UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

THIAGO VIDAL DA COSTA

QUANDO E COMO TRABALHAR COM DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO DE MATEMÁTICA?

Uma reflexão sobre a Fórmula de Bhaskara

NITERÓI

2016

THIAGO VIDAL DA COSTA

QUANDO E COMO TRABALHAR COM DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO DE MATEMÁTICA?

Uma reflexão sobre a Fórmula de Bhaskara

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, como requisito à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora:

PROFESSORA CECÍLIA DE SOUZA FERNANDEZ

Niterói, RJ

2016

THIAGO VIDAL DA COSTA

QUANDO E COMO TRABALHAR COM DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO DE MATEMÁTICA?

Uma reflexão sobre a Fórmula de Bhaskara

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, como requisito à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 08 de dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Professor Doutor Fernando Celso Villar Marinho – CAP/UFRJ

Professora Doutora Renata Pereira de Freitas – UFF

Professora Doutora Cecília de Souza Fernandez – UFF

Niterói

2016

Dedico esse trabalho aos meus pais, Mario e Lucimar, ao meu irmão, Mario Junior, e à minha amiga e noiva Shayany.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos...

Aos meus pais, Mario e Lucimar, que investiram e acreditaram na minha evolução pessoal e profissional, trabalhando na minha formação como ser humano e me incentivando a crescer.

Ao meu irmão, Mario Junior, que como irmão e aluno pode contribuir significativamente até hoje na minha trajetória como professor.

À minha noiva Shayany, que acompanhou toda a minha trajetória acadêmica e soube me apoiar em momentos de angústia e desespero. Soube ser compreensiva nessas horas e sempre me incentivou a nunca parar de estudar.

Aos amigos Rafaela, Ruan e Thaynã pelos momentos de cumplicidade nos acertos e erros da minha vida.

À minha professora e orientadora Cecília Fernandez, que desde a graduação me encantou com sua didática, seu conhecimento, sua ética, sua preocupação, sua paz e seu potencial.

RESUMO

Perceber uma regularidade a partir de experimentos está mais próximo de demonstrar uma afirmação matemática do que parece. Muito antes da formalização dos conceitos, é importante realizarmos testes e repetições. Todos esses procedimentos antecedem uma demonstração. Porém, levar os alunos ao primeiro contato com uma demonstração matemática não é uma tarefa fácil, pois a transição das conclusões através do concreto para as conclusões através do abstrato requerem tempo, planejamento, preparo e paciência. O objetivo deste trabalho é sugerir atividades que possam servir como base para certas demonstrações que precisam ser vistas e estudadas ainda no Ensino Fundamental, principalmente por alunos dos 8º e 9º anos, visto que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) preveem, nesta etapa de escolaridade, que os alunos estejam aptos a acompanhar, compreender e até mesmo executar algumas demonstrações. Um tópico tratado no 9º ano foi utilizado durante a pesquisa e aplicação das atividades: a fórmula de Bhaskara. Uma sequência de atividades será sugerida para o tópico e ao final traremos algumas conclusões obtidas. É importante observar que as atividades foram realizadas com alunos de duas turmas de uma Escola Pública Municipal localizada na cidade de Macaé-RJ.

Palavras-chave: Fórmula de Bhaskara, Demonstrações, Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Realizing regularity through experiments is closer of proving a mathematical statement than it seems. Before the formalization of the concepts, it is important to do experiments and repetitions. All these procedures precede a proof. However, leading students to the very first contact with a mathematical proof is not a such easy task because the transition from conclusions through the concrete to conclusions through the abstract requires time, planning, ability and patience. This work aims to suggest activities that can be used as basis to certain proofs that need to be seen and studied still in Middle School, mainly by students of 8th and 9th grades, since the National Curricular Parameters hope that students, at these stages, should be able to follow, understand and even execute some proofs. One topic given on the 9th grade was used in this research and implementation of activities: Bhaskara's formula. A sequence of activities will be suggested for this topic and, at the end of this work, we will bring some conclusions. It is important to notice that the activities were done by students of two classes of a Public School located at Macaé-RJ.

Keywords: Bhaskara's formula, Proofs, Middle School.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Na rotina da sala de aula, professores e alunos enfrentam divergências de opinião quando o assunto é Matemática. Há questionamentos por parte dos alunos sobre a necessidade de se aprender certos conteúdos matemáticos, quando nem sempre estes estão relacionados à sua realidade. E, por diversas vezes, até mesmo o professor, que dedicou anos de estudo para lecionar a disciplina, encontra dificuldades em argumentar contra isso.

É muito comum nos Ensinos Fundamental e Médio alunos fazerem a seguinte pergunta, após a resolução de uma questão de Matemática: “Mas vai ser sempre assim?”. Perguntas frequentes como essa podem nos levar à seguinte reflexão: “Será que eles realmente entenderam o que eu estou tentando ensinar?”. Os alunos, no seu nível de abstração, conseguem perceber a existência de padrões, porém não são capazes de sozinhos comprovar a veracidade do que estão pensando. É nesse momento que o professor deve se aproveitar de um possível debate gerado sobre um padrão observado para, aos poucos, inserir na rotina das aulas de Matemática as demonstrações. Sem esse caminho, onde pouco a pouco o professor vai demonstrando padrões cada vez mais sofisticados, jamais pode-se esperar que os alunos, por si só, consigam acompanhar, compreender e realizar uma demonstração.

O objetivo deste trabalho é propor uma reflexão junto aos professores do Ensino Fundamental II, principalmente os que lecionam nos 8º e 9º anos, sobre a relevância do uso das demonstrações em suas aulas, a fim de contemplar uma das diversas finalidades do Ensino da Matemática segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais: “A atividade matemática escolar não é ‘olhar para coisas prontas e definitivas’, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade” ([07], pág 15).

Este trabalho vem apresentar uma proposta de atividades para o ensino de um tópico do 9° ano do Ensino Fundamental, com a finalidade de ter um aluno preparado para a formalização de conceitos matemáticos no momento adequado. As atividades aqui propostas foram desenvolvidas em turmas de 9º ano, de uma Escola Pública Municipal da cidade de Macaé-RJ.

Utilizaremos como principais suportes teóricos os PCN’s [07], três referências didáticas com autoria de Luiz Roberto Dante [08], Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro [17] e Edwaldo Bianchini [05], e a dissertação de Mestrado de Filomena Aparecida Teixeira Gouvêa [11], Mestre em Educação Matemática pela PUC-SP. Desde 1988, Filomena tem feito uma grande contribuição na pesquisa referente ao Ensino de Matemática com a utilização de técnicas de demonstração.

Através da análise das propostas curriculares da base nacional, das bases estaduais e municipais fica evidente a importância das demonstrações matemáticas em todas as esferas, pois elas sugerem uma sequência lógica na organização dos conteúdos que não só favorece, como também induz ao raciocínio abstrato. Um conteúdo como, por exemplo, o Teorema de Tales, sempre precede, nas propostas curriculares, Semelhança de Triângulos. Portanto, tem-se uma oportunidade para se trabalhar a proporção em triângulos semelhantes e sua demonstração, apoiando-se integralmente no Teorema de Tales, anteriormente estudado. Desejamos que, diante da estrutura da Matemática, ao alcançar o 8º ano do Ensino Fundamental, o aluno deva raciocinar sobre conceitos e não mais sobre figuras ou regras. Ou seja, ele deve iniciar os processos de demonstração, a fim de generalizar resultados e os aceitar não mais através do experimento, como se pode trabalhar com alunos de anos anteriores, mas através do raciocínio dedutivo.

A metodologia escolhida para a realização deste trabalho consiste nas seguintes etapas: entrevista com professores do 9º ano de escolas públicas e privadas acerca do uso de demonstrações em sala; análise de três referências disponibilizadas pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) para uso em turmas de 9º ano regulares nas escolas públicas do Brasil; exploração dos temas a serem trabalhados com uma amostra de alunos da rede pública; sequência de atividades a serem aplicadas aos alunos; breve avaliação do trabalho feito com os alunos; análise e discussão dos resultados e conclusões da pesquisa.

2. O QUE É UMA DEMONSTRAÇÃO?

As ciências avançam a partir de problemas que desafiam a compreensão dos cientistas. Mesmo quando são solucionados, surgem outros problemas que exigem novas pesquisas. Assim diz o filósofo George Kneller [13]:

> "O problema resolvido é um elo na cadeia de problemas e suas soluções, através dos quais a ciência avança. De um modo geral, uma nova teoria é uma fonte muito fecunda de problemas, através das predições que gera".

Para alcançarmos certo objetivo, seja uma ação, seja a explicação de um fenômeno, precisamos agir com um método, desenvolvendo um caminho racional, que nos leve em direção à verdade procurada ou à ação desejada. No caso da Matemática, o método usado é o lógico dedutivo. Mas, nem sempre foi assim...

2.1. MATEMÁTICA: DO EMPIRISMO AO RACIONALISMO

O estudo de Matemática existe desde a civilização antiga da qual se tem registros, não significando que a mesma depende da existência humana para estar presente na natureza. Mas, em todas essas civilizações, a Matemática estava no domínio de sacerdotes de alta hierarquia religiosa e de oficiais de médio posto do governo em vigência. Essas pessoas tinham como função usar e desenvolver a Matemática para praticar rituais religiosos, para elaborar calendários, para melhorar a arrecadação de impostos, para a atividade do comércio e construção civil, entre outros.

Como a Matemática era uma ferramenta de poder religioso e político, seus métodos eram transmitidos para os mais privilegiados, geralmente através de uma tradição oral. Dessa forma, os registros escritos sobre a matemática antiga são raros e geralmente não oferecem muitos detalhes.

Especialistas em História da Matemática podem não concordar em todos os pontos, mas existem bastantes referências para podermos afirmar que tanto a matemática egípcia quanto a babilônica tinham a experiência como critério de verdade. Observação, ensaio e erro parecem ser as características do método dominante nesses casos. Não se encontra em todas elas ideias que possam ser ligadas a uma demonstração, com exceção dos conhecidos trabalhos de Euclides.

Uma nova atitude em relação à Matemática apareceu na Grécia por volta do ano 600 a.C. Não era mais suficiente encontrar métodos para calcular respostas numéricas para os problemas. Surgiu a necessidade de se provar que os resultados calculados através dos métodos encontrados estavam sempre corretos.

Essa mudança na natureza da Matemática está relacionada às grandes diferenças entre a emergente civilização grega e as civilizações do Egito e Babilônia, de quem os gregos aprenderam.

A organização política da Grécia estava baseada em polis ou cidades-governo. Os governos das polis eram variados, mas em geral controlavam as populações de somente alguns milhares de pessoas. Se os governos eram democráticos ou monárquicos, eles não eram arbitrários. Cada governo local era regulado por leis e, portanto, encorajavam seus cidadãos a serem capazes de questionar e debater. Essa foi provavelmente uma causa da necessidade de se apresentar um raciocínio lógico em Matemática, ou seja, de argumentar convincentemente para outros da veracidade de uma certa afirmação.

Como toda cidade-governo tinha acesso ao mar, havia muito comércio marítimo na própria Grécia e com outras civilizações. Como consequência, os gregos eram expostos a pessoas de diferentes culturas. Além disso, o bom padrão de vida da sociedade grega atraiu pessoas de alto nível intelectual de outras partes do mundo. Com isso, os gregos foram capazes de estudar diferentes respostas para problemas fundamentais sobre o mundo. E começaram a criar suas próprias respostas.

Em muitas áreas do saber, eles aprenderam a não aceitar o que havia sido deixado pelas civilizações anteriores. Em vez disso, eles começaram a perguntar e, ao tentar responder ao “por quê?”, os intelectuais gregos gradualmente perceberam que eles podiam e deviam descobrir as características do mundo em sua volta através de um raciocínio formal. Dessa forma, eles descobriram e expandiram teorias em áreas como física, biologia, medicina e política.

No caso da Matemática, que os gregos perceberam ser a base para todo o estudo do mundo físico, eles desenvolveram a ideia de prova matemática, uma ideia que está na base de toda a Matemática moderna e, por extensão, na fundação de nossa moderna civilização tecnológica. De fato, a estruturação da Matemática é uma herança dos gregos: “A noção de demonstração nesses autores (a saber, Euclides, Arquimedes, Apolônio) não difere em nada da nossa”. [06]

2.2. O QUE É UMA DEMONSTRAÇÃO?

Usualmente, consideramos uma demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina. Adotamos a distinção entre explicação, prova e demonstração segundo Balacheff [03].

Chama-se *explicação* um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, recusados ou aceitos;

Chama-se *prova* uma explicação aceita por uma dada comunidade num dado momento. Essa decisão pode ser assunto de um debate cujo significado é a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores;

Chama-se *demonstração* a prova de um enunciado matemático. As provas são explicações aceitas num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. As demonstrações são provas particulares aceitas pela comunidade matemática.

Uma demonstração fundamenta-se em explicações apresentadas numa sequência de enunciados, organizados de forma coerente. Um enunciado é conhecido como verdadeiro e é deduzido a partir daqueles que o precederam. Em diversos casos, para realizar uma demonstração nos servimos de métodos diretos, indiretos ou por absurdo, existindo, é claro, outras formas de raciocínio.

Para apresentarmos um exemplo de uma demonstração direta, indireta ou por absurdo, vamos precisar entender o que é um enunciado e o que é um enunciado apresentado por uma implicação.

Um *enunciado* é uma expressão da linguagem matemática, que pode ser classificado como verdadeiro ou falso, de maneira exclusiva, em um dado contexto.

São exemplos de enunciados:

(a) 0 é par;
(b) 1 = 2;
(c) Se x é um número real, então $x^2 < 0$;
(d) x é um número real positivo.

Dentre os enunciados anteriores, (a) é verdadeiro, (b) é falso, (c) é falso, independente do valor real de x e (d) pode ser falso ou verdadeiro, dependendo do contexto, ou seja, dependendo do valor de x.

Enunciados podem ser combinados para formar novos enunciados. Aqui estamos interessados em enunciados que podem ser combinados para formar novos enunciados por meio da expressão *"se... então"*.

Por exemplo, considere os enunciados:

(a) x é um número par;
(b) x^2 é um número par.

Por aplicação da expressão "se... então", podemos formar um novo enunciado:

Se x é um inteiro par, então x^2 é par.

Dizemos que um enunciado é uma *implicação* se é formado a partir de dois outros enunciados, por aplicação da expressão "se... então". O enunciado acima é uma implicação.

Uma implicação é usualmente denotada por $p \rightarrow q$, onde se lê "se p, então q". Note que p e q são enunciados, sendo p chamado o antecedente e q chamado consequente da implicação.

A seguir vamos exemplificar tipos usuais de demonstração:

- Demonstração direta.

Consideremos a implicação $p \rightarrow q$. Demonstrar de modo direto esta implicação consiste em supor que p é verdade e chegar, por inferências, à conclusão de que q é verdade.

- Demonstração indireta.

