Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
dissertação de mestrado

Matemática Financeira: imposto de renda, sistemas de amortização e outras aplicações – análise quantitativa e qualitativa

Carlos Roberto Bastos Gomes

Salvador - Bahia
Junho de 2018

Matemática Financeira: imposto de renda, sistemas de amortização e outras aplicações – análise quantitativa e qualitativa

Carlos Roberto Bastos Gomes

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi.

Salvador - Bahia

Junho de 2018

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Gomes, Carlos Roberto Bastos
Matemática Financeira: imposto de renda, sistemas de amortização e outras aplicações '-' análise quantitativa e qualitativa / Carlos Roberto Bastos Gomes. -- Salvador, 2018.
116 f. : il

Orientador: André Luís Godinho Mandolesi.
Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2018.

1. Matemática Financeira. 2. Sistemas de Amortização. 3. SAC. 4. PRICE. 5. Imposto de Renda. I. Mandolesi, André Luís Godinho. II. Título.

Matemática Financeira: Imposto de Renda, Sistemas de Amortização e Outras Aplicações - Análise Quantitativa e Qualitativa

Carlos Roberto Bastos Gomes

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 15/06/2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi (orientador)
UFBA

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta
UFBA

Prof. Dr. Juan Andrés Gonzalez Marin
UFBA

Àqueles que se dedicam ao ensino da Matemática.

Agradecimentos

Agradeço especialmente e em primeiro lugar ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo, minha fonte da vida e sabedoria, a quem me concedeu graça e força ao longo dessa jornada. A Ele toda Glória!

Agradeço a todos que oraram por mim.

Agradeço ao meu tesouro na terra: minha amada esposa Vera e os meus filhos Nicolas e Isabela que me inspiram a prosseguir. Eu os amo muitíssimo.

Agradeço a todos aos meus professores do PROFMAT pelo compartilhamento de saberes matemáticos.

Agradeço aos meus colegas de turma pela boa convivência e troca de experiência.

Agradeço a todos os professores e colaboradores do PGMAT/PROFMAT/UFBA que contribuem para o bom desenvolvimento do programa de mestrado.

Agradeço a toda rede nacional do PROFMAT que contribui para o prosseguimento na formação de milhares de professores, e por seguinte, para a obtenção de melhores resultados em sala de aula.

Agradeço aos professores da banca pela aceitação em fazer parte da mesma e participar dessa etapa tão importante para mim.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para elaboração desse trabalho.

E de forma singular, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. André Mandolesi pelo acolhimento em me orientar, pelas sugestões ao longo do texto, pelos direcionamentos nos passos a seguir a cada etapa, pelas revisões, pela compreensão nos momentos difíceis da vida que passei durante a pesquisa e escrita, pela boa convivência ao longo dos meses que estivemos juntos e por sua simpatia. Muito obrigado professor.

*"O SENHOR, com sabedoria fundou
a terra; com entendimento preparou os
céus. "*

Provérbios 3:19, Bíblia Sagrada.

Resumo

Neste trabalho busca-se fundamentar e analisar alguns tópicos da Matemática Financeira, como taxas, séries uniformes e os sistemas de amortização SAC e PRICE, demonstrando resultados importantes que não são encontrados ou justificados em livros. É feito um estudo do cálculo do Imposto de Renda em um caso particular, onde é dado um tratamento não convencional através de funções de várias sentenças, e não de tabelas.

As funções e equações encontradas são analisadas de forma não tradicional, indo além das substituições de valores, estudando-se o seu comportamento resultante das variações de seus parâmetros, permitindo uma previsão de respostas para outras entradas de dados financeiros. E o software GeoGebra é proposto como um meio didático para análise dinâmica dessas variações.

Palavras-chaves: matemática financeira, SAC, PRICE, imposto de renda.

Abstract

In this paper we seek to substantiate and analyze some topics of Financial Mathematics, such as rates, uniform series and the amortization systems SAC and PRICE, demonstrating important results that are not found or justified in books. A study of the calculation of the Income Tax is made in a particular case, where an unconventional treatment is given through functions of several sentences, instead not of tables.

The functions and equations found are analyzed in a non-traditional way, going beyond the substitutions of values, by studying their behavior resulting from variations of their parameters, allowing a prediction of responses to other inputs of financial data. And GeoGebra software is proposed as a didactic means for dynamic analysis of these variations.

Keywords: Finantial Mathematics , SAC, PRICE, income tax.

Sumário

Introdução

A Matemática Financeira tem seu papel fundamental para a compreensão, planejamento e tomada de decisões na vida financeira cotidiana e a médio e longo prazo, além de carregar muitos valores matemáticos. E nesse sentindo defende-se que nos ambientes escolares os alunos tenham experiências de aprendizagem de técnicas e teorias para que adquiram consciência de poder, por exemplo, distinguir reais descontos de juros embutidos nas compras, decidir entre um pagamento à vista ou a prazo ou fazer os cálculos para se chegar nos valores das prestações em um financiamento de um bem menor, um veículo, ou mesmo um imóvel de grande valor.

Recentemente, documentos oficiais do governo que visam orientar e dar um encaminhamento mínimo para o currículo do Ensino Médio têm contemplado novos conteúdos e abordagens mais amplas [2] para o ensino da Matemática Financeira, como já observado em [1]:

> Por outro lado, a abordagem da Matemática Financeira na 2a versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), divulgada em abril de 2016, apresenta um avanço considerável no tratamento do tema, inserindo-o em todas as séries do Ensino Fundamental II e em quatro das cinco unidades curriculares do Ensino Médio. Além disso, são abordandos importantes tópicos que antes eram ignorados, como parcelamentos, financiamentos, amortizações, previdência, entre outros. O documento traz ainda Consumo e Educação Financeira como tema integrador (a ser trabalhado de forma interdisciplinar com as demais áreas e disciplinas) e um tratamento curricular do tema em espiral, o que proporciona a retomada e o aprofundamento contínuo dos tópicos relacionados à Matemática Financeira [1, p.10].

Contudo, com a reforma do Ensino Médio em andamento, que teve um marco importante a partir da edição da Medida Provisória (MP) nº 746/2016, e posteriormente, transformada no Projeto de Lei (PL) nº 34/2016 com base no Relatório da Comissão Mista, e agora já aprovado na Câmara dos Deputados e no Senado Federal, sancionado e publicado no Diário Oficial da União (DOU) como Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, sendo assim incorporada à Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 9.394/1996, está para ser homologada pelo Conselho Nacional da Educação a nova versão do BNCC ([3]) encaminhada pelo Ministério de Educação (MEC), onde já não há uma previsão explícita de todos os temas elencados na citação acima. E sendo assim, mostra-se uma nova proposta pedagógica de parâmetros nacionais recuando quanto a tão importantes abordagens e conteúdos da Matemática Financeira necessários para uma boa prática com as finanças do dia a dia. E portanto, sendo a BNCC homologada nesses padrões, poderão os sistemas de ensino e/ou unidades escolares, na liberdade que lhe é dada, complementar com os tópicos suprimidos.

Desse modo espera-se que com a inserção de tais tópicos no currículo os alunos sejam mobilizados a desenvolver habilidades e competências de um cidadão que aja de maneira autônoma, consciente e crítica, a chamada *Educação Financeira*, frente a um vasto cenário de operações financeiras, tais como pagamentos, recebimentos, parcelamentos, investimentos e gestão financeira pessoal, o que para tanto possam compreender a fundamentação matemática implícita e explícita nos resultados encontrados, não apenas fazendo uso de fórmulas prontas sem as suas devidas justificativas quando possível.

Nesse trabalho a Educação Financeira é tratada não como um meio em si, mas paralela aos resultados, exemplos e atividades propostas. No banco de dissertações do PROFMAT, em `http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/`, há trabalhos específicos de tal tema para maiores reflexões, exemplos e atividades didáticas.

Aqui, o principal objetivo é dar um embasamento teórico e prático apresentando resultados e suas respectivas demonstrações, indo além dos inseridos comumente nas literaturas, como em [12]. Por exemplo, 1) busca-se justificar matematicamente frases do jargão do setor financeiro de imóveis, tipo: "as parcelas iniciais no SAC são maiores que no PRICE" e "o juro total pago no SAC é menor do que no PRICE"; 2) faz-se um estudo do cálculo do Imposto de Renda em um caso particular, onde é dado um tratamento não convencional através de funções de várias sentenças definidas por funções afins, e não de tabelas. Além disso, são feitas análises qualitativas de tais resultados, também não comuns nas literaturas, proporcionando uma melhor e mais ampla compreensão das operações financeiras, ressaltadas por interpretação analítica, gráfica e de tabelas.

Na maioria das demonstrações procura-se fazer uso apenas de assuntos já contemplados no currículo do Ensino Médio, dos quais alguns são apresentados de forma rigorosa no primeiro capítulo. Em especial encontra-se a demonstração, de autoria própria, do Teorema 3.0.3, ligado ao valor da dívida em um financiamento. Já algumas demonstrações têm como base o Cálculo Diferencial, nas noções de Limites e Derivadas, o que poderão não estar acessíveis aos alunos do ensino básico, mas propicia ao professor o conhecimento técnico do que está acontecendo por detrás das "cortinas", abrindo possibilidades de se criar atividades didáticas para simulações e conjecturas de resultados do mercado financeiro.

Além disso, são sugeridas atividades didáticas onde propõe-se a utilização de recurso computacional através do GeoGebra (manual em [8] e minicursos em [7] e [6]), um software de acesso gratuito que combina elementos da Geometria e Álgebra, de onde leva o seu nome, além da Estatística e do Cálculo, com destaque em especial para o seu aspecto *dinâmico*, em que pode-se, dentre outras possibilidades, alterar parâmetros de equações ou funções e perceber simultaneamente as suas variações gráficas e numéricas, de forma a efetuar simulações, formular conjecturas, testar hipóteses, executar cálculos rápidos, dentre outros, proporcionando ao aluno agir de forma ativa e reflexiva em busca de uma aprendizagem significativa, o que está em consonância com a quinta das dez competências gerais da educação básica inseridas no BNCC, quando se fala do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's):

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva [3, p.9].

E portanto, é apresentada uma possibilidade do uso de TIC na Matemática Financeira diferente do viés tradicional através de planilhas ou calculadoras financeiras.

Do exposto até aqui (e por outras razões) é certo que trabalhar com valores monetários (atualmente no Brasil o real (R$)) desperta o interesse e atenção dos alunos, o que na perspectiva de ensino-aprendizagem é muito importante para um ganho educacional. Portanto, esse é um momento em que o professor de Matemática tem diante de si os olhos atentos de muitos alunos.

É nesse ambiente, que ao apresentar à comunidade acadêmica o presente trabalho, deseja-se contribuir com o ensino-aprendizagem da Matemática Financeira, reunindo em um só lugar: explicações matemáticas precisas de diversos resultados dessa área, contemplando os já mencionados na citação acima do Professor Amorim, apresentações por abordagens não tradicionais e sugestões de atividades didáticas para o professor trabalhar em sala de aula. Sendo que nessas atividades não pretende-se restringir ao "calcule", mas também, fazer análises qualitativas e comparativas, permitindo ao aluno um processo reflexivo para o seu aprofundamento intelectual e prático, para uma efetiva aprendizagem, uma vez que não é incomum um ensino de matemática sem uma reflexão sobre os resultados encontrados, seja a partir de dados já fornecidos ou por variação dos mesmos.

A apresentação sistemática do texto contempla no primeiro capítulo a fundamentação matemática para os demais capítulos, exceto no uso do Cálculo Diferencial, onde são apresentadas as funções afim, exponencial e logarítmica, as progressões aritméticas e geométricas, e por último, o Binômio de Newton. No segundo, são trabalhados conceitos iniciais da Matemática Financeira - porcentagem, taxas e os sistemas de capitalização de juros simples e composto - a um tópico mais avançado de séries de pagamento uniforme. No terceiro, trabalha-se com os sistemas de amortização SAC e PRICE, os quais aparecem, por exemplo, no financiamento de imóveis. No quarto capítulo é discutida uma abordagem do cálculo do imposto de renda e do salário líquido através de funções nas variáveis *salário bruto* e *número de dependentes*, proporcionando uma análise financeira do impacto no bolso de milhões de pessoas. O penúltimo capítulo traz exemplos de aplicações concretas e atuais de operações financeiras, tais como financiamento imobiliário e pagamento do cartão de crédito, para validação dos dados apresentados pelas respectivas instituições financeiras, conforme as teorias estudadas anteriormente. E no último capítulo são propostas atividades didáticas com o uso do GeoGebra e alguns problemas financeiros interessantes, os quais podem servir de estímulo aos professores na elaboração de outros para uma melhora contínua dessa prazerosa atividade profissional: o ensinar.

Capítulo 1

Fundamentação Matemática

Apresentaremos aqui os conceitos fundamentais para o desenvolvimento da matemática financeira proposta neste trabalho.

Nas três primeiras seções deste capítulo descreveremos alguns tipos de funções utilizadas em aplicações financeiras. Será apresentado definição, propriedades e teoremas de caracterização. Nosso objetivo não será dar um tratamento pormenorizado seguido de considerações pedagógicas para o ensino-aprendizagem. Caso o leitor assim o deseje, encontrará outros trabalhos de dissertação de Mestrado com temas específicos lidando com cada função, discutindo diferentes formas de abordagens para o ensino em sala de aula. E, para referência no tratamento matemático detalhado e amplo, segue a referência [9], publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), a qual também utilizamos.

Será discutido em seguida as PA's e PG's e o Binômio de Newton de forma a permitir o trabalho à frente com as séries uniformes de pagamentos/recebimentos, onde temos como referência [11].

1.1 Função afim

A função afim definida a seguir é uma ferramenta própria para situações práticas, o que veremos nos capítulos seguintes, como no cálculo do imposto de renda e na cobrança de juro em períodos menores do que um mês. É uma função simples com uma caracterização significativa.

Definição 1.1.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é denominada* ***afim*** *se existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Chamamos de* ***taxa de variação*** *e* ***valor inicial*** *os coeficientes a e b, respectivamente. Se $b = 0$, f é dita* ***linear****, e se $a = 0$,* ***constante****.*

Teorema 1.1.1. *O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta não-vertical.*

Demonstração. Sejam A, B, C três pontos do gráfico de f, com $A = (x_1, ax_1 + b), B = (x_2, ax_2 + b), C = (x_3, ax_3 + b)$. E, sem perda de generalidade, consideremos $x_1 < x_2 < x_3$. Pela distância entre dois pontos, obtemos:
$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \stackrel{x_2 \geq x_1}{=} (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$; e de modo semelhante, $d(B, C) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$ e $d(A, C) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$.
Daí, $d(A, B) + d(B, C) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = d(A, C)$. E, por seguinte, três pontos quaisquer do gráfico de f são colineares. Logo, o gráfico de f é uma reta não-vertical. $\square$

Uma função afim fica bem determinada com dois pontos *distintos* $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. De fato, $f(x_2) - f(x_1) = ax_1 + b - (ax_2 + b) = a(x_2 - x_1)$ o que implica $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$; e, o segundo coeficiente alcançamos com $b = f(x_1) - ax_1 = \dfrac{x_2 f(x_1) - f(x_2)x_1}{x_2 - x_1}$. E, como consequência, uma reta não-vertical é gráfico de uma função afim: de fato, seja s uma reta não-vertical e sejam $Q_1 = (a_1, b_1)$ e $Q_2 = (a_2, b_2)$ pontos de s; sendo s não-vertical temos que $a_1 \neq a_2$, e portanto, os pontos Q_1 e Q_2 determinam uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$, cujo gráfico, G, contem esses pontos. Portanto, G coincide com s, já que por dois pontos distintos passa uma única reta.

Observa-se que $f(0) = b$, ou seja, o valor de b é a intersecção do gráfico de f com o eixo OY. A nomenclatura *valor inicial* assim é dada, pois em muitas situações práticas a variável x representa o tempo, e para $x = t = 0$, temos o tempo inicial. Quanto à nomenclatura *taxa de variação*, vejamos: se f é uma função afim e h número real, então $f(x + h) - f(x) = ax + ah + b - ax - b = ah$, ou seja, $f(x + h) - f(x)$ não depende de x; assim, para $h = 1$, a variação da função é sempre o valor de a, independentemente do valor de x. Notamos aqui que essa independência caracteriza as funções afins, como veremos a frente. De modo prático, por exemplo, se $s(t) = 2t + 4$ é a posição de um móvel em função do tempo t, significa então, que a cada aumento de uma unidade de tempo, a posição varia(aumenta) duas $(a = 2)$ unidades na posição. Considerações análogas serão vistas nos capítulos seguintes, a repeito, por exemplo, do imposto de renda.

É fácil ver que quando $a > 0$, $a < 0$ ou $a = 0$ a função afim é crescente, decrescente ou constante, respectivamente. Vejamos o caso $a > 0$: sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$; obtemos $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1) > 0$, isto é, $f(x_1) < f(x_2)$, e assim, f é crescente.

Na construção do gráfico de uma função afim, basta tomarmos dois de seus pontos (distintos), pois assim, uma reta é completamente determinada. Uma opção, quando $a, b \neq 0$, é tomar o ponto $(0, b)$ e, fazendo $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$ (chamado *raiz ou zero* *da função*, isto é, quando se faz $f(x) = 0$; valendo para qualquer função f), tomamos o ponto $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$. Se $a = 0$, teremos uma reta paralela ao eixo OX, passando no ponto $(0, b)$. No caso $a \neq 0$ e $b = 0$, determinamos um ponto $A = (x_1, f(x_1))$, com $x_1 \neq 0$; e o gráfico é a reta passando por A e pela origem.

Exemplo 1.1.1. *Vejamos, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções* $f(x) = -3x + 6$, $g(x) = 2x$ *e* $h(x) = -3$, *são indiciados na Figura 1.1.*

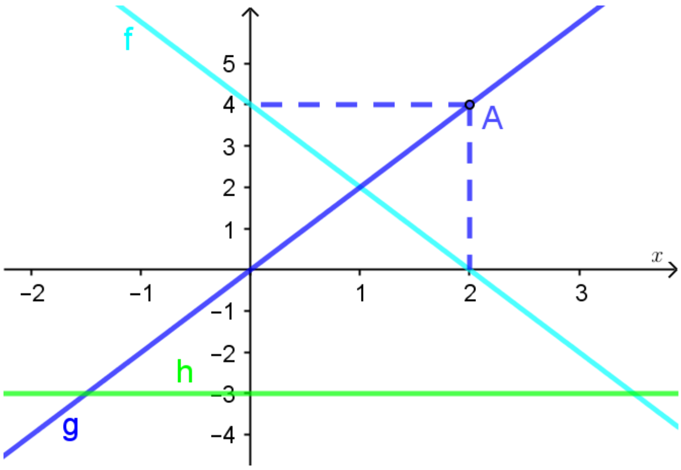


Figura 1.1: Gráficos de Funções Afins.

Exemplo 1.1.2. *Uma situação prática (Figura 1.2): um trabalhador recebe* R\$ 1.000,00 *fixo e mais* 2% *de sua venda mensal, v; daí, o salário bruto mensal, s, é uma função afim com domínio restrito:* $s : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $s(v) = 1000 + 0,02v$.

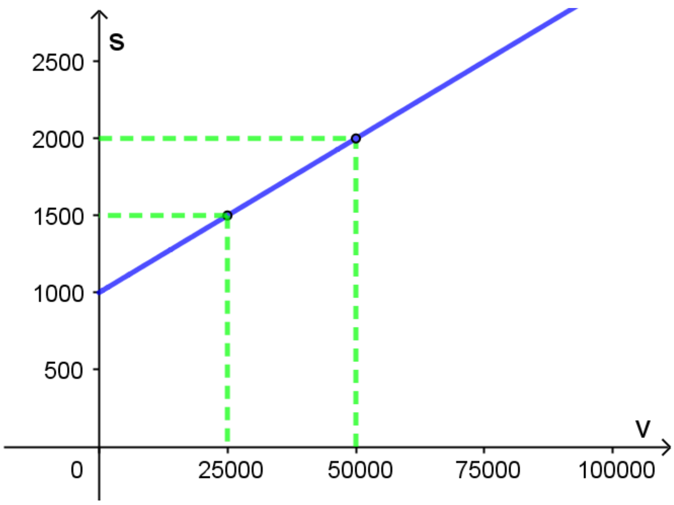


Figura 1.2: Exemplo prático de função afim.

Agora enunciaremos o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, cuja demonstração pode ser vista em [9], o qual utilizaremos logo a seguir para dar uma caracterização das funções afins.

Teorema 1.1.2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. São equivalentes as afirmações seguintes:*
i) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
ii) $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$.
iii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$

Teorema 1.1.3 (Caracterização de Função Afim)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função injetiva monótona. O acréscimo $f(x+h) - f(x)$ depende somente de h, isto é, $f(x+h) - f(x) = \psi(h)$, se, e somente se, f é uma função afim.*

Demonstração. Se f é uma função afim, o resultado vale pelo que já vimos anteriormente. Por outro lado, definamos $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\psi(h) = f(x + h) - f(x)$ e consideremos f crescente (o caso decrescente é análogo). É fácil ver que ψ é crescente e $\psi(0) = 0$. Daí, para todos h, $k \in \mathbb{R}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \psi(h + k) &= f(x + h + k) - f(x) = f((x + k) + h) - f(x + k) + f(x + k) - f(x) \\ &= \psi(h) + \psi(k). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, colocando-se $\psi(1) = a$, tem-se $\psi(h) = ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$, isto é, $f(x + h) - f(x) = ah$, donde fazendo $f(0) := b$, obtemos $f(h) = ah + f(0) = ah + b$, ou seja, f é uma função afim. □

1.2 Função exponencial

A função exponencial tem ligação com a matemática financeira, com outros campos da matemática e outras ciências. No nosso estudo, por exemplo, dado um capital A aplicado a uma taxa de juros $i = k\%\ a.m.$, mostra-se que o seu valor futuro, após n meses, é $F(n) = A(1 + i)^n$, e F é uma função crescente. O que exemplifica uma função (tipo) exponencial, como definida a frente. Além disso, observa-se que $F(n+h) - F(n) = A(1+i)^{n+h} - A(1+i)^n = A(1+i)^n \left[(1 + i)^h - 1\right]$ depende não só de h, mas também de n, descaracterizando um modelo de função afim. Por outro lado, o acréscimo $F(n+h)-F(n)$ a partir de $F(n)$ é proporcional a $F(n)$, isto é, $F(n + h) - F(n) = \psi F(n)$, com ψ dependendo só de h, ou seja $\psi = \psi(h)$. Daí, o acréscimo relativo $\frac{F(n+h)-F(n)}{F(n)}$ depende só de h; e essa é uma caracterização para a função exponencial - a modelagem matemática apropriada para representar a variação de um capital aplicado a taxa de juros fixos em função do tempo n.

A função exponencial que ora iremos definir deve satisfazer as seguintes condições para um dado número real a positivo e diferente de 1 e para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

i. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, denotada por $f(x) = a^x$;

ii. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

iii. $a^1 = a$;

iv. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$;

v. $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

Denominamos f uma **função exponencial de base a**.

Desejando dar um sentido para a expressão a^x, podemos pensar de forma progressiva x pertencendo ao conjunto dos naturais, inteiros, racionais, e por fim, os irracionais.

Em $\mathbb{N}$ definimos de maneira indutiva: $a^1 = a$, e $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Por seguinte, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. E de maneira a preservar tal propriedade, em $\mathbb{Z}$, colocamos $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e em $\mathbb{Q}$, dado $r = \frac{m}{n}$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos $a^{m/n}$ como a $n-$ésima raiz de a^m, isto é, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. Até aqui, as condições da definição de função exponencial não são de difícil verificação. Quanto à extensão para os números irracionais é um pouco delicada. Primeiro, notamos que em [9], demonstra-se o lema seguinte.

Lema 1.2.1. *Fixado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe uma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Considerando $a > 1$ (o caso $0 < a < 1$ é semelhante), se x é irracional, então a^x deve satisfazer a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Daí, a^x deve assumir um valor único, pois do contrário, teríamos dois valores α e β iguais a a^x, sendo $\alpha < \beta$, com

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < \alpha < \beta < a^s.$$

Resultando em um intervalo $[\alpha, \beta]$ sem nenhuma potência racional de a; o que contraria o Lema 1.2.1. Consequentemente, colocamos a^x como o único valor satisfazendo as condições i. a v. acima, tal que

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

onde r_n é uma sequência (crescente ou decrescente) de números racionais, onde

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x.$$

Portanto, a função exponencial sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, com $f(x) = a^x$, tem uma maneira explícita de cálculo para todos os números reais. E valendo-se de algumas análises, apresentamos as duas possibilidades para o gráfico de uma função exponencial na Figura 1.3, que satisfaz as seguintes propriedades:

- É ilimitada superiormente. Mais precisamente, $\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty$, se $a > 1$, e $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, se $0 < a < 1$.
- É sobrejetiva, isto é, para todo $y \in \mathbb{R}^+$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x = y$.
- Tendo contradomínio $\mathbb{R}^+$, é uma função positiva ($a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$) e seu gráfico não intercepta o eixo OX.

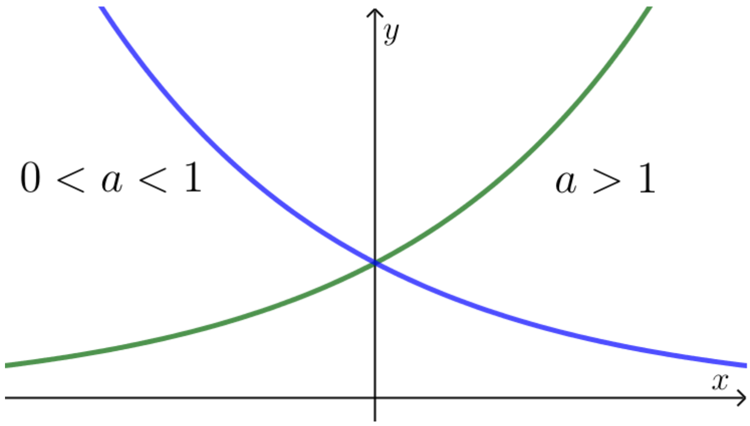


Figura 1.3: Função exponencial: crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

A seguir definiremos uma função semelhante à exponencial, a qual terá utilidade no cálculo de valor futuro de um capital no presente aplicado a uma taxa de juros definida.

