a todo tipo situação e não apenas a algumas. Cláudio Buffara ainda complementa “[...] dada à importância cada vez maior desse exame, não será surpresa encontrar, num futuro não muito distante, cursos de Matemática nas escolas de ensino médio reduzidos a cursinhos preparatórios para o Enem”.

Entretanto, o estudo da Matemática como já mencionado, deve ser ensinado de modo que os alunos percebam e compreendam o mundo ao seu redor e apliquem seus conhecimentos matemáticos a contextos inéditos. Não se deve ensinar a Matemática ou qualquer que seja a área para preparar os alunos apenas para uma prova como a do Enem.

Capítulo 2: Logaritmos

Neste capítulo veremos como os logaritmos são apresentados e como Lima (1996) aborda o tema. Foi usado como referência para este capítulo o livro Logaritmos (Lima, 1996), assim como o artigo: Um estudo sobre os logaritmos – História e Propriedades de autoria Silvana Luzia Correia Pinto e Dassael Fabrício dos Reis Santos. Começaremos falando sobre exponenciais, um assunto que geralmente é visto anterior aos logaritmos, no entanto, de acordo com Lima (1996), “[...] os logaritmos foram inventados antes da notação de exponencial”!

A estratégia de montar a função exponencial desta forma está relacionada com própria ideia original de Napier, que pensava em potências sucessivas de um dado número. Pode-se ver isso em BOYER, 1974, p. 228.

2.1 Exponenciais

Observemos o quadro abaixo para iniciarmos ao assunto:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Quadro 2. Potências de base 2.

Nota-se que há uma correspondência entre a progressão aritmética (1ª linha) e a progressão geométrica (3ª linha). Por exemplo, se quisermos multiplicar 16 x 64, encontramos os termos correspondentes a 4 e 6 respectivamente na primeira linha. Ao somarmos 4 com 6 obtemos 10, e o valor correspondente a ele na terceira linha é 1024, e chegamos a conclusão que 16 x 64 = 1024. Nota-se que esse processo é a propriedade de potência, $a^p \times a^q = a^{p+q}$.

O estudo que veremos limita-se as potências de um número positivo a.

Deixando claro que toda a abordagem algébrica mencionada aqui é direcionada ao professor e cabe ao mesmo que linguagem será conveniente.

2.1.1 Definição

Seja a um número real positivo. Dado um inteiro *n* > 0, a potência a^n é definida como o produto de *n* fatores iguais ao número a. Ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ fatores}$$

2.1.2 Propriedade Fundamental

Sendo $a \in \mathbb{R}, m\ e\ n \in \mathbb{Z}$, tem-se pela definição que:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Com a propriedade acima podemos mostrar que a divisão de potências de mesma base e potência da potência decorrem dela. Mas para isso devemos definir a potência $a^0 (a \neq 0)$ de modo que a propriedade fundamental seja válida. Portanto, $a^0 = 1$, pois assim ficaremos,

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n \ (a \neq 0)$$

Ampliando a definição de potência para expoentes negativos de modo que a propriedade fundamental continue valendo, a única maneira possível de definir a potência a^n (com *n* inteiro) é termos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0)$.

Veja que,

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, (a \neq 0).$$

Aplicando a propriedade fundamental a *p* fatores de mesma potência a^n obtêm,

$$\underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \cdots \cdot a^n}_{p\ fatores} = a^{\overbrace{n+n+\cdots+n}^{p\ fatores\ n}} = a^{np}, (a \neq 0).$$

A expressão representa a propriedade potência da potência apresentada em livros didáticos, ou seja, $(a^n)^p = a^{np}, (a \neq 0)$.

Dando continuidade à ideia de potência deve-se estender sua noção quando *a* > 0 e *n* um expoente racional. Para isso usa-se a seguinte definição: Dado um número real *a* > 0 e um inteiro q > 0, o símbolo $\sqrt[q]{a}$ representa o número real positivo chamado de raiz q-ésima do número positivo a.

Seja agora *a* > 0 um número real e r = p/q um número racional com p e q inteiros e q diferente de zero. Sendo assim,

$$(a^r)^q = (a^{p/q})^q = a^{(\frac{p}{q})\cdot q} = a^p.$$

Pela definição acima, pode afirmar que $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Assim a potência a^r fica definida para r racional. A propriedade fundamental é válida para os números racionais $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, com *r* = *p/q* e *s* = *u/v* (sendo q e v diferentes de zero).

De fato,

Sabemos que

$$(a^r)^q = a^p \text{ e que } (a^s)^v = a^u.$$

Logo,

$$(a^r \cdot a^s)^{qv} = (a^r)^{qv} \cdot (a^s)^{qv} = a^{rqv} \cdot a^{sqv} = a^{pv} \cdot a^{uq} = a^{pv+uq}.$$

Vemos que $a^r \cdot a^s$ é o número cuja qv-ésima potência vale a^{pv+uq}.

Isto significa que

$$a^r \cdot a^s = a^{(pv+uq)/qv}.$$

Como,

$$\frac{pv+uq}{qv} = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} = r + s,$$

Conclui-se que,

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

2.2 Definição de Logaritmos

Aqui apresenta a definição de logaritmos nos livros didáticos do ensino médio.

2.2.1. *Definição*

Dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$.

Escreve-se $y = \log_a x$ e lê-se y é o logaritmo de x na base a.

Pode-se escrever ainda da seguinte forma:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Vejamos um exemplo:

$$\log_2 64 = 6 \Leftrightarrow 2^6 = 64$$

2.2.2. Propriedade Fundamental

De posse da definição 2.2.1 decorre a seguinte propriedade:

$$\log_a(ux) = \log_a u + \log_a x$$

Com efeito, chamaremos

$$\log_a u = v$$

e

$$\log_a x = y$$

Pela definição 2.2.1 significa dizer que

$$a^v = u$$

e

$$a^y = x$$

Multiplicando as duas últimas igualdades tem-se:

$$a^v \cdot a^y = ux$$

Donde tem-se

$$a^{v+y} = ux$$

Portanto,

$$\log_a(ux) = v + y = \log_a u + \log_a x$$

Como consequências da definição 2.2.1 e da propriedade fundamental 2.2.2 dos logaritmos têm:

1) $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$
2) $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$
3) $\log_a a^n = n$, pois, $\log_a a^n = \log_a \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n\ vezes} =$ $\overbrace{\log_a a + \log_a a + \cdots + \log_a a}^{n\ vezes} = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n\ vezes} = n.$

Os livros didáticos do ensino médio costumam trazer algumas propriedades de logaritmos. Vejamos duas delas:

1. $\boldsymbol{\log_a u^n = n \cdot \log_a u\,, para\ n \in \mathbb{Q}}$**.**

<u>*Demonstração*</u>: Sejam a e u números reais com $a > 0$ e $u > 0$.

- Quando $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\log_a u^n = \log_a \overbrace{u \cdot u \cdots u}^{n\ vezes}$$

Aplicando a propriedade fundamental

$$\log_a u^n = \overbrace{\log_a u + \log_a u \cdots + \log_a u}^{n\ vezes} = n \cdot \log_a u.$$

- Quando $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$0 = \log_a 1 = \log_a u^0 = \log_a u^{n-n} = \log_a u^n \cdot u^{-n}$$

Aplicando a propriedade fundamental

$$0 = \log_a u^n + \log_a u^{-n}$$

Donde temos

$$\log_a u^{-n} = -\log_a u^n = -n \cdot \log_a u$$

2. $\boldsymbol{\log_a \left(\frac{u}{x}\right) = \log_a u - \log_a x}$

<u>*Demonstração*</u>: Sejam a, u e x números reais com $a > 0$, $u > 0$ e $x > 0$.

$$\log_a \left(\frac{u}{x}\right) = \log_a \left(u \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Aplicando a propriedade fundamental

$$\log_a \left(u \cdot \frac{1}{x}\right) = \log_a u + \log_a \frac{1}{x} = \log_a u + \log_a x^{-1}$$

Pela propriedade 1. temos,

$$\log_a x^{-1} = -1 \cdot \log_a x$$

Portanto, conclui-se que

$$\log_a \left(\frac{u}{x}\right) = \log_a u - \log_a x \qquad \blacksquare$$

2.3 Funções Logarítmicas

Vejamos como Lima (1996) aborda esse tópico utilizando duas propriedades importantes.

2.3.1. *Definição*

Uma função real $L: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando tem as seguintes propriedades:

A) L é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;

B) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^{+}$.

Para todo $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, o número $L(x)$ chama-se logaritmo de x.

2.3.2. Propriedades das Funções Logarítmicas

Propriedade 1. Uma função logarítmica $L: \mathbb{R}_{+}^{*} \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ e $x \neq y$, então ou $x < y$ ou $y < x$.

1º caso: Se $x < y$ resulta da propriedade A) que $L(x) < L(y)$, pois L é uma função crescente.

2º caso: Se $y < x$ resulta da propriedade A) que $L(y) < L(x)$, pois L é uma função crescente.

Sendo assim, em qualquer hipótese em que $x \neq y$, conclui-se que $L(x) \neq L(y)$. ■

Propriedade 2. O logaritmo de 1 é zero.

Demonstração: Pela propriedade B) temos que

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$$

Onde podemos ver que

$$L(1) = L(1) - L(1) = 0 \qquad ■$$

Propriedade 3. Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 tem logaritmos negativos.

Demonstração: Mostrar que os números maiores que 1 têm logaritmos positivos. A propriedade A) diz que L é uma função crescente, ou seja, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$.

Tomando $x = 1$, temos

$$1 < y \Rightarrow L(1) < L(y)$$

Pela propriedade 2. $L(1) = 0$, temos que

$$L(y) > 0$$

Portanto, o logaritmo de números maiores que 1 é positivo.

Por outro lado, sendo L uma função crescente e que,

$$0 < x < 1 \Rightarrow L(x) < L(1)$$

Pela propriedade 2. $L(1) = 0$, temos

$$L(x) < 0$$

Portanto, o logaritmo de números menores que 1 é negativo.