Também chamada de demonstração por contraposição. Demonstrar de forma indireta a implicação $p \to q$, consiste em demonstrar de modo direto a implicação $(\text{não } q) \to (\text{não } p)$. Ou seja, partindo da suposição que $(\text{não } q)$ é verdadeira, deduzir que $(\text{não } p)$ também é verdadeira.

- Demonstração por absurdo.

Consideremos a implicação $p \to q$. Demonstrar por absurdo esta implicação consiste em mostrar que se supusermos p e $(\text{não } q)$ verdadeiras, então chegaremos a uma contradição.

Agora, consideremos a implicação

"se x é um inteiro par, então x^2 é par."

- Demonstração direta: suponhamos que x é par. Temos então que $x = 2n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Daí, $x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$. Como $2n^2 \in \mathbb{Z}$, pois $n \in \mathbb{Z}$, concluímos que x^2 é par.
- Demonstração indireta: suponhamos que x^2 não é par. Como um inteiro que não é par é necessariamente ímpar, temos que $x^2 = 2n + 1$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Daí, $(x-1)(x+1) = 2n$. Portanto, $x - 1$ ou $x + 1$ é divisível por 2. Se $x - 1$ é divisível por 2, então $x - 1 = 2m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x = 2m + 1$, mostrando que x é ímpar. Se $x + 1$ é divisível por 2, então com um raciocínio análogo, concluímos que x é ímpar.
- Demonstração por absurdo: suponhamos que x é par e que x^2 não é par. Ou seja, x é par e x^2 é ímpar. Mas, se x^2 é ímpar, então x é ímpar (como essa implicação foi provada acima, não vamos prová-la aqui). Porém, isto é um absurdo, pois x é par.

2.3. FALÁCIAS

A *falácia*, ou paralogismo, é um tipo de raciocínio incorreto, apesar de ter a aparência de correto. É conhecida também como *sofisma*, embora alguns estudiosos façam uma distinção, segundo a qual o sofisma teria a intenção de enganar o interlocutor, diferentemente da falácia, que seria um engano involuntário.

São inúmeros os tipos de falácias. Neste trabalho, vamos nos concentrar em algumas delas.

2.3.1. FALÁCIAS NÃO FORMAIS

Em nossa sociedade, estamos muito expostos a falácias não formais e, por isso, devemos estar atentos. Uma falácia é dita não formal quando decorre da irrelevância das premissas que inviabilizam a aceitação da conclusão ou decorre de generalizações apresentadas, que se baseiam em causas falsas. As mais comuns são as falácias baseadas no *argumento de autoridade* e as *falácias de falsa causa*.

Uma falácia baseada no argumento de autoridade é aceitável desde que a autoridade seja um especialista naquele assunto, mas é irrelevante se, por exemplo, recorrermos à autoridade de um cientista para justificar posições religiosas. Trata-se de um recurso muito usado na propaganda, quando artistas famosos “vendem” desde sabonetes até ideias, como a de que bebida alcoólica é algo bom.

Uma falácia de falsa causa é muito comum e representa muitas das inferências que fazemos no cotidiano. Ela ocorre quando obtemos uma conclusão baseando-nos numa causa que não é a causa real. Por exemplo, “não levo meu namorado ao shopping, porque da última vez que o levei, não consegui encontrar nada que me agradasse: ele é pé frio!”.

2.3.2. FALÁCIAS FORMAIS

Uma falácia é dita formal quando as regras do raciocínio lógico são contrariadas ou não se atende às regras estabelecidas em determinada teoria.

A seguir veremos duas falácias formais: uma no contexto algébrico, onde provamos que “$1 = 2$”, e outra no contexto geométrico, onde provamos que “todo paralelogramo é um retângulo”.

- $1 = 2$.

Sejam a e b dois números reais positivos. Suponhamos $a = b$. Então

$$ab = b^2$$
$$\Longrightarrow ab - a^2 = b^2 - a^2$$
$$\Longrightarrow a(b-a) = (b+a)(b-a);$$
$$\Longrightarrow a = b + a$$
$$\Longrightarrow a = a + a$$
$$\Longrightarrow a = 2a.$$

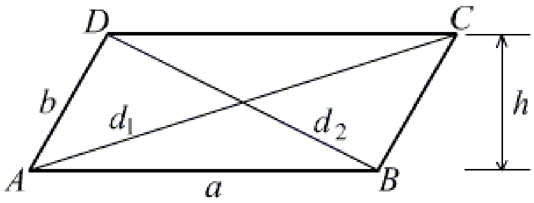
Daí, concluímos que

$$1 = 2.$$

- Todo paralelogramo é um retângulo.

Para apresentarmos esta falácia, vamos utilizar o teorema de Herón, que pode ser enunciado da seguinte forma: “sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo. Denotando por p o seu semiperímetro e por A sua área, temos $A(a,b,c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$”.

Seja o paralelogramo ABCD de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ medindo a e b, respectivamente, altura h e diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ medindo d_1 e d_2, respectivamente.



Cada diagonal do paralelogramo determina 2 triângulos congruentes, portanto de mesma área. São eles, em pares, de vértices ABC e ACD; e BCD e ABD.

Segundo a fórmula de Herón, a área dos triângulos ABC e BCD são dadas por $H(a,b,d_1)$ e $H(a,b,d_2)$.

Portanto,

$$H(a,b,d_1) = H(a,b,d_2),$$

donde
$$\Rightarrow d_1 = d_2.$$

Como as diagonais possuem mesmo comprimento, segue que o paralelogramo é necessariamente um retângulo.

3. ENTREVISTA COM OS DOCENTES

A entrevista com os docentes foi essencial para definir qual tópico seria tratado em nossa pesquisa com os alunos, pois através do que eles elegeram como conteúdos chave para o nono ano, foram adotados os procedimentos adequados para a organização do trabalho.

Foram entrevistados 50 docentes em diferentes situações de trabalho; alguns deles ensinam apenas em escolas públicas, outros apenas em escolas particulares e uma minoria em ambas. As cidades de trabalho dos docentes entrevistados foram Niterói, São Gonçalo, Saquarema, Araruama, Rio das Ostras e Macaé.

Um questionário, apresentado no Anexo I, permitiu uma avaliação de como alguns temas são tratados tanto em escolas públicas como em escolas particulares. O mesmo permitiu que fossem levantados dados relevantes e talvez até preocupantes quanto ao ensino de Matemática em turmas de nono ano. Isto porque os Parâmetros Curriculares Nacionais defendem a formalização no ensino da Matemática quando o aluno atinge o oitavo e nono anos do Ensino Fundamental, porém ficou evidente que há receio por parte dos professores quanto à realização das demonstrações em sala de aula.

Segundo a pesquisa, todos os docentes têm conhecimento da proposta curricular da rede de ensino em que trabalham, porém 70% admitem não conseguir cumprir toda a ementa de conteúdos. Desse modo, acabam lecionando apenas os tópicos que consideram como prioridade no nono ano. Os assuntos eleitos por eles como prioridade no nono ano foram, em ordem de relevância: equações do 2º grau, teorema de Tales, semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo e áreas. Dentre estes, está o tema que foi utilizado neste trabalho como ponto de observação da ideia de se trabalhar com a demonstração de um resultado matemático: equações do 2º grau.

Outro dado que chama a atenção é que 70% dos docentes não participaram da escolha do livro didático adotado pela unidade escolar (ou por terem entrado para o corpo docente no ano seguinte ou por falta de oportunidade para analisar referências), o que mostra que trabalham com uma proposta que não foi planejada por eles. Quase 60% dos docentes entrevistados consideram a bibliografia adotada regular ou ruim.

Embora os livros didáticos disponibilizados para análise pelo PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) apresentem as demonstrações dos teoremas, apenas 10% dos docentes afirmaram trabalhar sempre que possível os conteúdos propostos no currículo da rede e suas respectivas demonstrações. Estes mesmos 10% afirmaram que as aulas, onde as demonstrações são apresentadas, possuem um ótimo retorno.

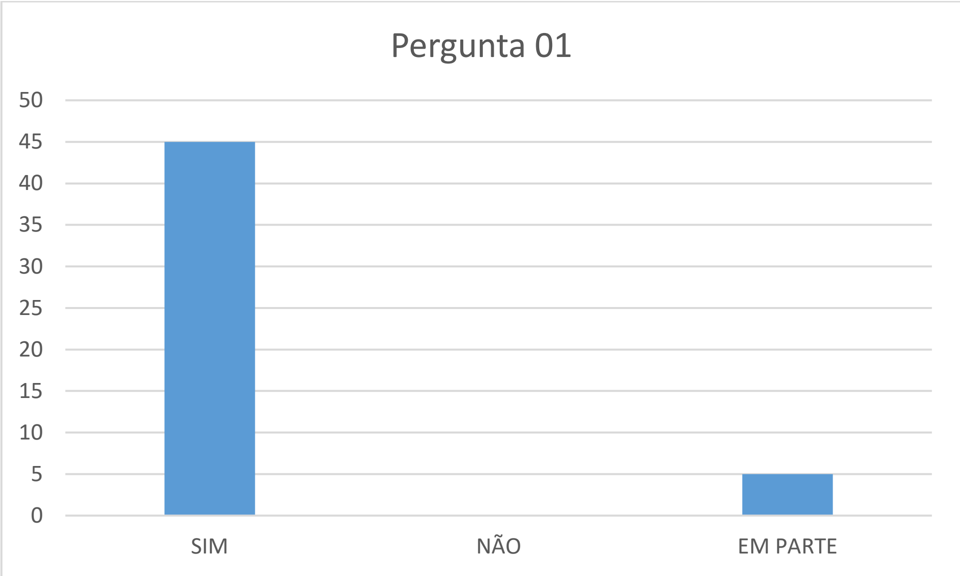
Embora 10% dos docentes afirmaram que trabalham com demonstrações sempre que possível, de modo que 6% já trabalhou a demonstração da fórmula de Bhaskara e tiveram um ótimo retorno. Os outros 4%, dos 10% demonstraram-na para casos particulares (em entrevista realizada, disseram que demonstraram casos particulares e assumiram a validade para casos mais gerais) e tiveram uma recepção ruim. O que causa preocupação são os demais 90% dos docentes que afirmaram nunca terem demonstrado a fórmula de Bhaskara em turmas de nono ano.

Embora os professores entrevistados não apresentem a demonstração com frequência em suas aulas, nenhum deles concordou que é possível preparar bem os alunos do nono ano sem o tratamento de demonstrações. Entretanto, 44% deles afirmaram ser mais importante apresentar exemplos do que demonstrações.

Esse levantamento realizado com os professores foi decisivo para a elaboração das atividades, pois nosso objetivo principal era apresentar a eles um roteiro para apresentar uma demonstração. Há uma confusão por parte dos professores quando a proposta é falar em demonstração no Ensino Fundamental, pois alguns deles gostariam de tratar a demonstração e em seguida os exemplos. Contudo, no momento em que os alunos se encontram, faixa etária e etapa do desenvolvimento cognitivo, é de grande importância saber que a transição do concreto para o abstrato deve ser mediada e conduzida de forma diferente da adotada, por exemplo, no Ensino Médio. Trabalhar com exemplos é fundamental, mas não o exemplo por si só e, sim, o exemplo que carregará o estímulo que permite a percepção de padrões matemáticos.

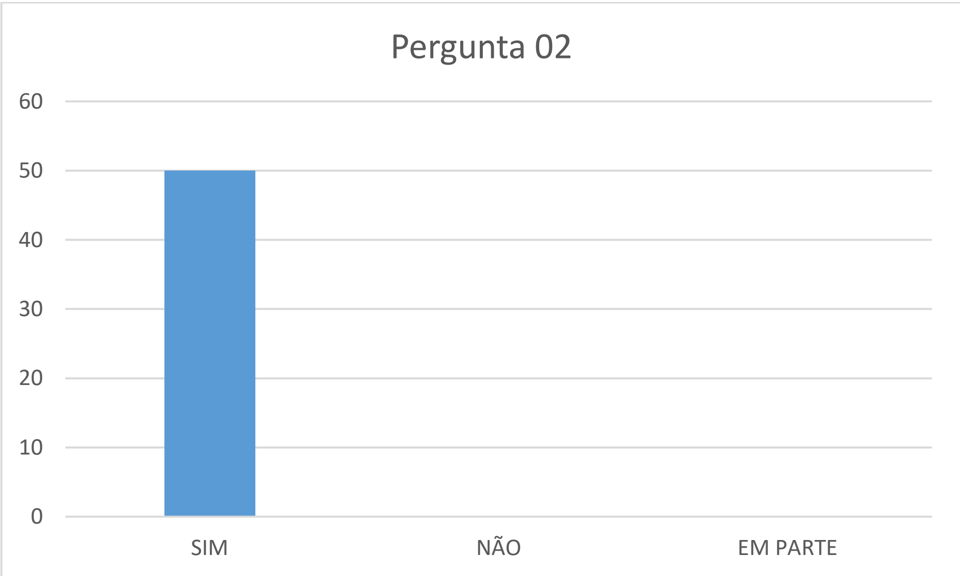
A seguir vamos apresentar as perguntas do questionário respondido pelos 50 docentes entrevistados, juntamente com os gráficos que ilustram a pesquisa realizada e a análise das informações obtidas.

01. Você conhece a proposta curricular da rede de ensino em que trabalha?



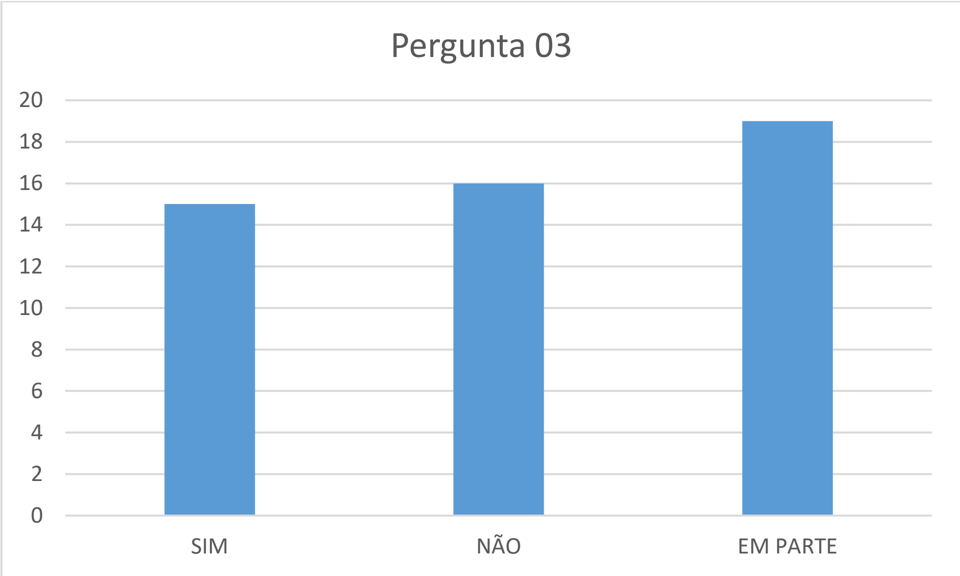
O gráfico acima mostra que quase todos os professores conhecem a proposta da rede de ensino em que trabalham; uma pequena quantidade deles conhece apenas em parte. É importante ressaltar que, já que nenhum deles desconhece a proposta, espera-se que esta proposta curricular seja realizada ao longo do ano letivo.

