Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Coordenação do PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VLADIMIR THIENGO

ENSINO DE EXPONENCIAIS E LOGARITMOS NO ENSINO MÉDIO VIA APLICAÇÕES

Orientadora:

Miriam del Milagro Abdón

NITERÓI

MARÇO/2013

Vladimir Thiengo

Ensino de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio via Aplicações

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora:
Miriam Abdón

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Março / 2013

T434e

Thiengo, Vladimir

Ensino de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio via Aplicações / Vladimir Thiengo. – Niterói: [s.n.], 2013.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Fluminense, 2013.

1. Exponenciais. 2. Logaritmos. 3. Ensino Médio. 4. Aplicações.

CDD:510

Trabalho de conclusão de curso sob o título *"Ensino de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio via Aplicações"*, defendida por Vladimir Thiengo e aprovada em 13 de Março de 2013, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Miriam del Milagro Abdón
Doutora em Matemática - UFF
Orientadora

Victor Augusto Giraldo
Doutor em Tecnologias Computacionais no Ensino de Matemática - UFRJ

Lhaylla dos Santos Crissaff
Doutora em Matemática - UFF

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática - UFF

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta"(Carl Friedrich Gauss)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido ir além do que eu poderia um dia sonhar.

Aos meus pais Darcy e Iracema pela minha criação correta, às vezes incompreensível por mim quando ainda criança, que permitiu eu me tornar o homem que sou hoje.

À minha amada esposa Rosangela pela paciência, compreensão e carinho que teve comigo não só nesses anos de Mestrado, mas como em todos os outros que se passaram e os muitos que ainda virão.

Aos meus amigos e colegas de curso, os quais tive o privilégio de ter convivido ao longo desses dois anos, e acredito terem me provado de uma vez por todas que o coletivo faz a força!

Ao competente corpo docente do programa PROFMAT da UFF e, em particular, à Profª Dra. Miriam Abdón, pela compreensão e apoio ao abraçar a ideia deste trabalho comigo; ao Prof. Dr. Humberto Bortolossi, por ter nos disponibilizado as ferramentas de elaboração do presente trabalho; e à Profª. Dra. Lhaylla Crissaff, por todo apoio nessa nossa caminhada.

À grande amiga Profª Msc. Ana Léa Cruz pela revisão gramatical e ortográfica do presente texto.

Agradeço também aos meus alunos... A todos que eu encontrei ao longo desta estrada. Foi pensando neles que esse projeto foi iniciado.

"Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura." (Hermann Hankel)

Resumo

O ensino e aprendizado de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio é caracterizado, por grande parte dos professores, como um dos temas mais exploráveis da Matemática. Porém, os referidos assuntos são considerados de difícil compreensão por parte dos alunos. Ora, como pode um assunto com tantas aplicações em outras áreas do conhecimento, não “atrair”a atenção dos alunos?

Acreditamos que o ensino desses temas somente através de conceituações, teoremas e propriedades operatórias fica empobrecido. Por vezes, isso se dá pela necessidade dos professores em acelerar o conteúdo para que sejam cumpridos os cronogramas escolares. A nosso ver, este é um grave problema a ser resolvido, mas não é o objeto de nosso estudo.

Apresentamos no presente trabalho uma proposta de ensino de Exponenciais e Logaritmos com suas definições, teoremas e propriedades, mas com um foco de aplicabilidade dos conceitos adquiridos nas diversas áreas do conhecimento, tais como as Ciências Naturais.

Abstract

The teaching and learning of Exponentials and Logarithms in High School is characterized by many teachers as one of the most explorable themes of Mathematics. However, such matters are considered difficult to be understood by students. Therefore, how can a subject with so many applications in other fields of knowledge, not "attract"students attention?

We believe that the teaching of these subjects only by concepts, theorems and operative properties gets depleted. Sometimes this is due to teacher's need to accelerate the teathing of to acomplished the lession plans content. In our view, this is a serious problem to be solved, but not the object of our study.

We present in this paper a proposal of teaching Exponentials and Logarithms with their definitions, theorems and properties, but with a focus on the applicability of the concepts acquired in various areas of knowledge, such as the Natural Sciences.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

1.1 Apresentação do autor do presente trabalho

Meu nome é Vladimir Thiengo, tenho 37 anos, sou professor de Matemática no Ensino Básico das redes pública e particular no município de Niterói, no Estado do Rio de Janeiro, lecionando em turmas de Ensino Médio desde 2007. Sou licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense desde o ano de 2005.

Em grande parte, o meu Ensino Básico foi em escolas da Rede Pública de Ensino (desde a antiga 5ª série do 1º grau, atual 6º ano do Ensino Fundamental) e já naquela época tinha a noção de que a qualidade do ensino de Matemática nas escolas públicas era muito deficiente. Professores com jornadas duplas e até triplas se deparavam com turmas grandes e muito heterogêneas, dificultando ainda mais o seu trabalho docente. O resultado deste processo, ao longo dos anos, podemos constatar nos dias atuais. Vemos o ensino de Matemática ser tratado de modo secundário por grande parte das escolas da rede.

Na minha carreira docente, isto sempre me incomodou bastante. Sendo assim, a minha vontade de lutar contra isso pode ser considerada como um instinto. Eu acredito que poderemos voltar a ter um ensino de qualidade nos centros escolares, principalmente o Ensino de Matemática.

Encontrei neste grande projeto de Mestrado Profissional do ProfMat uma oportunidade de melhor qualificação dos docentes em todo o país. Acreditei e abracei este projeto com muita vontade de aprender mais e poder ensinar melhor. Hoje, estou colhendo os frutos destes dois anos de aprendizado, no convívio com excelentes professores da Universidade Federal Fluminense - UFF e com excelentes colegas de turma que pensam da mesma forma - querer construir um futuro promissor do Ensino de Matemática.

Espero que, com esse trabalho, eu possa de alguma forma ajudar meus colegas em todo país. Que eu possa servir de inspiração para que outros professores invistam em sua formação e se sintam capazes de transformar a atual realidade do ensino em uma página virada.

1.2 Considerações Iniciais

Desde os primórdios da civilização humana, a Matemática vem se desenvolvendo como uma importante ferramenta utilizada pelo homem. Desde os primeiros problemas de contagem simples de objetos até o desenvolvimento de teorias refinadas e de grande avanço tecnológico, a Matemática se torna, a cada dia, mais indispensável para o nosso desenvolvimento.

No entanto, o ensino da matemática nos centros escolares tornou-se, nas últimas décadas, um pesadelo para a maioria das pessoas. Seja por falta de compreensão, seja por alguma deficiência no processo de ensino-aprendizagem nas séries iniciais, seja por vários outros fatores, não é proveitoso para os alunos. Muitos se perguntam, às vezes: "Para que serve a Matemática?", "Onde eu vou usar isto na minha vida?". A quase totalidade dos discentes (e também grande parte dos docentes), ao ensinar um conteúdo específico da disciplina, não vê utilidade naquilo que estão aprendendo (ou ensinando). Alguns dos conceitos matemáticos com grande gama de aplicações em problemas práticos são os de **Exponenciais** e **Logaritmos** e, curiosamente, são conceitos que apresentam um baixo rendimento por parte dos alunos.

Segundo os **Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN´s** (1998) [1] e os **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCN+EM** (2002) [2], o ensino de Matemática deve estar voltado para a formação do aluno como cidadão pleno, não se restringindo apenas a um mero aprendizado de resoluções de equações e coisas do gênero. Os documentos propõem um aprendizado que seja efetivamente útil à vida e ao trabalho das pessoas, de forma que as informações, os conhecimentos e as competências e habilidades desenvolvidas por eles sirvam para perceber, interpretar e atuar em situações da vida cotidiana.

Propõem ainda que os objetos de ensino devam desenvolver conhecimentos práticos e contextualizados, de forma combinada, além de desenvolver também conhecimentos mais amplos e abstratos. Desta forma, busca-se suprir as necessidades mais imediatas da vida contemporânea e também fornecer uma cultura geral, além de uma visão de mundo mais integrada. Nesse sentido, o aprendizado de matemática deve buscar algo além de sua formação técnica, deve ser capaz de auxiliar os cidadãos a interpretar o mundo a sua volta em diferentes meios (social, profissional e natural).

Cabe ainda ressaltar que os **PCN+EM** contesta o Ensino da Matemática (na verdade, o ensino como um todo) em tópicos estanques e não integrados, propondo uma ação articulada entre os temas ensinados, de forma que o aluno perceba a Matemática como uma ferramenta ampla e que auxilia no desenvolvimento de outras áreas do conhecimento.

Será, então, que inserindo a matemática em um contexto de aplicação em problemas práticos o processo de ensino-aprendizagem será mais bem conduzido? A aplicação da teoria em situações-problema bastaria para resolvermos este problema? Sabemos que só isso não basta. Há de haver um correto embasamento teórico da disciplina, das proposições e dos teoremas, do uso correto das equações e das variáveis do problema.

O tema do presente trabalho foi escolhido por ser um tos tópicos matemáticos com maior gama de aplicações a problemas naturais. Talvez outros tópicos não sejam tão ricos de aplicações práticas. Porém, o professor deve, ao máximo, saber explorar os conteúdos que permitem mais aplicações. O padrão atual do vestibular, adotando-se o **Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM** exige que o aluno tenha um conhecimento geral da Matemática e saiba aplicar tais conteúdos em problemas práticos, exigindo-se tanto um bom conhecimento matemático quanto uma boa interpretação do texto do problema, dentro da proposta dos **PCN´s** e **PCN+EM**.

A proposta de nosso trabalho é discutir o processo de ensino de exponenciais e logaritmos através de conceituações iniciais bem trabalhadas e aplicações do conteúdo ensinado nas diferentes áreas de conhecimento - Ciências Humanas (aspectos geográficos) e Ciências Naturais (Física, Química, Biologia e Astronomia).

Inicialmente, no **Capítulo 2**, vamos abordar alguns aspectos históricos da teoria de exponenciais e logaritmos no desenvolvimento da matemática nos séculos XVI e XVII. Em seguida, no **Capítulo 3**, faremos também uma exposição das teorias necessárias para um bom conhecimento do conteúdo por parte do aluno. No **Capítulo 4**, apresentaremos aplicações práticas do conteúdo exposto nas áreas de conhecimento, anteriormente citadas. Veremos como podemos aplicar os conceitos de exponenciais e logaritmos na resolução de variados problemas de ordem natural.

2 Aspectos Históricos

Se desejarmos estabelecer um processo de construção do conhecimento baseado na discussão, na argumentação, na contra argumentação e na criação de conjecturas, para somente depois estabelecermos a definição formal, então cremos ser importante relembrarmos fatos históricos que nortearam e motivaram o estudo de logaritmos.

Pode parecer surpreendente, mas realizar operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação já foi algo extremamente dispendioso há tempos, pois não se podia contar com calculadoras. Isso se deu, por exemplo, no final do século XVI, quando do desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, que primaram pelos extensos e trabalhosos cálculos aritméticos. Naquela época, determinar um método que permitisse realizar as operações aritméticas com mais agilidade era um problema essencial.