■

Propriedade 4. Para todo $x > 0$, tem-se $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

<u>*Demonstração*</u>: Com efeito, se $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$, então teremos,

$$L(1) = L\left(x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Mas da propriedade B) temos que,

$$L\left(x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = L(1)$$

Da propriedade 2. $L(1) = 0$, segue que,

$$L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Donde,

$$L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$$

■

Propriedade 5. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^* \; e \; y \neq 0$, vale

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$$

<u>*Demonstração*</u>: Observando que $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, temos,

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

Mas da propriedade B) temos que,

$$L\left(x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right)$$

E da propriedade 4. $L\left(\frac{1}{y}\right) = -L(y)$,

Logo temos,

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$$

■

Propriedade 6. Para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ e todo número racional $r = \frac{p}{q}$ tem-se

$$L(x^r) = r \cdot L(x)$$

<u>*Demonstração*</u>: Será mostrada por etapas.

<u>*1ª etapa*</u>: Quando $r = n, com\, n \in \mathbb{N}$. Da propriedade B) temos que $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, se aplica a um produto qualquer de fatores. Sendo assim,

$$L\Big(\underbrace{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}_{n\, fatores}\Big) = \underbrace{L(x_1) + L(x_2) + \cdots + L(x_n)}_{n\, parcelas}$$

Supondo que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$, tem-se

$$L(x^n) = L\left(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\,fatores}\right) = \underbrace{L(x) + L(x) + \cdots L(x)}_{n\,parcelas} = n \cdot L(x)$$

<u>*2ª etapa*</u>: Quando $r = 0$.

Veja que para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ tem-se $x^0 = 1$.

Logo,

$$L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$$

<u>*3ª etapa*</u>: Quando $r = -n, n \in \mathbb{N}$, ou seja, r é um inteiro negativo.

Para todo $x > 0$ temos $x^n \cdot x^{-n} = 1$, logo

$$L(1) = L(x^n \cdot x^{-n}) = 0$$

E da propriedade B) temos

$$L(x^n \cdot x^{-n}) = L(x^n) + L(x^{-n}) = 0$$

Sendo assim

$$L(x^{-n}) = -L(x^n) = -n \cdot L(x)$$

<u>*4ª etapa*</u>: Quando $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p$$

Note que pela 1ª etapa temos

$$q \cdot L(x^r) = L(x^r)^q$$

Como $(x^r)^q = x^p$ temos

$$L(x^r)^q = L(x^p) = p \cdot L(x)$$

Dessas duas últimas igualdades temos

$$q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x)$$

Donde resulta

$$L(x^r) = \frac{p}{q} \cdot L(x) = r \cdot L(x)$$

E com isso conclui a demonstração da propriedade 6. ■

Propriedade 7. Uma função logarítmica $L: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Demonstração: Separamos em dois casos.

1º caso: Quando a função for ilimitada superiormente.

Dado um número real β qualquer, vai existir um número $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $L(x) > \beta$.

Tomando um número natural n tal que $n > \frac{\beta}{L(2)}$. Como $L(2)$ é positivo pela propriedade 3, temos que

$$n \cdot L(2) > \beta$$

Usando a propriedade 6, vemos que

$$n \cdot L(2) = L(2^n)$$

Portanto, $L(2^n) > \beta$, se considerar $x = 2^n$, temos $L(x) > \beta$.

2º caso: Quando a função for ilimitada inferiormente.

Dado um número real α qualquer, vai existir um número $y \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $L(y) < \alpha$.

Tomando um número natural n tal que $n > -\frac{\alpha}{L(2)}$. Como $L(2)$ é positivo pela propriedade 3, temos que

$$n \cdot L(2) > -\alpha \Rightarrow -n \cdot L(2) < \alpha$$

Usando a propriedade 6, vemos que

$$-n \cdot L(2) = L(2^{-n})$$

Portanto, $L(2^{-n}) < \alpha$, se considerar $x = 2^{-n}$, temos $L(y) < \alpha$.

Com isso, demonstramos a propriedade 7. ■

Mas para uma melhor compreensão da propriedade 7 será mostrado 3 exemplos.

1º exemplo: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen(x)$ é limitada tanto superiormente quanto inferiormente. Sabemos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ como podemos ver na figura 1 a seguir:

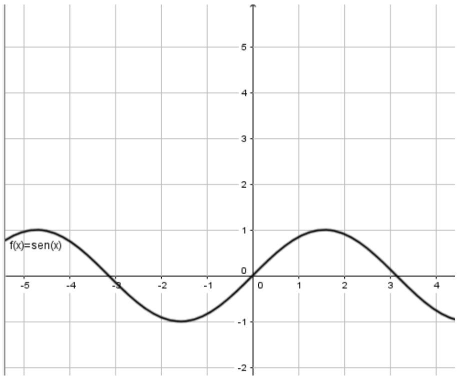

Figura 1. Função sen(x).

2º exemplo: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ é limitada inferiormente, mas não superiormente. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x^2 \geq 0$. Logo zero é o menor valor que $g(x)$ pode assumir. Para o caso superior, dado um α é sempre possível achar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 > \alpha$. Tome $x > \sqrt{\alpha}$ se α for positivo ou qualquer x se α for negativo.

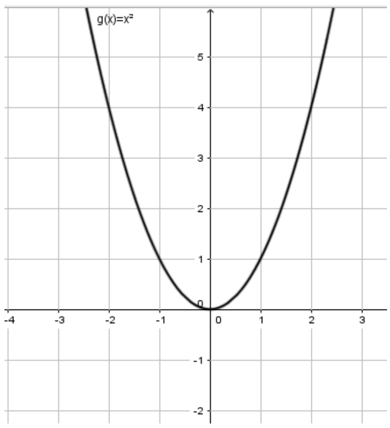

Figura 2. Função x^2.

3º exemplo: A função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^3$ é ilimitada inferiormente e superiormente para todo $x \in \mathbb{R}$, como se pode ver sem dificuldade no gráfico abaixo.

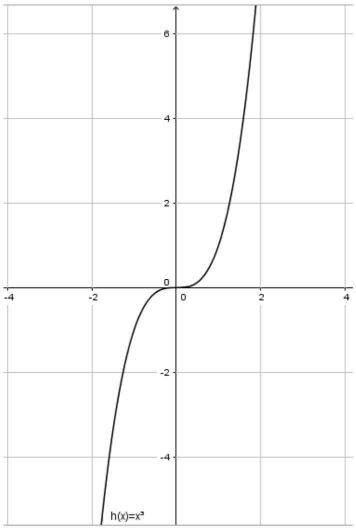

Figura 3. Função x^3.

<u>Observações</u>

1) Uma função logarítmica L não pode estar definida quando $x = 0$. Se caso fosse, teríamos,

$$L(0) = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0)$$

Donde $L(x) = 0$. E assim, L seria identicamente nula, contrariando a propriedade A).

2) Não é possível estender o domínio de uma função logarítmica de modo que $L(x)$ seja um número real, definido para todo $x < 0$.

2.3.3. Bijeção entre $\mathbb{R}_+^* \boldsymbol{e}\ \mathbb{R}$

Note que, se $L: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica e c uma constante positiva arbitrária, então a função $M: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $M(x) = c \cdot L(x)$, é também uma função logarítmica. O teorema abaixo mostrará isso.

Observe agora um importante teorema que mostra que a propriedade citada é a única forma de obter outras funções logarítmicas conhecendo uma delas.

Teorema 1. Dadas duas funções logarítmicas $L, M: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$.

Demonstração:

Caso Particular: Suponha inicialmente que existe um número $a > 0$ tal que $L(a) = M(a)$. Vamos provar que $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$.

Notemos que se $L(a) = M(a)$, temos que $L(a^r) = M(a^r)$ para todo racional r. Veja que,

$$L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$$

Suponhamos, por absurdo, que exista um $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Seja $L(b) < M(b)$. (O outro caso é semelhante)

Escolhendo um número natural n grande tal que

$$n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a)$$

Então

$$M(b) - L(b) > \frac{L(a)}{n} = \frac{1}{n} \cdot L(a) = L(a^{\frac{1}{n}})$$

Chamando de $c = L(a^{\frac{1}{n}})$, temos que os números $c, 2c, 3c, \dots$ dividem $\mathbb{R}_+^*$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c. Sabendo que $c < M(b) - L(b)$, existe pelo menos um número desses que pertence ao intervalo $(L(b), M(b))$, digamos $m \cdot c$ com $m \in \mathbb{N}$, isto é,

$$L(b) < m \cdot c < M(b).$$

Mas

$$m \cdot c = m \cdot L\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = L\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = M\left(a^{\frac{m}{n}}\right)$$

Então

$$L(b) < L\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = M\left(a^{\frac{m}{n}}\right) < M(b).$$

Vejam que $L(b) < L\left(a^{\frac{m}{n}}\right)$, e como L é crescente temos que $b < a^{\frac{m}{n}}$. Entretanto, $M\left(a^{\frac{m}{n}}\right) < M(b)$ e como M também é crescente temos que $a^{\frac{m}{n}} < b$. Aqui temos uma contradição e mostra que b não existe.

Portanto, $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$.

Caso Geral: Dadas L e M funções logarítmicas quaisquer, temos $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$.

Seja $c = \frac{M(2)}{L(2)}$ e a função logarítmica $N: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $N(x) = c \cdot L(x)$.

Como $N(2) = c \cdot L(2)$, substituindo c na equação temos,

$N(2) = \frac{M(2)}{L(2)} \cdot L(2) = M(2)$.

Portanto, $N(x) = M(x)$ para todo $x > 0$, ou seja, $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$, concluindo a demonstração. ■

Lema 1: Seja $L: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Dados dois números reais quaisquer u, v sendo $u < v$, existe $x > 0$ tal que $u < L(x) < v$.

Demonstração: Inicialmente fixaremos um número natural n tal que

$$n > \frac{L(2)}{v - u}$$

Daí resulta

$$\frac{L(2)}{n} < v - u$$

Vamos chamar $c = \frac{L(2)}{n}$, com isso os múltiplos inteiros da forma $m \cdot c$ podem ser escritos da forma

$$m \cdot c = m \cdot \frac{L(2)}{n} = \frac{m}{n} \cdot L(2) = L\left(2^{\frac{m}{n}}\right)$$

Esses múltiplos decompõem a reta real em intervalos justapostos, cujo comprimento c é menor do que o comprimento $v - u$ do intervalo $I = (u, v)$.

