Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O uso do GeoGebra na construção de figuras dinâmicas de lugares geométricos no espaço †

por

Joelson Lima da Silva

sob orientação do

Prof. Lenimar Nunes de Andrade

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abril/2018
João Pessoa - PB

† O presente trabalho terá como foco principal a construção de figuras dinâmicas sobre lugares geométricos no espaço utilizando o GeoGebra.

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586u Silva, Joelson Lima da.
O uso do GeoGebra na construção de figuras dinâmicas de lugares geométricas no espaço / Joelson Lima da Silva. - João Pessoa, 2018.
144 f. : il.

Orientação: Lenimar Nunes de Andrade.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN/PROFMAT.

1. Geometria espacial. 2. Geogebra. 3. Lugares geométricos. I. Andrade, Lenimar Nunes de. II. Título.

UFPB/BC

O uso do GeoGebra na construção de figuras dinâmicas de lugares geométricos no espaço

por

Joelson Lima da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Geometria espacial.

Aprovada por:

Prof. Lenimar Nunes de Andrade -UFPB (Orientador)

Prof. Valdenilza Ferreira da Silva - UFPB

Prof. José de Arimatéia Fernandes - UFCG

Abril/2018

Agradecimentos

Quero agradecer a Deus por sua misericórdia e amor permitindo que possa usufruir da dádiva da vida;

A minha mãe Odete dos Santos Lima Miranda e meu pai Adelson Ribeiro de Miranda por sua dedicação e amor dispensados a mim;

A Mariana Marques e seus pais pelo incentivo e apoio no caminhar dessa jornada;

Ao professor Lenimar Nunes de Andrade por orientar, incentivar e inspirar com toda sua experiência e perícia sobre as aplicações na Geometria com o uso do programa GeoGebra. E também aos professores Valdenilza Ferreira da Silva e José de Arimatéia Fernandes por fazer parte da banca, contribuir com uma leitura atenta e com sugestões importantes para melhoria do trabalho.

Aos amigos verdadeiros que estiveram sempre presentes nos mais difíceis momentos.

Dedicatória

Dedico este trabalho àqueles que acreditam que existem inúmeros caminhos que nos levam a concretizar o sonho de poder ajudar a outras pessoas a seguir em frente na busca por conhecimentos e formação de um cidadão pleno e responsável.

Resumo

Este estudo objetivou mostrar através da construção de objetos em 3D usando o software GeoGebra como apoio ao processo de aprendizagem no conteúdo de lugares geométricos no espaço. Destacamos o uso do software GeoGebra e suas principais ferramentas na geometria plana e espacial através da construção e visualização dos conceitos apresentados em roteiros de criação de figuras planas e em 3D. Para tanto, apresentamos a interface do software GeoGebra para geometria plana e espacial. Apresentamos a definição de lugar geométrico e proposições relativos ao assunto e escolhemos cinco lugares geométricos descritos teoricamente para a construção passo a passo de figuras em 3D de modo que possam representar tais objetos dinamicamente. Por meio de toda a construção realizada, foi possível confirmar que o software GeoGebra pode auxiliar no processo de aprendizagem abrindo possibilidade para se obter uma educação mais eficaz, dinâmica e construtivista.

Palavras-chave: Geometria espacial, Geogebra, Lugares Geométricos.

Abstract

This study aimed to show through 3D object construction using GeoGebra software as a support to the learning process in the content of geometric places in space. We highlight the use of GeoGebra software and its main tools in the flat and spatial geometry through the construction and visualization of the concepts presented in scripts for creation of flat figures and in 3D. To do so, we present the GeoGebra software interface for flat and spatial geometry. We present the definition of locus and propositions related to the subject and choose five locoes theoretically described for the step-by-step construction of 3D figures so that they can represent such objects dynamically. Through all the construction carried out, it was possible to confirm that GeoGebra software can aid in the learning process by opening up possibilities for a more effective, dynamic and constructivist education.

Keywords: Spatial Geometry, Geogebra, Geometric Locations.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O avanço das novas tecnologias tem moldado todas as áreas de conhecimento no mundo nos últimos anos, diversos acontecimentos importantes na história ocorreram e modificaram o cenário social da vida humana. Uma explosão tecnológica voltada para a tecnologia da informação redefiniu a base da sociedade de forma exageradamente rápida.

O modo com que as sociedades utilizam suas habilidades para o domínio da tecnologia, em especial as estrategicamente importantes e decisivas para o período histórico em que se situam pode contribuir para selar o destino, embora não seja fator determinante para a evolução histórica e remodelamento social, que a capacidade de transformação das sociedades seja predeterminada pela importância dada ao uso ou não dessas tecnologias.

Os primeiros computadores surgiram em 1945 nos Estados Unidos e na Inglaterra, sendo as chamadas calculadoras programáveis capazes de armazenar os programas. Eram máquinas que por muito tempo serviram ao serviço militar para cálculos científicos, tendo seu uso difundido para os civis a partir da década de 60.

Na Educação, o uso do computador ainda tem sido pouco explorado por razões diversas, que vão desde a falta de estrutura e investimentos nas escolas até a pouca formação dos profissionais da educação no uso das ferramentas de software para Educação.

O ensino da Matemática e em especial da Geometria, tem sofrido com tais problemas e o resultado final desse impasse é o pouco aproveitamento dos estudantes nessa área crucial para o desenvolvimento humano no trabalho, nas profissões e nos avanços tecnológicos. Além disso, a forma como tem sido trabalhada em sala de aula tem trazido poucas reflexões em relação às metodologias de ensino, aos conteúdos e as avaliações.

Porém, observa-se que há um movimento de mudança com relação aos objetivos da educação frente às novas exigências do mundo moderno. O uso da informática (uso dos softwares voltados para o ensino da Matemática) vem trazendo uma alternativa para tentar superar problemas de prática do ensino tradicional. O ensino da Geometria no contexto da informática vem sendo intensificado por contribuir fortemente no desenvolvimento da capacidade de visualização e simulação do material concreto.

Nos últimos anos, foram desenvolvidas diversas ferramentas tecnológicas com o objetivo de ajudar na compreensão dos conteúdos matemáticos e em especial no estudo da Geometria. Dentre os softwares disponíveis para esse fim escolhemos trabalhar com o GeoGebra por algumas razões. Uma delas é o fato de ser um software de livre acesso, sua interface é de fácil entendimento e muito intuitiva e principalmente pela qualidade das ferramentas e resultado final das construções.

Este trabalho tem como finalidade mostrar, com algumas atividades, um caminho para que qualquer professor com vontade de investir na aquisição de novos conhecimentos e metodologias diversificadas através do uso de ferramentas tecnológicas, possua uma forma de construir e explorar os conceitos, definições e demonstrações da geometria espacial utilizando o software GeoGebra.

As formas geométricas, assim como a sua visualização, argumentação lógica e sua aplicação na busca de soluções para problemas, são itens importantes tanto para o entendimento, observação de espaço e construção de modelos, quanto para interpretar questões dos diversos campos da Matemática e também em outras áreas de conhecimento (BRASIL,1997).

Assim usando como base as definições e os teoremas relativos a Lugares Geométricos, utilizamos o GeoGebra como ferramenta para através da manipulação dos objetos construídos, possibilitar ao professor mais ferramentas para ensinar esse conteúdo, bem como uma forma de atrair a atenção dos alunos com o uso das novas tecnologias com a finalidade de concretizar sua aprendizagem no estudo da geometria espacial, possibilitando ampliar sua visão na busca de novos conhecimentos para a vida de um modo geral.

O objetivo geral desse trabalho é a construção de alguns objetos sobre lugares geométricos que possam simular uma figura concreta através de sua manipulação no programa GeoGebra. Para tanto se faz necessário conhecermos um pouco sobre a interface do programa, mostrar a funcionalidade de cada ferramenta disponível, além de mostrar através de exemplos como se usa cada uma delas para que o objetivo seja atingido, que é a compreensão dos conceitos da Geometria na construção dos lugares geométricos.

Para isso teremos como objetivos específicos conhecer através de exploração as ferramentas necessárias para a criação de figuras geométricas planas, de objetos em três dimensões, mostrar as definições, teoremas e demonstrações de alguns lugares geométricos e, por fim, o passo a passo da construção de tais objetos no GeoGebra.

No primeiro capítulo, falamos um pouco sobre o programa GeoGebra e seu significado, sua origem e onde pode ser encontrado. Mostramos sua tela inicial e como as ferramentas são organizadas no layout. Através de exemplos simples mostraremos como e o que é preciso para construir objetos sobre conceitos básicos da geometria plana, tais como ponto, reta, o conceito geométrico de soma de vetores, segmentos e gráfico de função.

No segundo capítulo tratamos dos objetos em três dimensões mostrando a interface inicial da janela de visualização 3D, e através de exemplos mostraremos os comandos disponíveis para a construção de pontos, retas, planos, poliedros e corpos redondos, assim como superfícies dadas através de funções. Por fim, apresentaremos o roteiro de construção de conceitos da Geometria espacial através de exemplos de retas reversas, relação entre o volume de um prisma e de uma pirâmide de mesma base e altura, cubo e sua planificação, interseções entre o plano e uma superfície com animação, bem como a interseção de duas superfícies e curvas.

No terceiro capítulo, trataremos da apresentação da definição de lugar geométrico no espaço, bem como de algumas proposições e suas demonstrações como fundamentação teórica para os objetos que serão construídos utilizando o GeoGebra.

No quarto capítulo, detalhamos o roteiro de construção passo a passo de cinco lugares geométricos, com ilustrações, apresentados no capítulo três, tais como o plano e reta medial, plano bissetor, a interseção do plano com a esfera e os tipos de interseção do cone com um plano.

E, finalmente, no quinto capítulo, faremos as considerações finais sobre o trabalho com o uso do GeoGebra na construção de lugares geométricos no espaço para uma melhor compreensão do assunto, bem como a possibilidade de expandir esse uso em trabalhos futuros para a utilização do programa para construir e facilitar o aprendizado da geometria seja plana ou espacial na educação básica ou no ensino superior.

Capítulo 1

Geometria Dinâmica com o GeoGebra

1.1 Introdução

GeoGebra (= Geometria + Álgebra) é um programa austríaco gratuito que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. De um modo bem simples, podem ser construídos pontos, segmentos de reta, polígonos, circunferências, vetores, gráficos de funções, cônicas e, depois, podem ser dinamicamente modificados com um simples movimento do *mouse*. Pode ser utilizado em dezenas de idiomas, inclusive português. Recebeu vários prêmios internacionais, incluindo o prêmio de melhor software educacional alemão e europeu.

A cada objeto geométrico constante da área de desenhos corresponde uma expressão algébrica, a qual aparece na janela ao lado. As alterações em cada objeto podem também ser feitas diretamente nas suas equações.

A execução do GeoGebra depende da prévia instalação da linguagem Java. Tudo pode ser copiado gratuitamente a partir do endereço na Internet
www.geogebra.at ou www.geogebra.org.

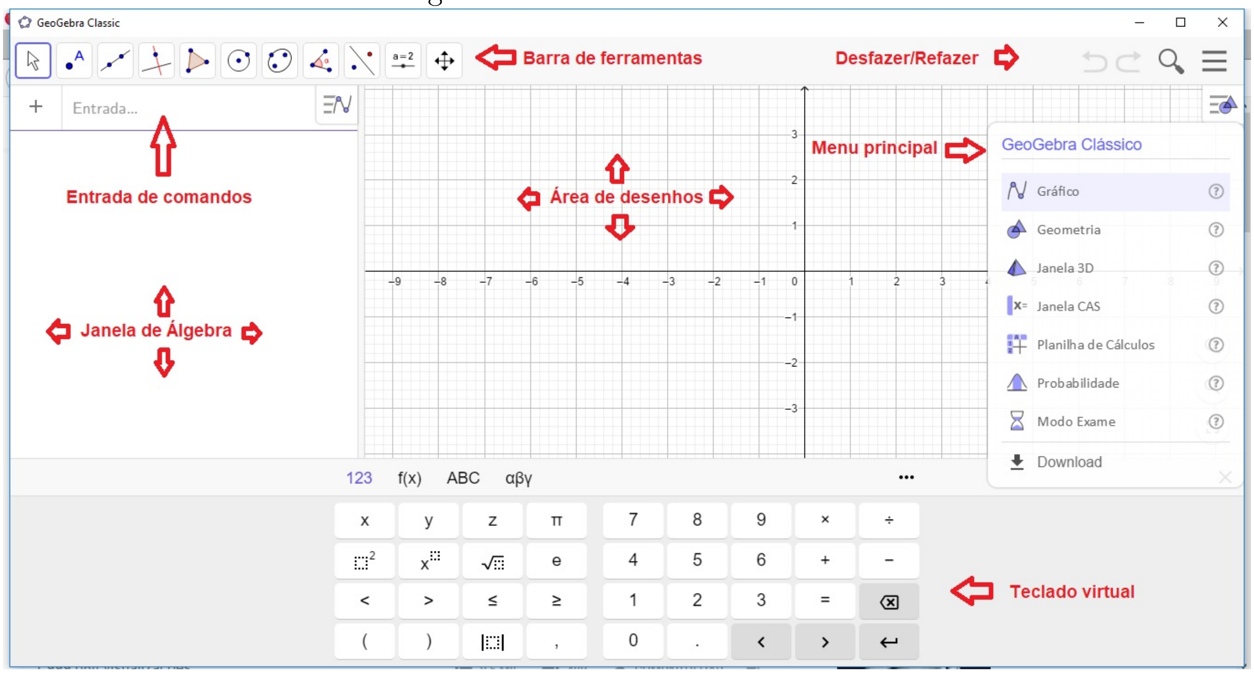
Sua tela inicial é parecida com a mostrada a seguir:

Para se desenhar uma reta que passa por dois pontos dados, por exemplo, pode-se proceder de uma das seguintes formas:

- Usando-se apenas o *mouse*:

  - Na barra de ferramentas, damos um clique como o *mouse* no ícone denomi-

Figura 1.1: Janela Inicial



Fonte: Elaborado pelo autor

nado **"Ponto"**.
- Na área de desenhos, escolhemos uma posição e damos mais um clique. Com isso, é criado um ponto A.
- Escolhemos outra posição e definimos um outro ponto B. À medida que são desenhados, esses pontos vão sendo definidos por suas coordenadas na janela de Álgebra, na seção dos objetos livres (independentes).
- Novamente na barra de ferramentas, escolhemos outro item. Dessa vez, damos um clique no item **"Reta"**.
- Clicamos em cima do ponto A e outro em cima de B. E, assim, a reta AB está definida. Sua equação passa a fazer parte da janela de Álgebra a seção dos objetos dependentes.
- Depois de definidos, os objetos livres podem ser movimentados. Para isso, basta arrastá-los com o *mouse*. Todos os demais itens que dependerem dos objetos livres acompanharão as mudanças.

- Através da janela de entrada de comandos:

  - À direita do botão com a palavra **"Entrada"**, que aparece na parte de cima, digitamos as coordenadas dos pontos desejados. Por exemplo, digitamos $A = (3, 4)$ e, depois, $B = (0, -2)$.

- Digitamos $r = reta(A, B)$ para criar a reta r que passa pelos pontos A e B. Note que o nome dos comandos também pode ser em português, se o programa estiver configurado para esta língua. Para ajustar o idioma, basta usar o item **"Configurações"** do menu e escolher **"Idioma [Portuguese/Português(Brasil)]"**.
- Com isso, uma reta definida por dois pontos fica desenhada na área de desenhos. Agora, ela pode ser modificada arrastando-se os pontos com o *mouse* ou dando dois cliques rápidos com o botão esquerdo em cima das equações da janela de Álgebra e redefinindo-os.

Cada objeto definido pode ter sua aparência modificada através do item **"Configurações"**, que aparece depois que for pressionado o botão direito do mouse em cima do objeto selecionado. Podem ser alterados a cor, a largura do traço, o tracejado, etc.

Uma vez definidos, os objetos podem ser exportados na forma de página da Internet (formato HTML).
Assim, estarão à disposição na grande rede mundial de computadores, podendo ser vistos por qualquer um que tiver a linguagem Java instalada.

1.2 Exemplos

A seguir, forneceremos alguns exemplos de utilização desse programa. Outros exemplos podem ser encontrados em:

- http://dmentrard.free.fr/GeoGebra;
- www.professores.uff.br/hjbortol/geogebra;
- https://www.geogebra.org.

1.2.1 Exemplo 1

Nesse exemplo, construímos uma circunferência e dois ângulos: um ângulo inscrito e um ângulo central. Pode-se observar a relação que existe entre as medidas desses ângulos e modificar suas posições dinamicamente.
A construção é feita da seguinte forma:

- Desenham-se três pontos A, B e C. Isso pode ser feito, por exemplo, selecionando-se o item **"Ponto"** na barra de ferramentas e clicando-se nas posições escolhidas para os pontos.

- Desenha-se a circunferência que passa por A, B e C. Para isso, basta digitar na janela de entrada de comandos o comando *c=círculo(A,B,C)* . Aqui, deve-se ter o cuidado de acentuar a palavra círculo, usar parênteses e colocar o nome dos pontos exatamente como eles foram introduzidos no item anterior (em letras maiúsculas). Uma opção à digitação do comando é procurá-lo na barra de ferramentas, no item dedicado à construção de círculos e circunferências, selecionar o item **"Círculo definido por três pontos"** e, depois, clicar na área de desenhos sobre cada um dos três pontos escolhidos.

- Na janela de entrada de comandos, digitar *O = Centro(c)*. Com isso, deverá ser mostrado o centro O do círculo.

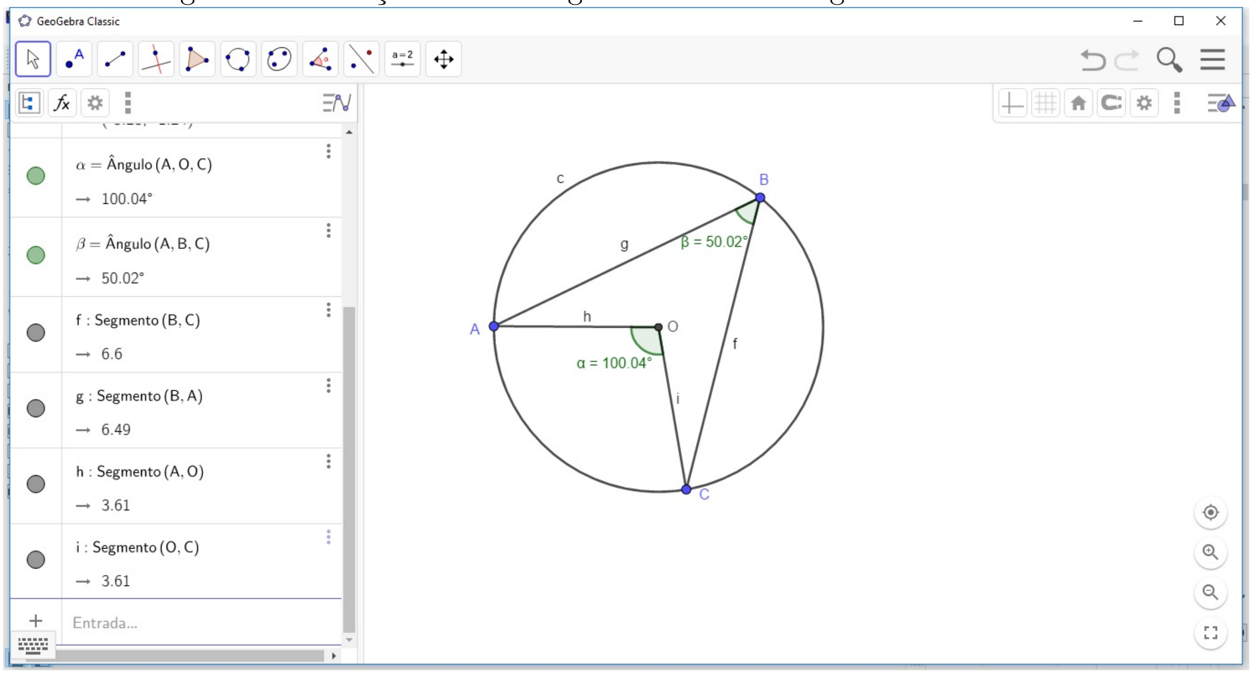
- Selecione o item **"Ângulo"** da barra de ferramentas. Depois, clique sobre os pontos A, O e C para definir o ângulo central e sobre os pontos A, B e C para definir o ângulo inscrito. Outra opção é digitar *ângulo(A,B,C) e ângulo (A,O,C)* na janela de entrada de comandos.

- Após selecionar o item **"Segmento"** da barra de ferramentas, pressione sobre os pontos B, C, sobre B, A, sobre O, C e sobre O, A para completar as construções dos ângulos. Outra opção é digitar os comandos *segmento(B,C), segmento(B,A), segmento(O,C) e segmento(O,A)* na janela de entrada de comandos.

- Escolhemos os eixos coordenados através do item "Exibir"do menu principal, onde desmarcamos o item "Eixo".

Com isso, a construção está completa. Pode-se fazer, ainda, alguns acabamentos, tais como esconder os nomes de alguns objetos ou mudar suas cores. Para isso, é só clicar em cima do objeto, selecionar o item **"Configurações"** e fazer as mudanças desejadas.

Figura 1.2: Relação entre o ângulo inscrito e o ângulo central



Fonte: Elaborado pelo autor

1.2.2 Exemplo 2

Neste exemplo, ilustramos as definições do *seno* e do *cosseno* de um ângulo de medida t radianos. Em uma circunferência de raio 1 e centro na origem $A = (0, 0)$, definimos um ponto fixo $B = (1, 0)$ e um ponto livre C. Definimos t como sendo a medida do ângulo $B\hat{A}C$ e calculamos as projeções R e S de C nos eixos coordenados. As coordenadas de C, $x(C)$ e $y(C)$ correspondem ao *cosseno* e *seno* de t, respectivamente. Podemos deslocar C por toda a circunferência e observar a variação de t, $sen(t)$ e $cos(t)$.

Usamos o seguinte roteiro na construção deste exemplo:

- Definimos na janela de entrada de comandos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $c =$ *Círculo(A,B)*, círculo de centro A e passando pelo ponto B. Clicamos com o botão direito sobre B e, no item **"Configurações"** marcamos a opção **"Fixar objeto"**.

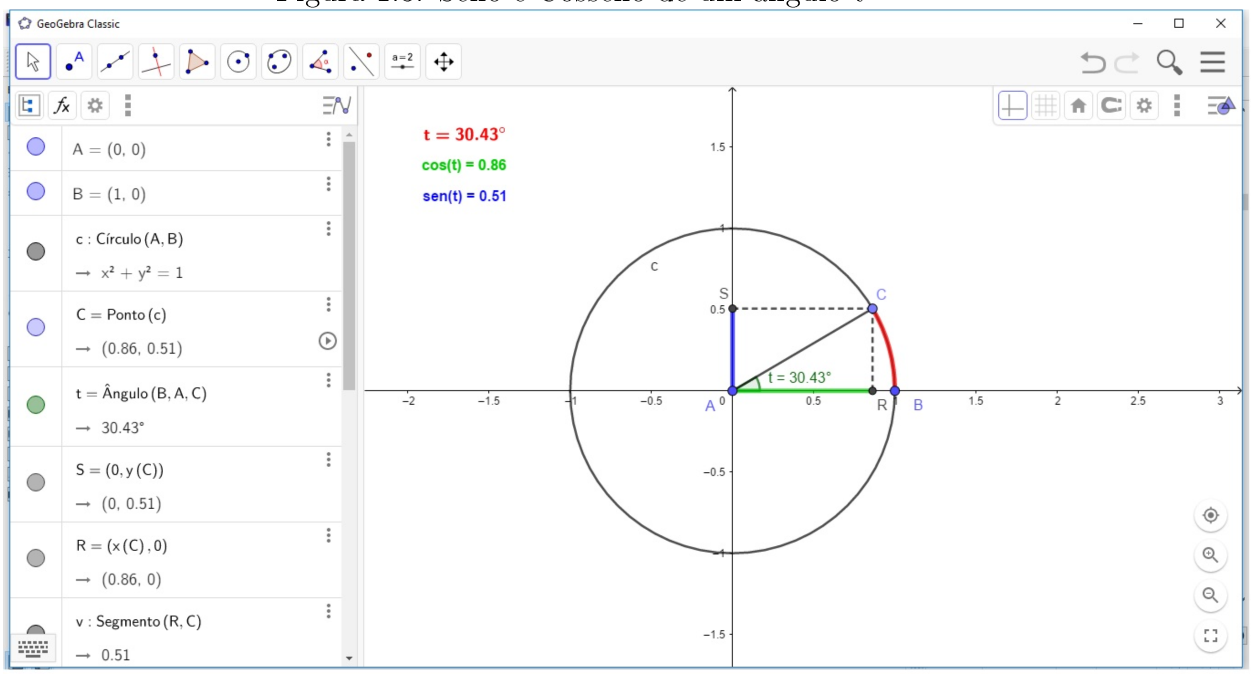
- Escolhemos um ponto C sobre o círculo c com o comando $C =$ *ponto(c)*.

- Definimos o ângulo $t =$ *Ângulo(B,A,C)*.

- Definimos as projeções $S = (0, y(C))$ e $R = (x(C), 0)$.
- Definimos os segmentos $v = Segmento(R,C)$, $h = Segmento(S,C)$ e o *arco* $d = ArcoCircular(A,B,C)$.
- Definimos os segmentos $a = Segmento(A,R)$ e $b = Segmento(A,S)$
- A partir da barra de ferramentas, selecionamos a ferramenta **"Texto"**. Selecionamos três locais na área de desenhos com o *mouse* e, depois de cada clique, digitamos os seguintes textos: t = t (Em **"Avançado"** procure o símbolo do GeoGebra e clique na letra t), cos(t)= a (Em **"Avançado"** procure o símbolo do GeoGebra e clique na letra a) e sen(t)= b (Em **"Avançado"** procure o símbolo do GeoGebra e clique na letra b). Com eles, é possível mostrar a cada momento os valores de t, $cos(t)$ e de $sen(t)$.

Faltam só alguns acabamentos, como por exemplo, alterar as propriedades dos segmentos a, b e do arco d para modificar suas cores e as larguras dos seus traços. É recomendável também alterar as propriedades dos segmentos v, h, modificando os estilos das retas para torná-las pontilhadas.

Figura 1.3: Seno e Cosseno de um ângulo t

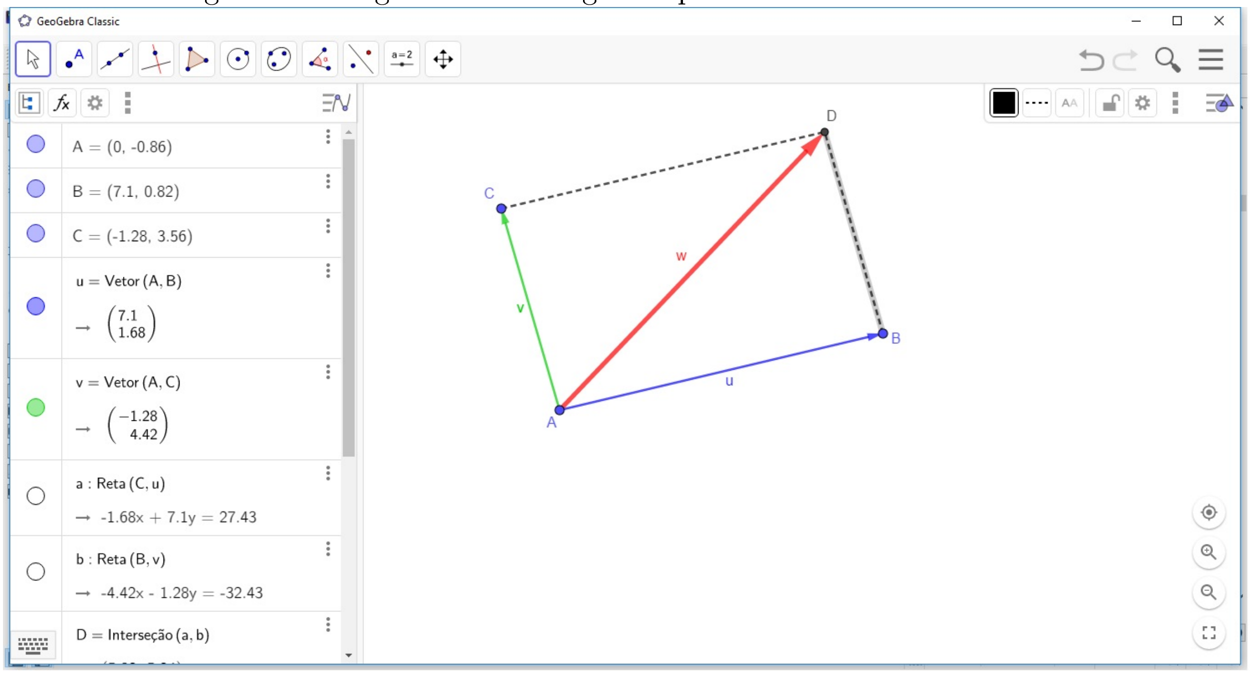


Fonte: Elaborado pelo autor

1.2.3 Exemplo 3

Nesse exemplo, ilustramos a ***"regra do paralelogramo"*** para a soma de dois vetores. Depois de construído, os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ser arrastados (modificados) com o *mouse*. Desse modo, podemos notar que sua soma $\vec{v}+\vec{w}$ se adapta a cada nova posição.

Figura 1.4: Regra do Paralelogramo para soma de vetores



Fonte: Elaborado pelo autor

O roteiro de construção é:

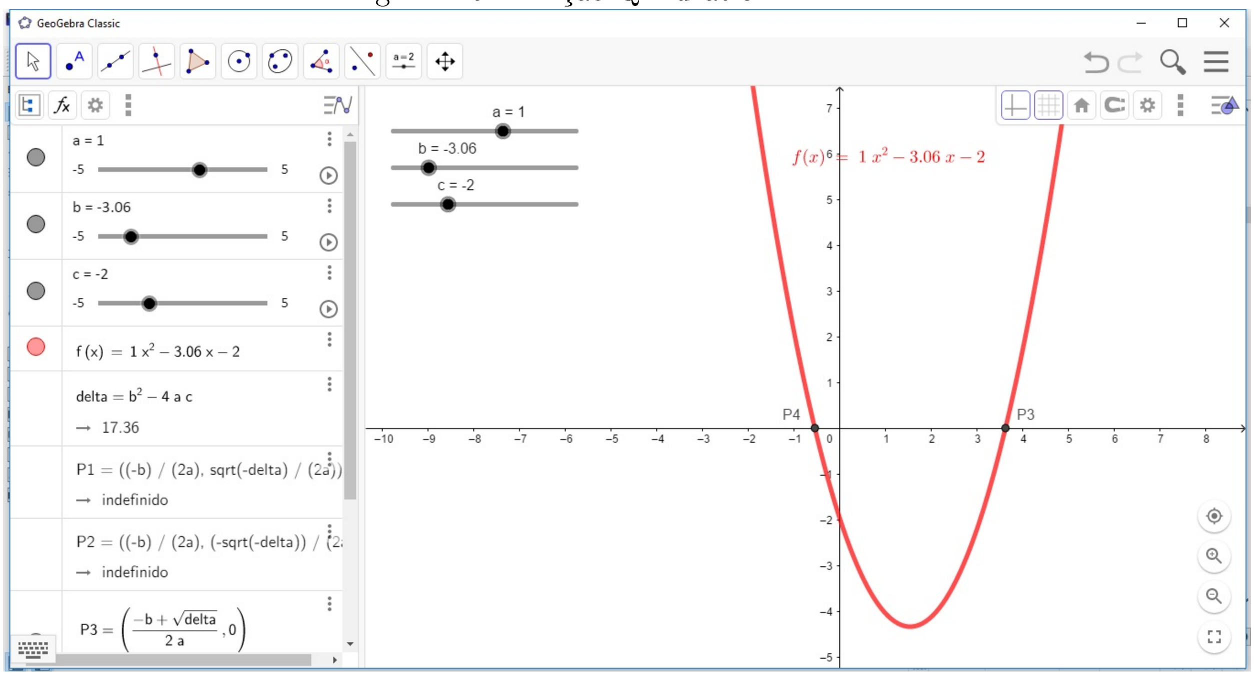
- Definimos três pontos A, B e C.
- Definimos os vetores u = *Vetor(A,B)* e v = *Vetor(A,C)*.
- Definimos as retas a = *Reta(C,u)*, b = *Reta(B,v)* que passam pelos pontos C, B e paralelas a u, v, respectivamente. Alteramos as propriedades de cada uma de modo a torná-las invisíveis; para isso, basta desmarcar o item "Exibir objeto"em cada uma.;
- Calculamos D = *Interseção(a,b)*, a interseção das retas a e b.
- Definimos w = *Vetor(A,D)* e alteramos suas propriedades de modo a deixá-lo com um traço mais largo e de outra cor.

- Definimos os segmentos $c = Segmento(B,D)$ e $d = Segmento(C,D)$ e alteramos seus estilos no item **"Configurações"**, para deixá-los pontilhados.
- No item **"Exibir"** do menu principal, desmarcamos o item **"Eixo"** para esconder os eixos coordenados.

1.2.4 Exemplo 4

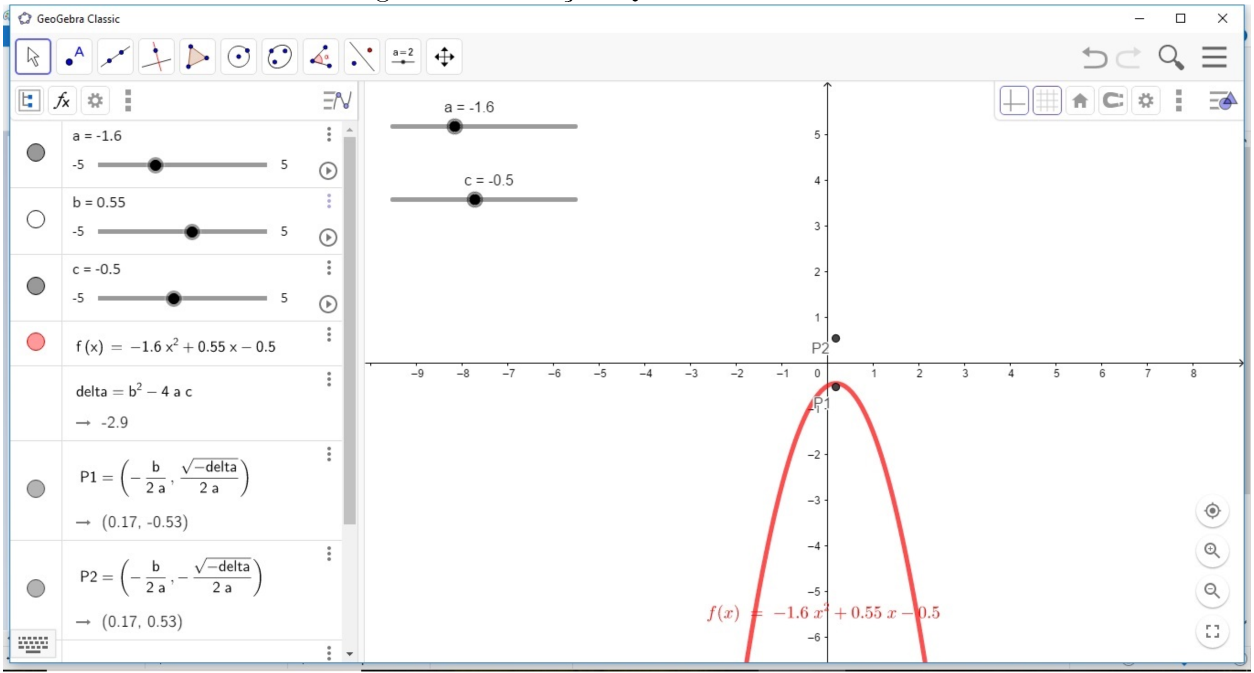
Neste exemplo, construímos o gráfico da função quadrática $f(x) = a*x^2+b*x+c$ e mostramos suas raízes nas duas figuras a seguir, sejam elas reais ou complexas. Os valores dos coeficientes podem ser modificados dinamicamente através de controles deslizantes (arrastados com o mouse).

Figura 1.5: Função Quadrática 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 1.6: Função Quadrática 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Roteiro de construção:

- Na janela de entrada de comandos, definimos os coeficientes, por exemplo, $a = 1, b = 2$ e $c = 3$. Na janela de Álgebra, clicamos com o botão direito sobre cada um deles e marcamos o item "Exibir objeto". Com isso, esses valores aparecem na área de desenho na forma de controles deslizantes. Com a ajuda do item "Mover"da barra de ferramentas, é possível reposicioná-los sobre qualquer ponto da área de desenho.
- Construímos o gráfico da função simplesmente digitando o comando $f(x) = a * x^2 + b * x + c$. Aqui, a multiplicação é denotada por um asterisco e a potenciação por um acento circunflexo.
- Usamos o item **"Deslocar eixos"** da barra de ferramentas para reposicionar o gráfico onde for conveniente.
- Definimos o discriminante da função como sendo $delta = b^2 - 4 * a * c$.
- Definimos os pontos $P1$ e $P2$ que correspondem às raízes complexas: $P1 = (-b/(2*a), sqrt(-delta)/(2*a))$ e $P2 = (-b/(2*a), -sqrt(-delta)/(2*a))$. Aqui, a divisão é indicada por uma barra e a raiz quadrada por $sqrt$. No

item **"Configuração"** de cada um desses pontos, na aba **"Avançado"**, preencher o item **"Condição para mostrar objeto"** com o seguinte: $delta < 0$. Isso significa que $P1$ e $P2$ só vão ser mostrados quando $delta < 0$.

- Definimos $P3$ e $P4$ que correspondem às raízes reais: $P3 = ((-b + sqrt(delta))/(2 * a), 0)eP4 = ((-b - sqrt(delta))/(2 * a), 0)$. No item **"Configuração"** de cada um desses pontos, na aba **"Avançado"**, preencher o item **"Condição para mostrar objeto"** com *delta>=0*.

No menu principal, no item **"Exibir"**, ao se marcar o item **"Malha"**, é mostrada uma grade de retas pontilhadas na área de desenhos.

Capítulo 2

Geometria Espacial com o GeoGebra

2.1 Introdução

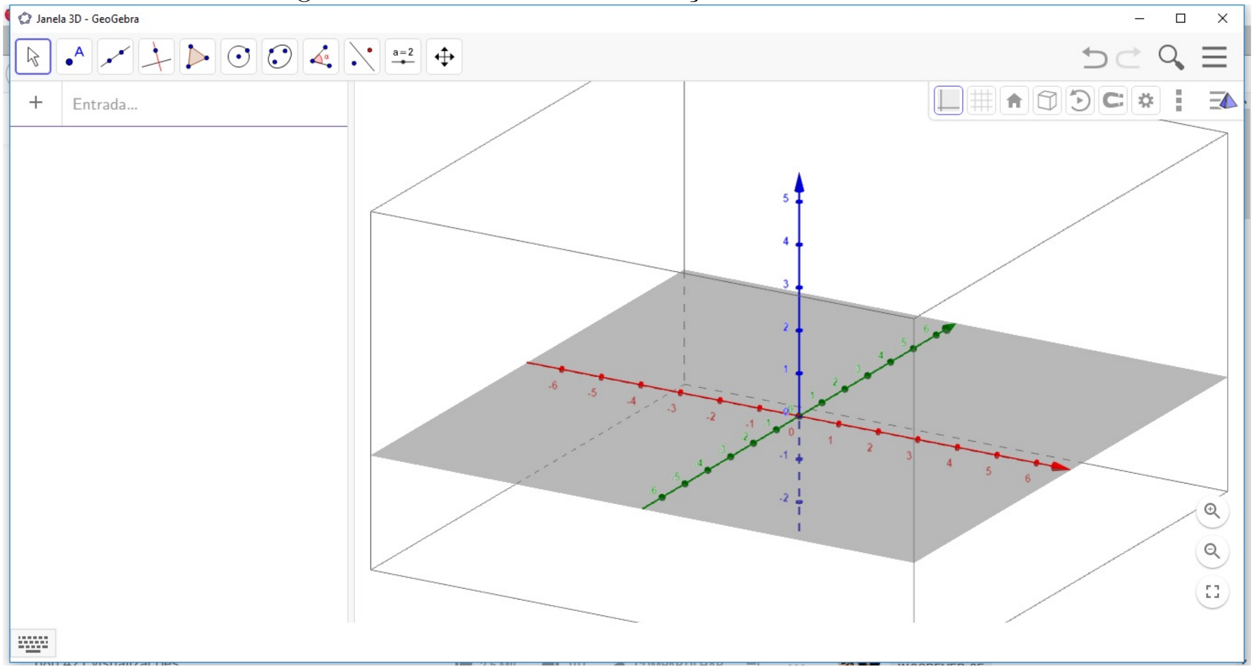
O famoso programa GeoGebra, a partir de sua recente versão 6.0, pode ser usado como uma valiosa ferramenta nos estudos de Geometria Espacial. Com ele, diversos sólidos, superfícies e curvas tridimensionais podem ser construídos sem dificuldade, assim como ocorre com o cálculo de seus comprimentos, áreas, volumes e interseções.

Em razão da importância e da disponibilidade desse programa, o presente capítulo fará uma breve explanação sobre os recursos, comandos e objetos tridimensionais acrescentados recentemente. Diversas atividades são propostas e que podem ser realizadas em sala de aula.

2.2 Visualização de Objetos Tridimensionais

No GeoGebra, há várias janelas de visualizações disponíveis. Uma delas é a "Janela de visualização 3D"a qual, como o título já diz, deve ser usada para visualização de objetos tridimensionais tais como planos, pirâmides, cones, esferas etc. Essa janela pode ser mostrada tanto através da opção Exibir $\rightarrow$ Janela de Visualização $3D$ no menu principal do programa, que aparece na parte superior da tela, como também pressionando-se simultaneamente as teclas **Ctrl Shift 3**.

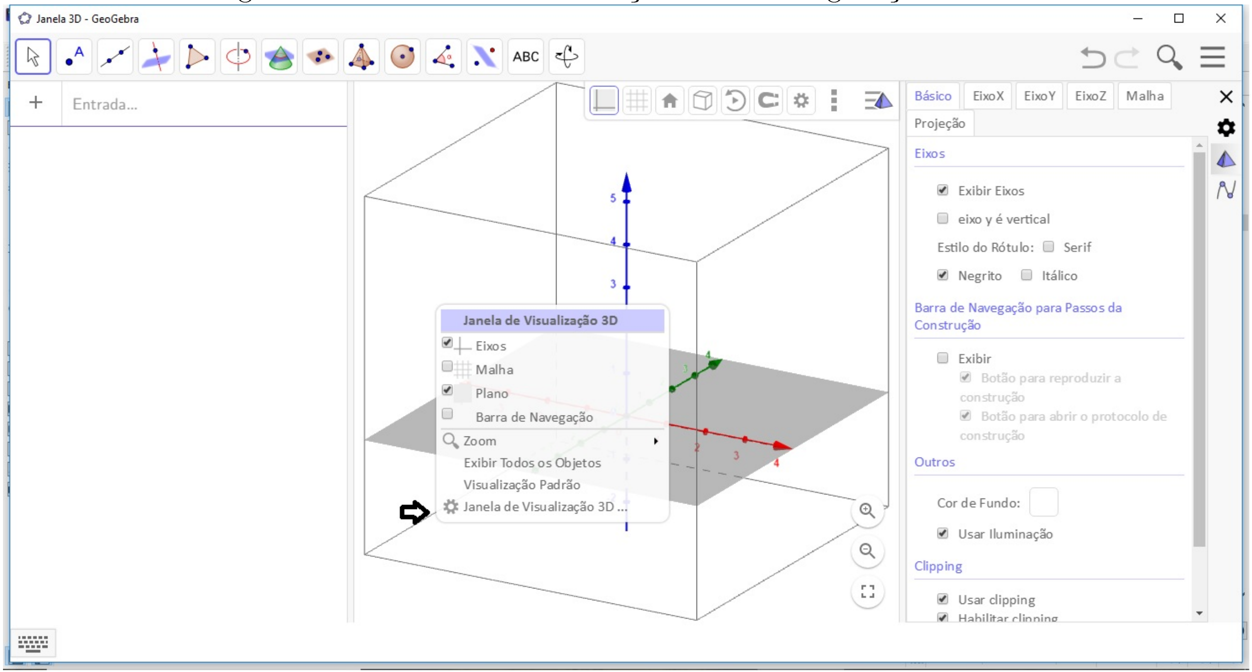
Figura 2.1: Janela de visualização 3D inicial



Fonte: Elaborado pelo autor

A configuração padrão da Janela de Visualização $3D$ inclui uma caixa, três eixos x, y e z e um plano $x0y$. Essa configuração pode ser alterada ao gosto do usuário. Se for dado um clique com o botão direito do mouse, aparecerá uma pequena janela intitulada **"Janela de Visualização 3D"**com opções de alteração. Nessa janelinha, aparece uma opção **"Janela de Visualização"** que leva a muitas opções de configuração da visualização.

Figura 2.2: Janela de visualização 3D - Configuração

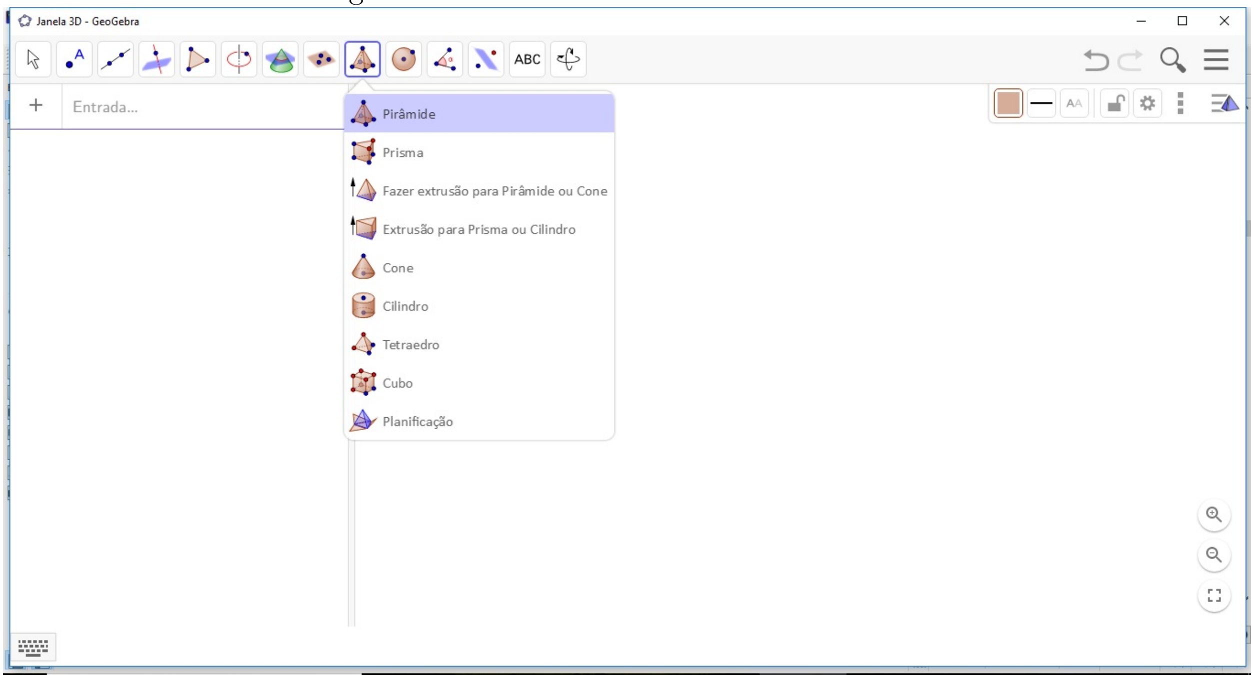


Fonte: Elaborado pelo autor

Para eliminar a caixa da janela de visualização, deve-se desmarcar a opção **"Habilitar clipping"**. As partes dos objetos que não couberem dentro dessa caixa não são mostradas, a não ser que a opção **"Usar clipping"** seja desmarcada.