Neste sentido, vários estudiosos da época se debruçaram sobre este ideal e, com êxito, destacaram-se dois deles: o teólogo e matemático escocês **John Napier** (1550-1617) e o matemático e inventor suíço **Jost Bürgi** (1552-1632) que, em estudos independentes, publicaram tabelas logarítmicas. Essas tabelas ficaram conhecidas como ***"Tábuas de Logaritmos"***, que foram grandes descobertas científicas da época.

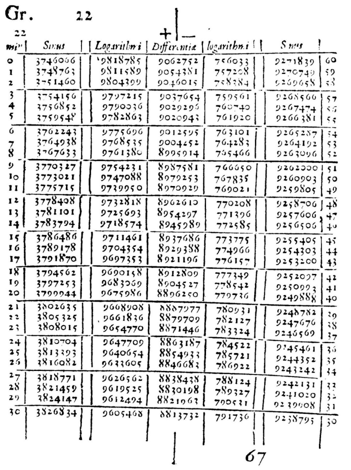
(a) John Napier

(b) Jost Bürgi

Figura 2.1: Os "Descobridores"dos Logaritmos

Como a influência de John Napier no desenvolvimento dos logaritmos (*do grego logos=razão e arithmos=número*) foi mais notória que a de Jost Bürgi, ele tornou-se mais conhecido. Napier dedicou seus estudos aos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados no livro ***"Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio"***, em 1614, que significa ***"Uma Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos"***.

(a) Capa da publicação de Napier



Gr. 22

min	Sinus	Logarithmi	Differentia	logarithmi	Sinus	
0	3746066	9818785	9062752	756033	9271839	60
1	3748763	9811589	9054381	757208	9270749	59
2	3751460	9804399	9046015	758384	9269658	58
3	3754156	9797215	9037654	759561	9268566	57
4	3756852	9790036	9029296	760740	9267474	56
5	3759548	9782863	9020943	761920	9266381	55
6	3762243	9775696	9012595	763101	9265287	54
7	3764938	9768535	9004252	764283	9264192	53
8	3767633	9761380	8995914	765466	9263096	52
9	3770327	9754231	8987581	766650	9262000	51
10	3773021	9747088	8979253	767835	9260903	50
11	3775715	9739950	8970929	769021	9259805	49
12	3778408	9732818	8962610	770208	9258706	48
13	3781101	9725693	8954297	771396	9257606	47
14	3783794	9718574	8945989	772585	9256506	46
15	3786486	9711461	8937686	773775	9255405	45
16	3789178	9704354	8929388	774966	9254303	44
17	3791870	9697353	8921196	776157	9253200	43
18	3794562	9690158	8912809	777349	9252097	42
19	3797253	9683069	8904527	778542	9250993	41
20	3799944	9675986	8896250	779736	9249888	40
21	3802635	9668908	8887977	780931	9248782	39
22	3805325	9661836	8879709	782127	9247676	38
23	3808015	9654770	8871446	783324	9246569	37
24	3810704	9647709	8863187	784522	9245461	36
25	3813393	9640654	8854933	785721	9244352	35
26	3816082	9633605	8846683	786922	9243242	34
27	3818771	9626562	8838438	788124	9242131	33
28	3821459	9619525	8830198	789327	9241020	32
29	3824147	9612494	8821963	790531	9239908	31
30	3826834	9605468	8813732	791736	9238795	30

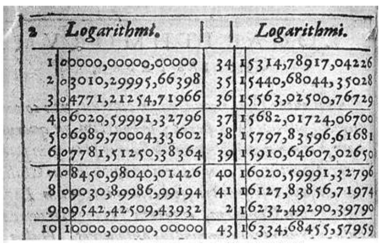
67

(b) Exemplo de uma *Tábua Logarítmica* de Napier

Figura 2.2: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*

Após a publicação de sua primeira tábua de logaritmos, Napier, juntamente com o matemático inglês **Henry Briggs** (1561-1631), apresentou uma nova tábua, proporcionando melhor interpretação, contendo os chamados **Logaritmos Decimais**. Essa tábua foi publicada por Brigs em ***Logarithmorum Chilias prima*** em 1617 [3].

(a) Henry Briggs



	Logarithmi.		Logarithmi.
1	00000,00000,00000	34	15314,78917,04226
2	03010,29995,66398	35	15440,68044,35028
3	04771,21254,71966	36	15563,02500,76729
4	06020,59991,32796	37	15682,01724,06700
5	06989,70004,33602	38	15797,83596,61681
6	07781,51250,38364	39	15910,64607,02650
7	08450,98040,01426	40	16020,59991,32796
8	09030,89986,99194	41	16127,83856,71974
9	09542,42509,43932	2	16232,49290,39790
10	10000,00000,00000	43	16334,68455,57959

(b) Exemplo de uma *Tábua Logarítmica* de base decimal

Figura 2.3: Os Logaritmos Decimais de H. Briggs

Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números, em que a cada número da coluna à esquerda corresponde um número à direita, que denominamos o seu **logaritmo**. Hoje, tal correspondência recebe o nome de **função**; mas convém ressaltar que, cronologicamente, a ideia de logaritmo antecede ao conceito matemático de função. É interessante que, com essa tábua, podemos multiplicar dois números utilizando-nos da soma de outros dois. Para isto, basta somarmos seus logaritmos e, com o resultado, vamos à tabela e procuramos na coluna da direita esse resultado e, a seguir, olhamos na coluna da esquerda o valor lá impresso. Esse valor é o produto procurado. Isso se deve às propriedades de logaritmos que veremos mais adiante.

TABELA DE LOGARITMOS DECIMAIS

nº	log	nº	log
1	0	50	1,69897
2	0,30103	51	1,70757
3	0,477121	52	1,716003
4	0,60206	53	1,724276
5	0,69897	54	1,732394
6	0,778151	55	1,740363
7	0,845098	56	1,748188
8	0,90309	57	1,755875
9	0,954243	58	1,763428
10	1	59	1,770852
11	1,041393	60	1,778151
12	1,079181	61	1,78533
13	1,113943	62	1,792392
14	1,146128	63	1,799341
15	1,176091	64	1,80618
16	1,20412	65	1,812913

17	1,230449	66	1,819544
18	1,255273	67	1,826075
19	1,278754	68	1,832509
20	1,30103	69	1,838849
21	1,322219	70	1,845098
22	1,342423	71	1,851258
23	1,361728	72	1,857332
24	1,380211	73	1,863323
25	1,39794	74	1,869232
26	1,414973	75	1,875061
27	1,431364	76	1,880814
28	1,447158	77	1,886491
29	1,462398	78	1,892095
30	1,477121	79	1,897627
31	1,491362	80	1,90309
32	1,50515	81	1,908485
33	1,518514	82	1,913814
34	1,531479	83	1,919078

35	1,544068	84	1,924279
36	1,556303	85	1,929419
37	1,568202	86	1,934498
38	1,579784	87	1,939519
39	1,591065	88	1,944483
40	1,60206	89	1,94939
41	1,612784	90	1,954243
42	1,623249	91	1,959041
43	1,633468	92	1,963788
44	1,643453	93	1,968483
45	1,653213	94	1,973128
46	1,662758	95	1,977724
47	1,672098	96	1,982271
48	1,681241	97	1,986772
49	1,690196	98	1,991226
		99	1,995635

Figura 2.4: Tábua de Logaritmos Atual

A primeira constatação da possibilidade de se reduzir uma multiplicação a uma adição ocorreu nos estudos de ***Michael Stifel***(1487-1567), em sua publicação ***Arithmetica Integra*** de 1544, mediante a comparação dos termos de uma progressão aritmética (PA) com os de uma progressão geométrica (PG). Vejamos o exemplo seguinte em que na primeira linha temos uma PA de razão 1 e, na segunda, uma PG de razão 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Se pretendermos saber o resultado da multiplicação de dois termos da PG, digamos 16 e 128, basta somarmos os termos a eles correspondentes 4 e 7 na PA, somar esses resultados $(4+7=11)$ e tomarmos o termo 2048 que corresponde ao resultado dessa soma. Assim, $16 \times 128 = 2048$. Aqui, estamos apenas utilizando a conhecida propriedade de potência de mesma base (diga-se de passagem, historicamente, os logaritmos antecederam a notação exponencial) que, em notação já bem propagada na atualidade, estabelece:

$$16 \times 128 = 2^4 \times 2^7 = 2^{4+7} = 2^{11} = 2048.$$

Seguindo por esse caminho, podemos construir uma tábua de logaritmos de *base* 2, onde na coluna à esquerda listamos as potências de 2 e, à direita, os expoentes correspondentes.

2^n	n
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
$\vdots$	$\vdots$

O fato dessa tábua só permitir calcular produtos de números da forma 2^n, com **n** um número inteiro e positivo a torna insuficiente para vários cálculos, ainda que troquemos a base 2 por outra base **b**, com **b** sendo um número inteiro positivo arbitrário.

É claro que para nós, hoje em dia, fazer o produto de 128 por 16 é extremamente simples, uma vez que já temos conhecimento de um "algoritmo" para a multiplicação de dois números. Mas em meados do Século XVI este método ainda não existia! Podemos, então, ter uma ideia da grandiosidade da ferramenta dos logaritmos nos cálculos de produtos entre dois números.

O desenvolvimento da notação exponencial, da propriedade fundamental da potência de expoentes racionais e da constatação de que todo número real positivo poderia ser arbitrariamente aproximado por potências (com expoentes racionais) de um dado número positivo diferente de 1, possibilitou a elaboração de tábuas de logaritmos mais satisfatórias, que permitiriam cálculos mais elaborados.

3 Conceituações Teóricas

Em nosso estudo, vamos examinar as descrições, definições, propriedades, gráficos e, em especial, a relação de inversibilidade que existe entre as funções exponenciais e logarítmicas. Vamos ver, também, como esses tipos de funções podem modelar e resolver diversos problemas em várias áreas do conhecimento.

Como pré-requisitos de uma boa compreensão da abordagem deste capítulo, exige-se que o leitor saiba lidar com potenciações e radiciações de expoentes ou radicais racionais. Neste ponto, faremos uma breve revisão de potenciação e radiciação, dando significados para algumas regras que acabam por muitas vezes sendo "decoradas" pelos professores e alunos do ensino básico.

3.1 Potências de Expoente Racional

Não são raros os casos em que alunos ainda no Ensino Fundamental, ao se depararem com as regras de potenciações e radiciações, acabam encontrando muita dificuldade na assimilação das inúmeras regras que lhes são ensinadas. A pouca maturidade dos mesmos, aliada à falta de cuidado de alguns professores, fazem com que o aprendizado destas ferramentas se torne bastante prejudicado.

Por estes motivos, é de extrema importância que esses pontos sejam discutidos no Ensino Médio, como uma preparação para uma boa compreensão da Teoria de Exponenciais. Neste ponto, os alunos já possuem uma certa maturidade matemática para a compreensão de demonstrações simples e consequências de uma definição dada.