Definição 1.2.1. *Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do **tipo exponencial** se $g(x) = ba^x$ para $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$.*

Verifica-se também que uma função tipo exponencial é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Exemplo 1.2.1. *Valores de bens podem valorizar e desvalorizar com o tempo. Considere um imóvel e um automóvel avaliados em* R\$ 40.000,00 *e* R\$ 60.000,00*, respectivamente; o primeiro valorizando a* 10% *a.a., e o outro desvalorizando a* 5% *a.a.. Mostraremos que o valor do imóvel e do automóvel em n anos será dado por $V_i(n) = 40000(1 + 0{,}1)^n = 40000(1{,}1)^n$ e $V_a(n) = 60000(1 - 0{,}05)^n = 60000(0{,}95)^n$, respectivamente. Logo, V_i e V_a são funções tipo exponencial restritas a $\mathbb{R}^+$, representadas pelos gráficos na Figura 1.4.*

Agora apresentaremos uma caraterização para a função exponencial.

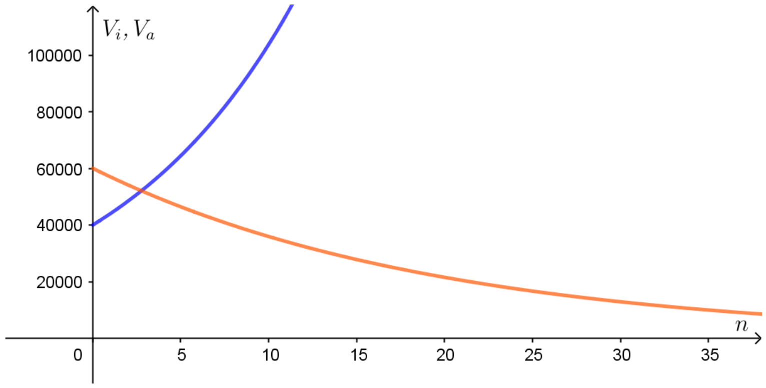


Figura 1.4: Funções tipo exponencial: V_i-crescente e V_a-decrescente.

Teorema 1.2.1 (Caraterização da Função Exponencial)**.** *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função monótona injetiva. As seguinte afirmações são equivalentes:*

i) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

ii) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, onde* $f(1) = a$*;*

iii) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$:
Mostraremos primeiro válido em $\mathbb{Q}$. Seja $r \in \mathbb{Q}$, com $r = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$. Temos que:

$$f(rx)^q \overset{i)}{=} f(rqx) = f(px) \overset{i)}{=} f(x)^p \Rightarrow f(rx) = f(x)^{p/q} = f(x)^r.$$

Logo, $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$, o que torna válido $ii)$ se $x = r \in \mathbb{Q}$. Agora suponha, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é semelhante), e consideremos f crescente (o caso f decrescente é análogo). Portanto, temos que $a = f(1) > f(0) = 1$, por f ser crescente, e, pelo Lema 1.2.1, existe uma potência racional r de a tal que $f(x) < a^r < a^x$. Logo, $f(x) < f(r) < a^x$, pelo que já provamos, donde $x < r$, por f ser crescente. Além disso, $a^r < a^x \overset{a>1}{\Rightarrow} r < x$, contradizendo o que já temos $r < x$. Assim, $ii)$ é verdadeiro.
$ii) \Rightarrow iii)$:
$f(x+y) \overset{ii)}{=} a^{x+y} \overset{def}{=} a^x \cdot a^y \overset{ii)}{=} f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
$iii) \Rightarrow i)$:
Primeiro observemos que:

1. Não existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, pois do contrário, para todo $x \in \mathbb{R}$ teríamos que $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) \overset{iii)}{=} f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0$, o que contraria f ser monótona injetiva.

2. $f(x) = f(0+x) \overset{iii)}{=} f(0) \cdot f(x) \overset{f \neq 0}{\Rightarrow} f(0) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. $1 = f(0) = f(-x+x) \overset{iii)}{=} f(-x) \cdot f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)^{-1}$.

Se $n \in \mathbb{N}$ então $f(nx) = f(\underbrace{x + ... + x}_{n\ vezs}) \overset{iii)}{=} \underbrace{f(x) \cdot ... \cdot f(x)}_{n\ vezs} = f(x)^n$. Se $n = 0$ então $f(x)^0 \overset{1.}{=} 1 \overset{2.}{=} f(0) = f(0 \cdot x)$. Agora tomando $n \in \mathbb{Z}$, com $n < 0$, temos que:

$$f(nx) = f(-(-nx)) \overset{3}{=} f(-nx)^{-1} \overset{-n \in \mathbb{N}}{=} (f(x)^{-n})^{-1} = f(x)^n.$$

Concluindo $iii) \Rightarrow i)$, e por fim, ficando demonstrado o teorema.

□

O teorema a seguir dá uma caracterização para a função tipo exponencial.

Teorema 1.2.2. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva tal que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ depende apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é uma função tipo exponencial então $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ depende apenas de h.*

Demonstração. Pondo $g(x) = ba^x$, é fácil ver que $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ depende apenas de h.

Por outro lado, note que se $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \frac{g(x+h)}{g(x)} - 1$ depende apenas de h, então isso equivale a dizer que $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ depende também apenas de h. Definindo $f(x) = g(x)/b$, onde $g(0) = b$, obtemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva, $f(0) = 1$ e $\phi(h) := f(x+h)/f(x)$ depende apenas de h, de tal modo que fazendo $x = 0$ implica $\phi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$, donde $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$ para todos $x, h \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema 1.2.1, $f(x) = a^x$, e por seguinte, $g(x) = bf(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a satisfaz $a = \frac{g(1)}{g(0)}$. □

1.3 Função logarítmica

Vimos na seção anterior que a função exponencial é bijetiva. Com isso podemos falar na sua inversa.

Definição 1.3.1. *Fixado a um número real positivo diferente de 1, a inversa da função exponencial de base a é denominada de **função logarítmica de base a** e escrita por $g(x) = \log_a x$ com $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $\log_a x$ é chamado de logaritmo de x na base a.*

Notemos algumas propriedades:

1. $a^{\log_a x} = x$ e $\log_a a^x = x$ pela definição de função inversa.

2. Naturalmente, $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Isto é, enquanto a exponencial transforma soma em produto, a função logarítmica transforma produto em soma. De fato, sejam $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$. Logo, $x = a^u$ e $y = a^v$. Portanto,

$$x \cdot y = a^u \cdot a^v \overset{exponencial}{=} a^{u+v} \Rightarrow \log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

4. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$.

5. A função logarítmica é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, de igual modo à sua inversa.

6. As duas possibilidades para o gráfico de uma função logarítmica são indicadas na Figura 1.5.

7. Se a e b são números reais positivos diferentes de 1, então para todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale a chamada *fórmula de mudança de base*: $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$. Com efeito, sendo $u = \log_a x$ e $v = \log_b x$, então $x = a^u$ e $x = b^v$. Fazendo $\log_a b = c$ ou $a^c = b$, obtemos $x = a^u = b^v = (a^c)^v = a^{cv}$. E, como a exponencial é injetiva, $u = cv$, ou seja, $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$.

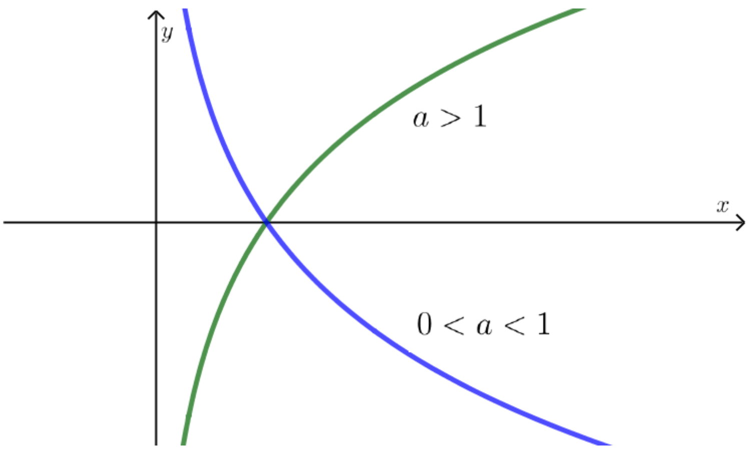


Figura 1.5: Função logarítmica crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Agora iremos caminhar para dar uma caracterização para as funções logarítmicas. Uma função $g : Y \longrightarrow X$ é dita inversa da função $f : X \longrightarrow Y$ se $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Neste caso, escrevemos, $g = f^{-1}$. Naturalmente, $g = f^{-1} \Leftrightarrow f = g^{-1}$.

Observação 1.3.1. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva e $g : Y \longrightarrow X$ é tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então $g = f^{-1}$. De fato, se $y \in Y$ então existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Portanto, $f(g(y)) = f(g(f(x))) = f(x) = y$. Logo, $g = f^{-1}$. Usaremos este resultado na demonstração do teorema seguinte.*

Teorema 1.3.1 (Caraterização das funções logarítmicas)**.** *Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. São equivalentes:*

i) $f(xy) = f(x)+f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$*, isto é,* f *transforma produto em soma.*

ii) Existe $a > 0$ *tal que* $f(x) = \log_a x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$*.*

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$:

Consideremos f crescente (o caso decrescente é semelhante).

Notemos que $f(1) = f(1 \cdot 1) \overset{i)}{=} f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

Pela observação anterior, se mostrarmos que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então a inversa da exponencial é f, ou seja, $f(y) = \log_a y$ para todo $y \in \mathbb{R}^+$. Faremos isso no primeiro caso a seguir.

1^o caso: Suponha que exista $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(a) = 1$. Assim, $f(a) = 1 > 0 = f(1)$ implica $a > 1$, já que f é crescente. Nossa prova será por etapas:

1. se $x = n \in \mathbb{N}$ então $f(a^n) = f(a \cdot a \cdot ... \cdot a) \overset{i)}{=} f(a)+f(a)+...+f(a) = 1+1+...+1 = n \cdot 1 = n$.

2. se $x = 0$ então $0 = f(1) = f(a^0)$.

3. se $x = n \in \mathbb{Z}$ com $n < 0$ então
   $0 = f(a^0) = f(a^{n-n}) = f(a^n \cdot a^{-n}) \overset{i)}{=} f(a^n) + f(a^{-n}) \Rightarrow f(a^n) = -f(a^{-n}) \overset{1.}{=} -(-n) = n$.

4. se $x = r = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, então
   $qf((a^r)) = f(a^r) + f(a^r) + ... + f(a^r) \overset{i)}{=} f(a^r \cdot a^r \cdot ... \cdot a^r) = f((a^r)^q) = f(a^p) \overset{3.}{=} p$.
   Logo, $f(a^r) = \frac{p}{q} = r$.

5. Agora suponha por absurdo que exista $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(a^{x_0}) \neq x_0$. Tomemos $f(a^{x_0}) < x_0$ (o outro caso é semelhante). Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existe um $r \in \mathbb{Q}$, tal que $f(a^{x_0}) < r < x_0$. Logo, por 4., obtemos $f(a^{x_0}) < f(a^r)$. Mas, $r < x_0 \overset{a>1}{\Rightarrow} a^r < a^{x_0}$. E, como f é crescente, temos $f(a^r) < f(a^{x_0})$. O que contradiz $f(a^r) > f(a^{x_0})$. Logo, $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2^o caso (sem restrição): Sendo $2 > 1$ e f crescente, então $\alpha := f(2) > f(1) = 0$. Definimos $g(x) = \frac{f(x)}{\alpha}$. Logo, g monótona injetiva e $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$, pois assim também é satisfeito para f, e $g(2) = 1$. Logo, como vimos no primeiro caso, $g(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$ de tal modo que
$x = 2^{\log_2 x} = 2^{g(x)} = 2^{\frac{f(x)}{\alpha}} = (2^{1/\alpha})^{f(x)} = a^{f(x)}$, onde $a = 2^{1/\alpha}$. Logo, $f(x) = \log_a x$ para todo $x > 0$.

$ii) \Rightarrow i)$: Já provamos na propriedade 3 acima. □

Observação 1.3.2. *Como veremos nesse trabalho a função exponencial é um modelo adequado para tratar movimentação de valores no tempo. E, sendo a função logarítmica a inversa da exponencial, aquela também terá a sua aplicação em problemas financeiros, na medida que desejaremos encontrar diferentes variáveis em equações financeiras. Oportunamente destacamos uma característica oposta dessas funções: enquanto a exponencial tem um crescimento rápido, a logarítmica cresce lentamente (tomando a base maior do que um). Por exemplo,* $\log_{10} x > 10 \Leftrightarrow x > 10^{10}$*, ou seja, tomar o logaritmo maior do que 10 é necessário um valor de* x *superior a 10 bilhões, enquanto, por outro lado, para oorrer* $10^x > 10$*, basta tomar* $x > 1$.

1.4 Progressões Aritmética e Geométrica: PA e PG

Primeiramente definimos as sequências, que são funções definidas no conjuntos dos números naturais. Mais precisamente, sequência é uma função $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde denotaremos $a(n)$ por a_n, e a representaremos por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$. Por exemplo, $a_n = 2n$ é sequência dos números pares positivos, isto é, $(2, 4, 6, 8, ...)$.

Definição 1.4.1. *Uma **progressão aritmética (PA)** é uma sequência* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ *tal que a diferença* $a_{n+1} - a_n$ *é constante para todo número natural* n*. Tal diferença é chamada razão e denotada por* r*. Cada valor* a_n *é chamado um termo da sequência.*

Exemplo 1.4.1. *As progressões aritméticas* $(3, 5, 7, 9, ...)$, $(7, 4, 1, -2, -5, ...)$ *e* $(1, 1, 1, 1, ...)$ *possuem razões* 2, -3 *e* 0*, respectivamente.*

Pela definição de PA temos que $a_{n+1} = a_n + r$, ou seja, o sucessor de um termo é este mais a razão. O próximo resultado nos diz como obter a_n a partir de a_1 e r.

Teorema 1.4.1. *Se* a_n *é uma PA de razão* r*, então* $a_n = a_1 + (n-1)r$*, para todo número natural* n*.*

Demonstração. Por definição de PA, temos

$$a_2 - a_1 = r,\ a_3 - a_2 = r,\ ...,\ a_n - a_{n-1} = r.$$

Somando essas $n-1$ igualdades, obtemos $a_n = a_1 + (n-1)r$. □

Observação 1.4.1. *Pode ser considerado também* a_0 *como primeiro termo de uma PA, em vez de* a_1*. Neste caso, o resultado anterior é* $a_n = a_0 + nr$*, podendo ser facilmente constatado. Mais geralmente,* $a_m = a_n + (m-n)r$*, com* $m \geq n$*, ou seja, para atingir* a_m *a partir de* a_n*, basta somar* $m-n$ *vezes a razão* r *com* a_n*.*

Exemplo 1.4.2. *Qual o vigésimo quinto termo da PA* $(4, 7, 10, 14, 17, ...)$*? Pelo teorema anterior,* $a_n = 4+3(n-1)$*, uma vez que* $a_1 = 4$ *e* $r = 7-4 = 3$*. Daí,* $a_{25} = 4+3(25-1) = 76$*.*

Agora iremos pensar no valor da soma dos n primeiros termos de uma PA.

Teorema 1.4.2. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ *representa a soma dos n primeiros termos de uma PA* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$*.*

Demonstração. Escrevemos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ e $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1$. Assim,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_n + a_1),$$

onde cada uma das n parcelas do lado direito da equação é $a_k + a_{n-(k-1)}$, com $1 \leq k \leq n$. Por outro lado, pela observação anterior, podemos escrever

$$a_k = a_1 + (k-1)r \text{ e } a_n = a_{n-(k-1)} + (k-1)r.$$

Portanto, $a_k + a_{n-(k-1)} = [a_1 + (k-1)r] + [a_n - (k-1)r] = a_1 + a_n$ e

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_n + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) \\ &= (a_1 + a_n)n. \end{aligned}$$

Logo, $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. □

Exemplo 1.4.3. *Suponha que se guarde inicialmente* R\$ 50,00 *e a cada mês subsequente R\$ 10,00 a mais do que o mês anterior, isto é, formamos a PA* $(50, 60, 70, 80, ...)$*. Desta forma, qual será o total guardado em* 3 *anos? Temos* $a_1 = 50$ *e* $r = 10$*, e, por seguinte,* $a_{36} = a_1 + (36-1)r = 50 + 35 \cdot 10 = 400$*. Logo, o total guardado em* 3 *anos será* $S_{36} = \dfrac{(50 + 400)36}{2} =$ R\$ 8.100,00.

Começaremos o tratamento para um outro tipo de sequência, onde a sua taxa de variação definida a seguir é constante.

Dados números reais a e b com $a \neq 0$, a razão $\frac{b-a}{a}$ é chamada *taxa de variação relativa* de a para b. Por exemplo, suponha que o preço de um produto de R\$ 200,00 aumentará 10% ao ano. Assim, se P_n for o preço do produto no ano n, então $P_n = P_{n-1} + 0,1P_{n-1} = 1,01P_{n-1}$ para todo natural n e a taxa de variação de P_n é $\dfrac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = \dfrac{1,01P_n - P_n}{P_n} = 0,1 = 10\%$. Generalizamos essas ideias no teorema seguinte, considerando a taxa de variação de a_n sendo a taxa de variação de a_n para a_{n+1}.

Teorema 1.4.3. *Cada termo de uma sequência a_n tem taxa de variação constante igual a i, se, e somente se, $a_{n+1} = (1+i)a_n$, para todo natural n.*

Demonstração. Para todo natural n vale:
taxa de variação constante igual a $i \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} = i \Leftrightarrow a_{n+1} = ia_n + a_n \Leftrightarrow a_{n+1} = (1+i)a_n$. □

Definição 1.4.2. *Uma* ***progressão geométrica (PG)*** *é uma sequência $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tal que o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, chamado de razão, é constante para todo número natural n.*

Observação 1.4.2. *Uma PG a_n de razão $1+i$ fornece $a_{n+1} = (1+i)a_n$. Assim, pelo teorema anterior a_n tem taxa de variação igual a i.*

Exemplo 1.4.4. *As sequências $(40, 32, 25.6, ...)$ e $(100, 105, 110, 25, ...)$ são PG's de razões 0,8 e 1,05, respectivamente, e possuem taxas de variação iguais a -20% e 5%, respectivamente.*

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma PG de razão q. Daí, $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_4}{a_3} = ... = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Logo, $\dfrac{a_2}{a_1} \cdot \dfrac{a_3}{a_2} \cdot \dfrac{a_4}{a_3} \cdot ... \cdot \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q^{n-1}$, isto é, $\dfrac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$. E assim, acabamos de provar o teorema seguinte.

Teorema 1.4.4. *Se a_n é uma PG de razão q, então $a_n = a_1 q^{n-1}$, para todo número natural n.*

Exemplo 1.4.5. *O valor atual de um imóvel é* R\$ 200.000,00 *e está valorizando a uma taxa de* 10% *ao ano. Qual será valor do imóvel daqui a* 10 *anos? Os valores do imóvel ao longo dos anos formam uma PG de razão $1 + i = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$ e seu valor daqui a n anos será $V_n = 200000 \cdot 1{,}1^{n-1}$; em particular, daqui a* 10 *anos, será igual a $V_{10} = 200000 \cdot 1{,}1^9 \cong$* R\$ 417.589,54.

Assim como estabelecemos um resultado para a soma dos n primeiros termos de uma PA, faremos a seguir para uma PG.

Teorema 1.4.5. *$S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$ representa a soma dos n primeiros termos de uma PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão $q \neq 1$. Se $q = 1$ então $S_n = n \cdot a$, onde $a = a_1 = ... = a_n$.*

Demonstração. Multiplicando por q a equação $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ obtemos $qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + ... + qa_{n-1} + qa_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + qa_n$. Consequentemente, $qS_n - S_n = a_n q - a_1 = a_1 q^{n-1} q - a_1 = a_1 q^n - a_1$, ou equivalentemente, $S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$. E assim, o resultado segue naturalmente para $q \neq 1$. A segunda parte do teorema é imediato. □

Observação 1.4.3. *A soma de uma PG com n termos e de razão $q = 1$ é igual a $S_n = n \cdot a$, onde a é termo que se repete.*

Exemplo 1.4.6. *Um pai propõe ao seu filho lhe dar* R\$ 2,00 *no mês de janeiro e, conforme o seu bom rendimento escolar, o dobro do mês anterior para os meses subsequentes. Recebendo essas quantias todos meses, quanto o filho terá recebido em um ano? Estamos diante de uma PG de razão 2 e $a_1 = 2$. Logo, receberá um total de $S_{12} = 2\dfrac{2^{12}-1}{2-1} =$ R\$ 8.190,00.*

Uma situação interessante ocorre quando temos PG com $|q| < 1$. Por exemplo, uma bola é solta da altura de 1 m e, cada vez que bate no solo, sobe metade da distância percorrida anteriormente. Deseja-se saber o total percorrido pela bola após a sua primeira batida no solo. Explicitamente, temos aí uma PG do tipo $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$ com razão $q = \frac{1}{2}$, onde cada termo representa a distância percorrida na subida e descida sequencial, e deseja-se saber o valor de S_n quando n tende a infinito, isto é, o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Neste caso, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1\dfrac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$ metros.

Teorema 1.4.6. *Uma PG de razão q com $|q| < 1$ satisfaz $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$.*

Demonstração. Verifica-se facilmente:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a_1\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q},$$

pois $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ se $|q| < 1$. □

Exemplo 1.4.7. *Um exemplo típico:*

$$0,111... = 0,1 + 0,01 + 0,001 + ... = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... = \frac{0,1}{1-0,1} = \frac{1}{9}.$$

1.5 Binômio de Newton

O muito conhecido binômio de Newton expressa o resultado do desenvolvimento da expressão $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot ... \cdot(a+b)}_{n\ fatores}$, onde a e b são números reais e n um natural. Para tanto daremos algumas notações e resultados preliminares.

Um tipo de produto especial é o produto de todos os números naturais de 1 até n, isto é, $n\cdot(n-1)\cdot ... \cdot 2\cdot 1$. Definimos tal produto como o fatorial de n, denotado por $n!$. Assim,

$$n! := n\cdot(n-1)\cdot ... \cdot 2\cdot 1.$$

Rigorosamente, o fatorial é definido de forma recursiva usando indução:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n\cdot(n-1)!, \text{ para todo } n\in\mathbb{N} \end{cases}.$$

O emprego de fatorial é frequente em problemas de contagem tendo em vista o Princípio Fundamental da Contagem(PFC): se existem a maneiras de tomar uma decisão d_1 e, se tomada a decisão d_1, existem b maneiras de tomar uma decisão d_2, então o número de maneiras de tomar sucessivamente as decisões d_1 e d_2 é ab.

Exemplo 1.5.1. *De quantos modos podemos formar uma fila tendo* 10 *pessoas? A escolha da primeira pessoa pode ser feita de* 10 *maneiras, a segunda de* 9 *maneiras, e seguindo assim, a última pessoa de uma maneira. Ou seja, teremos* $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3.628.800$ *maneiras de formar a fila.*

Generalizando a ideia do exemplo anterior, responderemos à seguinte pergunta: De quantas maneiras podemos ordenar n objetos distintos em fila? Resposta: $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$ maneiras. Aqui, é o chamado na literatura de permutação simples de n objetos, denotado por P_n.

Uma outra situação importante é saber de quantas maneiras podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados, tendo $p \leq n$. Pelo PFC colocamos p objetos distintos em fila de $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(p-1))$ maneiras. Por outro lado, ao permutarmos as $p!$ maneiras de cada uma dessas filas teremos a mesma classe de objetos distintos escolhidos. Portanto, a resposta da nossa investigação é

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(p-1))}{p!}.$$

Tal expressão é denominada de combinação simples de n objetos tomados p **a** p, representada por C_n^p ou $\binom{n}{p}$, e escrita de forma alternativa por

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(p-1))}{p!} \frac{(n-p)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}. \end{aligned}$$

Por convenção, definimos $\binom{n}{0} = 1$.

Exemplo 1.5.2. *Em uma turma do Ensino Médio será formada uma comissão de representantes da turma com* 3 *estudantes com pelo menos um homem. Quantas são as maneiras de escolha da comissão tendo na turma* 12 *homens e* 8 *mulheres? Usaremos comitantemente o PFC e combinação simples: tendo um homem,* $\binom{12}{1} \cdot \binom{8}{2}$ *maneiras, tendo dois homens,* $\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{1}$*; e, tendo três homens,* $\binom{12}{3}$*. Portanto, o números total escolhas é*

$$\binom{12}{1} \cdot \binom{8}{2} + \binom{12}{2} \cdot \binom{8}{1} + \binom{12}{3} = 12 \cdot 28 + 66 \cdot 8 + 220 = 1084.$$

Uma relação importante com os números $\binom{n}{p}$ está no teorema seguinte.