Na parte superior da tela, logo abaixo da linha do menu principal, aparece uma barra de ferramentas formada por vários ícones, cada um correspondendo a determinado tipo de ação do programa. Ao se clicar na maioria desses ícones, tem-se acesso a outras opções. Por exemplo, o nono ícone da esquerda para a direita dá acesso à seguinte lista:

Figura 2.3: Barra de ferramentas 3D



Fonte: Elaborado pelo autor

2.3 Desenhando e movendo pontos

Ao se pressionar no segundo ícone da barra de ferramentas, intitulado "Ponto", pode-se desenhar pontos na janela de visualização clicando-se com o *mouse* em cima de um plano tal como o plano $x0y$, que é mostrado como padrão. Nessa hora, o indicador do mouse assume o formato de um "x" e, ao se clicar, é definido um ponto naquela posição. É possível também marcar um ponto em cima de uma reta ou de aresta de um polígono.

Um ponto também pode ser definido através de suas coordenadas x, y e z. Para isso, basta digitar o nome do ponto e suas coordenadas entre parênteses na janela de entrada, na parte de baixo da tela. Por exemplo, um ponto P localizado no eixo z, a uma altura de 4 unidades, pode ser definido escrevendo-se $P = (0, 0, 4)$ nessa janela.

Há dois movimentos permitidos para um ponto previamente definido: ao longo de uma reta (modo eixo z) ou ao longo de um plano (modo plano x0y). Deve-se dar um ou dois cliques no ponto para definir o modo de movimento. Nessa hora, aparecem umas setas em torno do ponto que indicam o tipo de movimento permitido.

O último ícone da barra de ferramentas dá acesso a um menu onde são permitidas várias operações de visualização, tais como girar, mover, ampliar ou reduzir a janela de visualização 3D.

2.4 Novos comandos

Em geral, os diversos objetos tridimensionais podem ser definidos de duas maneiras: através dos menus da barra de ferramentas ou digitando-se comandos na janela de entrada. Esses comandos podem ser digitados em português. Os objetos recebem nomes (rótulos) quando estão sendo definidos e suas equações aparecem na Janela de Álgebra. Os nomes de objetos definidos podem ser referenciados por outros comandos definidos posteriormente.

Retas e planos

- **Reta(ponto1,ponto2)** Reta que passa por dois pontos. Ex: Reta(A,B)
- **Reta(ponto,reta)** reta paralela a outra e que passa por um ponto dado. Ex: Reta(P,r)
- **Plano(ponto1,ponto2,ponto3)** Plano que passa por três pontos. Ex: Plano(A,B,C)
- **Plano(reta1,reta2)** Plano que passa por duas retas. Ex: Plano(r,s)
- **Plano(polígono)** Plano que contém um polígono. Ex: Plano(pol1)
- **Plano(ponto,plano)** Plano que passa por um ponto e é paralelo a outro plano. Ex: Plano(P,a)
- **Plano(ponto,reta)** Plano que passa por um ponto e por uma reta. Ex: Plano(Q,r)

Prismas e pirâmides

- **Prisma(ponto1,ponto2,...)** Prisma cujos vértices são dados, o último vértice em uma base diferente da base dos outros. Ex: Prisma(A,B,C,D,E)
- **Prisma(polígono,ponto)** Prisma com base definida por um polígono e um vértice da outra base. Ex: Prisma(polig1,F)
- **Prisma(polígono,altura)** Prisma com base e altura dadas. Ex: Prisma(polig2,4)
- **Pirâmide(ponto1,ponto2,...)** Pirâmide com vértices dados. Ex: Pirâmide(A,B,C,D)
- **Pirâmide(polígono,ponto)** Pirâmide com base definida por um polígono e vértice dado. Ex: Pirâmide(pol1,V)
- **Pirâmide(polígono,altura)** Pirâmide com base e altura dadas. Ex: Pirâmide(pol2,5)

Cilindros e cones

- **Cilindro(curva,altura)** Cilindro com base e altura dados. Ex: Cilindro(c,5)
- **Cilindro(ponto1,ponto2,raio)** Cilindro circular com centros das bases e raio dados. Ex: Cilindro(c1,c2,3)
- **CilindroInfinito(reta,raio)** Cilindro circular ilimitado com eixo central e raio dados. Ex: CilindroInfinito(r,4)
- **Cone(círculo,altura)** Cone circular com base e altura dados. Ex: Cone(c,5)
- **Cone(ponto1,ponto2,raio)** Cone circular com base de centro no primeiro ponto, vértice no segundo ponto e raio dados. Ex: Cone(P,Q,3)
- **Cone(ponto,reta,ângulo)** Cone circular ilimitado com centro da base, eixo central e ângulo (em radianos) entre o eixo e uma geratriz dados. Ex: Cone(P,r,0.3)
- **ConeInfinito(ponto1,ponto2,ângulo)** Cone circular ilimitado com centro da base, eixo central e ângulo entre o eixo e uma geratriz dados. Ex: ConeInfinito(P,Q,0.4)

Esferas

- **Esfera(ponto,raio)** Esfera com centro e raio dados. Ex: Esfera(C,2)

- **Esfera(ponto1,ponto2)** Esfera com centro no primeiro ponto e que passa pelo segundo. Ex: Esfera(C,P)

Sólidos de Platão

- **Cubo(ponto1,ponto2)** Cubo com uma aresta definida pelos pontos dados. Ex: Cubo(A,B)
- **Tetraedro(ponto1,ponto2)** Tetraedro com uma aresta definida pelos pontos dados. Ex: Tetraedro(A,B)
- **Octaedro(ponto1,ponto2)** Octaedro com uma aresta definida pelos pontos dados. Ex: Octaedro(A,B)
- **Dodecaedro(ponto1,ponto2)** Dodecaedro com uma aresta definida pelos pontos dados. Ex: Dodecaedro(A,B)
- **Icosaedro(ponto1,ponto2)** Icosaedro com uma aresta definida pelos pontos dados. Ex: Icosaedro(A,B)

Esses comandos dos sólidos de Platão constroem o sólido com umas das faces paralelas ao plano $x0y$, a não ser que seja fornecido um terceiro parâmetro que possa ser usado para se obter a direção de uma face. Ex: Cubo(A,B,reta), Tetraedro(P,Q,plano)

Curvas e superfícies

Superfícies e curvas no espaço podem ser construídas através dos comandos "Superfície"e "Curva", usando-se suas equações paramétricas.

- **Superfície(f(u,v)g(u,v),h(u,v)u,a,b,v,c,d)** Superfície parametrizada por $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v), a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. Ex: Superfície(u*cos(v),u*sen(v),v,u,-2,2,v,0,6.29)
- **Curva(f(t),g(t)h(t),t,a,b)** Curva parametrizada por $x = f(t), y = g(t), z = h(t), a \leq t \leq b$. Ex: Curva(t*sen(3*t),t*cos(3*t),5*t,t,-7,7)

O Gráfico de uma função de duas variáveis pode ser construído digitando-se na janela de entrada sua equação, por exemplo, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2.5 Sugestões de atividades

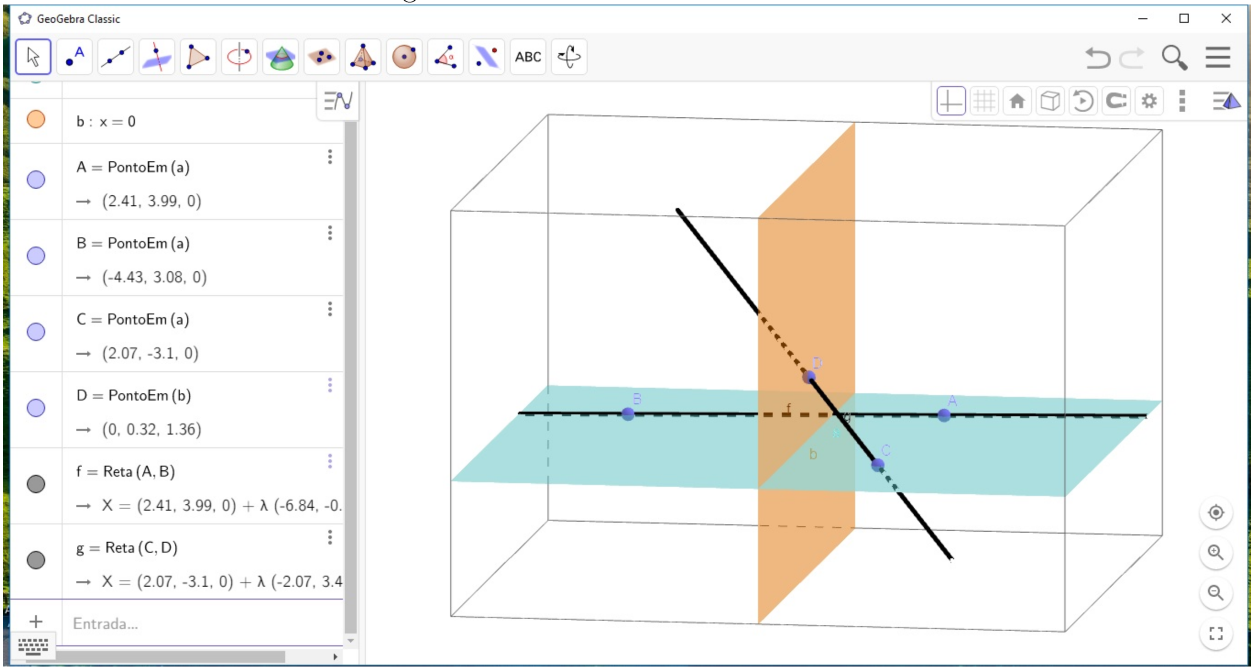
A seguir, fornecemos vários exemplos de utilização do programa que podem ser usados como atividades de exploração de diversos conceitos de Geometria Espacial.

2.5.1 Retas reversas

Inicialmente, exploramos o conceito de retas reversas, observando duas retas em diferentes posições. Para isso:

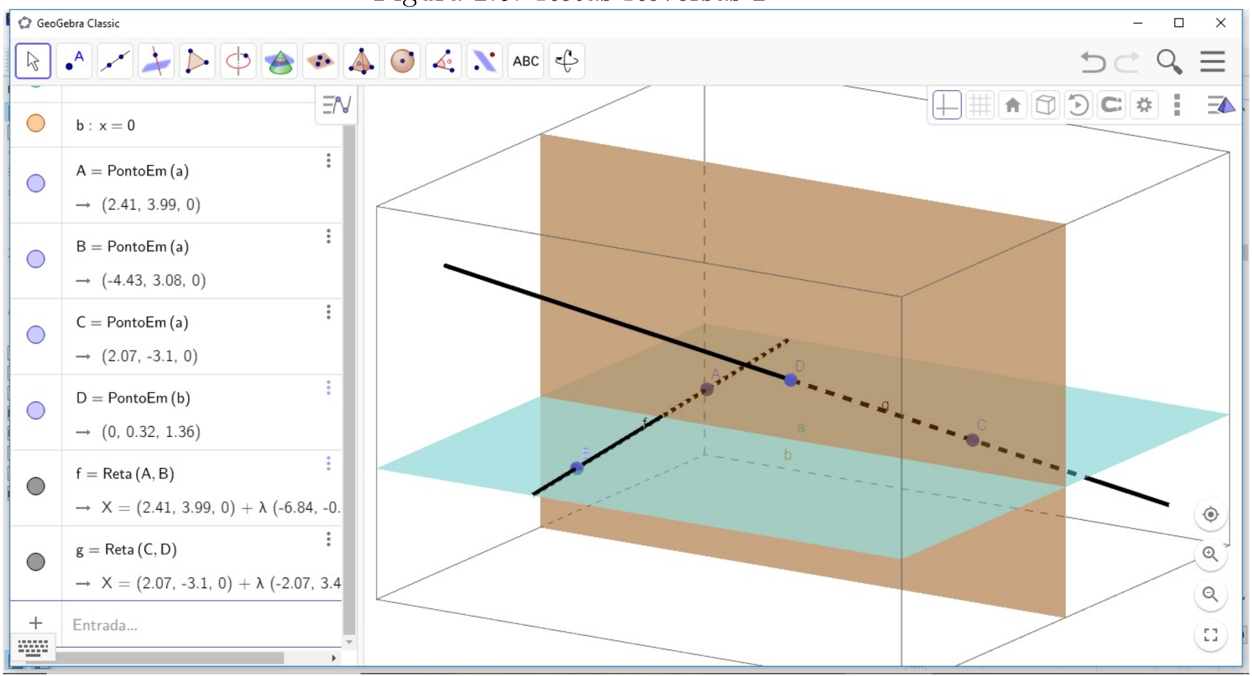
- Eliminamos os eixos da janela de visualização - basta pressionar com o botão direito do mouse na janela e dar um clique em "Eixos".
- Construímos dois planos: um é o plano $z = 0$ (que já aparece na janela no início) e o outro é o plano $x = 0$. Para isso, basta digitar na janela de entrada suas equações.
- Selecionamos a opção "Ponto"na barra de ferramentas e marcamos três pontos A, B, C em um plano e um ponto D no outro plano.
- Selecionamos "Reta"na barra de ferramentas e clicamos em A e B para definir a reta AB e, depois, em C e D para definir a reta CD.
- Selecionamos a opção "Girar Janela de Visualização 3D"na barra de ferramentas e, com o auxílio do mouse giramos a caixa da janela de visualização e observamos que as retas AB e CD não são paralelas, nem coincidentes e nem concorrem. Logo, são retas reversas. Conforme observamos na figura 2.4 e figura 2.5.

Figura 2.4: Retas Reversas 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2.5: Retas Reversas 2



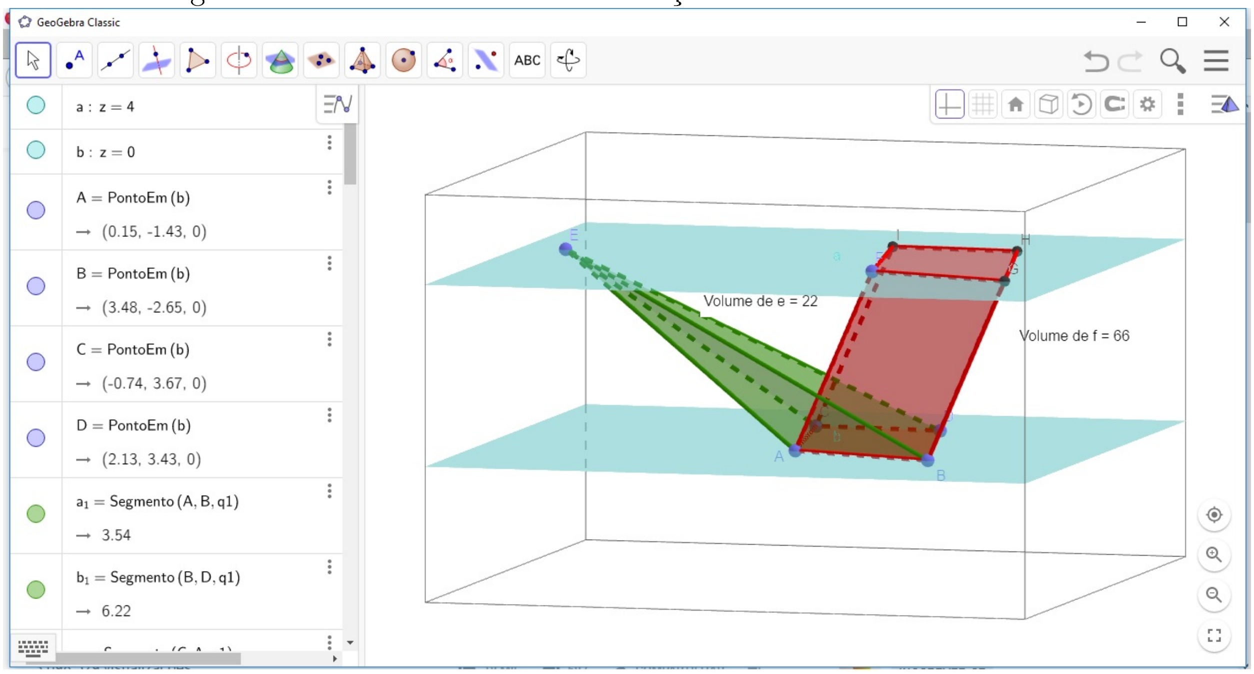
Fonte: Elaborado pelo autor

2.5.2 Pirâmide e prisma - alturas e volumes

Neste exemplo, construímos uma pirâmide e um prisma de mesma base e mesma altura. Observamos a relação entre seus volumes (que aparecem na Janela de Álgebra), que um é o triplo do outro. Podemos observar também que quando os vértices se deslocam mantendo-se a mesma altura de cada sólido, os volumes não variam.

- Definimos um plano de altura 4. Para isso, basta escrever a equação $z = 4$ na janela de entrada.
- Desenhamos um polígono no plano da base ($z = 0$), por exemplo um quadrilátero $ABCD$. Para isso, basta usar a opção "Polígono"da barra de ferramentas e marcar os pontos. Deve-se fechar o polígono clicando-se em cima do primeiro ponto marcado.
- Definimos dois pontos E e F pertencentes ao plano $z = 4$. Para isso, usamos a opção "Ponto em objeto"da barra de ferramentas e clicamos em duas posições no plano.
- Desenhamos uma pirâmide de base $ABCD$ e vértice E. Para isso, digitamos o comando Pirâmide(A,B,C,D,E) na janela de entrada ou usamos a opção "Pirâmide"da barra de ferramentas.
- Desenhamos um prisma de base $ABCD$ e um dos vértices como sendo o ponto F. Para isso, basta digitar Prisma(A,B,C,D,F) na janela de entrada ou usar a opção "Prisma"da barra de ferramentas.
- Depois de construídos, podemos mover os pontos E ou F à vontade e verificar que os volumes do prisma e da pirâmide não mudam de valor pois a altura (que é a distância entre os planos é igual a 4) não varia.

Figura 2.6: Prisma e Pirâmide - Relação entre seus volumes



Fonte: Elaborado pelo autor

2.5.3 Cubo - áreas, diagonais e planificação

Neste exemplo, desenhamos um cubo e exploramos alguns conceitos como volume, áreas das faces, comprimentos das arestas, comprimentos de diagonais e planificação.

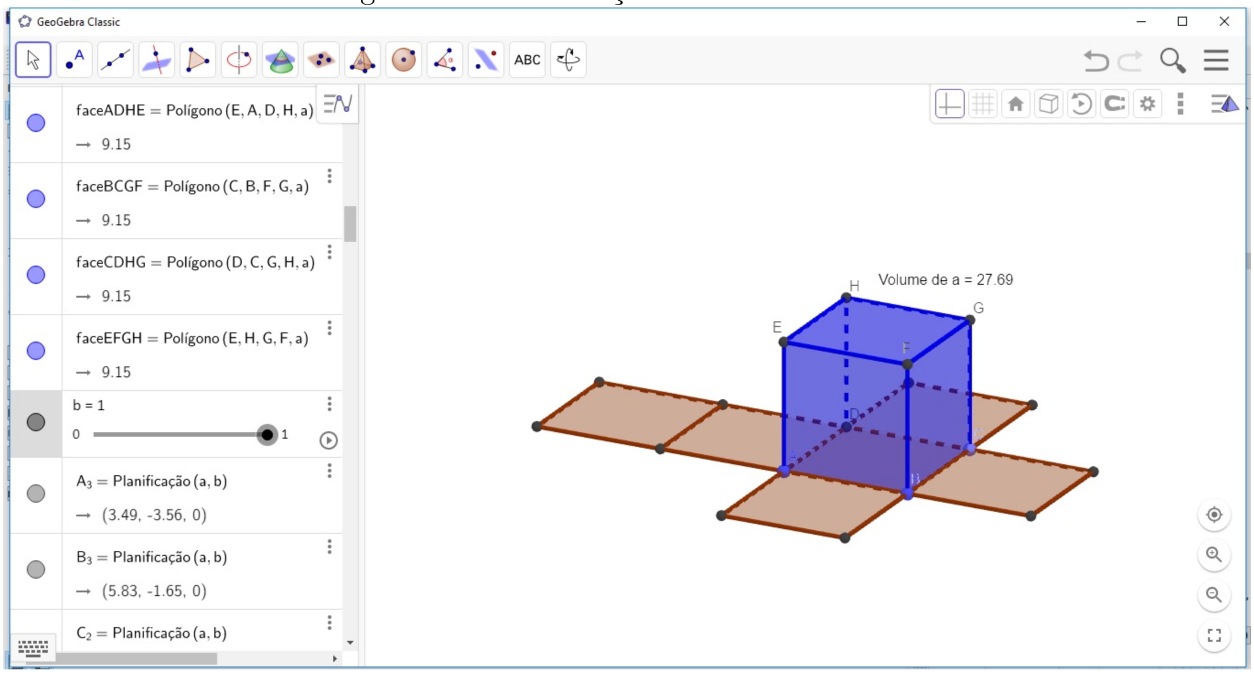
- Eliminamos da janela de visualização os eixos, o plano x0y e a caixa de *"clipping"* que são mostrados no início. Para isso, basta clicar na janela com o botão direito do mouse e alterar a configuração.
- Definimos dois pontos A e B. Isso pode ser feito de duas maneiras: usando a opção "Ponto"da barra de ferramentas ou digitando-se as coordenadas de cada ponto na janela de entrada:$A = (0, 0, 0)$ e $B = (4, 0, 0)$, por exemplo.
- Desenhamos um cubo de aresta AB. Para isso, podemos usar a opção *"Cubo"* da barra de ferramentas e clicar nos pontos A e B ou digitar o comando Cubo(A,B) na janela de entrada. Podemos alterar as propriedades (cores etc.) do cubo clicando com o botão direito do mouse.
- Desenhamos a planificação desse cubo, ou seja, sua área total. Pode ser usado a opção *"Planificação"* da barra de ferramentas ou um comando Planifica-

ção[nome,número] na janela de entrada, onde *"nome"*é o nome do cubo desenhado e *"número"* é um valor de 0 a 1 e que corresponde à posição do desenho do cubo planificado. Por exemplo, Planificação(a,0.5) desenha a planificação *"a meio caminho"*, enquanto que Planificação(a,1) desenha a planificação completamente no plano da base do cubo.

- Depois de definido um sólido (como o cubo), podemos calcular seu volume e todas as suas áreas e comprimentos. Para isso, podemos observar esses valores que aparecem na Janela de Álgebra ou usar as opções *"Distância, comprimento ou perímetro"*, *"Área"*, *"Volume"* da barra de ferramentas, ou digitar na janela de entrada comandos como Comprimento(arestaAB), Área(faceCDHG) ou Volume(a).

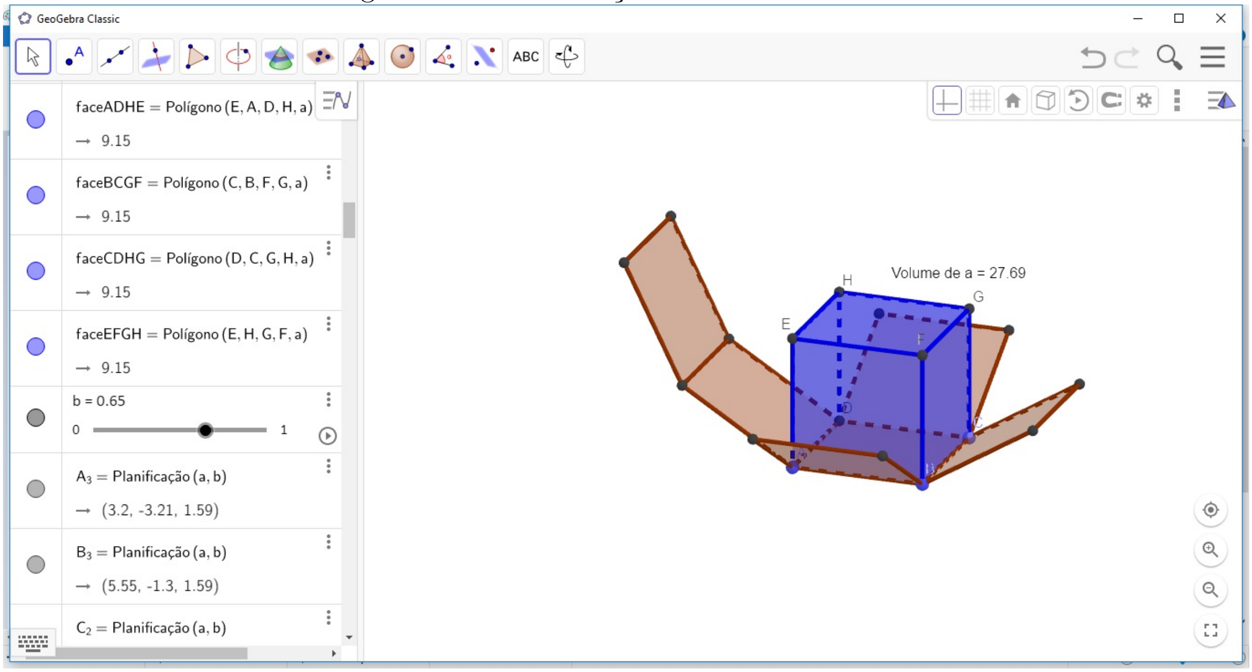
- Podemos "obter"o comprimento de diagonais, bastando defini-la como um segmento do sólido e calcular seu comprimento.

Figura 2.7: Planificação do Cubo 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2.8: Planificação do Cubo 2



Fonte: Elaborado pelo autor

2.5.4 Interseções de um cone com um plano

Neste exemplo, visualizamos as interseções de um plano com um cone e podemos verificar que elas são as curvas conhecidas como *"Cônicas"*.

- Selecionamos *"Ponto"* na barra de ferramentas e marcamos dois pontos A e B.

- Na janela de entrada digitamos o comando ConeInfinito(A,B,0.5) para desenhar um cone com eixo AB e ângulo entre o eixo e uma geratriz de 0.5 radianos.

- Selecionamos *"Ponto"* novamente e marcamos três pontos C, D, E.

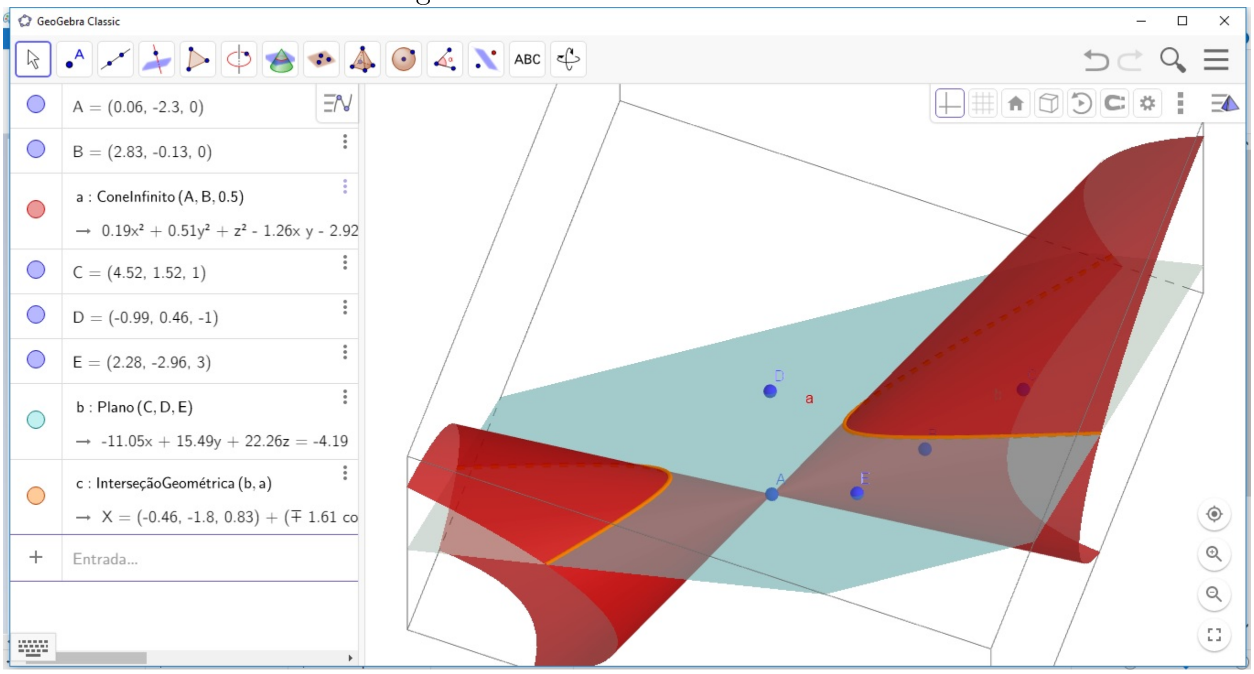
- Selecionamos *"Plano por três pontos"* na barra de ferramentas e clicamos nos pontos C, D, E. Com isso, é desenhado o plano que passa por esses pontos.

- Selecionamos *"Interseção de Duas Superfícies"* e clicamos no cone e no plano. Depois, clicamos com o botão direito do *mouse* na interseção obtida e alteramos suas propriedades, aumentando a espessura da linha.

- Selecionamos *"Mover"*, clicamos em um dos pontos A, B, C e movemos o ponto selecionado ao longo da janela e observamos as modificações na interseção.

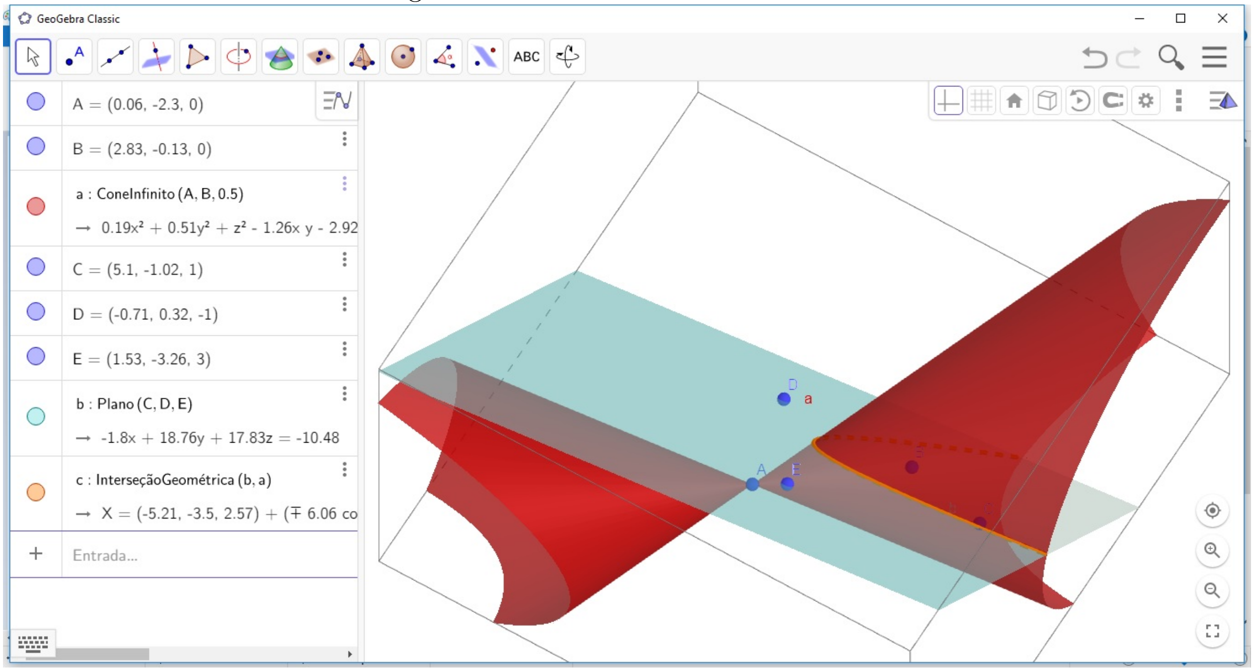
Dependendo da posição do plano com relação ao cone, podemos obter uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

Figura 2.9: Cone Infinito 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2.10: Cone Infinito 2



Fonte: Elaborado pelo autor

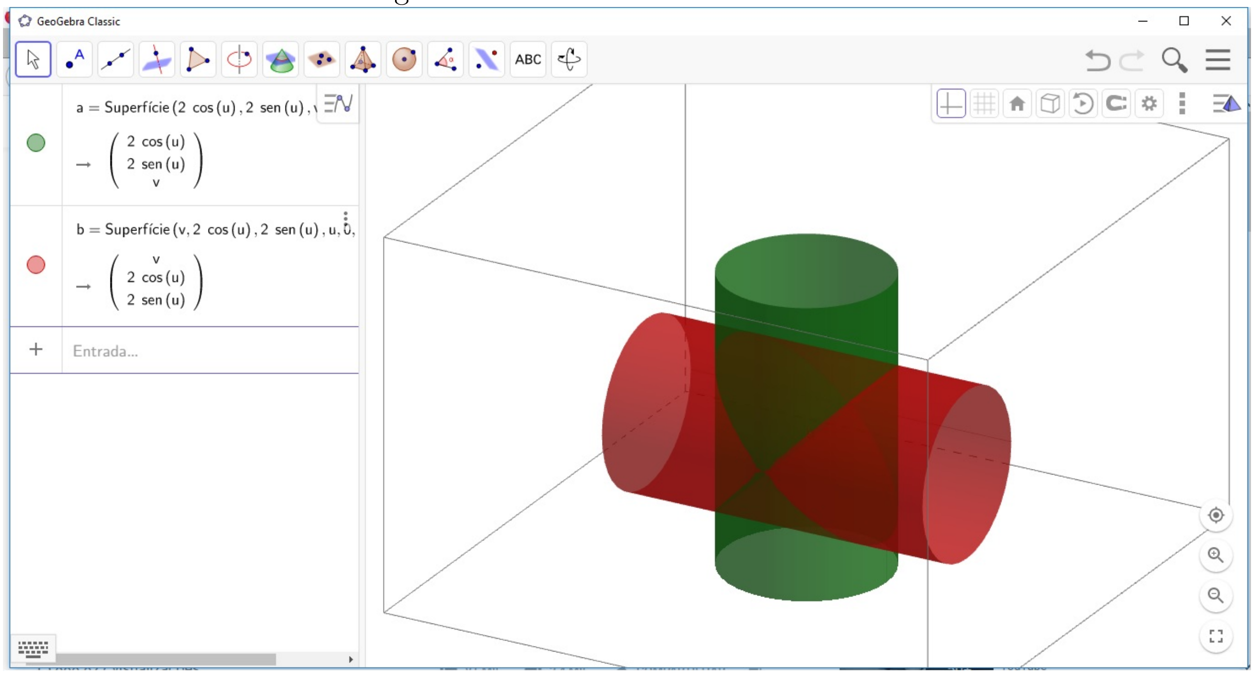
2.5.5 Duas superfícies

Construímos os gráficos de duas superfícies (cilindros circulares) e observamos sua interseção. Para isso, basta digitar na janela de entrada os comandos

- Superfície(2cos(u),2sen(u),v,u,0,6.29,v,-4,4)
- Superfície(v,2cos(u)2sen(u),u,0,6.29,v,-4,4)

alterar as cores e girar à vontade.

Figura 2.11: Cilindro Circular



Fonte: Elaborado pelo autor

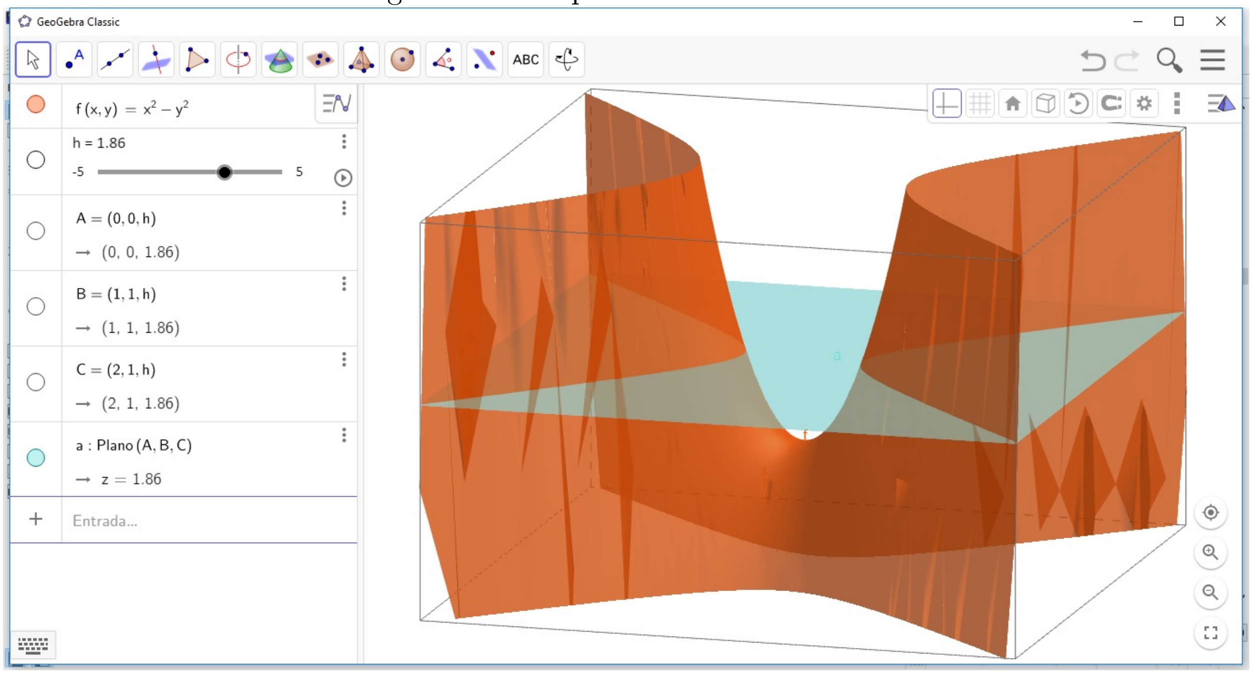
2.5.6 Animação envolvendo um plano e uma superfície

Neste exemplo, construímos uma animação com um plano horizontal intersectando uma superfície. No final da construção do gráfico, a animação pode ser salva em disco como um GIF animado através da opção Arquivo → Exportar do menu.

- Digitamos $f(x, y) = x^2 - y^2$ na janela de entrada.
- Atribuímos um valor para um parâmetro na janela de entrada, por exemplo, $h = 4$.
- Definimos três pontos não colineares com altura dependendo do parâmetro h, por exemplo, $A = (0, 0, h), B = (1, 1, h), C = (2, 1, h)$.
- Desenhamos o plano que passa pelos pontos A, B, C com um comando Plano(A,B,C).
- Alteramos as propriedades desses objetos clicando com o botão direito do *mouse* neles. Podemos alterar as cores e esconder os pontos A, B, C e os eixos coordenados.

- clicamos com o botão direito no parâmetro h e selecionamos a opção *"Animar"*. Com isso, o valor de h começa a variar automaticamente, aumentando ou diminuindo, e o plano começa a subir ou descer no gráfico.

Figura 2.12: Superfície e Plano



Fonte: Elaborado pelo autor

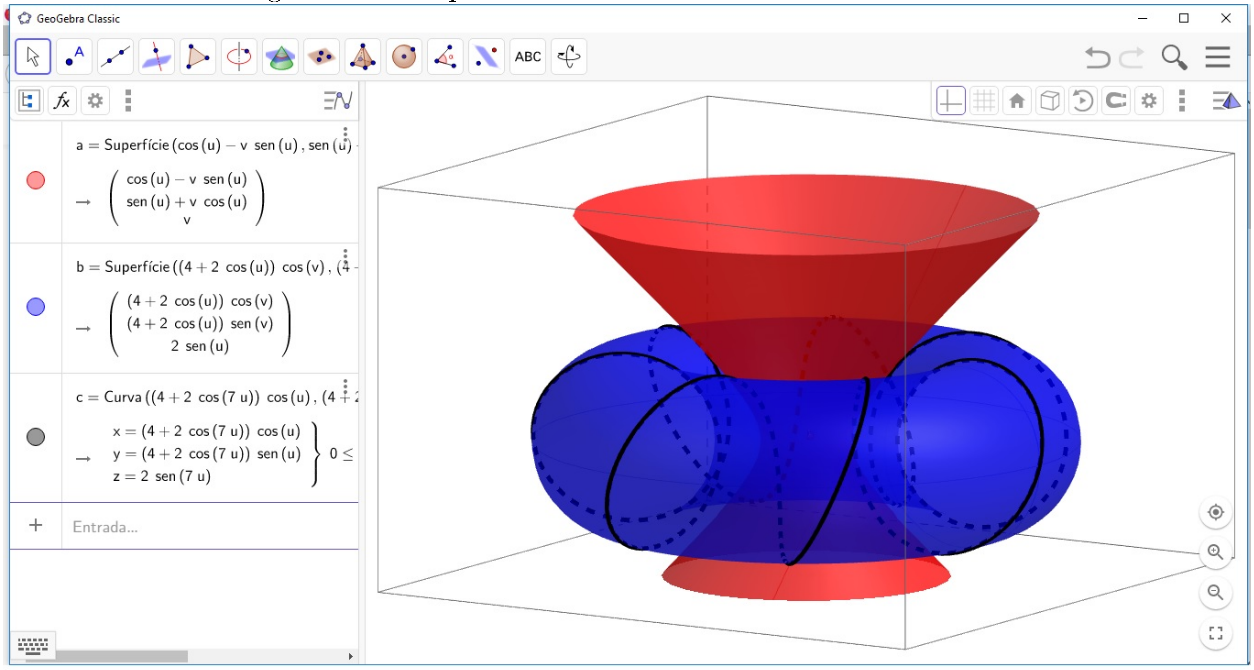
2.5.7 Superfícies e curvas

Construímos os gráficos de duas superfícies (hiperbolóide de uma folha e toro) e uma curva sobre uma delas. Para isso, digitamos na janela de entrada os comandos.

- Superfície(cos(u)-vsen(u), sen(u)+vcos(u),v,u,0,6.29,v,-5,5)
- Superfície((4+2cos(u))cos(v),(4+2cos(u))sen(v),2sen(u,u,0,6.29,v,0,6.29))
- Curva((4+2cos(7u))cos(u),(4+2cos(7u))sen(7u),u,0,6.29)

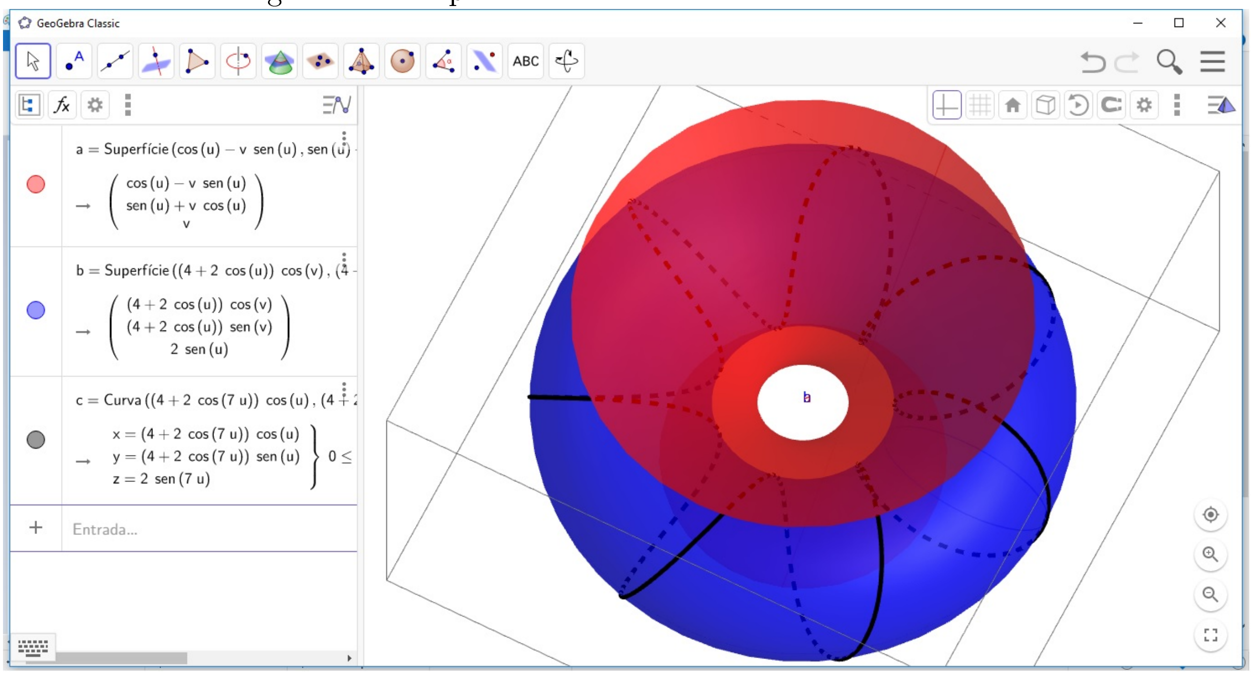
e, no final, alterar as propriedades de cada objeto e girar à vontade. Esse valor $6,29$ utilizado é uma aproximação de 2π.

Figura 2.13: Hiperbolóide de uma folha e Toro 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2.14: Hiperbolóide de uma folha e Toro 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Capítulo 3

Lugares Geométricos

Neste capítulo estudaremos os lugares geométricos elementares e algumas de suas aplicações. Apresentaremos a definição, bem como proposições, teoremas e as demonstrações relativas a alguns lugares geométricos no espaço, tais como o plano medial, reta medial, planos bissetores, interseção do plano com a esfera, interseção do plano com o cilindro e as diferentes curvas derivadas da interseção do plano com o cone. Essas aplicações embasarão teoricamente as cinco construções no programa GeoGebra que serão apresentadas no capítulo 4 deste trabalho.