Sendo a um número real positivo, a potência de base a e expoente n, denotada por a^n, com $n \in \mathbb{N}$, é definida como o produto de n fatores iguais a a, ou seja,

$$a^n = \begin{cases} a^1 = a; \text{ se } n = 1 \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{n parcelas}}; \; n \geq 2. \end{cases}$$

Algumas propriedades de potenciação decorrem de forma quase direta dessa definição. A primeira delas é uma espécie de *regra fundamental* de potenciações, dada por:

$$a^n \times a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{\text{n parcelas}} \times \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{\text{m parcelas}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{\text{n+m parcelas}} = a^{n+m}.$$

Essa regra é conhecida por *produto de potências de mesma base*, que se desenvolve mantendo a base e somando-se os expoentes.

Uma segunda propriedade pode ser obtida como decorrência da regra fundamental acima, que nos mostra como lidar com potências elevadas a outras potências:

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{\text{n parcelas}} \times \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{\text{n parcelas}} \times \cdots \times \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{\text{n parcelas}}}_{\text{m parcelas}} = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{\text{n.m parcelas}} = a^{n \cdot m}.$$

Vamos, agora, procurar dar um significado para potências da forma a^n, com n sendo um número inteiro, ou seja, agora o valor da potência n pode ser zero ou um número negativo.

Sendo $n = 0$, temos que $a^0 = 1$ por definição. O que podemos fazer, aqui, é dar uma justificativa para esta definição. Sendo uma definição, não caberia apresentar uma demonstração para este fato.

Temos que: $a = a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a^1 = a^0 \cdot a \Rightarrow a = a^0 \cdot a$.

Como a é real positivo, podemos dividir essa última equação por a. Daí, segue-se que:

$$\frac{a}{a} = \frac{a^0 \cdot a}{a} \Rightarrow 1 = a^0 \cdot 1 \Rightarrow a^0 = 1.$$

Sendo n um natural positivo, segue que $-n$ é um número inteiro negativo. Podemos, então, verificar o resultado de uma potência com expoente negativo:

$$a^0 = a^{-n+n} \Rightarrow 1 = a^{-n} \cdot a^n \Rightarrow \frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

Conseguimos, portanto, criar a estrutura de potenciações de expoentes inteiros quaisquer, com suas quatro primeiras propriedades básicas. O próximo passo seria conseguir uma interpretação para potências de expoentes racionais, ou seja, potências da forma $n = \dfrac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Partindo da segunda propriedade e do fato de que $n = \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow n \cdot q = p$, temos:

$$(a^n)^q = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{\text{q parcelas}} = a^{n \cdot q} = a^p.$$

Daí, a^n é o número real positivo, cuja q-ésima potência é igual a a^p. Pela definição de radiciações, a^n deve ser igual a raiz q-ésima de a^p, ou seja,

$$a^n = \sqrt[q]{a^p}.$$

Definimos a^n para $n \in \mathbb{Q}$. Faltaria definir as potências da forma a^x, para $x \in \mathbb{R}$. Usando que, podemos aproximar x por números racionais tão próximos quanto queiramos, podemos tentar definir a^x usando tais aproximações.

O objetivo do presente trabalho é apresentar a teoria básica e aplicações das funções exponenciais e logarítmicas. Na definição de funções exponenciais, procuraremos dar uma ideia básica do que pode acontecer com potências de expoentes reais (racionais e não racionais).

Esperamos que, com este pequeno capítulo introdutório de conceituação de potências com expoentes racionais, o leitor possa acompanhar, sem maiores problemas, os conceitos e definições que se seguem.

3.2 Exponenciais

Suponha uma cultura de bactérias, com a característica de que a cada minuto, cada microrganismo gere outro microrganismo, ou seja, a cada minuto, uma bactéria se multiplica por dois. Podemos descrever o número de bactérias nessa cultura em função do tempo (em minutos). Para isso, observe a tabela abaixo, que nos dá o número de bactérias nos primeiros cinco minutos:

tempo (minutos)	número de bactérias
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Observe que o número de bactérias, a cada minuto, são as potências naturais de 2. Sendo assim, é natural que se pense que para cada t, o número B de bactérias neste instante seja igual a $B = 2^t$. Essa função é um exemplo de um grupo de funções, denominadas **Funções Exponenciais**.

Esse simples exemplo introdutório, motiva-nos a criar uma definição para Funções Exponenciais, das quais trataremos mais detalhadamente ao longo do texto.

3.2.1 Definição: Funções Exponenciais

Seja a um número real maior do que 0 e diferente de 1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ denomina-se **Função Exponencial de Base a**.

Com relação ao exemplo inicial apresentado, ilustramos abaixo uma tabela com outros valores da função, bem como um gráfico que ilustra o crescimento do número de bactérias. Ainda que não possamos ter valores negativos de t, vamos aqui considerar que t pode assumir qualquer valor inteiro entre -3 e 3, inclusive.

x	$f(x) = 2^x$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

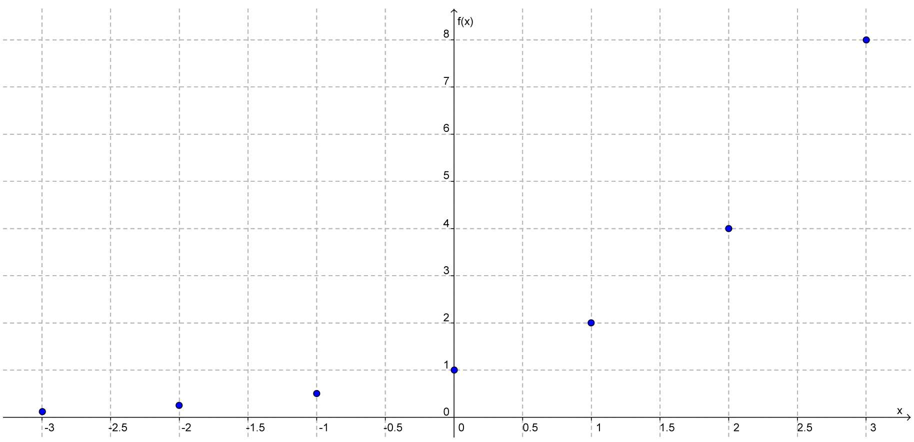


Figura 3.1: Gráfico discreto da função $f(x) = 2^x$

Podemos também trabalhar com potências x racionais e irracionais, ou seja, com x podendo ser qualquer número real. Isso nos dará uma continuidade (curva contínua) nos gráficos das funções exponenciais. Veja, por exemplo, o gráfico da função $f(x) = 3^x$, para valores reais de $x \in [-2, 2]$.

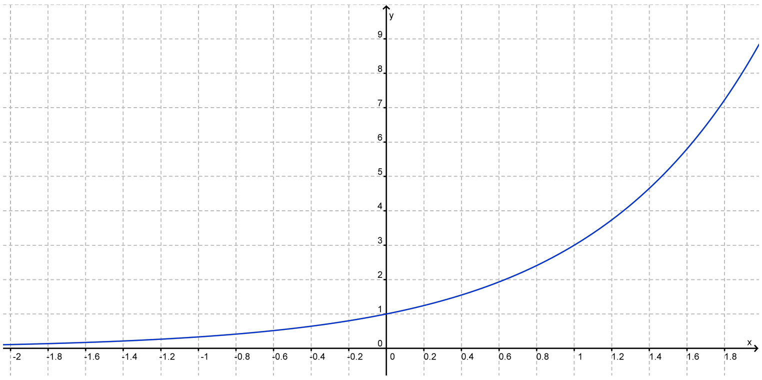


Figura 3.2: Gráfico da função $f(x) = 3^x$, com $x \in [-2, 2]$.

Será que toda função exponencial caracteriza problemas de crescimento? Podemos ter uma situação de decrescimento exponencial? Imagine a seguinte situação:

"Meia vida de um medicamento é o tempo que se leva, aproximadamente, para que o efeito desta substância no organismo se reduza à metade do efeito do instante inicial. A substância PARACETAMOL tem tempo de meia vida aproximado de duas horas. Uma pessoa ingere um comprimido com 1000mg desta substância, que atinge a corrente sanguínea com um pico de 20 mg/litro, que ocorre entre trinta minutos a duas horas após a ingestão." (http://www.qmc.ufsc.br/organica/exp7/paracetamol.html)

Vamos considerar que o instante zero seja quando o nível da substância no organismo atinge o seu "pico" (20 mg/litro). Vamos ver uma tabela e o aspecto gráfico do nível de miligramas por litro de sangue ao passar do tempo, até 10 horas após o nível de pico:

instante (horas)	nível (mg/litro)
0	20
2	10
4	5
6	$2,5$
8	$1,25$
10	$0,625$

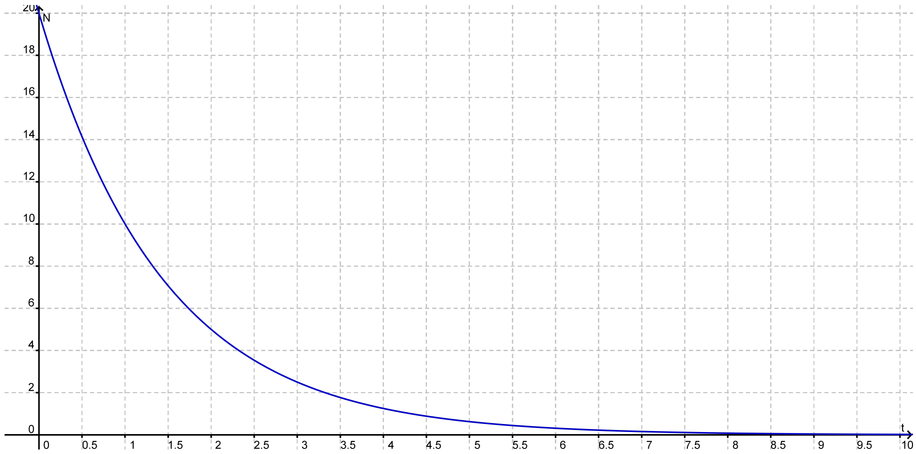


Figura 3.3: Decaimento do nível da substância PARACETAMOL no organismo

Podemos notar que há um **decrescimento exponencial** do nível de Paracetamol no organismo do paciente de acordo com o tempo. Portanto, as funções exponenciais também podem modelar situações de decrescimento.

De forma geral, dada a função $f(x) = a^x$, temos que:

$$\begin{cases} a > 1 \rightarrow \textbf{Função Exponencial Crescente} \\ 0 < a < 1 \rightarrow \textbf{Função Exponencial Decrescente} \end{cases}$$

Observa-se, também, que as funções exponenciais são **injetoras**, ou seja, se $f(x_1) = f(x_2)$, então temos necessariamente que $x_1 = x_2$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Daí, dados dois números reais quaisquer x_1 e x_2, temos que:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Essa observação é muito útil na resolução de algumas equações exponenciais.

No presente texto, não iremos abordar as teorias das Equações Exponenciais de forma detalhada. Para as resoluções dos problemas propostos ao final de nosso trabalho, utilizaremos equações simples (onde podemos igualar bases em ambos os lados da equação) e as definições e propriedades operatórias dos Logaritmos. O leitor que quiser mais detalhes a respeito das Equações Exponenciais, pode consultar as referências [6] e [7].