Teorema 1.5.1 (Relação de Stifel)**.** *Se n é um número natural e p um inteiro não-negativo, com $p \leq n$, então $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)(n-(p+1))} + \frac{n!}{(p+1)p!(n-(p+1))!} \\ &= \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(n-p)(p+1)p!(n-(p+1))!} = \frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.5.2 (Binômio de Newton)**.** *Se a e b são números reais e n um número natural, então*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Demonstração. Primeiramente observe que $(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot ... \cdot (a+b)}_{n \ fatores}$. Daí, denominando a e b de literais, $(a+b)^n$ é a soma de monômios em n literais de a e b, isto é, $a^j b^i$ com $j+i=n$, ou $a^{n-i}b^i$, cujos coeficientes iremos determinar a seguir. Agora afirmamos que $0 \leq i \leq n$. De fato: o produto $a^{n-i}b^i$ é obtido pela multiplicação ao tomar uma literal em cada fator $a+b$, e sendo assim, podemos escolher a literal b em i fatores, com $0 \leq i \leq n$. Consequentemente, fixado i, como temos n fatores, podemos tomar $\binom{n}{i}$ modos a escolha da literal b nos n fatores $a+b$ se $i \neq 0$; e assim, cada monômio $a^{n-i}b^i$ aparecerá $\binom{n}{i}$ vezes (no caso $i=0$, o monômio $a^{n-i}b^i$ surge uma única vez). Portanto, fixado i, cada monômio explicitado acima é do tipo $\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$. E, por fim, variando o valor de i, obtemos

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i.$$

(*Outra demonstração, usando indução*): Se $n=1$ então

$$\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}a^{1-i}b^i = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = 1a + 1b = a+b = (a+b)^1.$$

Logo, é verdadeiro para $n = 1$. Agora suponha por hipótese de indução que seja válido para k, e provemos a validade para $k+1$, isto é, $(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k(a+b) \\
&= (a+b)^k a + (a+b)^k b \\
&\overset{h.i}{=} \left[\binom{k}{0}a^k b^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 ... + \binom{k}{k-1}a^1 b^{k-1} + \binom{k}{k}a^0 b^k\right] a \\
&+ \left[\binom{k}{0}a^k b^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 ... + \binom{k}{k-1}a^1 b^{k-1} + \binom{k}{k}a^0 b^k\right] b \\
&= \left[\binom{k}{0}a^{k+1} b^0 + \binom{k}{1}a^{k}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k}{k-1}a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k}a^1 b^k\right] \\
&+ \left[\binom{k}{0}a^k b^1 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + ... + \binom{k}{k-1}a^1 b^{k} + \binom{k}{k}a^0 b^{k+1}\right] \\
&= \left[\binom{k}{0}a^{k+1} b^0\right] + \left[\binom{k}{0}a^k b^1 + \binom{k}{1}a^k b^1\right] + ... + \left[\binom{k}{k-1}a^1 b^k + \binom{k}{k}a^1 b^k\right] \\
&+ \left[\binom{k}{k}a^0 b^{k+1}\right] \\
&\overset{R.Stifel}{=} \binom{k}{0}a^{k+1}b^0 + \binom{k+1}{1}a^k b^1 + ... + \binom{k+1}{k}a^1 b^k + \binom{k}{k}a^0 b^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}a^{k+1}b^0 + \binom{k+1}{1}a^k b^1 + ... + \binom{k+1}{k}a^1 b^k + \binom{k+1}{k+1}a^0 b^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i.
\end{aligned}$$

Portanto, é válido para $k+1$, e, consequentemente, vale para todo natural n. □

Os números $\binom{n}{p}$, conforme acima, são chamados de **números binomiais** ou **coeficientes binomiais**. Usaremos o Binômio de Newton para provar resultados referentes aos sistemas de amortização estudados nesse texto.

Teorema 1.5.3 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, e i um número real positivo. Então $(1+i)^n > 1 + ni$.*

Demonstração. Pelo desenvolvimento binomial de Newton $(1+i)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{i} i^p$. E sendo $n \geq 2$, obtemos $(1+i)^n = 1 + ni + \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{i} i^p > 1 + ni$. □

Capítulo 2

Conceitos da Matemática Financeira

2.1 Porcentagem

Dado um número real na forma $\frac{a}{b}$, ao colocarmos $\frac{a}{b} = x$, obtemos $a = x \cdot b$. Assim, dizemos que x representa *o quanto a é de b* ou *a fração que a é de b*. Escrevendo $\frac{3}{5} = 0,6$, temos que 3 é 0,6 de 5. Um caso especial é quando o denominador b é igual a 100: saber o quanto a é de 100. Neste caso, dizemos que o número $\frac{a}{100}$ está na forma de *porcentagem*, escrevendo $\frac{a}{100} = a\%$, onde lemos *a porcento*. Segue imediatamente: $x = 100x\%$ para todo número real x. Exemplificando, 0,215 = 21,5%. Um cálculo: encontrar 25% de R$ 1.200,00; a resposta é $\frac{25}{100} \cdot 1200 =$ R$ 300,00.

A seguir não daremos uma tratamento sistemático para o ensino de porcentagem, porém apresentaremos algumas situações significativas em que nos deparamos no dia-a-dia, as quais conduzem a importantes habilidades que o estudante no Ensino Médio deve adquirir.

1. Um valor A aumentado ou diminuído de uma porcentagem $i = k\%$, conforme respectivamente, $i > 0$ e $i < 0$, resulta em $A + iA = (1 + i)A$. O fator $1 + i$ é dito fator de variação de A com taxa i.

2. Um comerciante aumentou o preço P de uma geladeira em 10% e, após uma certo período de tempo, diminui o valor em 10%. O valor final é maior, menor ou igual a P? No primeiro momento, obtemos $(1+0{,}1)P = 1{,}1P$, e no segundo, $(1-0{,}1)1{,}1P = 0{,}z9 \cdot 1{,}1P = 0{,}99P = 99\%P$; portanto, menor. Observe que o valor final é o mesmo se primeiro diminuir e depois aumentar. Generalizando tais ideias podemos pensar em um valor A sujeito a n variações de taxas $i_k (k = 1, 2, ..., n)$. Independente da ordem, o valor final será

$$F = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot ... \cdot (1 + i_n) \cdot A.$$

Em particular, se todas as taxas são iguais a i então $F = A(1+i)^n$, o que foi mencionado antecipadamente na introdução da seção de função exponencial, fórmula esta normalmente apresentada nos livros didáticos na seção de Juros Compostos. No entanto, tal fórmula como acabamos de ver pode ser trabalhada antes mesmo da introdução de juros. Nas palavras do professor Amorim: "Dessa forma após um trabalho consistente com problemas de variações sucessivas, a introdução do conceito e da fórmula do regime de juros compostos pode acontecer de forma mais natural e imediata para os alunos"[1, p.17]. Outros bons exemplos do cotidiano poderiam ser calculados: variação do salário mínimo, do dólar e do barril de petróleo e a inflação acumulados em algum período de meses ou anos. Tais exemplos possibilitam ao professor trabalhar com o estudante, proporcionando-lhe atuar de forma ativa, interdisciplinar e tecnológica, fazendo bom uso da pesquisa, levantamento e tratamento de dados, inferências e conclusões, habilidades imprescindíveis para o estudante do Ensino Médio.

3. Nas notações anteriores é de interesse se perguntar o valor de uma taxa I tal que $F = (1 + I)V$. Para isso devemos ter

$$(1 + I)V = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n) \cdot V$$

$$\Leftrightarrow (1 + I) = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n). \tag{2.1}$$

Observe que a equação 2.1 independe de V. Caso prático: um trabalhador recebe aumentos sucessivos de 5%, 9% e 6%; qual o percentual acumulado de aumento? Fazendo $(1+I) = (1+0{,}05)\cdot(1+0{,}09)\cdot(1+0{,}06)$, obtemos $I = 21{,}317\%$. Esse tipo de situação poderia levar a um erro: dar como resposta a soma dos percentuais, isto é, 20%.

4. Um lojista de vestuário decide diminuir os preços dos produtos em $i = k_1\%$, e, após alguns dias em liquidação, irá recolocá-los aos preços originais. De quanto por cento, ele deverá aumentar cada produto? Seja $j = k_2\%$ a taxa procurada e seja P o preço de um produto antes da liquidação. Logo, temos que ter $(1 + j) \cdot (1 - i)P = P$. Portanto, $j = \frac{i}{1-i}$. No último capítulo iremos propor uma sequência didática dentro de descontos e aumentos sucessivos.

2.2 Juros simples e juros compostos

Ao término de uma aplicação financeira de um valor monetário C, chamado de **capital**, em um período de tempo, receberemos de volta C mais uma remuneração J, denominada de **juro**, pela aplicação. O valor $M = J + C$ é chamado de **montante** e taxa $i = \frac{J}{C}$, a **taxa de juros** referida ao período da operação. Se $C = 120$ e $M = 162$, em dois meses, então $J = 162 - 120 = 42$ e $i = \frac{42}{120} = 35\%$ ao bimestre.

Algumas abreviações serão usadas: ao dia, ao mês, ao bimestre, ao trimestre, ao semestre e ao ano serão representados por a.d., a.m., a.b., a.t., a.s., a.a., respectivamente.

A forma como o juro é calculado nas operações financeiras ao final de cada período, define a evolução do capital no tempo. Se o juro é calculado sempre sobre o capital inicial e é diretamente proporcional à taxa e ao tempo, então dá-se o nome de **juros simples**. E se calculado sobre o montante do período anterior, chamamos de **juros compostos**.

No que segue, consideremos uma operação de n períodos, sendo aplicada uma taxa de juros i referida a um período.

No regime de juros simples, ao final de cada período teremos um juro de Ci; somando todos os juros, obtemos

$$J = Cin.$$

Por seguinte, o montante, agora denotado por F e chamado também de *valor futuro*, é igual a

$$F = C + Cin = C(1 + in), \tag{2.2}$$

representando uma função afim com domínio restrito. Por outro lado, no regime de juros composto o montante é dado por

$$F = C(1 + i)^n. \tag{2.3}$$

Com efeito, como já vimos anteriormente, o fator $(1 + i)$ representa a variação de qualquer valor Q com taxa i. Logo, passando um período teremos $C(1 + i)$. No seguinte, $(C(1 + i))(1 + i) = C(1 + i)^2$. E assim sucessivamente. Logo, após n períodos (ou n variações percentuais sucessivas), obtemos

$$F = C\underbrace{(1 + i)\cdot(1 + i)\cdot \ldots \cdot(1 + i)}_{n-fatores} = C(1 + i)^n,$$

representando um função tipo exponencial.

Exemplo 2.2.1. *Como evolui um capital* $C =$ R\$ 250,00 *ao longo de* 5 *meses a uma taxa* $i = 10\%$ *a.m.? A Tabela 2.1 responde.*

Observação 2.2.1. *No regime simples, F forma uma PA de razão Ci, pois $C(1 + (n + 1)i) - C(1 + ni) = Ci$, de acordo com a definição 1.4.1. Já no regime composto, F forma naturalmente uma PG de razão $1 + i$, conforme definição 1.4.2.*

n	0	1	2	3	4	5
F a juros simples	250,00	275,00	300,00	325,00	350,00	375,00
F a juros compostos	250,00	275,00	302,50	332,75	366,03	402,63

Tabela 2.1: Evolução do capital a juros simples e a juros compostos.

Agora surgem algumas perguntas?

1. Até aqui consideramos o valor de n um número inteiro não negativo. Porém, na prática nem sempre é assim, a exemplo dos juros pagos no cheque especial, no atraso de contas ou no investimento CDB (Certificado de Depósito Bancário), podendo ocorrer em frações do período da taxa, como 5 dias ou 4 meses e 12 dias para uma taxa mensal. Neste contexto, como calcular F?

2. O maior valor de F ocorrerá em qual regime?

Vejamos as respostas:

1.
   - Regime simples: Nesse regime taxas proporcionais produzem o mesmo juro, como veremos na próxima seção. Assim, podemos tomar uma taxa proporcional a um período da taxa dada. Utilizado-se a taxa diária adota-se a convenção comercial ou a exata. Na primeira considera-se o ano com 360 dias e um mês com 30 dias; na segunda, 365 dias o ano. Tomando uma dívida de R\$ 3.000,00 a juros de 6% *a.m.*, qual o juro a ser pago em 25 dias? Será de $J = 3000 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{25}{30} =$ R\$ 150,00. De maneira geral, fica válida a fórmula 2.2 para n não-inteiro.

   - Regime composto: Existem duas convenções: a *exponencial* e a *linear*. Na exponencial calcula-se o montante correspondente à parte inteira do período, e a esse resultado aplicam-se os juros compostos equivalente ao período não-inteiro. Vejamos. Seja $\frac{a}{b}$, com $a < b$, a parte não inteira. A taxa i_b equivalente ao tempo $1/b$, usando o Teorema 2.3.2, satisfaz $1 + i = (1 + i_b)^b$, ou

     $$1 + i_b = (1 + i)^{1/b}.$$

     E capitalizando pelos a períodos, obtemos

     $$(1 + i_b)^a = \left[(1 + i)^{1/b}\right]^a = (1 + i)^{a/b}.$$

     Portanto, tomando o montante $C(1+i)^n$, encontrado na parte inteira, aplicando a taxa correspondente à outra parte, obtemos

     $$F = [C(1 + i)^n]\,(1 + i_b)^a = [C(1 + i)^n]\,(1 + i)^{a/b} = C(1 + i)^{n+\frac{a}{b}}.$$

Com isso a fórmula 2.3 também é válida para períodos de n não-inteiro. Quanto à convenção linear, aplicam-se juros simples à parte não-inteira conforme vimos anteriormente. E assim, mantendo-se as notações e tomando k o tempo equivalente a $\frac{a}{b}$ na unidade temporal de i, obtemos

$$F = [C(1+i)^n]\,(1+ki) \tag{2.4}$$

Exemplificando, seja C = R\$ 4.000,00 uma dívida a juros de $i = 3\%$ $a.m.$ atrasada a 2 meses e 10 dias. Pela convenção exponencial, o valor a ser pago

$$F_{exp} = 4000(1+0,03)^{2+\frac{10}{30}} = \text{R\$ } 4.285{,}62,$$

é menor do que pela convenção linear com valor

$$F_{lin} = 4000(1+0{,}03)^2(1+\frac{10}{30}0{,}03) = \text{R\$ } 4.286{,}04.$$

2. Denotemos F_s o montante a juros simples e F_c a juros compostos. Nota-se em cálculos anteriores que pode ocorrer três possibilidades: $F_s = F_c$, $F_s > F_c$ e $F_s < F_C$, dependendo do valor de n. Para precisar quando ocorre cada situação, faremos a análise geométrica, a qual é acessível para a prática de ensino-aprendizagem no Ensino Médio. Os gráficos das funções $F_s(n) = C(1+ni)$ e $F_c(n) = C(1+i)^n$, para todo n real não-negativo, estão apresentados na Figura 2.1 da qual concluímos que:

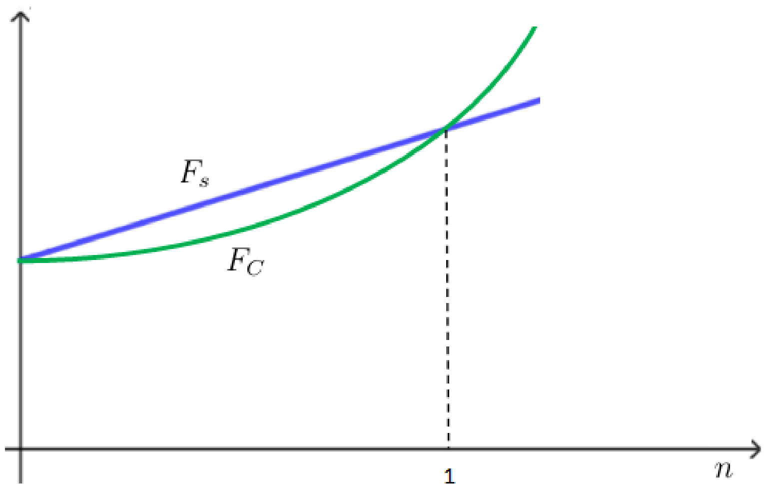


Figura 2.1: Comparativo do montante a juros compostos e a juros simples.

- $F_s = F_C \Leftrightarrow n = 0$ ou $n = 1$;
- $F_s > F_C \Leftrightarrow 0 < n < 1$;
- $F_s < F_C \Leftrightarrow n > 1$;

- Na prática precisamos de um pouco mais de análise, combinando as duas últimas conclusões com as convenções exponencial e linear: quando $0 < n < 1$ o juro é maior pelo regime de juros simples; se $n > 1$ é um inteiro, obtém-se maior valor pelo regime composto; e por último, $n > 1$ não inteiro, existe a possibilidade de combinar os dois regimes (convenção linear, equação 2.4), onde o recebimento de juros é maior, pois na parte não-inteira(menor do que 1) o juro é maior, de modo perceptível na Figura 2.2, onde é mostrado, em cor verde, o gráfico de F na convenção linear e, tracejado em azul, o da convenção exponencial. E aí é razão das instituições financeiras no

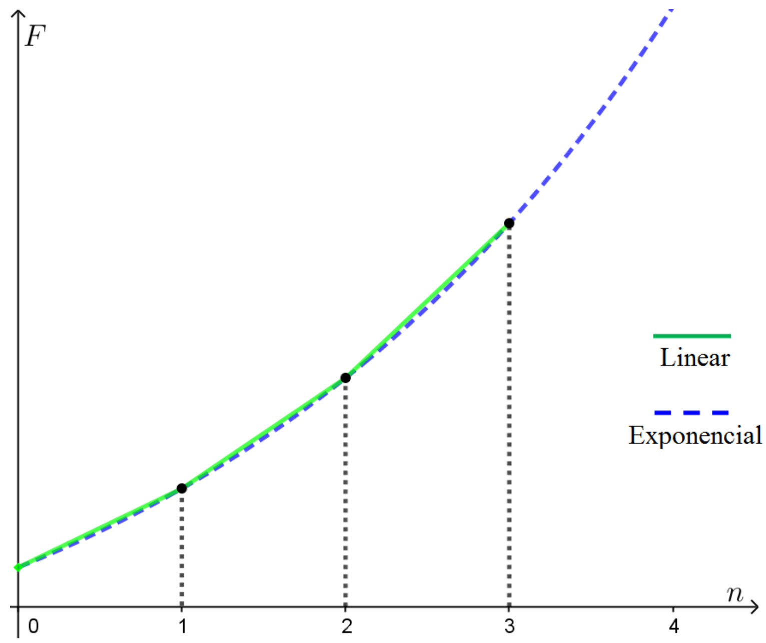


Figura 2.2: Convenções linear e exponencial.

momento da cobrança de juros para os seus clientes optarem pela convenção linear (se $n > 1$) e o modelo de juros simples quando $0 < n < 1$. Dessa forma, importante também falar, que os juros simples são de fato usados com frequência na prática financeira somente nos tempos fracionários menores do que 1, e portanto, fica sem sentido apresentar aleatoriamente aos estudantes problemas e mais problemas de juros simples, pois do contrário, seria apenas cálculos em uma economia irreal, o que não traz benefício, onde pretende-se ensinar além da matemática financeira a *Educação Financeira* (um olhar crítico e consciente). Destacamos, por fim, que esta análise matemática pormenorizada e reunida não é encontrada nas literaturas, de forma que este texto contribui para o embasamento técnico de um tópico tão comum no dia-a-dia de operações financeiras.

2.3 Taxas de Juros: nominal, efetiva e equivalente

Quando o juro é incorporado ao capital dizemos que a taxa está sendo *capitalizada*. Uma taxa é dita **nominal** quando é capitalizada no período diferente a que se refere a taxa de juros. São taxas nominais: 21% $a.a.$ capitalizada mensalmente e 60% $a.m.$ capitalizada diariamente. A taxa **efetiva** é quando a capitalização ocorre em um período igual a que se refere a taxa, a exemplo de 32% $a.m.$ capitalizada mensalmente.

Comparando duas taxas podemos classificá-las em **proporcionais** ou **equivalentes**. A primeira é quando a razão entre elas é igual à razão dos respectivos períodos aos quais elas se referem, reduzidos à uma mesma unidade de tempo, ou seja, se i_1 é a taxa referente a um período n_1 proporcional a uma taxa i_2 referente a um período n_2, com n_1 e n_2 em mesma unidade de tempo, então

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Taxas como 12% $a.a.$ e 6% $a.s.$ são proporcionais, pois $\frac{12\%}{6\%} = 2 = \frac{2 \text{ semestres}}{1 \text{ semestre}}$. E se $n_2 = k \cdot n_1$, onde k é a fração que n_2 é de n_1, então $i_2 = k \cdot i_1$, o que nos permite encontrar uma taxa proporcional. Qual a taxa mensal proporcional a 24% $a.a.$? Sendo 1 mês = 1/12 ano, então 24% $a.a. = 1/12 \cdot 24 = 2\%$ $a.m.$.

Dada uma taxa nominal i, ao efetuarmos o cálculo da capitalização, é preciso (*por convenção*) transformá-la na taxa proporcional, neste caso também taxa efetiva, referente ao período de capitalização. Assim, para uma capitalização de 6% $a.s$ capitalizada mensalmente, utilizamos a taxa proporcional de 1% $a.m.$.

Já as taxas **equivalentes** ocorrem quando aplicadas a um mesmo capital, em um mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo juro (ou montante).

Teorema 2.3.1. *No regime de capitalização simples, duas taxas são equivalentes se, e somente se, elas são proporcionais.*

Demonstração. Sejam m_1 e m_2 as unidades distintas de tempo referidas às taxas i_1 e i_2, respectivamente. Existe k real tal que $\frac{1}{k}\, m_2 = m_1$, ou seja, $1/k$ é a fração que a unidade de tempo m_2 é de m_1. Assim, reduzindo as duas taxas a unidade comum m_2, os valores $1/k$ e 1 são os períodos das taxas i_1 e i_2 na unidade de tempo m_2, respectivamente. Agora seja t o tempo de uma aplicação de um capital C. Escrevendo t nas unidades m_1 e m_2 obtemos $t = k_1\, m_1 = k_2\, m_2$, onde $k_1 \neq k_2$. Logo, $k_1 \frac{1}{k} m_2 = k_2 m_2$, o que implica $k_1 = k \cdot k_2$.

Com essas considerações obtemos:

$$\begin{aligned} i_1 \text{ e } i_2 \text{ são proporcionais} &\Leftrightarrow \frac{i_1}{i_2} = \frac{1/k}{1} \\ &\Leftrightarrow i_2 = ki_1 \Leftrightarrow Ck_2i_2 = Ck_2ki_1 \\ &\Leftrightarrow Ck_2i_2 = Ck_1i_1 \\ &\overset{capit.simples}{\Leftrightarrow} J_1 = J_2 \Leftrightarrow i_1 \text{ e } i_2 \text{ são equivalentes.} \end{aligned}$$

□

Na capitalização composta, o teorema a seguir nos diz quando duas taxas são equivalentes.

Teorema 2.3.2. *Sejam I e J taxas referidas às unidades de tempos u_I e u_J, respectivamente. Se $u_I = nu_J$ então J e I são equivalentes se, somente se, $1 + I = (1 + J)^n$.*

Demonstração. Seja C um capital aplicado por um tempo k. Logo,

$$J \text{ e } I \text{ são equivalentes} \Leftrightarrow C(1 + I)^1 = C(1 + J)^n \Leftrightarrow 1 + I = (1 + J)^n.$$

□

Exemplo 2.3.1. *Qual a taxa mensal I equivalente a 24% a.a.? Basta fazer $1 + I = (1+0{,}24)^{\frac{1}{12}}$, o que implica, $I \cong 1{,}809\%$ a.m.. E qual a taxa anual $\widetilde{I}$ equivalente a 2% a.m.? Neste caso, $1+\widetilde{I} = (1+0{,}02)^{12}$ implica $\widetilde{I} \cong 26{,}824\%$ a.a.. Assim, percebemos que 2% a.m. é proporcional a 24% a.a., mas não são equivalentes.*

Teorema 2.3.3. *Na capitalização composta, taxas equivalentes nunca são taxas proporcionais.*

Demonstração. Consideremos as notações descritas no teorema anterior. Suponha por absurdo que as taxas sejam de ambos tipos. Se I e J são proporcionais então $\frac{I}{J} = \frac{n}{1}$, e, se I e J são equivalentes então $1 + I = (1 + J)^n$. Por outro, pela desigualdade de Bernouli (Teorema 1.5.3), temos que

$$\frac{I}{J} = \frac{(1 + J)^n - 1}{J} \overset{n>1}{>} \frac{1 + nJ - 1}{J} = n.$$

Uma contradição. Portanto, no regime de capitalização composta taxas equivalentes não são proporcionais. □

Portanto, torna-se desnecessário falar em taxas proporcionais, e sim, apenas em taxas equivalentes, conforme também observa o professor José Dutra Sobrinho:

> A proporcionalidade linear é uma característica da capitalização simples. Por isso, entendemos que o fato de "taxas proporcionais"serem apresentadas como parte de um programa de matemática financeira, apenas confunde o aluno ou o leitor, que pensa tratar-se de mais um tipo de taxas de juros [15, p.91].

Agora iremos fazer um estudo do impacto ao anunciar a taxa nominal e não a efetiva. Em particular, consideremos uma taxa i anual capitalizada mensalmente. Logo, a taxa efetiva mensal é $\frac{i}{12}$, e a equivalente anual é $I = (1 + i/1200)^{12} - 1$, com i na forma percentual. Alisando os gráficos das funções $f(i) = i$ e $g(i) = 100\left((1 + i/1200)^{12} - 1\right)$ (g em percentual), indicados na Figura 2.3, representando as taxas nominal e efetiva em função da taxa nominal i, respectivamente, podemos dizer que:

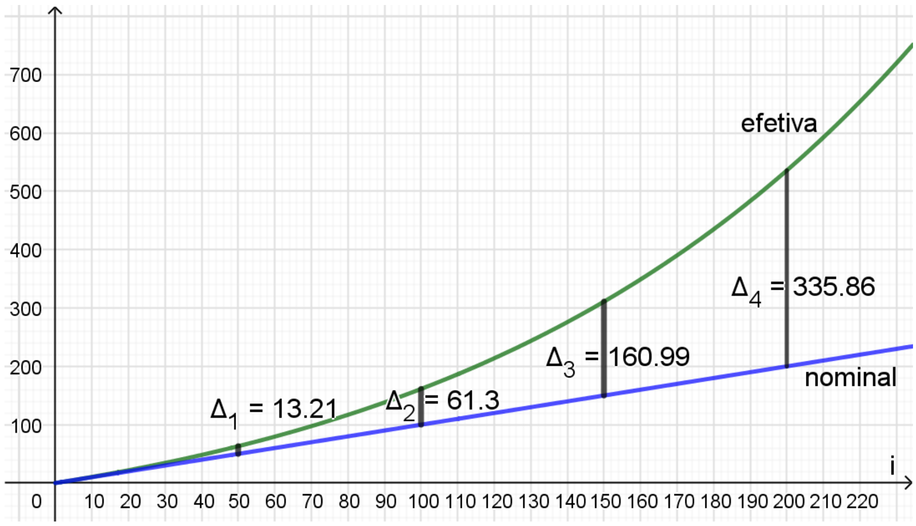


Figura 2.3: Taxa nominal e taxa efetiva.

- A taxa de variação da diferença entre as taxas ($\Delta = g(i) - f(i)$) é crescente;
- $\Delta = g(i) - f(i) \cong 0$ (taxa nominal anual $\cong$ taxa efetiva anual) se, e somente se, $i \cong 0$.
- Taxa nominal de 150,0% (12,5% $a.m.$), bem comum nos cartões de crédito, representa uma taxa efetiva anual 311,0% - mais do que o dobro.
- Percebe-se que o uso de taxas nominais pode estar escondendo altíssimas taxas efetivas.