02. Você a utiliza? (pergunta feita com base no que foi respondido na anterior)



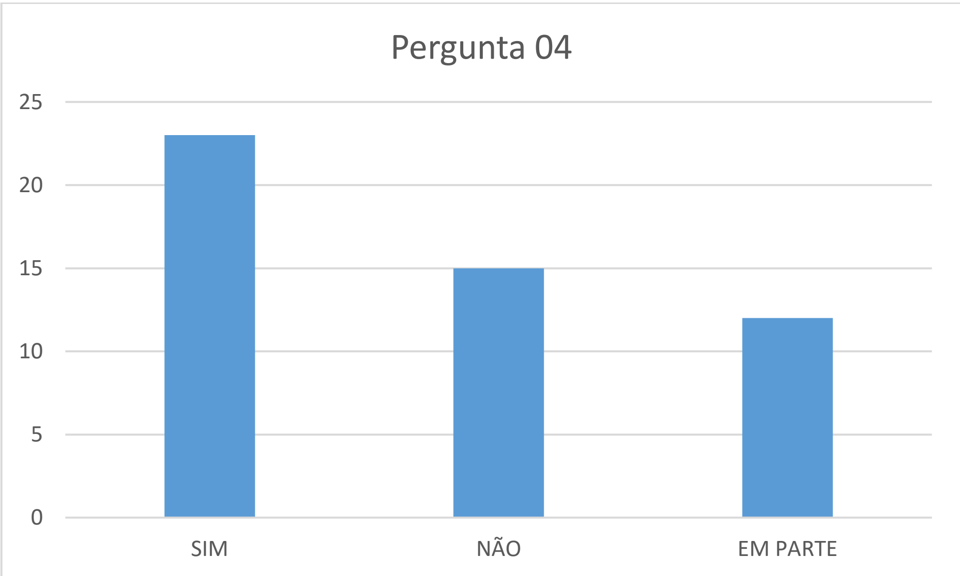
Durante a entrevista, alguns professores disseram utilizar a proposta curricular da rede de ensino, porém ressaltaram que em muitos casos precisam adaptá-las à realidade de turmas defasadas e heterogêneas.

03. Você consegue cumprir toda a proposta curricular durante o ano letivo?



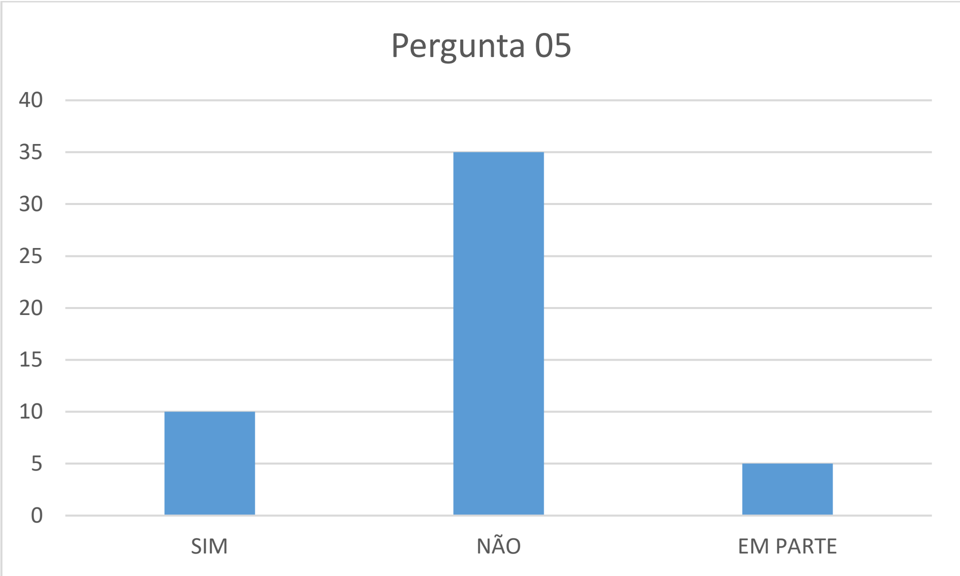
Apenas 15 professores, ou seja 30% dos docentes, garantem cumprir toda a proposta curricular durante o ano letivo, o que pode comprometer a integridade do conteúdo que deve ser visto ao longo do ano e, consequentemente, dos anos seguintes.

04. Você utiliza livro didático nas suas aulas?



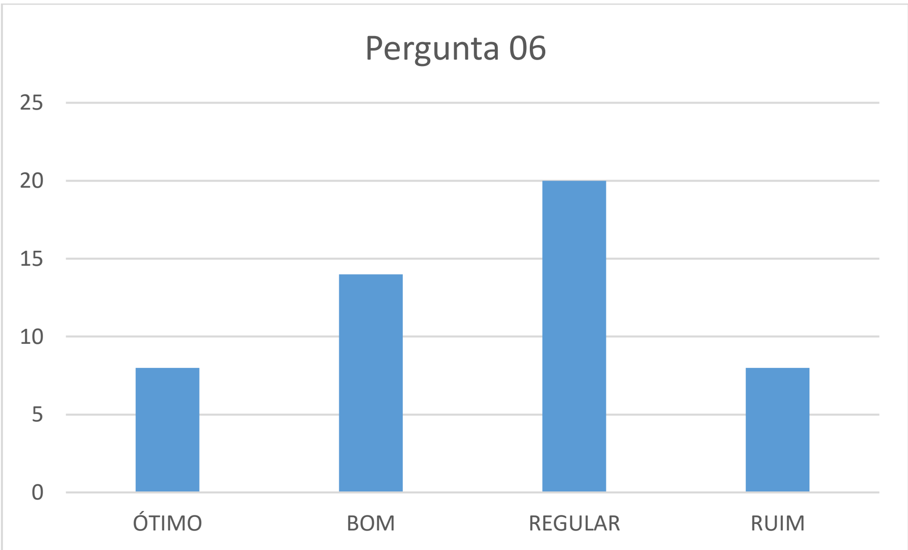
Dos 50 entrevistados, 15 professores afirmaram não fazer uso do livro didático. A maioria destes justificou que na escola em que trabalham (pública), não há o quantitativo suficiente para o número de alunos da escola.

05. Você participou da escolha do livro didático das escolas em que trabalha?



Dos docentes entrevistados, 70% alegaram não terem participação alguma na escolha dos livros didáticos utilizados na rede onde trabalham. A maioria destes trabalha na rede privada e afirma que a escola em que trabalha faz uso de materiais apostilados de sistemas de ensino, não dando liberdade ao professor de escolher a bibliografia que melhor lhe atenderá ao longo do ano. Alguns dos professores são da rede pública e disseram não terem participado da escolha do livro adotado, por terem chegado à escola após o período de seleção de bibliografias.

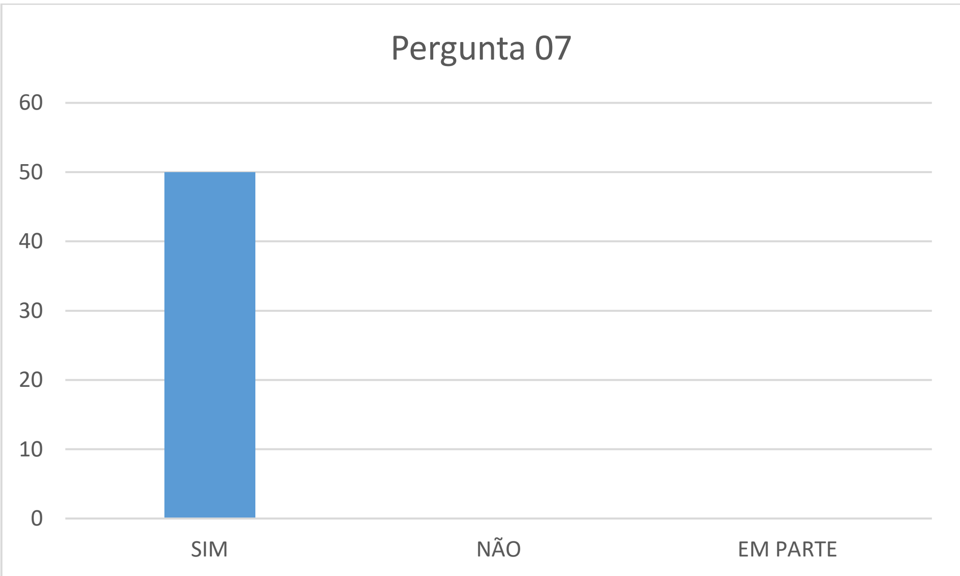
06. Como você classifica os livros didáticos adotados e utilizados pelas escolas em que trabalha?



Temos 56% dos docentes que classificarando a bibliografia como regular ou ruim, alegando estarem insatisfeitos com a bibliografia utilizada. Acreditamos que isto compromete o trabalho do docente, pois o uso do livro didático deve ser mediado de acordo com o andamento das aulas e é através dele que o aluno, ao estudar em casa, adquire pouco a pouco certa autonomia na sua aprendizagem.

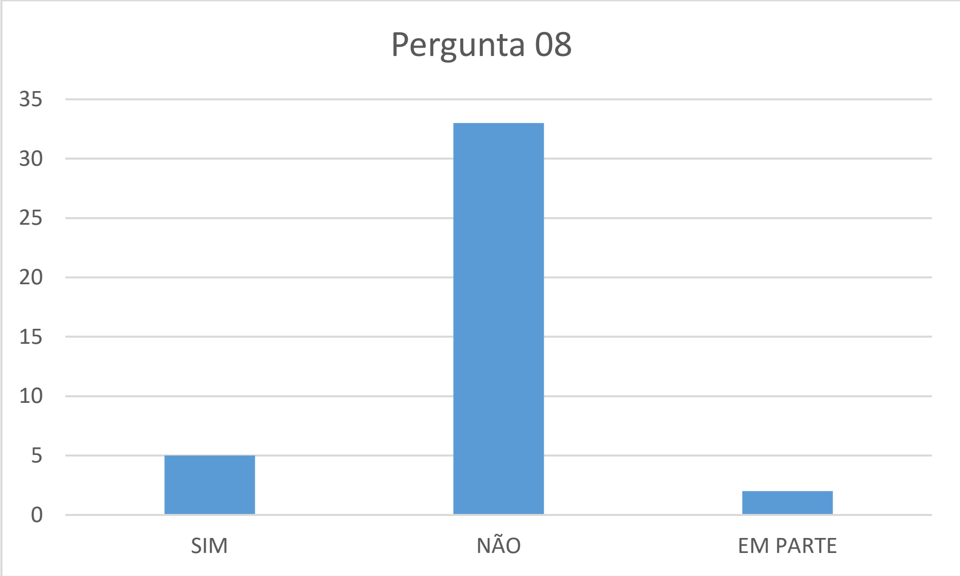
Mesmo com alguns docentes não fazendo uso do livro didático em suas aulas (principalmente para os professores da rede pública, onde faltam livros para alguns os alunos), os mesmos são utilizados em seu planejamento, assim as sugestões feitas pelos autores norteiam os planos de aula.

07. Os livros didáticos adotados pelas escolas em que trabalha apresentam as demonstrações dos principais teoremas abordados no 9° ano do Ensino Fundamental?



Uma das características comuns a todas as referências disponibilizadas pelo PNLD é a presença das demonstrações dos teoremas do 9° ano do Ensino Fundamental.

08. As escolas em que trabalha oferecem suporte tecnológico para aulas diferenciadas, utilizando computadores e acesso à internet para trabalhar com softwares?



Dos entrevistados, 66% afirmaram não terem suporte tecnológico para aulas diferenciadas. Muitos docentes alegaram terem salas de conteúdos digitais, mas não em quantidade suficiente para todos os alunos, portanto optam por não utilizarem esse recurso, já que precisariam dividir as turmas para que isso acontecesse.

09. Dados os 8 conteúdos abaixo, trabalhados no 9º ano do Ensino Fundamental, classifique-os em ordem de maior importância que deve ser dada durante o trabalho com os alunos desse segmento, ordenando-os de 01 a 08, onde 01 é considerado o mais importante de todos e 08 é considerado como aquele que se pode omitir, caso o tempo seja escasso.

( ) Radicais ( ) Equações do 2º grau

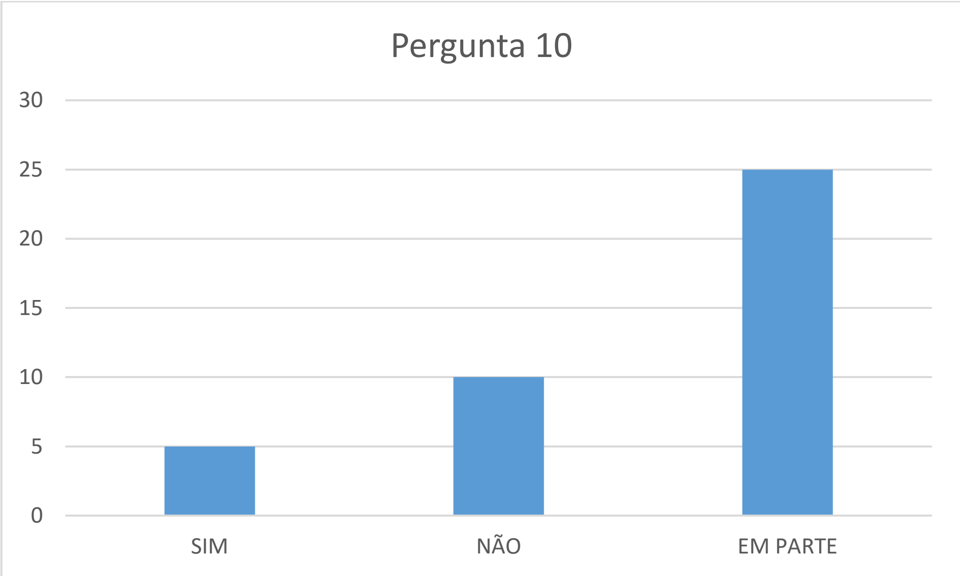
( ) Teorema de Tales( ) Semelhança de Triângulos

( ) Funções ( ) Relações Métricas no Triângulo Retângulo

( ) Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo ( ) Áreas

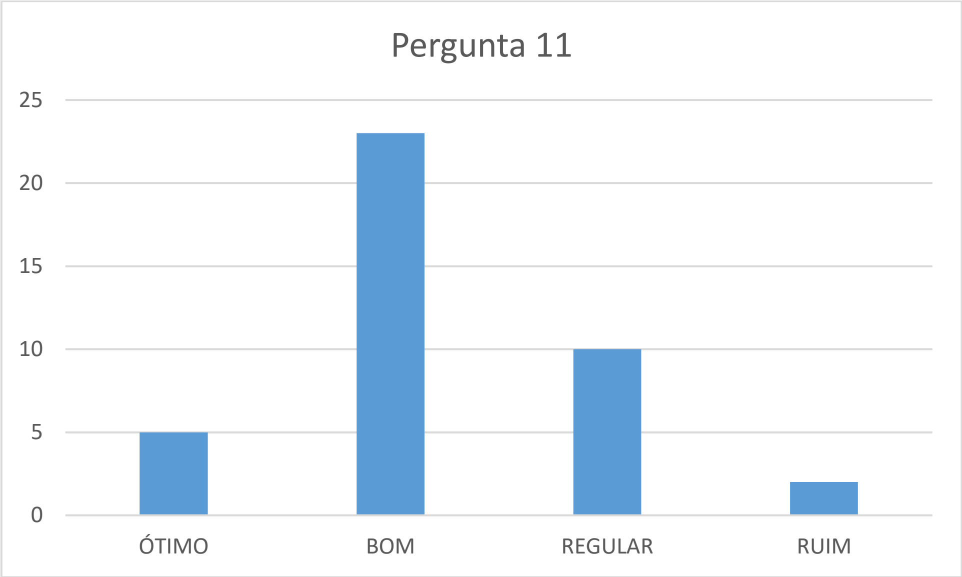
A pergunta número 09 não foi apresentada em gráfico, porém seu objetivo era verificar que importância os docentes davam ao conteúdo que foi utilizado como base dessa pesquisa: fórmula de Bhaskara. Todos os docentes que participaram da pesquisa classificaram “Equações do 2º grau” entre os dois primeiros, o que mostra, dentre os demais conteúdos, a importância deste assunto.