Podemos generalizar os conceitos vistos até então para funções da forma $f(x) = b \cdot a^x$, com b um número real positivo e não nulo. Essas funções denominam-se **Funções do Tipo Exponencial**. Note que, para $x = 0$, temos que $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$. Daí, a interseção do gráfico desse tipo de função com o eixo y se dá no ponto $(0, b)$. Veja abaixo, por exemplo, o gráfico da função $f(x) = 3 \cdot 2^x$, com $x \in \mathbb{R}$.

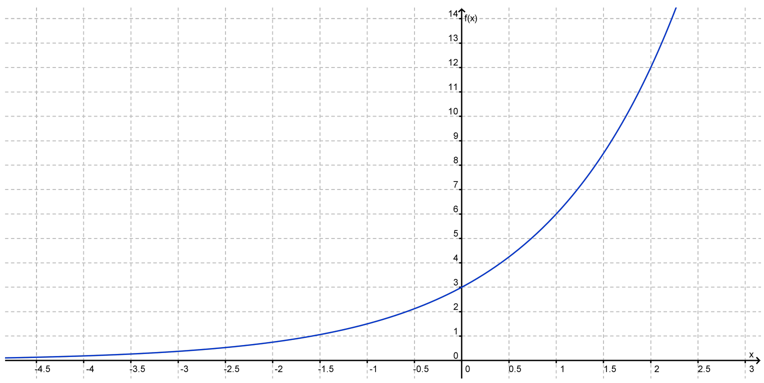


Figura 3.4: Gráfico da função $f(x) = 3 \cdot 2^x$

Uma função que ocorre frequentemente em problemas de Matemática Financeira e no campo das Ciências Biológicas é $f(x) = e^x$, em que e é uma constante irracional (aproximadamente 2,71828...). Funções desse tipo modelam situações de **crescimento ou decrescimento contínuo**. O conceito de continuidade é um dos principais tópicos nos cursos de Cálculo no Ensino Superior.

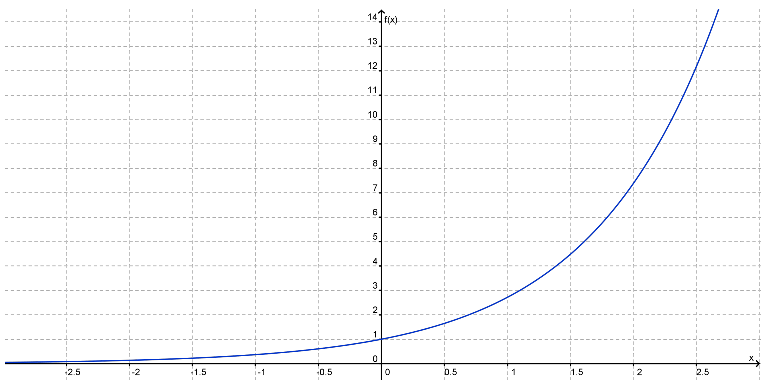


Figura 3.5: Gráfico da função $f(x) = e^x$

Usando limites, temos que:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Matemáticos e cientistas utilizam usualmente em diversos cálculos funções do tipo exponencial da forma $f(x) = k \cdot e^{\alpha \cdot x}$, pois essa expressão exibe claramente o valor inicial da função $f(0) = k$ e também o coeficiente α está relacionado com a taxa de crescimento da função f.

Vamos fazer, aqui, uma breve justificativa matemática de um modelo de crescimento contínuo.

Sabe-se, da Matemática Financeira, que a capitalização C de um montante M após um acréscimo de i por cento é dado por $M = C \cdot (1 + i)$, depois de um determinado período. Suponhamos que esse período seja de um ano. Capitalizaremos esse montante de uma outra forma:

faremos uma primeira aplicação de 6 meses e, após, reinvestiremos esse montante por mais 6 meses. Sendo assim, a equação que nos dará o montante acumulado após as duas capitalizações é $M = C \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^2$. Observe que $\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 > (1+i)$. Daí, a capitalização durante dois semestres consecutivos é maior do que a capitalização anual direta.

Podemos, também, "quebrar" essas capitalizações em intervalos de tempos menores - por exemplo, bimestral $\left(M = C \cdot \left(1+\frac{i}{6}\right)^6\right)$ ou mensalmente $\left(M = C \cdot \left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}\right)$. Tomando o número de partições cada vez maiores, fazendo tender a infinitas partições, temos que:

$$M = \lim_{t\to\infty}\left[C \cdot \left(1+\frac{i}{t}\right)^t\right] = C \cdot e^i.$$

É importante observar que apesar de a sequência $\left(1+\frac{i}{t}\right)^t$ ser crescente, ela não é ilimitada, já que seu limite no infinito tende a e^i.

O mesmo raciocínio do exemplo anterior é válido para aplicações da forma $M = C \cdot (1+i\cdot t)$. A equação final do crescimento contínuo desse modelo será:

$$M = \lim_{n\to\infty}\left[C \cdot \left(1+\frac{i\cdot t}{n}\right)^n\right] = C \cdot e^{i\cdot t}.$$

Além da Matemática Financeira, outras principais aplicações das funções exponenciais de base e ocorrem em:

(i) Crescimentos populacionais (de insetos, por exemplo), em que o número de indivíduos varia com o tempo de acordo com a função

$$P(t) = P_0 \cdot e^{h.t}$$

com P sendo a população do tempo t, P_0 a população inicial, h é uma constante que depende do tipo de população que está sendo estudada.

(ii) O decaimento da radioatividade de substâncias também é modelada por funções desse tipo, por exemplo, em

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-k.t}$$

em que k é uma constante que depende da substância radioativa estudada.

(iii) A concentração de uma solução (quantidade de sal em um tanque), por exemplo, é uma função exponencial da forma

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\left(\frac{v}{V}\right)\cdot t}$$

em que Q_0 é a quantidade inicial de sal no tanque, V é o volume do tanque, v é o volume de água limpa que entra no tanque, ao mesmo tempo que a solução (salmoura) escoa e t é o tempo, em horas. Observe que essa função é decrescente, pois a base é e^{-1}.

3.3 Logaritmos

Suponhamos o seguinte problema: *"Se um capital inicial C (em reais) foi investido em uma aplicação de juros compostos e contínuos r, de forma que o valor futuro M (montante) desta aplicação seja dado por $M = C \cdot e^{rt}$, em quanto tempo este montante será equivalente ao dobro do capital inicial investido, ou seja, $M = 2 \cdot C$?"*. Para resolvermos uma situação-problema desse tipo, precisamos de uma das teorias mais importantes da Matemática de Ensino Médio - as Funções Logarítmicas.

3.3.1 Motivação para a criação das "tábuas" (tabelas) logarítmicas

Há alguns séculos, antes do desenvolvimento de "máquinas" de cálculos, fazer certas operações do tipo $(1,37)^{13}$ ou $(3,09)^{\frac{1}{16}}$ eram bastante complicadas. Foi somente no início do século XVII que criaram artifícios que tornariam mais fáceis os cálculos de potências e radiciações tão complicadas como nos exemplos anteriores.

Graças ao matemático, físico, astrônomo e teólogo escocês John Napier (1550-1617) que, à sua época, desenvolveu um dispositivo chamado *Ossos de Napier*, um conceito bem rudimentar que precedeu às Tábuas de Logaritmos, hoje temos essa poderosa ferramenta para cálculos, que tão bem foi utilizada ao longo desses séculos.

Nos tempos atuais, o uso das tábuas de logaritmos em nossos cálculos se tornou obsoleto, devido ao advento das tecnologias disponíveis. Não obstante, a herança deixada por John Napier nos permite, hoje, interpretar e estudar problemas que envolvem variações exponenciais de outra forma. São problemas que podem ser modelados por funções, chamadas **Funções Logarítmicas**.

Obedecendo a certos critérios, lidar com os logaritmos nada mais é do que fazer outra leitura sobre os exponenciais. Por exemplo, se alguém nos perguntar *"Qual o expoente de 64 na base 2?"*, prontamente poderemos responder que o expoente é igual a 6, pois $2^6 = 64$. Se substituirmos a palavra **"expoente"** por **"logaritmo"**, a nossa pergunta pode ser refeita da forma: **"Qual é o logaritmo de 64 na base 2?"** e a resposta será a mesma! O logaritmo de 64 na base dois é igual a 6. Podemos, então, considerar que, salvo algumas restrições, expoente e logaritmo são os mesmos entes matemáticos, ou seja, expoente e logaritmo são a mesma coisa!

Essa última ideia nos motiva a definirmos logaritmo de um certo número b em uma certa base a.

3.3.2 Definição: Logaritmo de b na base a

Seja **a** um número real maior do que 0 e diferente de 1 e **b** um número real positivo. São equivalentes as equações:

$$\log_a b = x \quad \text{e} \quad a^x = b.$$

O elemento **x** apresentado é o **logaritmo de** b **na base** a, ou o **expoente de** b **na base** a. Observe que a base a foi definida exatamente como foi definida nas funções exponenciais.

Vejamos alguns exemplos práticos dessa definição de logaritmos:

1) $\log_3 27 = 3$, pois $3^3 = 27$;

2) $\log_2 \dfrac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$, pois $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$;

4) $\log_5 \sqrt{5} = \dfrac{1}{2}$, pois $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$;

5) $\log_8 4 = \dfrac{2}{3}$, pois $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

3.3.3 Consequências Diretas da Definição de Logaritmos

Algumas consequências diretas da definição de logaritmos podem ser facilmente deduzidas através dos exemplos acima apresentados. Sejam a, b, c números reais positivos, com $a \neq 1$ e $n \in \mathbb{R}$.

(i) Como, da teoria de exponenciais, todo número elevado a zero é igual a 1, temos que $log_a\ 1 = 0$.

(ii) Sabendo que $a^1 = a$, temos que $log_a\ a = 1$.

(iii) Como $a^n = a^n$, segue que $log_a\ a^n = n$.

(iv) Usando a definição de logaritmo na igualdade $log_a\ b = log_a\ b$, obtemos $a^{log_a\ b} = b$.

(v) $log_a\, b = log_a\, c \Leftrightarrow b = c$. Essa consequência é de fácil verificação, bastando fazer $k = log_a\, b = log_a\, c \Leftrightarrow b = c = a^k$.

3.3.4 Definição: Função Logarítmica de base a

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_a\, x$ denomina-se **Função Logarítmica de Base a**.

Vamos apresentar uma situação-problema que pode ser modelada por uma função logarítmica e verificar como é seu comportamento gráfico no plano cartesiano.

Problema: *O nível de ruído N, medido em decibéis, de um som que se propaga no ar pode ser calculado pela função* $N(I) = 120 + 10 \cdot log_{10}\, I$*, em que* $I > 0$ *é a intensidade do som, medida em* W/m^2*. Vamos construir o gráfico dessa função, para* $1 < I < 100$.

Observação: Quando a base de um logaritmo é igual a 10, pode-se omitir a escrita da base. Assim, a função acima poderia ter sido escrita como $N(I) = 120 + 10 \cdot log\, I$.