Observação 2.3.1. *Se as taxas são capitalizadas em diferentes unidades de tempo, então pode de ocorrer taxas nominais menores produzirem taxas efetivas maiores. Taxas nominais de* 15,5% *a.a. capitalizada trimestralmente e* 15,7% *a.a. capitalizada semestralmente produzem taxas equivalentes anuais de 16,42% e 16,32%, respectivamente. Assim, para* *um investidor uma taxa nominal mais alta não é necessariamente a melhor, a menos que a capitalização ocorra na mesma unidade de tempo.*

De uma forma mais geral, se k é o número de capitalizações para 1 período da taxa nominal i, então, pelo Teorema 2.3.2, a sua taxa efetiva equivalente I por n períodos da taxa i, é tal que

$$I = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1,$$

sendo que na prática normalmente trabalha-se com $n = 1$ (situação em que i e I estão na mesma unidade de tempo). Com isso, podemos nos perguntar: como o valor de I se comporta quando aumentamos a frequência da capitalização? Sendo o juro incorporado ao capital (C) a cada capitalização, é natural ver que $f(k) := I$ é uma função crescente, e por seguinte, o montante $M = C\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k\times n}$ também. Veja a Tabela 2.2 correspondente a $i = 12\%$ *a.a.* e $n = 1$. Agora, esse crescimento é ilimitado? A princípio poderia se pensar

Frequência	Anual($k = 1$)	Semestral ($k = 2$)	Mensal ($k = 12$)	Diária($k = 360$)
I(anual)	12,00%	12,36%	12,68%	12,74%

Tabela 2.2: Diferentes períodos de capitalização.

que sim. Mas, não é! E se fizermos a capitalização por hora, por minuto, etc.? Usando a ideia de limite, obtemos

$$\lim_{k\to+\infty} I = \lim_{k\to+\infty}\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1 \overset{\frac{i}{k}=\lambda}{=} \lim_{\lambda\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda in} - 1 = e^{in} - 1,$$

onde $e := \lim_{\lambda\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda}$ é o número irracional de valor 2,718281828459... . Assim, $I \leq e^{in} - 1$, para qualquer frequência k. E é ao passar esse limite que denominamos de **regime capitalização contínua** com **taxa efetiva instantânea** $\delta := e^{in} - 1$. Aqui, i é comumente chamada de **taxa instantânea**, pois ela é a responsável por gerar o montante $M = \lim_{k\to+\infty} C\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k\times n} = Ce^{in}$, o qual cresce proporcionalmente a si mesmo, onde i a constante de proporcionalidade: de fato, por derivada, $\frac{dM}{dn} = Cie^{in} = iM$. Na tabela anterior, tomando a frequência contínua, segue $I = e^{0,12} - 1 = 12{,}75\%$.

E, em última análise, sabemos que o montante obtido na capitalização contínua é maior do que na composta. E assim, como dito em [10, p.150]: "Este fato torna conveniente a determinação de uma taxa de juros efetiva que permita fazer-se a equivalência entre a capitalização contínua e a composta". Sendo j essa taxa efetiva, descobriremos sua taxa instantânea equivalente I, tomando C um capital aplicado em n períodos (e vice-versa). Daí, pela equivalência de taxas, denotando o logaritmo de b na base e por $\ln b$, devemos ter:

$$C(1 + j)^n = Ce^{In} \Leftrightarrow j = e^I - 1 \Leftrightarrow I = \ln(1 + j)$$

(um bom uso de logaritmo).

Exemplo 2.3.2. *Qual a taxa instantânea equivalente a uma efetiva de $j = 12\%$ a.a.? A resposta é $I = \ln(1 + 0,12) \cong 11,33\%$. E sempre $I < j$; o que faz sentido, pois na capitalização contínua o juro é incorporado "mais vezes", logo uma menor taxa nesse regime é necessária para produzir o mesmo montante no outro regime com um menor número de capitalizações. Uma prova formal é possível com o Cálculo Diferencial. Fazendo $f(x) = e^x - x - 1$, temos que $f(0) = 0$, e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Por outro lado, $f'(2) > 0$. Logo, como consequência do Teorema do Valor Intermediário, $f'(x) > 0$ qualquer que seja x real positivo. Portanto, f é crescente para $x > 0$. E daí, $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. Logo, $e^x - 1 > x$, ou, tomando $x = I$, $j = e^I - 1 > I$.*

Observação 2.3.2. *Um cuidado deve-se ter no cálculo de taxas equivalentes! Ao se aproximar o valor de uma taxa equivalente, os resultados oriundos dessa aproximação estarão com erros, ainda que "pequenos", podendo ficar grandes devido ao comportamento exponencial. Assim, é sugestivo trabalhar com a expressão da taxa equivalente, e no final das contas fazer a aproximação numérica. Ou, quando em cálculos manuais, não usar poucas casas decimais.*

2.4 Taxas aparente, real e inflacionária

O poder real de compra de uma determinada quantia monetária depende da época a ser considerada. A quantia de R\$ 100,00, hoje utilizada na compra de uma quantidade x de produtos, poderá não ser suficiente daqui a um ano, pois a **inflação**, taxa de elevação de preços, possivelmente diminuirá o seu poder de compra. Digamos, para uma inflação de 5%, necessitaremos de R\$ 105,00 para adquirir a mesma quantidade x. Por outro lado, caso aquela quantia original sofra uma reajuste de 10% no mesmo período, ela passará a valer R\$ 110,00. Logo, $\frac{110-105}{105} = 0{,}0476 = 4{,}76\%$ é a taxa real de aumento do poder de compra dos R\$ 100,00, e não os $10\% - 5\% = 5\%$, o que talvez alguém poderia pensar.

Generalizando tais ideias, se um valor Q_0 tem uma variação de i_a, denominada **taxa aparente**, referente a um período de **taxa inflacionária** i_i, desejamos saber qual é a taxa de variação da quantia Q_0 reajustada por i_a em relação ao reajuste inflacionário de Q_0, aqui denominada de **taxa real**, i_r. E, no próximo teorema, fica estabelecida uma relação entres essas três taxas.

Teorema 2.4.1. *Nas notações anteriores,*

$$i_r = \frac{i_a - i_i}{1 + i_i}. \tag{2.5}$$

Demonstração. Um valor Q_0 elevado por uma taxa i_a, em um período de tempo, passa a valer $Q_0(1+i_a)$. E, Q_0, no mesmo período de tempo, ajustado por uma taxa inflacionária de i_i, valerá $Q_0(1+i_i)$. Logo,

$$\begin{aligned} i_r &= \frac{Q_0(1+i_a) - Q_0(1+i_i)}{Q_0(1+i_i)} = \frac{Q_0}{Q_0}\left[\frac{1+i_a}{1+i_i} - \frac{1+i_i}{1+i_i}\right] = \\ &= \frac{(1+i_a)}{1+i_i} - 1 = \frac{1+i_a-1-i_i}{1+i_i} \\ &= \frac{i_a - i_i}{1+i_i}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 2.4.1. *Funcionários de uma empresa recebem um reajuste salarial de* 15% *após uma inflação acumulada de* 8% *no período em que os salários ficaram sem aumento. Qual o aumento salarial real? De acordo com o teorema anterior,* $i_r = \frac{0{,}15-0{,}08}{1+0{,}08} = 6,48\%$. *E se o reajuste fosse de* 5%*? Teríamos* $i_r = \frac{0{,}05-0{,}08}{1+0{,}08} = -2,78\%$, *uma valor negativo, significando uma perda salarial de* 2,78%, *ou seja, uma diminuição do poder de compra. E, por último, para a mesma inflação, de quanto deveria ser o reajuste salarial para se ter um aumento real de* 16%*? Fazendo* $0{,}16 = \frac{i_a-0{,}08}{1+0{,}08}$ *obtemos* $i_a = 25{,}28\%$.

Observação 2.4.1. *As taxas real, aparente e inflacionária podem assumir valores negativos. Se* $i_i < 0$ *é dito que houve uma* ***deflação***, *significando uma redução no índice geral de preços ao consumidor.*

Agora faremos algumas análises da relação $i_r = \dfrac{i_a - i_i}{1+i_i}$:

1. Se $i_a = i_i$ então $i_r = 0$. O que em caso de salário, o aumento só foi suficiente para restabelecer o poder de compra comparada a inflação, sem recuperar as perdas ocorridas no período sem reajuste. E mais, um restabelecimento praticamente instantâneo, pois logo em seguida ao reajuste, em uma economia de inflação não-nula, os preços já subirão novamente. Vale a recíproca.

2. Se $i_a > i_i$ então $i_r > 0$; e se $i_a < i_i$ então $i_r < 0$. No primeiro caso, dizemos que houve um aumento real, e no segundo, uma perda real. Em particular, se $i_a > i_i = 0$ (ausência de inflação), então todo ganho produzido pela taxa aparente representa o aumento real.

3. Quando $i_a > i_i$, alguns menos entendidos da matemática, consideram $i_r = i_a - i_i$, o que não é verdade por (2.5). Por exemplo, um salário após um ano sofre reajuste de $i_a = 10\%$ referente a um período inflacionário de $i_i = 7\%$. Poderia-se pensar que $i_r = 3\%$, porém, $i_r = \frac{0{,}1-0{,}07}{1+0{,}07} = \frac{0{,}03}{1{,}07} = 2{,}80\%$, o que é menor do que os 3% pensados.

4. Pelo discutido no item 3, surge uma pergunta: se $i_r \neq 0$, qual o percentual da diferença $i_a - i_i$ resulta em i_r? O que é facilmente respondido por:

$$i_r = \frac{i_a - i_i}{1 + i_i} \iff \frac{i_r}{i_a - i_i} = \frac{1}{1 + i_i}.$$

Daí, $\frac{1}{1+i_i}$ é o valor procurado. Por exemplo, dado $i_i = 4\%$, então $\frac{1}{1+0{,}04} = 96{,}15\%$ de $i_a - i_i$ será igual a i_r. E para $i_i = 30\%$, então $\frac{1}{1+0{,}3} = 76{,}92\%$ de $i_a - i_i$ será igual a i_r.

5. Dado i_i, usando novamente (2.5), obtemos

$$i_a = (i_i + 1)i_r + i_i = (1 + i_r)i_i + i_r,$$

ou seja, a taxa aparente é uma função afim na variável i_i, onde o seu gráfico é crescente, pois a sua inclinação, $i_r + 1$, é positiva, uma vez que sempre $i_r > -1$, ou seja, um valor monetário não pode diminuir 100% ou mais. Por exemplo, se uma empresa deseja reajustar o salário de seus funcionário a repor a inflação de 5% e mais um aumento real de 3%, qual o percentual de aumento a ser anunciado? Será

$$i_a = (0{,}05 + 1)0{,}03 + 0{,}05 = 8{,}15\%.$$

Note que aqui usamos o valor explícito de i_a, porém basta termos o resultado em (2.5) e saberemos o valor das três taxas em questão. E sendo assim, não é sugerido a memorização de fórmulas equivalentes, pois poderá prejudicar a aprendizagem do aluno pelo "acúmulo de fórmulas na cabeça".

6. Dado i_i, o valor de $i_r = \frac{i_a}{1+i_i} - \frac{i_i}{1+i_i}$ é uma função afim crescente de i_a com taxa de variação $\frac{1}{1+i_i}$ independente da taxa aparente. Assim, para cada ponto percentual de variação em i_a a taxa real irá variar $\frac{1}{1+i_i}$. E, como $\frac{1}{1+i_i}$ é decrescente em i_i, ao aumentarmos o valor de i_i, teremos uma menor variação de i_r. Ou seja, para inflações mais altas a taxa real terá um menor crescimento.

7. Uma situação que pode ocorrer é $i_i > 0$ e $i_a = 0$, isto é, por exemplo, uma elevação de preços ao consumidor sem aumento salarial. Por (2.5), $\lim\limits_{i_i \to +\infty} |i_r| = 1 = 100\%$ e $i_r = \frac{-i_i}{1+i_i} < 0$, resultando em uma perda salarial *menor* do que i_i. Por exemplo, se $i_i = 9\%$, então a perda salarial será de $\frac{0{,}09}{1+0{,}09} = 8{,}26\%$. Três outras análises merecem destaque:

   - $|i_r| > 50\% \Leftrightarrow \frac{i_i}{1+i_i} > 0,5 \Leftrightarrow i_i > 100\%$; ou seja, a perda do poder de compra será superior a 50% se, e só somente se, estivermos em patamares de *hiperinflação* superiores a 100%.

- $|i_r| \cong i_i \Leftrightarrow i_i \cong 0$; isto é, a perda do poder de compra será aproximadamente igual a taxa de inflação se, e somente se, a taxa inflacionária for próximo de zero.

- O gráfico de $|i_r|$ mostrado na Figura 2.4 nos permite tirar conclusões importantes sobre a perda do poder de compra: inflação de até 100% já gera uma perda de até 50%; no patamar inflacionário de 400% só é possível comprar 20% do que se compraria sem essa inflação; e, apesar de que a partir de 400% a variação dessa perda vai diminuindo de forma acentuada, o poder de compra já foi quase todo consumido ($> 80\%$). Ademais, ainda que ocorra $i_a > 0$, os casos de hiperinflação continuam consumindo grande parte do poder de compra.

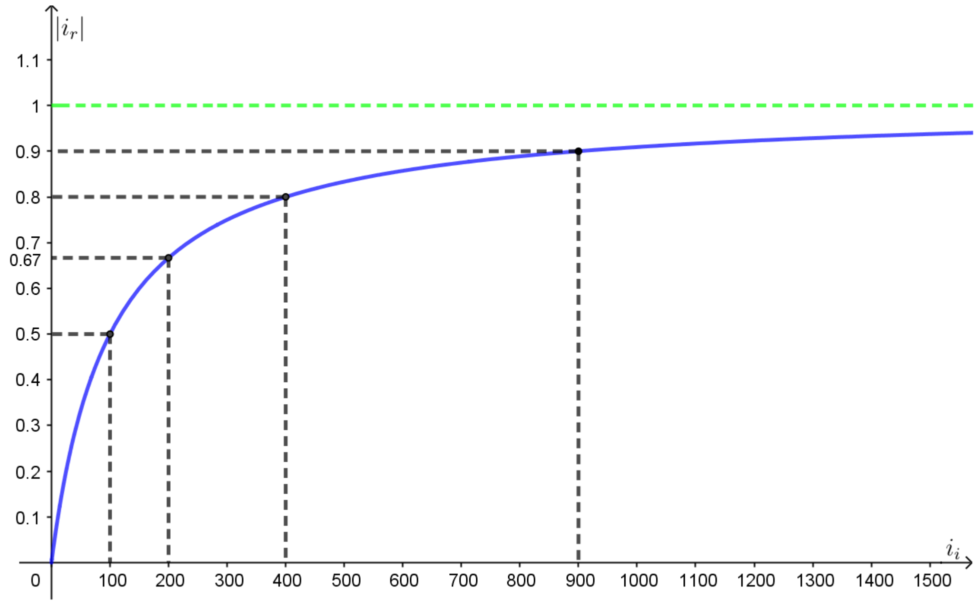


Figura 2.4: Perda real quando $i_a = 0$ e $i_i > 0$.

2.5 Séries Uniformes

Agora veremos a importantíssima ideia de equivalência de capitais. Pode-se perguntar: você deseja R\$ 200,00 hoje ou R\$ 200,00 daqui a 1 ano? A resposta pode passar por diferentes pensamentos: a perda do poder de compra devido a inflação, a necessidade do dinheiro hoje, a ansiedade de consumo imediato, opção de investimento, entre outros. Sendo assim, fora as questões de necessidades pessoais, queremos comparar valores em diferentes épocas. Para isso, escolhemos uma data base, chamada de **data focal** para comparar tais valores, usando o princípio contido na fórmula 2.3, isto é, multiplicar (resp. dividir) um valor C por $(1 + i)^n$, estamos levando a quantia C para n períodos a frente (resp. atrás).

Exemplo 2.5.1. *Considerando uma taxa de* 10% *a.m., o que tem maior valor: um pagamento de* R\$ 500,00 *daqui a um mês ou dois pagamentos de* R\$ 260,00 *para* 30 *e* 60 *dias? Levando tudo para data focal 0, o primeiro pagamento tem valor* $\frac{500}{1{,}1} = 454{,}55$*, e o segundo,* $\frac{260}{1{,}1} + \frac{260}{1{,}1^2} = 451{,}24$*. Logo, a primeira opção tem maior valor, de modo que quem assim pagar, estará pagando mais caro.*

O exemplo anterior é um caso particular de uma teoria mais geral a qual começaremos a apresentar a seguir.

Definição 2.5.1. *A distribuição de valores situados em diferente épocas é chamada de série, onde cada valor é dito parcela, pagamento, recebimento, prestação ou termo, conforme o que melhor se enquadrar no contexto. Uma* ***série uniforme*** *é quando os seus termos são iguais e o espaço de tempo entre quaisquer dois termos consecutivos é constante. E a série é dita* ***não uniforme*** *se não for uniforme. Série postecipada e série antecipada são aquelas quando os seus termos ocorrem no final e no início de cada período de tempo, respectivamente.*

Primeiramente faremos análise das séries uniformes postecipadas, e depois, com um deslocamento no tempo, chegaremos nas antecipadas. As Figuras 2.5 e 2.6 representam tais séries de n termos de valor P. Daqui em diante, a soma dos termos na data focal 0, será chamado de **valor atual** ou **valor principal**, e denotado por A.

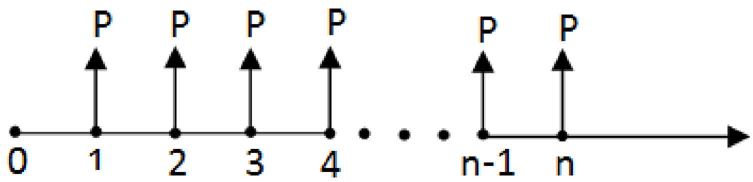


Figura 2.5: Série uniforme postecipada.

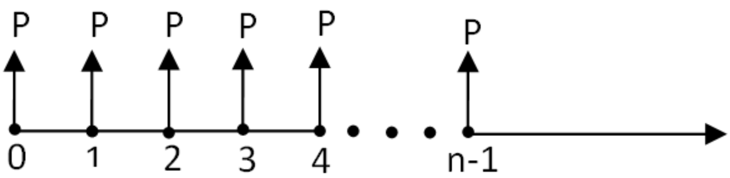


Figura 2.6: Série uniforme antecipada.

Teorema 2.5.1. *Dada série uniforme de valor atual* A*, com* n *termos postecipados a uma taxa de juros* i*, então*

$$A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Demonstração. Trazendo os termos para data focal zero, o primeiro fica $\frac{P}{1+i}$, o segundo $\frac{P}{(1+i)^2}$, e o n-ésimo, $\frac{P}{(1+i)^n}$. Portanto,

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P}{(1+i)^k}$$

é a soma de uma progressão geométrica com n termos , $a_1 = \frac{P}{1+i}$ e razão $q = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$. Logo,

$$A = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{P}{1+i} \frac{1-[(1+i)^{-1}]^n}{1-(1+i)^{-1}} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

□

Corolário 2.5.1. *O valor de uma série uniforme postecipada de n termos, na época do último termo é*

$$F = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.5.1, $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, e sendo, $F = A(1+i)^n$, obtemos

$$F = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

□

Exemplo 2.5.2. *Um cliente adquire uma geladeira de* R\$ 1.600,00 *à vista por* 10 *vezes com taxa de juros de 2,5% a.m. através da venda de cartão de crédito. Qual é o valor de cada prestação a ser paga pelo cliente? Inicialmente, deve-se saber que a compra com cartão de crédito configura-se uma série uniforme postecipada. Usando o Teorema 2.5.1, obtemos*

$$1600 = P\frac{1-(1+0{,}025)^{-10}}{0{,}025} \Leftrightarrow P = \frac{40}{1-(1{,}025)^{-10}} = 182{,}81.$$

Logo, o valor de cada prestação é R\$ 182,81.

Observação 2.5.1 (Aproximação de valores)**.** *Ao se fazer contas auxiliares aproximadas antes do resultado final, pode levar a uma diferença do valor real, e assim, ao conferirmos anúncios, encontraremos divergências de valores. No exemplo anterior se tivéssemos colocado* $1-(1+0{,}025)^{-10} \cong 0{,}22$, *então teríamos* $P = 181{,}82$, *cerca de um real de diferença em cada prestação.*

Observação 2.5.2 (Impostos, seguros e taxas)**.** *Quando desejarmos conferir o valor das parcelas nos anúncios de venda de produtos ou empréstimos financeiros devemos levar em conta a existência ou não de cobrança de impostos, seguros ou outras taxas.*

Apresentaremos a seguir algumas nomenclaturas encontradas em literatura de cálculo financeiros. Sabemos que

$$A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow P = A\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

e

$$F = P\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Leftrightarrow P = F\frac{i}{(1+i)^n - 1}.$$

As frações $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$, $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ e $\frac{i}{(1+i)^n-1}$, nas séries uniformes postecipadas, são chamadas de **Fator de Valor Atual, Fator de Recuperação de Capital, Fator de Acumulação de Capital e Fator de Formação de Capital**, respectivamente, abreviados por FVA, FRC, FAC e FFC, respectivamente. Alguns autores apresentam notação próprias, o que não faremos nesse trabalho. O fator mais utilizado na prática é o FRC: no cálculo de prestações para empréstimos bancários e para financiamento de bens, como vimos em exemplos anteriores. Quando não se dispunha de calculadoras financeira ou científicas buscava-se os fatores em tabelas financeiras como as apresentadas em [15]. Hoje, além das calculadoras, temos planilhas eletrônicas, como Excel, e sites na internet.

Agora desejamos explicitar os valores de n e i nos dois resultados anteriores, em função das outras variáveis. No caso de n usaremos noções de logaritmos, e para i, recurso computacional:

- $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow (1+i)^{-n} = \frac{P-Ai}{P} \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{P}{P-Ai} \Leftrightarrow n = \log_{1+i}\frac{P}{P-Ai}$, uma vez que $P \neq Ai$.

- $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow Ai(1+i)^n = P(1+i)^n - P \overset{1+i=x}{\Leftrightarrow} Ax^{n+1} - (A+P)x^n + P = 0$. Aqui encontramos uma equação de grau $n+1$ para cálculo de x, e consequentemente, de i, onde $i > 0 \Rightarrow x > 1$.

- $F = P\frac{(1+i)^n-1}{i} \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{Fi+P}{P} \Leftrightarrow n = \log_{1+i}\frac{Fi+P}{P}$.

- $F = P\frac{(1+i)^n-1}{i} \Leftrightarrow Fi = P(1+i)^n - P \overset{1+i=x}{\Leftrightarrow} Px^n - Fx + (F-P) = 0$, onde $x > 1$.

As duas equações encontradas acima não dispõem de método geral para encontrar suas raízes reais. Assim, uma possibilidade é o uso de software gráfico, como o GeoGebra, em que será apresentado uma proposta de sequência didática no último capítulo. Por outro lado, no cálculo do valor de n, usam-se logaritmos; ocorrendo, por exemplo, quando desejamos acumular um valor futuro F, dispondo de P e uma taxa pré-fixada, conforme o exemplo seguinte.

Exemplo 2.5.3. *Quantas prestações de* R\$ 79,29 *devemos aplicar por mês, à taxa de* 0,9% *a.m., para obtermos um montante final de* R\$ 1.000,00*? Temos* $P = 79{,}29$, $i = 0{,}009$, $F = 1000$. *Logo, o valor procurado é*

$$n = \log_{1+0{,}009} \frac{1000 \cdot 0{,}009 + 79{,}29}{79,29} = \log_{1{,}009} \frac{88{,}29}{79{,}29} = \frac{\ln(\frac{88{,}29}{79{,}29})}{\ln(1{,}009)} = 12\,meses,$$

considerando a primeira na data focal "1"e a última na "12".

Vamos fazer algumas análises do valor da prestação em função de A, i, e n, a partir de $P = f(A, i, n) = A\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = A\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$:

- Fixados i e n, P é proporcional a A, onde a constante de proporcionalidade é o FRC. Assim, se temos o valor de P_1 para um valor A_1 e desejamos uma outra simulação, P_2 para A_2, então $P_2 = P_1\frac{A_2}{A_1}$. Na prática isso pode ocorrer, por exemplo, quando temos um extrato bancário com uma simulação e queremos alterar o valor de A (desde que a taxa não dependa de A), não sendo necessário outra simulação em novo extrato. Exemplo: se para um empréstimo de R\$ 1.000,00 paga-se em 24 parcelas de R\$ 80,15 então tomando emprestado R\$ 2.450,00 teremos

$$P_2 = 80{,}15 \cdot \frac{2450}{1000} = 196{,}37.$$

- Fixados A e i, P é decrescente em relação a n. De fato: n cresce $\Rightarrow (1+i)^n$ cresce $\Rightarrow$ $\frac{1}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$ decresce $\Rightarrow g(n)$ é decrescente. Ou seja, o valor da parcela decresce quando aumenta-se o prazo.

- Fixados A e n, P é crescente em relação a i. Aqui usaremos ideias do Cálculo Diferencial. De fato: derivando pelas regras do produto, quociente e cadeia, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{di} &= A\frac{[1(1+i)^n + in(1+i)^{n-1}] \cdot [(1+i)^n - 1] - i(1+i)^n \cdot n(1+i)^{n-1}}{[(1+i)^n - 1]^2} \\
&= A\frac{(1+i)^{2n} + in(1+i)^{2n-1} - (1+i)^n - in(1+i)^{n-1} - in(1+i)^{2n-1}}{[(1+i)^n - 1]^2} \\
&= A\frac{(1+i)^{2n} - (1+i)^n - in(1+i)^{n-1}}{[(1+i)^n - 1]^2} \\
&= \frac{(1+i)^{n-1}[(1+i)^n + i(1+i)^n - 1 - i - in)]}{[(1+i)^n - 1]^2},
\end{aligned}$$

  onde na última igualdade usamos
  $(1+i)^{2n} = (1+i)^{n-1}[(1+i)(1+i)^n] = (1+i)^{n-1}[(1+i)^n + i(1+i)].$

  Se $n > 1$, então $(1+i)^n > 1 + ni$, pela desigualdade de Bernoulli (Teorema 1.5.3). Além disso, $i(1+i)^n > i$, pois $(1+i)^n > 1$. Logo, $h'(i) > 0$. E se $n = 1$, então

$h'(i) = 1 > 0$. Consequentemente, $h' > 0$; o que implica $P = h(i)$ crescente. Isto é, o valor da parcela aumenta para taxas de juros maiores.