Assim. Pelo menos um desses múltiplos $m \cdot c = L\left(2^{\frac{m}{n}}\right)$ cai no interior desse intervalo.

Substituindo $x = 2^{\frac{m}{n}}$, temos $u < L(x) < v$. ■

Teorema 2. Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um único número real positivo x tal que $L(x) = c$.

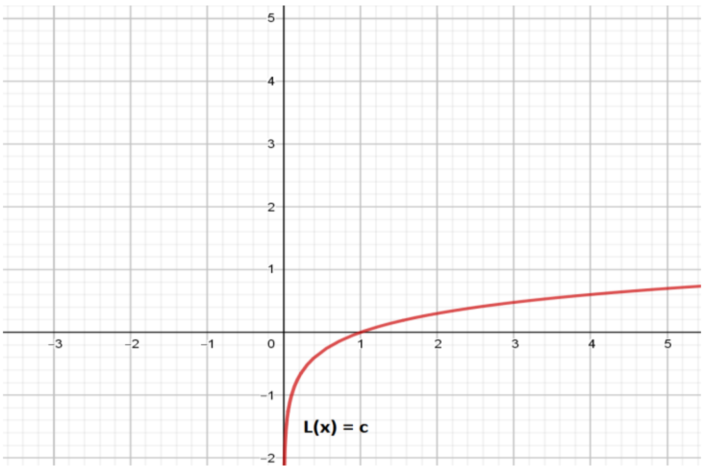

Figura 4. Função logarítmica

Lema 2: Omitiremos uma parte da demonstração que mostra que todo número real α admite uma representação decimal $\alpha = a_0, a_1 a_1 \dots a_n \dots$ e que como L é uma função crescente temos que $L(\alpha_n) \leq b < L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)$ com $\alpha_n = a_0, a_1 a_1 \dots a_n$ para todo $n \geq 0$, sendo b um número real qualquer. Caso queiram ver a demonstração por completo, ela é encontrada no livro Logaritmos, (Lima, 1996).

<u>*Demonstração*</u>: Tomando um número real qualquer b, devemos obter um número real positivo α tal que $L(\alpha) = b$.

Considere que $L(\alpha) < b$. Usaremos o Lema 1 para termos um $x > 0$ tal que $L(\alpha) < L(x) < b$.

Como L é crescente, isto implica $\alpha < x$.

Então tomando $n \in \mathbb{N}$ tão grande de modo que $(x - \alpha) > \frac{1}{10^n} > 0$, teremos $x > \left(\alpha + \frac{1}{10^n}\right)$.

Logo

$$x > \left(\alpha + \frac{1}{10^n}\right) \geq \left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)$$

Novamente do fato de L ser crescente, como $x > \left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)$ resulta do Lema 2

$$L(x) > L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) > b$$

Mas isso é um absurdo, pois x foi obtido de modo que $L(x) < b$.

De modo análogo, se tivermos $L(\alpha) > b$, novamente pelo Lema 1, com $x > 0$ temos $L(\alpha) > L(x) > b$.

Como L é crescente, isto implica $\alpha > x$. Implicando ainda que $\alpha_n > x$ para algum n.

Então

$$b \geq L(\alpha_n) > L(x)$$

Mas isso é um absurdo, pois x foi obtido de modo que $L(x) > b$.

Portanto, $L(\alpha) = b$. ■

Corolário: Toda função logarítmica $L: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (Bijeção) entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$.

Propriedade 8: Mudança de Base

Do teorema 2, segue ainda que, dada uma função logarítmica $L: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, existe um único número $a > 0$ tal que $L(a) = 1$. Esse número a é denominado base do sistema de logaritmos L. Para explicitarmos a base, escrevemos $L_a(x)$ em vez de $L(x)$.

Tomemos duas funções logarítmicas com bases a e b, ou seja, L_a e L_b onde $L_a(a) = L_b(b) = 1$.

De acordo com o Teorema 1, existe uma constante $c > 0$ tal que $L_b(x) = c \cdot L_a(x)$ para todo $x > 0$.

Se tomarmos $x = a$, teremos $L_b(a) = c$.

Logo temos

$$L_b(x) = L_b(a) \cdot L_a(x)$$

Para todo $x > 0$.

Os livros costumam trazer da seguinte forma

$$L_a(x) = \frac{L_b(x)}{L_b(a)}$$

Essa propriedade de mudança de base se torna muito importante no cálculo dos logaritmos, pois evita o uso de várias tabelas de logaritmos. Deixa claro que só precisamos de uma tabela e com ela calculamos qualquer logaritmo de qualquer base.

Vejamos um exemplo:

- Sabendo que $\mathrm{L}_{30}\, 3 = a$ e $\mathrm{L}_{30}\, 5 = b$, calcule $\mathrm{L}_{10}\, 2$.

<u>**Solução**</u>

Note que podemos escrever $2 = \frac{30}{3 \cdot 5}$ e $10 = \frac{30}{3}$.

Então, $\mathrm{L}_{10}\, 2 = \frac{\mathrm{L}_{30}\, 2}{\mathrm{L}_{30}\, 10} = \frac{\mathrm{L}_{30}\left(\frac{30}{3\cdot 5}\right)}{\mathrm{L}_{30}\left(\frac{30}{3}\right)} = \frac{\mathrm{L}_{30}\, 30 - \mathrm{L}_{30}\, 3 - \mathrm{L}_{30}\, 5}{\mathrm{L}_{30}\, 30 - \mathrm{L}_{30}\, 3} = \frac{1 - a - b}{1 - a}$.

Capítulo 3: O número *e*, a função *lnx* e aplicações dos logaritmos.

3.1. O Número *e*

Em se tratando de números importantes na história da matemática o conjunto dos números irracionais contém possivelmente os mais importantes, dentre eles será destacado nesse tópico uma constante, representado pela letra e que equivale a 2,7182818..., entretanto, essa simbologia só foi introduzida recentemente por **Leonard Euler** acreditando-se que essa escolha tenha sido por causa da inicial da palavra expoente (Boyer, 1974). A título de curiosidade esse número era representado pela letra grega ε (épsilon) e não se sabe com certeza sua origem, porém indícios na história mostra que ele era conhecido antes mesmo do cálculo (Thompson, 1914). Além de ser irracional (ou seja, não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}, com\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$) ele também é transcendente (ou seja, não pode ser solução para uma equação polinomial com coeficientes inteiros), e os responsáveis por essas demonstrações foram o suíço **Leonard Euler** em 1737 e o francês **Charles Hermite** em 1873 respectivamente (MAOR, 2008).

3.1.1. Uma Abordagem Didática para encontrar *e*

Esse texto foi retirado, traduzido e adaptado do livro Calculus Made Ease de Silvanus Thompson, capítulo XIV, páginas 134 a 142.

Fica a critério do professor abordar essas ideias, mas seria interessante aplica-las após expor a teoria.

Observação: O uso da calculadora será importante para obter alguns resultados.

3.1.1.1. Usando Juros

Quando falamos em juros pensa-se em algo que faz com que uma determinada quantia cresça em relação a certo período de tempo e ao valor inicial dessa quantia. Entretanto, isso pode ocorrer de duas formas, seguindo a regra de juros simples, ou seja, mantem-se a quantia fixa ao longo do tempo, ou de juro composto, isto é, adiciona o juro a quantia, que dessa forma cresce um pouco a cada adição de juro. Vejamos como ocorre nos dois casos:

- Juro Simples

Suponha que se tem um capital inicial de 100 reais, e o juro igual a 10% ao ano. Daí a pessoa que investir esse valor terá um acréscimo de 10 reais por ano. Digamos que a pessoa guarde esse acréscimo durante dez anos, no final desse tempo o investidor terá 200 reais, ou seja, o valor irá dobrar nos 10 anos. Suponha agora que a taxa de juro fosse 5% ao ano, a pessoa precisaria de 20 anos para conseguir dobrar o valor. Se fosse de 4% precisaria de 25 anos. Pode-se notar que se o valor do juro anual equivale a ***1/n***, a pessoa precisa de ***n*** anos para duplicar o seu valor. De maneira mais genérica podemos dizer assim, se ***x*** é o valor inicial, e o juro anual é de ***x/n***, então em ***n*** anos temos,

$$x + n\frac{x}{n} = 2x$$

Analisando o gráfico abaixo percebe-se que o comprimento OP significa a quantia inicial, OT é o tempo no qual o valor está crescendo. Dividindo OT em dez períodos, em cada um dos quais pode-se ver um aumento de igual valor (relacionado ao período anterior). Se cada passo é de 1/10 do comprimento OP, então, depois de 10 passos, a altura irá dobrar de tamanho. Generalizando, para dobrar a altura OP em *n* degraus, pense em *n* períodos, cada um deles subindo *1/n* da altura inicial.

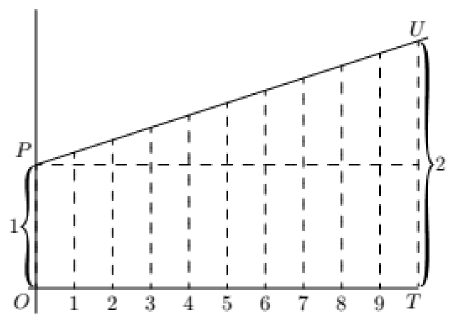

Figura 5.