I (W/m^2)	N (dB)
1	$120 + 0 = 120$
10	$120 + 10 = 130$
20	$120 + 13 = 133$
30	$120 + 14,8 = 134,8$
$\vdots$	$\vdots$
90	$120 + 19,6 = 139,6$
100	$120 + 20 = 140$

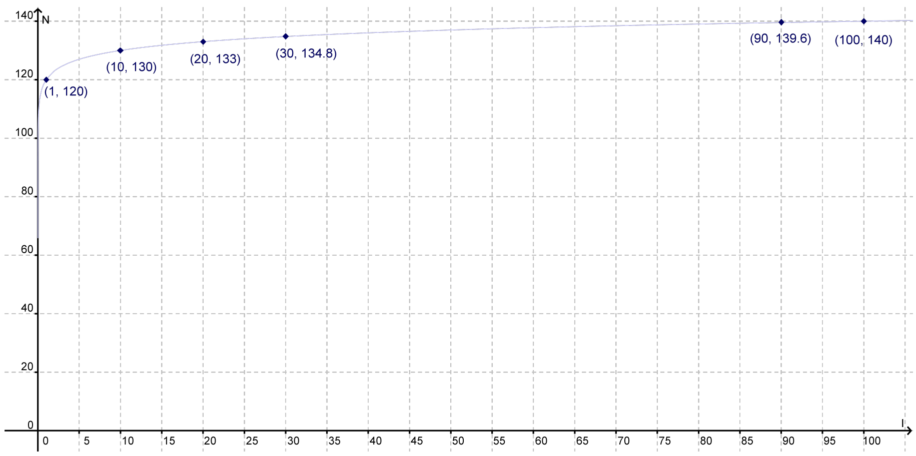


Figura 3.6: Representação discreta da tabela acima

Como podemos observar, o crescimento dessa função é bastante lento, ao contrário da função exponencial de base 10, que cresce muito rapidamente.

Da mesma forma que nas funções exponenciais, funções logarítmicas também podem modelar situações de decrescimento, quando a base do logaritmo for tal que $0 < a < 1$.

Na verdade, falar de funções exponenciais e de funções logarítmicas separadamente é quase um equívoco, tendo em vista que são funções inversas uma da outra. Grande parte dos problemas modelados por equações ou funções exponenciais é resolvida apenas com o auxílio do "ferramental" logarítmico. Vamos apresentar, aqui, uma situação-problema em que, apenas com as ferramentas das funções e equações exponenciais, seria praticamente impossível de se chegar ao resultado solicitado fazendo cálculos manuais.

Problema: *Considere uma aplicação financeira P que está sendo capitalizada à ordem de 8 % ao ano. Em quantos anos, aproximadamente, essa aplicação terá um montante igual ao dobro da aplicação inicial, ou seja, $M = 2P$?*

Modelando matematicamente o problema, obtemos a função exponencial $M(t) = P.(1,08)^t$, em que t representa o tempo, em anos. Substituindo $M(t) = 2P$, chegamos à equação exponencial $2.P = P.(1,08)^t$, que resulta em $2 = (1,08)^t$. Como resolver essa equação exponencial? Qual número devemos elevar $1,08$ para obtermos o número dois? Já sabemos escrever essa pergunta de outra forma! Qual é o logaritmo de 2 na base 1,08? Está claro, portanto, que precisaremos utilizar as definições e algumas propriedades operatórias dos logaritmos, que têm origem na teoria exponencial, para resolver essa equação. Vamos a elas.

3.3.5 Propriedades Operatórias dos Logaritmos

Sejam a, b, c números reais positivos, com $a \neq 1$.

1. **Logaritmo de um Produto**: $log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$.

   Sejam $x = log_a b$ e $y = log_a c$. Daí, $b = a^x$ e $c = a^y$. Temos, então, que $b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Aplicando as consequências (v) e (iii) nessa última igualdade, segue que:

   $$log_a(b \cdot c) = log_a(a^{x+y}) = x + y = log_a b + log_a c$$

2. **Logaritmo de um Quociente**: $log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$.

   De maneira análoga à demonstração do logaritmo do produto, temos que $\dfrac{b}{c} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

Daí, $log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = log_a(a^{x-y}) = x - y = log_a\, b - log_a\, c$.

3. **Logaritmo de Potência**: $log_a\, b^n = n \cdot log_a\, b$.

   Observando que $b^n = b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b$, temos que:

$$log_a(b^n) = log_a(\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{\text{n parcelas}}) = \underbrace{log_a\, b + log_a\, b + \cdots + log_a\, b}_{\text{n parcelas}} = n \cdot log_a\, b.$$

4. **Mudança de Base**: $log_a\, b = \dfrac{log_c\, b}{log_c\, a}$, com $c \neq 1$.

   Considerando $z = log_a\, b$, $x = log_c\, b$ e $y = log_c\, a$, vamos verificar que $z = \frac{x}{y}$. De fato, como $b = a^z$, $b = c^x$ e $a = c^y$, temos que $b = (c^y)^z \Leftrightarrow c^x = c^{y.z} \Leftrightarrow x = y.z \Leftrightarrow z = \dfrac{x}{y}$.

5. **Logaritmo de Potência de Base**: $log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \cdot log_a b$, com $n \neq 1$.

   Usando a mudança de base, temos: $log_{a^n} b = \dfrac{log_a b}{log_a a^n} = \dfrac{log_a b}{n}$. Logo, $log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \cdot log_a b$.

Dominar tais propriedades operatórias é indispensável para a resolução de muitos dos problemas que recaem em equações exponenciais, como o apresentado no exemplo anterior. Vamos, agora, resolvê-lo, com o auxílio de algumas propriedades.

$2 = (1,08)^t = \left(\frac{108}{100}\right)^t \Leftrightarrow log_{10}\, 2 = log_{10} \left(\frac{108}{100}\right)^t \Leftrightarrow log\, 2 = t.log\left(\frac{108}{100}\right) = t.[log\; 108 - log\; 100] \Leftrightarrow$ $log\; 2 = t.[log(2^2.3^3) - log\; 10^2] = t.[log 2^2 + log 3^3 - 2.log 10] = t.[2.log\; 2 + 3.log\; 3 - 2]$

Utilizando alguns valores aproximados de uma tábua de logaritmos, temos que $log\; 2 = 0,30$ e $log\; 3 = 0,48$. Portanto, podemos obter o valor de t na equação, substituindo tais valores.

$log\;\; 2 = t.[2.log\;\; 2 + 3.log\;\; 3 - 2] \Leftrightarrow 0,30 = t.[2.0,30 + 3.0,48 - 2] = t.[0,60 + 1,44 - 2] \Leftrightarrow$ $0,30 = 0,04.t \Leftrightarrow t = \frac{0,30}{0,04} = \frac{30}{4} = 7,5$ anos.

Ou seja, o capital aplicado terá um montante equivalente a seu dobro em aproximadamente oito anos, levando-se em conta que a capitalização é de 8% ao ano.

Conforme vimos no capítulo em que abordamos as funções exponenciais, temos aqui, também, os logaritmos na base e. Tais logaritmos são chamados de **Logaritmos Naturais**, cuja nomenclatura é $ln(x)$, em que $x \in \mathbb{R}^*_+$. Esse logaritmo, por vezes, é erradamente chamado de logaritmo neperiano. Na verdade, o **Logaritmo Neperiano** (em homenagem a John Napier) é um logaritmo de base $a = \frac{1}{e}$.

Observe ainda que, de acordo com as bases, o logaritmo natural **cresce** quando **x cresce**; enquanto o logaritmo neperiano **decresce**, quando **x cresce**.

As principais aplicações das funções logarítmicas de base **e** ocorrem em problemas (situações) do tipo:

(i) O Centro Nacional de Estatísticas da Saúde dos Estados Unidos projeta a expectativa de vida de acordo com o modelo matemático $L(x) = 10,963 + 14,321.ln(x)$, em que x é o número de anos, contados a partir do ano de 1900.

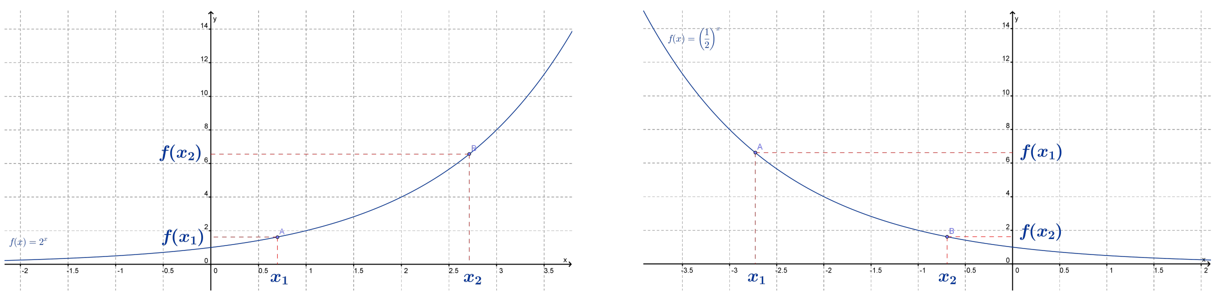
(ii) A pressão da artéria *Aorta* de um ser humano é uma função do tempo que pode ser modelada pela equação $P(t) = 95.e^{-0,491.t}$, com o tempo t em segundos. Para obtermos um determinado período em que a pressão é dada, podemos obter a função inversa, que nos dará o tempo em função da pressão. Para isso, basta aplicar em ambos os lados da equação acima o logaritmo natural, obtendo a função $t(P) = \dfrac{ln(\frac{95}{P})}{0,491}$.

(iii) Problemas de crescimento e decrescimento logarítmico contínuo.

3.4 Inequações Exponenciais e Logarítmicas

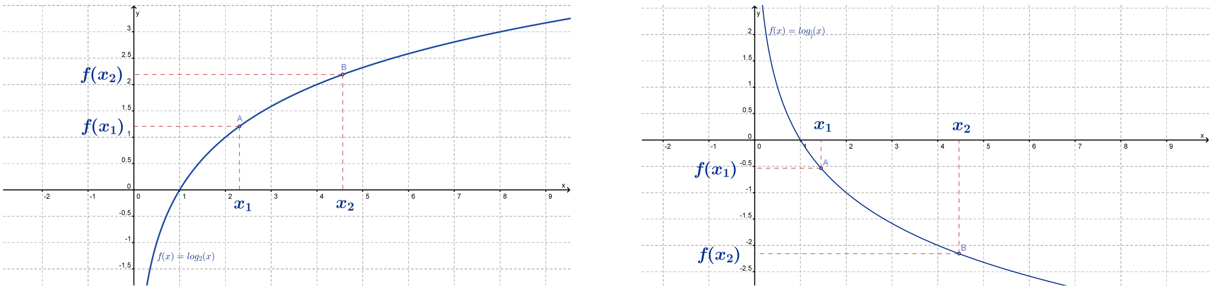
As funções exponenciais e logarítmicas podem modelar situações de crescimento ou decrescimento, conforme vimos nas seções 3.2.1 e 3.3.4. Do ponto de vista algébrico, vimos que se a base da função for um número real maior do que 1, essa modela uma situação de crescimento (exponencial ou logarítmico); e se a base é um número real compreendido entre 0 e 1, a função irá modelar uma situação de decrescimento (exponencial ou logarítmico).