10. Você costuma trabalhar os conteúdos listados no item anterior e suas respectivas demonstrações?



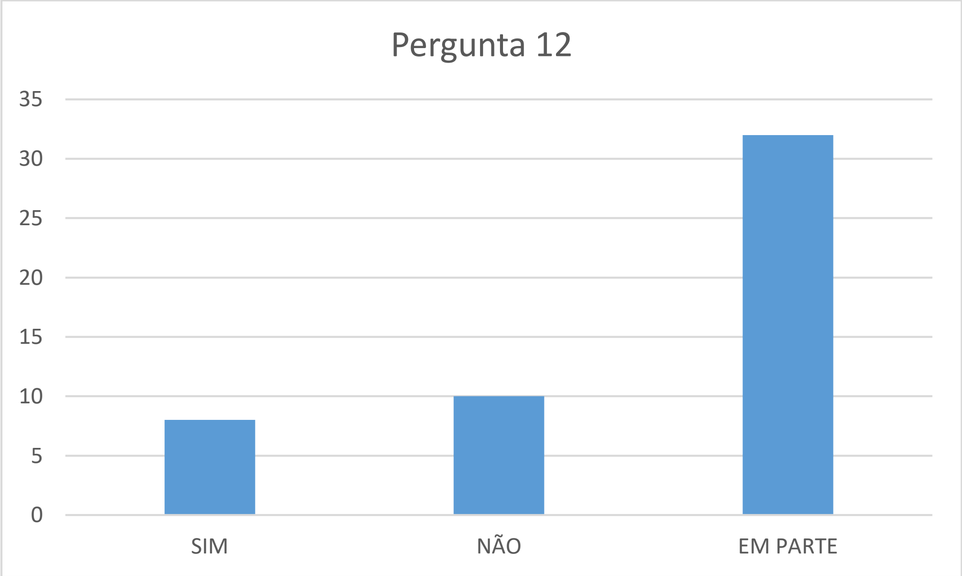
Metade dos professores mostraram trabalhar em parte as demonstrações. Muitos alegaram que, quando para demonstrar é necessário utilizar algum conteúdo de anos anteriores, o processo torna-se mais complicado. Por isso “filtram” os tópicos e realizam as demonstrações quando acreditam que os alunos conseguirão acompanhar.

11. Como você considera a recepção dos alunos quanto às aulas em que demonstrações são apresentadas?



Dos entrevistados, 24% parecem ter vivenciado experiências frustrantes, pois classificaram a recepção dos alunos como regular ou ruim. Mas a maioria dos professores parece ter tido bons resultados nas aulas onde as demonstrações foram realizadas.

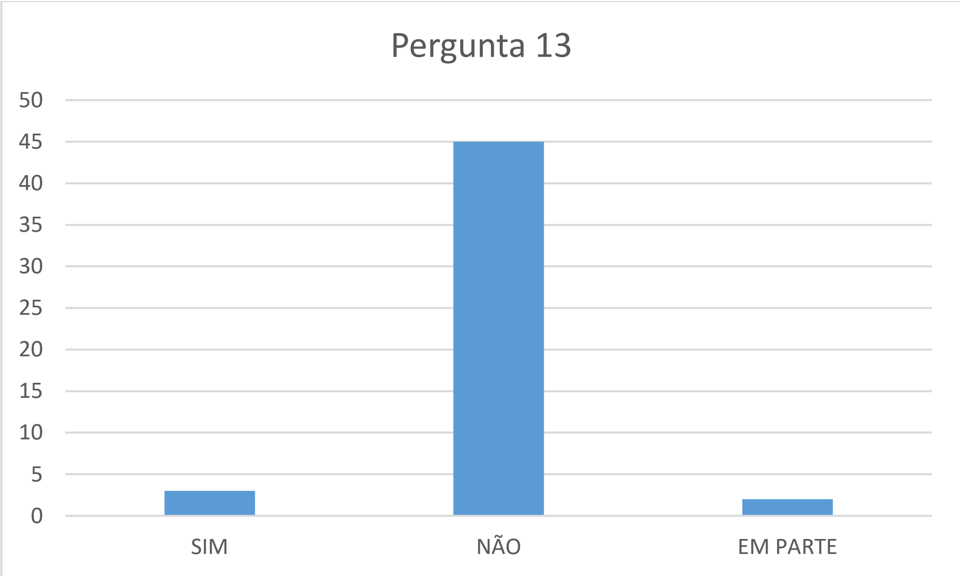
12. Você acha importante fazer a demonstração dos teoremas tratados no 9° ano?



Os docentes que não concordam com tal importância responderam à pergunta anterior dentro do percentual dos que tiveram uma experiência frustrada. Podemos pensar, portanto, que a desmotivação através de experiências ruins pode levar o professor a crer que a demonstração não é importante durante as aulas; ou ainda que o docente que não considera importante demonstrar acaba por consequência tendo experiências ruins quando tenta e não há prática constante.

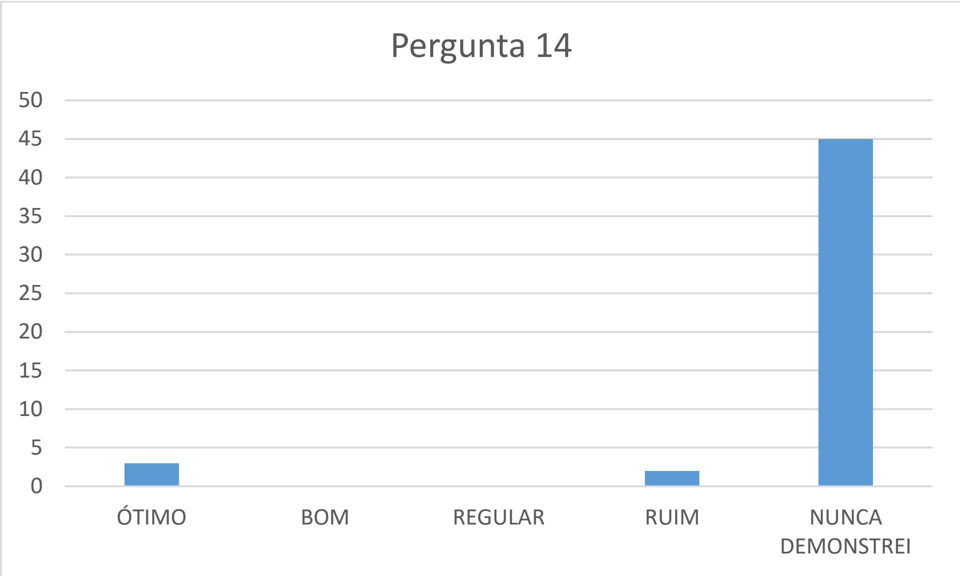
Muitos professores parecem ter receio em demonstrar os teoremas. Alguns deles talvez até mesmo desconheçam etapas de algumas demonstrações e, por isso, consideram difícil o trabalho de ensinar demonstrando.

13. Você já fez/faz a demonstração da fórmula de Bhaskara com os alunos do 9° ano?



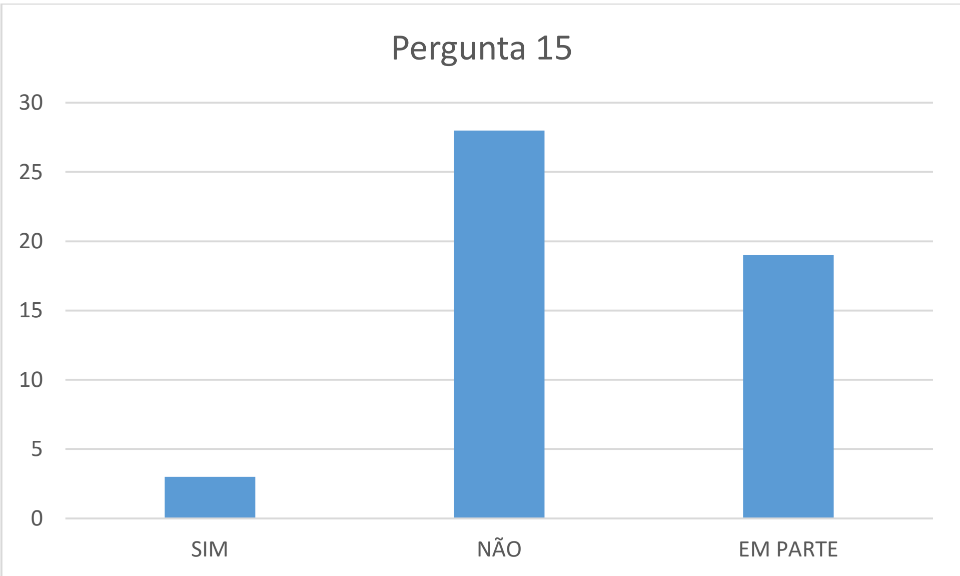
Como podemos observar, 90% dos docentes afirmam jamais terem demonstrado a fórmula de Bhaskara durante suas aulas. Mesmo com uma grande parte afirmando que acha importante tratar demonstrações, quase todos não fazem ou fizeram a demonstração. Apenas 2 professores, ou seja 4%, responderam que já fizeram a demonstração em parte. Eles afirmaram que utilizaram uma demonstração diferente da técnica de “completar quadrados”. Esse tipo de demonstração será apresentada no capítulo seguinte, sugerida por BIANCHINI em [05].

14. Como foi a reação dos alunos durante essa demonstração?



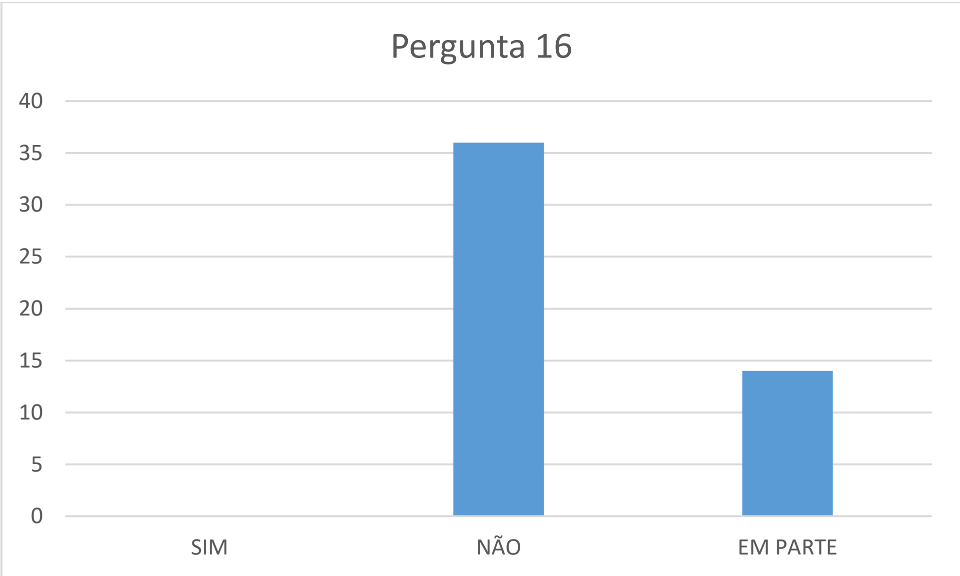
Essa informação foi decisiva para que a pesquisa fosse focada na demonstração da fórmula de Bhaskara. Muitos professores não demonstram por não saberem conduzir a aula que será apresentada com a demonstração; outros demonstram, mas não encontraram ainda a melhor forma de fazer a abordagem.

15. Você considera mais importante a verificação da validade de uma afirmativa matemática através de vários exemplos do que através de uma demonstração?



A minoria dos professores, apenas 6%, considera que é mais importante utilizar exemplos do que demonstrar. Grande parte dos docentes, 56%, acredita que a demonstração é mais importante do que a utilização de vários exemplos.

16. Você acha POSSÍVEL preparar bem os alunos do 9º ano sem o uso das demonstrações?



O que chama a atenção a essa pergunta é que mesmo os professores que consideram mais importante apresentar exemplos do que demonstrações, acreditam que não seja possível preparar bem os alunos do 9° ano sem o uso das demonstrações.

As análises gráficas pode nos levar à seguinte reflexão: os docentes graduados em Matemática têm total consciência de que os alunos do 9° ano estão num momento de transição do pensamento concreto para o pensamento abstrato, mas grande parte não faz uso dessa ideia nas suas aulas, seja por falta de experiência, ou falta de segurança, ou falta de base dos alunos, ou até mesmo falta de preparo.

4. DEMONSTRANDO A FÓRMULA DE BHASKARA – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

4.1. UM POUCO DE HISTÓRIA

Há cerca de 1950 a.C., alguns papiros feitos pelos egípcios traziam vestígios do trabalho com equações do segundo grau. As técnicas, apesar de rudimentares, levavam a soluções de equações do tipo $x^2 + y^2 = k$, sendo k um número real positivo. Uma das técnicas encontradas nos *Papiros de Berlim e de Kahun*[1] apresenta a resolução de uma equação desse tipo pelo método da falsa posição, que consiste em supor que há uma solução presente num dado intervalo e, à medida que avança na resolução do problema, encontra subintervalos cada vez menores, se aproximando cada vez mais de um intervalo que apresenta a solução original do problema.