- $P > Ai$. De fato: $\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1} > 1 \Rightarrow P > Ai$. Por exemplo, se $i = 4\%$ e $A = R\$\,20.000,00$ então, de antemão, $P > 20000 \cdot 0,04 = 800$. E, por seguinte, $i \geq 1 \Rightarrow P > A$, ou seja, para uma taxa maior ou igual a 100% é garantido que a prestação ultrapassa o valor atual. A recíproca não é verdadeira: $A = 20000$, $n = 2$, $i = 70\% \Rightarrow P = 21.407{,}41 > A$; já $A = 20000$, $n = 2$, $i = 30\% \Rightarrow P = 14.695{,}65 < A$. Além disso, se n crescer ilimitadamente, então P "tende"a Ai, pois, usando a ideia de limite, temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} P = \lim\limits_{n\to+\infty} A\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = Ai$. E, neste caso, à medida que n cresce, o valor da prestação decresce a valores maiores do que Ai e se aproximando de Ai. Assim, damos nesse texto mais uma importante contribuição prática: nunca o valor da parcela de um empréstimo será menor do que Ai (mesmo que se divida em muitas parcelas); tomando um empréstimo de R\$ 12.000,00 a 6% *a.m.*, então já sabemos que o valor parcela será maior do que $12000 \cdot 6\% =$ R\$ 720,00, independentemente do número de parcelas.

Agora como tratar as séries antecipadas? Não faremos através da soma de PG, como fizemos para séries postecipadas, e sim, aproveitaremos os resultados já obtidos. Observemos que, aplicando o Teorema 2.5.1 na série antecipada, o valor atual A cairá em uma data focal a menos do que o pretendido, a qual chamamos de "-1". Agora multiplicando esse resultado por $(1 + i)$ obtemos o valor atual da séria antecipada, a saber,

$$A = P(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

O valor da série antecipada um período após o seu último termo, aplicando a fórmula 2.3, é

$$F = \left[P(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^n = P(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i} = P(1+i)\cdot FAC.$$

Provamos assim o teorema seguinte.

Teorema 2.5.2. *Para uma série uniforme de n termos antecipados, vale:*

i) $A = P(1+i)\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = P(1+i)\cdot \mathrm{FVA}.$

ii) $F = P(1+i)\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{i} = P(1+i)\cdot \mathrm{FAC}$ *(valor da série um período após o último termo).*

Observação 2.5.3. *Séries antecipadas ocorrem, por exemplo, na análise de investimentos mensais iniciando-se hoje e nas vendas em que a primeira prestação se dar no ato da compra.*

Exemplo 2.5.4. *Uma pessoa começa investir hoje* R\$ 100,00 *por mês durante* 5 *meses a uma taxa de rendimento* $i = 2\%$ *a.m., e deseja resgatar em 5 meses. Qual será o valor do resgaste? O problema está representado na Figura 2.7. Pelo Teorema 2.5.2, com* $n = 5$, *o valor a ser resgatado é* $F = 100(1+0{,}02)\dfrac{((1+0{,}02)^5 - 1}{0{,}02} =$ R\$ 530,81.

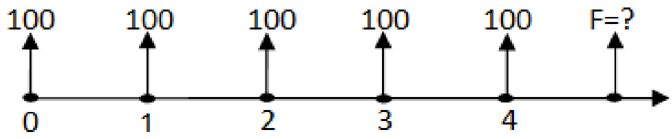


Figura 2.7: Aplicação de série antecipada.

O tempo decorrido até o primeiro termo de uma série é chamado de **carência** As séries uniformes antecipadas e postecipada tem carência 0 e 1, respectivamente. Agora existem situações em que instituições financeiras oferecem empréstimos com um maior tempo de carência, dando ao cliente um prazo maior para o pagamento da primeira prestação. Nessa direção, prática comum no mercado financeiro, estaremos deduzindo um resultado que generaliza os dois tipos de séries já vistos.

Teorema 2.5.3. *Dada uma série uniforme de valor atual* A, *a uma taxa de juros* i, *com* n *termos iguais a* P *e o seu primeiro termo na data focal* k, *então:*

i) $A = P(1+i)^{1-k} \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = P(1+i)^{1-k} \cdot \text{FVA}.$

ii) $F = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ *(no último termo* $k+n-1$*).*

iii) $F = P(i+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ *(na data focal* $k+n$*).*

Demonstração. *i*) Trazendo os termos para a data focal zero (ver figura 2.8), obtemos
$$A = \frac{P}{(1+i)^k} + \frac{P}{(1+i)^{k+1}} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^{k+n-1}} = (1+i)^{1-k}\left(\frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^n}\right).$$
Usando a soma de uma PG, obtemos

$$A = (1+i)^{1-k} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = (1+i)^{1-k} \frac{P}{(1+i)} \frac{1-[(1+i)^{-1}]^n}{1-(1+i)^{-1}} = P(1+i)^{1-k} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

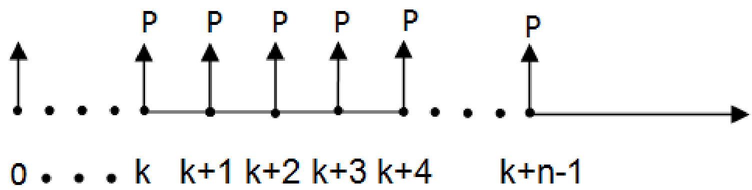


Figura 2.8: Série uniforme com carência.

ii) Levando o valor A em i) para $k+n-1$ períodos a frente pelo fórmula 2.3, obtemos

$$F = \left[P(1+i)^{1-k} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{k+n-1} = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

iii) Multiplica o valor em *ii*) por $1+i$. □

Exemplo 2.5.5. *O banco "X" empresta a um cliente* R\$ 20.000,00 *para pagamento em* 10 *parcelas fixas, com taxa de juros a* 4,0% *a.m. e com carência de dois meses. Qual o valor da prestação? Aplicando o teorema anterior para* $A = 20000$*,* $n = 10$*,* $i = 4\%$ *e* $k = 2$*, o valor da parcela* P *é tal que*

$$20000 = (1+0{,}04)^{1-2}P\frac{1-(1+0{,}04)^{-10}}{0{,}04} \Leftrightarrow P = \frac{800 \cdot 1{,}04}{1-1{,}04^{-10}} = \text{R\$}\,2.564{,}45.$$

Capítulo 3

Sistemas de Amortização SAC e PRICE

Ao fazermos um empréstimo, parcelamento ou financiamento nos comprometemos a pagar aos poucos, ao longo de meses, a dívida original mais os juros. Esses valores são distribuídos em uma série de pagamentos constituídos por duas partes: uma correspondente à dívida original, chamada de **valor de amortização**, e outra, ao juro do período.

Os dois tipos de séries uniformes que são amplamente aplicadas nas amortizações são **Sistema de Amortização Constante (SAC)**, onde a amortização é constante; e o sistema **PRICE**, também conhecido como **Sistema Francês de Amortização**, em que os seus termos são constantes. Ambos sistemas são apresentados a seguir de uma maneira mais abrangente do que é comumente descrito em literaturas ou vídeos na internet, seja pela falta de uma precisa explicação matemática ou pela omissão de resultados. Ademais, é oportuno dizer que sendo tais conhecimentos de fundamental importância para o entendimento e tomada de decisões em diversas operações financeiras, os indicamos como um tópico da matemática financeira para o Ensino Médio.

No que segue, para as séries postecipadas, a menos que se diga ao contrário, consideramos n o número de termos, i a taxa de juros, A_k o valor da amortização, P_k o valor de cada termo, J_k o valor de juros, D_0 o valor principal e D_k o valor da dívida, todos na época k, sendo a dívida considerada logo após o pagamento da parcela P_k. O juro e a parcela na época k são definidos por $J_k = iD_{k-1}$ e $P_k = A_k + J_k$. Tais valores ficam bem determinados nos dois teoremas seguintes.

Teorema 3.0.1 (SAC)**.** *No sistema SAC, vale:*

i) $A_k = \frac{D_0}{n}$;

ii) $D_k = \frac{n-k}{n} D_0$;

iii) $J_k = \frac{iD_0}{n}(n-k+1)$.

iv) $P_k = \left[\frac{1}{n} + i\frac{n-(k-1)}{n}\right] D_0$;

Demonstração. *i*) Por definição do sistema SAC.
ii) Após k pagamentos restam $n-k$ pagamentos. Logo, faltam $\frac{n-k}{n}$ do valor inicial, isto é, $D_k = \frac{n-k}{n}D_0$.
iii) Por *ii*) temos $D_{k-1} = \frac{n-k+1}{n}D_0$. Logo,

$$J_k = iD_{k-1} = i\frac{n-k+1}{n}D_0 = \frac{iD_0}{n}(n-k+1).$$

iv) Usando *iii*) temos $P_k = A_k + J_k = \frac{D_0}{n} + \frac{iD_0}{n}(n-k+1) = \left[\frac{1}{n} + i\frac{n-(k-1)}{n}\right] D_0$.

□

Teorema 3.0.2 (PRICE)**.** *No sistema PRICE, vale:*

i) $P_k = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$;

ii) $D_k = D_0\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$;

iii) $A_k = D_0 i\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n-1}$.

Demonstração. *i*) Pelo Teorema 2.5.1, fazendo $P = P_k$ e $A = D_0$, obtemos $D_0 = P_k\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, ou equivalentemente, $P_k = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.
ii) Na época k, faltam $n-k$ pagamentos postecipados. Aplicando o Teorema 2.5.1 novamente, considerando $A = D_k$ e $P = P_k$, obtemos $D_k = P_k\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$. E por i),

$$D_k = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} = D_0\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

iii) Usando i), ii), $A_k = P_k - J_k$ e $J_k = iD_{k-1}$ obtemos

$$A_k = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - iD_0\frac{1-(1+i)^{-(n-k+1)}}{1-(1+i)^{-n}} = iD_0\frac{(1+i)^{-(n-k+1)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Multiplicando por $(1+i)^n$,

$$A_k = iD_0\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n-1}$$

□

No sistema SAC calcula-se A_k, D_k, J_k e P_k, nessa ordem. Já no PRICE a ordem é P_k, J_k, A_k e D_k. Tais valores são colocados em tabelas, conforme o exemplo a seguir.

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	2.000,00
1	490,00	400,00	90,00	1.600,00
2	472,00	400,00	72,00	1.200,00
3	454,00	400,00	54,00	800,00
4	436,00	400,00	36,00	400,00
5	418,00	400,00	18,00	-
Totais	2.270,00	2.000,00	270,00	-

Tabela 3.1: Tabela de Amortização SAC.

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	2.000,00
1	455,58	365,58	90,00	1.634,42
2	455,58	382,03	73,55	1.252,38
3	455,58	399,23	56,36	853,16
4	455,58	417,19	38,39	435,96
5	455,58	435,96	19,62	-
Totais	2.277,92	2.000,00	277,92	-

Tabela 3.2: Tabela de Amortização PRICE.

Exemplo 3.0.1. *Consideremos um empréstimo no valor de* R\$ 2.000,00*, com juros de* 4,5% *a.m., parcelado em 5 vezes. As Tabelas 3.1 e 3.2 indicam as amortizações no SAC e no PRICE.*

As tabelas SAC e PRICE são as utilizadas no Brasil atualmente: as duas como opções para financiamento imobiliário e a segunda nos empréstimos e parcelamentos de outros bens.

Na construção de tais tabelas podemos usar o Excel ou outra planilhas eletrônica, possibilitando uma maior rapidez de cálculo, poupando tempo para a interpretação dos dados e uma consciente tomada de decisão, habilidades essas necessárias e imprescindíveis para uma boa educação financeira.

Agora desejamos estabelecer propriedades de cada sistema e propriedades comparativas entre si.

1. SAC.

   A sequência de juros $\{J_k\}_{k\geq 1}$ forma uma PA decrescente de primeiro termo $J_1 = iD_0$

e de razão

$$r = J_k - J_{k-1} = iD_k - iD_{k-1} = i\left(\frac{n-k}{n} - \frac{n-k+1}{n}\right) D_0 = \frac{-i}{n} D_0. \qquad (3.1)$$

A sequência do saldo devedor $\{D_k\}_{k\geq 0}$ forma uma PA decrescente de primeiro termo D_0 e razão

$$r = D_k - iD_{k-1} = \left(\frac{n-k}{n} - \frac{n-k+1}{n}\right) D_0 = \frac{-D_0}{n}.$$

Quanto às prestações:

$$P_k - P_{k-1} = A_k + J_k - (A_{k-1} + J_{k-1}) = J_k - J_{k-1} \overset{eq.3.1}{=} \frac{-iD_0}{n}.$$

Assim, a sequência de prestações $\{P_k\}_{k\geq 1}$ forma uma PA decrescente de primeiro termo $P_1 = A_1 + J_1 = \frac{D_0}{n} + iD_0 = \left(\frac{1}{n} + i\right) D_0$ e razão $r = \frac{-iD_0}{n}$.

Reescrevendo P_k, na variável k, por $P_k = \left(\frac{1}{n} + i + \frac{i}{n}\right) D_0 - \frac{iD_0}{n}k$, nota-se que os pontos das parcelas pertencem à reta decrescente de inclinação $-\frac{iD_0}{n}$ passando pelo ponto $\left(1,\ (\frac{1}{n} + i)D_0\right)$. Os pontos das amortizações pertencem à reta constante $y = \frac{D_0}{n}$.

2. PRICE.

   Aparecem progressões apenas quanto às amortizações. Pelo Teorema 3.0.2 *iii*) temos que $\{A_k\}_{k\geq 1}$ é uma PG de razão

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{D_0 i \frac{(1+i)^{k+1-1}}{(1+i)^n - 1}}{D_0 i \frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}} = (1+i).$$

   Assim, o valor amortizado cresce a cada parcela dependendo apenas da taxa. Os pontos da amortizações em função de k, $A_k = \left[\frac{D_0 i}{(1+i)^n - 1}\right](1+i)^{k-1}$, pertencem ao gráfico de uma função tipo exponencial crescente de base $1+i$.

   Quanto aos juros, notemos que sua variação cumpre

$$\Delta J_k := J_{k+1} - J_k = P_{k+1} - A_{k+1} - (P_k - A_k) = A_k - A_{k+1} = A_k - (1+i)A_k = -iA_k,$$

   de tal modo que $|\Delta J_k|$ é proporcional a A_k com constante de proporcionalidade igual a i, não se esquecendo que a amortização é crescente e o juro decrescente - ambos em função da taxa. Os pontos das parcelas estão na reta horizontal $y = P_k$.

Observação 3.0.1. *De uma forma geral não há dificuldade em se verificar que os pontos de uma PA estão no gráfico de uma reta, enquanto os pontos de uma PG estão no gráfico de uma função exponencial, como acabamos de ver nas parcelas SAC e nas amortizações PRICE. E ressalta-se que essas duas importantes ligações vêm expressas em [2,* *p.576-577]: "Nesse momento, é importante também que o estudante perceba a associação existente entre progressão aritmética e função afim de domínio discreto". e "É importante ainda que sejam estabelecidas associações entre função exponencial e a noção de progressão geométrica".*

É usado daqui em adiante o subscrito $_{kS}$ para indicar uma grandeza no sistema SAC, e $_{kP}$, no PRICE, ambos no período k.

Exemplo 3.0.2. *A Figura 3.1 mostra a evolução das parcelas nos dois sistemas para $D_0 =$ R\$ 1.000,00, $i = 7{,}0\%$ a.m. e $n = 24$, onde P_{kP} está na reta de taxa de variação $\frac{-iD_0}{n} = -\frac{70}{24}$, e P_{kS} na reta constante $y = P_k = 87{,}19$. Mais adiante serão feitas análises a respeito do ponto de intersecção dos gráficos das parcelas dos dois sistemas.*

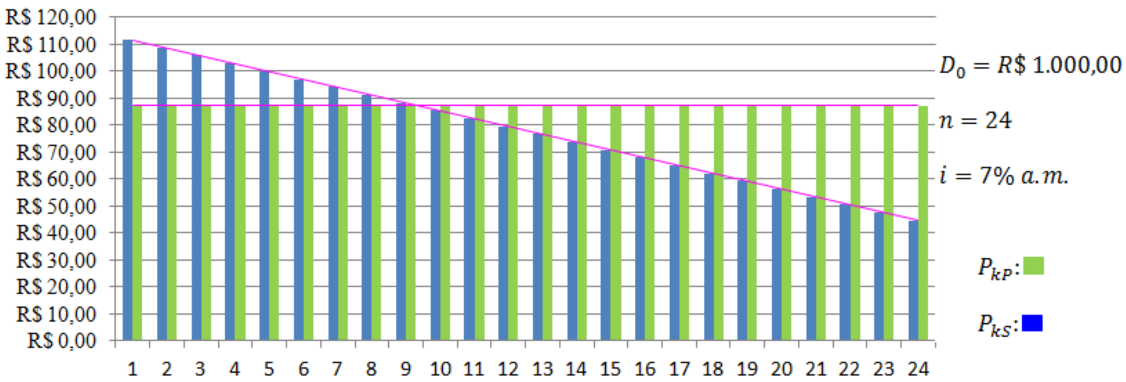


Figura 3.1: Evolução das parcelas no SAC e PRICE.

Apesar de apresentarmos apenas dois exemplos de cada sistema, algumas perguntas surgem em relação aos dois sistemas, mantendo-se os mesmos valores de D_0, n e i:

- Pagas algumas parcelas, em qual sistema o valor da dívida restante é maior?
- Em qual sistema a primeira parcela é maior? E a última?
- O juro total pago é maior em qual sistema ? E o total das prestações?

A seguir responderemos essas e outras perguntas.

O próximo resultado nos diz que após o pagamento das k primeiras parcelas, o valor da dívida no SAC é menor do que no PRICE. A demonstração, de nossa autoria, contem apenas assuntos do Ensino Médio.

Teorema 3.0.3. *Sejam k e n números naturais, com $0 < k < n$, e i um número real positivo. Então as dívidas após k pagamentos satisfazem $D_{kS} < D_{kP}$.*

Demonstração. Pelos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2 as dívidas, após o pagamento da k-ésima parcela, são $D_{kS} = \left(1 - \frac{k}{n}\right) D_0$ e $D_{kP} = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}} = D_0 \frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{(1+i)^n-1}$, respectivamente. Assim, é suficiente mostrar que $\varphi(k) := 1 - \frac{k}{n} - \frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{(1+i)^n-1} < 0$. Observa-se que:

$$\varphi(k) = \frac{-k(1+i)^n + k + n(1+i)^k - n}{n\left[(1+i)^n - 1\right]} = \frac{(k-n) + n(1+i)^k - k(1+i)^n}{n\left[(1+i)^n - 1\right]}, \tag{3.2}$$

tendo o denominador positivo. Assim, basta mostrar que o numerador na equação (3.2), $h(k) := (k-n) + n(1+i)^k - k(1+i)^n$, é negativo.

Se $k = 1$, então $h(1) = 1 - n + n(1+i) - (1+i)^n = 1 + ni - (1+i)^n < 0$, utilizando a desigualdade de Bernoulli (Teorema 1.5.3).

Se $k \geq 2$, então $n > 2$, e pelo binômio de Newton (Teorema 1.5.2)

$$\begin{aligned} h(k) &= k - n + n + nki + n\sum_{p=2}^{k}\binom{k}{p} i^p - k - kni - k\sum_{p=2}^{n}\binom{n}{p} i^p \\ &= n\sum_{p=2}^{k}\binom{k}{p} i^p - k\sum_{p=2}^{k}\binom{n}{p} i^p - k\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p} i^p. \end{aligned}$$

Para que $h(k) < 0$ basta que $n\sum\limits_{p=2}^{k}\binom{k}{p} i^p < k\sum\limits_{p=2}^{k}\binom{n}{p} i^p$, e para isso é suficiente que $n\binom{k}{p} < k\binom{n}{p}$. Observamos que

$$\begin{aligned} n\binom{k}{p} < k\binom{n}{p} &\Leftrightarrow \frac{nk!}{(k-p)!p!} < \frac{kn!}{(n-p)!p!} \Leftrightarrow \frac{(n-p)!}{(k-p)!} < \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \\ &\Leftrightarrow (n-p)(n-p-1)...(k-p+1) < (n-1)(n-2)...k. \end{aligned}$$

Note que nos dois lados da última desigualdade acima temos $n-k$ fatores, e sendo $p \geq 2$, temos $(n-p) < n-1$, $(n-p-1) < n-2$, ..., $k-p+1 < k$. Portanto, a última desigualdade nas sequências de equivalências acima é verdadeira. E, consequentemente, $h(k) < 0$. $\square$

Quanto ao total de juro pago, segue corolário.

Corolário 3.0.1. *Os juros nos modelos de amortização SAC e PRICE satisfazem* $\sum\limits_{k=1}^{n} J_{kS} < \sum\limits_{k=1}^{n} J_{kP}$, *isto é, o juro total pago no modelo SAC é menor do que no PRICE.*

Demonstração. Pela definição de juro, $J_k = iD_{k-1}$, e pelo Teorema 3.0.3, temos que $D_{kS} < D_{kP}$. Logo, $\sum\limits_{k=1}^{n} J_{kS} < \sum\limits_{k=1}^{n} J_{kP}$. $\square$

O montante (total das parcelas pagas) no sistema SAC é menor do que no PRICE, conforme resultado seguinte.

Corolário 3.0.2. *As parcelas nos modelos de amortização SAC e PRICE satisfazem* $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{kS} < \sum\limits_{k=1}^{n} P_{kP}$.

Demonstração. Por definição das parcelas: $P_k = A_k + J_k$. O total amortizado nos dois sistemas é o mesmo, D_0. Portanto, usando o corolário anterior,

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kS} = \sum_{k=1}^{n} A_{kS} + \sum_{k=1}^{n} J_{kS} = \sum_{k=1}^{n} A_{kP} + \sum_{k=1}^{n} J_{kS} < \sum_{k=1}^{n} A_{kP} + \sum_{k=1}^{n} J_{kP} = \sum_{k=1}^{n} P_{kP}$$

□

Lema 3.0.1. *Seja $n \in N$, com $n \geq 2$, e $x \in \mathbb{R}$, com $x > 1$. Seja $p(x) = (n-1)x^{n+1} - nx^n + x$. Então $p(x) > 0$.*

Demonstração. Como $p(1) = 0$, então $p(x)$ é divisível por $x - 1$. E da divisão de polinômios obtemos

$$p(x) = (x-1)\left[(n-1)x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - x^2 - x\right].$$

Agora como $x > 1$ e $n \geq 2$ temos que:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x < x^n + x^n + ... + x^n + x^n = (n-1)x^n.$$

Portanto, $p(x) > 0$. □

Com esse Lema podemos comparar a primeira e a última parcela nos dois modelos de amortização em estudo se $n \geq 2$: a primeira parcela no PRICE é menor do que no SAC, e a última parcela no SAC é menor do que no PRICE.

Teorema 3.0.4. *Seja $n \in N$, com $n \geq 2$. Então para a primeira e última parcelas nos sistemas SAC e PRICE, vale:*

i) $P_{1S} > P_{1P}$.

ii) $P_{nP} > P_{nS}$.

Demonstração. i) Pelos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2 basta mostrar que $\left(\frac{1+ni}{n}\right) > \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$. Pela desigualdade de Bernoulli, $(1+i)^n > 1 + ni$ (Teorema 1.5.3). Portanto,

$$\begin{aligned}
(1+i)^n > 1 + ni + [ni(1+i)^n - ni(1+i)^n] &\Leftrightarrow (1+i)^n - 1 + ni(1+i)^n - ni > ni(1+i)^n \\
&\Leftrightarrow (1+i)^n(1+ni) - (1+ni) > ni(1+i)^n \\
&\Leftrightarrow (1+ni)\left[(1+i)^n - 1\right] > ni(1+i)^n \\
&\Leftrightarrow \frac{1+ni}{n} > \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \\
&\Leftrightarrow \frac{1+ni}{n} > \frac{i}{(1-(1+i)^{-n}}.
\end{aligned}$$

ii) Aplicando novamente os Teoremas 3.0.1 e 3.0.2, com $k = n$, é suficiente mostrar que $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} > \frac{1+i}{n}$, ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} i\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} > \frac{1+i}{n} &\Leftrightarrow (1+i)^n in > (1+i)\left[(1+i)^n - 1\right] \\ &\Leftrightarrow (1+i)^n in > (1+i)^n + i(1+i)^n - (1+i) \\ &\Leftrightarrow (1+i)^n\left[in - (1+i)\right] > -(1+i). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Fazendo $1 + i = x$, temos que $x > 1$ e $i = x - 1$, obtendo equivalência de (3.3):

$$x^n\left[(x-1)n - x\right] > -x \Leftrightarrow (n-1)x^{n+1} - nx^n + x > 0,$$

onde a última desigualdade é verdadeira pelo Lema 3.0.1. □

Um corolário imediato é que as parcelas no SAC são sempre menores do que no PRICE a partir de alguma prestação.

Corolário 3.0.3. *Se $n \geq 2$ então existe um natural λ, onde $1 < \lambda \leq n$, tal que $P_{kS} < P_{kP}$, para todo k com $\lambda \leq k \leq n$ e $P_{kS} \geq P_{kP}$ para todo $k < \lambda$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior e sabendo-se que as parcelas no PRICE são constantes e no SAC são decrescentes. □

Observação 3.0.2. *O caso não tratado no teorema anterior quando $n = 1$ e $k = 1$ é facilmente analisado: $P_{1S} = D_0(1+i) = P_{1P}$, as duas únicas parcelas são iguais, bastando substituir os valores de n e k na primeira parcela nos dois sistemas.*

Uma pergunta surge em relação o valor de λ no corolário anterior. Há alguma espécie de estimativa para esse valor? Sim. Conseguimos encontrar uma ao redigir o presente texto. Primeiro vamos estabelecer quando $P_{kP} = P_{kS}$, usando os Teoremas 3.0.2 e 3.0.1:

$$\begin{aligned} P_{kP} = P_{kS} \Leftrightarrow \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} &= \frac{1+ni-ki+i}{n} \\ &\Leftrightarrow ni = [(1-(1+i)^{-n}](-ki) + [1-(1+i)^{-n}](1+ni+i) \\ &\Leftrightarrow [(1-(1+i)^{-n}](ki) = [1-(1+i)^{-n}](1+ni+i) - ni \\ &\Leftrightarrow k = \frac{[1-(1+i)^{-n}](1+ni+i) - ni}{i[(1-(1+i)^{-n}]} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{1}{i} + n + 1 - \frac{n(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \\ &\Leftrightarrow k = 1 + \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} := \Phi \end{aligned} \tag{3.4}$$

Exemplo 3.0.3. *Tomando $i = 5\%$ a.m. e $n = 15$ meses na equação 3.4 obtemos $k = 7{,}097$. As parcelas no PRICE são maiores do que as do SAC somente a partir da 8^a parcela (quase metade do tempo). Mantendo-se essa taxa com $n = 60$, obtemos $k = 17{,}606$ (cerca de 70% do tempo as parcelas PRICE são maiores).*

A seguir um exemplo com n fixo e variando i.