Vamos analisar gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, de crescimento e decrescimento, e analisar a relação que existe entre elementos de domínio e imagem de tais funções.



(a) $f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ (b) $f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$

Figura 3.7: Funções Exponenciais



(a) $f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ (b) $f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$

Figura 3.8: Funções Logarítmicas

Podemos observar que, quando a base das funções é maior do que 1 (funções crescentes), a relação de ordem se preserva, ou seja, se $x_1 \geq x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$. Se a base das funções é um número compreendido entre 0 e 1, então a relação de ordem se inverte, ou seja, $x_1 \leq x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Muito comumente, alguns professores apenas “maceteiam” para os alunos essa relação. A nosso ver, isto é extremamente inadequado, pois essa não tão complicada visualização geométrica por parte dos alunos pode ser bastante enriquecedora para eles.

Essa importante ferramenta (inequações) nos permite resolver alguns tipos de situações problemas, alguns dos quais veremos no próximo capítulo deste trabalho, na parte de aplicações.

4 Exponenciais e Logaritmos nas Soluções de Problemas

Como vimos nas seções anteriores, as conceituações das funções exponenciais e logarítmicas são bastantes dependentes uma da outra. A pergunta que surge, neste ponto, é: “Como estes conceitos têm sido abordados e ensinados nas escolas de Ensino Básico do Brasil?”

Em nossa experiência, já vimos muitos fatos a cerca desse ponto acontecer, tais como:

- ensino em separado, por vezes, exponenciais no 1º ano e logaritmos no 2º ano do Ensino Médio;

- os dois tópicos sendo ministrados separadamente, em um mesmo ano, por professores diferentes, como se fossem assuntos independentes;

- deixa-se para ensinar esses tópicos ao final do ano letivo, em que o interesse dos alunos se torna menor e, por vezes, o professor precisa “acelerar” o conteúdo para que o cronograma seja cumprido. Esse é o pior quadro possível de ensino de exponenciais e logaritmos.

A proposta do nosso trabalho é de que esses dois assuntos sejam tratados de forma intimamente relacionados. Não se pode falar de logaritmos sem se falar de exponenciais. Tampouco, não conseguimos resolver grande parte dos problemas de exponenciais sem a teoria e as propriedades dos logaritmos.

Ainda dentro de nossa proposta, que visa a aplicação da teoria de funções exponenciais e funções logarítmicas na resolução de situações problemas em diversos campos da ciência, vamos aqui expor diversos modelos de aplicações. Esperamos que esse trabalho seja um apoio e um referencial para os professores e alunos que desejarem explorar esse rico e próspero campo da álgebra matemática.

4.1 Problemas de Capitalizações, Investimentos e Mercado Financeiro

1. **Juros Compostos**

   Se R$ 1.000,00 forem investidos à taxa de juros compostos de 1% ao mês, o valor do Montante M no tempo t, em anos, é dado por $M = 1000 \cdot (1,01)^{12t}$. Em quanto tempo o montante será equivalente ao dobro do valor inicialmente investido? (Dados: $log 2 \simeq 0,301$ e $log 1,01 \simeq 0,004$).

   Solução:

   Para um montante, de acordo com o problema, de R$ 2.000,00, temos:

   $2000 = 1000 \cdot (1,01)^{12t} \Leftrightarrow 2 = (1,01)^{12t} \Leftrightarrow log 2 = log(1,01)^{12t} \Leftrightarrow 0,301 = 12 \cdot t \cdot log(1,01) \Leftrightarrow$ $0,301 \simeq 12 \cdot t \cdot 0,004 \simeq 0,048 \cdot t \Leftrightarrow t \simeq \frac{0,301}{0,048} \simeq 6,271.$

   Logo, o tempo necessário para que o capital dobre é de aproximadamente 6 anos e 3 meses.

2. **Modelagem de Juros Compostos**

   A tabela a seguir apresenta o valor de um investimento, depois de intervalos anuais entre 0 e 7 anos, de R$20.000,00, investidos a juros de 10%, compostos anualmente.

Ano (t)	Montante (M) em reais
0	20.000,00
1	22.000,00
2	24.200,00
3	26.620,00
4	29.282,00
5	32.210,20
6	35.431,22
7	38.974,34

   a) Desenvolva um modelo exponencial para esses dados com precisão de duas casas decimais, com t em anos e M em reais.

   b) Use o modelo encontrado no item (a) para encontrar o valor do montante acumulado ao final de 30 anos, se for investido a 10% de juros, compostos anualmente.

   Solução:

   a) Observando que, de um ano para outro, há sempre um acréscimo da ordem de 10% no valor do montante e sendo R$20.000,00 o valor inicial investido, segue naturalmente que a equação que modela o aumento do montante **M** em função do tempo **t** é

$$M = 20000.(1,10)^t.$$

b) Para $t = 30$, temos que

$$M = 20000.(1,10)^{30} \simeq 20000.17,45 \simeq 349000.$$

Logo, o valor aproximado do montante acumulado após 30 anos de capitalização a 10% ao ano é de R$ 349.000,00.

3. **Perda do Poder de Compra**

   O poder de compra **P** de uma aposentadoria (pensão) de R$ 30.000,00 por ano, depois de **t** anos, com uma inflação anual de 4%, pode ser modelada por:

$$P = 30000.e^{-0,04t}.$$

   Calcule o poder de compra depois de:
   a) 5 anos
   b) 20 anos

   Solução:
   Nesse exemplo, vamos utilizar uma calculadora como auxílio. Para obter os valores solicitados, basta, em cada caso, substituir o valor de t pelo número de anos, obtendo:
   a) $P = 30.000.e^{-0.04.(5)} = 30.000.e^{-0.2} = R\$24.562,00.$
   b) $P = 30.000.e^{-0.04.(20)} = 30.000.e^{-0.8} = R\$13.480,00.$
   É interessante observar que o impacto da inflação ao longo do tempo "corrói" o poder de compra e fornece algumas dicas sobre a situação dos idosos que vivem com rendimentos fixos.

4. **Publicidade e Vendas**

   Devido a uma nova campanha publicitária, uma empresa prevê que suas vendas aumentarão de acordo com a equação $N = 10000 \cdot (0,3)^{(0,5)^t}$, em que t indica o tempo, em anos, após o início da campanha publicitária.
   a) Qual era o valor das vendas, em reais, quando do início da campanha?
   b) Qual o valor das vendas previstas para o 3º ano de publicidade?
   c) Qual o valor máximo possível das vendas?
   Solução:
   a) No início da campanha, temos $t = 0$. Assim:
   $N = 10000 \cdot (0,3)^{(0,5)^0} = 10000 \cdot (0,3)^1 = 10000 \cdot 0,3 = 3000.$

O valor das vendas era de R$ 3.000,00 no início da campanha.

b) Para $t = 3$, temos: $N = 10000 \cdot (0,3)^{(0,5)^3} = 10000 \cdot (0,3)^{0,125} \simeq 10000 \cdot 0,86 = 8600$.

O valor das vendas, três anos após o início da campanha, será de R$ 8.600,00.

c) Podemos observar que, quanto maior o valor do tempo t, menor será o valor de $(0,5)^t$.

Daí, quando $(0,5)^t$ tender a zero, temos:

$M = 10000 \cdot (0,3)^0 = 10000 \cdot 1 = 10000$.

O valor máximo das vendas dessa empresa é de R$ 10.000,00.

5. **Participação de Mercado**

Suponha que um novo produto é introduzido no mercado por certa indústria. Seja m o número de meses para que esse produto tenha participação de mercado de p por cento. Essa relação pode ser modelada pela função

$$m = 20 \cdot ln\left(\frac{40}{40-p}\right).$$

Determine, quantos meses após o lançamento desse produto, ele terá uma participação de mercado de 35%. (Dado: ln $8 \simeq 2,08$).

Solução:

Uma participação de mercado de 35% significa $p = 35$. Daí:

$$m = 20 \cdot ln\left(\frac{40}{40-35}\right) = 20 \cdot ln\left(\frac{40}{5}\right) = 20 \cdot ln(8) \simeq 20 \cdot 2,08 \simeq 41,6.$$

Assim, a participação de mercado será de 35% após cerca de 42 meses.

6. **Modelagem de Índice de Preços ao Consumidor**

"O índice de preços ao consumidor **(IPC)** é uma medida do preço médio necessário para comprar bens de consumo e serviços. O índice, calculado por institutos nacionais de estatística, é usado para observar tendências de inflação. A variação porcentual do preço num determinado período é uma das medidas da inflação."

(http://pt.wikipedia.org/wiki/Índice_de_preços_no_consumidor)

O **IPC** é calculado pela média dos preços de diversos itens depois de atribuir um peso a cada item. A tabela a seguir apresenta os índices de preços ao consumidor para anos selecionados de 1940 a 2005, refletindo padrões de compra de todos os consumidores urbanos, com x em anos, contados a partir do ano 1940.

Ano	IPC (R$)	Ano	IPC (R$)
1940	13,0	1990	92,1
1950	19,2	2000	136,4
1960	28,4	2002	147,5
1970	42,0	2004	159,5
1980	62,2	2005	165,9

a) Encontre uma equação que modela esses dados.

b) Use o modelo para prever o índice de preços ao consumidor em 2014.

c) De acordo com o modelo, e usando aproximações logarítmicas de até três casas decimais, durante qual ano o índice de preços ao consumidor passará de R$300,00?

Solução:

a) Com auxílio computacional, podemos estimar uma função exponencial de aproximação que relaciona as grandezas I (IPC) com x (número de anos após 1940), dada por

$$I = 13,0 \cdot (1,04)^x.$$

b) Em 2014, temos $x = 74$. Daí,

$$I = 13,0 \cdot (1,04)^{74} \simeq 13,0 \cdot 18,22 \simeq 236,86.$$

Portanto, o IPC em 2014 será de aproximadamente R$ 236,86.

c) Precisamos obter o valor de x para que $I > 300$. Daí:

$$13,0 \cdot (1,04)^x > 300 \Rightarrow \left(\frac{104}{100}\right)^x > \frac{300}{13,0}.$$

Aplicando logaritmos decimais em ambos os lados da desigualdade e utilizando tabelas de aproximações, obtemos que:

$$x \cdot [log(104) - log(100)] > [log(300) - log(13)] \Rightarrow x > \frac{2,477 - 1,114}{2,017 - 2} \simeq \frac{1,363}{0,017} \simeq 80,176.$$

Logo, o ano em que o IPC passará de R$300,00 será 2021.

4.2 Ciências da Natureza

7. **Terremotos e Escala Richter**

A escala Richter foi desenvolvida por Charles Richter e Beno Gutenberg, no intuito de medir a magnitude de um terremoto provocado pelo movimento das placas tectônicas. As ondas produzidas pela liberação de energia do movimento das placas podem causar desastres de grandes proporções. Os estudos de Richter e Gutenberg resultaram em uma escala logarítmica denominada **Escala Richter**, que possui pontuação de 0 a 9 graus.

A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes (medida por aparelhos denominados sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto. A função utilizada é

$$M = log\, A - log\, A_0,$$

em que M é a magnitude do terremoto, A é amplitude máxima, A_0 é uma amplitude de referência.