3.1 Definição

Dada uma propriedade $\mathcal{P}$ relativa a pontos do espaço, o **lugar geométrico** (abreviamos **LG**) da propriedade $\mathcal{P}$ é o conjunto $\mathcal{L}$ de pontos do espaço que satisfazem as duas condições a seguir:

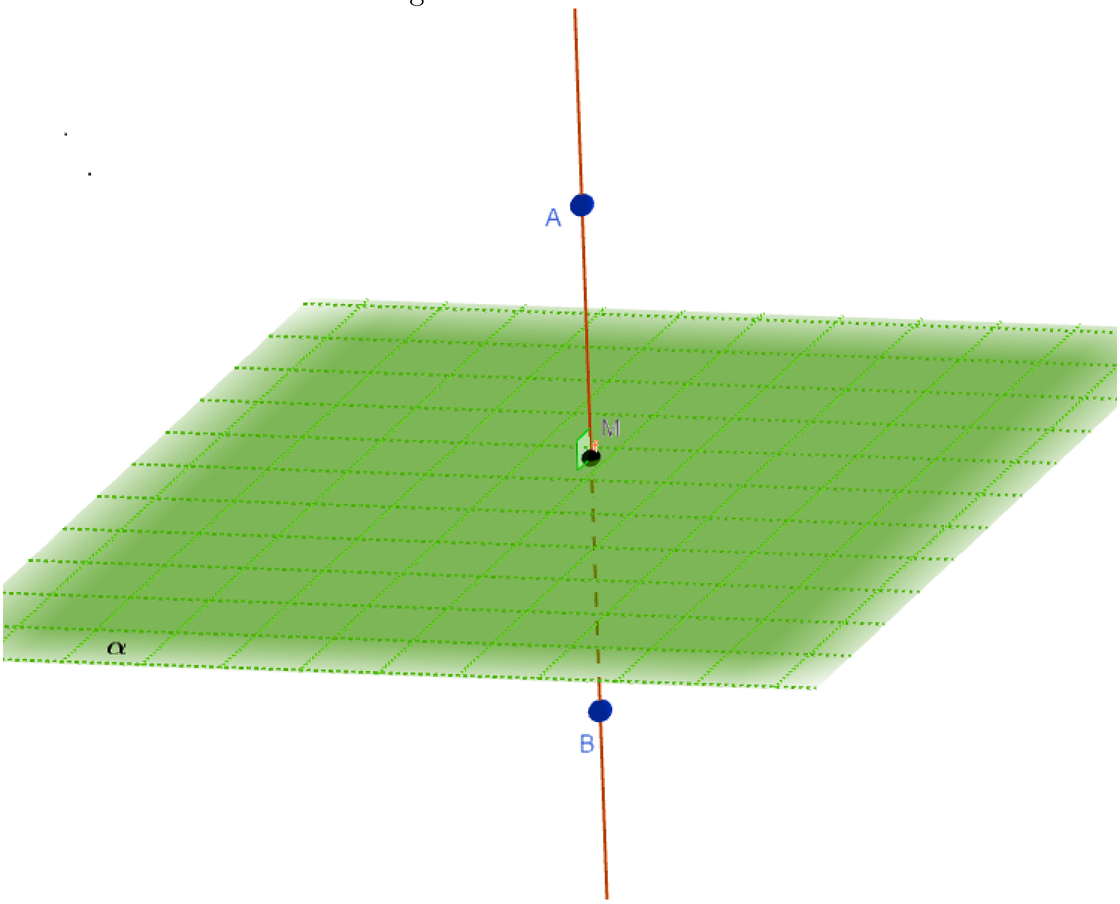
(a) Todo ponto de $\mathcal{L}$ possui a propriedade $\mathcal{P}$.

(b) Todo pondo do espaço que possui a propriedade $\mathcal{P}$ pertence a $\mathcal{L}$.

3.2 Proposição

Dados, no espaço, pontos distintos A e B, o LG dos pontos que equidistam de A e de B é o plano α, perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e passando pelo ponto médio do segmento AB. Dizemos que α é o plano mediador do segmento AB. Veja a figura 3.1

Figura 3.1: Plano Mediador



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

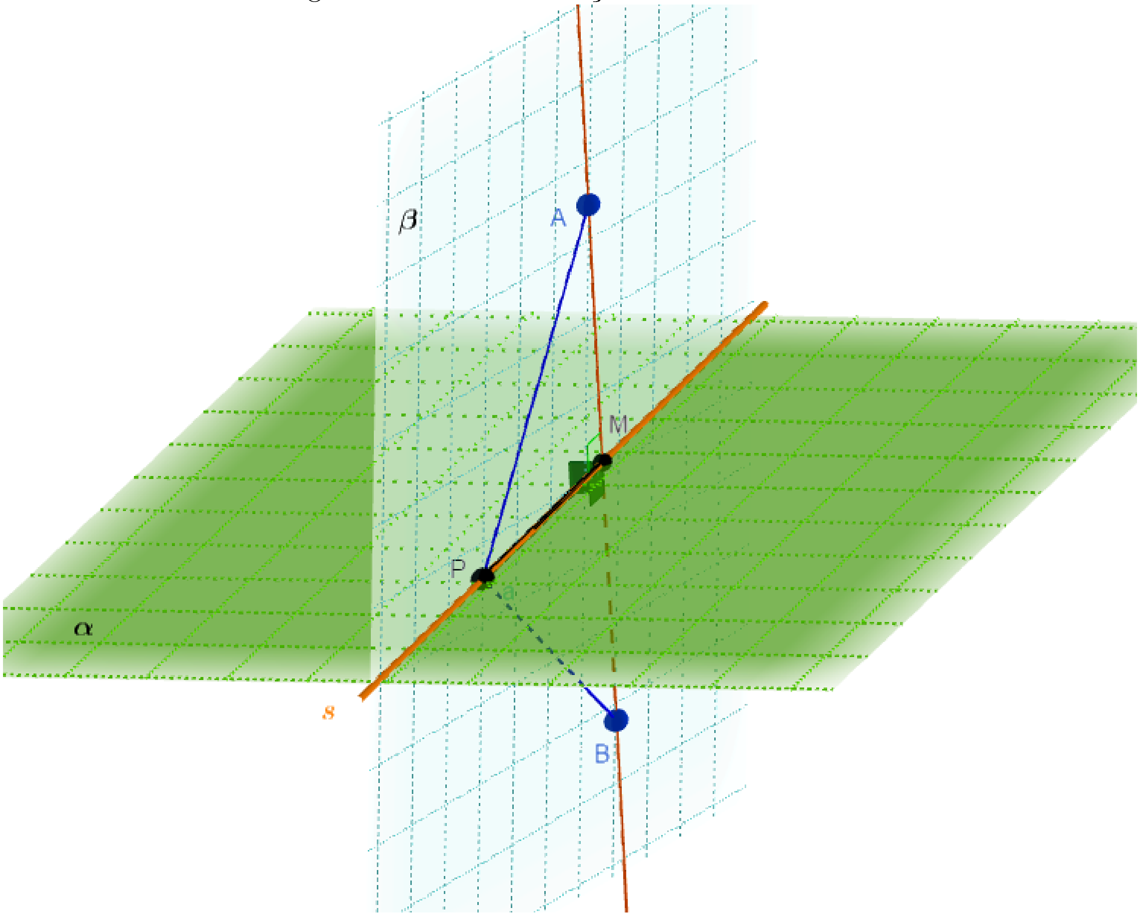
Sejam M o ponto médio do segmento AB e α o plano que passa por M e é perpendicular à reta $r = \overleftrightarrow{AB}$. Se $P \neq M$ é um ponto de α, então $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$, de sorte que $PMA \equiv PMB$ por LAL (PM é lado comum aos triângulos, $\overline{AM} = \overline{BM}$, pois M é ponto médio do segmento AB e $\widehat{PMA} = \widehat{PMB} = 90°$). Portanto, $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Reciprocamente, sejam α o plano que passa por M e é perpendicular à reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ e $P \neq M$ um ponto tal que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Então, PM é a mediana do triângulo isósceles PAB relativa à base AB, de modo que $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$, pois a mediana do triângulo isósceles coincide com a altura do mesmo.

Se $\beta = (\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{PM})$ (β o plano formado pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PM}$) e $\alpha \cap \beta = s$, então s, $\overleftrightarrow{PM} \subset \beta$ e s, $\overleftrightarrow{PM} \perp r$.

Portanto, $s = \overleftrightarrow{PM}$ e, daí, $P \in \alpha$. Conforme observamos na figura 3.2.

Figura 3.2: Demonstração Plano Mediador

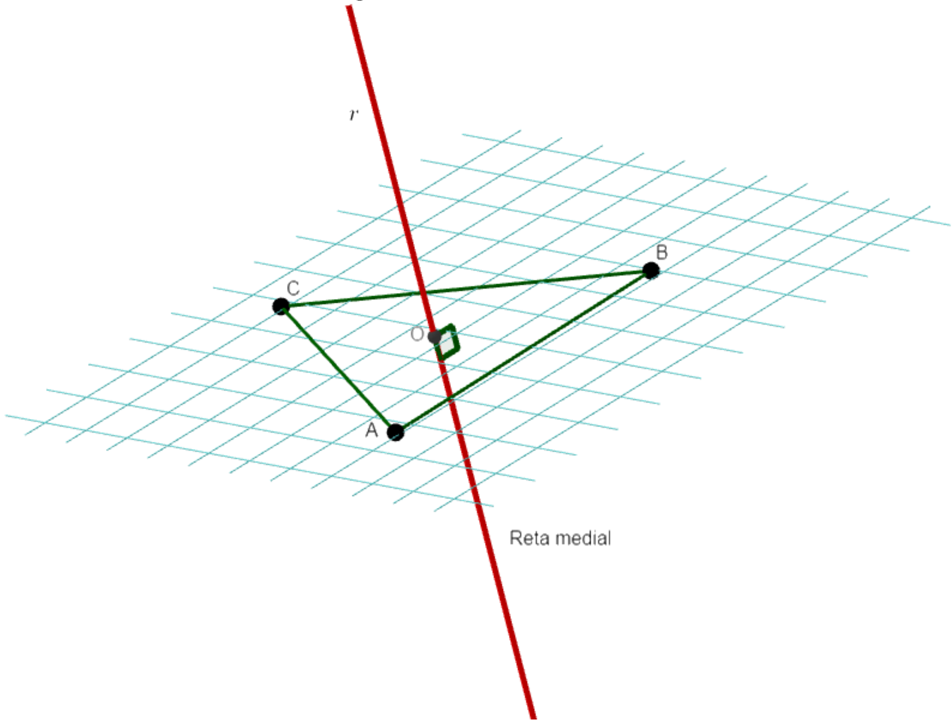


Fonte: Elaborado pelo autor

3.3 Proposição

Dados três pontos não colineares A, B e C, o LG dos pontos do espaço que equidistam de A, B e C é a reta r, perpendicular ao plano (ABC) e passando pelo circuncentro do triângulo ABC. Dizemos que r é a reta medial do triângulo ABC. Conforme vemos na figura 3.3

Figura 3.3: Reta Medial



Fonte: Elaborado pelo autor

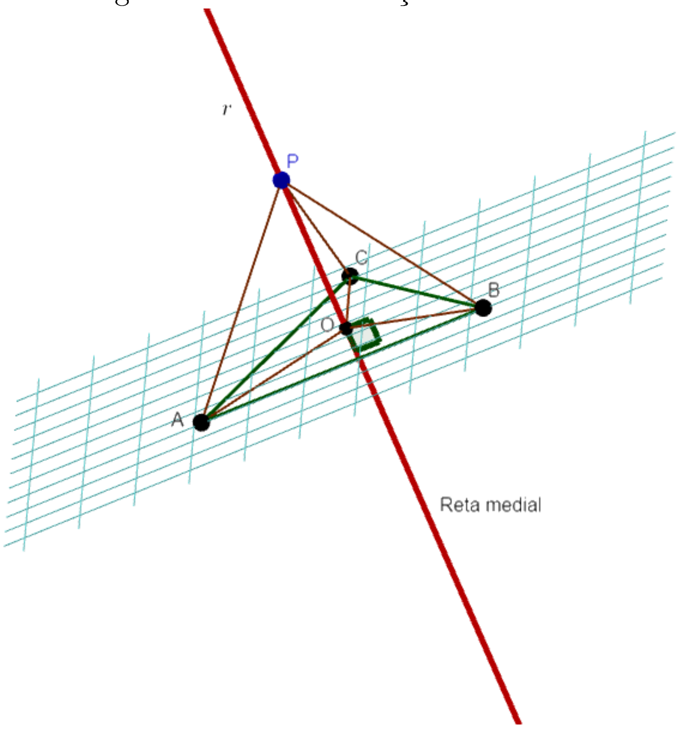
Demonstração:

Sejam O o circuncentro (O é a interseção das mediatrizes dos lados AB, AC e BC) do triângulo ABC e r a reta que passa por O e é perpendicular ao plano (ABC).

Se $P \in r\backslash\{O\}$, então os triângulos AOP, BOP e COP são congruentes por LAL, uma vez que OP é lado comum aos três, $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, pois pela caracterização da mediatriz relativa ao lado AB, O pertence ao LG dos pontos equidistantes de A e de B, assim $\overline{AO} = \overline{BO}$ (de maneira análoga vale o mesmo entendimento para os lados BC e AC), e $\widehat{AOP} = \widehat{BOP} = \widehat{COP} = 90°$. Portanto, $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$.

Suponha, agora, que $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$. Então, P pertence aos planos mediadores dos segmentos AB, AC e BC e, como este também é o caso de O, segue que a reta $\overleftrightarrow{OP}$ está contida nesses três planos mediadores. Mas, como o plano mediador de AB é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, concluímos que $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Assim, $\overleftrightarrow{OP} \perp (\overleftrightarrow{AB}; \overleftrightarrow{AC}) = (ABC)$.

Figura 3.4: Demonstração Reta medial



Fonte: Elaborado pelo autor

Pela prova da proposição acima, observamos que a reta medial de um triângulo ABC é a interseção dos planos mediadores de seus lados.

3.4 Definição

No espaço, um **diedro** é a região definida como a interseção (não vazia) de dois dos semiespaços determinados por dois planos concorrentes.

Se α e β são planos concorrentes em r, é imediato que α e β particionam o espaço em quatro diedros.
Denotando os semiespaços determinados por α (respectivamente por β) por α_+ e α_- (respectivamente β_+ e β_-), segue que tais diedros são dados pelas interseções $\alpha_\pm \cap \beta_\pm$.

Dizemos, ainda, que r é a **aresta** e α e β são as **faces** de cada um de tais diedros.

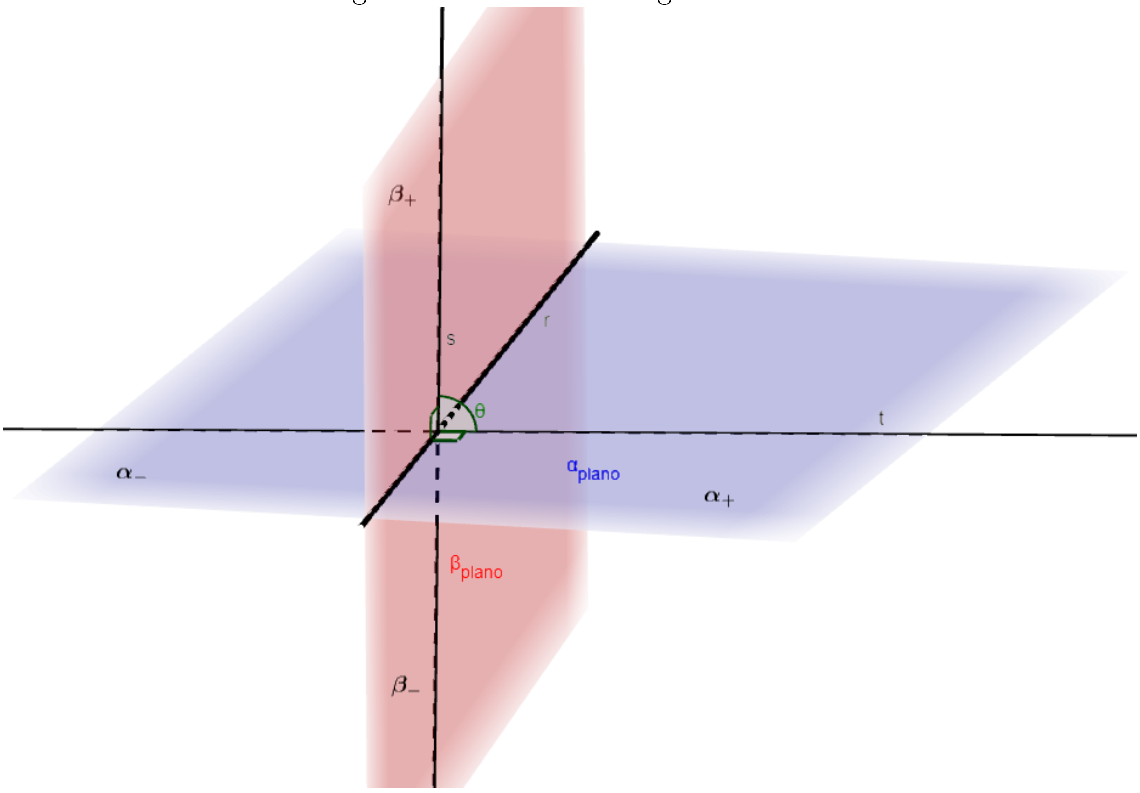
Definimos o **ângulo diedral** ou **abertura** do diedro $\alpha_+ \cap \beta_+$ como a medida $\theta_{++} \in (0, \theta)$ do ângulo contido em $\alpha_+ \cap \beta_+$ e formado por duas retas s e t, tais que

$s \subset \beta$; $t \subset \alpha$ e $s, t \perp r$.

A definição independe das escolhas das retas s e t; em particular, podemos supor que s e t intersectam r em um mesmo ponto.

De maneira totalmente análoga, definimos os ângulos diedrais θ_{+-}, θ_{-+} e θ_{--} dos diedros $\alpha_+ \cap \beta_-$; $\alpha_- \cap \beta_+$ e $\alpha_- \cap \beta_-$, respectivamente. Observe, ainda, que $\theta_{++} = \theta_{--} = \theta_{-+}$ e $\theta_{++} + \theta_{+-} = \pi$.
Confira a figura 3.5.

Figura 3.5: Diedros e ângulo diedral

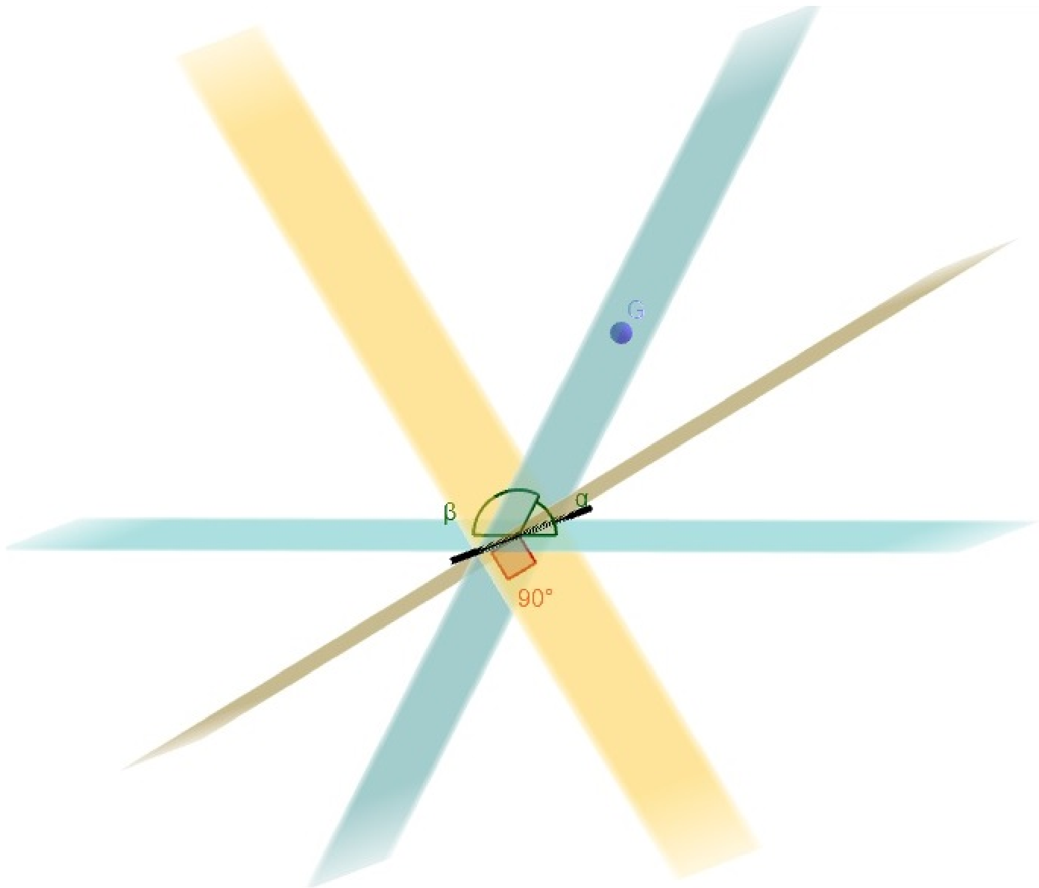


Fonte: Elaborado pelo autor

3.5 Proposição

Dados planos α e β, concorrentes em r, o LG dos pontos do espaço equidistantes de α e β é a união de dois planos perpendiculares, os quais contém a reta r e bissectam os ângulos diedrais entre α e β (os planos γ e γ'). Tais planos são denominados os planos bissetores de α e β.

Figura 3.6: Plano bissetor



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Sejam P um ponto da reta r e s e t retas respectivamente contidas nos planos α e β, ambas passando por P e perpendiculares a r.

No plano (r, t), se u e u' são as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e t, sabemos que u e u' são perpendiculares, de modo que os planos $\gamma = (r, u)$ e $\gamma' = (r; u')$ também o são.

Ademais, se u intersecta $\alpha_+ \cap \beta_+$, então é imediato, a partir da definição, que o γ bissecta os ângulos diedrais dos diedros $\alpha_+ \cap \beta_+$ e $\alpha_- \cap \beta_-$; a partir daí,γ' bissecta os ângulos diedrais dos diedros $\alpha_+ \cap \beta_-$ e $\alpha_- \cap \beta_+$.
Sejam, agora, $C \in \gamma \backslash \{r\}$, P o pé da perpendicular baixada de C à reta r e s e t as retas que passam por P e são respectivamente perpendiculares a α e β.

Sendo A e B respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de C aos planos α e β, temos $A \in s$ e $B \in t$.

Mas, como $\widehat{CPA} = \widehat{CPB}$ e $\widehat{CAP} = \widehat{CBP} = 90°$, é imediato que $CPA \equiv CPB$ por LAA_O e,daí, $\overline{CA} = \overline{CB}$.

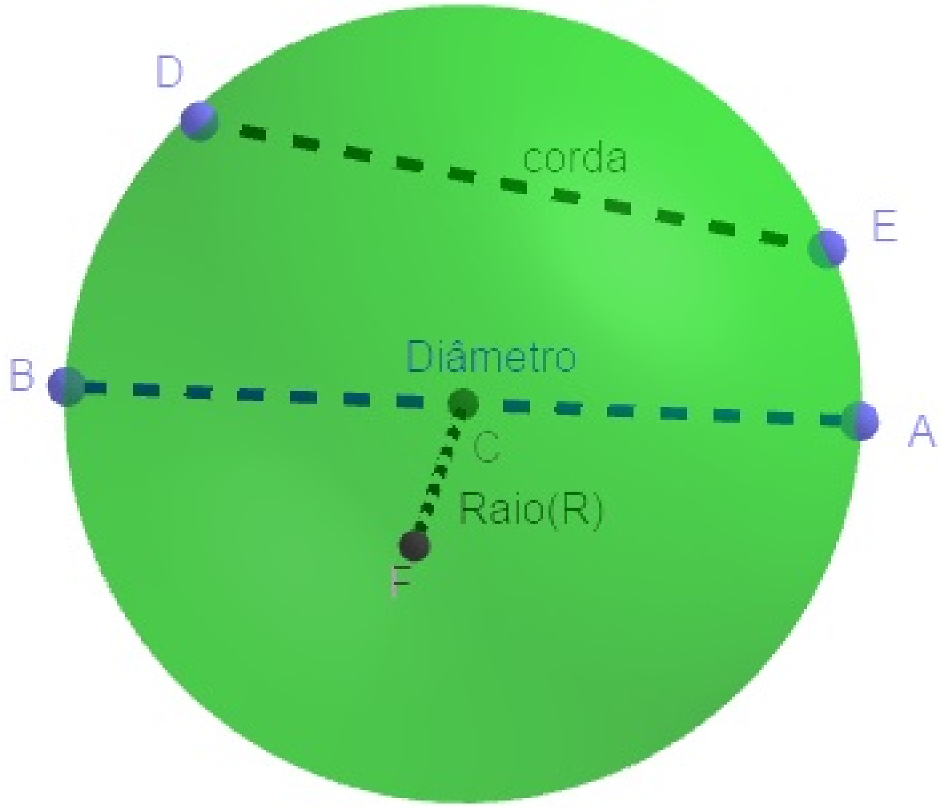
Logo, C equidista dos planos α e β. Analogamente, todo ponto de γ' equidista de α e β.

Reciprocamente, se C equidista de α e β, não é difícil provar que C pertence a um dos planos γ e γ'.

3.6 Definição

Sejam dados um ponto O do espaço e um número real positivo R. A esfera Σ^3, de **centro** O e **raio** R, denotada $\Sigma(O; R)$, é o LG dos pontos do espaço que distam R de O.

Figura 3.7: Esfera



Fonte: Elaborado pelo autor

Utilizando a notação da definição acima, dados pontos A e $B \in \Sigma$, dizemos que AB é uma **corda** de Σ.

Se o ponto $O \in AB$, a corda AB é o **diâmetro** de Σ; nesse caso, dizemos também que A e B são **pontos antípodas** de Σ.

Em geral, para toda corda AB de Σ, temos $\overline{AB} \leq 2R$, ocorrendo a igualdade se, e só se, A e B forem antípodas.

De fato, se $O \notin AB$, então, aplicando a desigualdade triangular ao triângulo AOB, obteríamos $\overline{AB} < \overline{AO} + \overline{BO} = 2R$.

3.6.1 Exemplo

Dados, no espaço, pontos distintos A e B, o lugar geométrico dos pontos P tais que $\widehat{APB} = 90°$ é a esfera de diâmetro AB, menos os pontos A e B.

Demonstração:

Sejam $\overline{AB} = 2R$ e P um ponto do espaço, tal que $P \notin \overleftrightarrow{AB}$. Sendo O o ponto médio de AB, temo que PO é a mediana relativa ao lado AB do triângulo PAB. Portanto,

$$\widehat{APB} = 90° \Leftrightarrow \overline{PO} = \frac{1}{2}\overline{AB} = R \Leftrightarrow P \in \Sigma(O; R).$$

Assim, o lugar geométrico pedido é $\Sigma(O; R)\{A, B\}$.

Nas notações do exemplo 3.6.1, e fixado um plano α que contém $\overleftrightarrow{AB}$, o LG dos pontos de α que vêem AB sob $90°$ é, conforme sabemos, a união dos arcos capazes de $90°$ sobre AB.

Por sua vez, tal união coincide com o círculo de diâmetro AB em α, menos os pontos A e B. Portanto, girando α em torno de $\overleftrightarrow{AB}$, obtemos $\Sigma(O; R)$ como a união dos círculos de diâmetro AB, menos os pontos A e B.

Por essa razão, dizemos também que a esfera de diâmetro AB é a **superfície de revolução** gerada pela revolução (i.e., rotação) de um semicírculo de diâmetro AB em torno da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

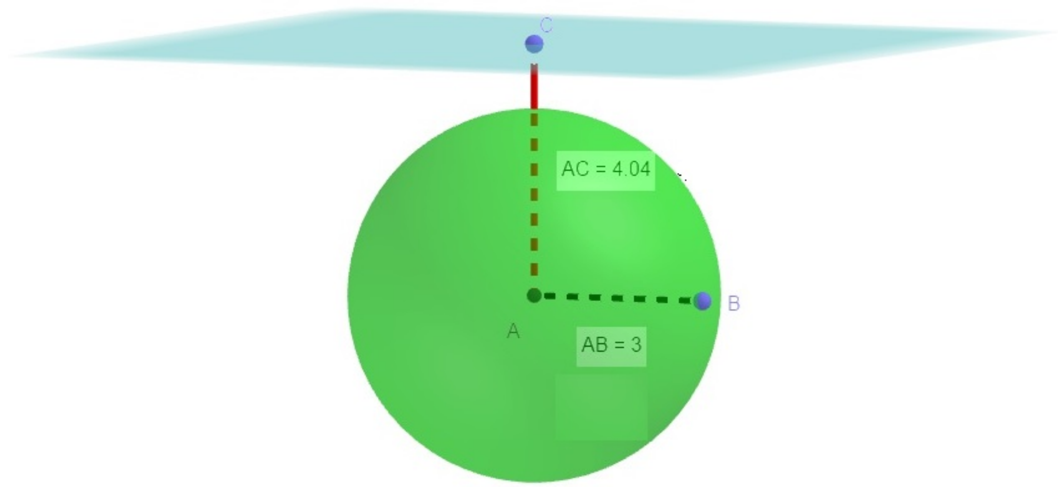
O próximo resultado esclarece a natureza das seções planas de uma esfera, isto é, das possíveis interseções de uma esfera com um plano genérico (isto é, que não necessariamente passa pelo seu centro).

3.7 Proposição

Sejam dados no espaço, um plano α e uma esfera Σ, de centro O e raio R. Seja d a distância de O a α.

(a) Se $d > R$, então α não intersecta Σ. Veja figura 3.8.

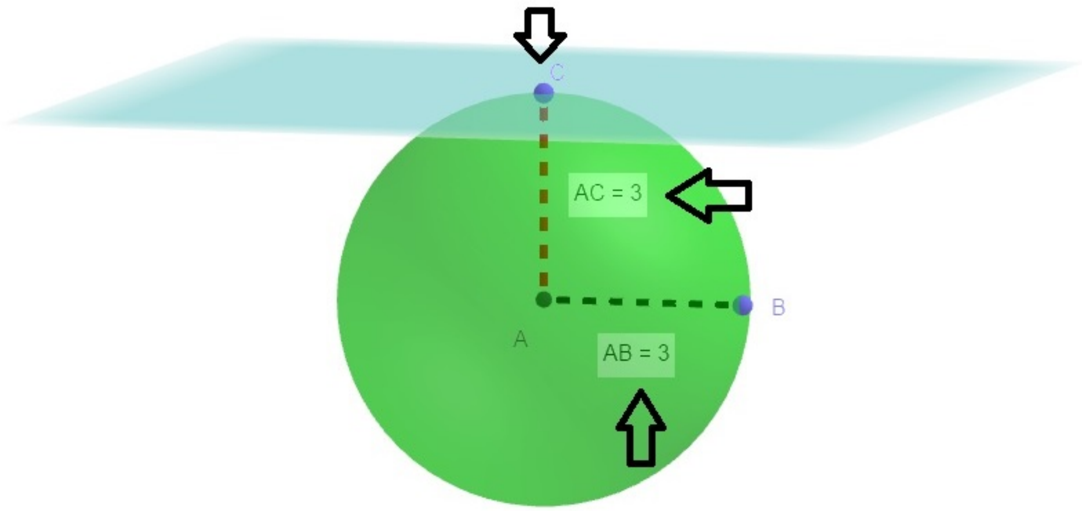
Figura 3.8: Interseção vazia entre o plano e a esfera



Fonte: Elaborado pelo autor

(b) Se $d = R$, então α intersecta Σ em um único ponto. Veja figura 3.9.

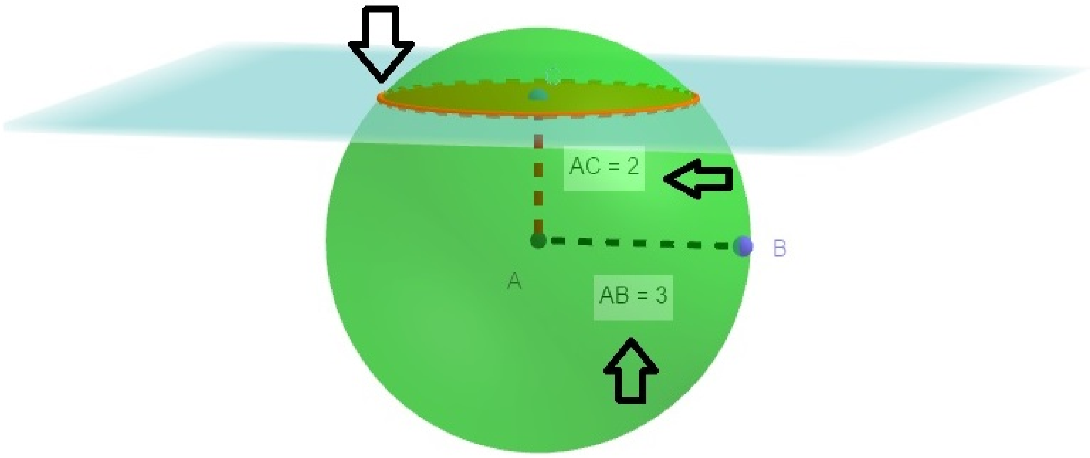
Figura 3.9: Interseção da esfera com o plano igual a um ponto



Fonte: Elaborado pelo autor

(c) Se $d < R$, então α intersecta Σ em um círculo Γ, de raio $\sqrt{R^2 - d^2}$ e centro situado no pé da perpendicular baixada de O a α. Veja figura 3.10.

Figura 3.10: Interseção da esfera com o plano igual a um círculo



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Seja O' o pé da perpendicular baixada de O a α, de sorte que $\overline{OO'} = d$.

(a) e (b) Suponha $d \geq R$. Se $P \in \alpha \setminus \{O'\}$, Então $P\hat{O'}O = 90°$ e, daí, $\overline{PO} > \overline{OO'} = d \geq R$; logo, $P \notin \Sigma$.

Mas, como $\overline{OO'} = d \geq R$, temos que $O' \in \Sigma$ se, e só se, $d = R$. Portanto,α intersecta Σ em O', se $d = R$, ao passo que α não intersecta Σ, se $d > R$.

(c) Se $P \in \Sigma \cap \alpha$, então $P \neq O'$ e, daí, $\widehat{PO'O} = 90°$. Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo POO', obtemos

$$\overline{O'P}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{O'O}^2 = R^2 - d^2$$

ou, ainda, $\overline{O'P} = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Logo, P pertence ao círculo Γ do enunciado.
Reciprocamente, se P for um ponto de Γ, então $\overline{O'P} = \sqrt{R^2 - d^2}$ e podemos reverter

os passos do argumento do parágrafo anterior.
$\overline{O'P} = \sqrt{R^2 - d^2}$
$\overline{O'P}^2 = R^2 - \overline{O'O}^2$
$\overline{O'P}^2 + \overline{O'O}^2 = R^2$

Assim POO' é um triângulo retângulo com $P\hat{O'}O = 90°$. Portanto concluímos que $\overline{OP} = R$, isto é, que $P \in \Sigma$.

Nas notações da proposição acima, suponha que $d = R$ e seja T o ponto comum de α e Σ. Então, diremos que α *tangencia* Σ em T ou, ainda, que α e Σ são **tangentes** em T. Também nesse caso, T é o **ponto de tangência** de α e Σ.

Por um ponto T de uma esfera Σ de centro O passa um único plano α tangente a Σ. De fato, α é o plano perpendicular a $\overleftrightarrow{OT}$ e passando por T.

Ainda nas notações da proposição 3.7, suponha que α intersecta Σ em um círculo Γ, de centro O'.

Então, vimos que Γ tem raio $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, onde d é a distância do centro O de Σ a α.

Segue que $r \leq R$, ocorrendo a igualdade se, e sé se, $d = 0$, isto é, se, e só se, $O = O'$. Nesse caso, diremos que Γ é um **círculo máximo** ou um **equador** de Σ e que as extremidades do diâmetro de Σ perpendicular ao plano de Γ são (em alguma ordem) o **polo norte** e o **polo sul** de Σ em relação a Γ.

Se Σ é uma esfera de centro O e A e B são pontos não antípodas de Σ, então há exatamente um equador Γ de Σ que passa por A e B.

De fato, sendo α o plano de um tal equador, temos, por definição de equador, que $O \in \alpha$. Mas, como A e B não são antípodas, segue que A, O e B não são colineares. Portanto, $\alpha = (AOB)$ e $\Gamma = (AOB) \cap \Sigma$.

Podemos definir a noção de tangência entre uma reta r e uma esfera $\Sigma(O; R)$, impondo que r intersecte Σ em um único ponto, o qual também será denominado o **ponto de tangência** de r e Σ.

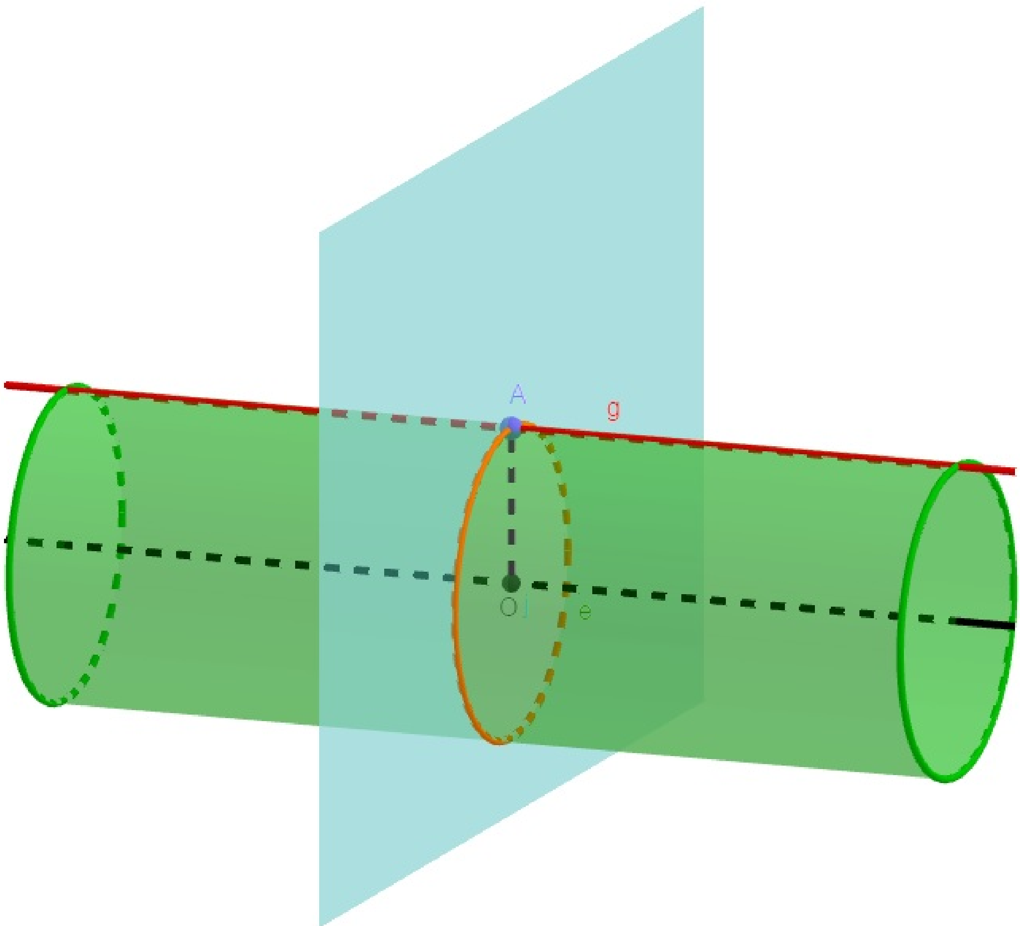
Se $\alpha = (O; r)$ e $\Gamma(O; R)$ é o equador de Σ contido em α, temos que $r \subset \alpha$ e r intersecta Γ somente em T, de sorte que, em α, a reta r é tangente a Σ em T.

Portanto, $\overleftrightarrow{OT} \perp r$ e, daí, r está contida no plano tangente a Σ em T. Reciprocamente, é imediato verificar que tal plano tangente é a união das retas tangentes a Σ em T.

3.8 Definição

Dados, no espaço, um número real positivo R e uma reta e, o **cilindro** (*de revolução*) de eixo e e **raio** R, denotado $\mathcal{C}(e; R)$ é o conjunto dos pontos P do espaço, os quais estão à distância R da reta e.

Figura 3.11: Cilindro de revolução de eixo e e raio R



Fonte: Elaborado pelo autor

Sejam A um ponto sobre o cilindro $\mathcal{C}(e; R)$ e α o plano que passa por A e é perpendicular a e.

Sendo O o ponto de interseção de α com o eixo e, temos $\overleftrightarrow{AO} \perp e$ e $\overleftrightarrow{AO} \subset (A; e)$, de maneira que $\overline{AO} = R$; portanto, A pertence ao círculo de centro O e raio R do plano α, e todo ponto de tal círculo está contido em $\mathcal{C}(e; R)$.

Por outro lado, sendo $\beta = (A; e)$ e g a reta de β que é paralela a e e passa por A, todo ponto de g está à distância R de e, de modo que $g \subset \mathcal{C}(e; R)$. A reta g é uma geratriz do cilindro $\mathcal{C}$.

Desse modo, podemos justificar a figura 3.11 do seguinte modo: fixado um plano α que contém e, o LG dos pontos de α que estão à distância R de e é a união de duas retas g e g' de α, ambas paralelas a e.

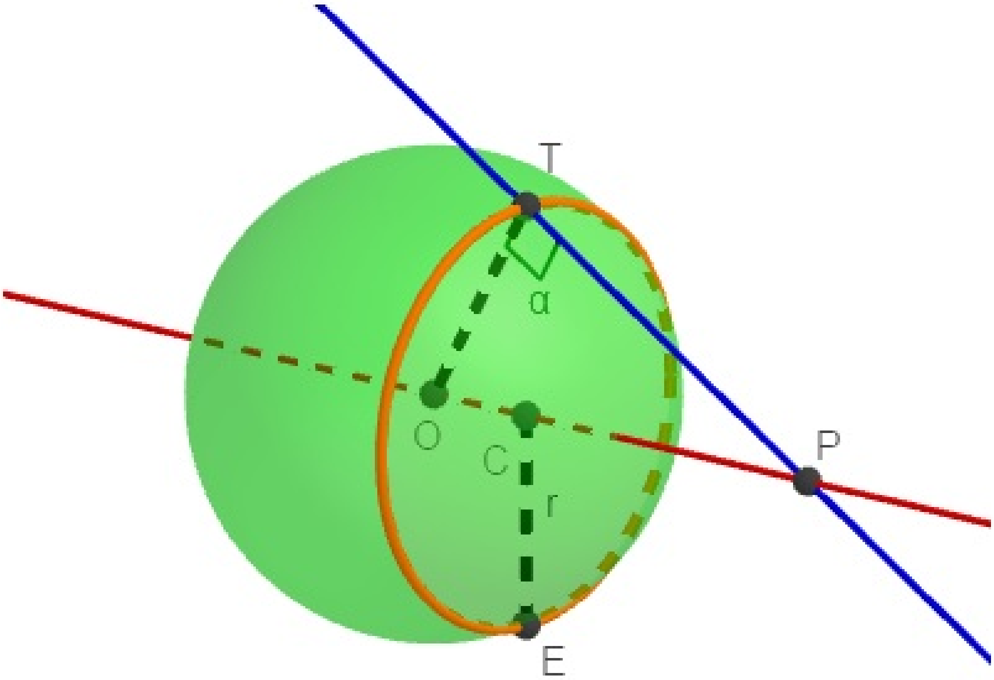
Portanto, *girando α em torno de e*, obtemos $\mathcal{C}(e; R)$ como a união de tais retas g (a reta g' de α é obtida a partir de g, após girarmos α de $180°$).

Assim é que $\mathcal{C}(e; R)$ é outro exemplo de uma *superfície de revolução*, desta feita gerada pela revolução de uma reta g em torno de um eixo e, com $g \parallel e$.

3.9 Teorema

Sejam dados, no espaço, uma esfera $\Sigma(O; R)$ e um ponto P com $\overline{PO} = d > R$. Para $T \in \Sigma$, temos que $\overline{PT}$ é tangente a Σ se, e só se, $\overline{PT} = \sqrt{d^2 - R^2}$.

Figura 3.12: Reta tangente à Esfera



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Seja $T \in \Sigma$ tal que $\overline{OT} = R$ e $P \notin \Sigma$. Temos que a reta $\overleftrightarrow{PT}$ tangencia Σ em T, logo $\overleftrightarrow{PT} \perp \overline{OT} = R$ e assim $P\hat{T}O = 90°$. Sendo $\overline{PO} = d > R$, temos que POT é um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras temos,

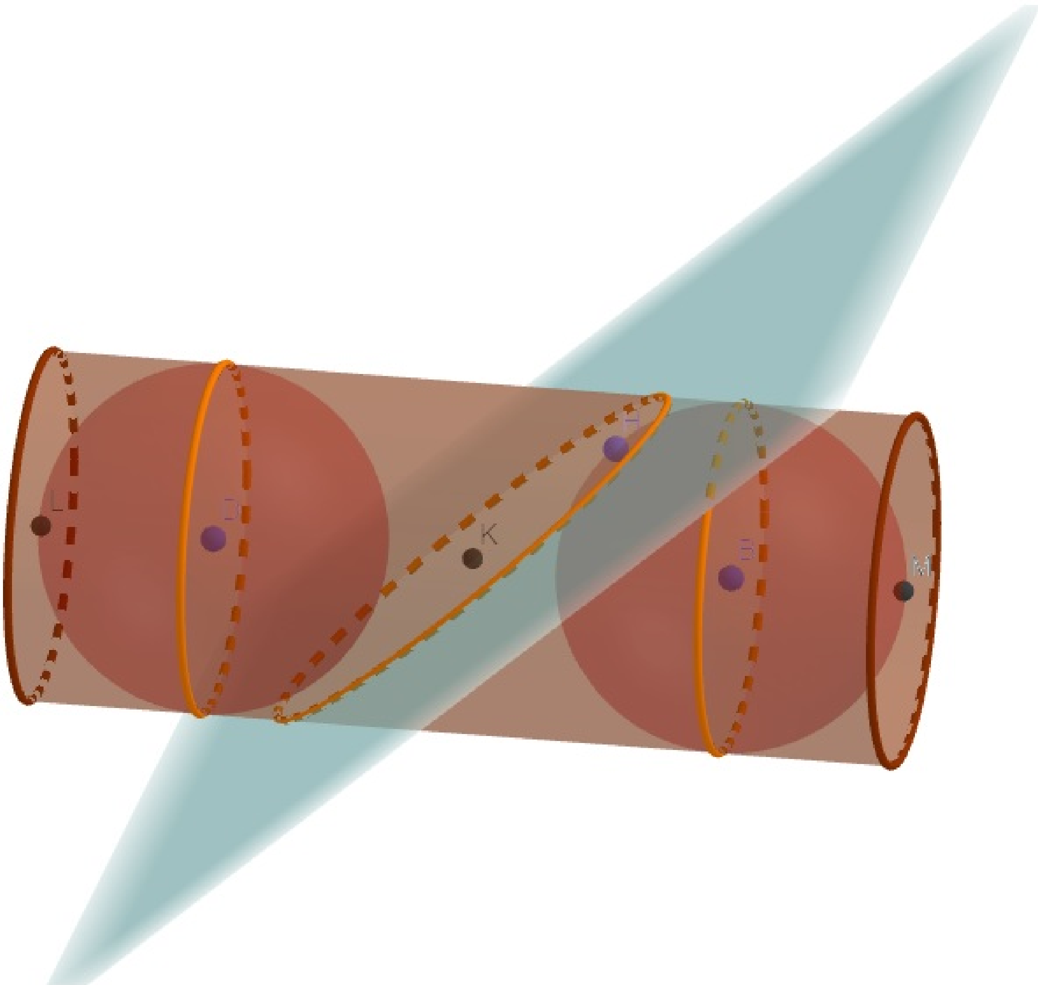
$$\overline{PO}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{OT}^2 \Leftrightarrow d^2 = \overline{PT}^2 + R^2 \Leftrightarrow \overline{PT} = \sqrt{d^2 - R^2}$$

como queríamos demonstrar.