- Juro Composto

Suponha de início a mesma quantia de 100 reais, e ganhe juro de 10% ao ano, porém, ao invés de guardar o juro, ele seja adicionado todo ano ao valor, de modo que essa quantia aumente todo ano. Sendo assim, ao final de um ano, o capital será de 110 reais; de dois anos, será de 121 reais, pois o juro de 10% sobre 110 é de 11 reais; ao final do terceiro ano o investidor receberá R$ 12,10 de juro totalizando em R$ 133,10. Seguindo a sequência, ao final de dez anos a pessoa terá um total de R$ 259,37. Podemos dizer que a cada ano, cada real ganha 1/10 de real, assim todo ano você multiplica o capital por 11/10, que por sua vez ao final de dez anos irá multiplicar o capital inicial por 2,5937. Colocando em símbolos temos x_0 para denotar o capital inicial, *1/n* é a razão que adiciona ao capital investido ao final de cada *n* período e x_n o valor final que recebe o n-ésimo juro, assim:

$$x_n = x_0\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Agora imagine se durante o primeiro ano o capital pudesse crescer ao longo desse ano. Combinando com o banco um juro de 5% ao semestre, ao final do primeiro o valor que o investidor teria seria 105 reais, que por sua vez ao final do segundo semestre teria 110 reais e 25 centavos. Fazendo isso nos 10 anos teríamos 20 operações, nas quais, ao final de cada período o investidor multiplica o capital por 21/20. Calculando dessa maneira, ao final dos 10 anos ele terá um capital equivalente a R$ 265,33. Note por que:

$$\left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} = 2{,}65329$$

Mas, se não parasse por aqui, e se pudesse adicionar um juro ao capital ao final de cada mês ou da seguinte forma, o investidor e o banco combinam em dividir o ano em dez partes, fazendo assim pagará um juro de 1% ao final de cada décimo de ano. Agora começa com 100 reais e terá 100 operações ao longo dos dez anos, isto é:

$$x_n = 100\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$$

Ao realizar as contas, deve chegar a $x_n \approx R\$\ 270{,}48$.

E se o banco dividisse os dez anos em 1000 períodos, cada um equivalente a 1/100 de ano, e se comprometesse a pagar juro de 1 décimo de 1% por período teria:

$$x_n = 100\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$$

Ao fazer os cálculos deve chegar a R$ 271,69.

Não precisa parar por aqui. Pode dividir os dez anos em 10000 partes, cada uma delas equivalendo a 1/1000 de ano, com juro de 1/100 de 1%, teriam:

$$x_n = 100\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000}$$

As contas devem te dizer que x_n, neste caso, vale R$ 271,81.

Por fim, percebe-se que estamos tentando achar o valor da expressão a seguir:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

Já percebemos que para *n* > 1, ela é maior que 2; e percebemos também que, conforme *n* vai aumentando, ela fica cada vez mais próximo de um certo valor limite. Não interessa se atribui para *n* o maior valor que possa imaginar – a expressão jamais passará do valor *2,7182818...*.

Analisando o próximo gráfico, cada uma das sucessivas ordenadas deve ser 1 + 1/n maior que a ordenada anterior, isto é, (n+1)/n multiplicado pela ordenada anterior. Percebe-se que os passos para cima não são iguais, pois cada degrau sobe 1/n da ordenada naquela parte da curva. Tem-se dez passos, com 1 + 1/10 à razão comum, sua altura final total tem que ser $(1 + 0{,}1)^{10}$ ou aproximadamente 2,594 vezes o comprimento 1 original. Mas se dividir OT em um número muito grande de partes, e com isso faz 1/n se tornar um valor muito pequeno, daí o valor final de $(1 + \frac{1}{n})^n$ para o qual a unidade vai crescer é 2,7182....

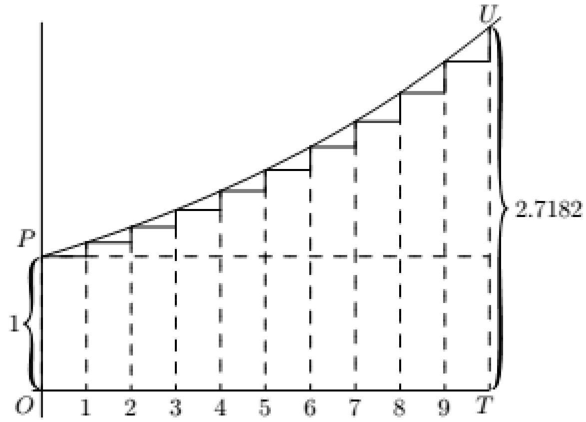

Figura 6.

Esse processo pelo qual algo cresce, a cada instante, proporcionalmente à magnitude naquele instante pode chamar de crescimento exponencial. Com tal crescimento uma unidade cresce, em uma unidade de tempo, até atingir 2,7182....

Resumindo tudo isso, pode-se dizer o seguinte: se fixa a taxa de crescimento de algo como sendo de 100%, e daí permite que 1 cresça de modo aritmético durante uma unidade de tempo, 1 vai crescer até virar 2; mas se fixa a taxa de crescimento como sendo exponencial, em uma unidade de tempo, 1 vai crescer até virar 2,7182...

Veja o quadro a seguir com alguns valores em que *n* se torna cada vez maior, coisa que pode ser feito com uso de uma calculadora científica ou um aplicativo semelhante.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	Alguns valores foram arredondados
$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	2,25
$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$	2,48832
$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$	2,594
$\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}$	2,653

$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$	2,705
$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$	2,717
$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}$	2,7181
$\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000}$	2,71828

Quadro 3. Valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

3.1.1.2. Usando o Binômio de Newton

Pode-se pensar que utilizando o juro como método para determinar o *e* não seja o mais belo ou até mesmo o melhor jeito matemático de calcular o valor desse número importante. Então iremos utilizar o teorema binomial para expandir a expressão de *e*. (Para esse modo supõe que os alunos já estudaram o binômio de Newton, mesmo assim, iremos relembrar o que diz a definição.)

Toda potência da forma $(a+b)^n$, com $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\ e\ n \in \mathbb{N}$, é chamada de binômio de Newton. Para obtê-la basta multiplicar

$$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\cdots\cdot(a+b)}_{n\ vezes}$$

O termo genérico do produto é obtido tomando em p dos fatores (p = 0, 1, 2, . . ., n) a segunda parcela e tomando nos restantes n – p fatores a primeira parcela. Com isso pode ser feito de C_n^p modos, o termo genérico do produto é $C_n^p a^{n-p} b^p$ e,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^n a^0 b^n.$$

Sabemos que $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, então podemos escrever,

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + n\frac{a^{n-1}b}{1!} + n(n-1)\frac{a^{n-2}b^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots.$$

Substituindo agora a por 1 e b por *1/n*, devemos obter:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}\right) + \cdots.$$

Agora, faça *n* tender ao infinito, isto é, que atribua a *n* valores tão grandes quanto queira. Não é tão difícil ver que $n-1, n-2, n-3, \ldots$ vão ficando cada vez mais iguais a n conforme o valor de n aumenta, e que a divisão de $n-1$ por *n* tende a 1, assim como a divisão de $(n-1)(n-2)$ por n^2 tende a 1, e assim por diante. Verifica-se esse fato facilmente com uma calculadora; por exemplo, $898/899 \approx 0{,}99889$, mas $8998/8999 \approx 0{,}9998889$. Sendo assim podemos reescrever a série como:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Dizemos que essa série converge para o valor limite de e bem depressa, e pode ver isso ao somar as 10 primeiras parcelas da série. Veja a tabela a seguir para confirma:

	1
	1
Dividindo 1 por 2!	0,5
Dividindo 1 por 3!	0,16666666666666666667
Dividindo 1 por 4!	0,04166666666666666667
Dividindo 1 por 5!	0,00833333333333333333
Dividindo 1 por 6!	0,00138888888888888889
Dividindo 1 por 7!	0,00019841269841269841
Dividindo 1 por 8!	0,00002480158730158730
Dividindo 1 por 9!	0,00000275573192239859
Soma total	$\approx 2{,}718281$

Quadro 4. Divisão de 1 por n!

3.2. A Função *ln(x)*

Vimos no capítulo 2 que $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$, com $a > 0$ e $x > 0$. Tem-se que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Tome uma função exponencial do tipo $y = a^x$. Como $a > 0$, podemos substitui-lo por e, assim a função será $y = e^x$. Essa função costuma aparecer em vários fenômenos naturais, como na biologia, economia. Sendo assim, pode-se escrever a inversa dessa função como sendo $y = \log_e x$. Essa função é conhecida como função logarítmica natural, onde sua base é sempre o número de Euler. Essa função é denotada por $y = \ln(x)$.

Veja a figura a seguir e observe que o domínio de uma função é imagem na outra, por exemplo, na função $f(x) = \ln(x)$, quando $x = 1$, temos $f(1) = 0$, já na função $g(x) = e^x$, quando $x = 0$, temos $g(0) = 1$. Ainda podemos perceber nos gráficos uma simetria em relação a função identidade $h(x) = x$.

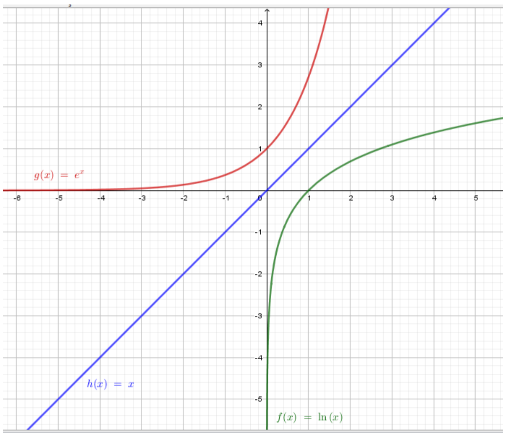

Figura 7.

As propriedades da função logarítmica vista no capítulo 2 servem para a função logarítmica natural.

A relação entre o gráfico y = ln(x) e g = $\log_{10}$(x)

Observe a função do tipo $y = \mathrm{a} \cdot \ln(x)$, onde esse a representa um número real. A medida que esse valor se altera a inclinação do gráfico da função lnx também se altera, isto é, se $\mathrm{a} > 1$ a inclinação aumenta e se $0 < \mathrm{a} <$

1 a inclinação diminui. Vejamos abaixo os gráficos das funções f(x) = y = ln(x) (verde) e g = log(x) (roxo).