Podemos utilizar a fórmula para comparar as magnitudes de dois terremotos. Iremos comparar um terremoto de 6 graus com outro de 8 graus de magnitude, todos na escala Richter. Sendo $M_1 = 6$ e $M_2 = 8$, respectivamente, as magnitudes dos terremotos de amplitudes A_1 e A_2, temos que:

$$\begin{aligned}
M_1 - M_2 &= (log\, A_1 - log\, A_0) - (log\, A_2 - log\, A_0) \\
6 - 8 &= log\, A_1 - log\, A_2 \\
-2 &= log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \\
10^{-2} &= \frac{A_1}{A_2} \\
\frac{1}{100} &= \frac{A_1}{A_2} \\
A_2 &= 100.A_1.
\end{aligned}$$

Podemos notar que as ondas do terremoto A_2 possuem amplitude 100 vezes mais intensas do que a do terremoto A_1.

Para calcular a energia liberada por um terremoto, usamos a função

$$I = \left(\frac{2}{3}\right).log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

em que I é a intensidade do terremoto na Escala Richter (que varia de 0 a 9), E é a energia liberada em kW/h e $E_0 = 7.10^{-3}$ kW/h. Qual a energia liberada por um terremoto de intensidade 6 na escala Richter?

Solução:

Para $I = 6$, temos

$$\begin{aligned}
6 &= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot log\left(\frac{E}{E_0}\right) \\
9 &= log\left(\frac{E}{E_0}\right) \\
10^9 &= \frac{E}{E_0} \\
E &= 10^9.E_0 = 7.10^9.10^{-3} \\
E &= 7.10^6 kW/h.
\end{aligned}$$

A energia liberada por um terremoto de 6 graus na escala Richter é de 7.10^6 kW/h.

8. **Terremotos e Escala de Magnitude de Momento**

   "A **Escala e Magnitude de Momento** (abreviada como **MMS** e denotada como M_W), introduzida em 1979 por **Thomas Haks** e **Hiroo Kanamori**, substituiu a **Escala de Richter** para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a **MMS** é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a **MMS** é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela função:

   $$M_W = -10,7 + \frac{2}{3} log\ (M_0),$$

   em que M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o $dina \times cm$.

   O terremoto na cidade de **Kobe**, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7,3$."

   U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.

   Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado). Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de **Kobe** (em $dina \times cm$)?

   Solução:

   Como devemos ter M_W = 7,3, do enunciado vem:

   $$7,3 = -10,7 + \frac{2}{3} log_{10}(M_0) \Leftrightarrow 18 = \frac{2}{3} log_{10}(M_0) \Leftrightarrow 27 = log_{10}(M_0) \Leftrightarrow 10^{27} = M_0$$

Logo, a magnitude do terremoto de **Kobe** foi de 10^{27} $dina \times cm$.
http://veja.abril.com.br/educacao/enem-resolvido/Q139.pdf

9. **Os Sons e a Audição Humana**

   Uma pessoa com audição normal é capaz de ouvir uma grande faixa de sons de intensidade bem diferentes. O som pode ser classificado como fraco ou forte quanto à sua **intensidade**, que é representado por I.

   No S.I. (Sistema Internacional de Unidades), a Intensidade (I) é expressa em W/m^2 (watts por metro quadrado). Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo da qual é impossível ouvir algo. A essa intensidade damos o nome de *limiar de audibilidade*, que vale em média, $10^{-12}W/m^2$.

   Com base nos valores de intensidade de som, podemos calcular o Nível de Intensidade (N), medindo em **decibéis (dB)**, de acordo com a função:

   $$N = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

   em que I é a intensidade do som correspondente ao nível N, I_0 é a constante que representa o nível do limiar de audibilidade.

   Como exemplo, podemos determinar o nível da intensidade de uma conversa normal (a um metro de distância), sabendo que a intensidade desse som é de aproximadamente $I = 4 \cdot 10^{-6}\ W/m^2$.

   $$\begin{aligned} N &= 10 \cdot \log\left(\frac{4 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}}\right) \\ N &= 10 \cdot \log(4 \cdot 10^{6}) \\ N &= 10 \cdot [\log(4) + \log(10^{6})] \\ N &\simeq 10 \cdot (0,6+6) \\ N &\simeq 10 \cdot 6,6 \\ N &\simeq 66\ dB. \end{aligned}$$

   Uma conversa normal tem, então, nível sonoro de 66 decibéis. Para a saúde de nossos ouvidos, não devemos ficar expostos por mais de uma hora em ambientes com nível sonoro de mais de 110 dB.

   http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/11/logaritmos-os-sons-e-audicao-humana.html

10. **Datação por Carbono-14**

    Assim que um organismo morre, ele para de absorver novos átomos de carbono. A relação de carbono 12 por carbono 14 no momento da morte é a mesma que nos outros organismos vivos, mas o carbono 14 continua a decair e não é mais reposto. Numa amostra, a meia-vida do carbono 14 é de 5700 anos; enquanto a quantidade de carbono 12, por outro lado, permanece constante. Ao olhar a relação entre carbono 12 e carbono 14 na amostra e compará-la com a relação em um ser vivo, é possível determinar a idade de algo que viveu em tempos passados de forma bastante precisa.

Uma função usada para calcular a idade de uma amostra usando a datação por carbono 14 é:

$$T = \left[\frac{ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right)}{-0,693}\right] \cdot T_{\frac{1}{2}},$$

em que ln é o logaritmo natural, $\frac{N_f}{N_0}$ é a porcentagem de carbono 14 na amostra comparada com a quantidade em tecidos vivos e $T_{\frac{1}{2}}$ é a meia-vida do carbono 14 (5700 anos).

Assim, se temos hoje um fóssil com 10% de carbono 14 em comparação com uma amostra viva, qual a idade aproximada deste fóssil?

Solução:

Para um percentual de 10% (0,10) e uma meia vida de 5700 anos, temos:

$$T = \left[\frac{ln(0,10)}{-0,693}\right] \cdot 5700 \simeq \left[\frac{-2,303}{-0,693}\right] \cdot 5700 \simeq [3,323] \cdot 5700 \Rightarrow t \simeq 18940.$$

Logo, a idade do fóssil seria de, aproximadamente, 18.940 anos.

Como a meia-vida do carbono 14 é de 5.700 anos, ela só é confiável para datar objetos de até 60 mil anos.

http://ciencia.hsw.uol.com.br/carbono-142.htm

11. **Cálculo de pH de soluções**

O **pH** ou **Potencial Hidrogeniônico** é uma grandeza físico-química responsável por indicar a acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio. A descoberta do pH foi conseguida por um bioquímico dinamarquês, **Soren Sorensen**, em 1909, que tinha como principal objetivo facilitar o seu trabalho, já que fazia o controle de qualidade de cervejas. A palavra pH foi atribuída pelo fato de a letra "p" ter como origem o alemão *"potenz"*, que significa *poder de concentração* e o "H" que indica *íons de hidrogênio* **(H+)**.

Em termos matemáticos, o pH de uma solução é o **simétrico do logaritmo decimal da concentração molar de íons de hidrogênio** $[H_+]$, dada em mol/litro, resultando na equação:

$$pH = -log_{10}\,[H_+].$$

Pela fórmula, pode se ver que o pH é sempre um valor positivo, porque caso contrário o sinal negativo iria afetar o logaritmo e assim o pH seria um número negativo já que [H+] tem valores muito pequenos. O pH, como já se deu a entender, é uma maneira de expressar a concentração dos íons de hidrogênio. Por isso, as soluções ácidas e básicas a 25ºC podem ser analisadas através dos seus valores de pH, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \textbf{Soluções ácidas: } [H+] > 1{,}0 \times 10^{-7}\textbf{, } pH < 7 \\ \textbf{Soluções básicas: } [H+] < 1{,}0 \times 10^{-7}\textbf{, } pH > 7 \\ \textbf{Soluções neutras: } [H+] = 1{,}0 \times 10^{-7}\textbf{, } pH = 7\textbf{.} \end{cases}$$

Por exemplo, a concentração molar do *suco gástrico* é de $[10^{-1}]$ mol/litro. Assim, seu pH seria de:

$$pH = -log_{10}\,[10^{-1}] = -(-1) \cdot log_{10}\,10 = 1.$$

Logo, o pH do suco gástrico, que é encontrado em nosso estômago, é igual a 1.

http://www.assimsefaz.com.br/sabercomo/como-calcular-ph

http://educar.sc.usp.br/quimapoio/ph.html

4.3 Ciências Biológicas

12. **O Crescimento Bacteriano**

Em certa cultura, uma única bactéria se divide em duas bactérias a cada meia hora, de modo que o número de bactérias numa cultura quadruplica a cada hora. Assim, considerando um número inicial de 10 indivíduos nessa cultura, a equação que nos fornece o número de bactérias após t horas é dada por $y = 10 \cdot 4^t$.

Esboce o gráfico dessa função nas primeiras quatro horas de observação, ou seja, para $0 \leq t \leq 4$.

Solução:

Vamos construir uma tabela de valores de acordo com os dados do problema:

t	$y = 10.4^t$
0	10
1	40
2	160
3	640
4	2560

Considerando que o crescimento é contínuo, o gráfico desse crescimento será dado por:

13. **Expectativa de Vida**

A expectativa de vida de pessoas nascidas nos Estados Unidos, a partir do ano de 1900, depende de seu ano de nascimento (ver tabela e gráfico de dispersão, com $x = 0$, em 1900). Esse gráfico de dispersão sugere que o melhor modelo para a variação da expectativa de vida pode ser dado como uma função logarítmica.

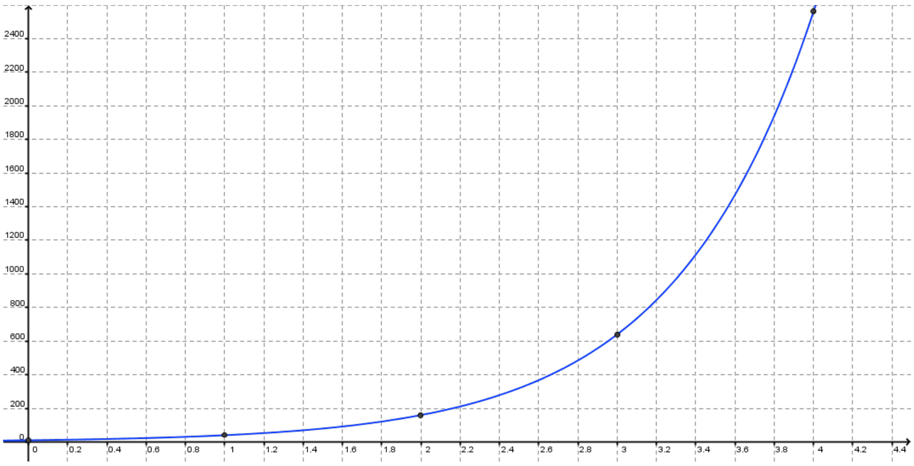
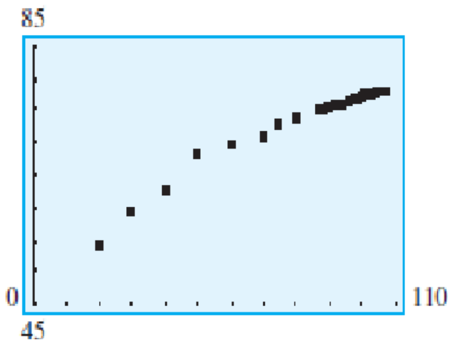


Figura 4.1: Gráfico da função $y = 10 \cdot 4^t$

Ano	Idade (em anos)	Ano	Idade (em anos)
1920	54,1	1990	75,4
1930	59,7	1994	75,7
1940	62,9	1998	76,7
1950	68,2	2000	77,0
1960	69,7	2002	77,3
1970	70,8	2004	77,8
1980	73,7	2007	77,9
1985	75,0	2010	78,5



O *Centro Nacional de Estatísticas da Saúde* projeta a expectativa de vida para as pessoas que nasceram no ano 2000 em 77,0 anos e, para os nascidos em 2010, em 78,5 anos. Para projetar a expectativa de vida para pessoas nascidas nesses anos, usa-se a função de aproximação logarítmica

$$L(x) = 10,963 + 14,321 \cdot ln(x)$$

com x o número de anos contados a partir de 1900 e $L(x)$ a idade, em anos, da expectativa de vida. Determine a expectativa de vida de uma pessoa que nasça no ano de 2050.