3.10 Proposição

Seja $\mathcal{C}(e; R)$ o cilindro de eixo e e raio R. Se α é um plano que não é paralelo ou perpendicular a e, então a seção de $\mathcal{C}$ por α é uma elipse.

Figura 3.13: Elipse - Interseção do Cone com um plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Assumimos o fato de que $\alpha \cap \mathcal{C}$ é uma curva plana simples (isto é, sem auto interseções), contínua e fechada. Para $j = 1, 2$, seja $\Sigma_j(O_j; R)$ uma esfera centrada em e e tangente a α em F_j. Uma vez que α não é perpendicular a e, temos $F_1 \neq F_2$. Afirmamos que F_1 e F_2 são os focos e $\overline{O_1O_2}$ o comprimento do eixo maior da elipse de interseção. Para tanto, sejam P um ponto comum a α e $\mathcal{C}$, e g a geratriz de $\mathcal{C}$ que passa por P. Para $j = 1, 2$, é imediato que Σ_j intersecta $\mathcal{C}$ ao longo de um equador Γ_j, com reta medial e, e que g intersecta Γ_j em um único ponto Q_j. Portanto, g

tangencia Σ_j em Q_j, e segue do teorema 3.9 que $\overline{PF_j} = \overline{PQ_j}$. Portanto,

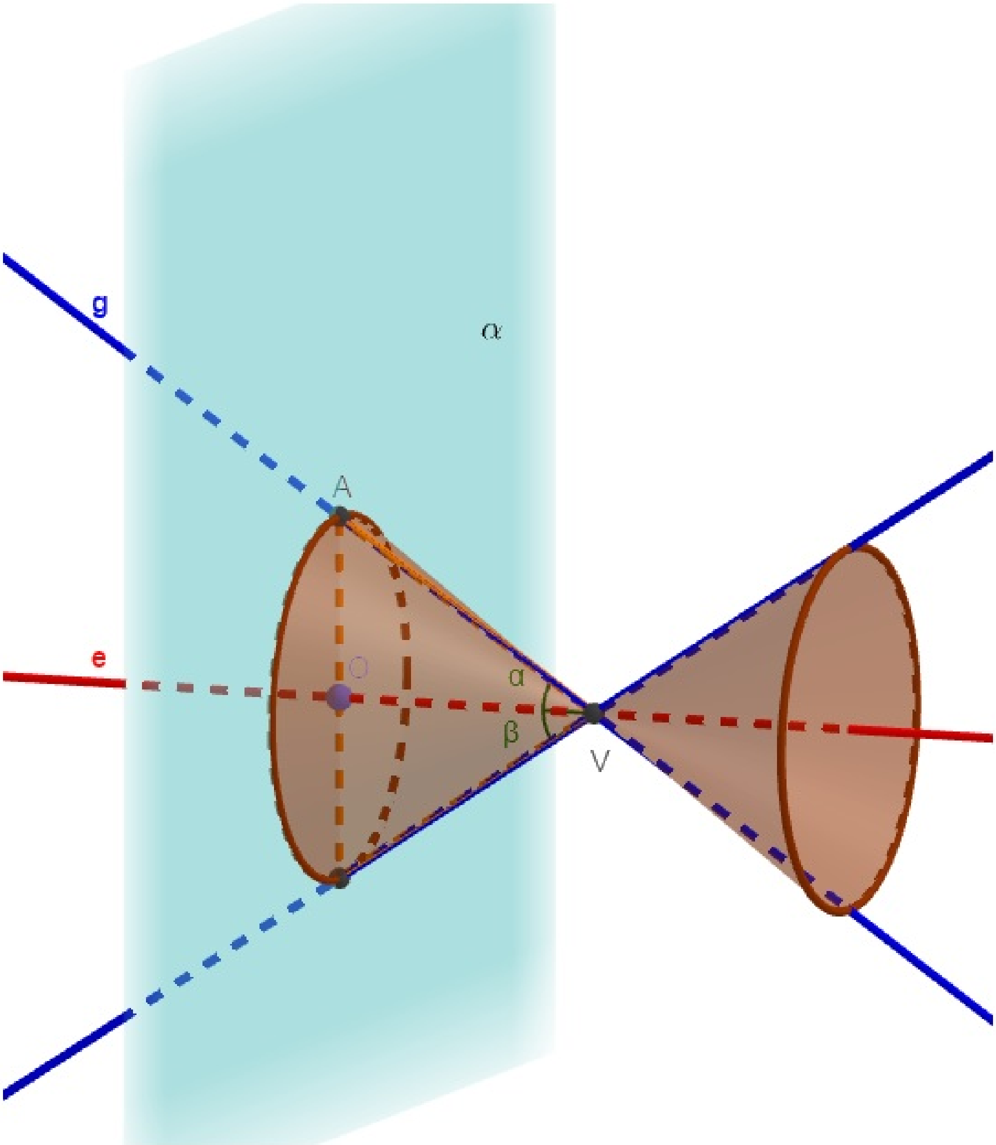
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{O_1O_2},$$

$\overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} = \overline{Q_1Q_2}$, pois $P \in \overline{Q_1Q_2}$ e $Q_1O_1O_2Q_2$ é um retângulo e portanto $\overline{Q_1Q_2} = \overline{O_1O_2}$ como queríamos demonstrar.

3.11 Definição

Dados um ângulo θ, uma reta e e um ponto $V \in e$, o **cone** (**de revolução**) $\mathcal{C}(e; V; \theta)$, de **eixo** e, **vértice** V e **abertura** 2θ é o conjunto dos pontos A do espaço, tais que $\overleftrightarrow{AV}$ forma um ângulo θ com a reta e.

Figura 3.14: Cone de Revolução



Fonte: Elaborado pelo autor

Sejam A um ponto sobre o cone $\mathcal{C}(e; V, \theta)$ e α o plano que passa por A e é perpendicular a e. Se α intersecta e em O, então $\overleftrightarrow{AO} \perp e$ e $\overleftrightarrow{AO} \subset (A, e)$; como $V \in e$, temos

$$\overline{AO} = \overline{VO} * tg\theta,$$

pois no plano (A, e) AOV é um triângulo retângulo.

Portanto, A pertence ao círculo de centro O e raio $\overline{VO} * tg\theta$ do plano α, reciprocamente, verificamos que todo ponto de tal círculo está contido em $\mathcal{C}$.

Por outro lado, sendo $\beta = (A, e)$ e $g = \overleftrightarrow{AV}$, temos que g é uma reta de β que forma ângulo θ com e, de sorte que $g \subset C$.

A reta g é uma **geratriz** do cone $\mathcal{C}$.

Um plano que passa por V e é perpendicular a e particiona $\mathcal{C} \setminus \{V\}$ em dois pedaços, os quais denominamos as **folhas** do cone. Verificamos que cada folha de um cone é uma união de semirretas de suas geratrizes, todas de origem V.

De posse da discussão anterior, podemos justificar a figura 3.14 do seguinte modo: fixado um plano β que contém e, o LG dos pontos P de β tais que $\overleftrightarrow{PV}$ forma um ângulo θ com e é a união de duas retas g e g' de β, ambas passando por V. Portanto, girando β em torno de e, obtemos $\mathcal{C}(e; V; \theta)$ como a união de tais retas g (a reta g' de α é obtida a partir de g, após girarmos α de 180°).

Assim é que $\mathcal{C}(e; V; \theta)$ é mais um exemplo de *superfície de revolução*, desta feita gerada pela revolução de uma reta g em torno de um eixo e, com $V \in g \cap e$. Veremos a seguir as seções de um cone por planos que não são paralelos ou perpendiculares ao seu eixo, às quais denominamos **seções cônicas**.

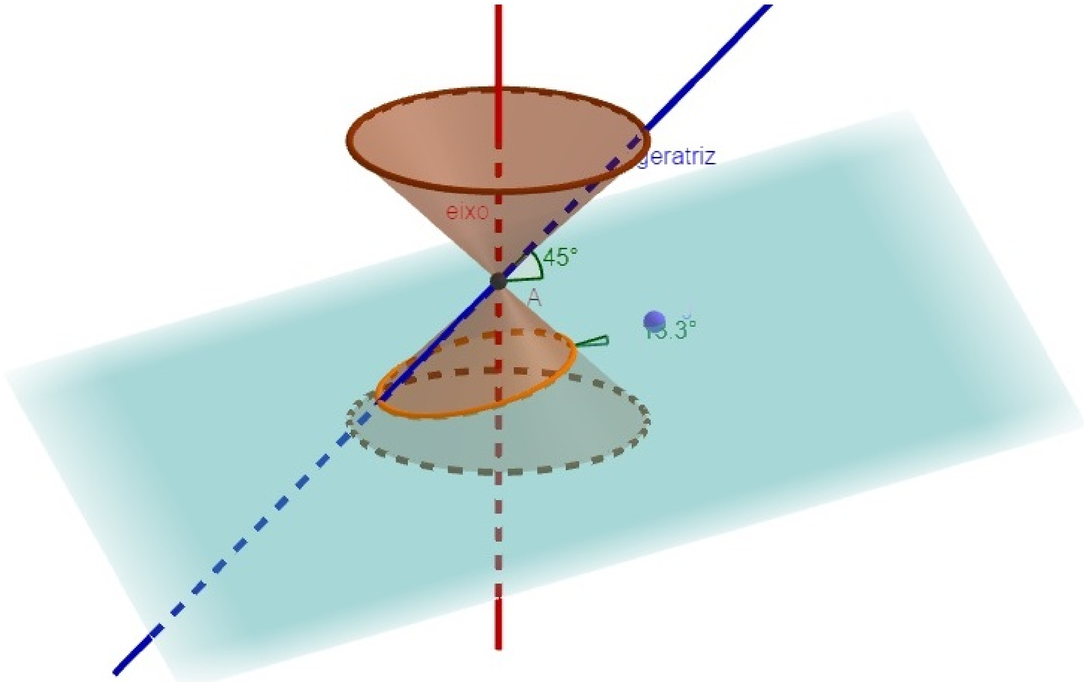
3.12 Teorema

Se $\mathcal{C}$ é um cone e α é um plano que secciona $\mathcal{C}$, então a seção correspondente é:

(a) uma elipse, caso α só intersecte uma folha de $\mathcal{C}$ e não seja paralelo a uma geratriz.

Demonstração:

Figura 3.15: Elipse



Fonte: Elaborado pelo autor

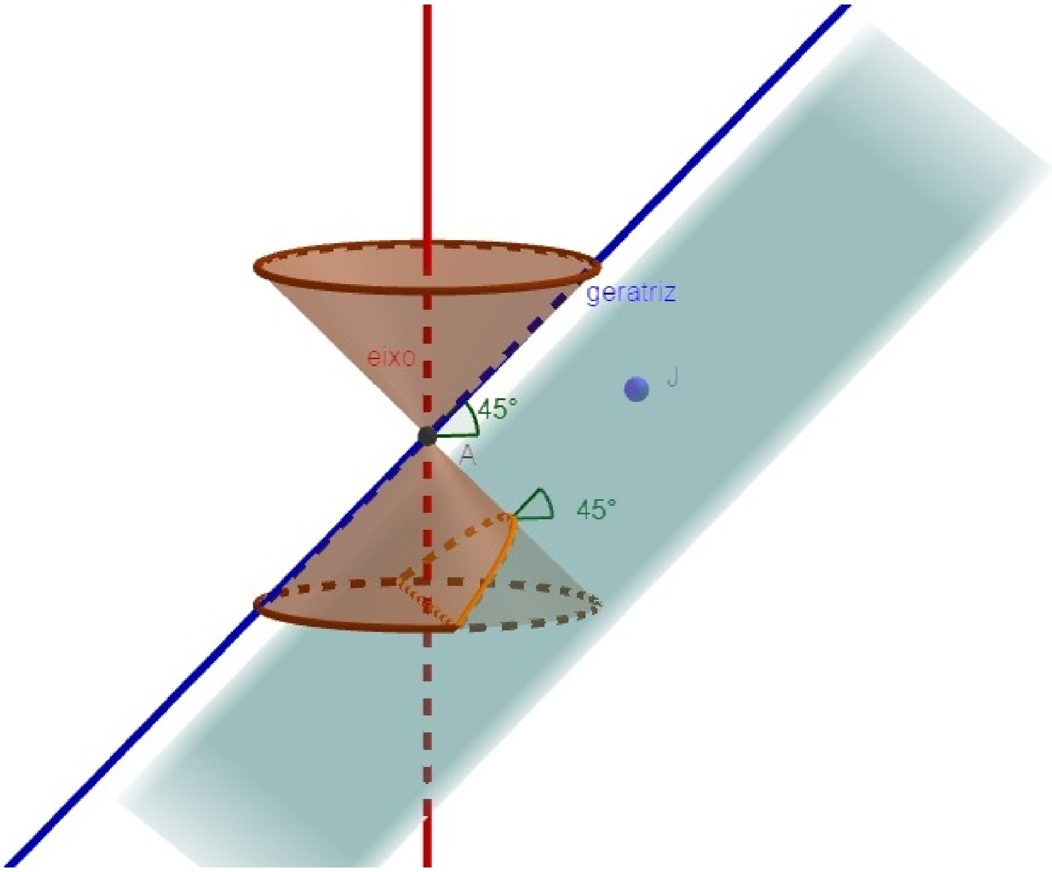
Assumimos que $\alpha \cap \mathcal{C}$ é uma curva plana simples, contínua e fechada. Para $j = 1, 2$, seja $\Sigma_j(O_j; R_j)$ uma esfera centrada em e e tangente a α em F_j. Uma vez que α não é perpendicular a e, temos $F_1 \neq F_2$ (se $\alpha \perp e$, então $F_1 = F_2$ seria o centro da circunferência Γ). Afirmamos que F_1 e F_2 são os focos e $\overline{Q_1Q_2}$ o comprimento do eixo maior da elipse de interseção. Sejam P um ponto comum a α e $\mathcal{C}$, e g a geratriz de $\mathcal{C}$ que passa por P. Para $j = 1, 2$, temos que Σ_j intersecta $\mathcal{C}$ ao longo de um equador Γ_j, com reta medial e, e que g intersecta Γ_j em um único ponto Q_j. Portanto, g tangencia Σ_j em Q_j, e segue do teorema 3.9 que $\overline{PF_j} = \overline{PQ_j}$. Portanto

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} = \overline{Q_1Q_2}$$

Assim $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{Q_1Q_2}$ é o eixo maior da elipse resultado da interseção de α com $\mathcal{C}$.

(b) uma parábola, caso α só intersecte uma folha de $\mathcal{C}$ e seja paralelo a uma geratriz.

Figura 3.16: Parábola



Fonte: Elaborado pelo autor

Demostração:

Como no caso da proposição 3.10, assumimos o fato de que $\alpha \cap \mathcal{C}$ é uma curva simples, contínua e aberta (uma vez que α é paralelo a uma geratriz g do cone).

Seja g a geratriz de $\mathcal{C}$ em relação à qual α é paralelo. Seja, também, $\Sigma(O;R)$ a esfera centrada em e, tangente a α em F e à folha do cone que α intersecta (i.e.,tangente às semirretas que compõem tal folha - sendo g' a geratriz simétrica de g em relação a e, e O' o ponto em que g' intersecta α, temos $V\hat{O}O' = 90°$. Agora, um pouco de trigonometria no triângulo retângulo VOO' fornece

$$\overline{VO} = \frac{R}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{R}{\operatorname{cotg}\theta}$$

, onde 2θ é a abertura do cone, de sorte que Σ tem um raio bem definido e, portanto, está, ela mesma, bem definida).

Sejam Γ_2 o círculo de interseção de Σ e $\mathcal{C}$, β_2 o plano que contém Γ_2 e d a reta de interseção de α e β_2. Afirmamos que F é o foco e d a diretriz da parábola de interseção de α e $\mathcal{C}$. Para ver isso, tome um ponto P_1 em $\alpha \cap \mathcal{C}$ e marque o ponto P_2 em que $\overleftrightarrow{VP_1}$ intersecta Σ, de sorte que $P_2 \in \beta_2$.

Trace, por P_1, o plano β_1, paralelo a β_2, e seja Γ_1 o círculo de interseção de β_1 e $\mathcal{C}$; marque os pontos Q_1 e Q_2, respectivamente de interseção de β_1 e β_2 com g.
Como P_1P_2 e P_1F são tangentes a Σ traçadas a partir de P_1, segue do item (a) do teorema 3.9 que $\overline{P_1F} = \overline{P_1P_2}$. Por outro lado, sendo O_1 e O_2 respectivamente os centros de Γ_1 e Γ_2, as congruências de triângulos retângulos $VO_1P_1 \equiv VO_1Q_1$ e $VO_2P_2 \equiv VO_2Q_2$ garantem que

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1V} - \overline{P_2V} = \overline{Q_1V} - \overline{Q_2V} = \overline{Q_1Q_2}$$

Agora, uma vez que α só intersecta uma folha de $\mathcal{C}$ e é paralelo a g, segue que $\alpha \perp (g, e)$. Mas, como também temos $\beta_2 \perp (g, e)$, segue que $d \perp (g, e)$. Por fim, trace por P_1 a paralela a g contida em α (tal é possível, uma vez que $\alpha \parallel g$), e seja R seu ponto de interseção com d.

Como $d \perp g$, temos $\overleftrightarrow{P_1R} \perp d$. Ademais, como $\overleftrightarrow{Q_1Q_2} = g \parallel \overleftrightarrow{P_1R}$ e $P_1, Q_1 \in \beta_1$, $R, Q_2 \in \beta_2$, segue que $\overline{Q_1Q_2} = \overline{P_1R}$.

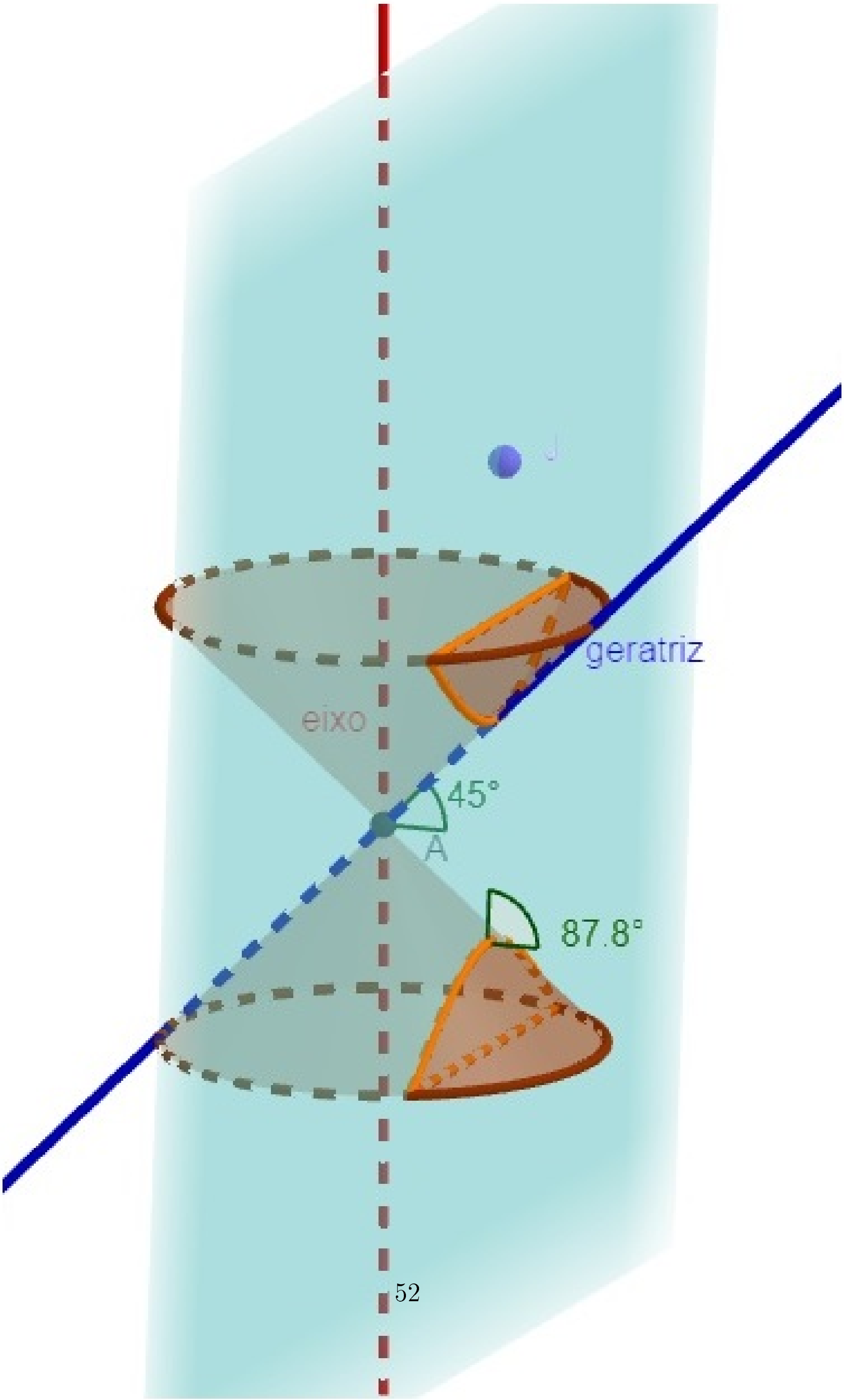
Assim, temos finalmente

$$\overline{P_1F} = \overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{P_1R} = distancia\, de\, P_1\, a\, d$$

.

(c) uma hipérbole, caso α intersecte ambas as folhas de $\mathcal{C}$ mas não passe por seu vértice.

Figura 3.17: Hipérbole



Fonte: Elaborado pelo autor

Capítulo 4

Atividades

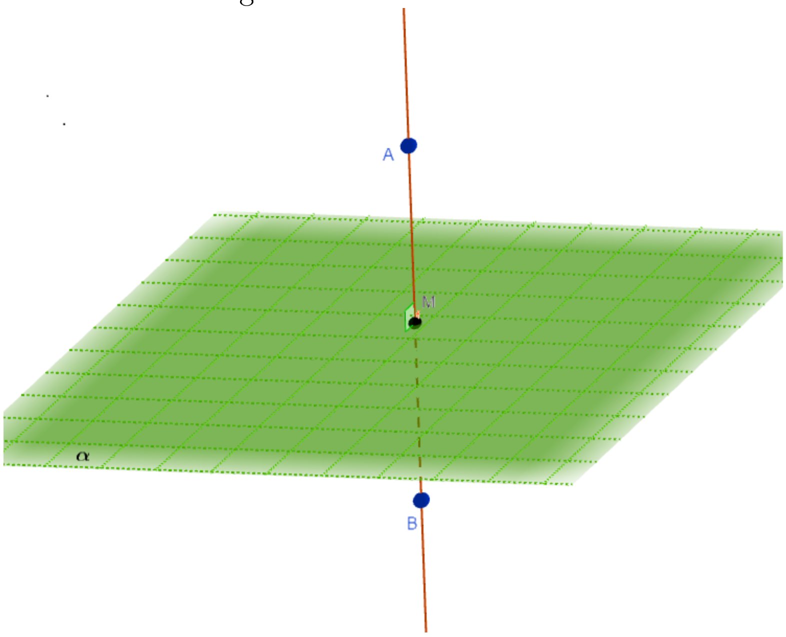
4.1 Introdução

Neste capítulo descreveremos a construção passo a passo de alguns lugares geométricos utilizando o programa GeoGebra. Inicialmente, construiremos o plano medial que representa o lugar do espaço dos pontos que estão a uma mesma distância de dois pontos quaisquer desse espaço. Em seguida, construiremos em detalhes a reta medial que representa o lugar no espaço dos pontos que estão a uma mesma distância de três pontos quaisquer não colineares, os planos bissetores que representam o lugar do espaço dos pontos equidistantes de dois planos concorrentes, as três posições relativas resultado da interseção de um plano com uma esfera, e no final, as curvas conhecidas como elipse, parábola e hipérbole que são derivadas da interseção do plano com um cone.

4.2 Plano Medial

Construiremos o Lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos A e B do espaço, conforme a figura abaixo. Esse lugar geométrico é denominado **plano medial**. Descreveremos como construir os dois pontos no espaço que são o ponto de partida da proposição, a reta que os contém, o plano perpendicular a essa reta, o ponto que pertence à esse plano, assim como os elementos auxiliadores na compreensão do plano medial que são o ângulo entre o plano e a reta e os segmentos que ligam o ponto pertencente ao plano e os dos pontos do espaço descritos inicialmente.

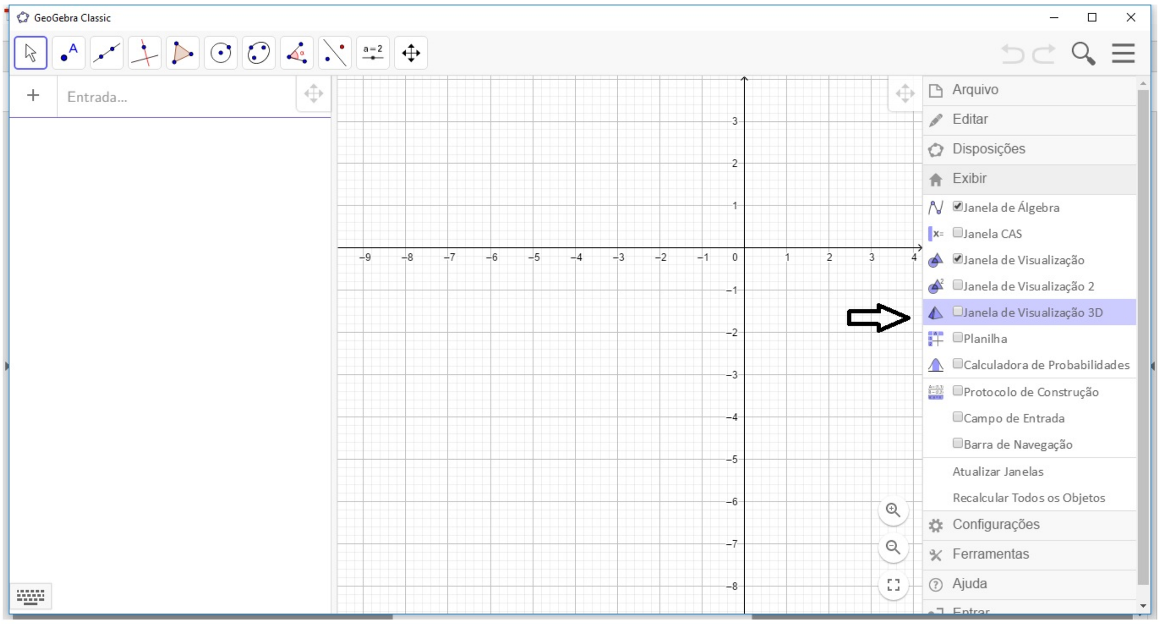
Figura 4.1: Plano Mediador



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 1: No menu **"Exibir"** selecionamos a opção janela de visualização $3D$.

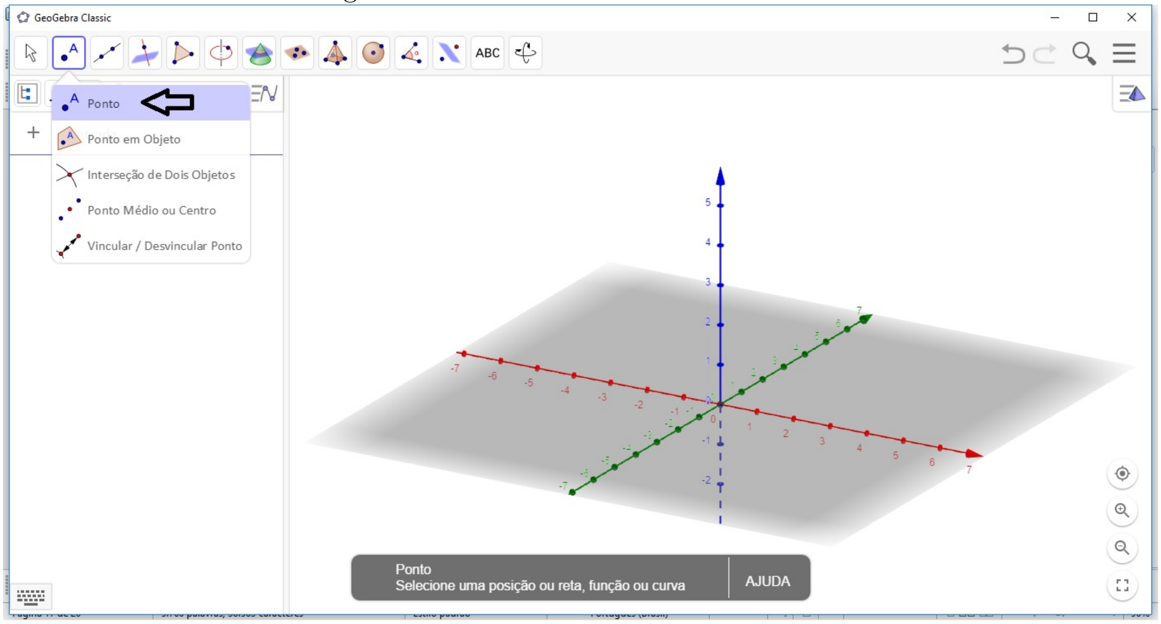
Figura 4.2: Plano Mediador - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor

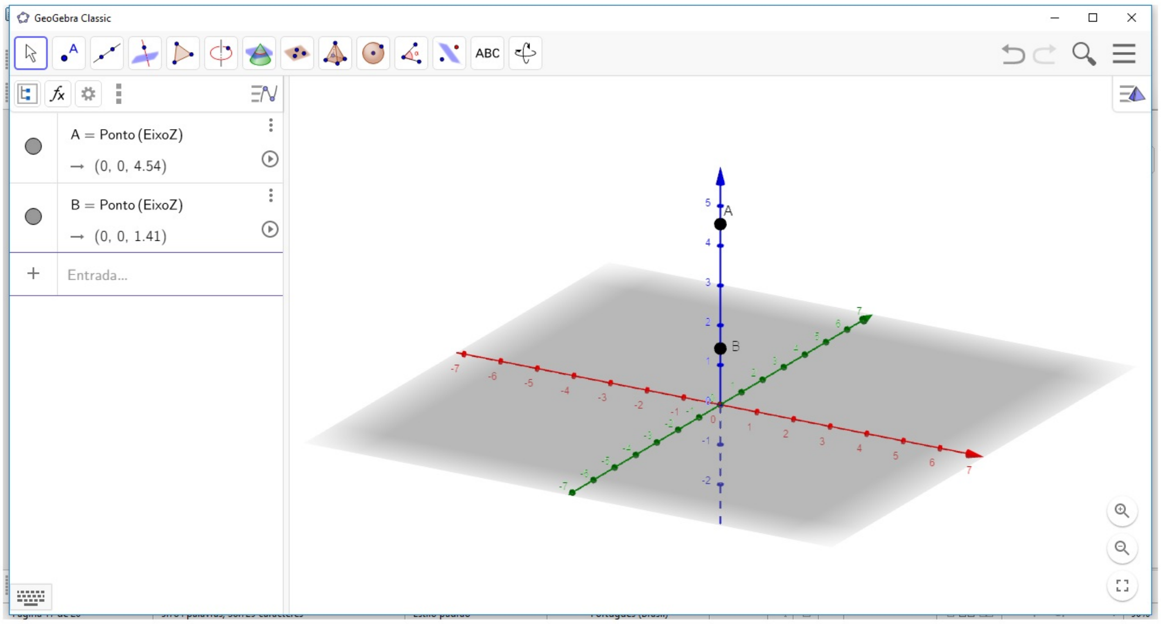
Passo 2: Selecionamos a ferramenta **"Ponto"** e utilizando um dos eixos coordenados como referência, no caso o eixo-z, adicionamos dois pontos A e B.

Figura 4.3: Plano Mediador - Passo 2



Fonte: Elaborado pelo autor

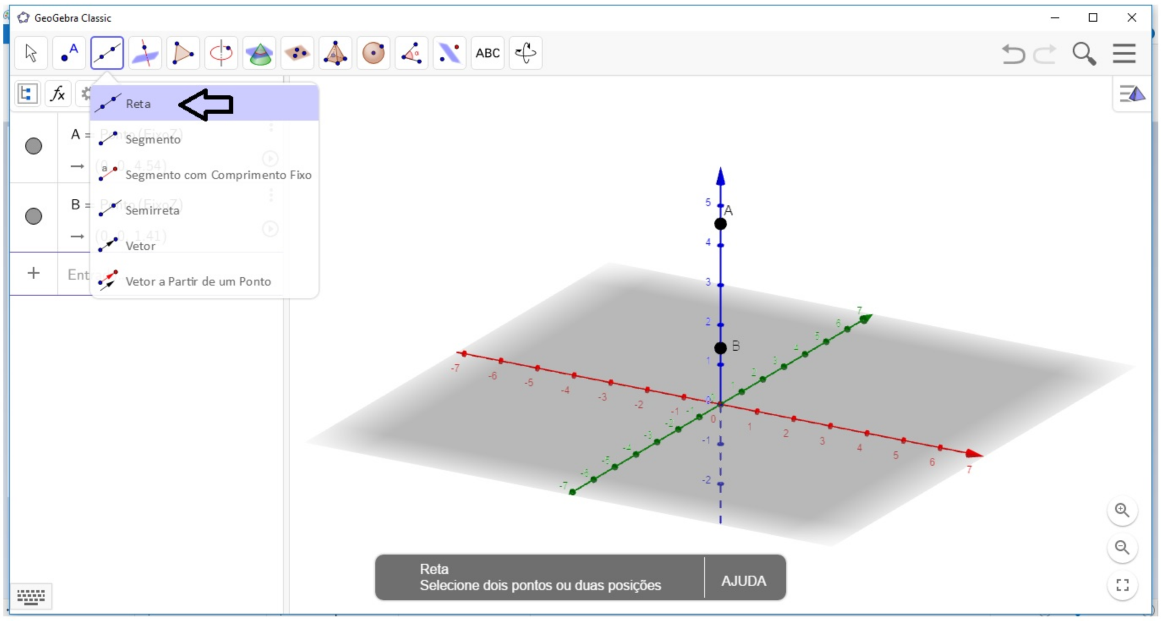
Figura 4.4: Plano Mediador - Passo 2



Fonte: Elaborado pelo autor

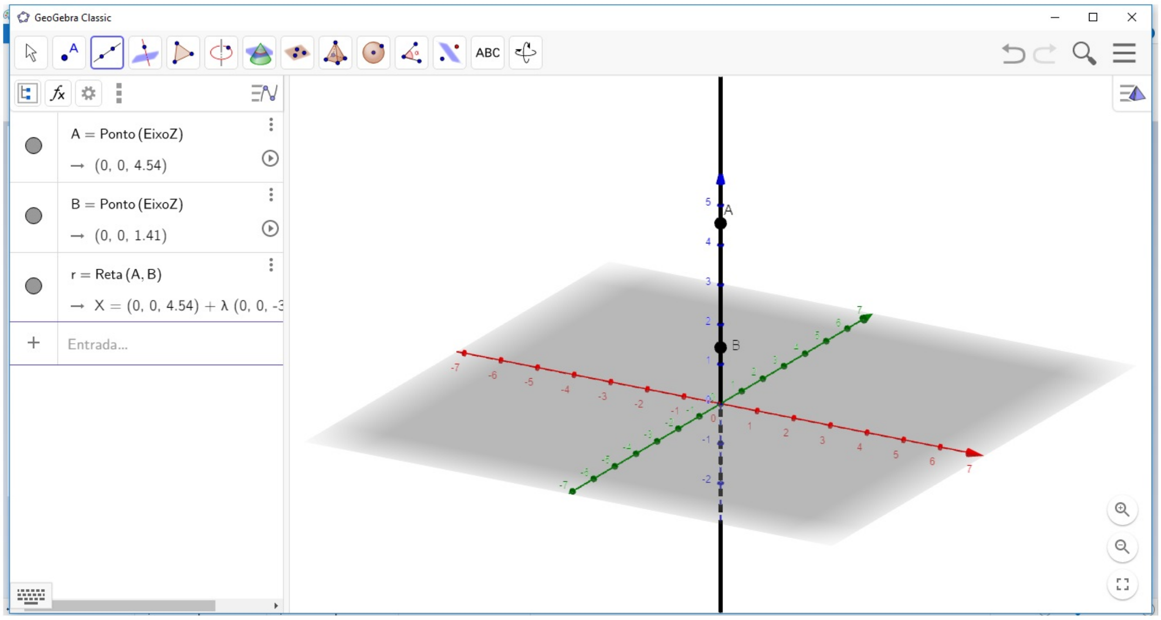
Passo 3: Selecionamos a ferramenta **"Reta"** e construímos uma reta r passando pelos pontos A e B.

Figura 4.5: Plano Mediador - Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor

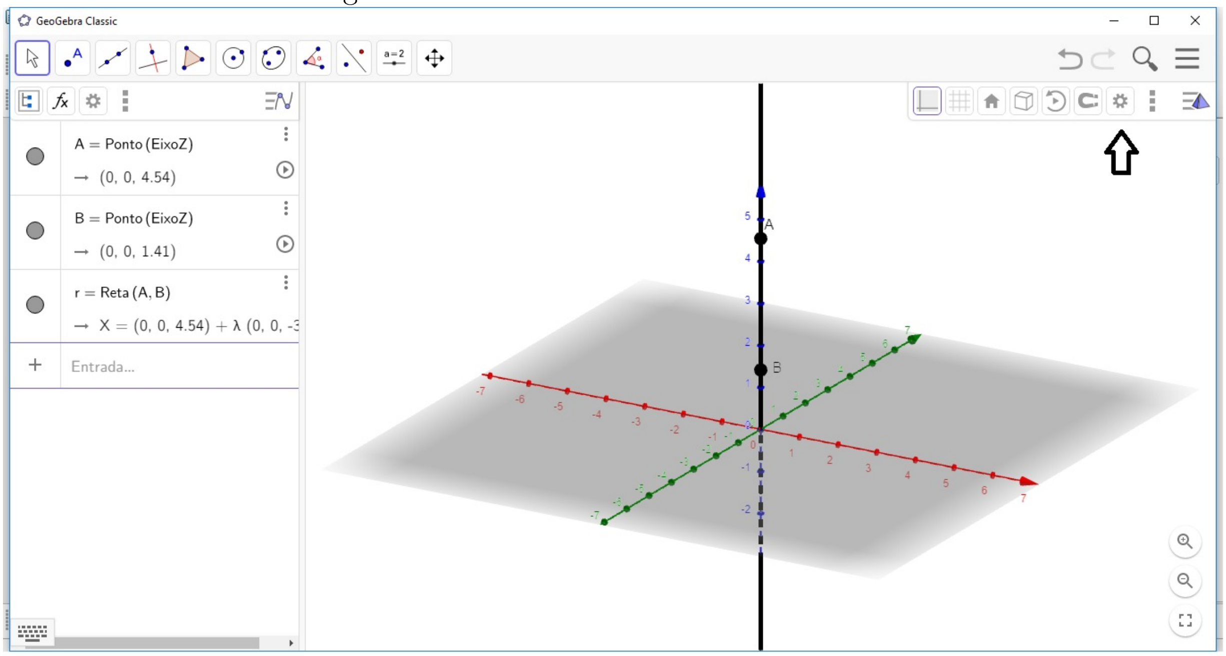
Figura 4.6: Plano Mediador - Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor

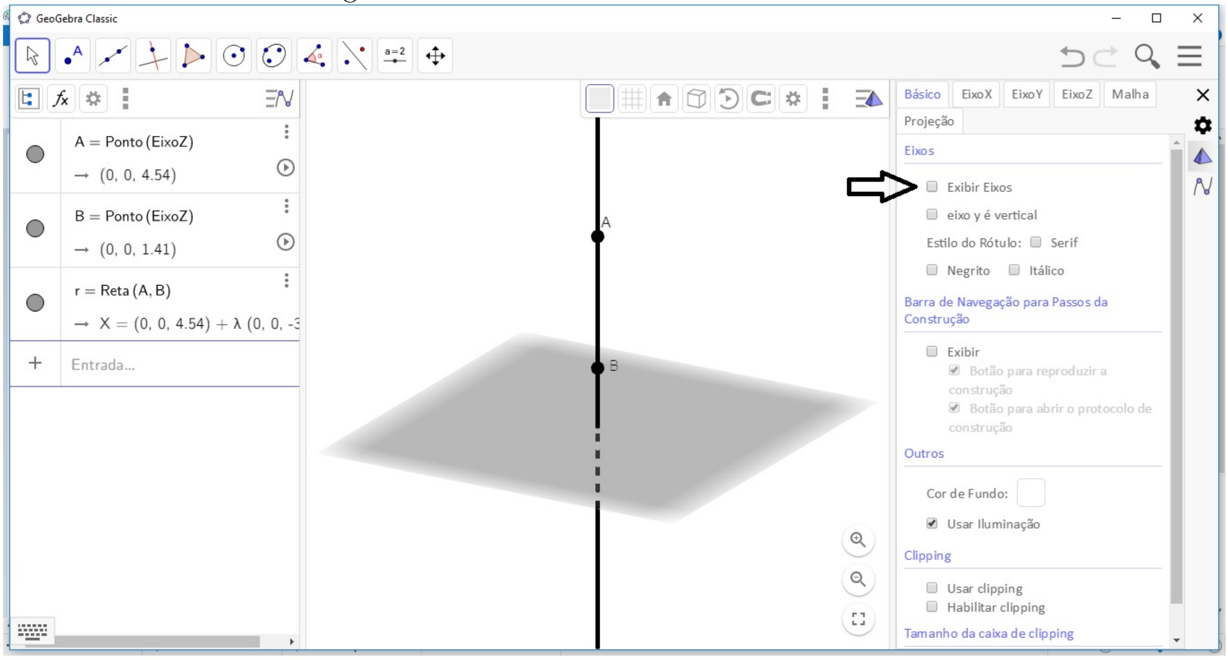
Passo 4: No menu **"Propriedades"** desmarcamos a seleção de **"Exibir eixos"** e em seguida no botão **"Exibir e esconder eixos"** desmarcamos a opção de plano.

Figura 4.7: Plano Mediador - Passo 4



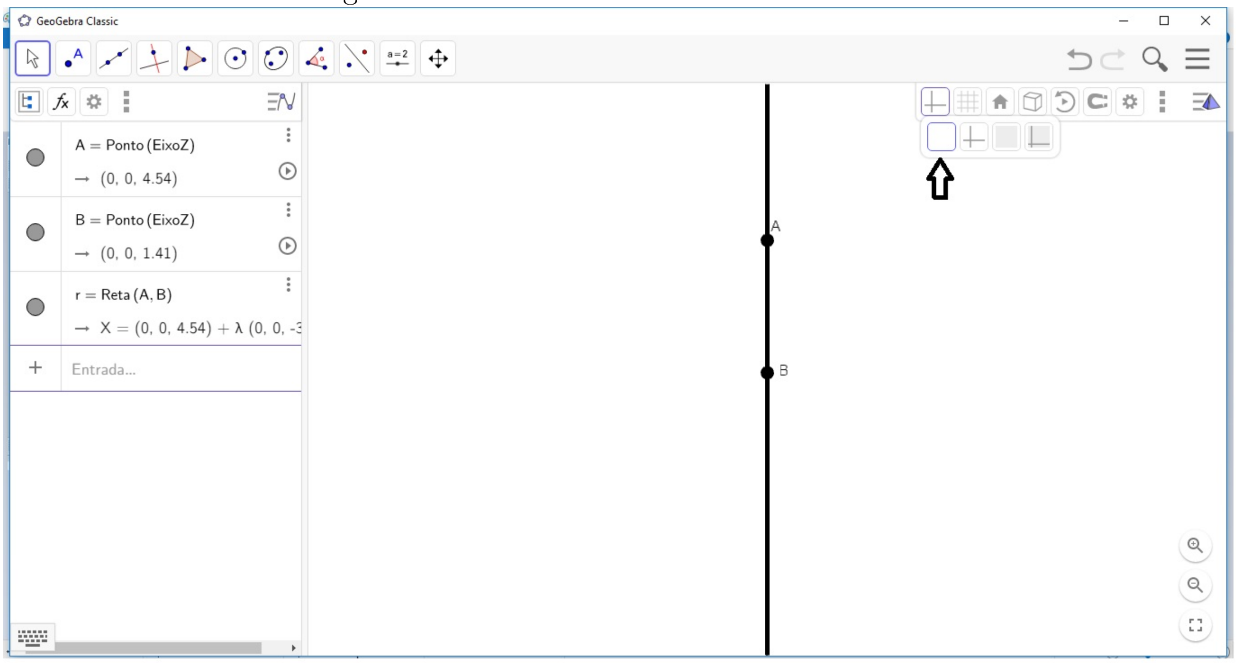
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4.8: Plano Mediador - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor

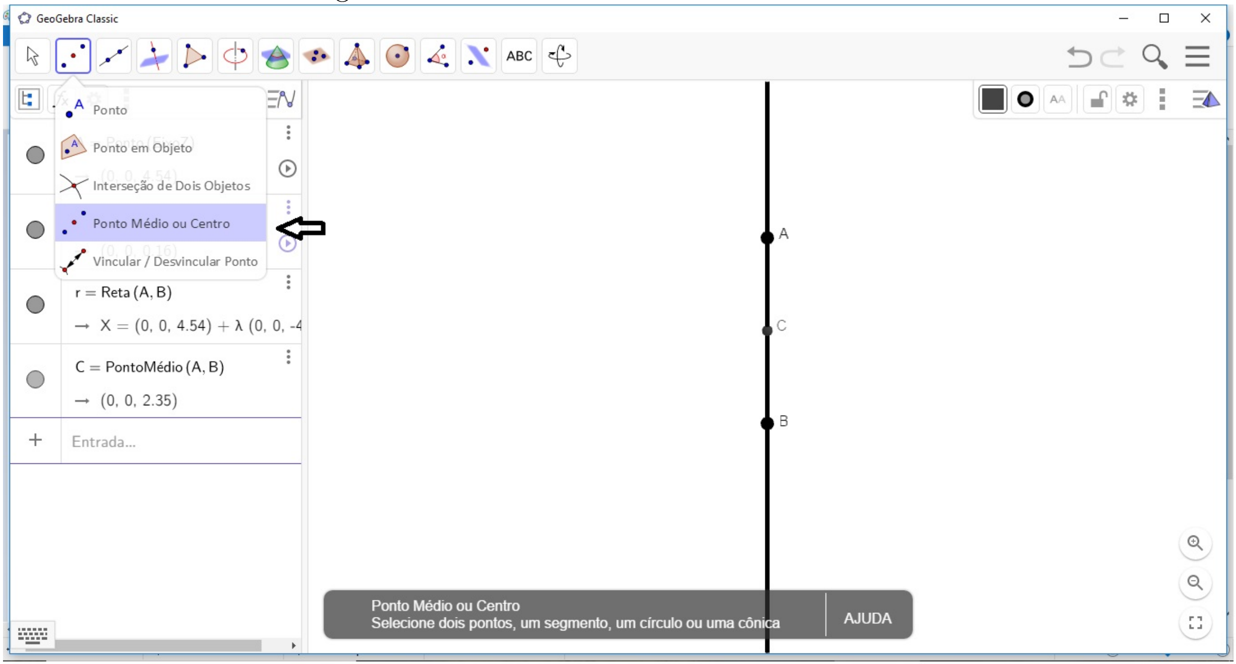
Figura 4.9: Plano Mediador - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 5: Selecionamos a ferramenta **"Ponto médio ou centro"** e marcamos o ponto médio C entre os pontos A e B.