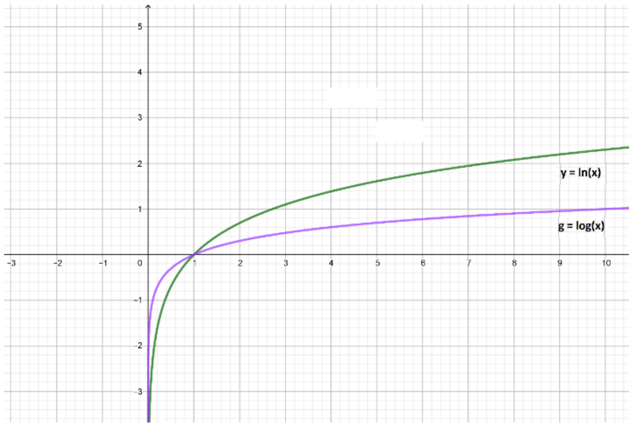

Figura 8.

Podemos perceber pela figura que o gráfico de g é obtido a partir de uma inclinação de y para baixo. Mas que valor de a fez esse gráfico se inclinar?

Bastante simples. Usaremos a mudança de base para determinar esse valor. Sabemos que, $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x$

Logo, o gráfico da função log(x) é o gráfico de ln(x) multiplicado pelo fator $\frac{1}{\ln 10}$. Mas,

$$2 < e < 3$$

$$2^2 < e^2 < 3^2$$

$$4 < e^2 < 9 < 10$$

Como ln(x) é crescente temos,

$$\ln 4 < \ln e^2 < \ln 10$$

Que por sua vez,

$$\frac{1}{\ln 4} > \frac{1}{\ln e^2} > \frac{1}{\ln 10}$$

Mas, $\ln e^2 = 2$. Assim, $1 > \frac{1}{\ln 4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{\ln 10} > 0$.

3.3. Aplicações dos Logaritmos

Neste tópico veremos algumas situações em que os logaritmos aparecem em diferentes fenômenos naturais. Podemos encontrar outro além destes no artigo: Modelagem Matemática da Cinética de Secagem do Endocarpo do Baru (*Dipteryx alata*) Submetida a Diferentes Temperaturas de autoria Paulo C. M. Teixeira, Rogerio A. Rocha e Abraham D. G. Zuniga.

É conveniente o uso de uma calculadora científica para resolver os problemas.

O uso de problemas desse tipo em sala é importante, pois os mesmos utilizam os argumentos teóricos em situações que podem acontecer, tem a capacidade de interligar outras disciplinas com a matemática contribuindo para a construção do conhecimento do aluno, além de dar suporte ao professor na elaboração de sua aula.

3.3.1 Magnitude de um Terremoto

Os terremotos surgem de movimentos de placas localizadas na crosta terrestre conhecidas como placas tectônicas. Quando essas placas se chocam provocam tremores ocasionando algumas vezes muita destruição.

A magnitude de um terremoto, *M*, em graus, medida na escala Richter, está em função da energia liberada, *E*, em Joules (J), e é dada pela seguinte fórmula:

$$M(E) = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Sabendo que E_0 é uma constante que vale aproximadamente $10^{4,4}\,J$. Quando substituir esse valor na equação acima, obtemos:

$$M(E) = \frac{2}{3}\log(E) - 2{,}93$$

<u>Exemplo 1</u>

a) Qual a energia liberada por um terremoto que atingiu magnitude 7,5 na escala Richter?

b) Se as magnitudes de dois terremotos diferem por um ponto na escala Richter, qual a razão entre os valores da energia liberada?

<u>Solução:</u>

a) Se o terremoto atingiu 7,5 graus na escala Richter, temos que

$$\frac{2}{3}\log(E) - 2{,}93 = 7{,}5$$

$$\frac{2}{3}\log(E) = 10{,}43$$

$$\log(E) = 15{,}645$$

$$E = 10^{15{,}645}$$

Portanto, $E = 10^{15{,}645} \approx 4{,}416 \cdot 10^{15}\ J$.

b) Suponhamos que a energia do terremoto mais forte seja E_1 e a energia do terremoto menos potente seja E_2. Assim temos que

$$M(E_1) = M(E_2) + 1$$

Logo teremos,

$$\frac{2}{3}\log(E_1) - 2{,}93 = \frac{2}{3}\log(E_2) - 2{,}93 + 1$$

$$\frac{2}{3}\log(E_1) = \frac{2}{3}\log(E_2) + 1$$

$$\frac{2}{3}\log(E_1) - \frac{2}{3}\log(E_2) = 1$$

$$\frac{2}{3}[\log(E_1) - \log(E_2)] = 1$$

$$\frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1$$

$$\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 31{,}6$$

Portanto, a razão entre as energias é 31,6. Percebemos que aumentando a magnitude em uma unidade a energia é aumentada 31,6 vezes, ou seja, $E_1 = 31{,}6E_2$.

3.3.2 A Intensidade do Som

A intensidade de um som, denotada por *I*, está relacionada à energia transmitida pela onda sonora. No sistema internacional de unidades, *I* é fornecida em watts por metro quadrado (W/m^2).

Um som é dito audível se sua intensidade é superior a $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Por outro lado, há ocasiões em que somos submetidos a sons que chegam a 10^{12} W/m^2. Dada essa grande magnitude dos sons que ouvimos, quando nos referimos à “altura” de um som, costuma-se utilizar como unidade o decibel (dB), em lugar de W/m^2.

Para converter a intensidade *I* ao nível correspondente em decibéis, dado por β, usamos a fórmula

$$\beta(I) = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Observemos alguns exemplos de níveis sonoros que ocorre no cotidiano.

Ruído	**Nível Sonoro (dB)**	**Intensidade (W/m^2)**
Relógio de parede	10	101
Conversa a meia voz	40	104
Avenida de Tráfego intenso	70 a 90	$10^7 – 10^9$
Danceteria	120	1012
Avião a jato aterrissando	140	1014

Quadro 5.

Vale salientar que qualquer som acima de 85 dB pode causar perda de audição, podendo ser tanto pela intensidade quanto pelo tempo de exposição.

Exemplo 2

a) Se um som de 90 dB já é suficiente para causar danos ao ouvido médio, um amplificador de som de uma banda de rock, ligado a $5 \cdot 10^{-1}\ W/m^2$, será capaz de prejudicar a audição de um incauto fã?
b) A que intensidade I, em W/m^2, corresponde ao som usual de uma conversa, que costuma atingir 40 dB?
c) Aumentando em 1 decibel a intensidade sonora de uma fonte, de quanto é aumentada sua intensidade em W/m^2?

Solução:

a) O amplificador emite um som a

$$\begin{aligned}\beta(5 \cdot 10^{-1}) &= 10 \log\left(\frac{5 \cdot 10^{-1}}{10^{-12}}\right) \\ &= 10 \log(5 \cdot 10^{11}) \\ &= 10\,[\log(5) + \log(10^{11})] \\ &= 10\,[\log(5) + 11] \\ &\approx 117\ dB\end{aligned}$$

Portanto, o som da banda ultrapassa 90 dB, sendo prejudicial à audição.

b) Se a conversa atinge 40 dB, então

$$40 = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$
$$4 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$
$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^4$$
$$I = 10^{-12} \cdot 10^4$$
$$I = 10^{-8}$$

Assim, a intensidade da conversa é igual a 10^{-8} W/m^2.

c) Seja I_k (equação 1) a intensidade sonora em W/m^2 quando o nível sonoro é k decibéis e I_{k+1} (equação 2) a intensidade sonora em W/m^2 quando o nível sonoro é k + 1 decibéis, então temos:

$$k = 10 \cdot \log\left(\frac{I_k}{10^{-12}}\right)$$

$$\frac{k}{10} = \log(I_k) - \log(10^{-12})$$

$$\frac{k}{10} = \log(I_k) - (-12) \cdot \log(10)$$

$$\log(I_k) = \frac{k}{10} - 12$$

$$I_k = 10^{\frac{k-120}{10}}$$

Analogamente,

$$k + 1 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_{k+1}}{10^{-12}}\right)$$

$$\frac{k+1}{10} = \log(I_{k+1}) - \log(10^{-12})$$

$$\frac{k+1}{10} = \log(I_{k+1}) - (-12) \cdot \log(10)$$

$$\log(I_{k+1}) = \frac{k+1}{10} - 12$$

$$I_{k+1} = 10^{\frac{k-119}{10}}$$

Portanto, dividindo a equação 2 pela equação 1, temos:

$$\frac{I_{k+1}}{I_k} = \frac{10^{\left(\frac{k-119}{10}\right)}}{10^{\left(\frac{k+120}{10}\right)}} = 10^{\left(\frac{k-119-(k+120)}{10}\right)} = 10^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{10} \approx 1{,}25$$

Concluímos que o aumento de 1 decibel no nível sonoro de uma fonte sonora faz com que sua intensidade I seja $\sqrt[10]{10}\, W/m^2$ vezes maior.

3.3.3 O nível de pH

As sequências de reações em um organismo, só poderão ocorrer se o trânsito de íons em meio aquoso for estável, e para isso a composição e a osmolaridade deverão estar em um equilíbrio dinâmico. Para que esse equilíbrio seja mantido, é necessário o controle da concentração de hidrogênio (pH) a fim de que as reações não sejam perturbadas por variações ácido básicas.

O termo pH (Potencial hidrogeniônico) foi introduzido em 1909 pelo bioquímico dinamarquês Sören Peter Mauritz Sörensen (1868 - 1939) e permite expressar a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa por meio da concentração de íons de hidrogênio, em mol/L.

O pH da piscina, do aquário deve ser controlado e até mesmo o pH do sangue deve manter valores entre 7,35 e 7,45 onde uma variação de 0,4 pode ser fatal. Sörensen definiu pH como sendo o logaritmo decimal (base 10) do inverso da concentração hidrogeniônica. Veja que:

$$pH = \log\left(\frac{1}{[H^+]}\right) = \log 1 - \log[H^+] = -\log[H^+]$$

A partir de experimentos foi desenvolvida uma escala logarítmica que varia de 0 a 14 para classificar uma substância como ácida, básica ou neutra.

Se o pH for menor que 7, a solução é ácida.