> "A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é o quádruplo do lado do outro. Encontre os lados desse quadrado. Em simbologia atual o sistema de equações que representa o problema é
>
> $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{4}{3}x. \end{cases}$$
>
> A seguir o procedimento retórico dado pelo escriba para a resolução do problema:
>
> 1. Tome $x = 3$, então $y = 4$;
> 2. Assim, $3^2 + 4^2 = 25$ $(25 \neq 100)$;
> 3. $\sqrt{25} = 5, \sqrt{100} = 10$;
> 4. $10 \div 5 = 2$;
> 5. Os lados são $2 \times 3 = 6$ e $2 \times 4 = 8$ (*Papiro de Berlim*)."

(Exemplo retirado de [15]).

Em 1700 a.C., registra-se na Mesopotâmia equações de segundo grau e soluções apresentadas através de uma "receita matemática", fornecendo somente uma raiz positiva. Os mesopotâmios enunciavam a equação e sua resolução em palavras, mais ou menos do seguinte modo:

> "Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870?
> (O que hoje se escreve $x^2 - x = 870$). E a "receita" era:

---

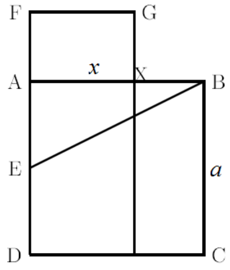
[1] Os Papiros de Berlim e de Kahun apresentam os registros mais antigos do Egito (aproximadamente 1950 a.C.) que se têm sobre a resolução de equações do 2° grau. Nota-se que, apesar de técnicas diferentes das usadas hoje em dia, algumas equações podiam ser solucionadas utilizando o método de falsa posição.

> Tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma, $(0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25)$. Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado $(870{,}25 = (29{,}5)^2)$ cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30), o lado do quadrado procurado."

(Exemplo retirado de [15])

Já na Grécia, entre 500 e 200 a.C., nota-se a dificuldade de tratar números racionais e irracionais aliados à geometria, o que até então concretizava as teorias sobre problemas equacionados como polinômios de grau 2. Em "Os Elementos" de Euclides, vemos avanços através de algumas proposições que tratam esse tipo de equação.

> "Proposição 11 – Livro II (Segmento Áureo): Dividir uma linha reta em duas partes tais que o retângulo contido pelo todo e uma das partes tenha área igual à do quadrado sobre a outra parte. De forma equivalente, dado um segmento de reta AB, deve-se determinar o ponto X desse segmento tal que o retângulo de lados AB e XB tenha a mesma área do quadrado de lado AX. Indicando-se as medidas de AB e AX por a e x, respectivamente, mostra-se que a e x devem satisfazer a seguinte equação: $a(a-x)=x^2$.
>
> Numa forma simplificada e em notação atual, a solução de Euclides compõe-se dos seguintes passos:
>
> 1. Construir o quadrado ABCD sobre o segmento dado AB;
> 2. Tomar o ponto médio, E, de DA;
> 3. Tomar F sobre o prolongamento de DA de maneira que $\overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{EB}}$;
> 4. Construir o quadrado sobre o lado AF no mesmo semipleno de BC;
> 5. O vértice X desse quadrado, pertencente ao segmento AB, é a solução do problema.
>
> De fato:
>
> $\overline{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2}a$. Portanto, no triângulo ABE tem-se $\mathrm{EB} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.
>
> Daí, $x = \overline{\mathrm{AX}} = \overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{EF}} - \overline{\mathrm{EA}} = \overline{\mathrm{EB}} - \overline{\mathrm{EA}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$ é a raiz positiva de $a(a-x)=x^2$, denominado número áureo, que é a medida do segmento AX.



(Exemplo retirado de [15]).

O exemplo extraído de [15] apresenta alguns equívocos, possivelmente devido à sua tradução. Na linha 5, por exemplo, o correto seria "os retângulos de lados AB e XB" e não "o retângulo de lados AB e XB", já que são segmentos de reta que não formam juntos um retângulo. Na linha 2, em vez de "duas partes tais que o retângulo contido pelo todo e uma das partes", seria correto escrever "duas partes tais que o retângulo contido pelo todo menos o retângulo determinado por uma das partes".

Finalmente na Índia, entre os séculos VI e XI d.C., surgem grandes nomes da Matemática que apresentaram contribuições significativas para a resolução de equações do 2º grau. Temos Aryabhata (séc. VI d.C.), Brahmagupta (séc. VII d.C.), Sridhara (séc XI d.C.) e Bhaskara[2] (séc. XII d.C.). Uma curiosidade é que apesar de apresentarmos no Brasil a fórmula de Bhaskara, o próprio Bhaskara afirma que ela é advinda de Sridhara e não de si mesmo.

O trabalho de Bhaskara, apesar de anterior ao dos outros indianos citados acima, preencheu diversas lacunas deixadas pelos seus antecessores, principalmente no campo das equações lineares e quadráticas. Também apresentou contribuição no estudo de progressões, radicais, ternos pitagóricos, regra de três etc.

A seguir temos um exemplo de um problema tratado por Bhaskara, o problema de *Lilavati*, sua filha:

> "O quadrado da quinta parte do número de macacos de um bando, subtraída de 3 macacos, entra numa caverna; e um macaco fica fora pendurado numa árvore. Diga quantos são os macacos.
> Em notação atual tem-se: $\left(\frac{1}{5}x - 3\right)^2 + 1 = x$ ou $x^2 - 55 = -250$."

(Problema 1 retirado de [15]).

Na Arábia, cerca de 3 séculos antes de Bhaskara, o matemático al-Khowarizmi apresentava a resolução de equações do segundo grau utilizando o *método de completar quadrados*, conforme hoje é apresentado nos livros didáticos. Porém seu enfoque era mais geométrico do que algébrico, pois mesmo admitindo que era possível em diversas equações encontrar duas raízes reais, só considerava a raiz positiva, quando esta existia. Desse modo, suas justificativas geométricas pelo método de completar quadrados faziam sentido. Porém esse feito de Khowarizmi foi descoberto apenas por volta do século IX, quando grandes patronos da cultura árabe foram responsáveis pela tradução de diversos escritos que ficaram esquecidos no tempo, pois, em 641 d.C, ordenou-se a destruição da Biblioteca de Alexandria, dificultando o acesso e a difusão das ideias matemáticas do século 7 e os seguintes.

---

[2] Bhaskara nasceu no sul da Índia e era de uma família abastada. Seu pai era um intelectual brâmane e renomado astrônomo. Bhaskara passou grande parte de sua vida como o diretor do observatório astronômico de Ujjain e foi condecorado não só por seus méritos em astronomia e matemática, mas também em mecânica.

Em 1303, na China, o matemático Chu Shih-chieh, apresentou uma técnica especial para a resolução da equação do 2º grau, baseada em aproximações sucessivas, método de *fan-fan*[3]. Porém esse método encontrava apenas uma raiz (positiva).

Veja a seguir como o método *fan-fan* funcionava:

> "O método fan-fan usado para encontrar, por exemplo, a solução da equação hoje escrita como $x^2 + 252x - 5292 = 0$, consistia no seguinte: partia-se de uma solução aproximada, no caso, $x = 19$ (a raiz positiva dessa equação está entre 19 e 20), e usava-se a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y = 143$ em y, cuja solução está entre 0 e 1.
> Identificando y^2 com y, obtinha-se uma solução aproximada para essa equação: $y = \frac{143}{291}$, e assim o valor inicial de x era corrigido para: $x = 19 + \frac{143}{291} = 19{,}49$. A ideia era repetir o processo a partir desse novo resultado até chegar a um número que não mais se modificasse.
> No caso, fazendo $z = x - 19{,}49$, obtinha-se a equação em z, $z^2 + 290{,}98z = 0{,}66$ e, daí: $z = \frac{0{,}66}{291{,}98} = 0{,}0022$, o que já confirmava as 2 casas decimais do valor encontrado no passo anterior (com efeito, os primeiros dígitos dessa raiz são 19,49226)".

(Retirado de [15]).

Desse modo podemos observar que em diferentes partes do mundo falava-se em resolução de equações do segundo grau por diversos meios e apesar de grandes distâncias e diferenças entre os pensadores, houve bastante investimento intelectual na pesquisa. O famoso Bhaskara da "Fórmula de Bhaskara" foi apenas um dos que dedicaram grandes momentos da sua vida ao estudo de soluções de equações do segundo grau.

Para mais detalhes sobre o assunto, recomendamos [15].

4.2. ANÁLISE DE ALGUMAS REFERÊNCIAS

Nesta seção, apresentamos uma sugestão de atividades que contribuíram significativamente para que houvesse maior compreensão da demonstração da fórmula de Bhaskara pelos alunos do 9º ano do Colégio Municipal Professora Elza

---

[3] O método *fan-fan*, que pode ser compreendido como *fazer até aparecer,* consiste em se aproximar da solução do problema através de uma interação sucessiva, iniciando por uma suposição e baseando-se no seu erro para buscar um valor cada vez mais próximo. Um método trabalhoso, mas que apresenta um raciocínio lógico-matemático utilizado em alguns casos.

Ibrahim, localizada no município de Macaé, na região norte do estado do Rio de Janeiro. Para o planejamento das atividades, foi feita uma comparação entre a apresentação de autores de três livros sugeridos pelo PNLD acerca de como devemos conduzir os tópicos antes de apresentarmos a demonstração. Também foi considerado que o trabalho com equações incompletas do segundo grau já havia sido feito anteriormente.

A abordagem sugerida por [05] – referência disponibilizada aos alunos e escolhida pelos professores da referida Unidade Escolar para uso em sala – propõe que, após a resolução de equações incompletas, seja utilizado o método de completar quadrados para resolução de equações completas do segundo grau. É dado um enfoque geométrico para a compreensão, mostrando através de exemplos como a equação e o processo de completar quadrados podem ser visualizados. A visualização geométrica foi feita conforme Figura I a seguir, onde se considerou a equação $x^2 + 4x = 21$.

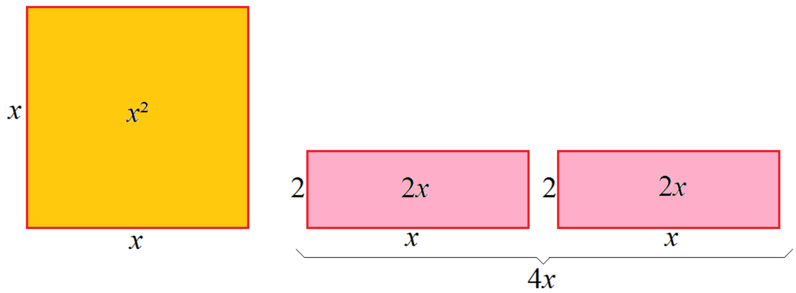


Figura I

Em seguida foi feita a composição da figura buscando a peça que faltava para “completar o quadrado” de lado $x + 2$, conforme Figura II abaixo:

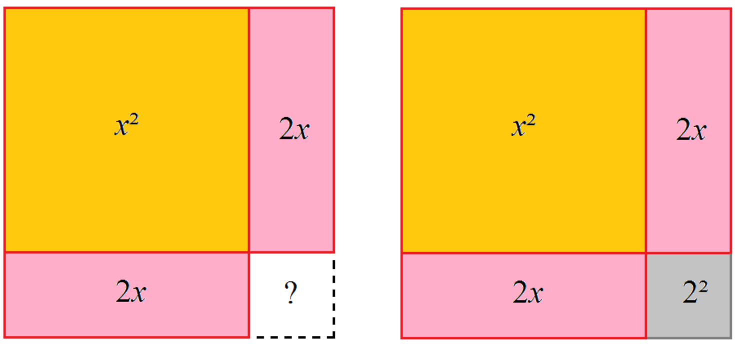


Figura II

Após o processo de visualização, o autor associa a ideia geométrica à equação algébrica e apresenta a solução da equação proposta inicialmente:

$$x^2 + 4x + 2^2 = 21 + 2^2$$
$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{25}$$
$$\Leftrightarrow x + 2 = \pm 5$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -7.$$

Note que algumas técnicas de resolução anteriores ao que é estudado no 9º ano foram utilizadas nesse processo, após completar quadrados na equação, como os produtos notáveis da forma $(a + b)^2$, vistos no 8º ano.

Um ponto importante que não foi destacado pelo autor é sobre a validade da raiz encontrada -7, pois tratando-se de uma raiz negativa a visualização geométrica não faz sentido.

Após a resolução desse exemplo o autor sugere a repetição do processo em casos de equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ onde $b < 0$, e define o mesmo de maneira análoga: primeiro geometricamente e depois utilizando os processos de visualização para escrever algebricamente a situação observada.

Veja a seguir, na Figura III, como o autor trata geometricamente a equação $x^2 - 6x = 7$:

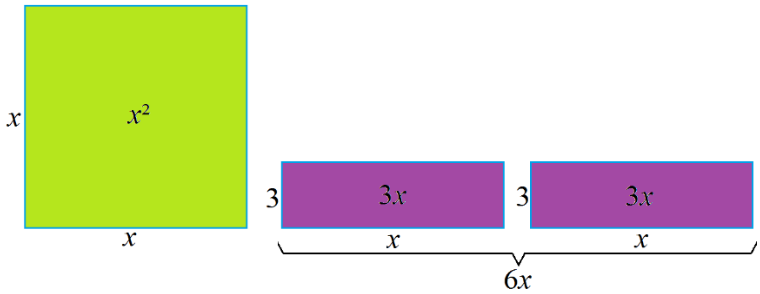


Figura III

Em seguida foi realizada a sobreposição das figuras conforme a Figura IV a seguir:

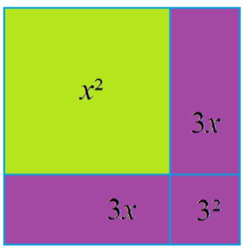


Figura IV

Nesse processo geométrico, a sobreposição faz com que possamos associar a ideia à seguinte situação:

$$x^2 - 6x = 7$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 = 7 + 3^2.$$

Note que, na sobreposição, um quadrado de lado 3 foi “retirado” duas vezes do quadrado de lado x. Portanto, daí a necessidade de acrescentá-lo ao resultado final.

Voltando à equação, temos:

$$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow x - 3 = \pm 4$$
$$\Leftrightarrow x = 7 \text{ ou } x = -1.$$

Alguns exercícios são propostos para a prática do mecanismo de completar quadrados e, em seguida, é feita a demonstração da fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, porém o autor não utiliza a técnica abordada anteriormente na íntegra para enfim demonstrar o que conhecemos como fórmula de Bhaskara. Veja, a seguir, o processo de demonstração apresentado em [05]:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\Leftrightarrow ax^2 + bx = -c$$
$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$
$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$
$$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$
$$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

É preocupação do autor afirmar que $a \neq 0$ e que a equação só possui solução real para $b^2 - 4ac \geq 0$. O autor também define o discriminante da equação, denotado por Δ, e reapresenta a solução como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

O que mais chama a atenção é que todo o enfoque dado pelo autor na resolução de equações completas através da técnica anterior à fórmula é deixado de lado durante a sua demonstração, quando na verdade a mesma deveria ser desenvolvida seguindo o mesmo raciocínio, buscando fazer a todo instante uma analogia aos passos anteriormente dados. É importante lembrarmos que nessa etapa escolar o aluno encontra-se na transição do pensamento concreto para o abstrato, portanto toda atenção aos detalhes deve ser dada, com a finalidade de contribuir para a evolução do desenvolvimento cognitivo do aluno.