Exemplo 3.0.4. *Para os prazos fixos de 36 e 48 meses, resulta no gráfico de valores de k indicados na Figura 3.2, onde nota-se para um período de três anos, que 77,8% das parcelas PRICE são maiores que as do SAC no caso da taxa de 12%; e diminuindo a taxa para 0,5%, elas ficam maiores em 52,8%. A seguir é feita uma estimativa geral de quando as parcelas de um sistema é maior do que o outro.*

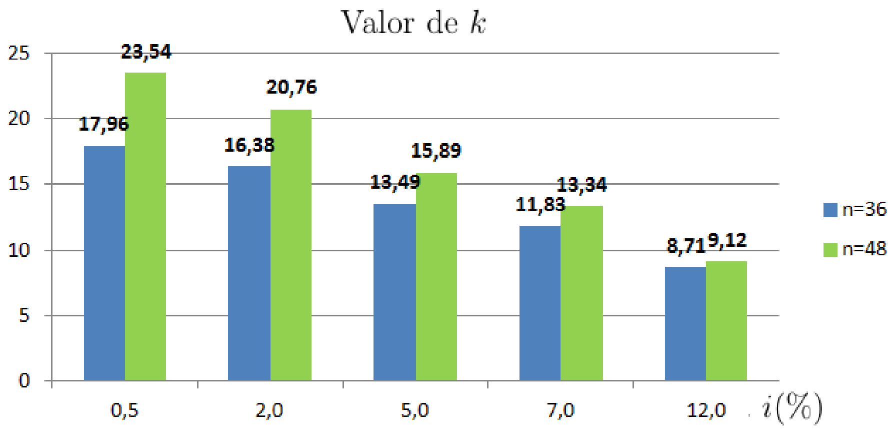


Figura 3.2: Valor de k para $P_{kP} = P_{kS}$.

Lema 3.0.2. *Se $\Phi = 1 + \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}$ então $\frac{d\Phi}{di} < 0$.*

Demonstração. Temos que $\Phi = 1 + \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n-1} \overset{1+i=x}{=} 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{n}{x^n-1}$. Logo,

$$\frac{d\Phi}{di} = \frac{d\Phi}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{n^2x^{n-1}}{(x^n-1)^2} = \frac{x^n \cdot [n^2(x - 2 + x^{-1}) - (x^n - 2 - x^{-n})]}{[(x-1)(x^n-1)]^2}$$
$$= \frac{x^n\left[n^2(x^{1/2} - x^{-1/2})^2 - (x^{n/2} - x^{-n/2})^2\right]}{[(x-1)(x^n-1)]^2}$$

Portanto, a derivada será negativa se $x^{n/2} - x^{-n/2} > n(x^{1/2} - x^{-1/2})$, desde que $x > 1$; ou equivalentemente para $\sinh(n\frac{\ln(x)}{2}) > n \cdot \sinh(\frac{\ln(x)}{2})$; ou equivalentemente para $f(y) := \sinh(ny) > n\sinh(y) := g(y)$, fazendo $y = \ln(x)/2$, onde $y > 0$, já que $x > 1$. E para provar que $f(y) > g(y)$ observe que: 1) $f(0) = g(0) = 0$, 2) $f'(y) = n\cosh(ny) > g'(y) = n\cosh(y)$ se $y > 0$, pois $ny > y > 0$ e cosseno hiperbólico é crescente nesse intervalo. Consequentemente, por 1) e 2), $f(y) > g(y)$ para todo $y > 0$. O que conclui a nossa prova. □

Usando o Teorema de L'Hôpital (L'H), um conhecido e útil resultado do Cálculo Diferencial, podemos calcular dois importantes limites de Φ (equação 3.4) :

- $\lim\limits_{i\to 0^+} \Phi = \dfrac{n+1}{2}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\lim_{i\to 0^+} \Phi &= \lim_{i\to 0^+} \left[1 + \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] \\
&= \lim_{i\to 0^+} \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - ni - i}{i[(1+i)^n - 1]} \overset{L'H}{=} \lim_{i\to 0^+} \frac{(n+1)(1+i)^n - n - 1}{(1+i)^n - 1 + in(1+i)^{n-1}} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{i\to 0^+} \frac{n(n+1)(1+i)^{n-1}}{n(1+i)^{n-1} + n(1+i)^{n-1} + in(n-1)(1+i)^{n-2}} \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}
$$

- $\lim_{i\to+\infty} \Phi = 1$. Imediato:

$$
\lim_{i\to+\infty} \Phi = \lim_{i\to+\infty} \left[1 + \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] = 1 + 0 - 0 = 1.
$$

Além disso, pelo Lema 3.0.2, a derivada de Φ, em relação a i, é negativa, resultando Φ decrescente. Portanto, as parcelas no SAC só serão maiores do que as do PRICE para valores de $k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, onde a notação $\lfloor\ \rfloor$ significa a *função maior inteiro*. Além disso, quando a taxa for suficientemente alta e $n \neq 2$, quase todas as parcelas PRICE serão maiores que as do SAC.

Voltemos ao Teorema 3.0.4 para estudar a diferença absoluta $\Delta_{Pa} := P_{1S} - P_{1P}$ e a diferença relativa $\Delta_{Pr} := \frac{P_{1S} - P_{1P}}{P_{1P}}$, as quais têm uma importância prática na hora de se financiar um imóvel, uma vez que tal diferença pode ser tamanha de modo a inviabilizar a escolha da tabela SAC, por conta da quantia disponível pelo mutuário para assumir inicialmente prestações mais altas.

Pelos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2, temos que

$$
\Delta_{Pa} = \left(\frac{1}{n} + i\right) D_0 - D_0 \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = D_0 \left[\frac{1}{n} - \frac{i}{(1+i)^n - 1}\right].
$$

Teorema 3.0.5. *Δ_{Pa} é crescente em relação a D_0 e Δ_{Pr} não depende de D_0.*

Demonstração. Derivando, temos que $\frac{d\Delta_{Pa}}{dD_0} = \frac{1}{n} - \frac{i}{(1+i)^n - 1}$. Por outro lado, pela desigualdade de Bernoulli (Teorema 1.5.3), $(1+i)^n > 1 + ni$. Logo, $\frac{d\Delta_{Pa}}{dD_0} > 0$. Portanto, Δ_{Pa} é crescente. A segunda parte do teorema é imediata. $\square$

Já o próximo teorema nos diz que Δ_{Pa} cresce em relação i, tendendo a $\frac{D_0}{n}$ quando $i \to +\infty$. Ou seja, para i suficientemente alto resulta em $\Delta_{Pa} \cong \frac{D_0}{n}$.

Teorema 3.0.6. *i) Δ_{Pa} é crescente em relação a i.*

ii) $\lim_{i\to+\infty}\Delta_{Pa} = \frac{D_0}{n}$.

Demonstração. *i*) Derivando e fazendo $1+i=x$, temos que

$$\frac{d\Delta_{Pa}}{di} = -D_0\frac{(1+i)^n - 1 - in(1+i)^{n-1}}{((1+i)^n-1)^2} = -D_0\frac{x^n - 1 - (x-1)nx^{n-1}}{(x^n-1)^2}$$
$$= D_0\frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x^n-1)^2}.$$

Daí, teremos que $\frac{d\Delta_{Pa}}{di} > 0$ se, e somente se, $q(x) := (n-1)x^n - nx^{n-1} + 1 > 0$. Agora pelo Lema 3.0.1, $q > 0$, visto que $q(x) = \frac{p(x)}{x}$. Consequentemente, Δ_{Pa} é crescente.
ii) Aplicando o Teorema de L'Hôpital obtemos:

$$\lim_{i\to+\infty}\Delta_{Pa} = \lim_{i\to+\infty} D_0\left[\frac{1}{n} - \frac{i}{(1+i)^n-1}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \frac{D_0}{n} - \lim_{i\to+\infty} D_0\frac{1}{n(1+i)^{n-1}} = \frac{D_0}{n}.$$

$\square$

Tomando $n = 240$, a diferença relativa Δ_{Pr} tem o seu gráfico na Figura 3.3, nos indicando um crescimento até uma taxa de 0,75%, e depois, um decrescimento; e tem o valor um máximo de 29,67%, o que representa uma diferença considerável na hora da escolha do PRICE ou SAC.

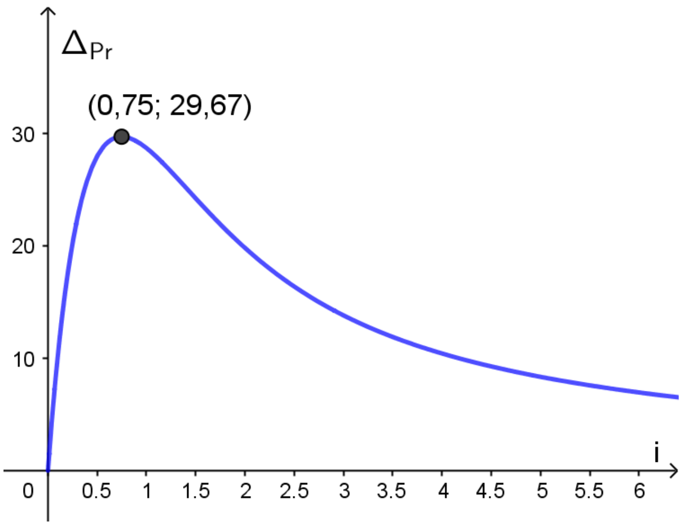


Figura 3.3: $P_{1S} - P_{1P}$ em função de i.

Por último, vejamos o comportamento de Δ_{Pa} em relação a n.

Para valores de i iguais a 0,90%, 0,95% e 1,00% (valores próximos dos praticados atualmente no mercado) e D_0 = R\$ 150.000,00, obtemos os gráficos da Figura 3.4 em função de n, onde P, Q e R são pontos de máximo de forma que Δ_{Pa} é crescente até certa prestação e depois decrescente tendendo a zero, pois

$$\lim_{n\to+\infty}\Delta_{Pa} = \lim_{n\to+\infty} D_0\left[\frac{1}{n} - \frac{i}{(1+i)^n-1}\right] = 0.$$

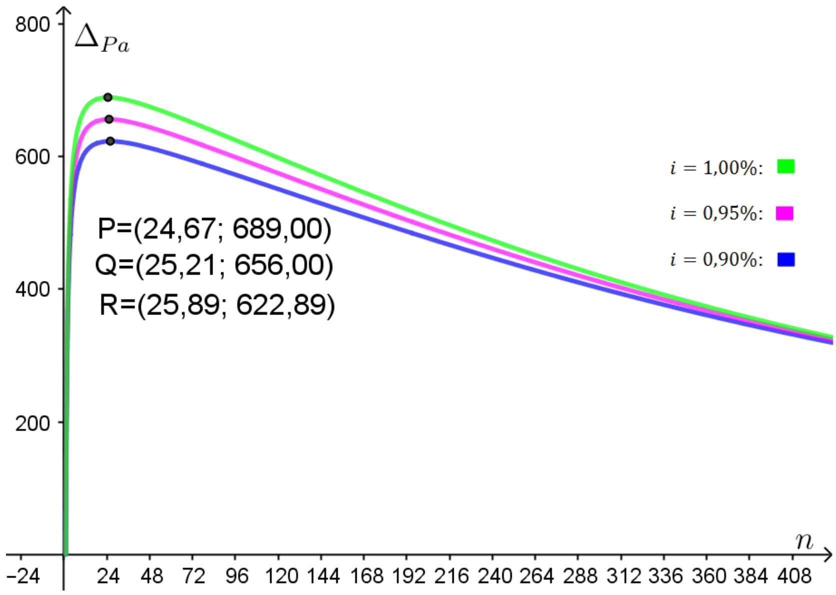


Figura 3.4: $P_{1S} - P_{1P}$ em função de n.

A Tabela 3.3 nos fornece o valor de P_{1S} e P_{1P} para alguns valores de n. Com ela percebemos o patamar inicial de valor de prestação a ser assumido no início de financiamento imobiliário. Além disso, observa-se que, fixado i, um mutuário terá, a partir de um prazo

n	120	180	240	300
P_{1S}	R$ 2.600,00	R$ 2.183,33	R$ 1.975,00	R$ 1.850,00
P_{1P}	R$ 2.049,31	R$ 1.686,10	R$ 1.527,92	R$ 1.448,53

Tabela 3.3: Primeira parcela no SAC e PRICE para $i = 0,90\%$.

superior a 26 meses de financiamento, uma diferença entre a primeira prestação nos dois sistemas cada vez menor, porém de forma lenta. Nota-se que para 240 meses (20 anos) a diferença ainda continua significativa e com valores individuais ainda altos. Uma visão simultânea com mais valores pode ser conseguida através da ferramenta dinâmica "controle deslisante" do GeoGebra, a qual é trabalhada no último capítulo.

Pelo que vimos até aqui, buscando-se no mercado financiar valores menores com prazos mais esticados e taxas mais baixas, o mutuário poderá aumentar as chances de se ter à sua escolha os dois sistemas.

Agora iremos analisar o valor das amortizações.

Teorema 3.0.7. *Seja $n \in N$, com $n \geq 2$. Então os valores das primeira e última amortização nos sistemas SAC e PRICE satisfazem:*

i) $A_{1S} > A_{1P}$.

ii) $A_{nP} > A_{nS}$.

Demonstração. Vimos que $A_{kS} = \frac{D_0}{n}$ e $A_{kP} = D_0 i \frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}$.

i) Pela desigualdade de Bernoulli (Teorema 1.5.3),

$$(1+i)^n - 1 > ni \Leftrightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} > n \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{i}{(1+i)^n - 1},$$

e multiplicando por D_0, segue o resultado.

ii) Pelos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2 temos que

$$P_{nS} = \left[\frac{1}{n} + i\frac{1}{n}\right] D_0 = (1+i)\frac{D_0}{n} = (1+i)A_{nS}$$

e

$$(1+i)A_{nP} = (1+i)D_0 i \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1} = D_0 i \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P_{nP}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.0.4, $P_{nP} > P_{nS}$. Logo, $A_{nP} > A_{nS}$.

□

Corolário 3.0.4. *Se $n \geq 2$ então existe β, onde $1 < \beta \leq n$, tal que $A_{kS} < A_{kP}$, para todo k com $\beta \leq k \leq n$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior e sabendo-se que a amortização no SAC é constante e no PRICE é crescente, segue-se o resultado. □

Observação 3.0.3. *O caso não tratado no teorema anterior, quando $n = 1$ e $k = 1$, é facilmente analisado: $A_{1S} = D_0 = A_{1P}$, bastando substituir os valores de n e k na primeira (e única) amortização nos dois sistemas.*

Considerações análogas às prestações podem ser feitas para estimar o valor de β, contudo não o faremos aqui. Optamos por estudar logo a seguir o *total amortizado* até determinada parcela e o prazo necessário para amortizar uma determinada fração da dívida inicial D_0, que são de maior interesse prático.

Teorema 3.0.8. *O total amortizado até a $t-$ésima prestação é:*

i) (SAC): $\sum_{k=1}^{t} A_{kS} = \frac{t}{n} D_0$. *E se* $\sum_{k=1}^{t} A_{kS} = \lambda D_0$, *com* $0 < \lambda \leq 1$, *então* $t = n\lambda$.

ii) (PRICE): $\sum_{k=1}^{t} A_{kP} = D_0 \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^n - 1}$. *E se* $\sum_{k=1}^{t} A_{kP} = \lambda D_0$, *com* $0 < \lambda \leq 1$, *então* $t = \log_{1+i} [\lambda((1+i)^n - 1) + 1]$.

Demonstração. i) Imediato, pois $A_{kS} = \frac{D_0}{n}$.

ii) $\sum\limits_{k=1}^{t} A_{kP} = \sum\limits_{k=1}^{t} D_0 i \frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n-1} = \left[(1+i)^0 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{t-1}\right] \frac{iD_0}{(1+i)^n-1}$, onde a soma da PG é

$$a_1 \frac{q^m - 1}{q - 1} = 1 \frac{(1+i)^t - 1}{1+i-1} = \frac{(1+i)^t - 1}{i}.$$

E, portanto, $\sum\limits_{k=1}^{t} A_{kP} = \frac{(1+i)^t-1}{i} \frac{iD_0}{(1+i)^n-1} = D_0 \frac{(1+i)^t-1}{(1+i)^n-1}$. A segunda parte:

$$D_0 \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^n - 1} = \lambda D_0 \Leftrightarrow (1+i)^t = \lambda((1+i)^n - 1) + 1 \Leftrightarrow t = \log_{1+i}\left[\lambda((1+i)^n - 1) + 1\right],$$

para $i \neq 0$.

□

O teorema a seguir nos fornece quando metade da dívida é amortizada.

Teorema 3.0.9. *i) (SAC) Se n é par então $\sum\limits_{k=1}^{n/2} A_{kS} = \frac{D_0}{2}$, e se n é ímpar, $\sum\limits_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} A_{kS} > \frac{D_0}{2}$.*

ii) (PRICE) Se n é par então $\sum\limits_{k=1}^{n/2} A_{kP} < \frac{D_0}{2}$, e se n é ímpar maior ou igual 3 então $\sum\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} A_{kP} < \frac{D_0}{2}$. Em palavras: metade da dívida no PRICE só é amortizada após a metade do prazo total.

Demonstração. i) Basta tomar $t = \frac{n}{2}$ e $t = \frac{n+1}{2}$ no item i do teorema anterior.

ii) Usando outra vez o teorema anterior, $\sum\limits_{k=1}^{n/2} A_{kP} = D_0 \frac{(1+i)^{\frac{n}{2}}-1}{(1+i)^n-1}$ (n par) e $\sum\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} A_{kP} = D_0 \frac{(1+i)^{\frac{n-1}{2}}-1}{(1+i)^n-1}$ (n ímpar), e $(1+i)^n - 1 = \left((1+i)^{\frac{n}{2}} - 1\right)\left((1+i)^{\frac{n}{2}} + 1\right)$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n/2} A_{kP} = D_0 \frac{(1+i)^{\frac{n}{2}} - 1}{(1+i)^n - 1} = D_0 \frac{1}{(1+i)^{\frac{n}{2}} + 1} < \frac{D_0}{2}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} A_{kP} = D_0 \frac{(1+i)^{\frac{n-1}{2}} - 1}{(1+i)^n - 1} < D_0 \frac{(1+i)^{\frac{n-1}{2}} - 1}{(1+i)^{n-1} - 1} = D_0 \frac{1}{(1+i)^{\frac{n-1}{2}} + 1} < \frac{D_0}{2}.$$

□

Exemplo 3.0.5. *Um empréstimo é realizado em 48 prestações mensais a uma taxa de 4% a.m. no sistema PRICE. Pelo teorema anterior, 25%, 50% e 75% da dívida serão amortizadas para os valores de t iguais a 22,24, 33,94 e 41,93, respectivamente. Assim, as amortizações ocorrerão nas 23^a, 34^a e 42^a parcelas.*

Capítulo 4

Matemática Financeira: um pouco do cálculo do Imposto de Renda

Diversos impostos são cobrados pelos governos ao redor do mundo. Aqui no Brasil um deles é denominado Imposto de Renda (IR), tributado pelo governo federal, tendo sido instituído por força do artigo 31 da Lei nº 4.625 de 31 de dezembro de 1922. O Decreto nº 3.000, de 26 de março de 1999, regulamenta a tributação, fiscalização, arrecadação e administração do IR e proventos de qualquer natureza. E normas gerais atualizadas de tributação relativas às pessoas físicas constam na Instrução Normativa da Receita Federal do Brasil (RFB) nº 1500, de 29 de outubro de 2014, com suas modificações posteriores. História, trajetória, curiosidades e legislações do IR estão disponíveis de forma on-line em [13].

Neste texto iremos trabalhar com o IR de pessoa física no regime da Consolidação das Leis do Trabalho (CLT) com carteira assinada, considerando *apenas* deduções com *dependentes* e com a *contribuição previdenciária oficial* sob responsabilidade do Instituto Nacional do Seguro Nacional (INSS) - um órgão federal; situações essas, nas quais abrange um grande número de contribuintes. Por outro lado, não discutiremos os impactos sócio-econômico e político das questões ligadas ao total arrecadado, às mudanças no número de faixas e suas alíquotas e às atualizações da tabela ao longo dos anos.

Aqui, diferentemente do tratamento comumente dado através de planilhas eletrônicas, o qual só proporciona uma visão isolada para cada entrada do salário bruto s, o estudo será explorado através do conceito de função definida por várias sentenças, especificamente as funções imposto de renda e salário líquido, com seus respectivos gráficos, variando os parâmetros salário bruto e número de dependentes, proporcionando uma visão ampla, comparativa e simultânea para diferentes valores de s; o que não é possível através das planilhas. Também será estudada a taxa efetiva do imposto de renda, a qual é pouco difundida.

Com essa "nova" abordagem, nos propormos a dar uma contribuição para clarear o entendimento dos valores arrecadados com esse imposto tão presente na vida de milhões de pessoas, proporcionando um tratamento matemático adequado e fornecendo uma aplicação da *função afim*. Consequentemente apresentar mais uma possibilidade do ensino contextualizado da matemática, demonstrando sua beleza e aplicabilidade, ao mesmo tempo em que se pode discutir questões de cidadania.

Desde já chamamos a atenção para os valores encontrados, os quais poderão ter pequenas diferenças devido a aproximações nos cálculos.

4.1 Contribuição Previdenciária Oficial

As alíquotas para contribuição previdenciária do INSS são apresentadas na Tabela 4.1, onde o "salário de contribuição" é o salário bruto. Essa tabela pode ser representada

Tabela para Empregado, Empregado Doméstico e Trabalhador Avulso 2017	
Salário de Contribuição (R$)	Alíquota
Até R$ 1.659,38	8%
De R$ 1.659,39 a R$ 2.765,66	9%
De R$ 2.765,67 até R$ 5.531,31	11%

Tabela 4.1: Tabela de Contribuição Previdenciária.
Fonte: Sítio da Previdência Social.

por uma função de quatro sentenças, onde cada uma delas é uma função afim restrita a um intervalo. De fato, se P representa o valor da contribuição previdenciária mensal em função do salário bruto s, então

$$P(s) = \begin{cases} 0{,}08s, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0{,}09s, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}11s, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 5.531{,}31 \\ 608{,}44, & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases},$$

considerando como o domínio o conjunto $[0, +\infty)$. O seu gráfico é indicado na Figura 4.1 e a imagem do intervalo de definição para cada sentença é:

$Im_1 = Im(P,\ 0 \leq s \leq 1659{,}38) = [0; 132{,}75]$,

$Im_2 = Im(P,\ 1.659{,}39 \leq s \leq 2.765{,}66) = [149{,}35; 248{,}10]$,

$Im_3 = Im(P,\ 2.765{,}67 \leq s \leq 5.531{,}31) = [304{,}22; 608{,}44]$,

$Im_4 = Im(P,\ s > 5.531{,}31) = \{608{,}44\}$.

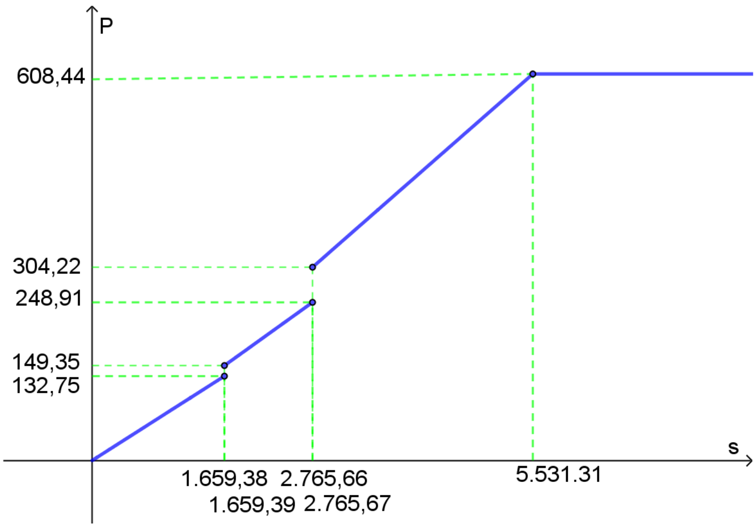


Figura 4.1: Contribuição previdenciária em função do salário bruto.

Observa-se que existem dois “saltos”no gráfico de P caracterizando *pontos de descontinuidade*: aumentos de R$ 0,01 em $s = 1.659{,}38$ e $s = 2.765{,}66$ geram aumentos de contribuição nos valores de R$ 16,60 e R$ 55,31, respectivamente. Sendo que a segunda variação é bem maior, devido à mudança de alíquota e o valor de s também serem maiores. Esses dois pontos de mudanças da alíquota da contribuição previdenciária serão importantes para compreensão de *aparentes erros* no cálculo do IR e do salário líquido.

O valor de R$ 608,44 é chamado de **teto de contribuição previdenciária**; a partir de $s =$ R$ 5.531,31 a contribuição é fixada nesse valor. Daí, uma vez que se contribui no máximo em cima de R$ 5.531,31, este valor também é o máximo (ano 2017) para recebimento de aposentadoria pelo INSS.

É importante ver a taxa de variação de P: na primeira sentença temos $P = 0{,}08s$, tendo taxa de variação igual a 0,08 (ver a seção de função afim), ou seja, a cada aumento de um real no salário bruto, contribui-se R$ 0,08 a mais para o INSS (exceto na extremidade direita do intervalo). Analogamente para a segunda e terceira sentença, com taxas de 0,09 e 0,11. E na última a taxa de variação é nula.

4.2 Imposto de Renda

No cálculo IR, consideremos s o salário bruto, P o valor pago ao INSS, n o número de dependentes e d o valor a deduzir por dependente indicado na Tabela 4.2. A **Base de Cálculo** é definida por $B_c = s - P - nd$.
O valor do imposto de renda é

$$I_R = B_c * i_R - P_d,$$

onde i_R é a alíquota do IR e P_d é o valor da parcela a deduzir, indicados na Tabela 4.3. Antes de construirmos a função imposto de renda, daremos a seguir uma explicação do P_d, o que não encontramos em publicações.