Se o pH for igual a 7, a solução é neutra.

Se o pH for maior que 7, a solução é básica.

Veja a tabela a seguir:

Substância	**pH**
Ácido de bateria	< 1,0
Suco gástrico	1,0 – 3,0
Refrigerante tipo cola	2,5
Cerveja	4,0 – 5,0
Leite	6,3 – 6,6
Água pura	7,0
Saliva humana	6,5 – 7,5
Água do mar	8,0
Sabonete	9,0 – 10,0
Soda cáustica	13,5

Quadro 6.

De acordo com Souza “A utilização do pH na indústria permitiu que processos como produção de vacinas, fermentações, produção de leite e derivados fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados. Assim, o pH adquiriu importância no segmento industrial, permanecendo até os dias atuais, nos quais estudos envolvendo pH não são mais exclusividade dos químicos, sendo realizados também por profissionais de diversas áreas, como farmacêuticos, geólogos e agrônomos. ”

Exemplo 3: (Retirado de RAMOS, 2015, pag. 81)

a) Um agrônomo, ao verificar as condições do solo para início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo, que quando representado por um valor entre 6 e 7 (solução neutra) tende a ser mais fértil. Em uma propriedade rural, a concentração de íons de hidrogênio apresentou $10^{-4,4}$ mol/L. Sabendo que a produtividade máxima foi obtida quando a concentração de íons de hidrogênio apresentou $10^{-6,4}$ mol/L, de quanto será a correção desse solo em pH para conseguir a produtividade máxima?
b) O que acontece com a concentração de íons de hidrogênio de uma solução aquosa quando é aumentada 1 unidade de seu pH?

Solução:

a) pH do solo que será corrigido
$-\log[H^+] = -\log[10^{-4,4}] = -(-4,4) \cdot \log 10 = 4,4.$
pH do solo fértil
$-\log[H^+] = -\log[10^{-6,4}] = -(-6,4) \cdot \log 10 = 6,4.$
A correção será de 6,4 – 4,4 = 2,0. Logo o pH deverá ser aumentado em 2 pontos para deixar o solo mais básico, consequentemente, menos ácido.

b) Se o pH da solução aquosa é k, então
$$k = -\log[H^+] \Leftrightarrow [H^+] = 10^{-k}$$
Se o pH da solução aquosa é k + 1, então

$$k + 1 = -\log[H^+] \Leftrightarrow [H^+] = 10^{-k-1}$$

Portanto, se dividirmos a concentração de íons da solução aquosa de pH igual a k + 1 pela concentração de íons da solução aquosa de pH igual a k, teremos,

$$\frac{10^{-k-1}}{10^{-k}} = \frac{10^{-k} \cdot 10^{-1}}{10^{-k}} = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Logo, a concentração de íons de hidrogênio da solução aquosa quando aumenta em 1 unidade seu pH é 0,1 vezes maior que antes.

3.3.4 População de Microrganismos

Poderá ser encontrado um estudo que inclui esse assunto no site https://pt.khanacademy.org/science/biology/ecology/population-growth-and-regulation/a/exponential-logistic-growth,

E caso queiram algo mais aprofundado pode ser visto em https://www.researchgate.net/publication/267548838_Modelagem_Matematica_do_Crescimento_de_Microrganismos_em_Alimentos.

Uma colônia de microrganismos cresce de forma proporcional ao tamanho da população. Isto significa que a taxa de crescimento da colônia em um instante t em horas é dada por $k \cdot P(t)$, em que $P(t)$ é o número de microrganismos presentes no instante t, e k é uma constante. A função que possui essa propriedade é a exponencial. Assim sendo, $P(t)$ pode ser escrita como

$$P(t) = P_0 \cdot c^t$$

Em que P_0 e c são constantes reais, com $c > 0$ e $c \neq 1$. Se preferirmos definir a priori a base da função exponencial, podemos optar por escrever

$$P(t) = P_0 \cdot a^{bt}$$

Em que P_0 e b são constantes reais, e a base a é escolhida de modo que $a > 0$ e $a \neq 1$. Note que substituímos c por a^b.

Exemplo 4: Suponha que uma colônia tenha, inicialmente, 20 microrganismos. Se a população da colônia dobra a cada 1h15min, determine:

a) Uma função na forma $P(t) = P_0 \cdot 2^{bt}$ que expresse o número de microrganismos na colônia no instante *t*, em horas;
b) O número aproximado de microrganismos após 7 horas;
c) O instante em que a colônia terá 2000 microrganismos.

Solução:

a) Como sabemos que P(0) = 20, podemos escrever

$$20 = P_0 \cdot 2^{b \cdot 0} \Rightarrow P_0 = 20$$

Logo, $P(t) = 20 \cdot 2^{bt}$. Usando agora o fato de que $P(1{,}25) = 2P_0 = 40$, podemos encontrar a constante *b* fazendo,

$$40 = 20 \cdot 2^{b \cdot 1{,}25}$$

$$2 = 2^{1{,}25b}$$

$$\log_2 2 = \log_2 2^{1{,}25b}$$

$$1 = 1{,}25b$$

$$b = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$$

Portanto, a função será $P(t) = 20 \cdot 2^{0{,}8t}$.

b) $P(7) = 20 \cdot 2^{0{,}8 \cdot 7} \approx 970\, microrganismos$.

c) A população atingirá 2000 microrganismos quando $P(t) = 2000$, ou seja,

$$2000 = 20 \cdot 2^{0{,}8t}$$

$$100 = 2^{0{,}8t}$$

$$\log 100 = \log 2^{0{,}8t}$$

$$2 = 0{,}8t \cdot \log 2$$

$$t = \frac{2}{0{,}8 \cdot \log 2}$$

$$t = 8{,}3\ h$$

Logo, a colônia terá 2000 microrganismos 8,3 h (ou 8h18min) após o instante de início da observação.

3.3.5 A Idade de um Cadáver

Para saber mais sobre o assunto, veja as referências:

FARIAS - Robson Fernandes - *A química do tempo: carbono 14* – 2002 – disponível em: http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc16/v16_A03.pdf - acesso em: 15 de dezembro de 2017.

KOTZ, J. C.; TREICHEL, Jr., P. M. *Química geral 2 e reações químicas*. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2005.

Os vegetais e a maioria dos animais vivos contêm uma concentração de carbono 14 (^{14}C) semelhante àquela encontrada na atmosfera. Os vegetais os absorvem quando consomem dióxido de carbono durante a fotossíntese. Já a distribuição entre os animais é feita através da cadeia alimentar. Quando um ser vivo morre, ele para de repor o carbono 14, de modo que as quantidades desse elemento começam a decair.

Em um determinado instante, a taxa de desintegração do ^{14}C é proporcional à quantidade do elemento que ainda não se desintegrou. Neste caso, o decrescimento – ou decaimento – da quantidade de isótopo é fornecido por uma função exponencial (com expoente negativo) que tem a forma

$$C(t) = C_0 \cdot a^{bt} \qquad \text{(Forma 1)}$$

Ou podemos ver também com a forma

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\right) \cdot t} \qquad \text{(Forma 2)}$$

Nestas expressões, $C(t)$ representa a quantidade da substância no instante *t*, C_0 é a quantidade inicial (ou seja, no instante *t* = 0), b é uma constante que depende do isótopo e a é a base da função exponencial. Podemos perceber que na forma 2 substituímos a^b por $e^{-\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\right)}$, em que e é o número de Euler, $\ln 2$ é o logaritmo natural de 2 e $t_{1/2}$ representa a meia-vida da substância.

A meia vida de um elemento radioativo é o intervalo de tempo necessário para que a concentração do elemento decaia para a metade do valor encontrado em um dado instante inicial. A meia-vida do carbono 14 é de 5730 anos.

<u>Exemplo 5</u>

a) Encontre uma função na forma $C(t) = C_0 \cdot 2^{bt}$ que forneça a concentração de ^{14}C em um ser morto, com relação ao tempo t, em anos, contando desde a sua morte;
b) Determine a idade de uma múmia egípcia que tem 70% da concentração de carbono 14 encontrada nos seres vivos atualmente.

<u>Solução:</u>

a) Se a meia vida do ^{14}C é 5730 anos, então a concentração após 5730 anos da data da morte de um ser é igual a metade da concentração observada no instante do falecimento, ou seja, $C(5730) = \frac{C_0}{2}$. Dessa forma devemos encontrar o valor da constante *b*,

$$C_0 \cdot 2^{b \cdot 5730} = \frac{C_0}{2}$$

$$2^{b \cdot 5730} = \frac{1}{2}$$

$$2^{b \cdot 5730} = 2^{-1}$$

$$5730 \cdot b = -1$$

$$b = -\frac{1}{5730}$$

Portanto, a função será dada por

$$C(t) = C_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$$

b) Para encontrar a idade da múmia, vamos descobrir em que instante t a quantidade de ^{14}C corresponde a 70% do que continha o nobre egípcio quando estava vivo. Para tanto fazemos,

$$C_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} = 0{,}7 \cdot C_0$$

$$2^{-\frac{t}{5730}} = 0{,}7$$

$$\log 2^{-\frac{t}{5730}} = \log 0{,}7$$

$$-\frac{t}{5730}\log 2 = \log 0{,}7$$

$$t = -\frac{5730 \cdot \log 0{,}7}{\log 2}$$

$$t \approx 2948{,}5$$

Logo, a múmia tem aproximadamente 2948 anos.

Nestas aplicações percebe-se que antes dos problemas há um pequeno texto que poderá ser exposto através de slides (caso não tenham o equipamento, pode apenas discutir oralmente com seus alunos). Sugiro que tome um ou dois dos problemas para debate junto com seus alunos em uma aula e deixe os outros para que eles tentem. Obviamente, esses problemas só serão apresentados após os alunos terem visto toda a teoria.

Outra sugestão seria, para cada problema o professor pode tomar o item a) para discutir junto com seus alunos deixando o(s) outro(s) para a turma debater entre eles. Deixe claro para seus alunos que o mais importante é tentar encontrar uma solução para o problema. Caso essa solução encontrada esteja errada, também é importante que o aluno entenda o porquê do erro.