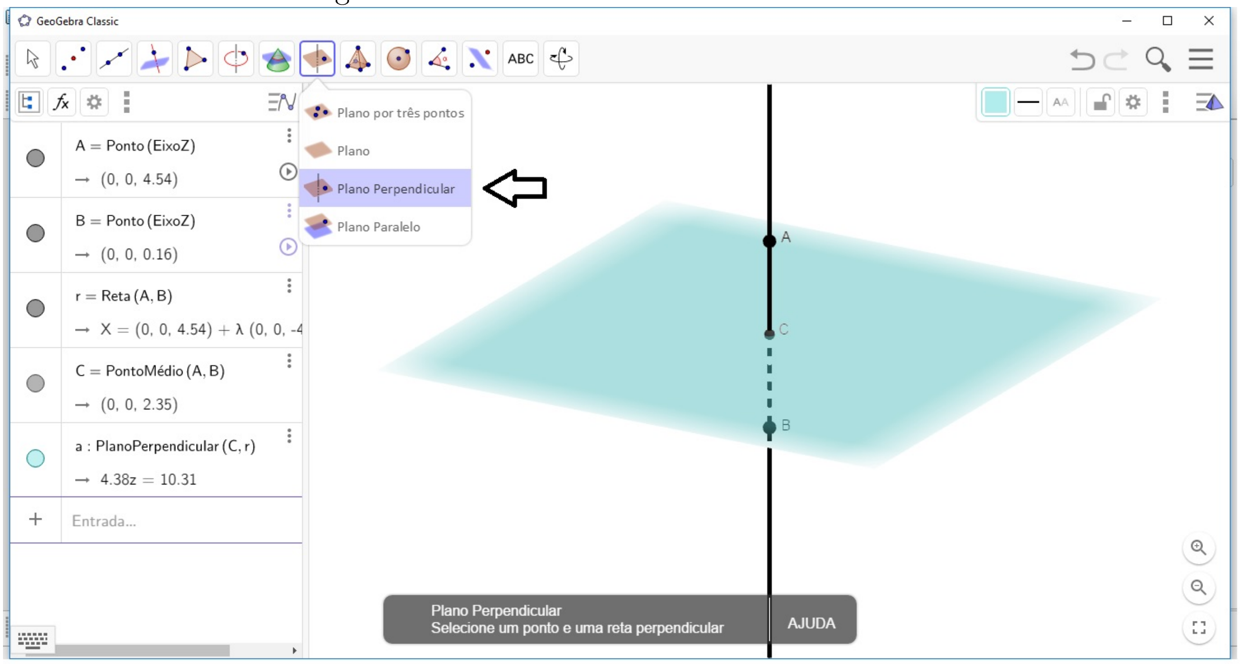
Figura 4.10: Plano Mediador - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 6: Selecionamos o botão **"Plano perpendicular"**, clicamos no ponto médio C e em seguida na reta r. Construímos assim o plano perpendicular à reta r no ponto C.

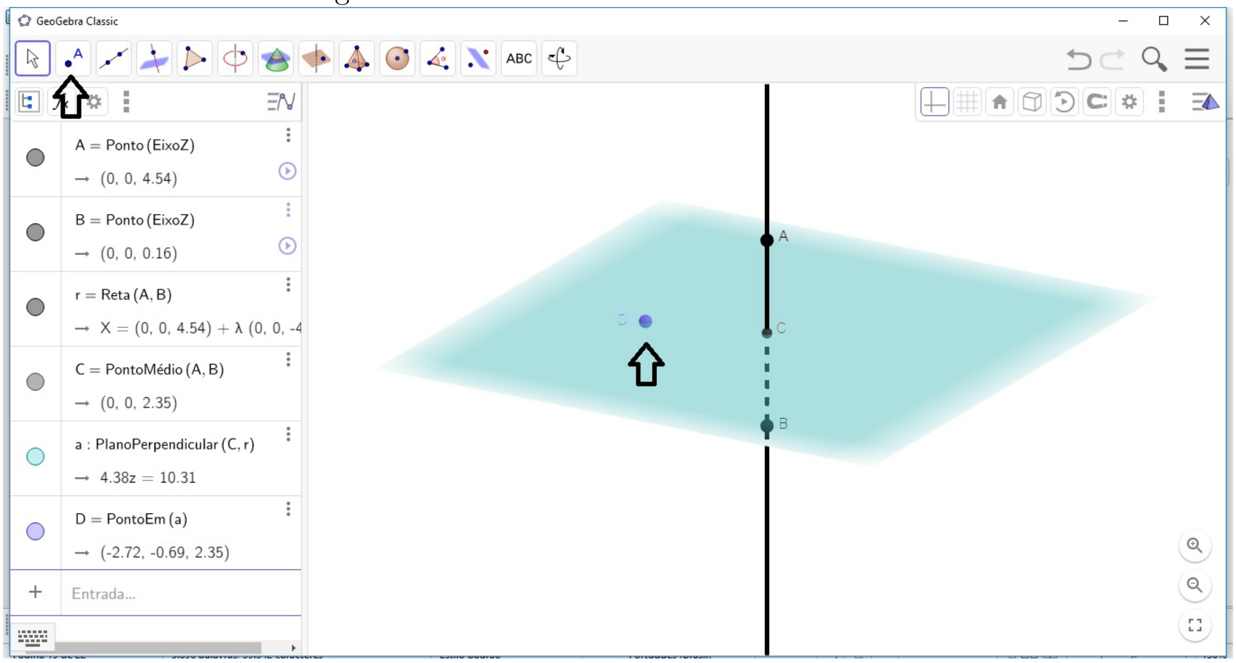
Figura 4.11: Plano Mediador - Passo 6



Fonte: Elaborado pelo autor

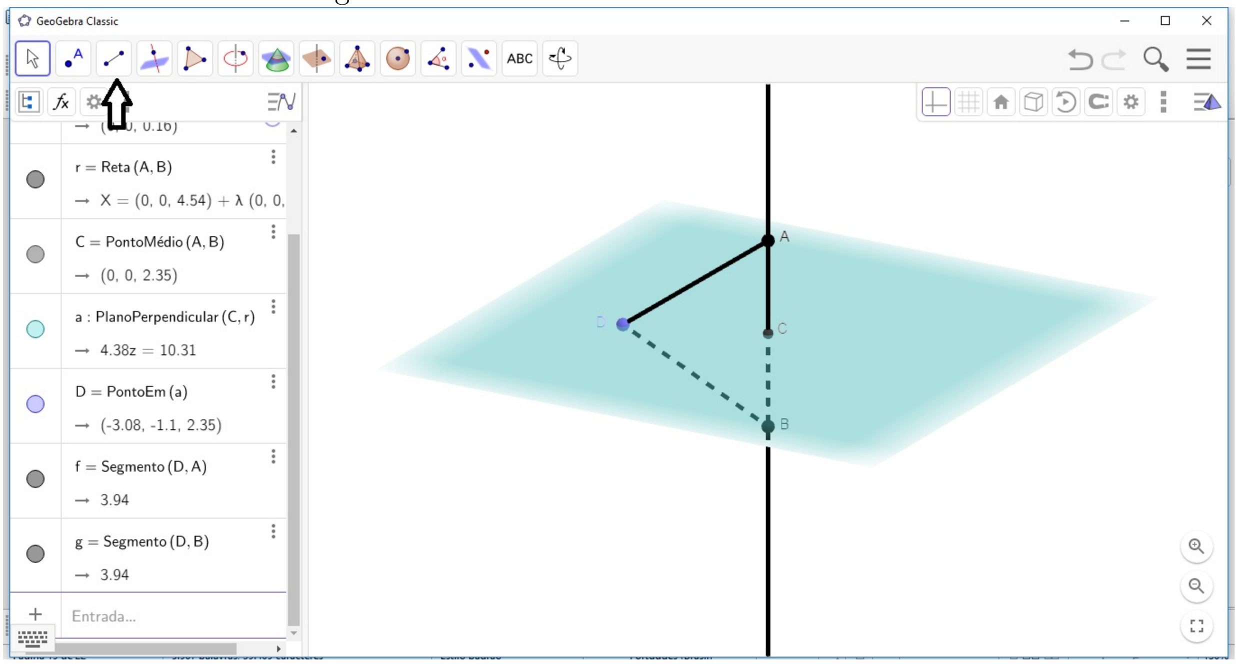
Passo 7: Selecionamos o botão **"Ponto"** e clicamos sobre o plano a construído. O ponto D é um ponto do plano a. Selecionamos o botão **"Segmento"** e construímos os segmentos AD e BD. Selecionamos o botão **"Ângulo"** e em seguida clicamos nos pontos A, C e D, respectivamente construindo o ângulo α.

Figura 4.12: Plano Mediador - Passo 7



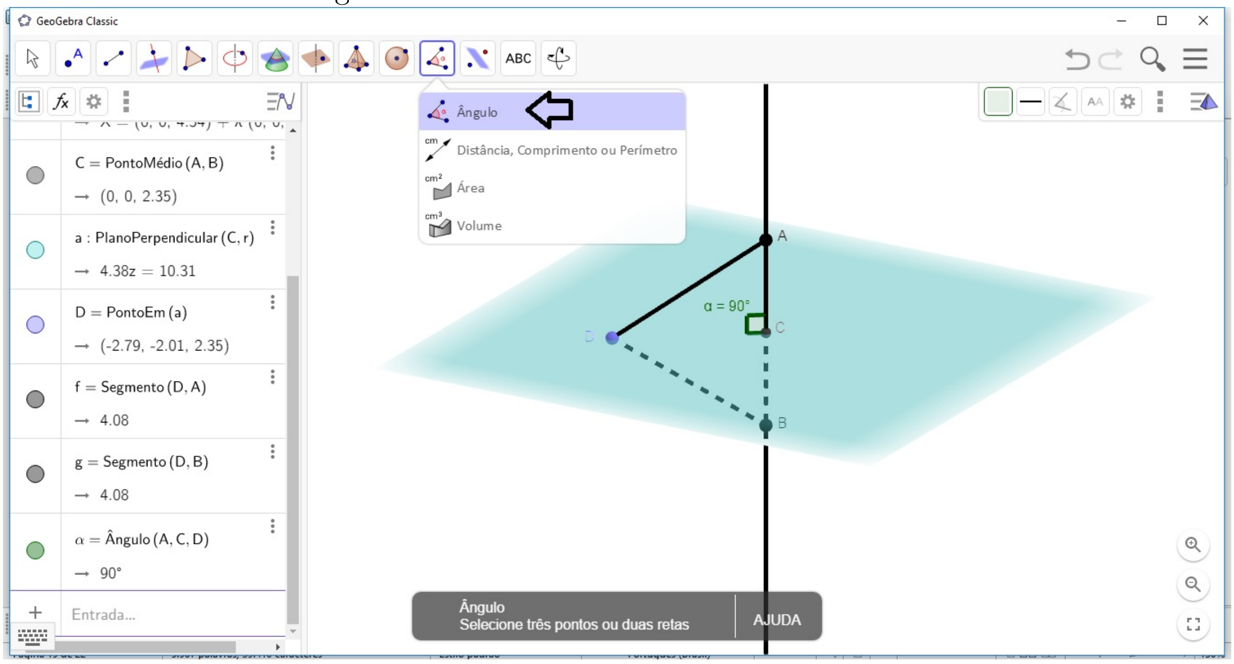
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4.13: Plano Mediador - Passo 7



Fonte: Elaborado pelo autor

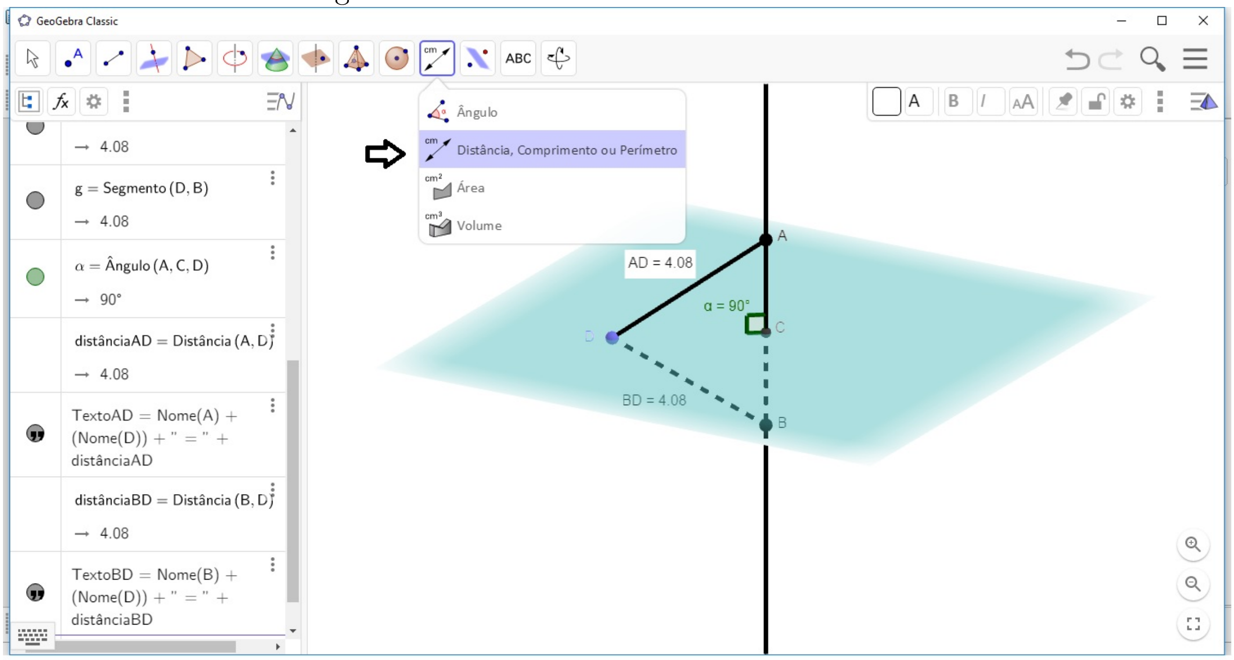
Figura 4.14: Plano Mediador - Passo 7



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 8: Selecionamos o botão **"Distância, Comprimento ou Perímetro"** e em seguida clicamos nos pontos A e D, e em B e D.

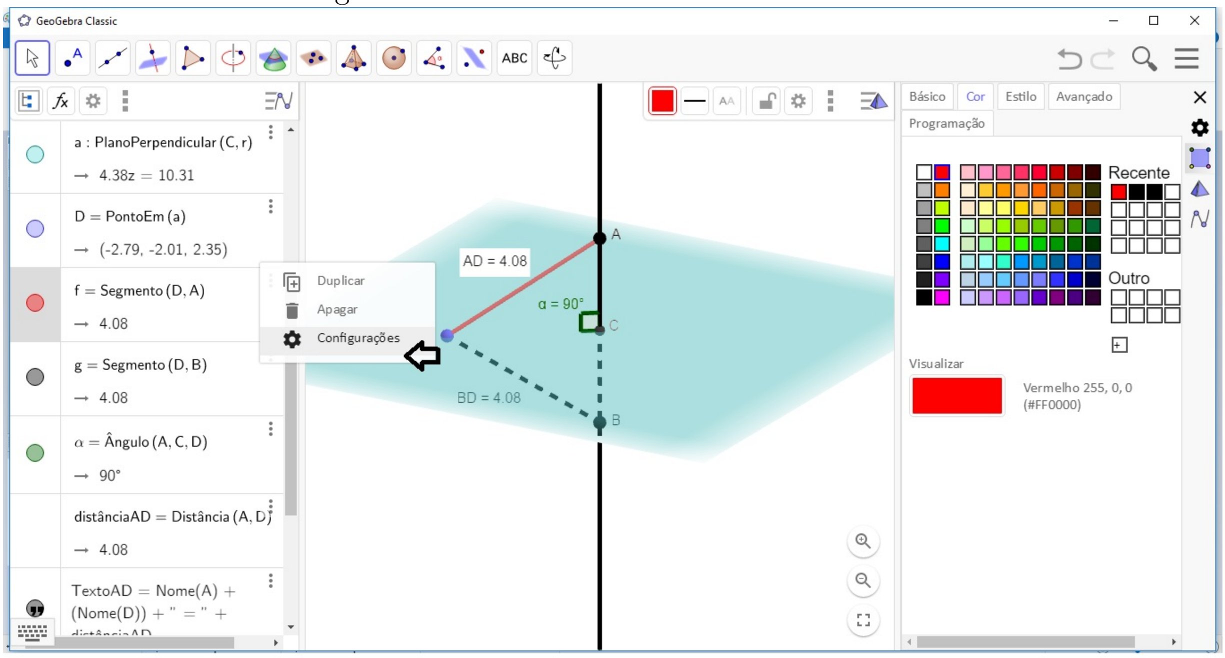
Figura 4.15: Plano Mediador - Passo 8



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 9: No menu **"Configurações"** selecionamos o segmento AD e alteramos a cor, fazendo o mesmo com o segmento BD.

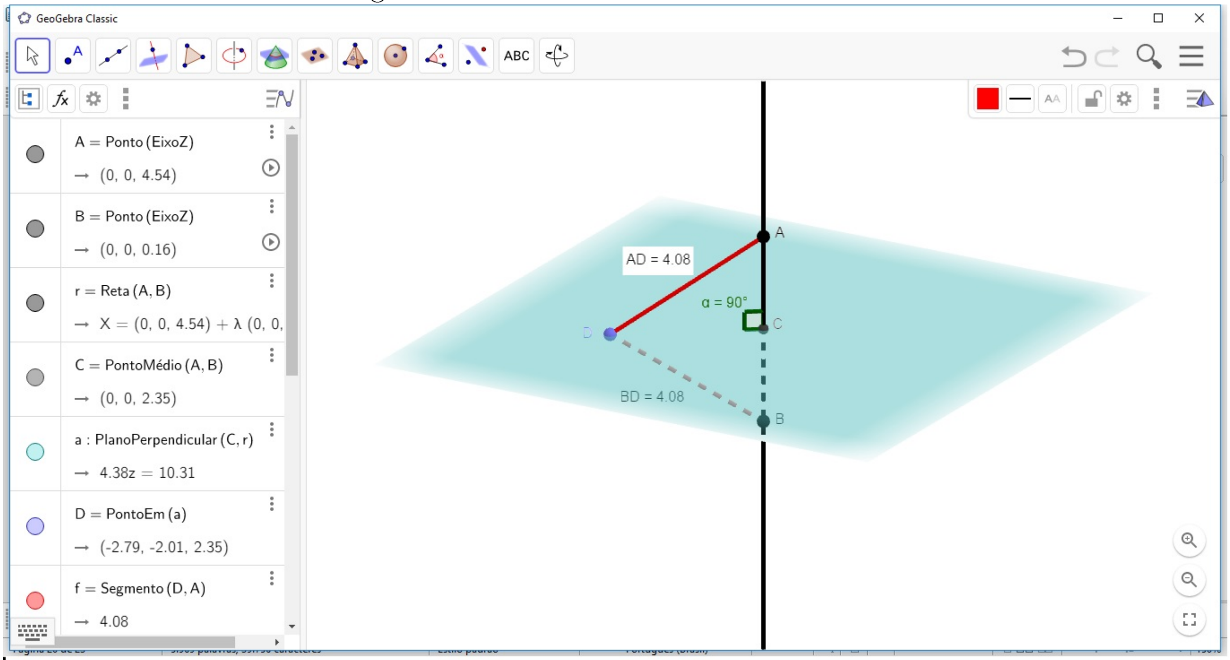
Figura 4.16: Plano Mediador - Passo 9



Fonte: Elaborado pelo autor

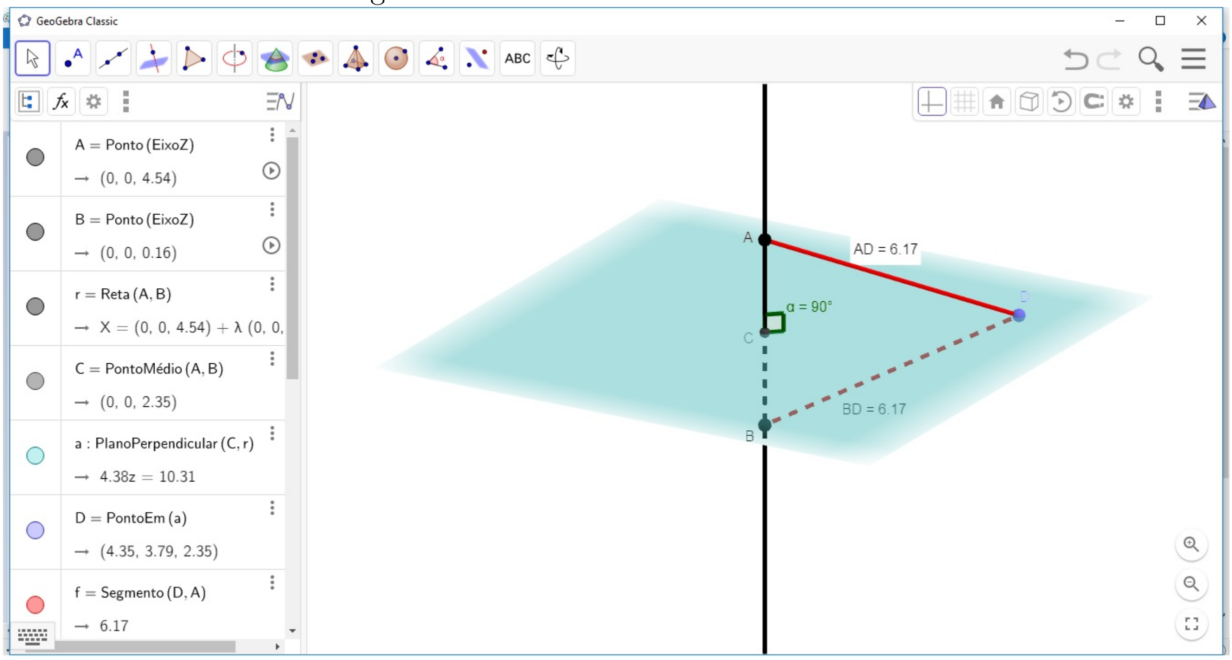
Observe que ao mover o ponto D sobre o plano a, a distância entre o ponto A e o ponto D assim como a distância entre os pontos B e D possuem a mesma medida. Portanto o plano a é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos no espaço conforme comprovamos na proposição 3.2. Depois de finalizada a construção do plano medial, o estudante ou o professor pode mover o ponto D em qualquer direção sobre o plano a e explorar a propriedade descrita à respeito do **plano medial**. Outros conteúdos na qual essa construção permite visualizar são os que dizem respeito à triângulo retângulo, ponto médio, mediana do triângulo, altura do triângulo, as propriedades dos triângulos isósceles etc.

Figura 4.17: Plano Mediador - 10



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4.18: Plano Mediador - 11



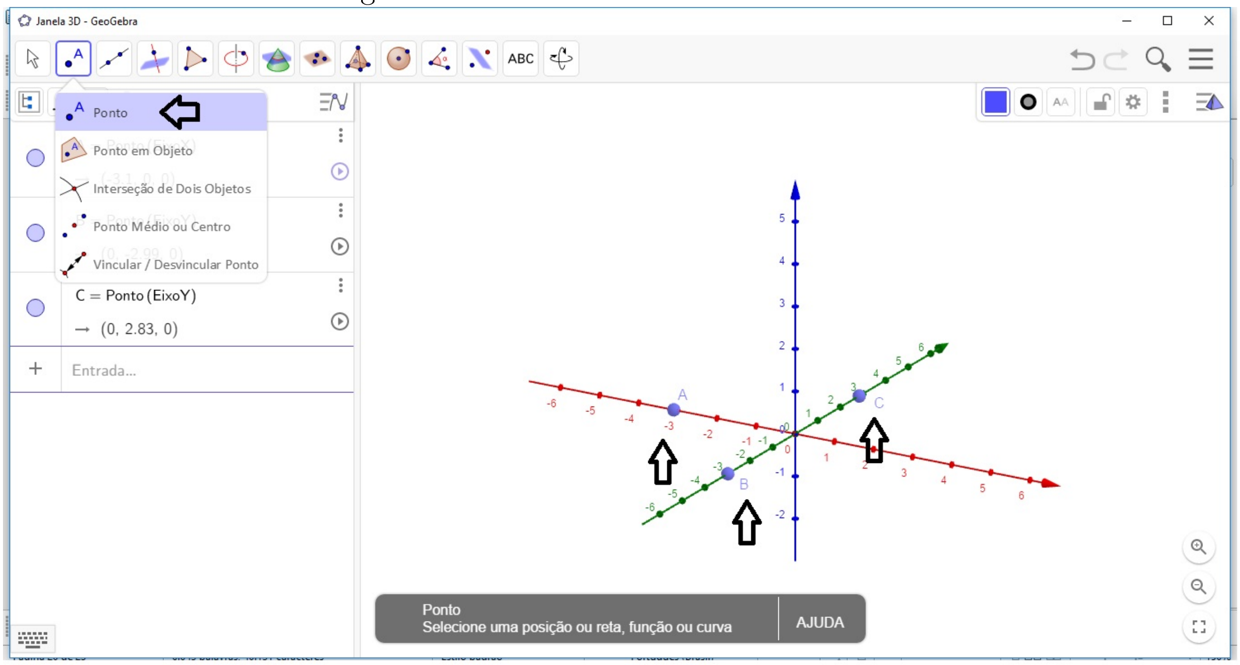
Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 Reta Medial

Construiremos o Lugar Geométrico dos pontos do espaço que equidistam de A, B e C, denominado **reta medial**. Descreveremos como construir os três pontos não colineares do espaço, os segmentos que ligam esses pontos e seus pontos médios, os vetores que dão a direção dos segmentos, o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos, e finalmente a reta perpendicular (reta medial). Construiremos também alguns objetos auxiliares para a compreensão, tais como os segmentos que ligam um ponto pertencente à reta medial e os três pontos do espaço descrito inicialmente e o ângulo entre o plano que contém os três pontos e a reta medial.

Passo 1: Selecionamos o botão **"Ponto"** e construímos os pontos A, B e C sobre os $eixo - x$ e $eixo - y$. Os eixos são usados apenas como referência no espaço.

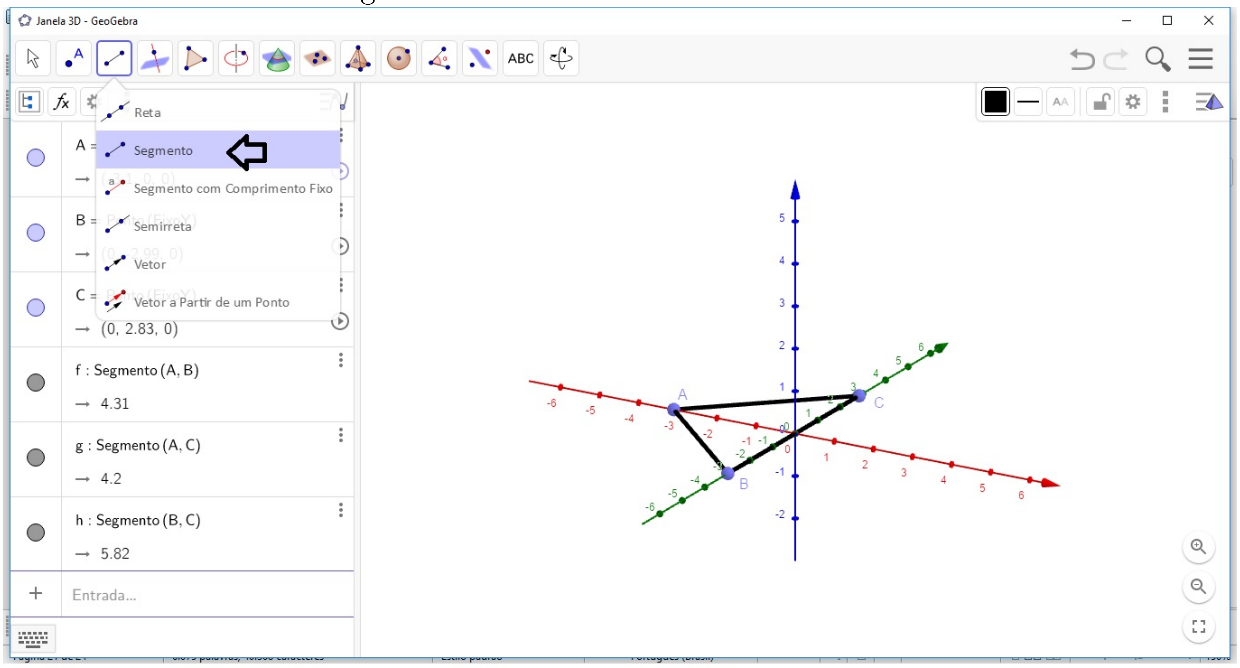
Figura 4.19: Reta Medial - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2: Selecionamos o botão **"Segmento"** e construímos os segmentos AB, AC e BC.

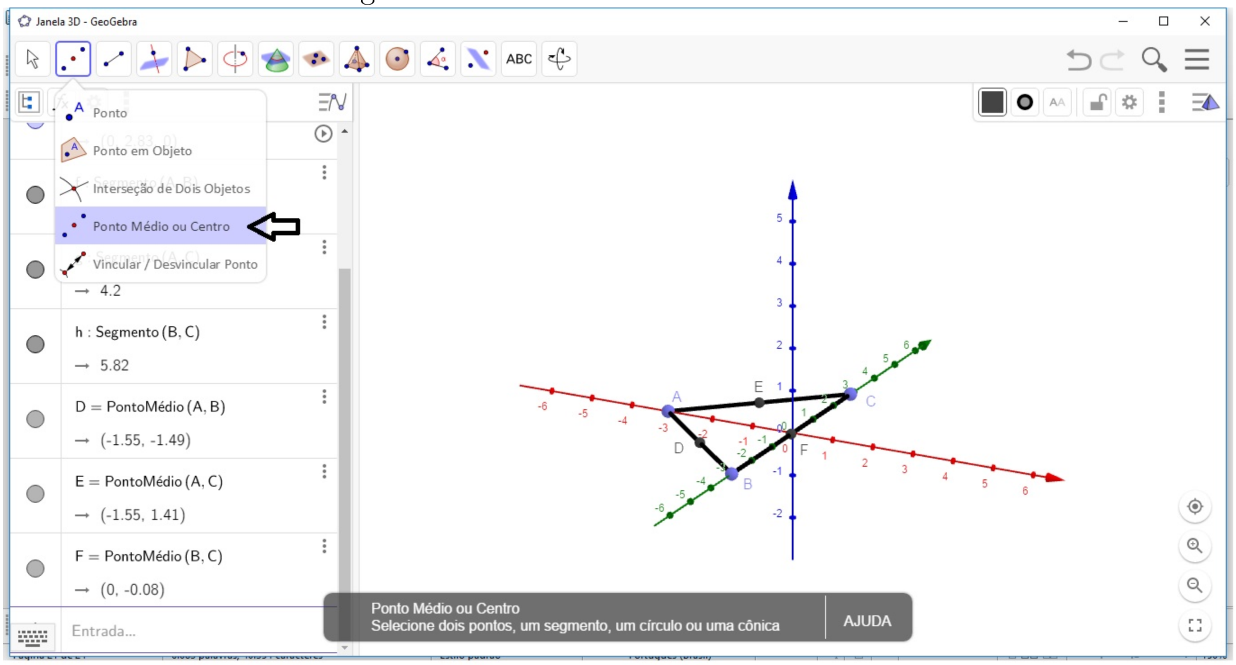
Figura 4.20: Reta Medial - Passo 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3: Selecionamos o botão **"Ponto médio ou Centro"** e construímos os pontos médios D, E e F dos segmentos AB, AC e BC. Selecionamos o botão **"Plano por três pontos"**, clicamos nos pontos A, B e C. Construímos assim o plano a.

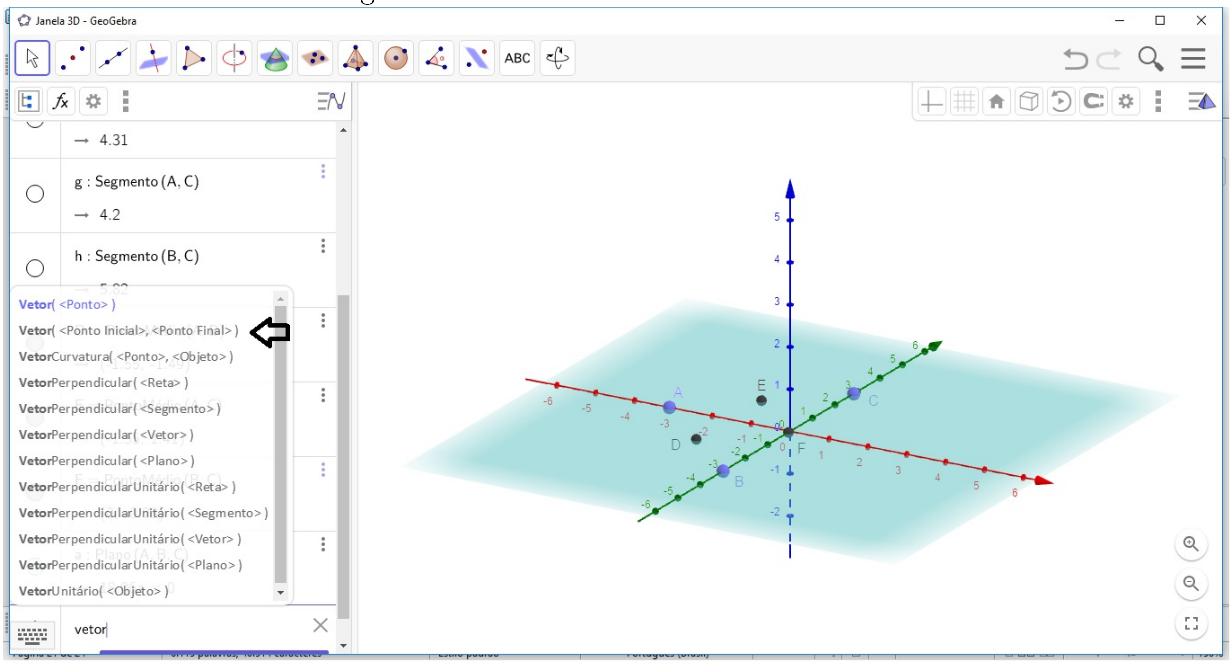
Figura 4.21: Reta Medial - Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor

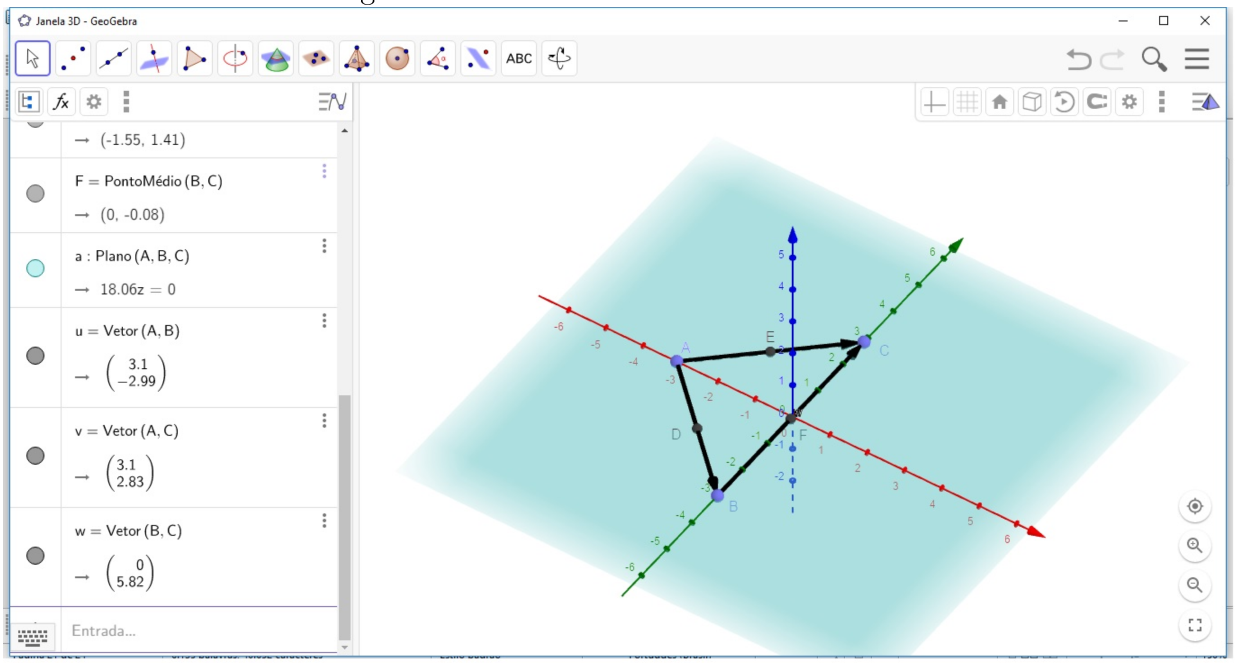
Passo 4: Na caixa de entrada digitamos **"Vetor"**. Abrirá uma lista com os diferentes tipos de vetor. Escolha **"Vetor(<ponto inicial>,<ponto final>)"** construa os vetores AB, AC e BC, digitando como ponto inicial A e ponto final B e clicando na tecla **"Enter"**. Repita o procedimento para construir os vetores seguintes.

Figura 4.22: Reta Medial - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor

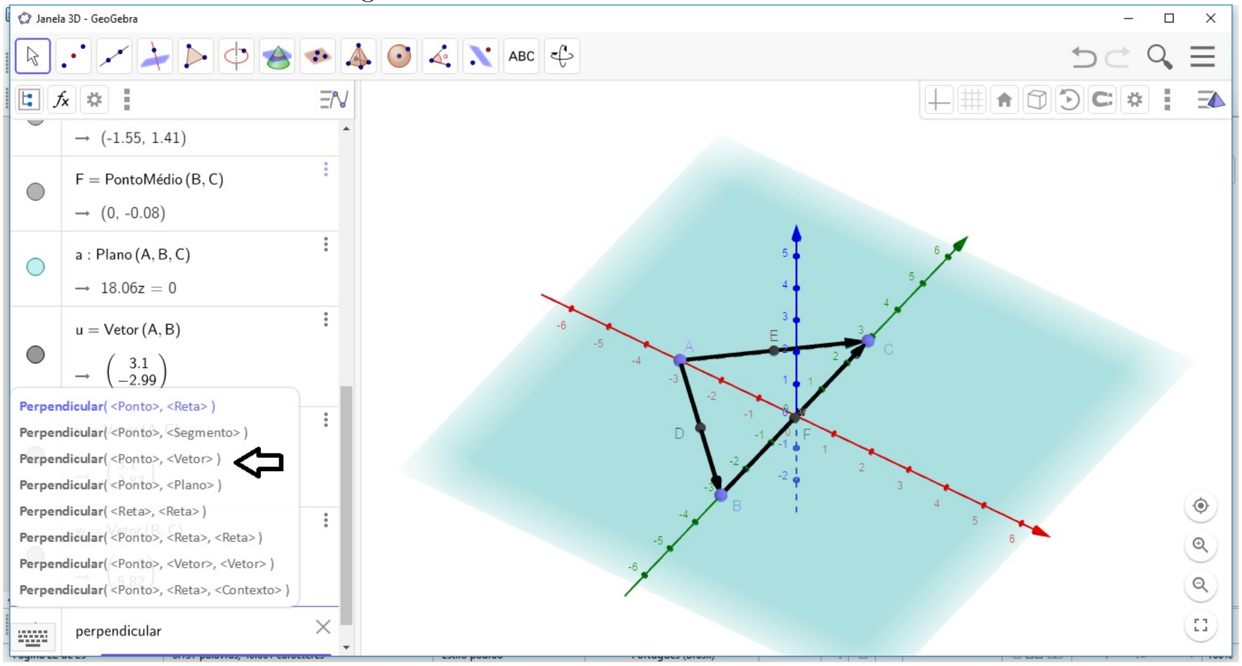
Figura 4.23: Reta Medial - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor

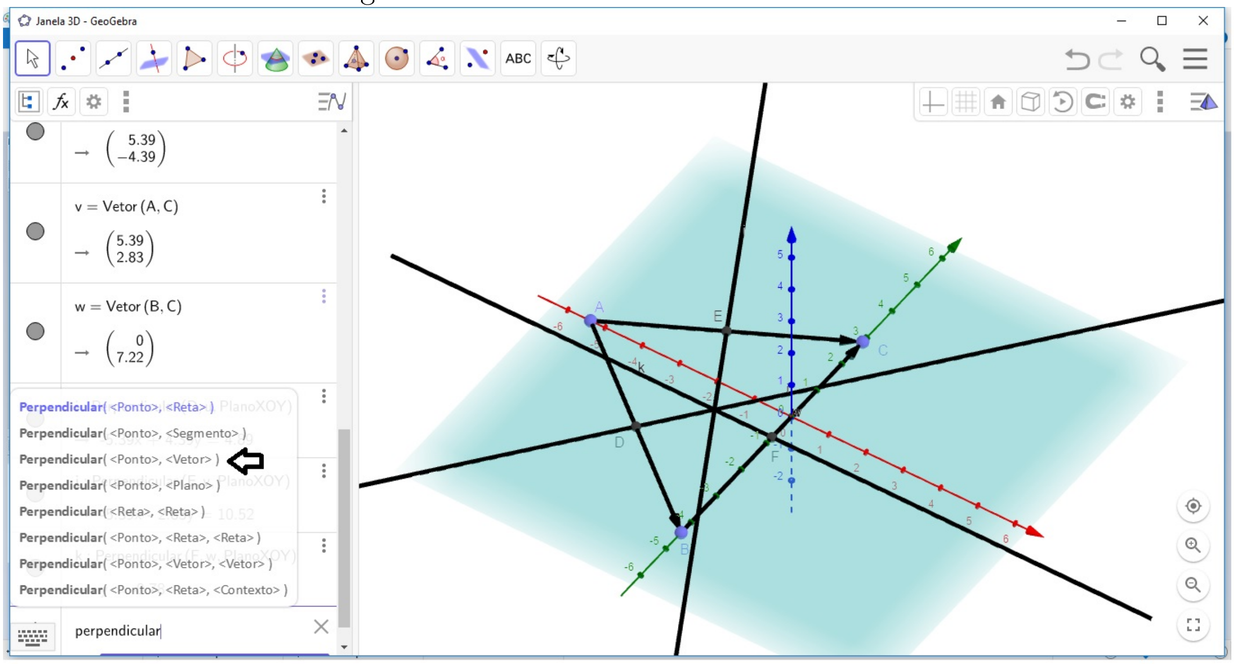
Passo 5: Para construir as mediatrizes dos segmentos AB, AC e BC digitamos na caixa de entrada **"Perpendicular"** e selecionamos **"Perpendicular(<Ponto>,<Vetor>)"**, digitamos o ponto D e em seguida o vetor u. Repetimos o procedimento para os pontos E e F e os vetores v e w, respectivamente . Construímos assim as mediatrizes dos segmentos AB, AC e BC.

Figura 4.24: Reta Medial - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor

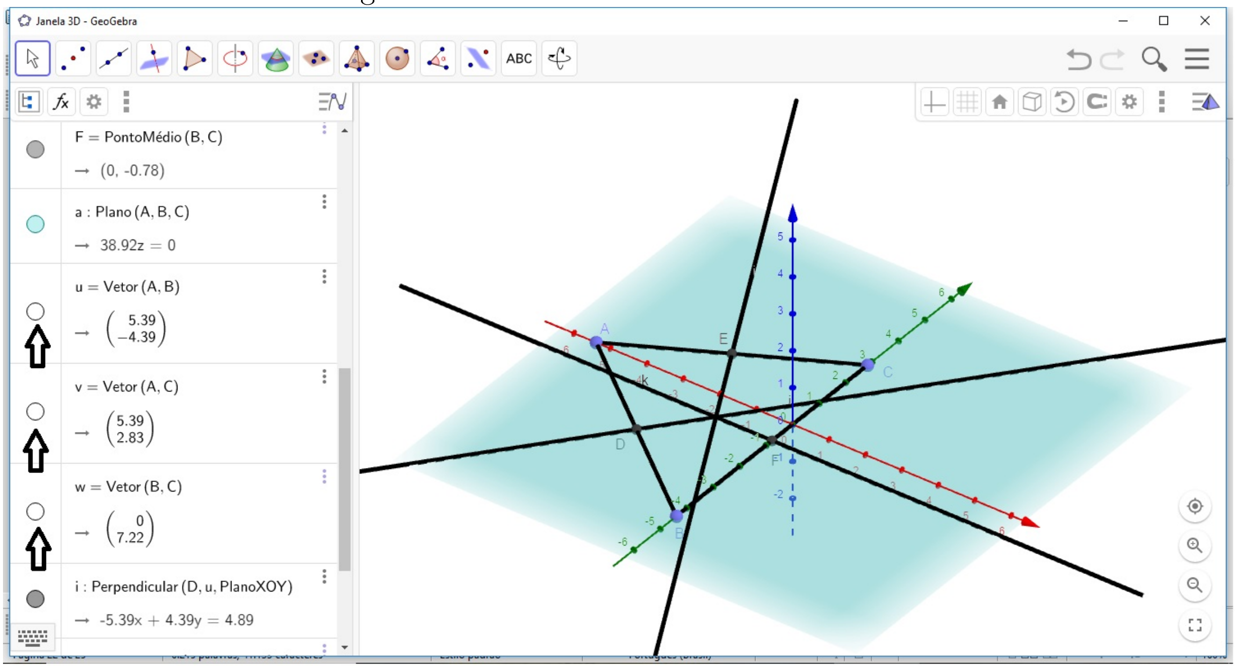
Figura 4.25: Reta Medial - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 6: Ocultamos os vetores desmarcando a **"bolinha"** à esquerda de cada vetor na janela de objetos.