Ano-calendário	Quantia a deduzir por dependente (R$)
2015 (a partir do mês de abril) e posteriores	189,59

Tabela 4.2: IR: Dedução mensal por dependente. Ano: 2017.
Fonte: Sítio da Receita Federal.

Base de Cálculo (R$)	Alíquota(%)	Parcela a deduzir do IRPF(R$)
Até 1.903,98	-	-
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Tabela 4.3: IR: Tabela de incidência mensal. Ano: 2017.
Fonte: Sítio da Receita Federal.

A regra geral é a seguinte: aplicada a alíquota dentro de uma faixa da base de cálculo, o excedente nas faixas anteriores deverá ser abatido, o que é chamado de *parcela a deduzir*.

Na primeira faixa, f_1, até R$ 1.903,98, não paga-se IR, ou seja, é isento. Na segunda faixa, f_2, de R$ 1.903,99 até R$ 2.826,65, a alíquota é de 7,5%. Agora observe que ao aplicar essa alíquota, estaremos aplicando-a também na faixa isenta, pois se $B_c \in [1.903{,}99, 2.826{,}65]$ então $B_c = 1.903{,}98 + \lambda$ com $0{,}01 \leq \lambda \leq 922{,}67$, onde $922{,}67 = \underbrace{2.826{,}65}_{\text{teto de } f_2} - \underbrace{1.903{,}98}_{\text{teto de } f_1}$. Assim, temos que diminuir 7,5% de R$ 1.903,98, resultando em $P_d =$ R$ 142,80. E de forma análoga, faremos nas outras faixas.

A segunda faixa, f_3, de R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05, tem alíquota de 15%, com $B_c = 2.826{,}65 + \alpha$, com $0{,}01 \leq \alpha \leq 924{,}40$, onde

$$924{,}40 = \underbrace{3.751{,}05}_{\text{teto de } f_3} - \underbrace{2.826{,}65}_{\text{teto de } f_2}.$$

Assim, temos que diminuir $15\% - 7{,}5\% = 7{,}5\%$ do teto de f_2, pois a alíquota da segunda faixa é de 7,5%, mais a parcela a deduzir desta faixa já calculada anteriormente, dando um total de $P_d = 212{,}00 + 142{,}80 =$ R$ 354,80.

A quarta faixa, f_4, de R\$ 3.751,06 até R\$ 4.664,68 tem alíquota de 22,5%, com $B_c = 3.751{,}05 + \beta$, com $0{,}01 \leq \beta \leq 913{,}63$, onde

$$913{,}63 = \underbrace{4.664{,}68}_{\text{teto de } f_4} - \underbrace{3.751{,}05}_{\text{teto de } f_3}.$$

Assim, temos que diminuir 22,5%−15,0% = 7,5% do teto de f_3, pois a alíquota da terceira faixa é de 15%, mais a parcela a deduzir desta faixa, dando um total de
$P_d = 281{,}33 + 354{,}80 = \text{R\$ } 636{,}13$.

E, por fim, a última faixa, acima de R\$ 4.664,68, tem alíquota de 22,5%, com $B_c = 4.664{,}68 + \psi$, com $\psi \geq 0{,}01$. Assim, temos que diminuir 27,5% − 22,5% = 5,0% do teto de f_4, pois a alíquota da quarta faixa é de 22,5%, mais a parcela a deduzir desta faixa, dando um total de $P_d = 233{,}23 + 636{,}13 = \text{R\$ } 869{,}36$.

Pelos cálculos anteriores, a Base de Cálculo é distribuída nas cinco faixas, tendo o *valor máximo* de tributação de R\$ 1.903,98, R\$ 922,67, R\$ 924,40 e R\$ 913,63 nas faixas 1, 2, 3 e 4, respectivamente; sendo *ilimitado* na última faixa.

Exemplo 4.2.1. *Um funcionário de uma empresa recebe um salário bruto de* R\$ 5.300,00 *e não tem dependentes. Vamos escalonar o resultando do IR a pagar de acordo as faixas da Base de Cálculo. Temos* $P = 0{,}11 \cdot 5300 = \text{R\$ } 583{,}00$, $B_c = 5300 - 583 = \text{R\$ } 4.717{,}00$. *Os resultados estão na Tabela 4.4. Para o cálculo direto basta fazer*

$$I_R = B_c * i_R - P_d = 4717 \cdot 27{,}5\% - 869{,}36 = R\$\, 427{,}82.$$

Faixa da Base de Cálculo		Alíquota	Valor do imposto
1a faixa	1.903,98	isento	0,00
2a faixa	922,67	7,5%	69,20
3a faixa	924,40	15,0%	138,66
4a faixa	913,63	22,5%	205,57
5a faixa	52,32	27,5%	14,39
Totais	4.717,00	-	427,82

Tabela 4.4: Demonstrativo de apuração do IR.

Observação 4.2.1. *A Receita Federal ([14]) disponibiliza um simulador on-line para verificação da apuração escalonada do IR, onde é preciso entrar com o salário bruto e o valor das deduções.*

4.3 Funções do Imposto de Renda e do Salário Líquido

Os escritórios contábeis têm, em tabelas eletrônicas, fórmulas para o cálculo da previdência, imposto de renda e do salário líquido. Apresentaremos a seguir formulações matemáticas do ponto de vista de função e sua variação e seu gráfico. Faremos algumas análises, mas não seremos exaustivos; outras poderão ser aplicadas em sequências didáticas no processo de ensino-aprendizagem.

Primeiro trabalharemos com o IR sem dependentes. Depois, compararemos nos casos em que o número de dependentes for de 1 a 3. O ponto de partida será a tabela 4.1, pois essa está em função do salário bruto. No caso de atualização dessa tabela ou uma das tabelas 4.2 e 4.3 pelo governo federal, basta aplicar raciocínio semelhante.

A construção e análise de gráficos são habilidades importantes para diversas áreas de conhecimento. Com eles, em muitos casos, podemos ter uma visão de como as funções estão variando. Já valores pontuais, talvez sejam melhor obtidos pela expressão analítica da função. Pode ocorrer que o olhar gráfico por si só não seja suficiente para uma análise precisa de características de uma função, pois a exibição gráfica pode conter limitações visuais, sejam elas computacionais ou manuais. Assim, precisamos confirmar por métodos algébricos ou analíticos propriedades da função percebidos ou não na exibição gráfica. Obtida essa confirmação, poderemos olhar diretamente para o gráfico, como fazermos, por exemplo, no gráficos das funções afim e exponencial. Em particular, nas funções definidas por mais de uma sentença, temos que ter um cuidado especial nos pontos de mudança de sentença, pois pode não ficar perceptível o comportamento gráfico nesses pontos. E nesse sentido, estaremos calculando a imagem no intervalo que define cada sentença.

Denotemos por n, i_I e i_R, o número de dependentes e as alíquotas do INSS e IR, respectivamente.

1o CASO: sem dependentes.

IMPOSTO DE RENDA

Ao receber um salário s poderá ser aplicado uma das três alíquotas do INSS.
Se $i_I = 8\%$ então $B_c < s \leq 1.659{,}38$, e por seguinte, $I_R = 0$.

Se $i_I = 9\%$, consideremos dois casos:
a) teto para $I_R = 0$: $B_c = 0{,}91s \leq 1.903{,}98 \Leftrightarrow s \leq 2.092{,}29$;
b) teto para essa alíquota: $s \leq 2.765{,}66$ com $i_R = 7{,}5\%$.

Se $i_I = 11\%$, consideremos alguns casos:

a) teto para $i_R = 7{,}5\% :\ B_c = 0{,}89s \leq 2.826{,}65 \Leftrightarrow s \leq 3.176{,}01$;

b) teto para $i_R = 15{,}0\% :\ B_c = 0{,}89s \leq 3.751{,}05 \Leftrightarrow s \leq 4.214{,}66$;

c) teto para $i_R = 22{,}5\% :\ B_c = 0{,}89s \leq 4,664{,}68 \Leftrightarrow s \leq 5.241{,}21$;

d) teto para para essa alíquota: $s \leq 5.531{,}31$, com $i_R = 27{,}5\%$.

E, por último, se desconta o valor máximo para o INSS no valor de R\$ 608,44, que é de 11% de R\$ 5.531,31, com $i_R = 27{,}5\%$,

Do exposto acima o valor de $I_R = (s - P - nd) \cdot i_R - P_d$ em função do salário bruto s é:

$$I_R(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.092{,}29 \\ (s - 0{,}09s) \cdot 0{,}075 - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.092{,}29 < s \leq 2.765{,}66 \\ (s - 0{,}11s) \cdot 0{,}075 - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.176{,}01 \\ (s - 0{,}11s) \cdot 0{,}15 - 354{,}80, & \text{se} \quad 3.176{,}01 < s \leq 4.214{,}66 \\ (s - 0{,}11s) \cdot 0{,}225 - 636{,}13, & \text{se} \quad 4.214{,}66 < s \leq 5.241{,}21 \\ (s - 0{,}11s) \cdot 0{,}275 - 869{,}36, & \text{se} \quad 5.241{,}21 < s \leq 5.531{,}31 \\ (s - 608{,}44) \cdot 0{,}275 - 869{,}36, & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.092{,}29 \\ 0{,}06825s - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.092{,}29 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}06675s - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.176{,}01 \\ 0{,}13350s - 354{,}80, & \text{se} \quad 3.176{,}01 < s \leq 4.214{,}66 \\ 0{,}20025s - 636{,}13, & \text{se} \quad 4.214{,}66 < s \leq 5.241{,}21 \\ 0{,}24475s - 869{,}36, & \text{se} \quad 5.241{,}21 < s \leq 5.531{,}31 \\ 0{,}27500s - 1.036{,}68, & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases}$$

O seu gráfico está indicado na Figura 4.2.

ANÁLISE:

Cálculo da imagem:

$Im_1 = Im(I_R,\ 0 \leq s \leq 1.659{,}38) = \{0\}$,

$Im_2 = Im(I_R,\ 1.659{,}39 \leq s \leq 2.092{,}29) = \{0\}$,

$Im_3 = Im(I_R,\ 2.092{,}30 \leq s \leq 2.765{,}66) = [0; 45{,}96]$,

$Im_4 = Im(I_R,\ 2.765{,}67 \leq s \leq 3.176{,}01) = [41{,}81; 69{,}20]$,

$Im_5 = Im(I_R,\ 3.176{,}02 \leq s \leq 4.214{,}66) = [69{,}20; 207{,}86]$,

$Im_6 = Im(I_R,\ 4.214{,}67 \leq s \leq 5.241{,}21) = [207{,}86; 413{,}42]$,

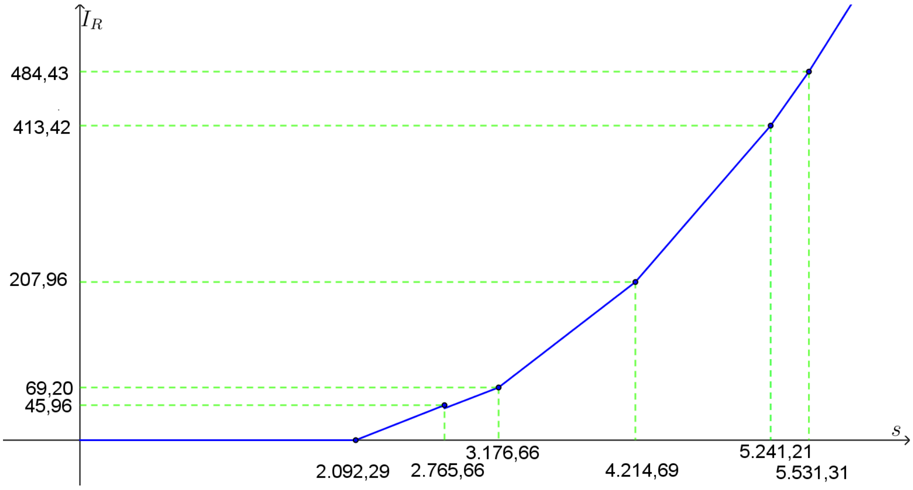


Figura 4.2: Imposto de Renda sem Dependente.

$Im_7 = Im(I_R,\ 5.241{,}22 \leq s \leq 5.531{,}31) = [413{,}43; 484{,}43]$,
$Im_8 = Im(I_R,\ s > 5.531{,}31) = [484{,}43; +\infty)$.

Daí, concluímos que I_R não é injetora, isto é, existem salários brutos diferentes com o mesmo imposto de renda a pagar: temos $Im_2 \cap Im_3 = [41{,}81;\ 45{,}96]$, o que implica em uma variação de imposto de $\Delta I_R = -4{,}15$, ou seja, um aumento de R\$ 0,01 em $s =$ R\$ 2.765,66, resulta em um decréscimo de R\$ 4,15 no imposto de renda a pagar; o que pode parecer uma erro a princípio, já que ganha-se mais e paga-se menos I_R; mas não é, pois apesar do valor do I_R ser menor, a dedução da contribuição previdenciária é maior, resultando, como veremos a seguir, um salário líquido menor. Assim, I_R apresenta uma descontinuidade em $s = 2.765{,}66$.

Nota-se que a partir do gráfico, para $s \leq 5.531{,}31$, o sexto intervalo possui a maior variação de IR no valor de $413{,}42 - 207{,}86 =$ R\$ 205,86.

Na mudança de intervalo a inclinação da reta aumenta, exceto do terceiro para quarto (devido à variação de alíquota do INSS), proporcionando uma taxa de variação do IR maior, isto é, o aumento do imposto a pagar em cada sentença, para cada real a mais no salário bruto, é maior do que na sentença anterior.

SALÁRIO LÍQUIDO

O salário líquido recebido pelo trabalhador, $s_L = s - P - I_R$, em função do salário bruto, s, é:

$$s_L(s) = s - P - I_R$$

$$= \begin{cases} s - 0{,}08s, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ s - 0{,}09s, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.092{,}29 \\ s - 0{,}09s - (0{,}06825s - 142{,}80), & \text{se} \quad 2.092{,}29 < s \leq 2.765{,}66 \\ s - 0{,}11s - (0{,}06675s - 142{,}80), & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.176{,}01 \\ s - 0{,}11s - (0{,}1335s - 354{,}80), & \text{se} \quad 3.176{,}01 < s \leq 4.214{,}66 \\ s - 0{,}11s - (0{,}20025s - 636{,}13), & \text{se} \quad 4.214{,}66 < s \leq 5.241{,}21 \\ s - 0{,}11s - (0{,}24475s - 869{,}36), & \text{se} \quad 5.241{,}21 < s \leq 5.531{,}31 \\ s - 608{,}44 - (0{,}275s - 1.036{,}68), & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0{,}92000s, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0{,}91000s, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.092{,}29 \\ 0{,}84175s + 142{,}80, & \text{se} \quad 2.092{,}29 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}82325s + 142{,}80, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.176{,}01 \\ 0{,}75650s + 354{,}80, & \text{se} \quad 3.176{,}01 < s \leq 4.214{,}66 \\ 0{,}68975s + 636{,}13, & \text{se} \quad 4.214{,}66 < s \leq 5.241{,}21 \\ 0{,}64525s + 869{,}36, & \text{se} \quad 5.241{,}21 < s \leq 5.531{,}31 \\ 0{,}72500s + 428{,}24, & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases}.$$

E o seu gráfico está indicado na Figura 4.3.

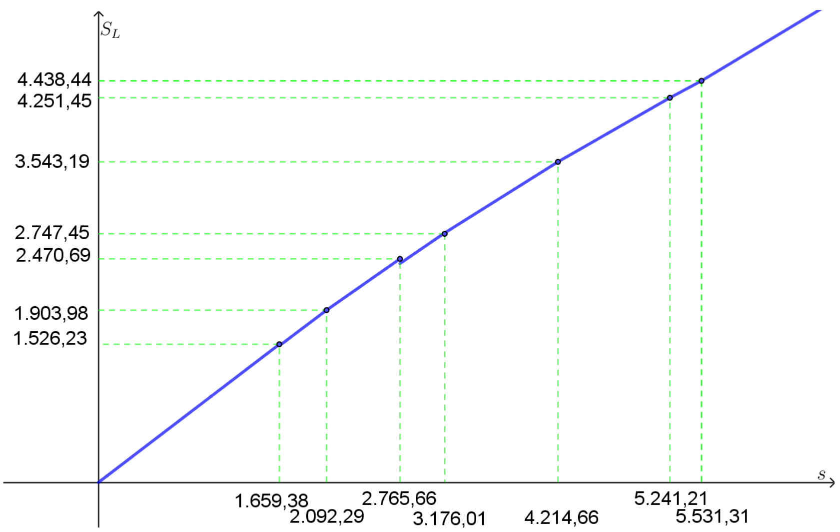


Figura 4.3: Salário Líquido sem Dependentes.

ANÁLISE:

Imagem em cada sentença:

$Im_1 = Im(S_L,\ 0 \leq x \leq 1.659{,}38) = [0; 1.526{,}63],$
$Im_2 = Im(S_L,\ 1.659{,}38 < s \leq 2.092{,}29) = [1.510{,}04; 1.903{,}98],$
$Im_3 = Im(S_L,\ 2.092{,}29 < s \leq 2.765{,}66) = [1.903{,}99; 2.470{,}79],$
$Im_4 = Im(S_L,\ 2.765{,}66 < s \leq 3.176{,}01) = [2.419{,}64; 2.757{,}45],$
$Im_5 = Im(S_L,\ 3.176{,}01 < s \leq 4.214{,}66) = [2.757{,}46; 3.543{,}19],$
$Im_6 = Im(S_L,\ 4.214{,}66 < s \leq 5.241{,}21) = [3.543{,}20; 4.251{,}25],$
$Im_7 = Im(S_L,\ 5.241{,}21 < s \leq 5.531{,}31) = [4.251{,}26; 4.438{,}44],$
$Im_8 = Im(S_L,\ s > 5.531{,}31) = [4.438{,}45; +\infty).$

Daí, concluímos que S_L também não é injetora, pois existem salários brutos diferentes com o mesmo salário líquido. Temos $Im_1 \cap Im_2 = [1.510{,}04; 1.526{,}63]$, o que implia $\Delta S_L = -16{,}59$; e $Im_3 \cap Im_4 = [2.419{,}64; 2.470{,}79]$, implicando $\Delta S_L = -51{,}15$. Um aumento de R\$ 0,01 em $s =$ R\$ 1.659,38 e em $s =$ R\$ 2.765,66, resulta em um decréscimo no salário líquido de R\$ 16,59 e R\$ 51,15, respectivamente, o que ocorre, como mencionamos antes, pelas mudanças (aumento) de faixa da contribuição previdenciária; o que pode ser percebido nos gráficos ampliados nas Figuras 4.4 e 4.5. Para saber a variação no líquido ΔS_L para dois valores de s, digamos s_1 e s_2 com $s_1 < s_2$, em sentenças diferentes, basta tomar $\Delta S_L = S_L(s_2) - S_L(s_1)$.

É importante observar que a taxa de variação de S_L vai diminuindo ao mudar de sentença (exceto da penúltima para a última), e com isso, um real de aumento no salário bruto dentro de uma mesma sentença tem um efeito menor no salário líquido a cada sentença. Por exemplo, na terceira e quinta, S_L varia a uma taxa de 0,84175 e 0,75650, respectivamente. Daí, R\$ 100,00 de aumento em cima dos salários de R\$ 2.500,00 e R\$ 3.500,00, geram um aumento no líquido de R\$ 84,18 e R\$ 75,65, respectivamente - um bom exemplo prático para o estudante do Ensino Médio entender o *significado* da taxa de variação da função afim.

2o CASO: com dependentes.

IMPOSTO DE RENDA

Consideremos três casos, conforme a tabela de contribuição mensal da Previdência, onde deduzimos um *"algoritmo"* em função de n:

1. Alíquota de $i_I = 8\%$ com $s \leq 1.659{,}38$:
   sendo $B_c < s$, então $B_c < 1.903{,}98$, e por seguinte, $I_R = 0$.

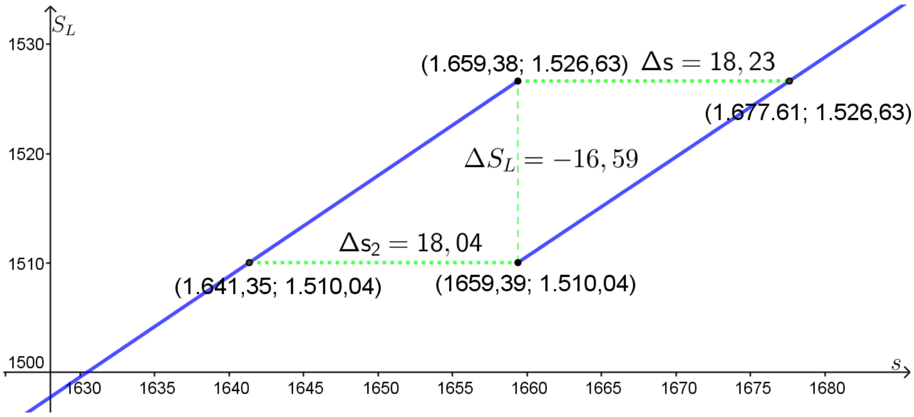


Figura 4.4: 1a. descontinuidade de S_L sem dependentes.

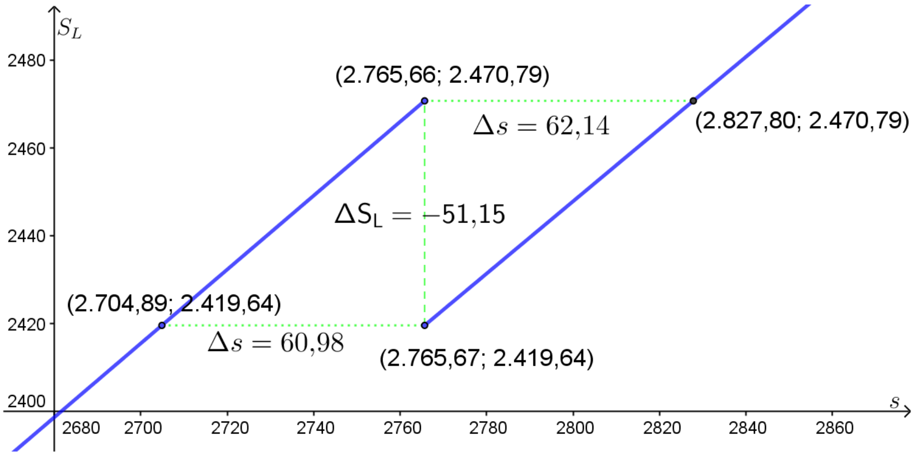


Figura 4.5: 2a. descontinuidade de S_L sem dependentes.

2. Alíquota de $i_I = 9\%$, com $1.659{,}38 < s \leq 2.765{,}66$, consideremos duas possibilidades em ordem:

   a) teto para $I_R = 0$: $B_c = 0{,}91s - n \cdot 189{,}59 \leq 1.903{,}98 \Leftrightarrow s \leq \dfrac{1.903{,}98 + n \cdot 189{,}59}{0{,}91} := \alpha$, obtendo o intervalo $1.659{,}38 < s \leq \alpha$; sendo que, ocorrendo $\alpha > 2.765{,}66$, toma-se o intervalo $1.659{,}38 < s \leq 2.765{,}66$ (teto de i_I) e aplica-se o caso 3a) em diante, considerando as condições iniciais do caso 3.

   b) se $\alpha < 2.765{,}66$: consideramos o teto para essa alíquota, resultando $\alpha < s \leq 2.765{,}66$, com $i_R = 7{,}5\%$.

3. Alíquota de $i_I = 11\%$, com $2.765{,}66 < s \leq 5.531{,}31$:
   consideremos algumas possibilidades em ordem, de modo que se ocorrer $s > 5.531{,}31$ para algum valor de n, toma-se os intervalos $\beta < s \leq 5.531{,}31$, onde β é o máximo da faixa imediatamente anterior, e $5.531{,}31 < s \leq \theta$, com $P = 608{,}44$, onde θ_1 é tal que $B_c = s - 608{,}44 - n \cdot 189{,}59 \leq \lambda \Leftrightarrow s \leq \lambda + 608{,}44 + n \cdot 189{,}59 = \theta_1$, onde λ é o

máximo da base de cálculo da faixa em estudo; e caso ainda existam outras faixas, segue este mesmo raciocínio, alterando o valor de λ para as faixas subsequentes e aumentando o subscrito de θ de "1"em "1", ficando θ_1, θ_2, ..., até a faixa de 22,5%, e por fim, toma-se o intervalo $s > \theta_i$ (i máximo encontrado) com $i_R = 27{,}5\%$.

a) saber se existe alguma faixa de isenção para $i_I = 11\%$, se já não tiver ocorrido no caso 2a):

faz-se $B_c = s - 0{,}11s - n \cdot 189{,}59 \leq 1.903{,}98 \Leftrightarrow s \leq \dfrac{1.903{,}98 + n \cdot 189{,}59}{0{,}89} := \delta$; se $\delta \leq 2.765{,}65$ não existe a isenção, pois s estará fora do salário de contribuição para $i_I = 11\%$; caso contrário, será isento em $2.765{,}66 < s \leq \delta$, salvo o observado anteriormente, quando $s > 5.531{,}31$.

b) teto para $i_R = 7{,}5\%$:

$$B_c = 0{,}89s - n \cdot 189{,}59 \leq 2.826{,}65 \Leftrightarrow s \leq \frac{2.826{,}65 + n \cdot 189{,}59}{0{,}89} = \beta_1;$$

resultando em $k < s \leq \beta_1$, onde $k = \delta$ se $\delta > 2765{,}66$, ou, caso contrário, $k = 2765{,}66$.

c) teto para $i_R = 15\%$:

$$B_c = 0{,}89s - n \cdot 189,59 \leq 3.751{,}05 \Leftrightarrow s \leq \frac{3751{,}05 + n \cdot 189{,}59}{0{,}89} = \beta_2,$$

resultando em $\beta_1 < s \leq \beta_2$.

d) teto para $i_R = 22{,}5\%$:

$$B_c = 0{,}89s - n \cdot 189{,}59 \leq 4.664{,}68 \Leftrightarrow s \leq \frac{4664{,}68 + n \cdot 189{,}59}{0{,}89} = \beta_3,$$

resultando em $\beta_2 < s \leq \beta_3$.

e) teto para essa alíquota: $\beta_3 < s \leq 5.531{,}31$, com $i_R = 27{,}5\%$; sendo que, caso alguma faixa anterior já tenha passado do teto, então devemos fazer $s > \beta_3$, com $i_R = 27{,}5\%$.