Solução:

Em 2050, temos que $x = 2050 - 1900 = 150$.

Daí:

$L(150) = 10,963 + 14,321 \cdot ln(150) \simeq 10,963 + 14,321 \cdot 5,011 = 10,963 + 71,763 = 82,456$.

Portanto, a expectativa de vida de uma pessoa que nascerá no ano de 2050 será de 82,5 anos, aproximadamente.

14. **Propagação de uma Doença**

A propagação de uma doença viral altamente contagiosa em uma escola pode ser descrita pela função

$$y = \frac{5000}{1 + 1000 \cdot e^{-0,8t}},$$

em que x é o número de dias após o vírus ser identificado na escola e y é o número total de pessoas que foram infectadas pelo vírus nos primeiros x dias.

a) Quantos alunos foram inicialmente infectados, quando foi descoberta a contaminação na escola?

b) Quantos alunos foram infectados pelo vírus, nos 15 primeiros dias?

c) Em quantos dias o número de infectados chegará a 3744 pessoas? (Dados: $ln\ 2 \simeq 0,69$, $ln\ 10 \simeq 2,30$ e $ln\ 17 \simeq 2,83$)

Solução:

a) Para $t = 0$, temos que:

$y = \dfrac{5000}{1+1000\cdot e^{-0,8\cdot 0}} = \dfrac{5000}{1+1000\cdot e^{0}} \simeq \dfrac{5000}{1+1000\cdot 1} \simeq \dfrac{5000}{1+1000} \simeq \dfrac{5000}{1001} \simeq 5.$

Aproximadamente cinco alunos estavam infectados no primeiro dia.

b) Para $t = 15$, segue que:

$y = \dfrac{5000}{1+1000\cdot e^{-0,8\cdot 15}} = \dfrac{5000}{1+1000\cdot e^{-12}} \simeq \dfrac{5000}{1+1000\cdot 0,00000615} \simeq \dfrac{5000}{1+0,00615} = \dfrac{5000}{1,00615} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \simeq 4970.$

Aproximadamente 4970 alunos infectados até o 15º dia.

c. Para $y = 3744$, temos:

$$\begin{aligned}
3744 &= \frac{5000}{1+1000\cdot e^{-0,8t}} \\
1+1000\cdot e^{-0,8t} &= \frac{5000}{3744} \simeq 1,34 \\
1000\cdot e^{-0,8t} &\simeq 0,34 \\
e^{-0,8t} &\simeq \frac{0,34}{1000} \\
ln(e^{-0,8t}) &\simeq ln\left(\frac{0,34}{1000}\right) \\
-0,8\cdot t\cdot ln(e) &\simeq ln(0,34) - ln(1000) \\
-0,8\cdot t\cdot 1 &\simeq ln\left(\frac{2\times 17}{100}\right) - 3\cdot ln(10) \\
-0,8\cdot t &\simeq ln\ 2 + ln\ 17 - ln\ 100 - 3\cdot 2,30 \\
-0,8\cdot t &\simeq 0,69 + 2,83 - 2\times 2,30 - 6,90 \\
-0,8\cdot t &\simeq 0,69 + 2,83 - 4,60 - 6,90 \simeq -7,98 \\
t &\simeq \frac{7,98}{0,8} \simeq 10
\end{aligned}$$

Logo, teremos 3744 pessoas infectadas em, aproximadamente, 10 dias.

4.4 Astronomia

15. **Magnitude Estelar**

A magnitude estelar M de uma estrela está relacionada com o seu brilho B, visto a partir de Terra, de acordo com a função $M = -\frac{5}{2}\cdot\log\left(\frac{B}{B_0}\right)$, em que B_0 é um nível padrão de brilho (brilho da estrela *Vega*).

a) Encontre a magnitude de Vênus, sabendo que o seu brilho é 36,3 vezes maior que B_0.

b) Encontre o brilho (em função de B_0) da "Estrela do Norte"de magnitude 2,1.

c) Se as estrelas mais fracas (a olho nu, vista da Terra) têm magnitude 6,0, determine seu brilho (em função de B_0).

d) Uma estrela com magnitude $-1,0$ é mais brilhante do que uma estrela de magnitude $1,0$? Justifique.

Solução:

a) Se $B = 36 \cdot B_0$, temos:

$M = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{36 \cdot B_0}{B_0}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \log 36 = -\frac{5}{2} \cdot \log 6^2 = -\frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \log(2 \times 3) = -5 \cdot (\log 2 + \log 3) \simeq$
$-5 \cdot (0,301 + 0,477) \simeq -5 \cdot 0,778 \Rightarrow M \simeq -3,89.$

b) Sendo $M = 2,1$, segue que:

$2,1 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{B}{B_0}\right) \Rightarrow -\frac{4,2}{5} = \log\left(\frac{B}{B_0}\right) \Rightarrow 10^{-0,84} = \frac{B}{B_0} \Rightarrow B = 10^{0,84} \cdot B_0.$

c) Seguindo a mesma ideia do item anterior, temos que:

$6,0 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{B}{B_0}\right) \Rightarrow -\frac{12}{5} = \log\left(\frac{B}{B_0}\right) \Rightarrow 10^{2,4} = \frac{B}{B_0} \Rightarrow B = 10^{2,4} \cdot B_0.$

d) Observando que a função M é **decrescente**, temos que se $M_1 \geq M_2 \Leftrightarrow B_1 \leq B_2$. Assim sendo, uma estrela de magnitude $-1,0$ é mais brilhante que uma estrela de magnitude $1,0$.

Mais detalhes em: http://www.cosmobrain.com.br/rc/magnitude1.html

Obs.: Alpha Lyrae (α Lyr), mais conhecida como Vega, é a estrela mais brilhante da constelação de Lira e a 5ª estrela mais brilhante do céu noturno, separada do nosso sistema solar por 25 anos-luz, o que a torna uma das estrelas mais próximas do nosso Sol.

4.5 Vida e Sociedade

16. **Estudantes por Computador**

A tabela a seguir apresenta o número médio de alunos por computador nas escolas públicas na cidade de Denver, nos Estados Unidos da América, entre os anos de 1995 e 2006.

Ano	Alunos por Computador (y)	Ano	Alunos por Computador (y)
1995	12,16	2000	6,06
1996	10,58	2001	5,27
1997	9,21	2002	4,59
1998	8,01	2004	3,47
1999	6,97	2006	2,63

a) Encontre um modelo exponencial para esses dados, sendo x o número de anos passados desde 1980.

b) Esse modelo exponencial é de crescimento ou de decaimento? Justifique sua resposta.

c) Quantos alunos por computador nas escolas públicas de Denver esse modelo prevê para 2010.

Solução:

a) Com auxílio computacional, podemos estimar uma função exponencial de aproximação que relaciona as grandezas y (Alunos por Computador) com x (número de anos após 1980), dada por

$$y = 98,221 \cdot (0,870)^x.$$

b) Como a base da função obtida no item anterior é $0 < a = 0,870 < 1$, temos que a função exponencial é de decaimento.

c) Em 2010, temos que $x = 30$. Daí,

$$y = 98,221.(0,870)^{30} \simeq 98,221.(0,015) \simeq 1,47.$$

Logo, o número médio de alunos por computador em 2030 será de, aproximadamente, 1,47.

5 Considerações Finais

Neste presente Trabalho de Conclusão de Curso, vimos a importância de se ter um bom conhecimento teórico, por parte do professor, do que se propõe a ensinar. Apesar de atualmente ser cada vez mais exigido que sejam aplicadas à vida prática as teorias matemáticas, ainda acreditamos ser de fundamental importância que se trabalhe os conceitos matemáticos adequados.

É claro que situações-problemas bem colocadas estimulam a curiosidade dos alunos e os motiva a resolvê-los. Porém, não se deve "cair na ilusão" de que a simples aplicação das teorias matemáticas, por si só, farão com que os alunos deem mais importância à disciplina. O professor deve ter segurança em lidar com o conteúdo de forma correta e clara. Dar um embasamento teórico bem fundamentado aos seus alunos. A partir daí, então, poder ter a confiabilidade deles para trabalhar problemas aplicados à vida que envolvem conceitos matemáticos.

Além da Matemática, em si, os professores devem sempre estimular seus alunos ao hábito da leitura e interpretação de textos, fazendo um *link* com seus colegas de Língua Portuguesa. De nada adiantará ao aluno ter um saber matemático bastante avançado se ele não souber interpretar, de forma razoável que seja, o texto de um dado problema. Esse é um fator que, atualmente, vem sendo tratado de forma mais delicada pelos docentes e pelas coordenações pedagógicas das boas escolas do país.

Eis então a nossa missão, enquanto educadores: fornecer aos nossos alunos não só um bom conhecimento das "ferramentas matemáticas", mas também saber motivá-los a resolver problemas de seu cotidiano para que, de certa forma, não precisemos mais escutar aquelas perguntas citadas em nosso capítulo introdutório.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. MEC. SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Fundamental**. Brasília, 1998.

[2] BRASIL. MEC. SEMT. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educaionais Complementares aos PCN´s**. Brasília, 2002.

[3] BOYER, Carl B., **História da Matemática**. 2.ed.São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1996.

[4] EVES, Howard, **Introdução à História da Matemática**. 5.ed.Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

[5] MAOR, E. **e: A História de um Número**. 4.ed.Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

[6] LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 1**. 9.ed.Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.

[7] IEZZI, G. et al. **Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 2**. 9.ed.São Paulo: Atual Editora, 2007.

[8] LIMA, Elon L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. 5.ed.Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.

[9] HARSHBARGER, R. J.; REYNOLDS, J. J., **Mathematical Applications for the Management, Life and Social Sciences**. 9.ed. Belmont: Brooks Cole, Cengage Learning, 2009.