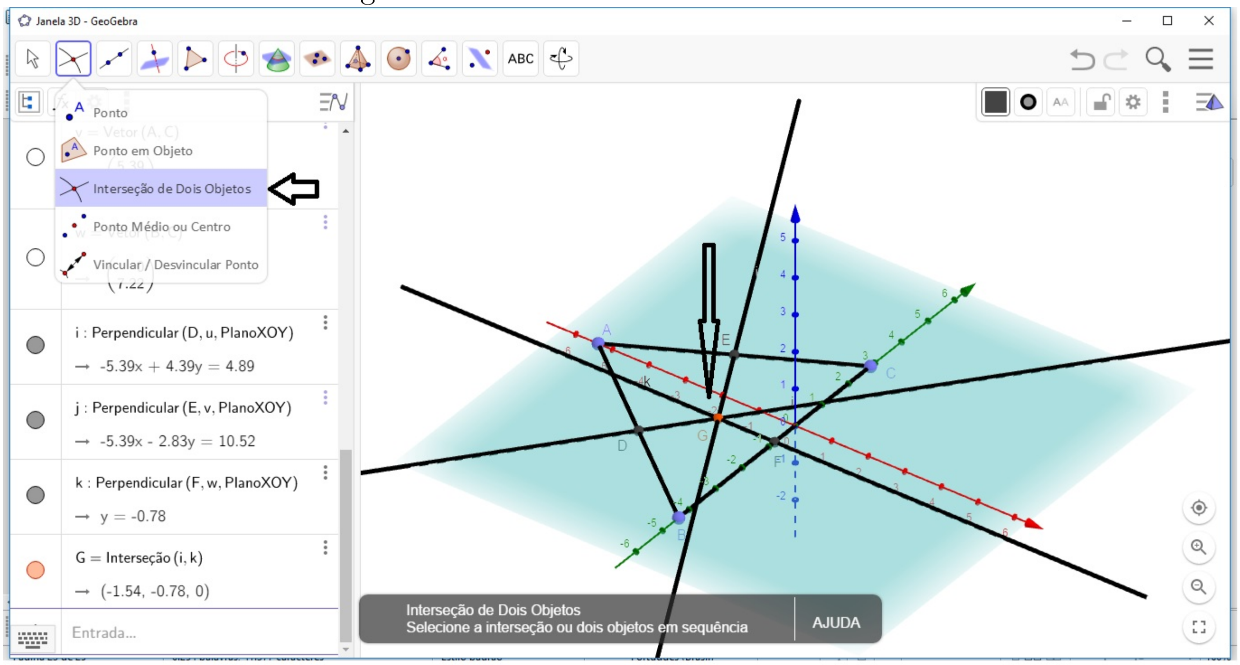
Figura 4.26: Reta Medial - Passo 6



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 7: Selecionamos o botão **"Interseção de dois Objetos"** e clicamos no encontro das três mediatrizes construídas. Construímos assim o ponto G.

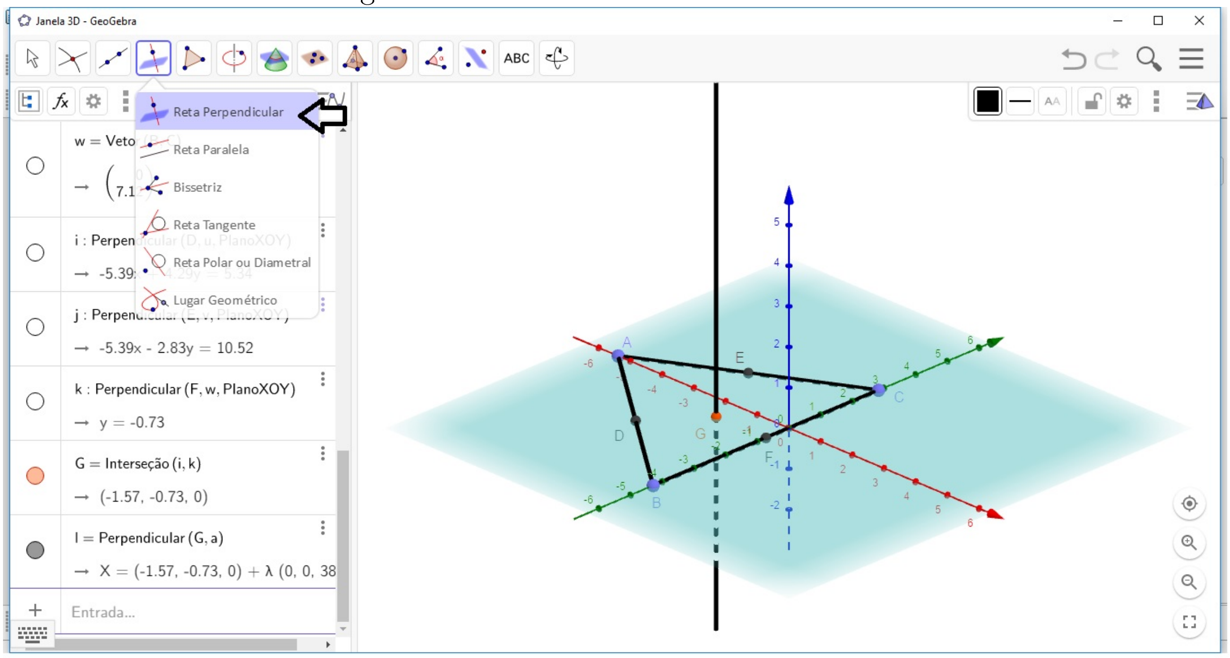
Figura 4.27: Reta Medial - Passo 7



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 8: Ocultamos as mediatrizes seguindo o mesmo procedimento que usamos para ocultar os vetores acima. Selecionamos o botão **"Reta perpendicular"**, clicamos no ponto G e em seguida no plano a. Construímos assim a reta I.

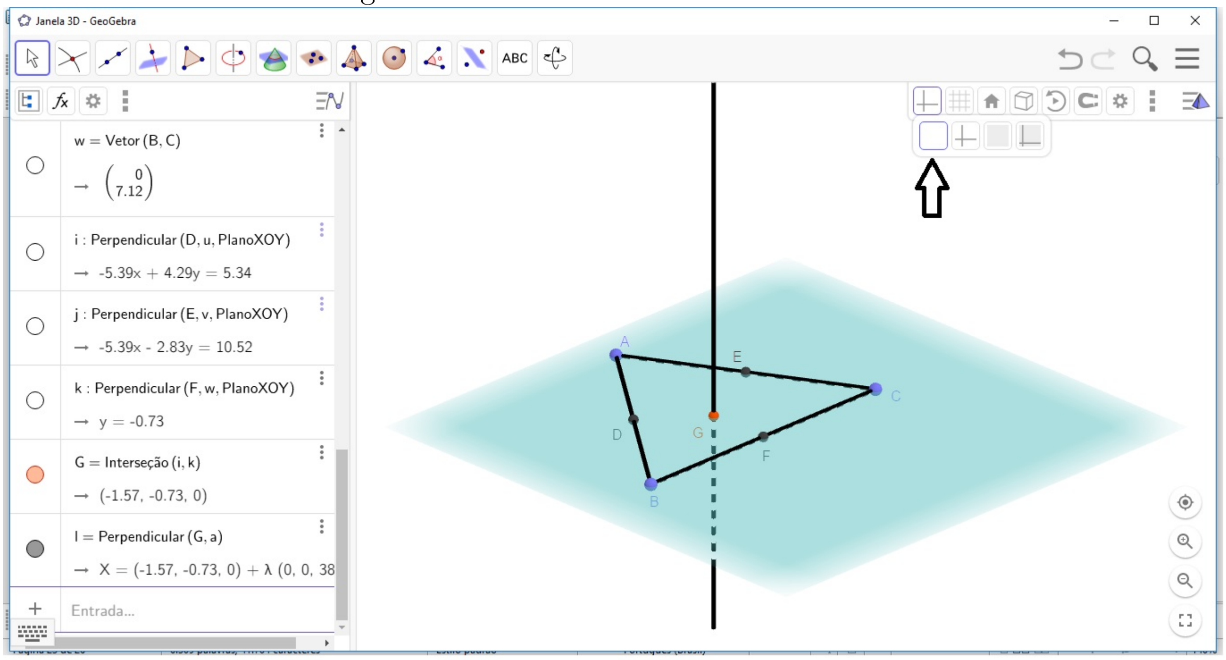
Figura 4.28: Reta Medial - Passo 8



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 9: Ocultamos os eixos coordenados.

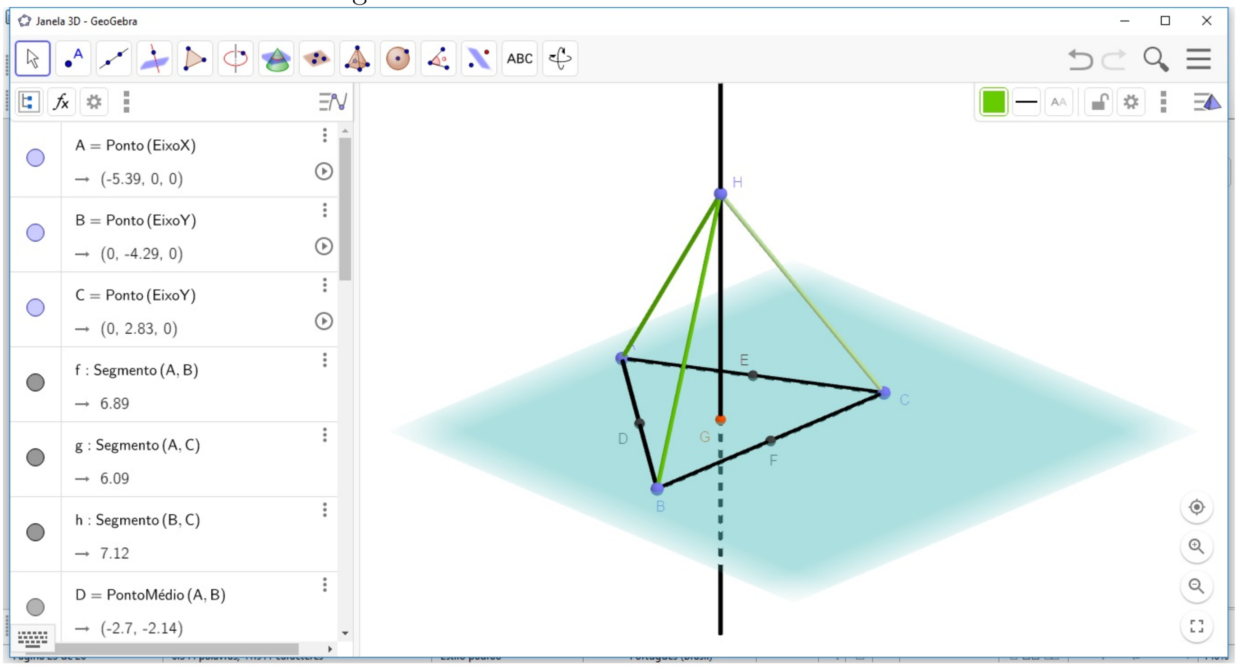
Figura 4.29: Reta Medial - Passo 9



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 10: Selecionamos o botão **"Ponto"** e clicamos na reta I, construindo o ponto H. Em seguida selecionamos o botão **"Segmento"** e construímos os segmentos AH, BH e CH.

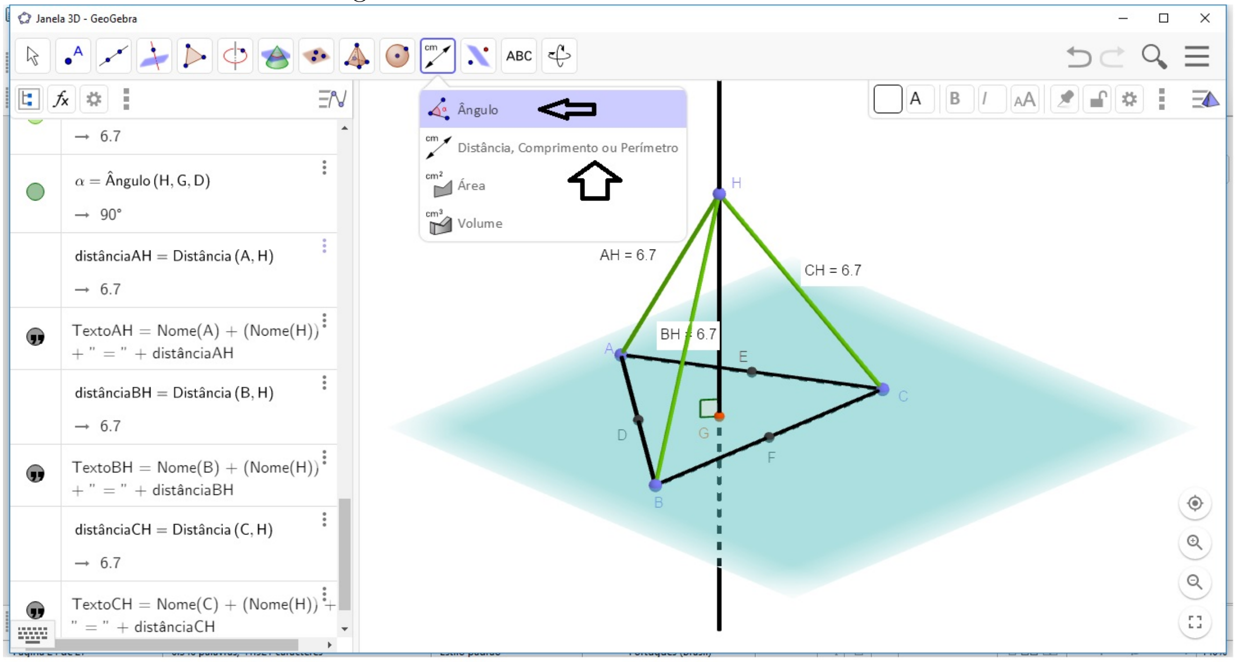
Figura 4.30: Reta Medial - Passo 10



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 11: Selecionamos o botão **"Ângulo"**, clicamos nos pontos H, G e D construindo o ângulo α. Selecionamos o botão **"Distância, Comprimento ou Perímetro"** e clicamos nos pontos A e H, B e H, C e H para mostrar que a distância entre os pontos A, B e C ao ponto H é a mesma.

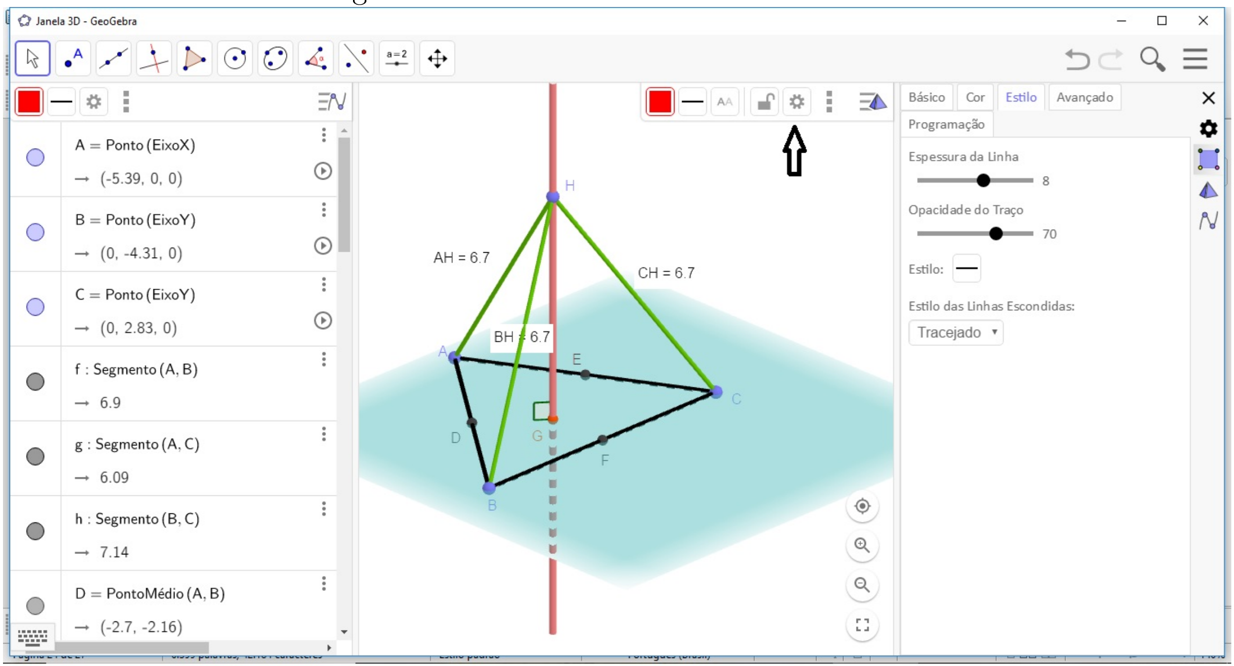
Figura 4.31: Reta Medial - Passo 11



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 12: Selecionamos a reta I e em seguida clicamos no botão de **"Propriedades"**. Modificamos a cor e a espessura da reta I para destacar a reta medial.

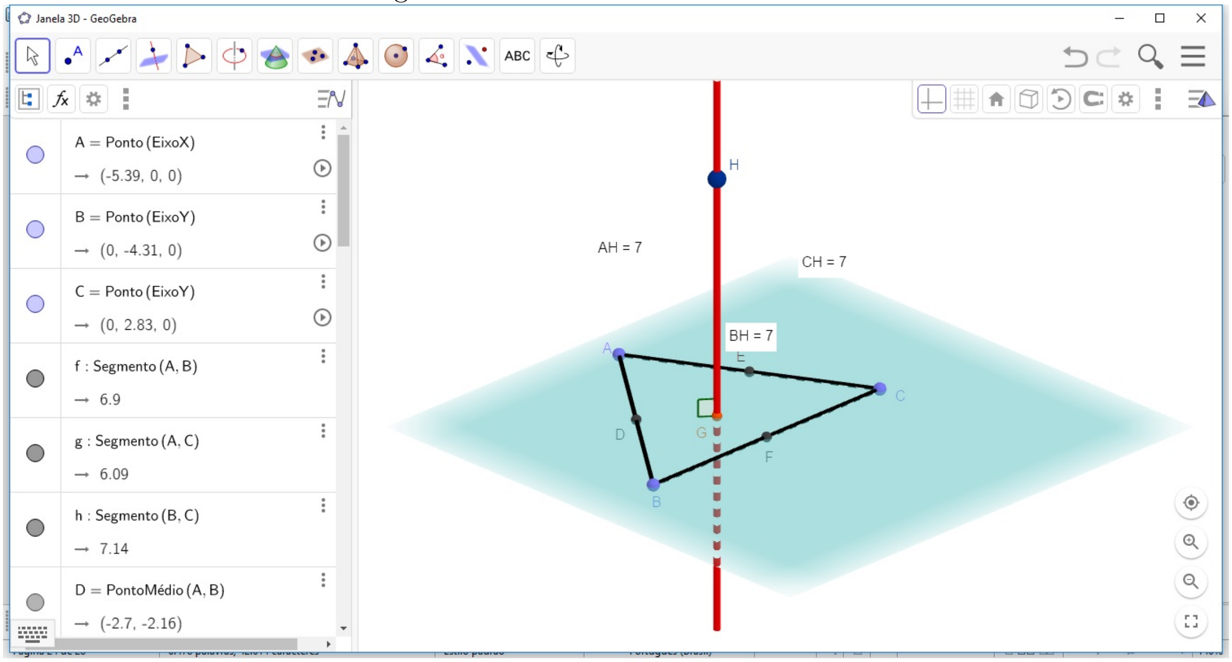
Figura 4.32: Reta Medial - Passo 12



Fonte: Elaborado pelo autor

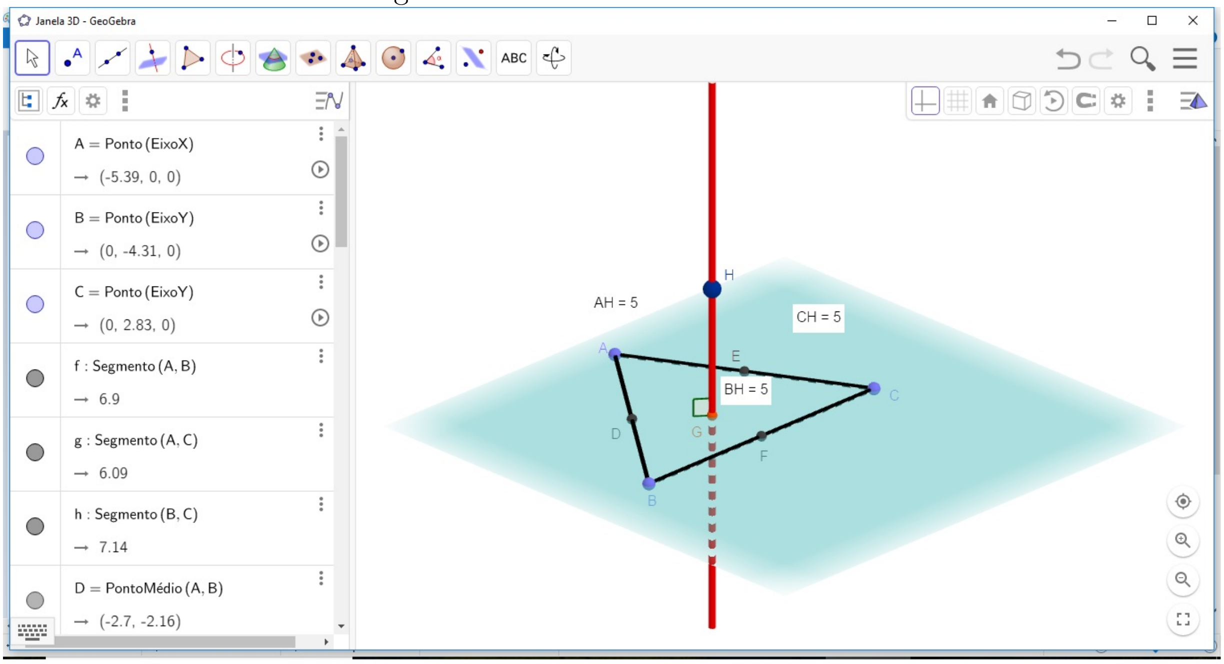
Observamos com a construção descrita acima que o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de A, B e C é a reta I, perpendicular ao plano (ABC) e passando pelo circuncentro G do triângulo ABC. Dizemos que I é a reta medial do triângulo ABC, conforme a proposição 3.3. Após essa construção, podemos explorar dinamicamente as propriedades dos pontos equidistantes de três pontos não colineares do espaço, a distância entre dois pontos, bem como a interseção dos planos mediais dos pontos dois a dois como sendo a reta medial. Outro conteúdo que pode ser explorado com a construção da reta medial é o cálculo da altura de uma pirâmide, pois os segmentos que ligam o ponto da reta e os três pontos não colineares do espaço formam um tetraedro.

Figura 4.33: Reta Medial 12.1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4.34: Reta Medial 12.2



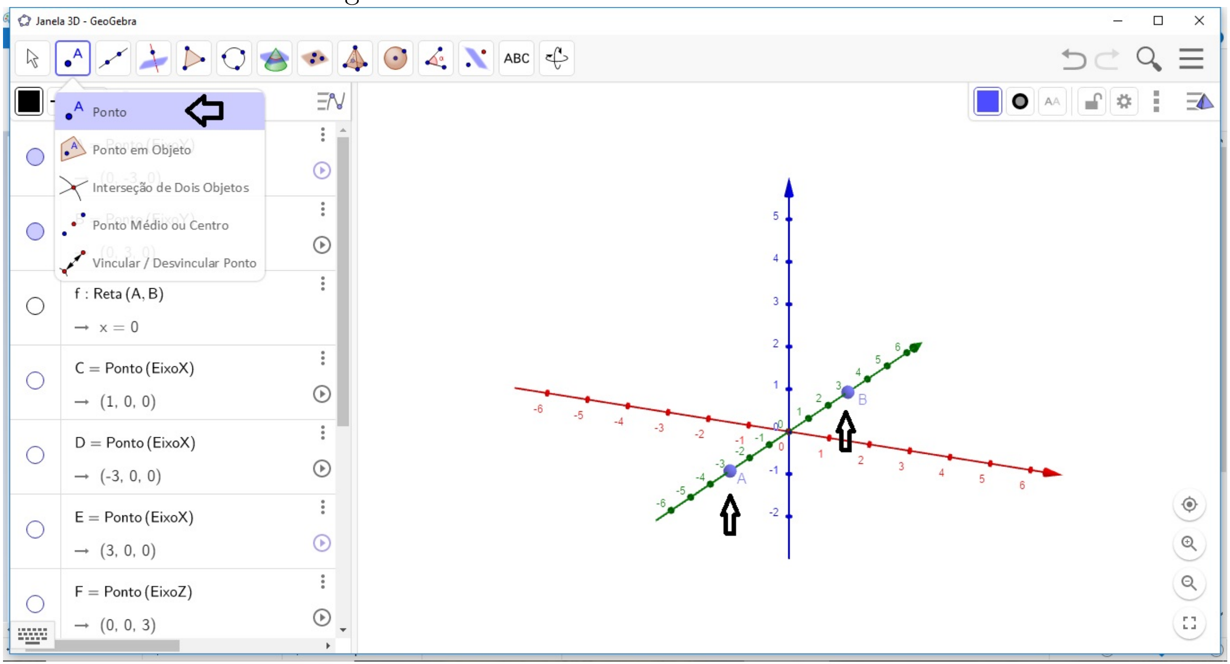
Fonte: Elaborado pelo autor

4.4 Plano Bissetor

Construiremos o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de dois planos, denominado **plano bissetor**. Descreveremos como construir os dois pontos pertencentes a reta que será a interseção dois dois planos, o círculo e um ponto sobre ele como objetos auxiliares para mover um dos planos dinamicamente, os planos, o ângulo entre eles e suas bissetrizes, e finalmente os planos bissetores que contém as bissetrizes.

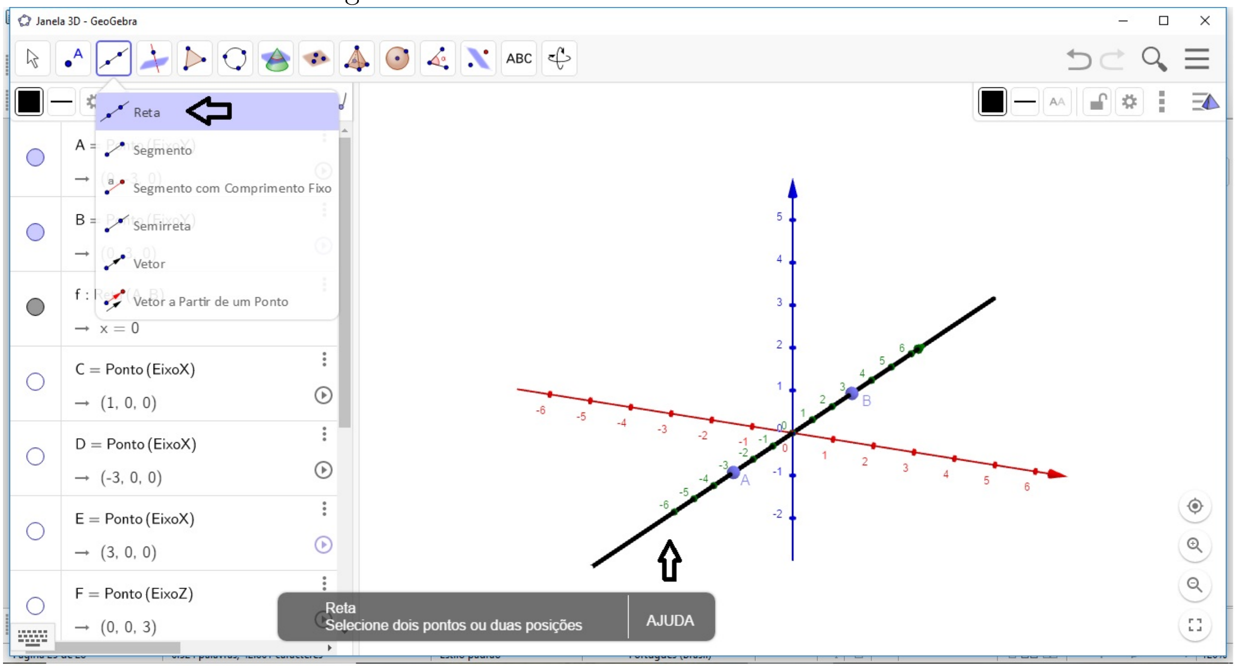
Passo 1: Selecionamos o botão **"Ponto"** e construímos os pontos A e B sobre o *eixo* $- x$. Em seguida selecionamos o botão **"Reta"** e construímos a reta f que passa pelos pontos A e B.

Figura 4.35: Plano Bissetor - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor

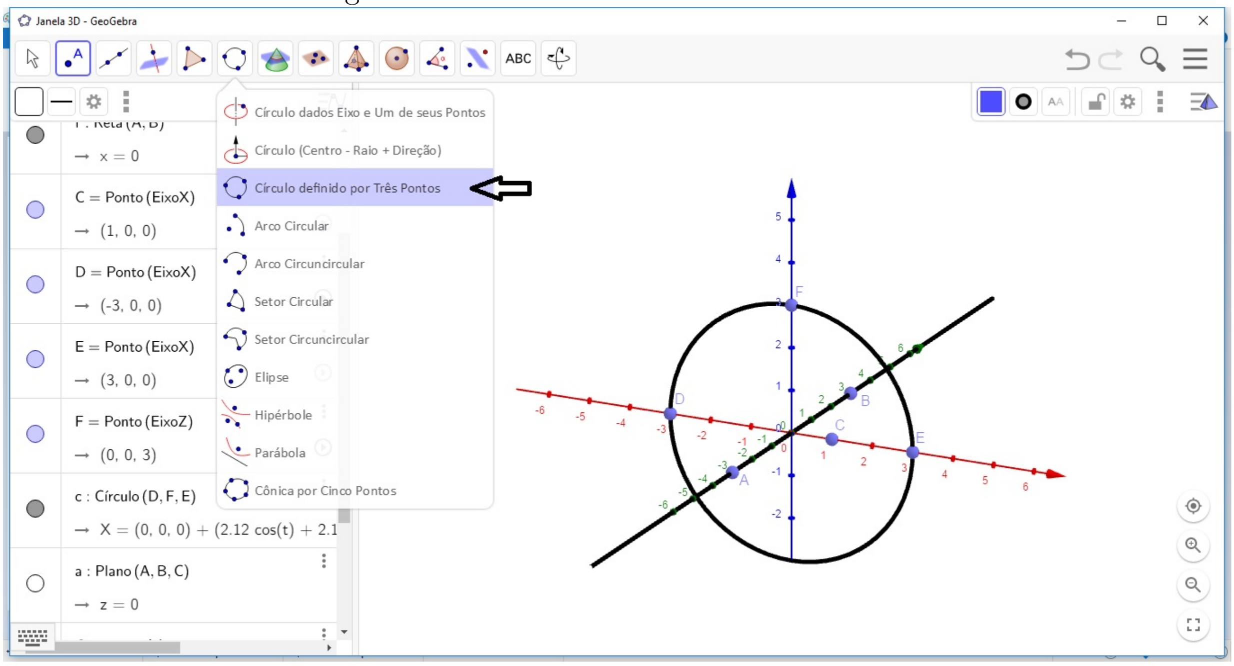
Figura 4.36: Plano Bissetor - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2: Selecionamos o botão **"Ponto"** e construímos os pontos $C = (1, 0, 0), D = (-3, 0, 0), E = (3, 0, 0)$ e $F = (0, 0, 3)$. Selecionamos o botão **"Círculo definido por três pontos"** e clicamos nos pontos D, F e E, respectivamente construindo o círculo c.

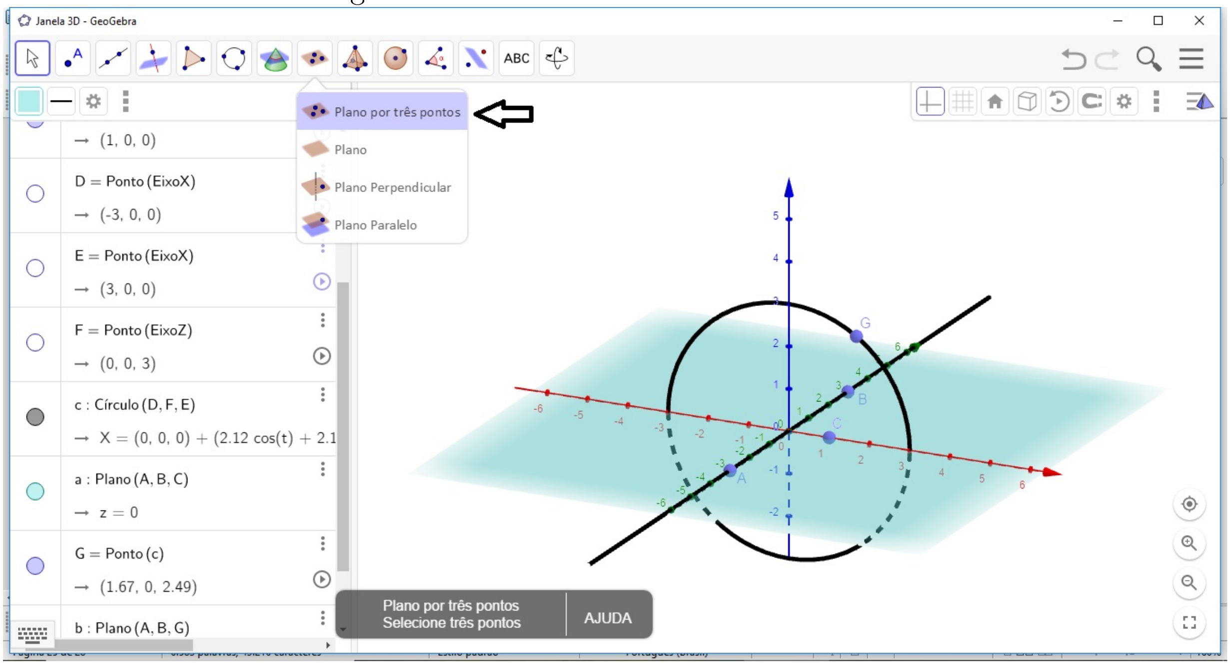
Figura 4.37: Plano Bissetor - Passo 2



Fonte: Elaborado pelo autor

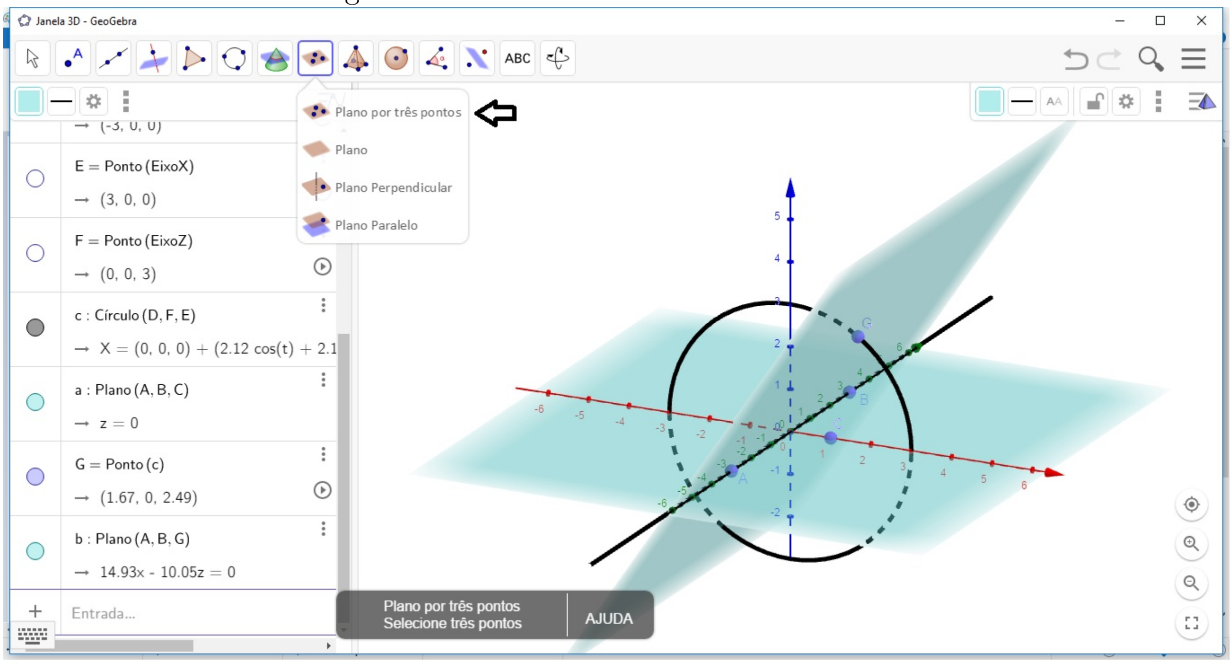
Passo 3: Ocultamos os pontos D, E e F. Selecionamos o botão **"Ponto"** e clicamos sobre o círculo c construindo o ponto G. Selecionamos o botão **"Plano por três pontos"**, clicamos nos pontos A, B e C construindo o plano a e clicando nos pontos A, B e G construindo o plano b.

Figura 4.38: Plano Bissetor- Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor

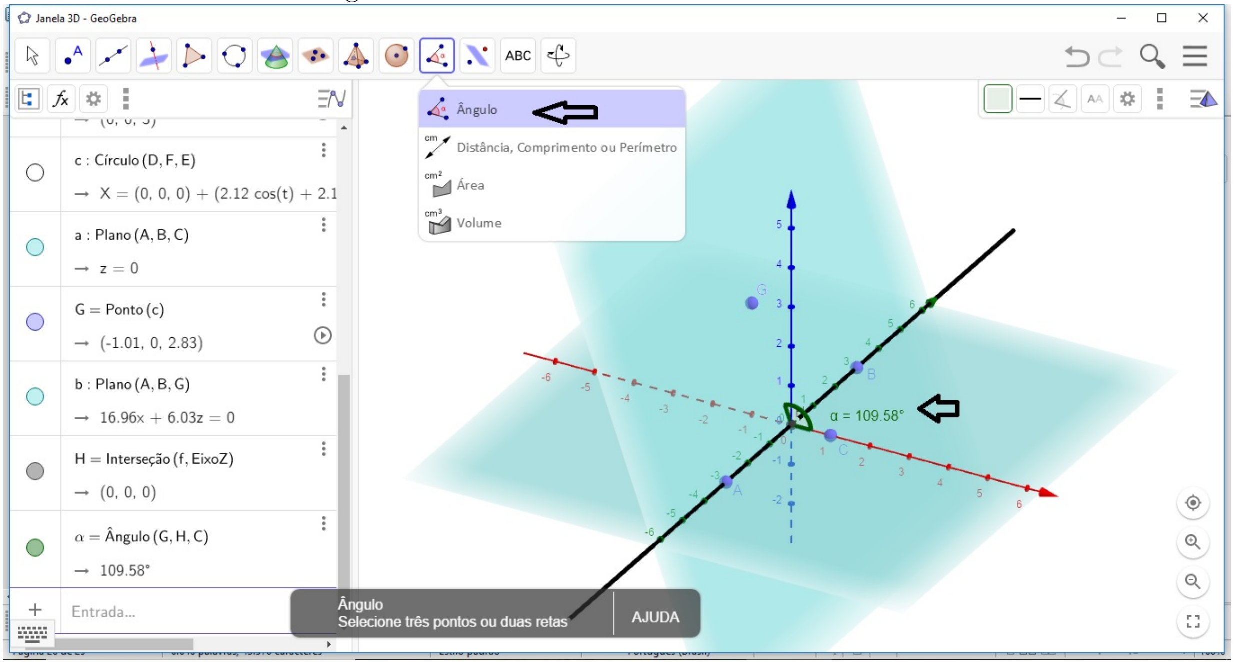
Figura 4.39: Plano Bissetor - Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 4: Ocultamos o círculo c. Selecionamos o botão **"Ponto"** e clicamos na interseção dos eixos coordenados construindo o ponto $H = (0, 0, 0)$. Selecionamos o botão **"Ângulo"** e clicamos nos pontos G, H e C construindo o ângulo α.

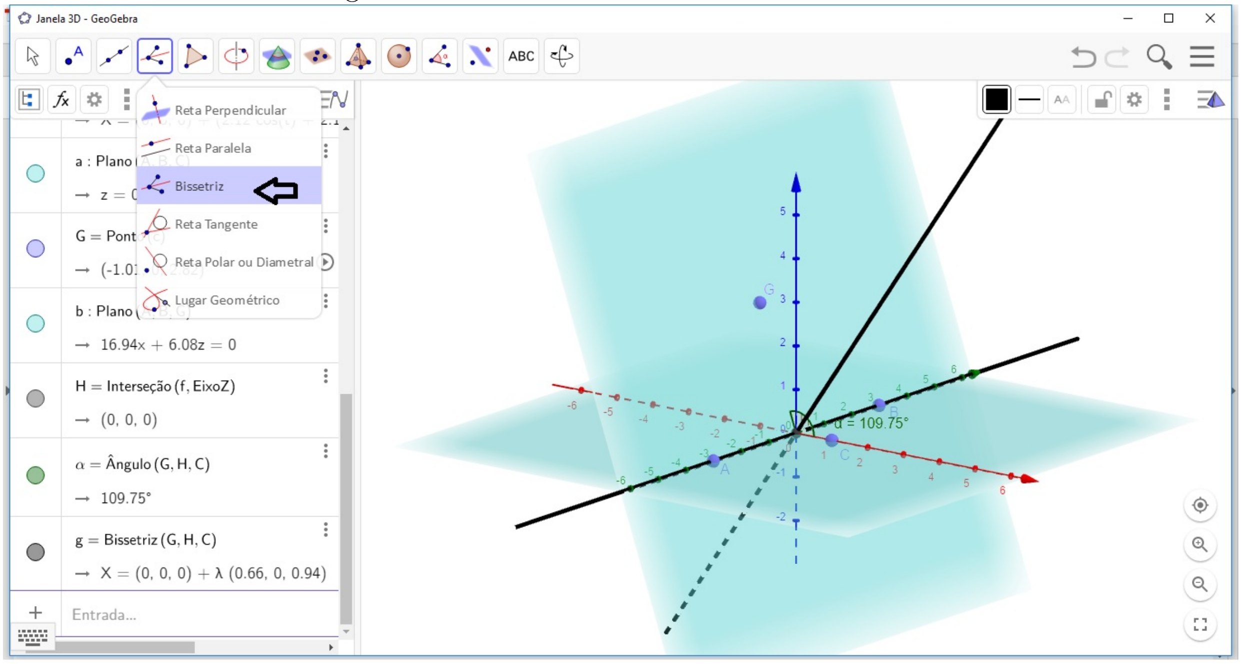
Figura 4.40: Plano Bissetor - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor

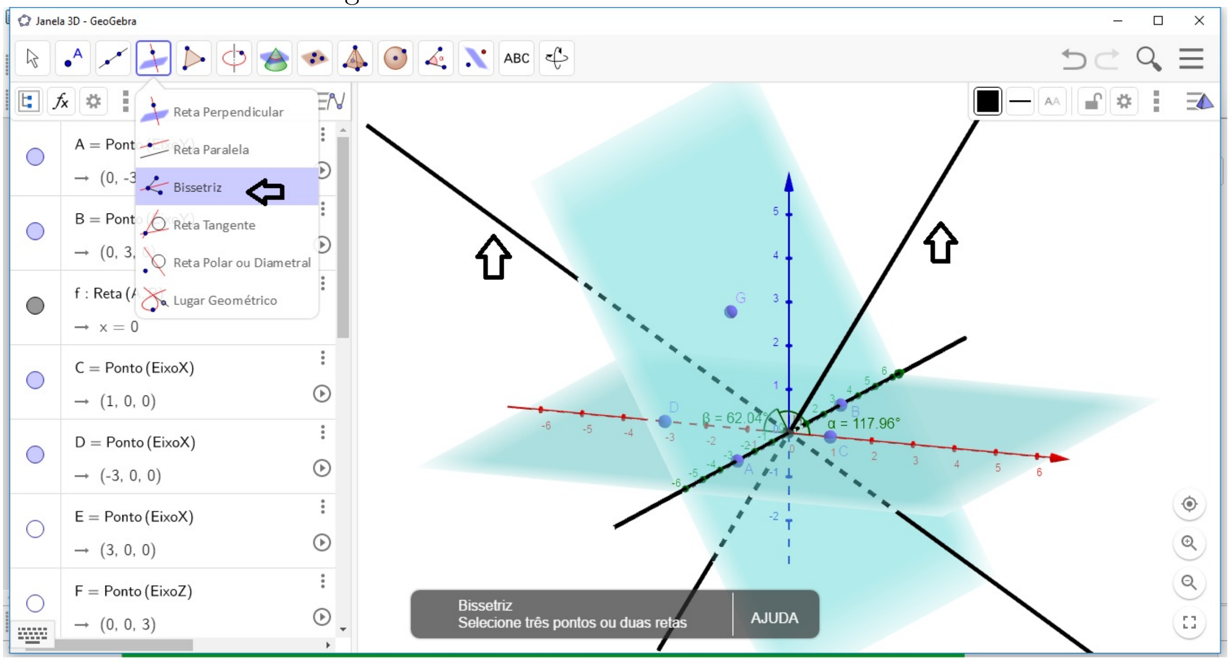
Passo 5: Selecionamos o botão **"Bissetriz"**, clicamos nos pontos G, H e C construindo a bissetriz do ângulo α. Selecionamos o botão **"Ângulo"**, clicamos nos pontos G, H e D construindo o ângulo β. Selecionamos o botão **"Bissetriz"**, clicamos nos pontos G, H e D construindo a bissetriz do ângulo β.

Figura 4.41: Plano Bissetor - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor

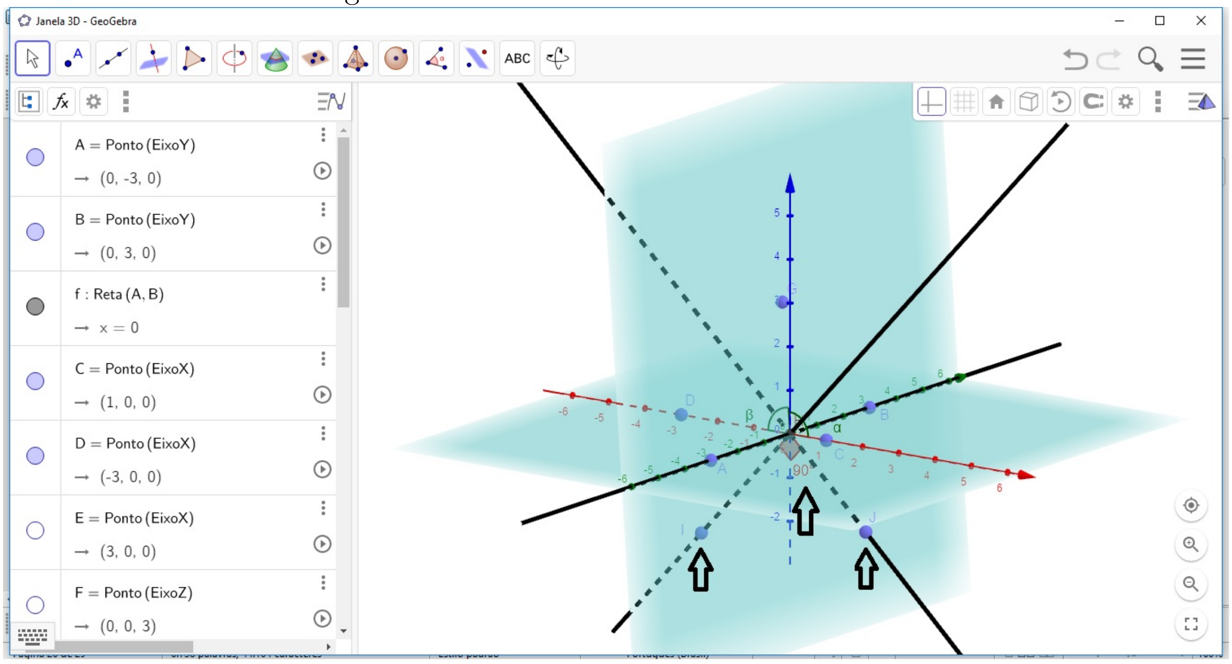
Figura 4.42: Plano Bissetor - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 6: Selecionamos o botão **"Ponto"** e clicamos nas bissetrizes g e h construindo os pontos I e J. Selecionamos o botão **"Ângulo"**, clicamos nos pontos I, H e J construindo o ângulo γ entre as bissetrizes.