A segunda abordagem analisada, sugerida em [17], apresenta uma proposta inicialmente similar à apresentada em [05], começando o processo de completar quadrados através de uma equação onde $a = 1$ e $b > 0$, dada por $x^2 + 8x + 7 = 0$ e, em seguida, é observada sua forma geométrica. Porém o autor não sugere exemplos em que $b < 0$, diferente do que foi visto na abordagem discutida anteriormente em [05], o que pode levar a uma indagação do aluno sobre a visualização não poder ser aplicada neste caso, quando já sabemos que pode.

Ao passo que em [05] temos uma proposta que deixa de lado toda a construção da técnica de completar quadrados durante a demonstração, vemos em [17] a preocupação em fazer uma analogia geométrica e algébrica para demonstrar a fórmula de Bhaskara, utilizando todos os passos do exemplo onde foram completados quadrados.

Após a construção geométrica apresentada em [17], similar à descrita por [08], os autores fazem a demonstração completando quadrados. Veja:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (ax^2 + bx + c).\frac{1}{a} = 0.\frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Considerando, finalmente, $\Delta = b^2 - 4ac$, temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

O terceiro livro, [08], traz a técnica de completar quadrados nos mesmos moldes que foram sugeridos por [17] (através da visualização geométrica e do processo algébrico), porém sugere exemplos em que $b < 0$, mas não apresenta a situação geométrica para o caso, apenas a resolução algébrica.

Em [08] vimos que o autor utilizou, assim como em [17], toda a técnica desenvolvida anteriormente na demonstração da fórmula de Bhaskara, porém em momento algum fez analogia à visualização geométrica, o que deixa de lado, em parte, o processo sugerido na resolução de exemplos anteriores. Dessa forma, o autor não possibilita o surgimento de dúvidas quanto às raízes e coeficientes negativos, visto que apenas a demonstração algébrica é tratada, mas também não se preocupa em apresentar aos alunos uma outra forma de compreender o processo de completar quadrados.

Do ponto de vista didático, entendemos que a visualização é um recurso que auxilia a compreensão de alguns casos, porém é importante que os professores utilizem o mesmo como uma etapa inicial para depois o consolidarem com o raciocínio abstrato, principalmente quando se está na etapa em que os processos de demonstração são uma novidade para os alunos.

4.3. PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

Após a análise das abordagens dos três autores, foi criado um planejamento implementando uma estratégia que permite ao aluno o entendimento da demonstração da fórmula de Bhaskara. Desde a visualização geométrica, como uma ideia para casos particulares, até a resolução de equações pela fórmula após sua demonstração, o que se espera nesse processo não é que necessariamente o aluno saiba demonstrar a fórmula de Bhaskara, mas principalmente que seja capaz de acompanhar uma demonstração e seja crítico quanto à aceitação de resultados matemáticos sem comprovação.

Para qualquer demonstração apresentada é preciso que o aluno conheça as propriedades necessárias nas etapas do desenvolvimento da mesma. Portanto, no caso da fórmula de Bhaskara, num primeiro momento, o professor precisa lembrar o desenvolvimento dos produtos notáveis vistos no 8º ano. Nesse momento, é importante levar o aluno tanto à interpretação algébrica quanto à geométrica, sempre deixando claro que geometricamente só fazem sentidos os produtos notáveis da forma $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$, quando a e b são números reais maiores que zero, e sendo $b < a$ para o segundo caso.

No desenvolvimento dos produtos notáveis é importante reforçar o processo contrário, quando o aluno identifica em que situações um trinômio pode ser escrito como o quadrado de uma soma ou de uma diferença. Essa etapa pode ser explorada junto com as equações do segundo grau da forma $x^2 + 2kx + k^2 = 0, k \in \mathbb{R}$ fixado, esperando-se que seja feita uma associação entre $x^2 + 2kx + k^2$ e $(x+k)^2$.

Após o processo da revisão dos produtos notáveis, aliado à resolução de alguns casos especiais de equações do segundo grau, pode-se pensar em casos onde é necessário completar quadrados e evoluir os exemplos de modo que, em cada nova equação, se tenha uma particularidade que a torne mais complexa na resolução. Sugerimos as seguintes equações:

(1) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

(2) $x^2 - 4x + 5 = 0$;

(3) $x^2 + 6x = 7$;

(4) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

(5) $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

A sequência sugerida acima foi pensada de acordo com as exigências que cada equação tem com relação à sua resolução através da técnica de completar quadrados. Equações do tipo (1), onde temos $a = 1$ e b um número positivo par, leva o aluno a perceber que um produto notável pode ser associado à expressão algébrica presente na equação. Na equação (2) ainda temos $a = 1$, porém $b < 0$, buscando verificar se o aluno diferencia produtos notáveis da forma $(a + b)^2$ de $(a - b)^2$. Em (3), embora a equação pareça bem similar à apresentada em (1), o aluno encontra a primeira situação em que o segundo membro da igualdade não é igual a 0. Em equações do tipo (4), o aluno se depara com b ímpar, o que o fará trabalhar com frações. Equações como a dada em (5) são as mais eficazes para sabermos se os alunos estão preparados para serem apresentados à demonstração da fórmula de Bhaskara, pois todos os processos exigidos durante a execução da demonstração são basicamente os mesmos que serão seguidos na resolução desse tipo de equação. Acreditamos que facilitaria ter um exemplo como esse resolvido e, em paralelo a este, ir demonstrando a fórmula de Bhaskara, mostrando que todo o processo utilizado em uma equação particular é usado para a demonstração do caso geral.

Um vídeo foi criado com as etapas do processo recomendado afim de orientar os professores sobre os cuidados que devem ser tomados durante o trabalho com o conteúdo. O mesmo encontra-se disponível em https://youtu.be/TIm3fWRVrYE.

4.4. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS COM OS ALUNOS

4.4.1. TRABALHANDO COM PRODUTOS NOTÁVEIS

A primeira atividade desenvolvida com os alunos (Anexo II) teve como objetivo lembrar os produtos notáveis.

Algumas equações incompletas anteriormente resolvidas traziam produtos entre binômios na sua resolução, portanto a distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{R}$ já fazia parte do cotidiano dos alunos, que resolviam, nesta etapa, apenas problemas que recaíam em equações como $(2x-1)(x+2)=3x-7x^2$ e, que ao longo do desenvolvimento, tornavam-se equações do segundo grau incompletas. Nesse momento, o objetivo era verificar se os alunos conheciam a distributividade para expressões como $(x+1)^2$ e também o método prático de resolução: *“o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo”*.

Como duas turmas do Colégio Municipal Professora Elza Ibrahim foram avaliadas durante o processo, iremos nos referir a elas como F9-101 e F9-102. Os alunos da turma F9-102 apresentaram bastante domínio quanto à distributividade para resolução de qualquer produto notável, não tendo problemas para resolver atividades do Anexo II. Já os alunos da turma F9-101 pareciam ter maior resistência ao método, embora compreendessem a sua essência. A maior dificuldade era nas multiplicações entre coeficientes e partes literais. Até mesmo ao multiplicar números inteiros, havia confusão quanto ao sinal do resultado do produto.

A apresentação da interpretação geométrica dos produtos notáveis foi feita para as duas turmas. Para muitos isso facilitou a resolução de equações. Além disso, alguns também puderam constatar que as operações que vinham desenvolvendo faziam sentido.

Veja abaixo, a descrição da interpretação geométrica apresentada aos alunos para o produto notável $(a+b)^2$:

i) Tomamos primeiramente um quadrado de lado com medida a $a+b$, com a e b números reais positivos;

ii) Em seguida, decompomos o quadrado subdividindo seus lados por pontos que determinam dois segmentos, um com medida a e outro com medida b;

iii) Temos, assim, um quadrado de lado com medida a, um quadrado de lado com medida b e dois retângulos congruentes de lados medindo a e b;

iv) Veja a Figura V, a seguir, que ilustra os passos dados.

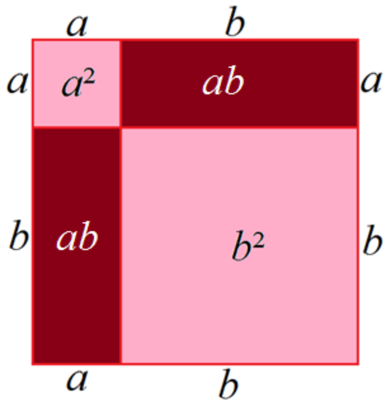


Figura V

Em seguida é feita a analogia da visualização geométrica ao desenvolvimento do produto $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

De forma análoga, temos o produto notável da forma $(a-b)^2$, sendo válida a interpretação geométrica apenas no caso em que $a > b$, com $a > 0$ e $b > 0$. Veja a Figura VI abaixo, apresentada aos alunos nessa situação:

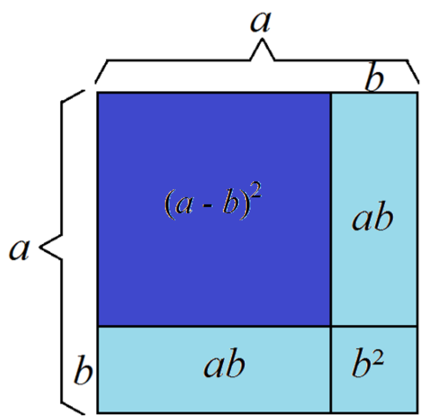


Figura VI

Nesse caso, há uma dificuldade apenas em compreender que a “retirada” do quadrado de lado com medida b ocorre duas vezes, o que nos leva a acrescentá-la ao resultado final e obtermos $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

O produto notável $(a+b)(a-b)$ não se aplica a equações completas do segundo grau, portanto não foi explorado nesse momento, apenas durante a realização de equações incompletas.

A segunda atividade, aplicada no mesmo dia e presente também no Anexo II, tinha como objetivo verificar se os alunos conseguiam perceber que alguns trinômios poderiam ser reescritos como quadrados perfeitos. Portanto, para os alunos que sabiam fazer o desenvolvimento dos produtos notáveis através do método prático, foi mais simples perceber quais expressões se enquadravam no que havíamos praticado e quais delas não se enquadravam. Já para aqueles para os quais o desenvolvimento dos produtos notáveis só era feito através da distributividade, foi bastante complicado perceber analogias.

Como muitos alunos precisaram dedicar um maior tempo à segunda atividade, principalmente os da turma F9-101, foi necessário retornar para a atividade anterior e resolver mais alguns produtos notáveis pelo método prático. Não ter feito isso anteriormente foi uma estratégia utilizada para que os próprios alunos percebessem o quão útil é poder resolver um problema matemático por vários caminhos ao invés de apenas um. Assim conhecer o método prático deixaria de ser visto como um “macete” para os que têm maior facilidade e passaria a ser visto como uma ferramenta importante que todos deveriam conhecer.

Novamente recorremos à visualização geométrica para que alguns alunos compreendessem o porquê de *“duas vezes o primeiro pelo segundo”* no momento da resolução. Em seguida, conseguimos retornar à segunda atividade, porém com um grupo maior de alunos acompanhando e executando as resoluções.

A terceira atividade, aplicada no mesmo dia e também descrita no Anexo II, teve como objetivo desafiar os alunos a completar os quadrados em cada expressão. Portanto, as vezes era necessário acrescentar valores e as vezes retirar, de forma que conseguissem escrever qualquer expressão por meio de um produto notável.

Nessa atividade, muitos alunos conseguiram mostrar domínio dos produtos notáveis, pois não mais identificavam ou desenvolviam produtos, mas criavam os produtos. Ambas as turmas se saíram bem no desenvolvimento da terceira atividade, o que foi um indicativo para dar continuidade ao processo de utilização dos produtos notáveis para resolver equações completas do segundo grau.

A aula foi encerrada com êxito nas duas turmas e todos os problemas propostos no Anexo II foram resolvidos.

4.4.2. COMPLETANDO QUADRADOS

No segundo momento, as atividades focavam na resolução de equações utilizando o processo de completar quadrados. É claro que os primeiros casos foram selecionados de modo que os alunos não encontrassem grandes barreiras, pois o objetivo era inicialmente fazê-los praticar um processo novo de resolução e posteriormente estender este processo à fórmula de Bhaskara como um método prático de resolução, mas que fizesse sentido.

Alguns exemplos de equações completas do segundo grau foram apresentados e também foi discutido em que situações podemos nos deparar também com equações onde o número de soluções reais poderiam ser 0, 1 ou 2. Os exemplos foram feitos através da técnica de completar quadrados e todos os casos relacionados ao número de raízes reais foram tratados.

Na atividade 1 do Anexo III estão apresentadas equações que o aluno deve resolver identificando trinômios como um quadrado perfeito e, na atividade 2, equações que ele deve resolver completando quadrados antes de identificar o produto notável. Como as aulas ocorreram um dia após a realização das atividades anteriores, os processos mecanizados ainda estavam bastante presentes neles.

A próxima aula só ocorreria na semana seguinte, 6 dias após a última aula. Portanto a atividade 3 do Anexo III foi proposta para casa com o objetivo de revisar o assunto e os alunos terem, durante os dias sem aula de Matemática, ao menos um contato com o conteúdo trabalhado.

Na turma F9-101, a técnica de completar quadrados deixou alguns alunos desconfortáveis, pois muitos buscavam sempre algum padrão com perguntas do tipo: *“professor, sempre vai ser assim, com o número 4?”*, ou, *“professor, eu sempre tenho que dividir por 2 o valor do b?”*. Apesar de alguns padrões realmente fazerem sentido em todos os casos e outros somente em casos particulares, o objetivo não era apenas encontrar um padrão, mas sempre utilizar o raciocínio de completar quadrados em cada problema, pensando geometricamente ou algebricamente.

Na turma F9-102, foram poucos os alunos que tiveram dificuldade de executar os processos de completar quadrados; apenas parte isolada da turma precisou de mais assistência nos primeiros exemplos. Logo prosseguiram por conta própria.

Note que, no Anexo II, nenhuma equação completa trazia $a \neq 1$. Equações desse tipo foram deixadas para o último momento, antes da demonstração da fórmula de Bhaskara.

4.4.3. RESOLVENDO EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Na última parte das atividades propostas, a aula foi iniciada com a correção das equações da atividade 3 do Anexo III. Todas as equações foram resolvidas pela técnica de completar quadrados e as últimas dúvidas foram tiradas. Em ambas as turmas, as maiores dificuldades ocorreram nas equações onde tínhamos $a < 0$ e onde b era ímpar. Os alunos perceberam que no primeiro caso o processo era simples, já para o segundo a dificuldade encontrava-se em trabalhar com frações, pois é muito comum alunos do ensino fundamental preferirem a representação decimal de um número racional do que a representação por frações. Por conta disso, alguns exercícios foram corrigidos utilizando os números racionais com as duas representações, mostrando que a solução seria a mesma, ao final.