Capítulo 4: Proposta para trabalhar na sala de aula

Neste capítulo será exposta uma ideia para os professores, caso achem interessante, de abordar o tópico relacionado a exponencial e logaritmo.

A ideia envolve uma comparação entre funções gerando mais à frente uma desigualdade entre as mesmas. Então veremos a princípio como esse tópico é abordado em um livro didático. Tomamos como base o livro de Dante (Matemática: Contexto e aplicações; volume 1, 2010). Vale salientar que no livro não traz o estudo das funções comparando-as. Assim, veremos como são apresentadas no livro, separadamente.

Na função afim (p. 112) Dante introduz o tópico com um problema financeiro que diz o seguinte

"Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 1.500,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% (0,06) sobre o total das vendas que ele faz durante o mês. "

Logo em seguida, expõe a definição de função afim e na página 132 inicia o estudo sobre inequações do 1º grau. Vários exercícios são propostos.

Na função exponencial (p. 230) Dante também inicia com um problema que diz

"Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, calcule o número de bactérias após 3 horas, 10 horas e x horas. "

Expõe a definição de função exponencial na página 237 e introduz as inequações na página 244. Mais exercícios são propostos.

Que fique claro aqui, que isso não é uma crítica negativa ao livro, pois representa um bom material de apoio ao professor. O que está sendo ressaltado é interligar um tema estudado no momento com outro que já foi explorado.

4.1. O Crescimento exponencial é imbatível

Nesse tópico abordaremos três tipos de funções (apenas quando crescentes) e analisaremos fazendo algumas comparações.

Iniciaremos com um problema hipotético:

Suponha que você está prestes a entrar em um emprego, e a empresa lhe oferece duas opções de salário:

Opção 1: Você receberá um salário de R$ 1.000,00 por mês mais R$ 100,00 de aumento a cada mês.

Opção 2: Você receberá um salário da seguinte forma, 1 centavo no primeiro mês, 2 centavos no segundo mês, 4 centavos no terceiro mês, 8 centavos no quarto mês, 16 centavos no quinto mês, e assim por diante.

Observação: As duas opções terão seu aumento estagnado após 2 anos de trabalho.

Qual das duas opções você escolheria?

É claro que nesse problema estamos tentando mostrar como a função exponencial supera qualquer outra. Estamos deixando de lado todos os fatores, como pagamentos mensais, impostos, entre outros para ser discutido em outro momento.

A escolha da opção 1 à primeira vista é a mais lógica para a pergunta, pois receber 1 centavo em um mês é com certeza muito estranho. Entretanto, uma pessoa que conhece um pouco de matemática, fica no mínimo curioso, o fato da empresa propor essa escolha.

Analisemos alguns cálculos feitos em relação ao problema.

Neste momento seria interessante fazer com que os alunos tentassem determinar as funções. Caso não consigam, não tem problema, pode passar para o preenchimento dos quadros, e só ao final o professor apresentará as funções que representam as situações.

A primeira opção está apresentando uma função polinomial do 1º grau, que podemos representar da seguinte forma:

$$f(x) = 100x + 1000, para\ x \geq 0, x \in \mathbb{N}$$

A segunda opção está apresentando uma função exponencial, que podemos representar da seguinte forma:

$$g(x) = \frac{2^x}{100}, para\ x \geq 0, x \in \mathbb{N}$$

Inicialmente montaremos um pequeno quadro com os respectivos salários de $f(x)\ e\ g(x)$ até o fim do primeiro ano de trabalho.

	$f(x)$ (R$)	$g(x)$ (R$)
$x = 0$	1000	0,01
$x = 1$	1100	0,02
$x = 2$	1200	0,04
$x = 3$	1300	0,08
$x = 4$	1400	0,16
$x = 5$	1500	0,32
$x = 6$	1600	0,64
$x = 7$	1700	1,28
$x = 8$	1800	2,56
$x = 9$	1900	5,12
$x = 10$	2000	10,24
$x = 11$	2100	20,48

Quadro 7.

Como podemos observar no quadro acima, seria ainda de bom senso escolher a opção 1, pois ao final do primeiro ano a mesma estaria recebendo um salário de R$ 2.100,00, enquanto a opção 2 estaria recebendo apenas R$ 20,48.

Como a condição de aumento irá parar em dois anos após o início do trabalho, temos que o maior valor para x será 23. Então, vejamos o que acontecerá no segundo ano no quadro abaixo.

	$f(x)$ (R$)	$g(x)$ (R$)
$x = 12$	2200	40,96
$x = 13$	2300	81,92
$x = 14$	2400	163,84
$x = 15$	2500	327,68
$x = 16$	2600	655,36
$x = 17$	2700	1310,72
$x = 18$	2800	2621,44
$x = 19$	2900	5242,88
$x = 20$	3000	10485,76
$x = 21$	3100	20971,52
$x = 22$	3200	41943,04
$x = 23$	3300	83886,08

Quadro 8.

Como podemos perceber ao final, o valor de $g(x)$ supera e muito o valor de $f(x)$. Concluímos que, em um primeiro olhar nas duas opções de salários a 1ª seria mais lógica, mas pensando mais adiante, a 2ª opção seria a melhor.

Ainda podemos fazer um comparativo da soma das duas opções. Notamos que a opção 1 gera uma progressão aritmética de razão 100, já na opção 2 gera uma progressão geométrica de razão 2. Vejamos:

Opção 1

Lembrando que a soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Logo,

$$S_{23} = \frac{(1000 + 3300) \cdot 24}{2} = 51.600\,reais$$

Opção 2

Lembrando que a soma dos n primeiros termos de uma PG finita é dada por

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, |q| < 1$$

Logo,

$$S_{23} = \frac{0{,}01 \cdot (2^{24} - 1)}{2 - 1} = 167.772{,}15\,reais$$

Notamos que a opção 2 mesmo ganhando pouco no primeiro ano, ao final do segundo ano terá ganhado um total de mais de 3 vezes o total da primeira opção.

Mas isso sempre irá acontecer com essas funções?

Para responder a essa pergunta vamos fazer uma comparação entre 3 funções, e como dissemos no início do tópico faremos a comparação quando forem crescentes.

A função 1 (crescimento exponencial, tomaremos como base o número de Euler):

$$\boldsymbol{y = e^x}$$

A função 2 (crescimento linear):

$$\boldsymbol{p = ax, com\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0.}$$

A função 3 (crescimento polinomial):

$$\boldsymbol{q = x^b, com\ b \in \mathbb{R}, b \neq 0.}$$

A primeira etapa iremos comparar a função 1 com a 2, ou seja,

$$y \geq p$$

$$e^x \geq ax$$

$$\ln(e^x) \geq \ln(a \cdot x)$$

$$x \cdot \ln(e) \geq \ln(a) + \ln(x)$$

$$x - \ln(x) \geq \ln(a)$$

Observemos que o primeiro membro da desigualdade é uma função estritamente crescente quando $x \geq 1$. E o segundo membro da desigualdade é uma constante. Portanto, se o primeiro membro está crescendo à medida que x cresce, em algum momento esse valor irá ultrapassar o lado direito.

Veja o exemplo:

Considere a função $\boldsymbol{y = e^x}$ e a função $\boldsymbol{p = 10^{10}x.}$ Encontre o menor valor inteiro positivo de x para que a função y supere a função p. (Considere $ln10 = 2{,}3$) O uso de uma calculadora ou um aplicativo nesse momento é importante. Faça os alunos encontrarem o valor por tentativa e erro.

A segunda etapa iremos comparar a função 1 com a 3, ou seja,

$$y \geq q$$

$$e^x \geq x^b$$

$$\ln(e^x) \geq \ln(x^b)$$

$$x \cdot \ln(e) \geq \mathrm{b} \cdot \ln(x)$$

$$\frac{x}{\ln(x)} \geq \mathrm{b}$$

Observemos que o primeiro membro da desigualdade é uma função estritamente crescente quando $x \geq e$. E o segundo membro da desigualdade é uma constante. Portanto, se o primeiro membro está crescendo à medida que x cresce, em algum momento esse valor irá ultrapassar o lado direito.

Veja o exemplo:

Considere a função $\boldsymbol{y = e^x}$ e a função $\boldsymbol{q = x^{10}}$**.** Encontre o menor valor inteiro positivo de x para que a função y supere a função q.

Para finalizar esse tópico, peça para os alunos fazerem em casa:

Pesquise uma aplicação que apresenta crescimento exponencial.

Conclusão

O ensino das funções exponenciais e logarítmicas em especial, vem mostrando uma grande dificuldade por parte dos estudantes em compreende-las. Isso se deve muito ao modo como os livros didáticos são montados, mostrando sempre o estudo mecanizado, geralmente na resolução de problemas não aplicados. Claro que os professores têm pouco tempo para desenvolver aulas bem planejadas.

Destaca-se neste trabalho as definições de logaritmos e funções logarítmicas exploradas nos livros do ensino médio assim como a do livro de LIMA, 1996, onde detalha cada propriedade e teorema. Claro que a apresentação dessas definições em sala de aula depende sempre do nível da turma.

Outro destaque que pode ressaltar é o uso da matemática financeira para determinar o número e Euler. Trata-se de uma ótima abordagem para explorar nas aulas destacando a relação entre juro composto e as exponenciais. No capítulo 4 podemos ver novamente o uso da matemática financeira em uma proposta interessante e acessível a alunos do ensino médio.

Este trabalho mesmo que não testado em sala, tem uma abordagem diferenciada, à medida que interliga algumas funções, fazendo comparações e concluindo que a função exponencial em algum momento consegue superar qualquer outra. Além disso, no trabalho utiliza-se as progressões mostrando sua relação com os logaritmos.

Podemos perceber aqui que o estudo da matemática apesar de ser visto tópico a tópico, os assuntos estão de alguma forma entrelaçados, algo que os estudantes nem sempre conseguem enxergar, e que por muitas vezes, os professores não fazem questão de mencionar.

Referências Bibliográficas

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL, *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)*. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio- parte III- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias* Brasília: MEC, 2000.