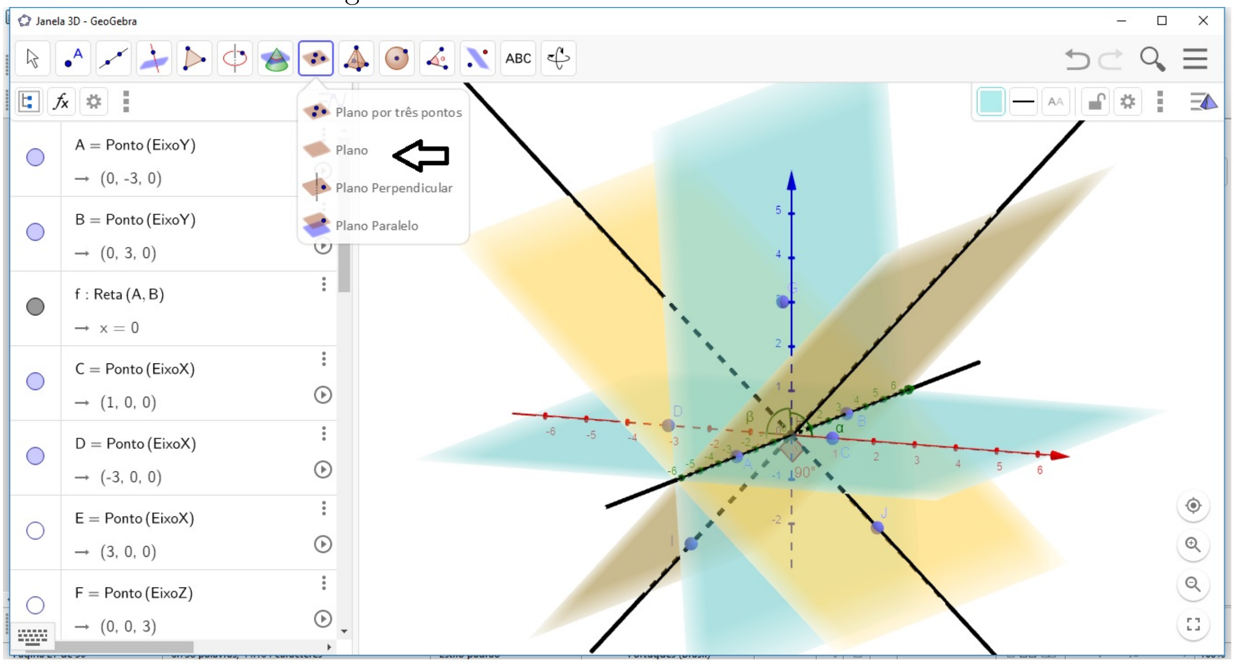
Figura 4.43: Plano Bissetor - Passo 6



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 7: Selecione o botão **"Plano"**, clicamos no ponto A e na bissetriz g construindo o plano d, bem como clicamos no ponto A e na bissetriz h construindo o plano e.

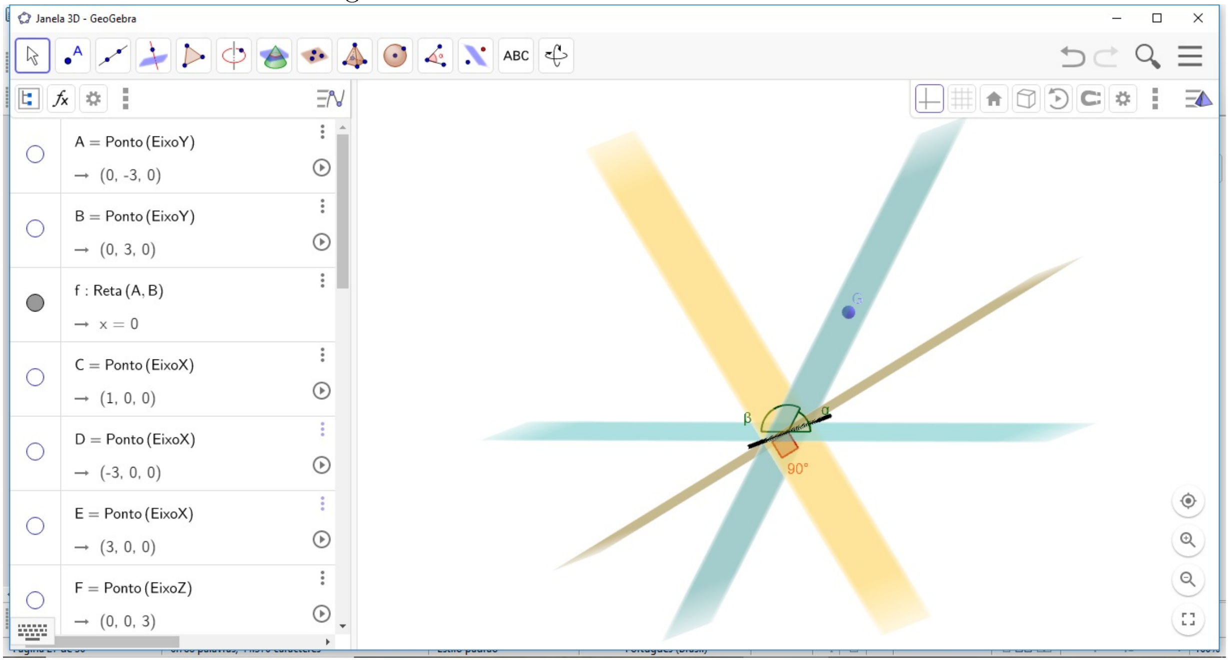
Figura 4.44: Plano Bissetor - Passo 7



Fonte: Elaborado pelo autor

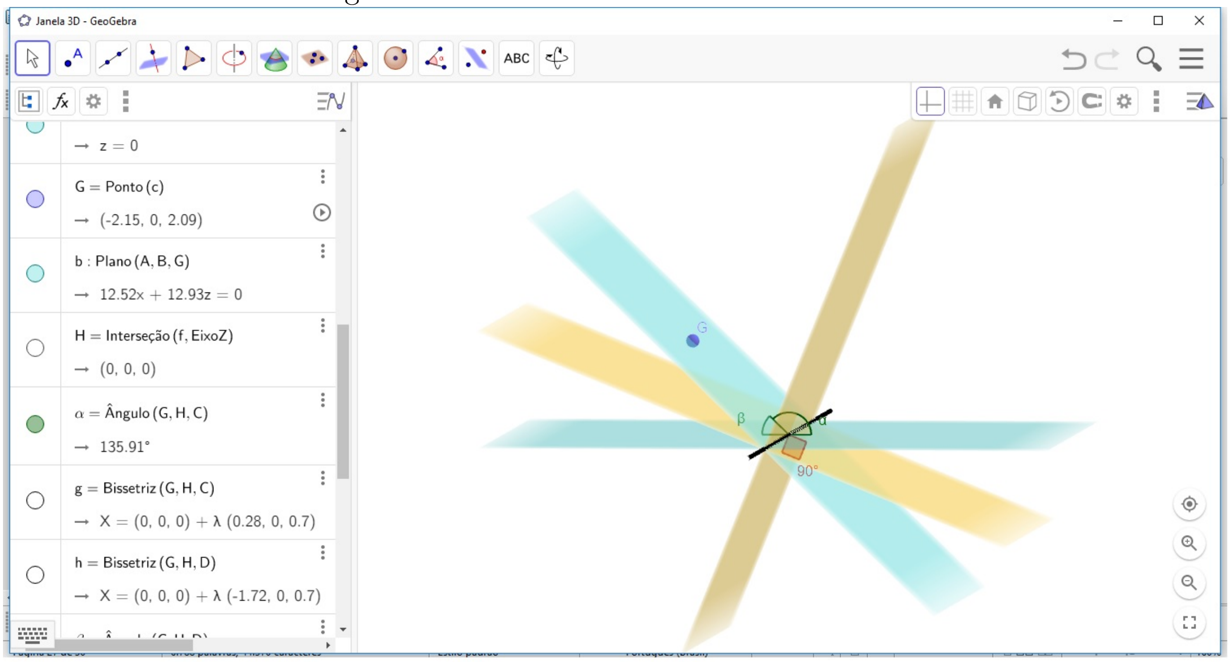
Passo 8: Ocultamos todos os pontos exceto o ponto G, assim como as bissetrizes e os eixos coordenados. Observamos que movendo o ponto G fazemos variar as medidas dos ângulos entre os planos α e β, porém o ângulo entre os planos bissetores permanecem com medida igual a 90°. Portanto de acordo com a proposição 3.5 os planos d e e são os planos bissetores de α e β.

Figura 4.45: Plano Bissetor - Passo 8



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4.46: Plano Bissetor - Passo 8



Fonte: Elaborado pelo autor

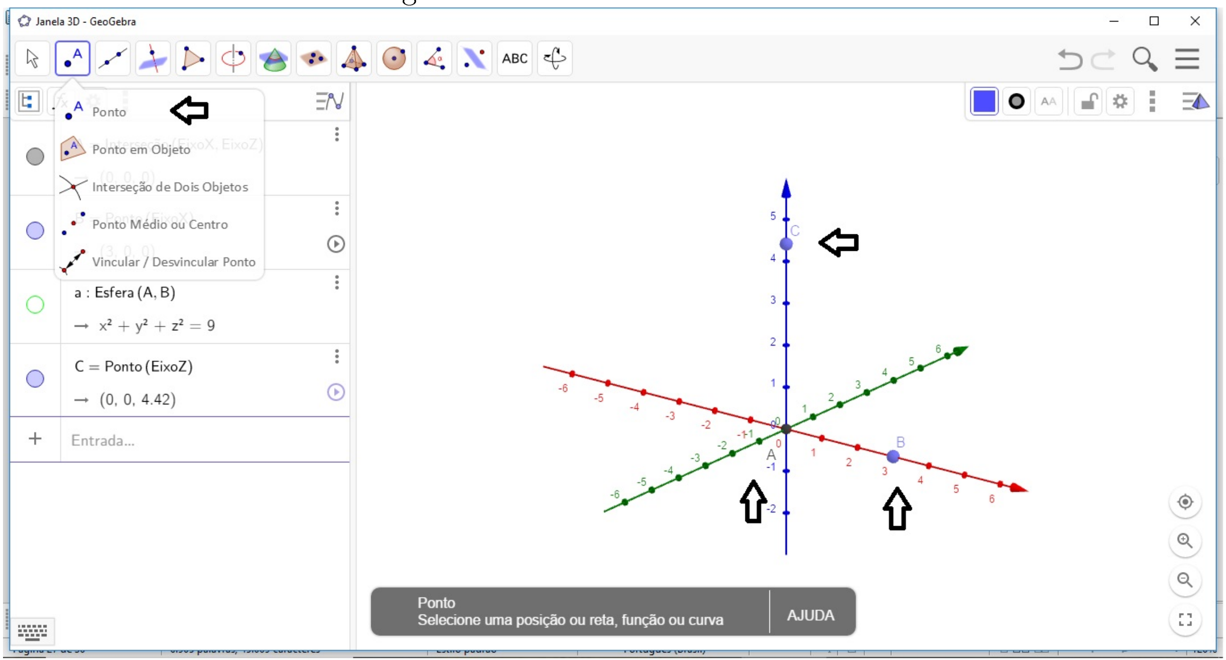
Observe que ao mover o ponto sobre o círculo (*que fica oculto*), a distância entre os planos α e β possuem a mesma medida. Portanto o plano d e e é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos no espaço conforme comprovamos na proposição 3.5. Depois de finalizada a construção dos planos bissetores, o estudante ou o professor pode mover o ponto sobre o círculo em qualquer direção e explorar a propriedade descrita à respeito do **plano bissetor**. Outros conteúdos na qual essa construção permite visualizar são os que dizem respeito à triângulo retângulo, bissetriz de um ângulo, semelhança de triângulos, altura do triângulo, as propriedades dos triângulos isósceles etc.

4.5 Esfera

Construiremos uma esfera e um plano com o objetivo de explorar os tipos de interseções entre eles estudando a distância entre o centro da esfera e o plano. Será descrito como construir a esfera, um ponto que percorre uma reta na qual passará um plano perpendicular à reta contendo o ponto C, um segmento ligando o centro da esfera e o ponto C para representar a distância entre eles. Em seguida, utilizaremos o botão "Interseção de duas superfícies"para visualizar a figura plana derivada de tal interseção. Tais interseções podem ser o vazio, um ponto ou um círculo. Seguimos então aos passos da construção:

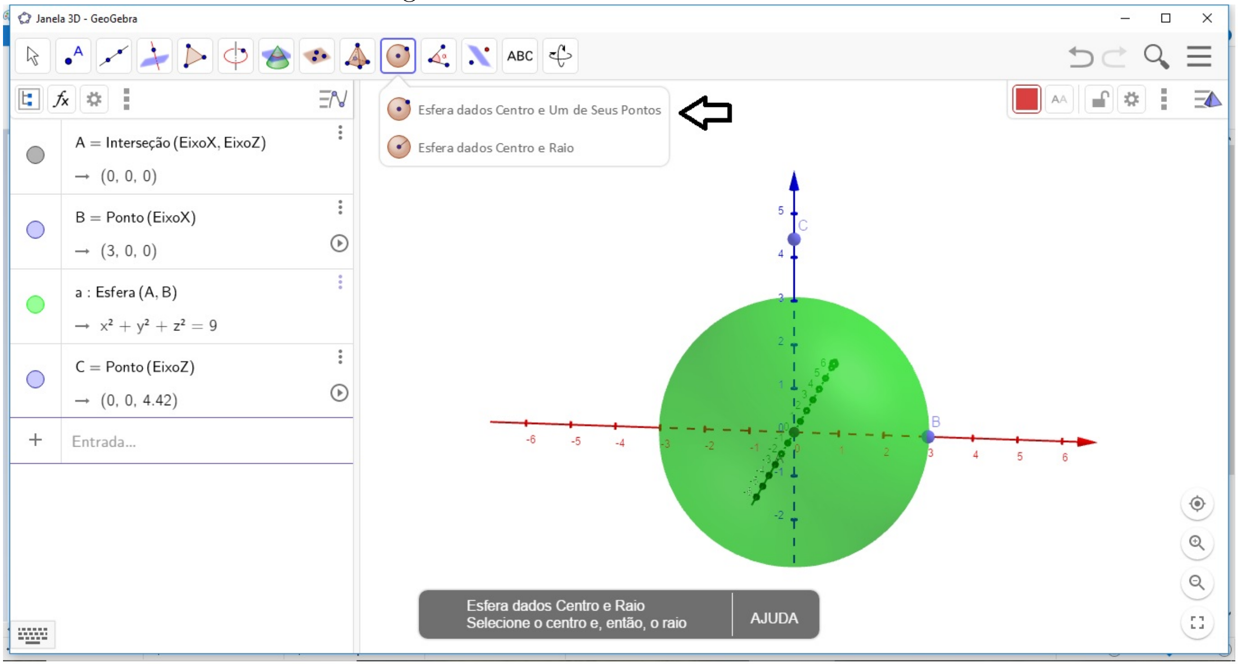
Passo 1: Selecione o botão **"Ponto"**, clique na interseção dos eixos coordenados construindo o ponto A. Em seguida clique no $eixo - y$ construindo o ponto $B = (0,3,0)$, e clique no $eixo - z$ construindo o ponto C. Selecione o botão **"Esfera dados centro e um de seus pontos"**, em seguida clique no ponto A e então no ponto B.

Figura 4.47: Esfera - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor

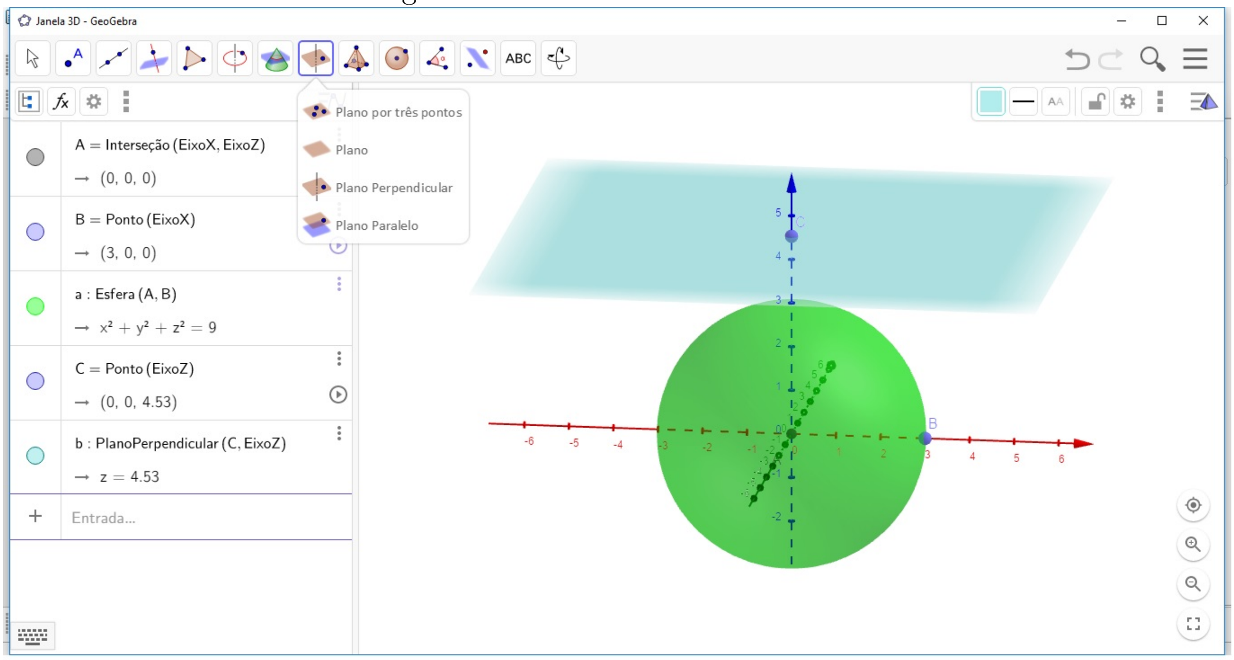
Figura 4.48: Esfera - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2: Selecione o botão **"Plano perpendicular"**, em seguida clique no ponto C e então no $eixo - z$, construindo assim o plano b.

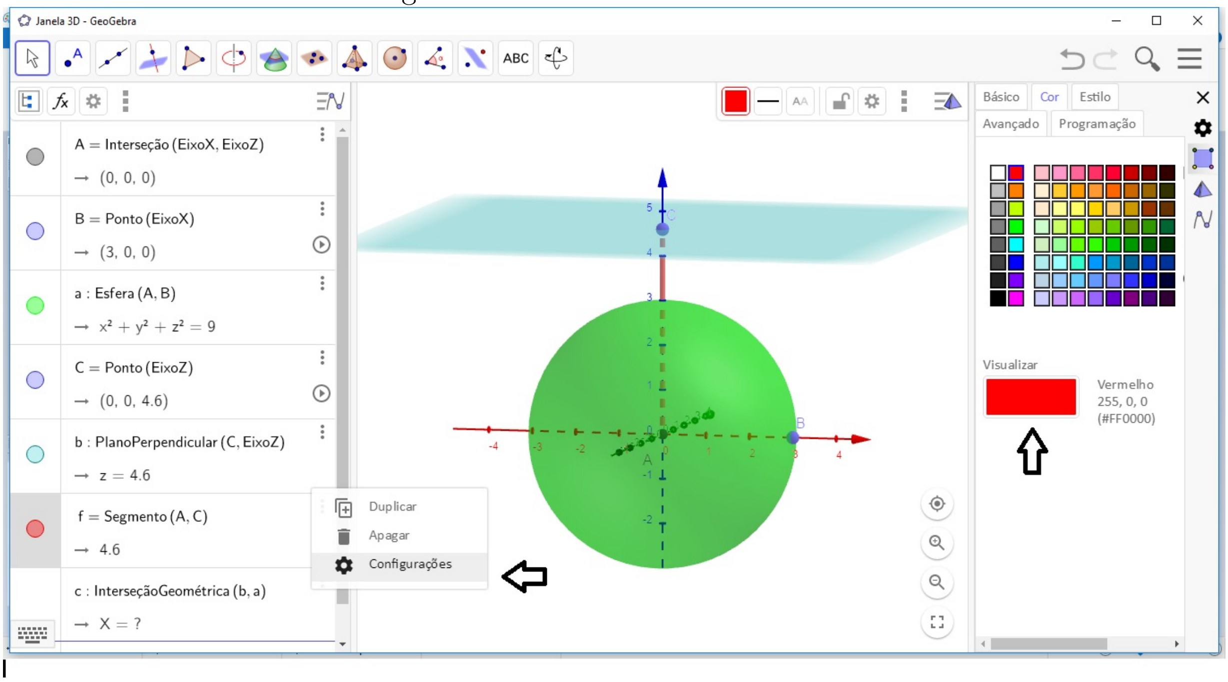
Figura 4.49: Esfera - Passo 2



Fonte: Elaborado pelo autor

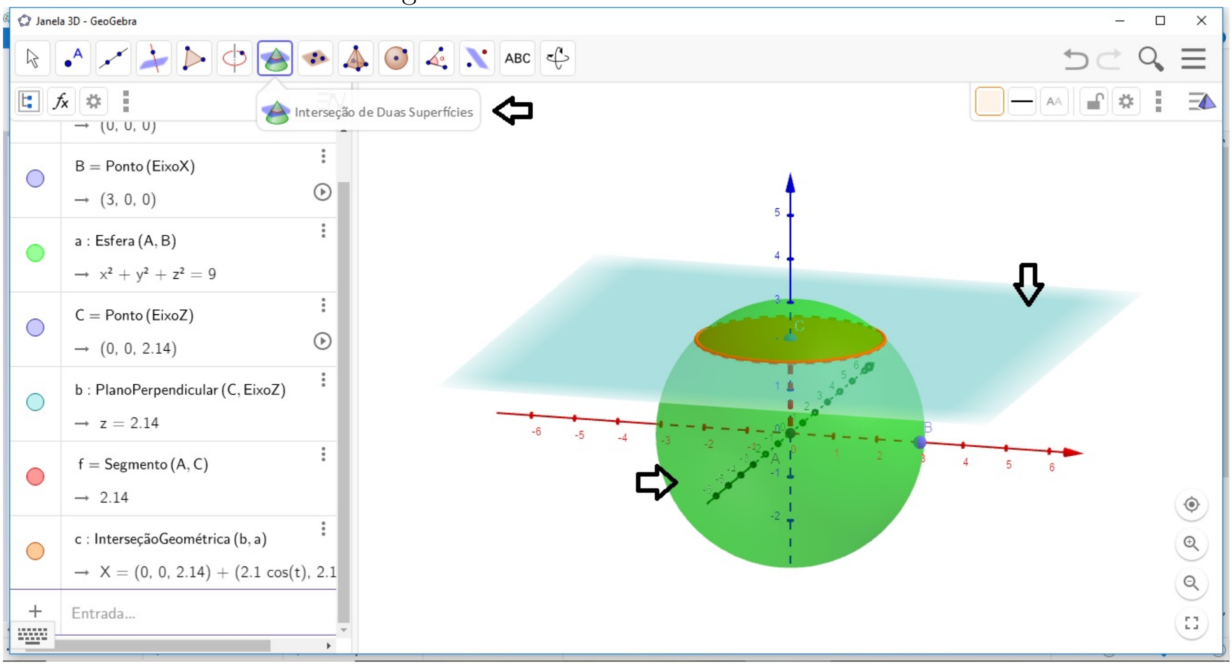
Passo 3: Selecione o botão **"Segmento"**, clique no ponto A e então no ponto C. Selecione o botão de **"Propriedades"** e altere a cor e espessura do segmento. Selecione o botão **"Interseção de duas superfícies"**, em seguida clique no plano b e então na esfera a.

Figura 4.50: Esfera - Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor

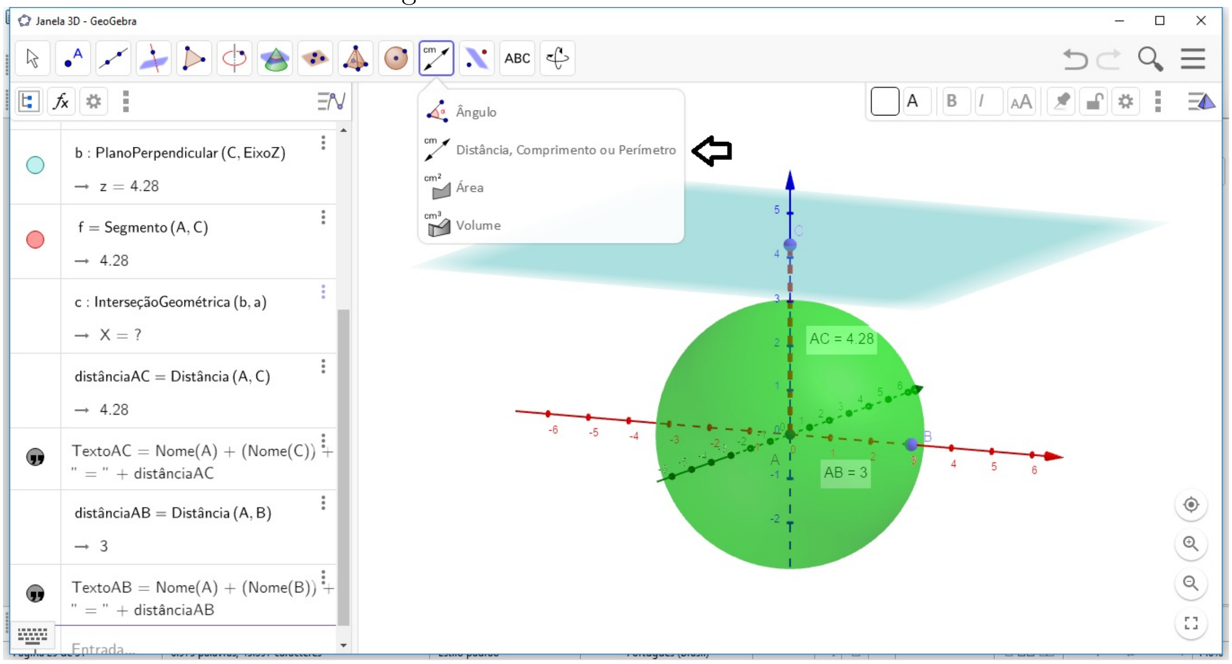
Figura 4.51: Esfera - Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 4: Selecione o botão **"Distância, comprimento ou perímetro"**, em seguida clique no ponto A e então no ponto C. Com o mesmo botão clique no ponto A e no ponto B.

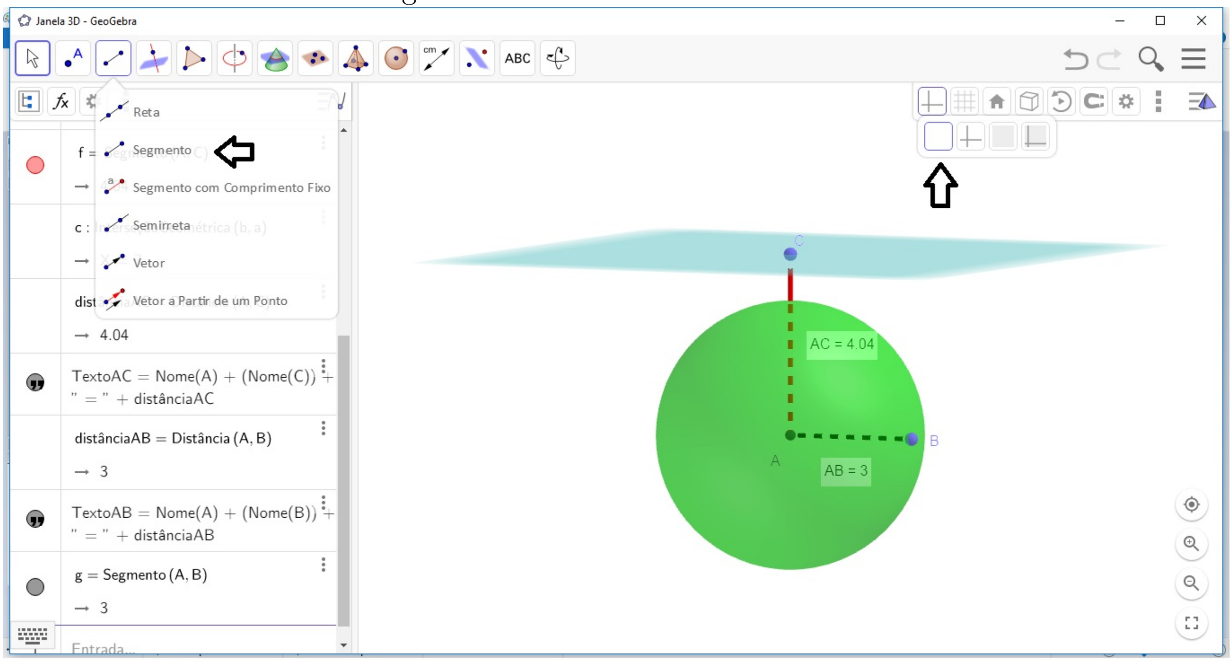
Figura 4.52: Esfera - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 5: Selecione o botão **"Segmento"**, em seguida clique no ponto A e então no ponto B. Oculte os eixos coordenados.

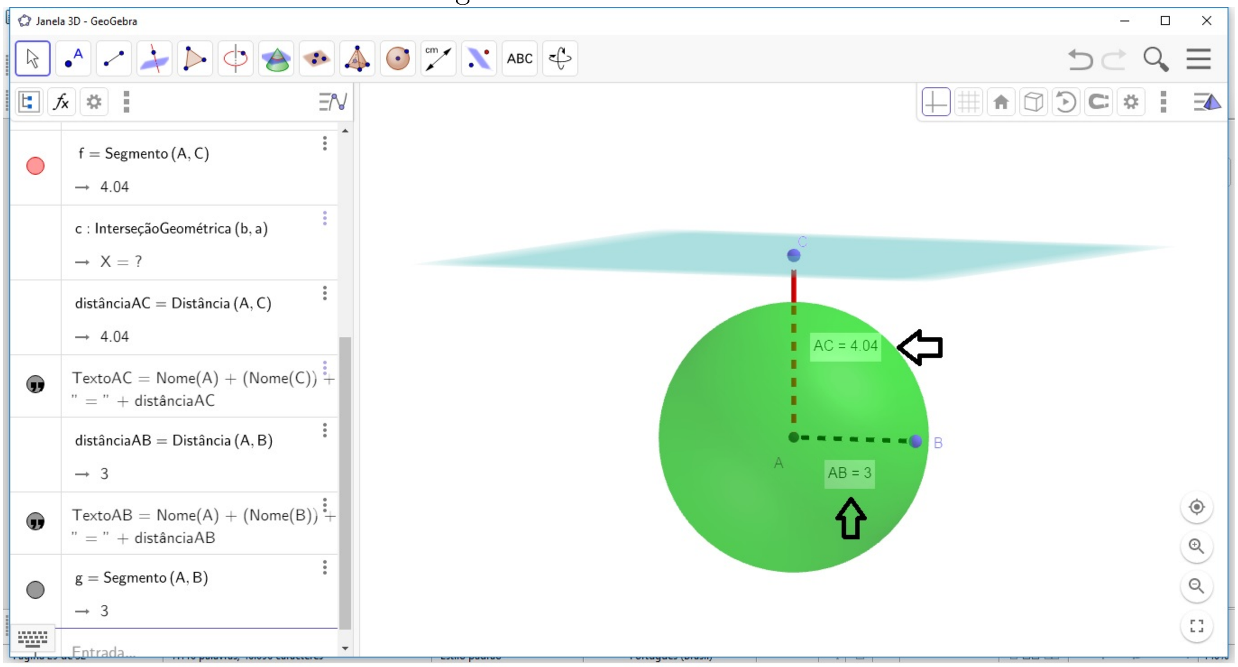
Figura 4.53: Esfera - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor

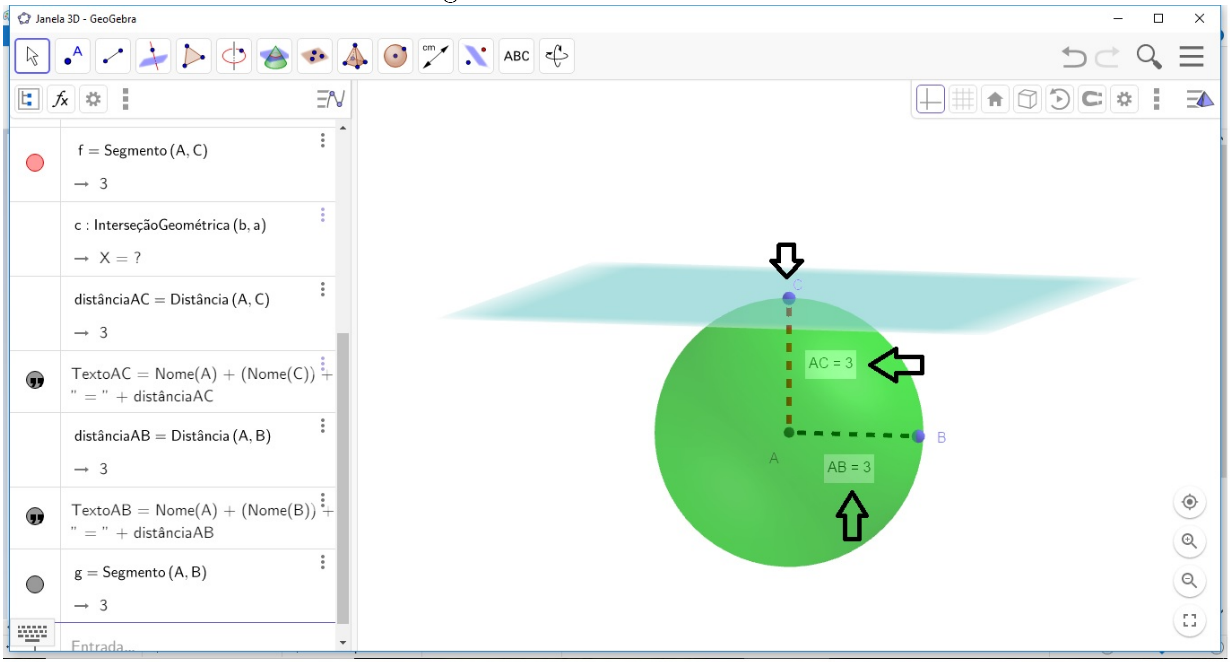
Observe que quando movemos dinamicamente o ponto C, a distância do ponto A (*centro da esfera*) e o plano b é maior do que a medida do raio da esfera, não há interseção. Da mesma forma, quando a distância do centro da esfera até o plano b é igual à medida do raio, a interseção corresponde um ponto. E por fim, quando a distância do centro da esfera até o plano é menor do que a medida do raio da esfera, a interseção é um círculo, conforme demonstra proposição 3.7. Conteúdos como a distância entre pontos, reta perpendicular, circunferência, perímetro e área, podem ser explorados utilizando a mesma figura.

Figura 4.54: Esfera 6



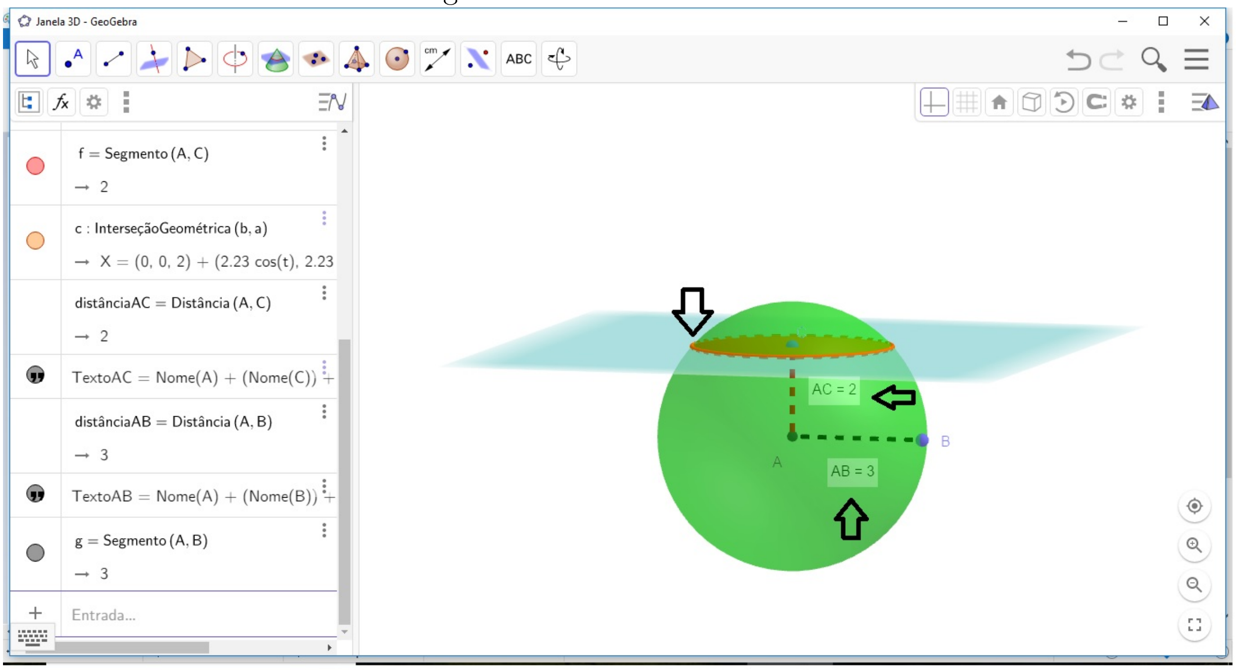
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4.55: Esfera 6.1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4.56: Esfera 6.2



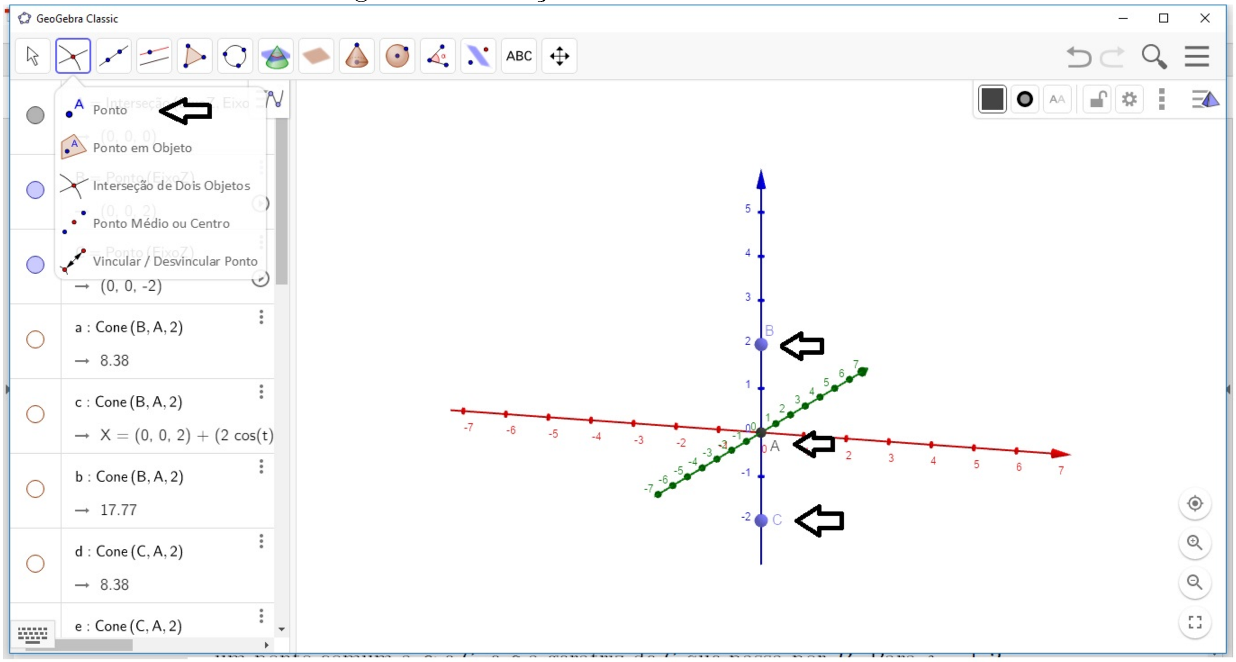
Fonte: Elaborado pelo autor

4.6 Seção Cônica

Construiremos o lugar geométrico obtido pela interseção de um cone com um plano com o objetivo de explorar diferentes situações à medida que um plano intersecta o cone. Para isso, precisaremos de figuras auxiliares que permitam mover dinamicamente o plano com diferentes aberturas de ângulo e visualizar as curvas derivadas de tal interseção, tais como um círculo no qual percorrerá um ponto pertencente ao plano, retas paralelas que servirão de suporte para a construção do plano, ângulos e a interseção de superfícies.

Passo 1: Selecione o botão **"Ponto"** e construa os pontos $A = (0, 0, 0), B = (0, 0, 2)$ e $C = (0, 0, -2)$.

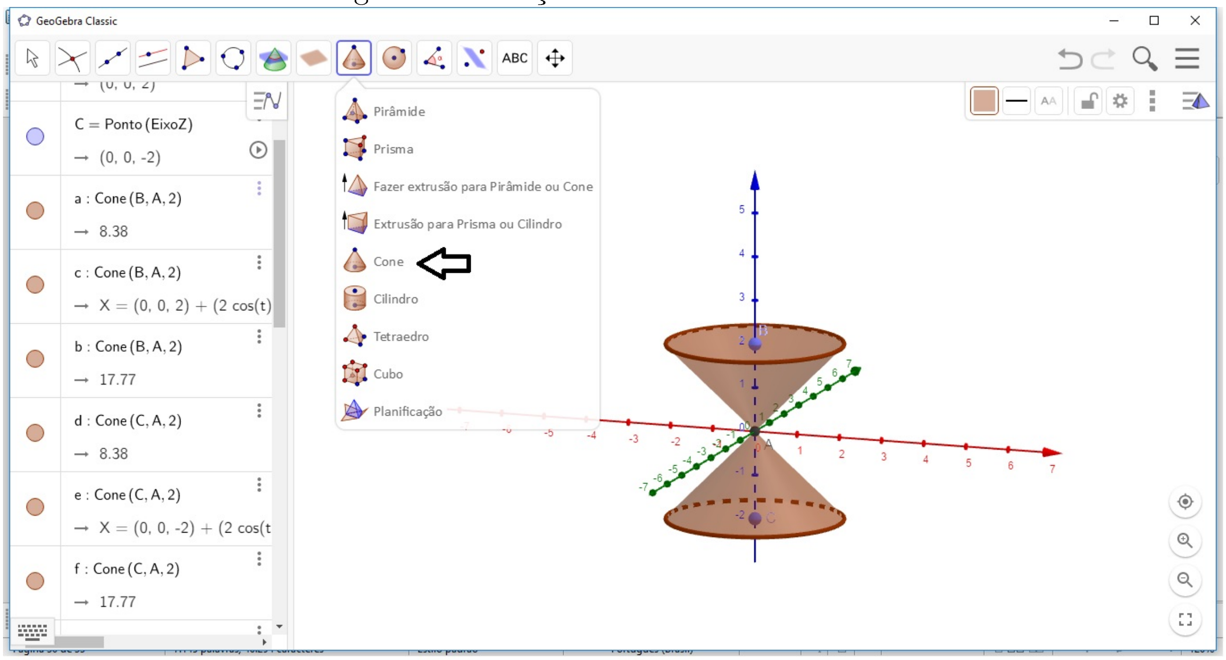
Figura 4.57: Seção Cônica - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2: Selecione o botão **"Cone"**, em seguida clique no ponto B, seguido do ponto A e então digite o valor do raio igual a 2. Utilizando o mesmo botão **"Cone"**, clique no ponto C, seguido do ponto A e então digite o valor do raio igual a 2.

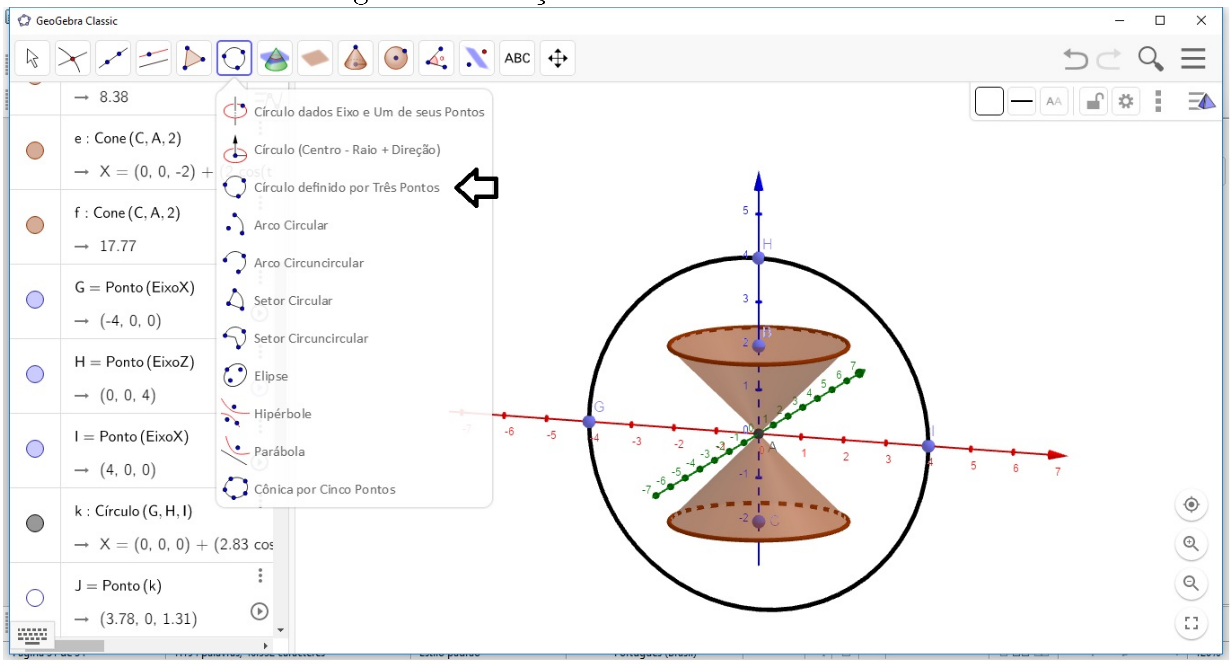
Figura 4.58: Seção Cônica - Passo 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3: Selecione o botão **"Ponto"** e construa os pontos $G = (-4, 0, 0), H = (0, 0, 4)$ e $I = (4, 0, 0)$. Selecione em seguida o botão **"Círculo definido por três pontos"**, clique nos pontos G, H e I, respectivamente, criando o círculo k.