Em seguida, foram apresentados os casos onde tínhamos $a \neq 1$ e a aplicação da técnica de completar quadrados. Como o objetivo era apresentar a demonstração da fórmula de Bhaskara, multiplicando ambos os membros da equação pelo termo $\frac{1}{a}$, todos os exemplos que se enquadravam nesse grupo foram resolvidos dessa forma.

A primeira atividade do Anexo IV teve como objetivo verificar se os alunos estavam aptos a aplicar a técnica de completar quadrados em qualquer equação completa do segundo grau. Cumprindo toda a atividade, esperava-se que a demonstração da fórmula poderia ser apresentada utilizando os mesmos passos da resolução de equações completas.

Antes da segunda atividade do Anexo IV foi feita a demonstração da fórmula de Bhaskara logo após a resolução do último item da atividade 1. Um exemplo resolvido foi deixado no quadro, pois o objetivo era mostrar aos alunos que os mesmos passos dados na resolução do exercício poderiam ser dados na demonstração da fórmula de Bhaskara.

Vamos ao exemplo resolvido:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x^2 - 7x + 2).\frac{1}{3} = 0.\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{3}x = -\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = -\frac{2}{3} + \left(\frac{7}{6}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} = \frac{49}{36} - \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$
$$\Leftrightarrow x - \frac{7}{6} = \pm\sqrt{\frac{25}{36}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{6} \pm \frac{5}{6}$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{6}.$$

Após a demonstração da fórmula, alguns exemplos foram feitos utilizando-a e mostrando a praticidade de se trabalhar com ela em comparação com a técnica de completar quadrados. Os alunos da turma F9-102 acompanharam bem a demonstração. Já na turma F9-101 foi necessário retomar alguns passos antes de seguir adiante com os exercícios.

A atividade 2 do Anexo IV foi deixada como atividade proposta para revisão geral de equações do segundo grau, onde os alunos encontrariam equações completas e incompletas e a partir de agora utilizariam o método que achassem mais conveniente para resolvê-las.

4.5. AVALIANDO O PROCESSO DE APRENDIZAGEM

Os alunos das duas turmas participaram de uma avaliação externa junto com os alunos das demais 3 turmas de 9º ano da escola. Essa avaliação, conhecida como Saerjinho[4] e aplicada em todas as escolas municipais da cidade, trazia conteúdos relacionados ao bimestre trabalhado e um deles era a resolução de equações do segundo grau. Os professores das demais turmas não abordaram as equações completas utilizando a técnica de completar quadrados, apenas apresentando a fórmula de Bhaskara para a resolução.

A equipe responsável pela avaliação externa apresentou para a escola um resultado geral, mostrando o quanto cada turma de 9º ano cresceu ou decresceu de um bimestre para o outro. Das 59 turmas de 9º ano do município, apenas 19 apresentaram crescimento em comparação com a avaliação externa aplicada anteriormente à essa. Dentre essas 19 turmas, estavam as turmas F9-101 e F9-102, as únicas do Colégio Municipal Professora Elza Ibrahim que cresceram 9,06% e 11,31% respectivamente, de uma avaliação anterior à que apresentava as questões referentes às equações do segundo grau.

Esse resultado mostra, de certa forma, a eficácia do método utilizado; afinal foi o único tópico abordado de forma diferente das demais turmas da escola. Vale ressaltar que, em parceria com a professora das turmas F9-103 e F9-104, todas as avaliações internas do bimestre em que o conteúdo foi tratado foram as mesmas (trabalhos, testes e provas).

[4] Essa avaliação ocorre nos quatro bimestres do ano através de um convênio entre a Secretaria de Educação do Município de Macaé e a Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro. A avaliação possui questões de Matemática e Língua Portuguesa e tem como objetivo quantificar o aproveitamento dos alunos ao longo do 9° ano de escolaridade.

5. A FÓRMULA DE BHASKARA NO CASO COMPLEXO

Um trabalho bem realizado no ensino de equações do segundo grau durante o 9° ano torna fácil a aplicação do raciocínio da fórmula de Bhaskara com coeficientes e raízes reais para o caso onde esses valores pertencem ao conjunto dos números complexos. Portanto, ao conhecer o *corpo dos números complexos* no Ensino Médio, espera-se que o aluno consiga reproduzir raciocínios análogos aos utilizados quando o tratamento envolvia o conjunto dos números reais apenas.

Vamos começar apresentando os números complexos e algumas de suas propriedades. Os resultados aqui apresentados não serão provados e sim apenas enunciados para que possamos apresentar a fórmula de Bhaskara no caso complexo. Para os leitores interessados em ler mais sobre o assunto, recomendamos [09].

5.1. O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Definimos o *corpo dos números complexos* como sendo o conjunto

$$\mathbb{C} = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \; e \; y \in \mathbb{R}\},$$

com as seguintes operações de *adição* e *multiplicação*: se $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$ pertencem a $\mathbb{C}$, então

$$z + w = (x + a, y + b) \quad e \quad zw = (xa - yb, xb + ya).$$

Os elementos de $\mathbb{C}$ são chamados de *números complexos*. Denotamos o número complexo $(0,0)$ simplesmente por 0 e o número complexo $(1,0)$ simplesmente por 1. Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, definimos

$$-z = (-x, -y) \quad e \quad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) se \; z \neq 0.$$

O número z^{-1} também é denotado por $\frac{1}{z}$ ou $1/z$.

Proposição 1. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer* z, w, t $\in \mathbb{C}$:

(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$ $(associatividade\ da\ adição)$.

(b) $z + w = w + z$ $(comutatividade\ da\ adição)$.

(c) $0 + z = z$ $(elemento\ neutro)$.

(d) $z + (-z) = 0$ $(elemento\ oposto)$.

(e) $z(wt) = (zw)t$ $(associatividade\ da\ multiplicação)$.

(f) $zw = wz$ $(comutatividade\ da\ multiplicação)$.

(g) $1z = z$ $(elemento\ unidade)$.

(h) $zz^{-1} = 1\ se\ z \neq 0$ $(elemento\ inverso)$.

(i) $z(w + t) = zw + zt$ $(distributividade\ da\ multiplicação\ em\ relação\ à\ adição)$.

Todas as propriedades acima decorrem diretamente das definições das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$. Tomando, por exemplo, x, y, a, b, c e d números reais onde $z = (x, y)$, $w = (a, b)$ e $z = (c, d)$ usamos propriedades já conhecidas dos números reais para justificar e demonstrar todos os itens da Proposição 1.

Tendo definido as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, definimos as operações de *subtração* e *divisão* da maneira usual: dados $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z - w = z + (-w) \quad e \quad \frac{z}{w} = zw^{-1}\ se\ w \neq 0.$$

A potenciação também é definida de maneira usual:

$$z^0 = 1, \quad z^n = \underbrace{z \ldots z}_{n-vezes} \quad \text{e} \quad z^{-n} = \underbrace{z^{-1} \ldots z^{-1}}_{n-vezes}\ se\ z \neq 0\ (n \geq 1).$$

Com base nas propriedades da Proposição 1 é possível concluir que diversas operações aritméticas de números reais são válidas para números complexos. Por exemplo, a soma e o produto de duas frações z_1/w_1 e z_2/w_2 são dadas pelas fórmulas

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2} \quad e \quad \frac{z_1}{w_1}\frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}.$$

Um conjunto no qual estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas na Proposição 1 é chamado de *corpo*. Por isso, no início desta seção chamamos $\mathbb{C}$ de *corpo dos números complexos*.

No Ensino Médio, os números complexos são apresentados como "números" da forma

$$x + yi,$$

onde x e y são números reais e i é um "número imaginário", que satisfaz à estranha igualdade $i^2 = -1$.

Para entender tal representação vamos primeiramente falar do número complexo denotado por $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$. Esse número é representado simplesmente por x e esta representação está de pleno acordo com o que já fizemos com o elemento neutro 0 e o elemento unidade 1 $\big(0 = (0,0) \text{ e } 1 = (1,0)\big)$. Então podemos trabalhar com a seguinte convenção:

$$x = (x, 0) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim podemos ver $\mathbb{R}$ como um subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja, todo número real é considerado um número complexo. A princípio essa inclusão $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ pode gerar uma certa ambiguidade, portanto vamos verificar a validade da adição e da multiplicação nesses casos.

Em $\mathbb{R}$ definimos $x + a$ e xa como a adição e a multiplicação, respectivamente, entre dois números reais x e a. Já em $\mathbb{C}$ temos

$$(x, 0) + (a, 0) = (x + a, 0) = x + a;$$

$$(x, 0)(a, 0) = (xa - 0, x.0 + 0.a) = (xa, 0) = xa,$$

Agora, para entender a estranha relação $i^2 = -1$ notemos que $(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$, ou seja, o número -1 possui uma "raiz quadrada" em $\mathbb{C}$! O número complexo $(0,1)$ é denotado por i e chamado por *número imaginário*. Assim temos a propriedade básica do número imaginário:

$$i^2 = -1.$$

Finalmente, dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$, temos

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0,1),$$

isto é,

$$z = x + yi.$$

Assim, tanto a representação na forma de par ordenado de números reais (x, y), quanto a representação através da expressão $x + yi$ tratam do mesmo número complexo. A última é denominada *forma algébrica* do número complexo.

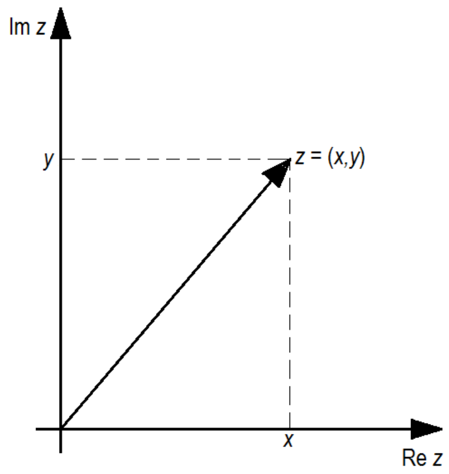
5.2. CONJUGADO E VALOR ABSOLUTO

Dado um número complexo $z = x + yi$, definimos a *parte real* e a *parte imaginária* de z por

$$\mathrm{Re}\, z = x \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\, z = y,$$

respectivamente. Quando $\mathrm{Re}\, z = 0$, dizemos que z é *imaginário puro*.

Observando a representação de um número complexo por um par ordenado, podemos representá-lo graficamente como um ponto do plano cartesiano de abscissa x e ordenada y, ou como o vetor que liga a origem a esse ponto. Veja a figura.



Chamaremos, nesse contexto, o plano cartesiano de *plano complexo*, onde o eixo x é o *eixo real* e o eixo y é o *eixo imaginário* do plano definido.

Definimos o *conjugado* de um número complexo $z = x + yi$ como sendo o número complexo $\bar{z} = x - yi$. Graficamente, $\bar{z}$ é o ponto do plano complexo obtido através da reflexão de z em relação ao eixo real.

Proposição 2. As seguintes propriedade se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ e $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$.

(b) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ se $w \neq 0$.

(c) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ e $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$.

(d) $z \in \mathbb{R}$ se e somente se $\bar{z} = z$.

(e) z é imaginário puro se e somente se $\bar{z} = -z$.

A demonstração das propriedades citadas na Proposição 2 são demonstradas através das operações definidas em $\mathbb{C}$ e da definição de conjugado de um número complexo.

O *valor absoluto* (ou *módulo*) de um número complexo $z = x + yi$ é definido por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposição 3. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\mathrm{Re}\,z \leq |\mathrm{Re}\,z| \leq |z|$ e $\mathrm{Im}\,z \leq |\mathrm{Im}\,z| \leq |z|$.

(b) $|z|^2 = z\bar{z}$, $|\bar{z}| = |z|$ e $|zw| = |z||w|$.

(c) $|z/w| = |z|/|w|$ se $w \neq 0$.

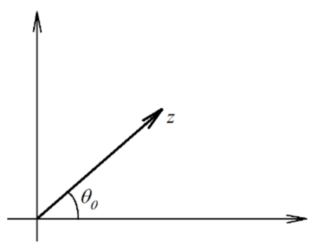
(d) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*desigualdade triangular*).

(e) $|z + w| \geq \big||z| - |w|\big|$

Através das operações de adição e multiplicação e pela definição de valor absoluto de um número complexo a Proposição 3 é demonstrada.

5.3. A FORMA POLAR

Consideremos um número complexo $z = x + yi \neq 0$. Seja θ_0 o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário. Veja a figura.



Como $\cos\theta_0 = x/|z|$ e $\operatorname{sen}\theta_0 = y/|z|$, temos que

$$z = |z|(\cos\theta_0 + i\operatorname{sen}\theta_0).$$

Assim, é sempre possível representar z na forma

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta),$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$. Uma representação como essa é chamada *representação polar* de z. Se $\theta \in \mathbb{R}$ satisfaz a relação dada, dizemos que θ é um *argumento* de z. Assim, θ_0 é um argumento de z. Entretanto, qualquer θ da forma $\theta_0 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também satisfaz a relação. Em particular, z possui infinitos argumentos. Por outro lado, se θ satisfaz a relação, então $\cos\theta = \cos\theta_0$ e $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta_0$, o que implica que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o conjunto $\arg z$ de todos os argumentos de z é dado por

$$\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Por exemplo,

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{-7\pi}{4}\right)$

são representações polares do número $1 + i$; note que $\arg(1 + i) = \{\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. O único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamado *argumento principal* de z e é denotado por $\operatorname{Arg} z$. Por exemplo

$$\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2},\ \ \operatorname{Arg}(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4}\quad e\ \operatorname{Arg} -2 = \pi.$$

A identidade $z = |z|(\cos\operatorname{Arg} z + i\operatorname{sen}\operatorname{Arg} z)$ é chamada *forma polar* de z.

5.4. A FÓRMULA DE BHASKARA NO CASO COMPLEXO

Para provarmos a fórmula de Bhaskara no caso complexo, vamos apresentar a noção de raiz quadrada de um número complexo não nulo. Diferentemente de um número real não nulo, todo número complexo não nulo possui *duas* raízes quadradas complexas distintas.

Dado um número complexo w e um número natural $n \geq 1$, dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma *raiz quadrada* de w se

$$z^2 = w.$$

Se $w = 0$, é claro que $z = 0$ é a única solução da equação $z^2 = w$. Logo, o número 0 possui uma única raiz quadrada que é o próprio 0. Veremos a seguir que se $w \neq 0$ então existem exatamente 2 soluções distintas da equação $z^2 = w$.

Teorema 1. *Todo número complexo não nulo w possui exatamente 2 raízes quadradas complexas distintas, a saber,*

$$\sqrt[2]{w}\left[\cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi}{2}\right)\right], \qquad (1)$$

onde $k = 0{,}1$.