BUFFARA, Claudio. *ENEM sem EM*. Revista do professor de Matemática, Rio de Janeiro, nº 85, 3º Quadrimestre, p. 6-10, setembro de 2014.

CEARÁ, Secretaria da Educação. *Metodologias de Apoio: áreas de ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Fortaleza: SEDUC, 2008. (Coleção Escola Aprendente - Volume 3)

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo. Ed. Ática, 2010.

ECALCULO. *Função Logarítmica*. São Paulo. 2002. *Disponível em*: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/flogaritmica.htm. *Acesso em: 10 de julho de 2017*.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

EXPLICATORIUM. Escala de pH: O que é para que serve? *Disponível em*: http://www.explicatorium.com/cfq-8/escala-de-ph.html. *Acesso em: 10 de julho de 2017*.

FARIAS, Robson Fernandes. *A química do tempo: carbono 14*. 2002. Disponível em: http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc16/v16_A03.pdf - acesso em: 15 de dezembro de 2017.

GOMES, Francisco Magalhães. *Matemática Básica: operações, equações, funções e sequências*, v. 1. IMECC – UNICAMP, 2017.

KOTZ, J. C.; TREICHEL, Jr., P. M. *Química geral 2 e reações químicas*. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2005.

LIMA, Elon Lages. *Logaritmos.* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1996.

MAOR, Eli. *e: A História de um número.* Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro, Record, 2008.

MERICHELLI, Marco Aurélio Jarreta; ALLEVATO, Norma Sueli Gomes. *O Ensino dos logaritmos em uma turma de ensino médio*. Universidade Cruzeiro do Sul. Salvador, 2010.

Moedinhas nas mãos produzem na mente o número e. Cálculo, São Paulo, nº 40, p. 38-53, maio de 2014.

KARRER, Mônica. *Logaritmos: Proposta de uma sequência de ensino utilizando a calculadora*. 1999. 238 p. Dissertação de Mestrado – PUC, SP, 1999.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Volume 2. *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias* / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, 2006. 135 p.

PINTO, Silvania Luzia Correia; SANTOS, Dassael Fabricio dos Reis. *Um Estudo Sobre os Logaritmos – História e Propriedades*, 4º Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, p. 171-173, novembro de 2015.

RAMOS, Simone Sotozono Alonso. *Logaritmos: uma abordagem didática*. 2015. 110 p. Dissertação de Mestrado - UFPR, Curitiba, 2015.

ROBAZZA, W.S.; TELEKEN J.T.; GOMES G.A., https://www.researchgate.net/publication/267548838_Modelagem_Matematica_do_Crescimento_de_Microrganismos_em_Alimentos. Acessado em: 15 de dezembro de 2017.

SILVA, Marcos Noé Pedro – *Medindo a intensidade dos sons – Disponível em*: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/medindo-intensidade-dos-sons.htm . *Acesso em: 10 de julho de 2017*.

SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo olhar Matemática*. Coleção Novo Olhar, v. 1. São Paulo, Editora FTD, 2010.

THOMPSON, Silvanus P. *Calculus made easy*. Second edition, enlarged. New York. The Macmillan Company, 1914.

TEIXEIRA Paulo C. M.; ROCHA Rogério A.; ZUNIGA Abraham D. G. *Modelagem Matemática da Cinética de Secagem do Endocarpo do Baru (Dipteryx alata) Submetida a Diferente Temperaturas*, 4º Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, p. 27-30, novembro de 2015.

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia. 4º Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste. Goiás, SBM, 2015. *Disponível em*: https://www.sbm.org.br/coloquio-centro-oeste-4/wp-content/uploads/sites/2/2016/01/caderno_resumos_atual.pdf. *Acesso em: 15 de dezembro de 2017.*

Apêndice

A) Curiosidade - Números relacionados com *e*

Como foi dito, o número e é de extrema importância para a matemática, e o que será mostrado nessa etapa é uma relação que esse número tem com a trigonometria e os números complexos através de uma equação chamada de *identidade de Euler*. Portanto, será ressaltado de maneira sucinta algumas informações sobre esses dois assuntos que será utilizado a seguir.

A trigonometria é um ramo da matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo, tais como as leis do seno e do cosseno.

Já os número complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais (x,y) que pode ser escrito da forma $(x, y) = x + yi$, onde i representa a unidade imaginária e que $i = \sqrt{-1}$, ou equivalente a $i^2 = -1$.

Uma Identidade Matemática é uma igualdade que permanece verdadeira para quaisquer que sejam os valores das variáveis que nela apareçam, diferentemente de uma Igualdade Matemática que pode ser verdadeira somente sob condições particulares.

A identidade de Euler é uma identidade que relaciona alguns dos elementos mais importantes na matemática $(0,1, i, \pi, e)$. No entanto. Essa identidade é um caso particular da fórmula de Euler que é expressa como

$$e^{\theta i} = cos\theta + isen\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

O que faremos agora é analisar que valores obtemos quando damos uma volta na circunferência trigonométrica, ou seja, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando aqui apenas os pontos onde a circunferência toca os eixos. Note desde já que quando $\theta = 0$, teremos que o *cos0 = 1*, por isso considere como primeiro ponto $\frac{\pi}{2}$. Vejamos os valores do seno e cosseno na tabela a seguir.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
seno	0	1	0	-1	0

cosseno	1	0	-1	0	1

Quadro 9: Valores de seno e cosseno

- Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, teremos

$$e^{\frac{\pi}{2}\cdot i} = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Substituindo os valores de seno e cosseno temos

$$e^{\frac{\pi}{2}\cdot i} = 0 + i \cdot 1 = i$$

Agora elevando ambos os membros da igualdade por i

$$\left(e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}\right)^{i} = (i)^{i}$$

Segue que

$$e^{\frac{\pi}{2}\cdot i^{2}} = e^{\frac{\pi}{2}\cdot(-1)} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}207879576\ldots = (i)^{i} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$$

- Quando $\theta = \pi$, teremos

$$e^{\pi\cdot i} = cos\pi + isen\pi$$

Substituindo os valores de seno e cosseno temos

$$e^{\pi\cdot i} = -1 + 0$$

Essa é a famosa identidade de Euler, onde podemos escrever

$$e^{\pi\cdot i} + 1 = 0$$

Agora elevando ambos os membros da igualdade por i

$$\left(e^{\pi\cdot i}\right)^{i} = (-1)^{i}$$

Segue que

$$e^{\pi\cdot i^{2}} = e^{\pi\cdot(-1)} = e^{-\pi} = 0{,}043213918\ldots = (-1)^{i} = (-1)^{\sqrt{-1}}$$

- Quando $\theta = \frac{3\pi}{2}$, teremos

$$e^{\frac{3\pi}{2}\cdot i} = cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}$$

Substituindo os valores de seno e cosseno temos

$$e^{\frac{3\pi}{2}\cdot i} = 0 + i \cdot (-1) = -i$$

Agora elevando ambos os membros da igualdade por i

$$\left(e^{\frac{3\pi}{2}\cdot i}\right)^{i} = (-i)^{i}$$

Segue que

$$e^{\frac{3\pi}{2}\cdot i^{2}} = e^{\frac{3\pi}{2}\cdot(-1)} = e^{-\frac{3\pi}{2}} = 0{,}008983291\ldots = (-i)^{i} = \left(-\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$$

- Quando $\theta = 2\pi$, teremos

$$e^{2\pi\cdot i} = cos2\pi + isen2\pi$$

Substituindo os valores de seno e cosseno temos

$$e^{2\pi\cdot i} = 1 + 0$$

Agora elevando ambos os membros da igualdade por i

$$\left(e^{2\pi\cdot i}\right)^{i} = (1)^{i}$$

Segue que

$$e^{2\pi\cdot i^{2}} = e^{2\pi\cdot(-1)} = e^{-2\pi} = 0{,}001867442\ldots = (1)^{i} = (1)^{\sqrt{-1}}$$

O que podemos destacar de importante nesse tópico são as potências com números complexos como $(i)^{i} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ ser um número real. Na verdade, Euler provou que essa expressão tem infinitos valores e todos eles reais para infinitas voltas na circunferência trigonométrica (MAOR, 2008).

B) Problemas expostos no capítulo 4

O Crescimento exponencial é imbatível

Suponha que você está prestes a entrar em um emprego, e a empresa lhe oferece duas opções de salário:

Opção 1: Você receberá um salário de R$ 1.000,00 por mês mais R$ 100,00 de aumento a cada mês.

Opção 2: Você receberá um salário da seguinte forma, 1 centavo no primeiro mês, 2 centavos no segundo mês, 4 centavos no terceiro mês, 8 centavos no quarto mês, 16 centavos no quinto mês, e assim por diante.

Observação: As duas opções terão seu aumento estagnado após 2 anos de trabalho.

Qual das duas opções você escolheria?

(Nesse momento deixe claro que alguns fatores não serão considerados)

Preencha a tabela abaixo, com a ajuda de uma calculadora, de preferência científica.

	$f(x)$ (R$)	$g(x)$ (R$)		$f(x)$ (R$)	$g(x)$ (R$)
$x = 0$			$x = 12$		
$x = 1$			$x = 13$		
$x = 2$			$x = 14$		
$x = 3$			$x = 15$		
$x = 4$			$x = 16$		
$x = 5$			$x = 17$		
$x = 6$			$x = 18$		
$x = 7$			$x = 19$		
$x = 8$			$x = 20$		
$x = 9$			$x = 21$		
$x = 10$			$x = 22$		
$x = 11$			$x = 23$		

1) Considere a função $\boldsymbol{y = e^x}$ e a função $\boldsymbol{p = 10^{10}x}$**.** Encontre o menor valor inteiro positivo de x para que a função y supere a função p. (Considere $ln10 = 2{,}3$)

2) Considere a função $\boldsymbol{y = e^x}$ e a função $\boldsymbol{q = x^{10}}$**.** Encontre o menor valor inteiro positivo de x para que a função y supere a função q.

3) (Casa) Pesquise uma aplicação que apresenta crescimento exponencial. (Seria interessante que os alunos compartilhassem os problemas na sala de aula).