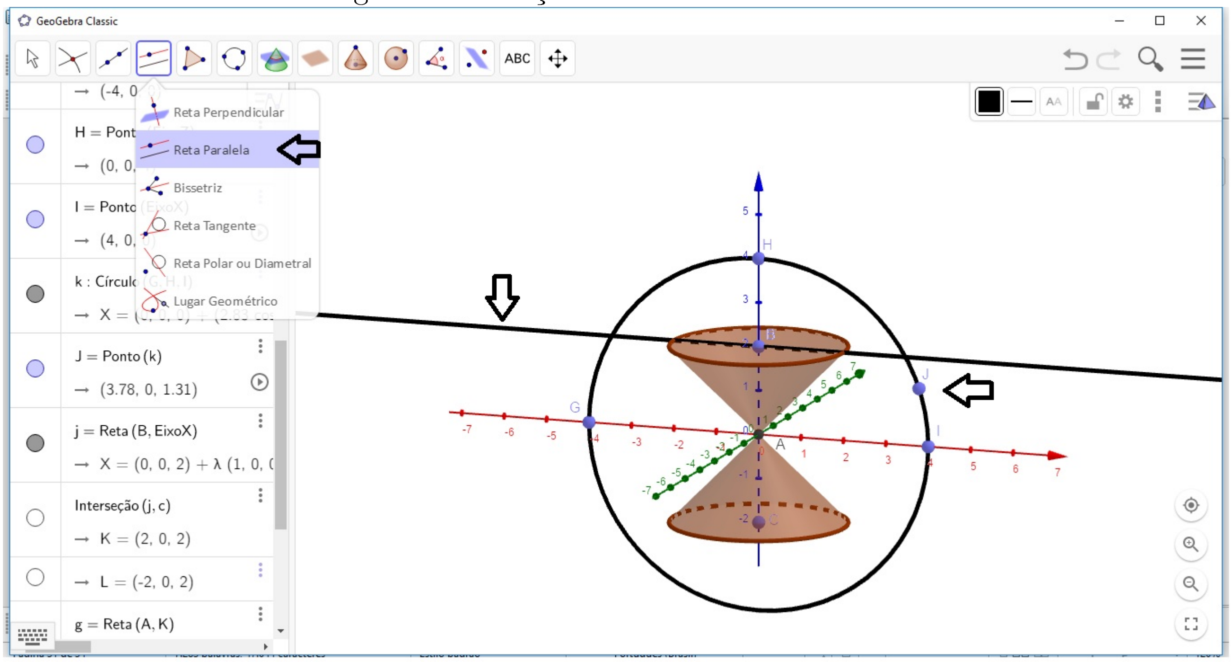
Figura 4.59: Seção Cônica - Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor

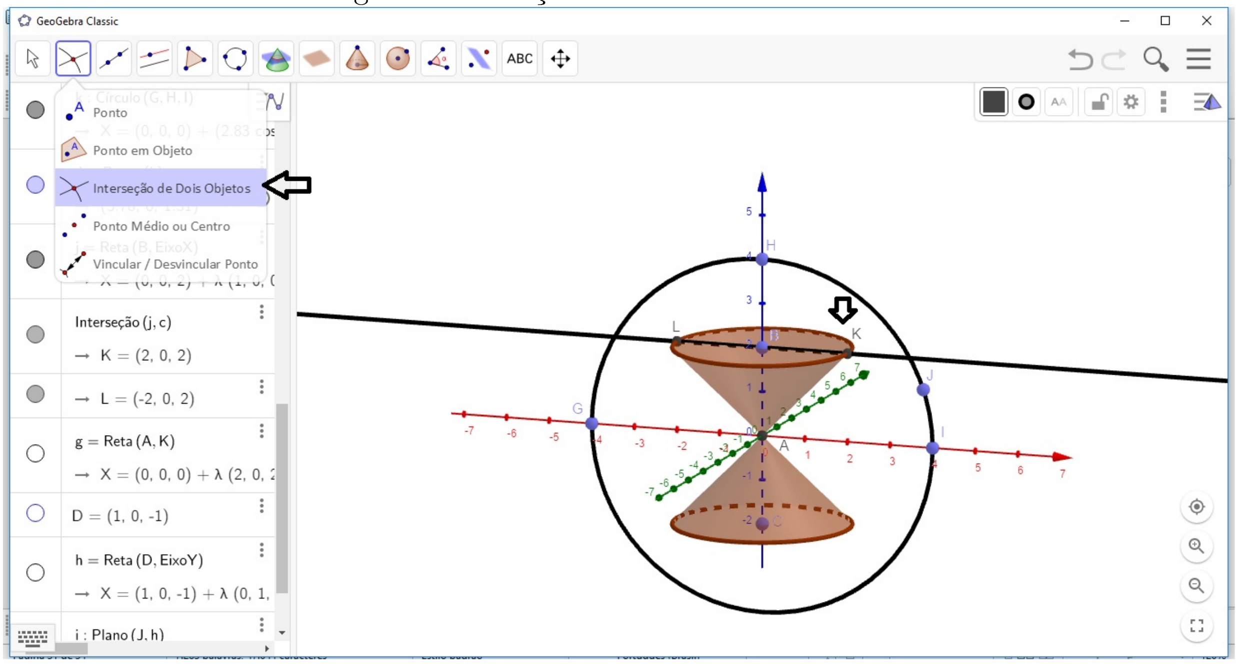
Passo 4: Selecione o botão **"Ponto"** e clique sobre o círculo k, construindo o ponto J. Selecione o botão **"Reta paralela"**, clique no ponto B e então no $eixo-x$ ($em\ vermelho$), criando a reta j. Selecione o botão **"Interseção de dois objetos"**, clique no cruzamento entre cone e a reta j, criando o ponto K e o ponto L.

Figura 4.60: Seção Cônica - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor

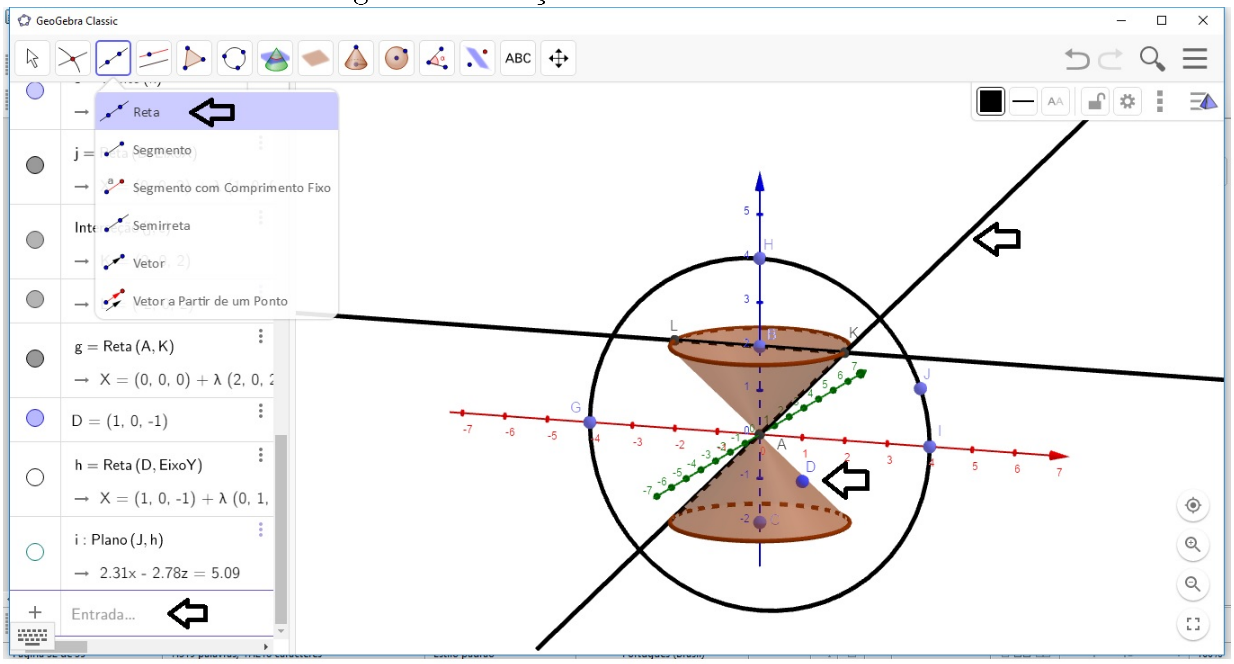
Figura 4.61: Seção Cônica - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor

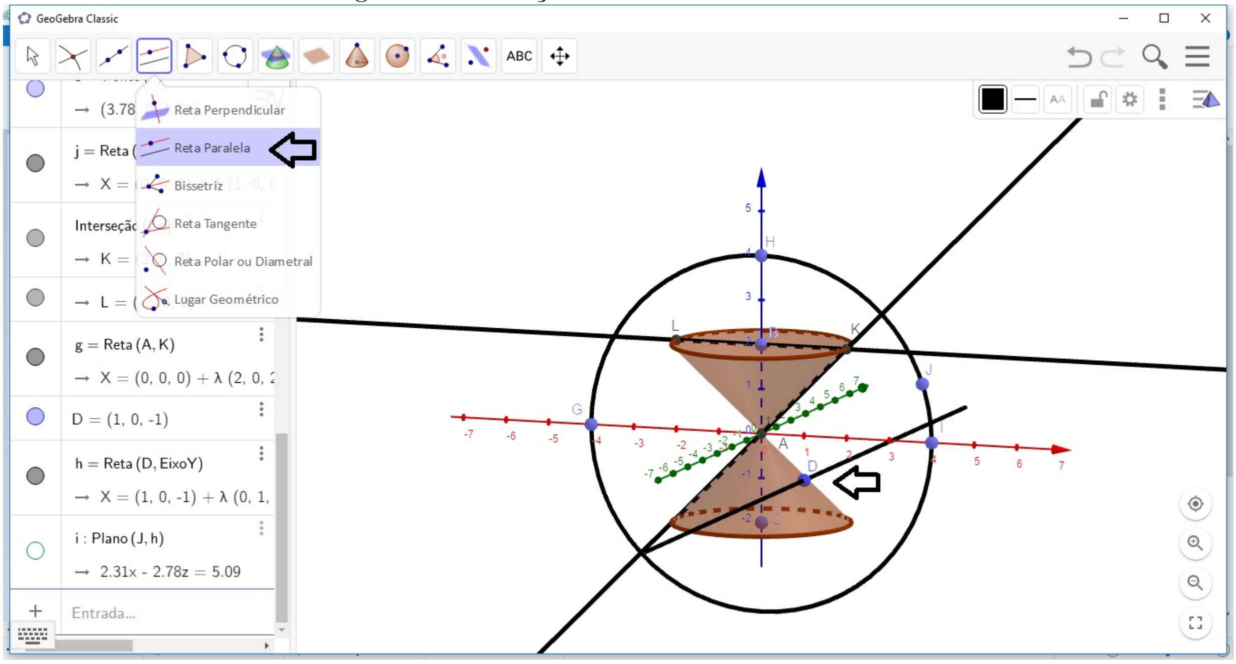
Passo 5: Selecione o botão **"Reta"**, clique no ponto A e então no ponto K, criando a reta g geratriz do cone. Na **"Caixa de entrada"** digite $(1, 0, -1)$ criando o ponto D. Selecione o botão **"Reta paralela"**, clique no ponto D e então no $eixo - y$ $(em\ verde)$, criando a reta paralela g.

Figura 4.62: Seção Cônica - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor

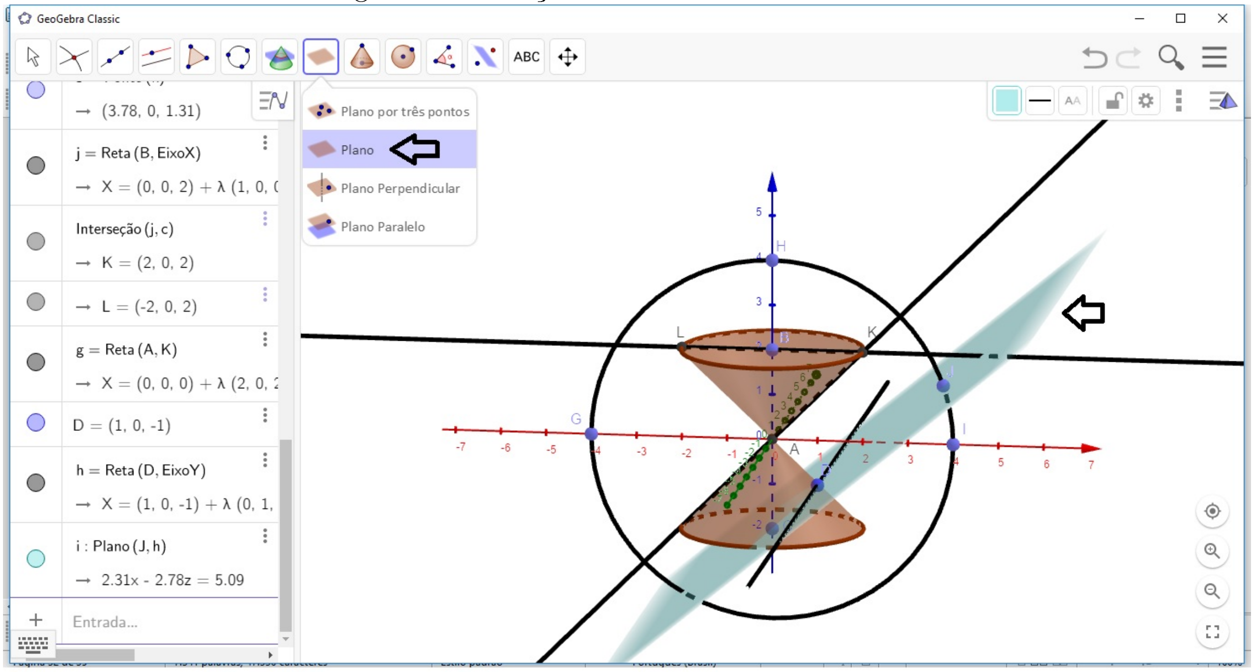
Figura 4.63: Seção Cônica - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 6: Selecione o botão **"Plano"**, clique no ponto J e então na reta h, criando o plano i.

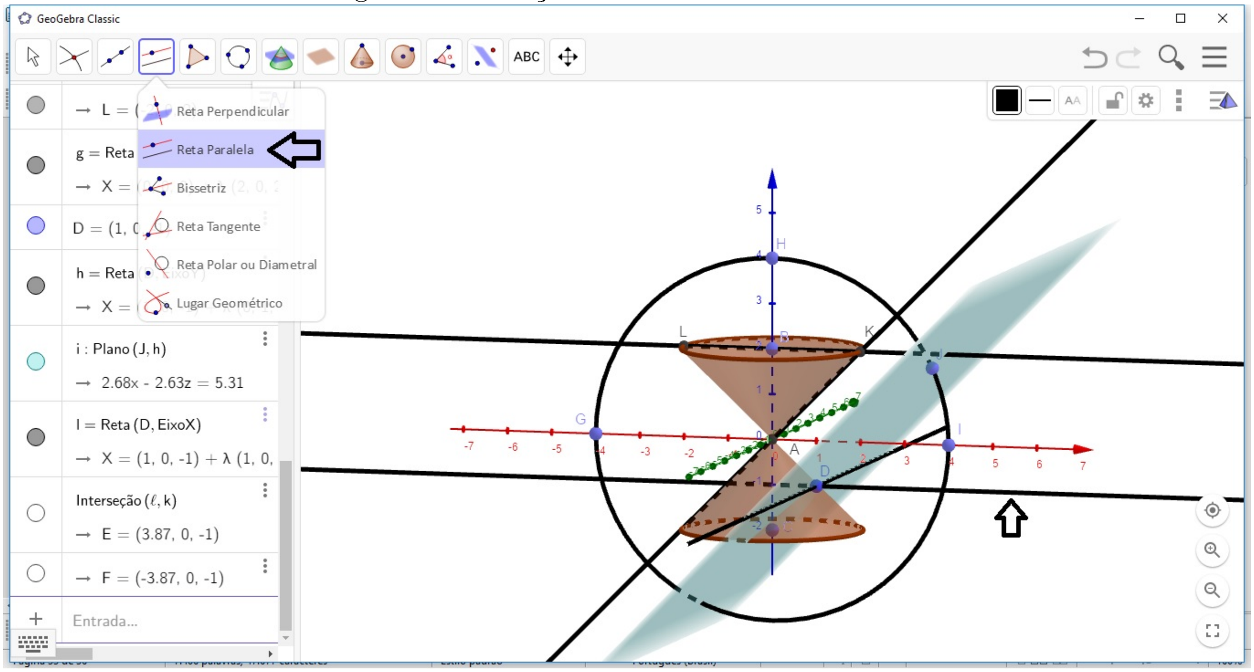
Figura 4.64: Seção Cônica - Passo 6



Fonte: Elaborado pelo autor

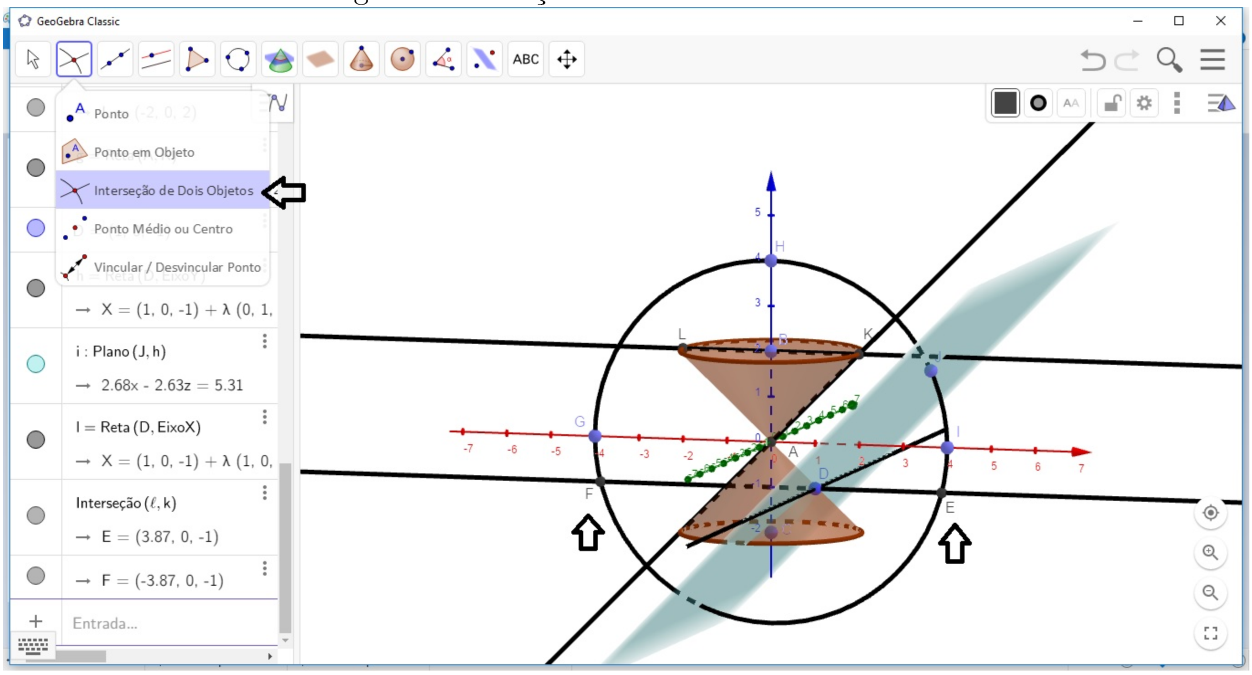
Passo 7: Selecione o botão **"Reta paralela"**, clique no ponto D, e então no *eixo* $-$ x (*em vermelho*), criando a reta l paralela ao *eixo* $-$ x. Selecione o botão **"Interseção de dois objetos"**, clique na reta l e então no círculo k, criando os pontos de interseção E e F.

Figura 4.65: Seção Cônica - Passo 7



Fonte: Elaborado pelo autor

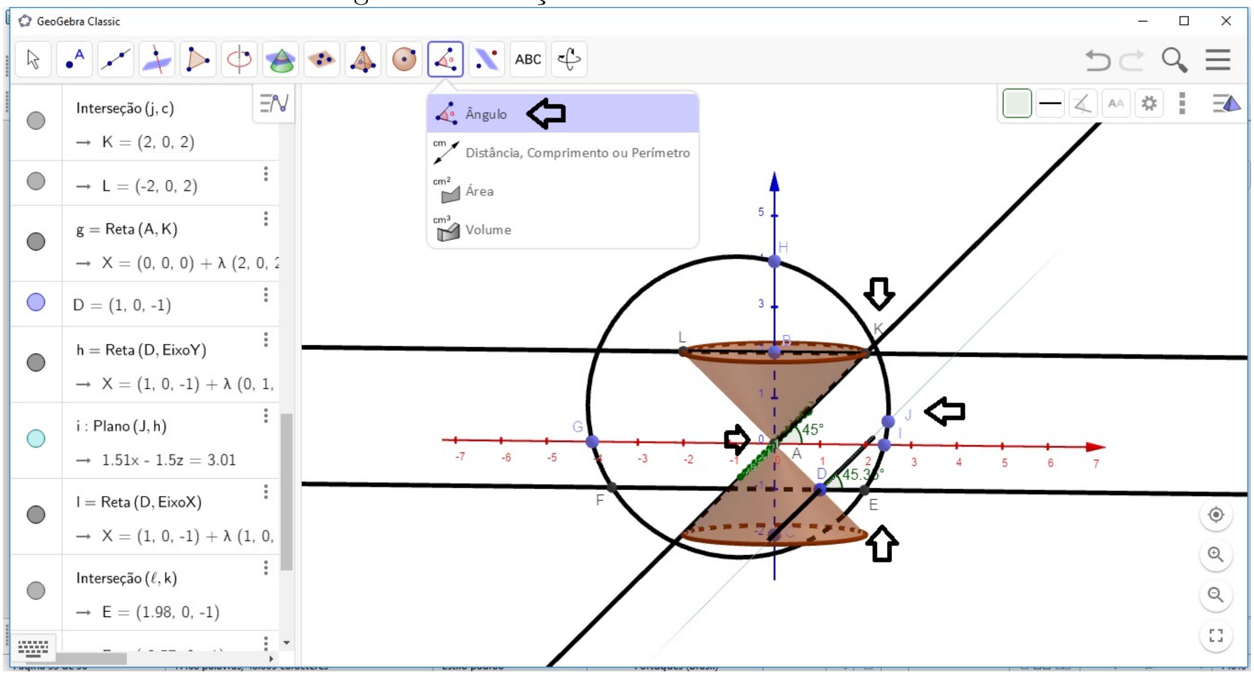
Figura 4.66: Seção Cônica - Passo 7



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 8: Selecione o botão **"Ângulo"**, clique nos pontos K, A e I, respectivamente, criando o ângulo α (*ângulo entre a geratriz do cone e o plano horizontal*). Utilizando o mesmo botão, clique nos pontos J, D e E, respectivamente, criando o ângulo β (*ângulo entre o plano i e um plano horizontal que contém a reta h e o ponto E*).

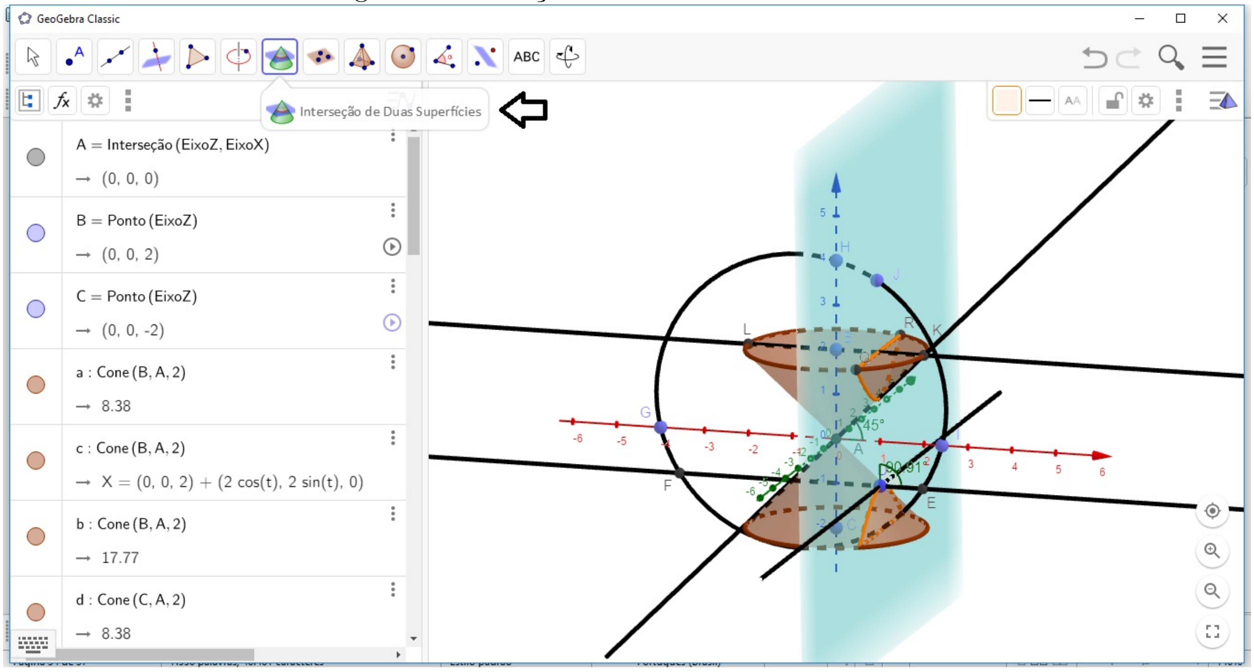
Figura 4.67: Seção Cônica - Passo 8



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 9: Selecione o botão **"Interseção de duas superfícies"**, e então clique na folha do superior do cone e depois no plano. Em seguida usando o mesmo botão, clique na folha inferior do cone e então no plano. Fica criado assim as seções cônicas Elipse, Parábola e Hipérbole.

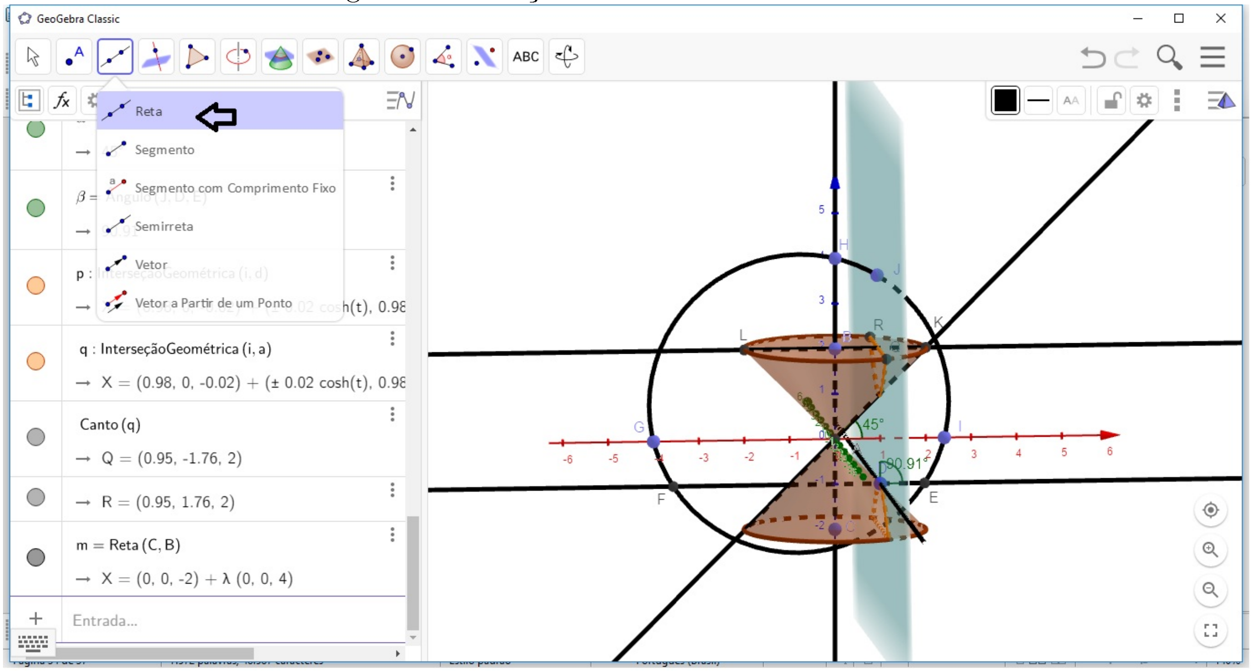
Figura 4.68: Seção Cônica - Passo 9



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 10: Selecione o botão **"Reta"**, clique no ponto C e então no ponto B, criando a reta m (*eixo do cone*).

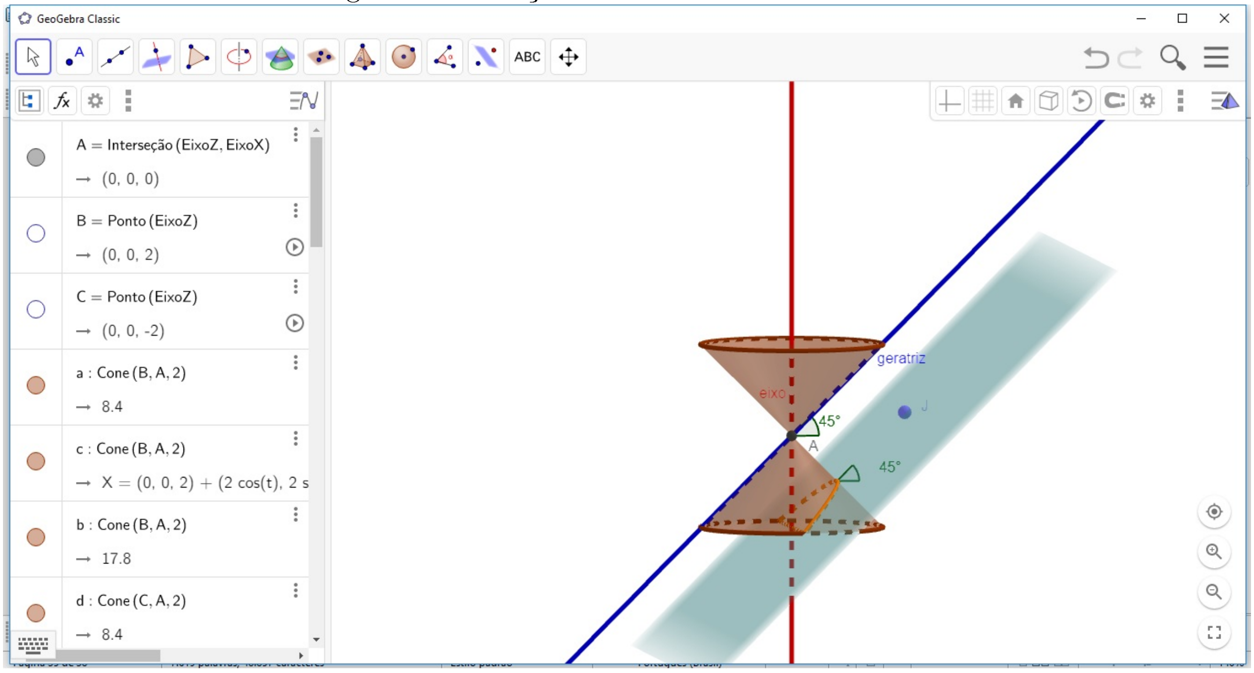
Figura 4.69: Seção Cônica - Passo 10



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 11: Na janela de Álgebra clicamos nos círculos para ocultar os objetos criados para dar estrutura à construção. Ocultaremos as retas paralelas exceto a reta do eixo do cone e a geratriz, todos os pontos exceto os pontos A e J e o círculo.

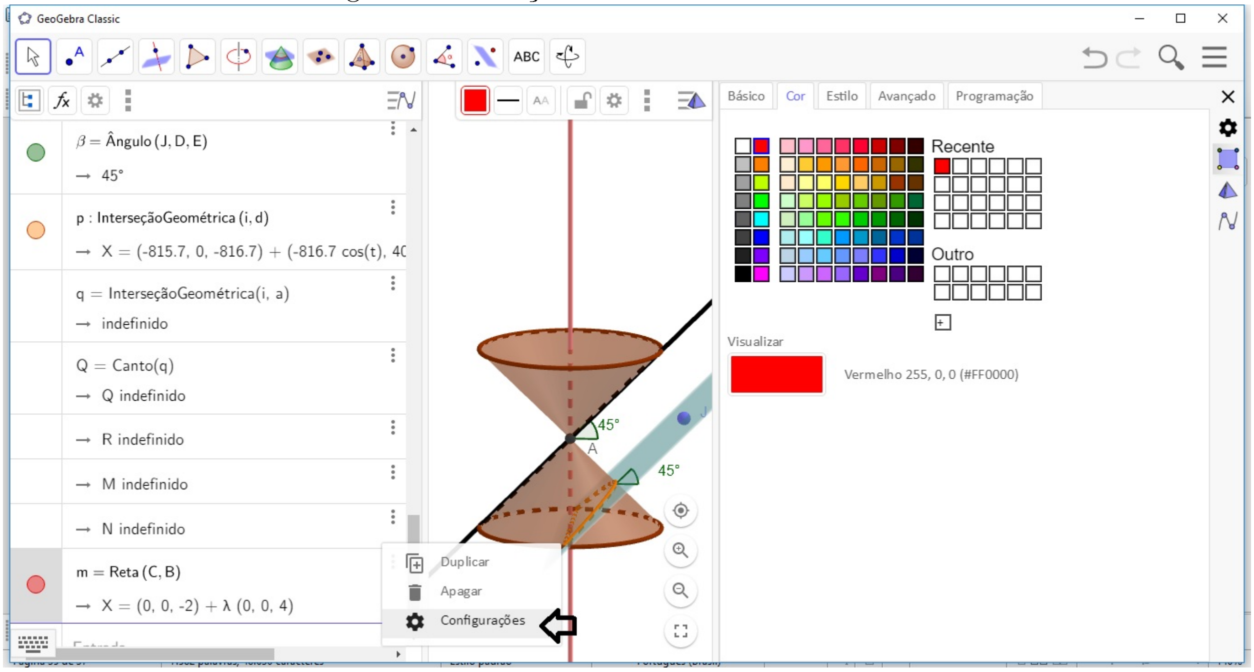
Figura 4.70: Seção Cônica - Passo 11



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 12: Na janela de Álgebra clicamos nas configurações do objeto que queremos modificar e alteramos por exemplo a cor, espessura da linha, entre outros. Deixando a construção final na forma mais conveniente para nosso uso.

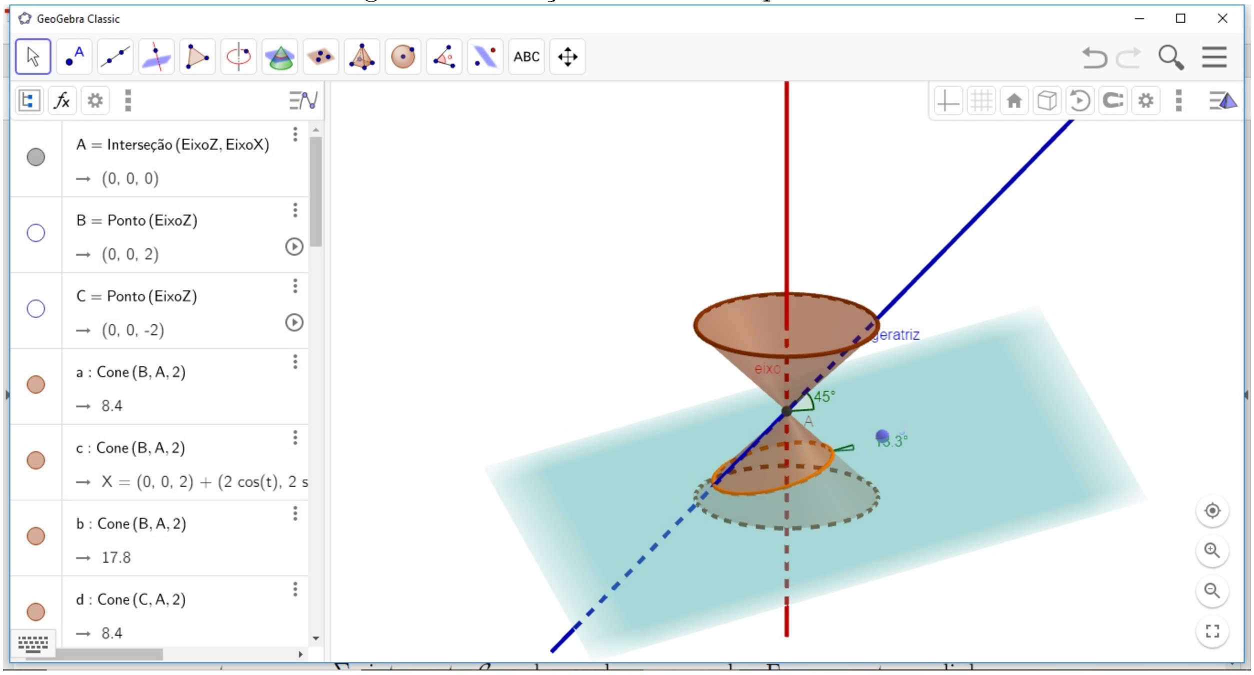
Figura 4.71: Seção Cônica - Passo 12



Fonte: Elaborado pelo autor

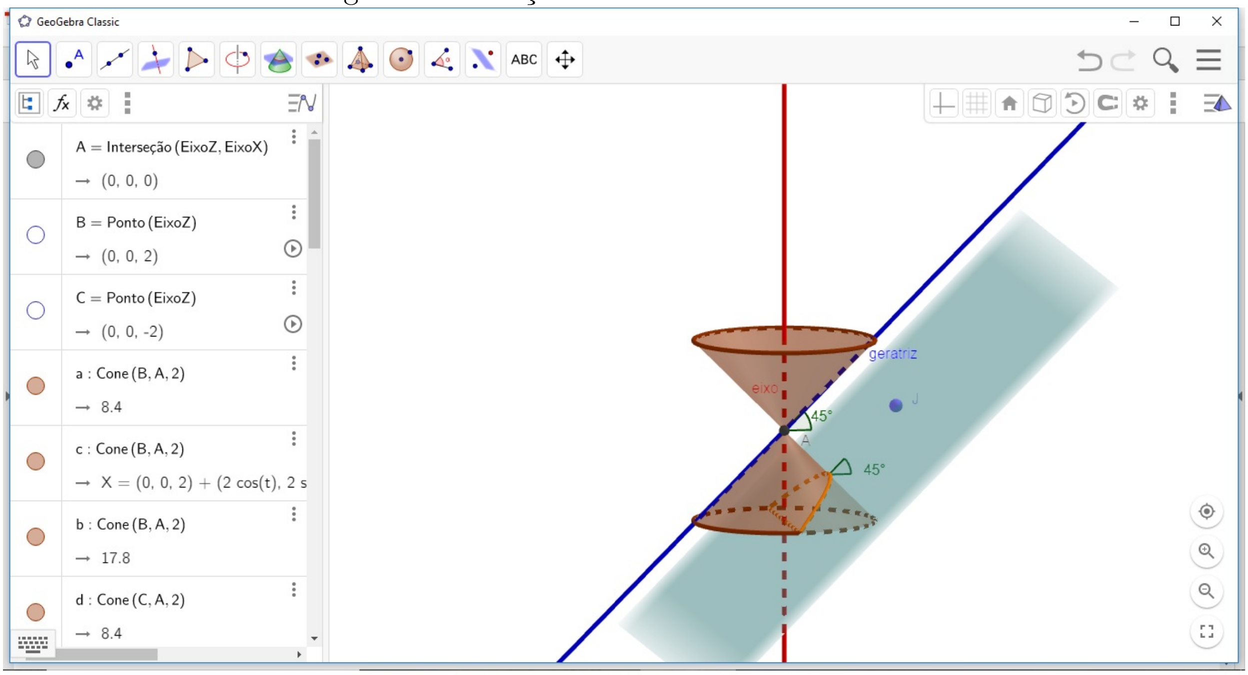
Observe que ao mover o plano dinamicamente a interseção com um cone pode gerar as seções cônicas elipse, parábola e hipérbole como demonstra o teorema 3.12 como podemos observar nas figuras a seguir. Importante comparar as posições entre o plano e a reta geratriz do cone, pois dependendo do ângulo entre eles, teremos uma curva diferente. Ressaltamos que a ferramenta GeoGebra nos permite posicionar a figura da forma mais adequada para que possamos compreender as diversas propriedades exploradas no teorema, tornando a aprendizagem mais interessante e curiosa.

Figura 4.72: Seção Cônica - Elipse



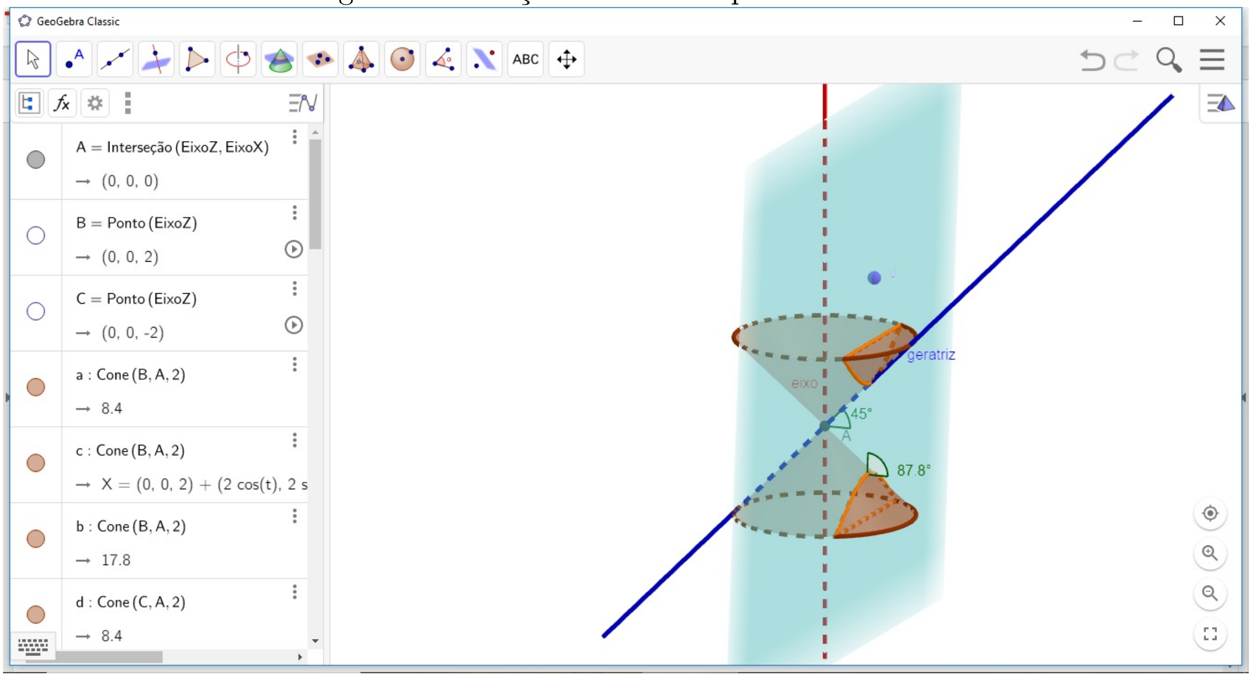
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4.73: Seção Cônica - Parábola



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4.74: Seção Cônica - Hipérbole



Fonte: Elaborado pelo autor

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre alguns lugares geométricos no espaço, construindo os objetos utilizando o software GeoGebra. A construção passo a passo das atividades sobre plano medial, reta medial, plano bissetor, interseção entre o plano e a esfera e as seções cônicas permitiu não só uma compreensão mais aprofundada dos conceitos sobre lugares geométricos no espaço como ampliou o leque de possibilidades de produção de métodos para compreensão e estudo de outros conceitos da geometria, seja plana ou espacial.

O uso de tecnologias para ensino contribui significativamente para a construção do conhecimento, para estimular o descobrimento de padrões e o estímulo à curiosidade auxiliando o aluno a consolidar assim sua aprendizagem. Para o uso do GeoGebra como uma dessas ferramentas, se faz necessário que estudante e professor estejam dispostos a inovar, sair de sua zona de conforto e se aperfeiçoar nesse instrumento de valor inestimável na contribuição do ensino e da aprendizagem da Geometria.

Essa nova realidade na qual estamos todos inseridos é uma oportunidade para que nós professores possamos refletir, remodelar nossa prática e construir diferentes formas de ação que nos permitam lidar da melhor forma com os desafios do ensino na era da informatização.

Um ponto relevante desse trabalho é que através do uso do programa GeoGebra na construção de objetos sobre lugares geométricos no espaço, podemos compreender com maior facilidade como os conceitos e proposições que são demonstradas funcionam através de uma visão tridimensional manipulável. Sendo assim, é importante destacar que a construção das figuras não apenas facilita a compreensão dos objetos mas que através da possibilidade de se fazer modificações dinâmicas a aprendizagem do conteúdo se torna mais acessível, curiosa e interessante.

Esse ponto nos leva à reflexão de como podemos utilizar essa ferramenta para o ensino da Geometria, tanto no nível fundamental como no nível superior. A construção de objetos manipuláveis através do GeoGebra abre a possibilidade de se apresentar a Geometria de uma forma mais interessante e compreensível tanto para os professores quanto para os alunos que pertencem a era da informação e utilizam com maestria os recursos tecnológicos atuais.

Como trabalhos futuros que esse tema abre possibilidade, podemos falar sobre a construção de objetos da geometria plana e seus conceitos básicos, bem como os conceitos básicos da geometria espacial. As relações entre as medidas de área, volume e perímetro e as relações de proporcionalidade entre figuras diversas. A elaboração de aulas e projetos de ensino da Geometria usando o GeoGebra para melhorar significativamente a proficiência dos alunos na Matemática e em especial na Geometria.

Referências Bibliográficas

[1] Muniz Neto, Antônio Caminha, *Geometria*, Rio de Janeiro: SBM, (2013).

[2] Andrade, L.N.*Geometria Dinâmica com o GeoGebra*, (2008).

[3] Andrade, L.N.*Geometria Espacial com o GeoGebra*, (2014).

[4] Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., Almeida, N., *Matemática: Ciência e aplicações*, Volume 3, 9. ed, São Paulo: Saraiva, (2016).

[5] Smole, K. C. S., Kiyukawa, R., *Matemática*, Ensino Médio, Volume 3, 2ª edição, Saraiva (1999).

[6] Dante, L. R., *Matemática: Contexto & Aplicações*, 3ª ed., São Paulo, Ática (2017)

[7] Angelo, C. B., Souza, C. F., Assis, J. G., Bezerra, M.C.A, *Tecnologias para ensinar matemática - Reflexões e atividades para a sala de aula*, João Pessoa, Editora Universitária da UFPB (2011).

[8] Santos, Náyra Milla da Silva, *Mosaicos : construção através do Geogebra e aplicações para o ensino básico*, Dissertação de mestrado - PROFMAT, UEFS (2017)

[9] Santos, Ednardo Lopes, *Possibilidades de uso do Geogebra para compreensão de conceitos geométricos da geometria espacial: uma experiência com alunos do terceiro ano do ensino médio.*, Dissertação de mestrado - PROFMAT, UESB (2017)

[10] Severiano, Thiago Pardo., *Estudo das cônicas: uma proposta didática com uso de GeoGebra para o Ensino Médio*, Dissertação de mestrado - PROFMAT, UFRN (2017)

[11] Alves, Wecsley Fernando Marçal, *Uso do GeoGebra no Ensino de Geometria Plana no Ensino Básico*, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Goiás (2017)

[12] Leme, Cláudio Batista, *O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL PARA ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO*, Dissertação de mestrado - PROFMAT, Universidade Estadual de Ponta Grossa (2017)