A raiz quadrada de w obtida fazendo $k = 0$ em (1) é chamada a *raiz quadrada principal* de w. A notação $\sqrt[2]{w}$ é reservada para esta raiz. Note que esta notação é coerente com a notação $\sqrt[2]{|w|}$ que indica a única raiz real positiva de $|w|$. Portanto,

$$\sqrt[2]{|w|} = \sqrt[2]{w}\left[\cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{2}\right)\right].$$

O símbolo $\sqrt{w}$ também é usado em lugar de $\sqrt[2]{w}$. Fazendo $k = 1$ em (1), temos que

$$\cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(w) + 2.1.\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{2}\right)$$

e

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\operatorname{Arg}(w) + 2.1.\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{2} + \pi\right) = -\,\mathrm{sen}\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{2}\right).$$

Assim, obtemos que a outra raiz quadrada de w é

$$\sqrt[2]{|w|}\left[-\cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{2}\right)\right] = -\sqrt{w},$$

onde $\sqrt{w}$ denota a raiz principal de w.

Vamos provar que as soluções da equação quadrática

$$az^2 + bz + c = 0,$$

onde a, b, $c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, são dadas pela fórmula quadrática usual, isto é, por

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Demonstração: Usando a técnica de completar quadrados, temos que

$$\begin{aligned}
& az^2 + bz + c = 0 \\
& \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{c}{a} \\
& \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
& \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
& \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
& \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Como já mencionamos, o número complexo $b^2 - 4ac$ tem duas raízes quadradas complexas distintas. Na fórmula em (2), o sinal "$\pm$" indica as tais duas raízes: $+\sqrt{b^2 - 4ac}$ é a raiz quadrada principal de $b^2 - 4ac$ e $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ é a outra raiz quadrada.

Note que, neste caso, os mesmos passos utilizados na demonstração da fórmula proposta para alunos de 9º ano deverão ser utilizados para a demonstração no caso complexo para turmas de Ensino Médio. Após o desenvolvimento das operações usuais dos números complexos, os alunos poderão acompanhar e\ou desenvolver o raciocínio anterior.

6. CONCLUSÕES

Esperamos que, com todo o desenvolvimento do trabalho, outros professores utilizem em suas aulas procedimentos similares durante o processo ensino-aprendizagem, buscando levar cada vez mais a demonstração para o dia-a-dia dos alunos do Ensino Fundamental.

Pensamos que, com o apoio do contexto histórico em que as equações do segundo grau foram estudadas na Antiguidade, as aulas tornem-se mais dinâmicas e interativas. Assim, os alunos podem perceber que esse tópico, estudado no 9º ano do Ensino Fundamental, surgiu da necessidade do ser humano obter informações de forma mais rápida e precisa. Acreditamos também que as sugestões de atividades, conforme constam nos anexos II, III e IV, possam contribuir para a organização das aulas de outros professores de Matemática. É importante levar em consideração que tais atividades foram utilizadas e o desempenho dos alunos das turmas, com os quais o trabalho foi realizado, foi comparado ao desempenho de alunos de outras turmas, o que dá credibilidade ao método e o qualifica positivamente no meio em que foi trabalhado.

Finalizamos esta pesquisa certos de que, apesar de toda organização trabalhosa e dedicação necessária, o resultado conquistado no processo ensino-aprendizagem recompensa todo o tempo de planejamento do professor, onde percebe-se que, quanto mais tenta-se dar sentido à Matemática, mais conseguimos trabalhar a formação de cidadãos críticos e preparados para a vida em sociedade.

7. BIBLIOGRAFIA

[01] ABNT NBR 14724:2011.

[02] BALACHEFF, N. Preuve et demonstration en mathématiques au collège. Recherches em Didactique des Matémathiques, Grenoble, v. 3, n. 3, p. 261-304, 1982.

[03] BALACHEFF, N. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, Grenoble, n. 109, 2004.

[04] BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, n. 2, p. 147-176, 1987. BOERO, Paolo… et al. Challenging the traditional school approach to theorems: a

[05] BIANCHINI, Edwaldo. Matemática, 9° ano, Editora Moderna, 7ª edição, 2011

[06] BOURBAKI, N. *Élements d'Histoire des Mathématiques*. Paris: Hermann, 1969.

[07] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. PCN's, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

[08] DANTE, Luiz Roberto. Matemática, Projeto Teláris, 9° ano, Editora Ática, 1ª edição, 2013.

[09] FERNANDEZ, Cecília de Souza e BERNARDES JUNIOR, Nilson da Costa Bernardes. Introdução às Funções de uma Variável Complexa, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 4ª edição. 2016.

[10] FILHO, Edgard de Alencar. Iniciação à Lógica Matemática, Editora Nobel. 2002

[11] GOUVÊA, Filomena Aparecida Teixeira. Aprendendo e Ensinando Geometria com a demonstração: Uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental. PUC-SP, 1998.

[12] KATZ, V.J. *A History of Mathematics – an introduction*. New York: Harper Collins College Publishers, 1993.

[13] KNELLER, G.F.: A ciência como atividade humana. Rio de Janeiro: Zahar; São Paulo: Edusp, 1980.

[14] MACAÉ, Prefeitura Municipal. Secretaria Municipal de Educação do Município de Macaé. COC – Caderno de Orientação Curricular, 6° ao 9° ano. 2012.

[15] PEDROSO, Hermes Antônio. Uma breve história da equação do 2º grau. UNESP, REMat – Revista Eletrônica de Matemática, nº 2, 2010.

[16] RIO DE JANEIRO, Governo do Estado. Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro. Currículo Mínimo do Ensino Fundamental. 2012

[17] SOUZA, Joamir R e PATARO, Patrícia. Vontade de saber Matemática, 9º ano, Editora FTD, 2013.

8. ANEXOS

8.1. ANEXO I

PESQUISA COM PROFESSORES DAS REDES PÚBLICA E PARTICULAR

Nome: ____

Data: ______/_____/_______ Cidade: ______________________________________

As respostas ao **Questionário** abaixo têm como objetivo oferecer subsídios para estudos e pesquisa na área do ensino de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental.

FORMAÇÃO E EXPERIÊNCIA
( ) Apenas Ensino Médio Completo
( ) Ensino Superior Incompleto (Licenciatura em Matemática)
( ) Ensino Superior Completo (Licenciatura em Matemática)
( ) Ensino Superior Incompleto
(outra área. Qual? _________________________________)
( ) Ensino Superior Completo
(outra área. Qual? _________________________________)
( ) Especialização
( ) Mestrado
( ) Doutorado

Há quanto tempo leciona? ________________________________

FAIXA ETÁRIA
( ) 20 – 29
( ) 30 – 39
( ) 40 – 49
( ) 50 – 60

ESCOLAS EM QUE LECIONA (anos de escolaridade e especificar se é instituição pública ou privada)

____

____

____

____

QUESTIONÁRIO

01. Você conhece a proposta curricular da Rede em que trabalha?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

02. Você a utiliza?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

03. Você consegue cumprir com toda a proposta ao longo do ano letivo?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

04. Você utiliza livro didático nas suas aulas?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

05. Você participou da escolha do livro didático das escolas em que trabalha?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

06. Como você classifica os livros didáticos adotados e utilizados pelas escolas em que trabalha?
( ) ÓTIMOS ( ) BONS ( ) REGULARES ( ) RUINS

07. Os livros didáticos adotados pelas escolas em que trabalha apresentam as demonstrações dos principais teoremas abordados no 9º ano do Ensino Fundamental?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

08. As escolas em que trabalha oferecem suporte tecnológico para aulas diferenciadas, utilizando computadores e acesso à internet para trabalhar com softwares?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

09. Dados os 8 conteúdos abaixo, trabalhados no 9º ano do Ensino Fundamental, classifique-os em ordem de maior importância que deve ser dada durante o trabalho com os alunos desse segmento, ordenando-os de 01 a 08, onde 01 é considerado o mais importante de todos e 08 é considerado como aquele que se pode omitir, caso o tempo seja escasso ( ) Radicais( ) Equações do 2º grau ( ) Teorema de Tales ( ) Semelhança de Triângulos ( ) Funções
( ) Relações Métricas no Triângulo Retângulo ( ) Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo ( ) Áreas

10. Você costuma trabalhar os conteúdos listados no item anterior e suas respectivas demonstrações?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

11. Como você considera a recepção dos alunos quanto às aulas em que demonstrações são apresentadas?
( ) ÓTIMA ( ) BOA ( ) REGULAR ( ) RUIM

12. Você acha importante fazer a demonstração dos Teoremas tratados no 9º ano?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

13. Você já fez/faz a demonstração da fórmula de Báskara com alunos do 9º ano?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

14. Como foi a reação dos alunos durante essa demonstração?
( ) ÓTIMA ( ) BOA ( ) REGULAR ( ) RUIM ( ) NUNCA DEMONSTREI

15. Você considera mais importante a verificação da validade de uma afirmativa matemática através de vários exemplos do que através de uma demonstração?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) APENAS EM ALGUNS CASOS

16. Você acha POSSÍVEL preparar bem os alunos do 9º ano sem o uso das demonstrações?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) EM PARTE

8.2. ANEXO II

PREFEITURA MUNICIPAL DE MACAÉ
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO
COLÉGIO MUNICIPAL PROFESSORA ELZA IBRAHIM

Disciplina: Matemática Turma: __________ Aluno (a): _________________________________

Produtos Notáveis

Atividade 1 – Desenvolva os produtos notáveis a seguir.

a) $(x+3)^2$.
b) $(x-1)^2$.
c) $(x+1)^2$.
d) $(2x-1)^2$.
e) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2$.
f) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$.
g) $(a-2x)^2$.
h) $(b+2y)^2$.

Atividade 2 – Observando os trinômios abaixo identifique aqueles que representam um produto notável como os anteriores desenvolvidos e escreva-os como um produto notável.

a) x^2+3x-2.
b) x^2+4x+4.
c) x^2-6x+9.
d) $a^2-2ab+b$.
e) $4x^2-4x+1$.
f) $y^2-8x+16$.
g) $a^2+4ax+4x^2$.
h) $t^2+10t+25$.

Atividade 3 – Nas expressões a seguir acrescente, ou retire, o que for necessário para que sejam formados trinômios quadrados perfeitos.

a) x^2+2x.
b) x^2-4x+3.
c) x^2+6x.
d) $4a^2-12a$.
e) y^2-2y.
f) y^2+y.
g) x^2+8x+3.
h) $x^2-6x+10$.

8.3. ANEXO III

PREFEITURA MUNICIPAL DE MACAÉ
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO
COLÉGIO MUNICIPAL PROFESSORA ELZA IBRAHIM

Disciplina: Matemática Turma: __________ Aluno (a): _________________________________

Equações Completas do Segundo Grau

Atividade 1 – Em cada equação completa há um trinômio que pode ser reescrito como um quadrado perfeito. Identifique-o e resolva a equação.

a) $x^2 - 6x + 9 = 4.$
b) $x^2 - 4x + 4 = 1.$
c) $x^2 + 2x + 1 = 0.$
d) $x^2 + 4x + 4 = 2.$
e) $x^2 - 10x + 25 = 16.$
f) $x^2 + 8x + 16 = 1.$
g) $x^2 - 2x + 1 = 8.$
h) $x^2 + 14x + 49 = 9.$

Atividade 2 – Nos casos abaixo você precisará completar quadrados para então identificar trinômios que podem ser reescritos como quadrados perfeitos. Somente após isso conseguirá resolver as equações completas.

a) $x^2 + 2x - 2 = 0.$
b) $x^2 + 4x + 5 = 2.$
c) $x^2 - 6x = 9.$
d) $x^2 + 3x = 4.$
e) $y^2 - 8y + 10 = 3.$
f) $x^2 + 5x + 1 = 2.$
g) $t^2 + 10t = 11.$

Atividade 3 – Resolva as equações a seguir completando quadrados.

a) $x^2 - 10x + 25.$
b) $x^2 - x + 20 = 0.$
c) $x^2 - 3x - 4 = 0.$
d) $x^2 - 8x + 7 = 0.$
e) $x^2 - 4x - 5 = 0.$
f) $-x^2 + x + 12 = 0.$
g) $-x^2 + 6x - 5 = 0.$
h) $x^2 + 3x - 6 = -8.$
i) $x^2 + x - 7 = 5.$
j) $x^2 = x + 12.$

8.4. ANEXO IV

PREFEITURA MUNICIPAL DE MACAÉ
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO
COLÉGIO MUNICIPAL PROFESSORA ELZA IBRAHIM

Disciplina: Matemática Turma: __________ Aluno (a): _________________________________

Equações Completas do Segundo Grau e Fórmula de Báskara

Atividade 1 – Em cada equação completa a seguir complete os quadrados para encontrar suas raízes.

a) $6x^2 + x - 1 = 0.$
b) $2x^2 - 7x = 15.$
c) $4x^2 + 9 = 12x.$
d) $25x^2 = 20x - 4.$
e) $2x = 15 - x^2.$
f) $4x^2 - x + 1 = x + 3x^2.$
g) $10x^2 + 72x - 64 = 0.$
h) $5x^2 - 3x - 2 = 0.$
i) $9x^2 - 24x + 16 = 0.$
j) $3x^2 - 7x + 2 = 0.$

Atividade 2 – Nos casos abaixo utilize a fórmula de Báskara para resolver as equações completas e o método que achar mais adequado para resolver as equações incompletas.

1) $x^2 = 25.$
2) $x^2 - 16 = 0.$
3) $x^2 - 144 = 0.$
4) $2x^2 + 18 = 0.$
5) $x^2 - 3x = 0.$
6) $4x^2 = -16x.$
7) $x^2 - 5x = -4x^2 - 2x.$
8) $x^2 + \frac{5}{2}x = 0.$
9) $3x^2 - 7 = 20.$
10) $-x^2 - 49 = 0.$
11) $4x^2 - 57 = -21.$
12) $3x^2 + 15 = 123.$
13) $\frac{2}{3}x^2 + 22 = 0.$
14) $5x^2 + 32{,}5 = 0.$
15) $0{,}5x^2 + 10x = 0.$
16) $2x^2 - 12x = x^2 + 5x.$
17) $x^2 - 16x + 64 = 0.$
18) $x^2 - 12x + 36 = 0.$
19) $x^2 + 6x + 9 = 4.$
20) $x^2 + 18x + 81 = 36.$
21) $x^2 + 14x + 49 = 16.$
22) $x^2 + 8x + 12 = 0.$
23) $x^2 + 6x - 16 = 0.$
24) $x^2 + 12x - 28 = 0.$
25) $\frac{3}{4}x^2 - 15x = 0.$
26) $x^2 + 10x + 21 = 0.$
27) $x^2 + 2x - 8 = 7.$
28) $x^2 + 20x + 105 = 6.$
29) $x^2 - 7x + 6 = 0.$
30) $\frac{1}{2}x^2 - 32 = 0.$
31) $x^2 + 3x - 18 = 0.$
32) $3x^2 - 5x + 2 = 0.$
33) $2x^2 - 6x - 20 = 0.$
34) $7x^2 - 21x = 0.$
35) $9x^2 - 324 = 0.$
36) $3x^2 - 5x = -3.$
37) $2x^2 + x + 12 = -4.$
38) $-3x^2 - 12 = -12x.$
39) $x^2 - 8x + 16 = 0.$
40) $4x^2 - 6x = 0.$