4. E, por último, tomamos $s > 5.531{,}31$, se não ocorrido anteriormente, com $P = 608{,}44$ e $i_R = 27{,}5\%$.

Agora vamos aplicar os resultados acima variando o número de dependentes de 1 a 3.

UM DEPENDENTE: $n = 1$

1) $s \leq 1.659{,}48$.

2a) $s \leq \dfrac{1.903{,}98 + 1 \cdot 189{,}59}{0{,}91} = 2.300{,}63 = \alpha$; resultando em $1.659{,}38 < s \leq 2.300{,}63$.
2b) $2.300{,}63 < s \leq 2.765{,}66$.
3b) $s \leq \dfrac{2.826{,}65 + 1 \cdot 189{,}59}{0{,}89} = 3.389{,}03 = \beta_1$; resultando em $2.765{,}66 < s \leq 3.389{,}03$.

3c) $s \leq \dfrac{3.751{,}05 + 1 \cdot 189{,}59}{0{,}89} = 4.427{,}69 = \beta_2$; resultando em $3.389{,}03 < s \leq 4.427{,}69$.
3d) $s \leq \dfrac{4.664{,}68 + 1 \cdot 189{,}59}{0{,}89} = 5.454{,}24 = \beta_3$; resultando em $4.427{,}69 < s \leq 5454{,}24$.
3e) $5.454{,}24 < s \leq 5.531{,}31$.
4) $s > 5.531{,}31$.
Logo, o valor de I_R em função do salário bruto s é:

$$I_R(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.300{,}63 \\ (s - 0{,}09s - 189{,}59) \cdot 0{,}075 - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.300{,}63 < s \leq 2.765{,}66 \\ (s - 0{,}11s - 189{,}59) \cdot 0{,}075 - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.389{,}03 \\ (s - 0{,}11s - 189{,}59) \cdot 0{,}15 - 354{,}80, & \text{se} \quad 3.389{,}03 < s \leq 4.427{,}69 \\ (s - 0{,}11s - 189{,}59) \cdot 0{,}225 - 636{,}13, & \text{se} \quad 4.427{,}69 < s \leq 5.454{,}24 \\ (s - 0{,}11s - 189{,}59) \cdot 0{,}275 - 869{,}36, & \text{se} \quad 5.454{,}24 < s \leq 5.531{,}31 \\ (s - 608{,}44 - 189{,}59) \cdot 0{,}275 - 869{,}36, & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.300{,}63 \\ 0{,}06825s - 157{,}02, & \text{se} \quad 2.300{,}63 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}06675s - 157{,}02, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.389{,}03 \\ 0{,}1335s - 383{,}24, & \text{se} \quad 3.389{,}03 < s \leq 4.427{,}69 \\ 0{,}20025s - 678{,}79, & \text{se} \quad 4.427{,}69 < s \leq 5.454{,}24 \\ 0{,}24475s - 921{,}50, & \text{se} \quad 5.454{,}24 < s \leq 5531{,}31 \\ 0{,}27500s - 1.088{,}82, & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases}.$$

E o seu gráfico está indicado na Figura 4.6.

ANÁLISE:
Imagem em cada sentença:
$Im_1 = Im(I_R,\ 0 \leq s \leq 1.659{,}38) = \{0\}$,
$Im_2 = Im(I_R,\ 0 \leq 1.659{,}39 \leq s \leq 2.300{,}63) = \{0\}$,
$Im_3 = Im(I_R,\ 2.300{,}64 \leq s \leq 2.765{,}66) = [0; 31{,}74]$,
$Im_4 = Im(I_R,\ 2.765{,}67 \leq s \leq 3.389{,}03) = [27{,}59; 69{,}20]$,
$Im_5 = Im(I_R,\ 3.389{,}04 \leq s \leq 4.427{,}69) = [69{,}20; 207{,}86]$,
$Im_6 = Im(I_R,\ 4.427{,}70 \leq s \leq 5.454{,}24) = [207{,}86; 413{,}42]$,

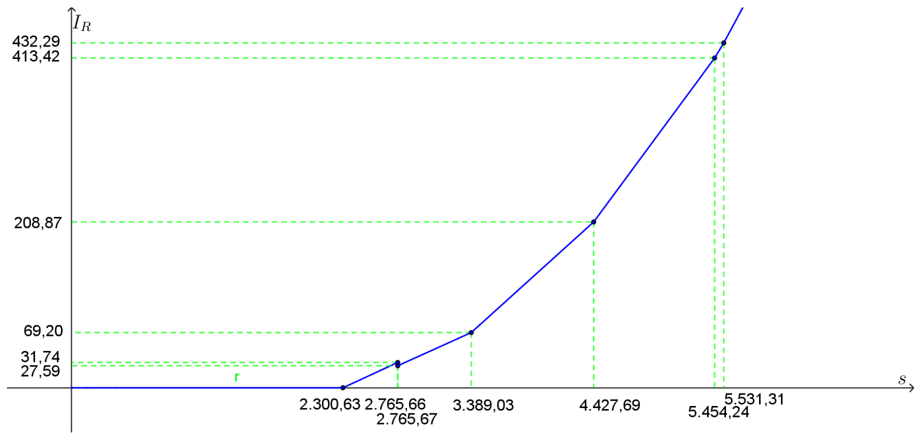


Figura 4.6: Imposto de Renda com 1 dependente.

$Im_7 = Im(I_R,\ 5.454{,}25 \leq s \leq 5.531{,}31) = [413{,}43; 432{,}29]$,
$Im_8 = Im(I_R,\ s > 5.531{,}31) = [432{,}29; +\infty)$.
Nota-se um ponto de descontinuidade em $s = 2.765{,}66$.

E, neste caso, o salário líquido recebido pelo trabalhador, s_L, em função do salário bruto s, é:

$$S_L(s) = \begin{cases} s - 0,08s, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ s - 0{,}09s, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.300{,}63 \\ s - 0{,}11s - (0{,}06825s - 157{,}02), & \text{se} \quad 2.300{,}63 < s \leq 2.765{,}66 \\ s - 0{,}11s - (0{,}06675s - 157{,}02), & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.389{,}03 \\ s - 0{,}11s - (0{,}1335s - 383{,}24), & \text{se} \quad 3.389{,}03 < s \leq 4.427{,}69 \\ s - 0,11s - (0{,}20025s - 678{,}79), & \text{se} \quad 4.427{,}69 < s \leq 5.454{,}24 \\ s - 0{,}11s - (0{,}24475s - 921{,}50), & \text{se} \quad 5.454{,}24 < s \leq 5.531{,}31 \\ s - 608{,}44 - (0{,}27500s - 1.088{,}82), & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0{,}92s, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0{,}91s, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.300{,}63 \\ 0{,}84175s + 157{,}02, & \text{se} \quad 2.300{,}63 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}82325s + 157{,}02, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.389{,}03 \\ 0{,}7565s + 383{,}24, & \text{se} \quad 3.389{,}03 < s \leq 4.427{,}69 \\ 0{,}68975s + 678{,}79, & \text{se} \quad 4.427{,}69 < s \leq 5.454{,}24 \\ 0{,}64525s + 921{,}50, & \text{se} \quad 5.454{,}24 < s \leq 5.531{,}31 \\ 0{,}72500s + 480{,}38, & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases}.$$

E o seu gráfico está indicado na Figura 4.7.

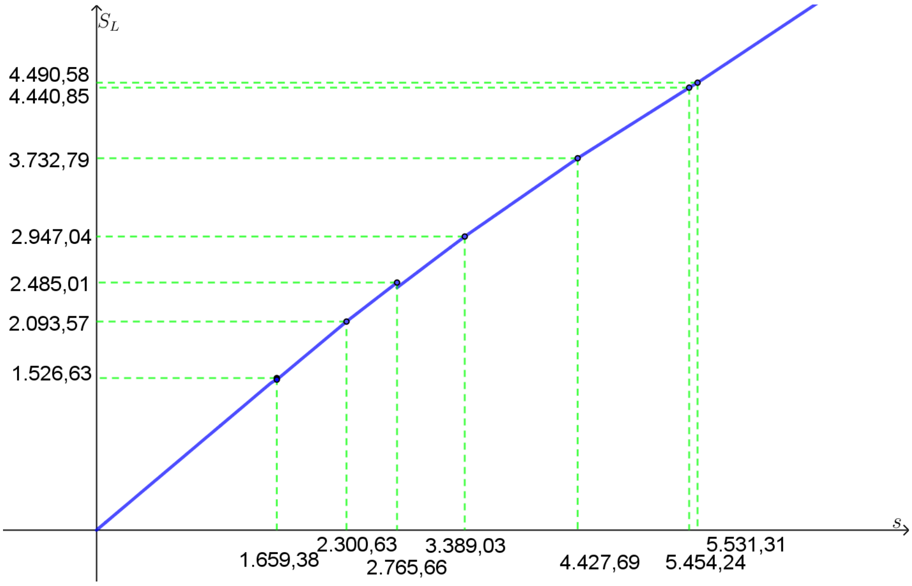


Figura 4.7: Salário Líquido com 1 dependente.

ANÁLISE:

Imagem em cada sentença:

$Im_1 = Im(S_L, 0 \leq s \leq 1659{,}38) = [0; 1.526{,}63]$,

$Im_2 = Im(S_L, 1.659{,}39 \leq s \leq 2.300{,}63) = [1.510{,}04; 2.093{,}57]$,

$Im_3 = Im(S_L, 2.300{,}64 \leq s \leq 2.765{,}66) = [2.093{,}57; 2.485{,}01]$,

$Im_4 = Im(S_L, 2.765{,}67 \leq s \leq 3.389{,}03) = [2.433{,}86; 2.947{,}04]$,

$Im_5 = Im(S_L, 3.389{,}04 \leq s \leq 4.427{,}69) = [2.947{,}04; 3.732{,}79]$,

$Im_6 = Im(S_L, 4.427{,}70 \leq s \leq 5.454{,}24) = [3.732{,}79, 4.440{,}85]$,

$Im_7 = Im(S_L, 5.454{,}25 \leq s \leq 5.531{,}31) = [4.440{,}85; 4.490{,}58]$,

$Im_8 = Im(S_L, s \geq 5.531{,}32) = [4.490{,}59; +\infty)$.

Daí, concluímos que S_L não é injetora, isto é, existem salários brutos diferentes com o mesmo líquido. Temos $Im_1 \cap Im_2 = [1.510{,}04; 1.526{,}63]$, o que implica $\Delta S_L = -16{,}59$ e $Im_3 \cap Im_4 = [2.433{,}86; 2.485{,}01]$, implicando $\Delta S_L = -51{,}15$. Um aumento de R\$ 0,01 em $s =$ R\$ 1.659,38 e em $s =$ R\$ 2.300,63, resulta em um decréscimo no salário líquido de R\$ 16,59 e R\$ 51,15, respectivamente; o que ocorre pelas mudanças (aumento) de faixa da contribuição previdenciária. E para esses dois valores de s, o salário líquido apresenta descontinuidade.

Para $n = 2$ e $n = 3$ apresentaremos apenas as funções I_R e S_L e suas imagens. E análises semelhantes feitas até aqui poderão ser propostas em sequências didáticas em sala de aula.

DOIS DEPENDENTES: $n = 2$

1) $s \leq 1.659{,}38$.
2a) $s \leq \dfrac{1.903{,}98 + 2 \cdot 189{,}59}{0{,}91} = 2.508{,}97 = \alpha$, resultando $1.659{,}38 < s \leq 2.508{,}97$.
2b) $2.508{,}97 < s \leq 2.765{,}66$.
3b) $s \leq \dfrac{2.826{,}65 + 2 \cdot 189{,}59}{0,89} = 3.602{,}06 = \beta_1$, resultando $2.765{,}66 < s \leq 3.602{,}06$.
3c) $s \leq \dfrac{3.751{,}05 + n \cdot 189{,}59}{0{,}89} = 4.640{,}71 = \beta_2$, resultando $3.602{,}06 < s \leq 4.640{,}71$.
3d) $s \leq \dfrac{4.664{,}68 + 2 \cdot 189{,}59}{0{,}89} = 5.667{,}26 = \beta_3 > 5.531{,}31$; uma faixa é $4.640{,}71 < s \leq 5.531{,}31$; cálculo da outra: $s \leq 4.664{,}68 + 608{,}44 + 2 \cdot 189{,}59 = 5.652{,}30 = \theta$, resultando em $5.531{,}31 < s \leq 5.652{,}30$.
3e) Como em d) a faixa já passou do teto, então devemos fazer $s > 5.652{,}30$.
Logo, o valor de I_R em função do salário bruto s é:

$$I_R(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1659{,}38 < s \leq 2.508,97 \\ (s - 0{,}09s - 2 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}075 - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.508{,}97 < s \leq 2.765{,}66 \\ (s - 0{,}11s - 2 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}075 - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.602{,}06 \\ (s - 0{,}11s - 2 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}15 - 354{,}80, & \text{se} \quad 3.602{,}06 < s \leq 4.640{,}71 \\ (s - 0{,}11s - 2 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}225 - 636{,}13, & \text{se} \quad 4.640{,}71 < s \leq 5.531{,}31 \\ (s - 608{,}44 - 2 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}225 - 636{,}13, & \text{se} \quad 5.531{,}31 < s \leq 5652{,}30 \\ (s - 608{,}44 - 2 \cdot 189{,}59) \cdot 0,275 - 869{,}36, & \text{se} \quad s > 5.652{,}30. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.508{,}97 \\ 0{,}06825s - 171{,}24, & \text{se} \quad 2.508{,}97 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}06675s - 171{,}24, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.602{,}06 \\ 0{,}1335s - 411{,}68, & \text{se} \quad 3.602{,}06 < s \leq 4.640{,}71 \\ 0{,}20025s - 721{,}45, & \text{se} \quad 4.640{,}71 < s \leq 5.531{,}31 \\ 0{,}22500s - 858{,}34, & \text{se} \quad 5.531{,}31 < s \leq 5.652{,}30 \\ 0{,}27500s - 1.140{,}96, & \text{se} \quad s > 5.652{,}30 \end{cases}.$$

ANÁLISE:
Imagem em cada sentença:
$Im_1 = Im(I_R, 0 \leq s \leq 1.659{,}38) = \{0\}$,
$Im_2 = Im(I_R, 1.659{,}38 \leq s \leq 2.508{,}97) = \{0\}$,
$Im_3 = Im(I_R, 2.508{,}98 \leq s \leq 2.765{,}66) = [0;17{,}52]$,

$Im_4 = Im(I_R, 2.765{,}67 \leq s \leq 3.602{,}06) = [13{,}37; 69{,}20]$,
$Im_5 = Im(I_R, 3.602{,}07 \leq s \leq 4.640{,}71) = [69{,}20; 207{,}86]$,
$Im_6 = Im(I_R, 4.640{,}72 \leq s \leq 5.531{,}31) = [207{,}86; 386{,}20]$,
$Im_7 = Im(I_R, 5.531{,}32 \leq s \leq 5.652{,}30) = [386{,}20; 413{,}42]$,
$Im_8 = Im(I_R, s \geq 5.652{,}31) = [432{,}43; +\infty)$.

E o salário líquido é:

$$S_L(s) = \begin{cases} s - 0{,}08s, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ s - 0{,}09s, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.508{,}97 \\ s - 0{,}09s - (0{,}06825s - 171{,}24), & \text{se} \quad 2.508{,}97 < s \leq 2.765{,}66 \\ s - 0{,}11s - (0{,}06675s - 171{,}24), & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.602{,}06 \\ s - 0{,}11s - (0{,}1335s - 411{,}68), & \text{se} \quad 3.602{,}06 < s \leq 4.640{,}71 \\ s - 0{,}11s - (0{,}20025s - 721{,}45), & \text{se} \quad 4.640{,}71 < s \leq 5.531{,}31 \\ s - 608{,}44 - (0{,}225s - 858{,}34), & \text{se} \quad 5.531{,}31 < s \leq 5.652{,}30 \\ s - 608{,}44 - (0{,}275s - 1140{,}96), & \text{se} \quad s > 5.652{,}30 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0{,}92s, & \text{se} \quad s \leq 1659{,}38 \\ 0{,}91s, & \text{se} \quad 1659{,}38 < s \leq 2.508{,}97 \\ 0{,}84175s + 171{,}24, & \text{se} \quad 2.508{,}97 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}82325 + 171{,}24, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.602{,}06 \\ 0{,}7565s + 411{,}68, & \text{se} \quad 3.602{,}06 < s \leq 4.640{,}71 \\ 0{,}68975s + 721{,}45, & \text{se} \quad 4.640{,}71 < s \leq 5.531{,}31 \\ 0{,}77500s + 249{,}90, & \text{se} \quad 5.5331{,}31 < s \leq 5.652{,}30 \\ 0{,}72500s + 532{,}52, & \text{se} \quad s > 5.652{,}30 \end{cases} .$$

ANÁLISE:

Imagem em cada sentença:
$Im_1 = Im(S_L,\ 0 \leq s \leq 1.659{,}38) = [0; 1.526{,}63]$,
$Im_2 = Im(S_L,\ 1.659{,}38 \leq s \leq 2.508{,}97) = [1.510{,}04; 2.283{,}16]$,
$Im_3 = Im(S_L,\ 2.508{,}98 \leq s \leq 2.765{,}66) = [2.283{,}17; 2.499{,}23]$,
$Im_4 = Im(S_L,\ 2.765{,}67 \leq < s \leq 3.602{,}06) = [2.448{,}08; 3.136{,}63]$,
$Im_5 = Im(S_L,\ 3.602{,}07 \leq s \leq 4.640{,}71) = [3.136{,}64; 3.922{,}37]$,
$Im_6 = Im(S_L,\ 4.640{,}72 \leq s \leq 5.531{,}31) = [3.922{,}38; 4.536{,}67]$,
$Im_7 = Im(S_L,\ 5.531{,}32 \leq s \leq 5.652{,}30) = [4.536{,}68; 4.630{,}44]$,
$Im_8 = Im(S_L,\ s \geq 5.652{,}31) = [4.630{,}44; +\infty)$.

TRÊS DEPENDENTES: $n = 3$

1) $s \leq 1.659{,}38$.
2a) $s \leq \dfrac{1.903{,}98 + 3 \cdot 189{,}59}{0{,}91} = 2.717{,}31 = \alpha$, resultando $1.659{,}38 < s \leq 2.717{,}98$.
2b) $2.717{,}31 < s \leq 2.765{,}66$.
3a)$s \leq \dfrac{1.903{,}98 + 3 \cdot 189{,}59}{0{,}89} = 2.778{,}37 = \delta$, resultando $2.765{,}66 < s \leq 2.778,37$.
3b) $s \leq \dfrac{2.826{,}65 + 3 \cdot 189{,}59}{0{,}89} = 3.815{,}08 = \beta_1$, resultando em $2.778{,}37 < s \leq 3.815,08$.
3c) $s \leq \dfrac{3.751{,}05 + 3 \cdot 189{,}59}{0{,}89} = 4.853{,}73 = \beta_2$, resultando em $3.815,08 < s \leq 4.853{,}73$.
3d) $s \leq \dfrac{4.664{,}68 + 3 \cdot 189{,}59}{0{,}89} = 5.880{,}28 = \beta_3 > 5.531{,}31$; uma faixa é $4.853{,}73 < s \leq 5.531{,}31$; cálculo da outra: $s \leq 4.664{,}68 + 608{,}44 + 3 \cdot 189{,}59 = 5.841{,}89 = \theta$, resultando em $5.531,31 < s \leq 5.841,89$.
3e) Como em d) a faixa já passou do teto, então devemos fazer $s > 5.841{,}89$.
Logo, o valor de I_R em função do salário bruto s é:

$$I_R(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.717{,}31 \\ (s - 0{,}09s - 3 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}075 - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.717{,}31 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 2.778{,}37 \\ (s - 0{,}11s - 3 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}075 - 142{,}80, & \text{se} \quad 2.778{,}37 < s \leq 3.815{,}08 \\ (s - 0{,}11s - 3 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}15 - 354{,}80, & \text{se} \quad 3.815{,}08 < s \leq 4.853{,}73 \\ (s - 0{,}11s - 3 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}225 - 636{,}13, & \text{se} \quad 4.853{,}73 < s \leq 5.531{,}31 \\ (s - 608{,}44 - 3 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}225 - 636{,}13, & \text{se} \quad 5.531{,}31 < s \leq 5.841{,}89 \\ (s - 608{,}44 - 3 \cdot 189{,}59) \cdot 0{,}275 - 869{,}36, & \text{se} \quad s > 5.841{,}89 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.717{,}31 \\ 0{,}06825s - 185{,}46, & \text{se} \quad 2.717{,}31 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 2.778{,}37 \\ 0{,}06675s - 185{,}46, & \text{se} \quad 2.778{,}37 < s \leq 3.815{,}08 \\ 0{,}13350s - 440{,}12, & \text{se} \quad 3.815{,}08 < s \leq 4.853{,}73 \\ 0{,}20025s - 764{,}10, & \text{se} \quad 4.853{,}73 < s \leq 5.531{,}31 \\ 0{,}22500s - 901{,}00, & \text{se} \quad 5.531{,}31 < s \leq 5.841{,}89 \\ 0{,}27500s - 1.193{,}09, & \text{se} \quad s > 5.841{,}89 \end{cases} .$$

ANÁLISE:

Imagem em cada sentença:
$Im_1 = Im(I_R,\ 0 \leq s \leq 2.717{,}31) = \{0\}$,
$Im_2 = Im(I_R,\ 2.717{,}32 \leq s \leq 2.765{,}66) = [0; 3{,}30]$,

$Im_3 = Im(I_R,\ 2.765{,}67 \leq s \leq 2.778{,}37) = \{0\},$
$Im_4 = Im(I_R,\ 2.778{,}38 \leq s \leq 3.815{,}08) = [0; 69{,}20],$
$Im_5 = Im(I_R,\ 3.815{,}09 \leq s \leq 4.853{,}73) = [69{,}20; 207{,}86],$
$Im_6 = Im(I_R,\ 4.853{,}74 \leq s \leq 5.531{,}31) = [207{,}86; 343{,}54],$
$Im_6 = Im(I_R,\ 5.531{,}32 \leq s \leq 5.841{,}89) = [343{,}54; 413{,}42],$
$Im_7 = Im(I_R,\ s \geq 5.841{,}90) = [413{,}42; +\infty).$

E o salário líquido é:

$$S_L(s) = \begin{cases} 0{,}92s, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0{,}91s, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.717{,}31 \\ s - 0{,}09s - (0{,}06825s - 185{,}46), & \text{se} \quad 2.717{,}31 < s \leq 2.765{,}66 \\ s - 0{,}11s - (0{,}06675s - 185{,}46), & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.815{,}08 \\ s - 0{,}11s - (0{,}1335s - 440{,}12), & \text{se} \quad 3.815{,}08 < s \leq 4.853{,}73 \\ s - 0{,}11s - (0{,}20025s - 764{,}10), & \text{se} \quad 4.853{,}73 < s \leq 5.531{,}31 \\ s - 608{,}44 - (0{,}225s - 901{,}00), & \text{se} \quad 5.531{,}31 < s \leq 5.841{,}89 \\ s - 608{,}44 - (0,275s - 1.193,09), & \text{se} \quad s > 5.841{,}89 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0{,}92s, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0{,}91s, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.716{,}98 \\ 0{,}84175s + 185,46, & \text{se} \quad 2.716{,}98 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}82325s + 185{,}46, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.815{,}08 \\ 0{,}75650s + 440{,}12, & \text{se} \quad 3.815{,}08 < s \leq 4.853,73 \\ 0{,}68975s + 764{,}10, & \text{se} \quad 4.853{,}73 < s \leq 5.531{,}31 \\ 0{,}77500s + 292{,}56, & \text{se} \quad 5.531{,}31 < s \leq 5.841{,}89 \\ 0{,}72500s + 584{,}65, & \text{se} \quad s > 5.841{,}89 \end{cases}.$$

ANÁLISE:

Imagem em cada sentença:
$Im_1 = Im(S_L,\ 0 \leq s \leq 1.659{,}38) = [0; 1.526{,}63],$
$Im_2 = Im(S_L,\ 1.659{,}39 \leq s \leq 2.717{,}31) = [1.510{,}04; 2.472{,}75],$
$Im_3 = Im(S_L,\ 2.717{,}32 \leq s \leq 2.765{,}66) = [2.472{,}76; 2.513{,}45],$
$Im_4 = Im(S_L,\ 2.765{,}67 \leq< s \leq 2.778{,}37) = [2.461{,}45; 2.472{,}75],$
$Im_5 = Im(S_L,\ 2.778{,}38 \leq s \leq 3.815{,}08) = [2.472{,}76; 3.626{,}22],$
$Im_6 = Im(S_L,\ 3.815{,}09 \leq s \leq 4.853{,}73) = [3.626{,}23; 4.111{,}96],$
$Im_7 = Im(S_L,\ 4.853{,}74 \leq s \leq 5.531{,}31) = [4.111{,}97; 4.579{,}32],$
$Im_8 = Im(S_L,\ 5.531{,}32 \leq s \leq 5.841{,}89) = [4.579{,}34; 4.820{,}03],$

$Im_9 = Im(S_L,\ s \geq 5.841, 90) = [4.820{,}03; +\infty)$.

Agora estabeleceremos alguns resultados comparativos em função da variação do número de dependentes:

- Até 3 dependentes a faixa de isenção aumenta proporcionalmente a n, aumentando em R$ 208,34 para cada novo dependente. Já de 3 para 4 dependentes, o aumento é de R$ 274,08. A Tabela 4.5 mostra algumas faixas de isenção. Esses e outros valores são obtidos fazendo-se a $B_C \leq$ 1.903,98, conforme os casos 2a e/ou 3a do nosso algoritmo para cálculo do IR com dependentes visto anteriormente. Em particular, 208,34 é o resultado de $\frac{d}{1-9\%} = \frac{189{,}59}{0{,}91}$.

Número de dependentes	0	1	2	3	4
Faixa de isenção (R$)	[0; 2.092,29]	[0; 2.300,63]	[0; 2.508,97]	[0; 2.717,31]	[0; 2.991,39]

Tabela 4.5: Faixas de isenção de IR.

- Como varia o IR a pagar quando aumenta-se o número de dependentes? Depende da faixa salarial em que o salário bruto encontra-se na função I_R. Uma situação é de fácil previsão: quando i_R permanece o mesmo. Com efeito, a diferença do imposto quando aumenta-se de n_1 para n_2 dependentes é:

$$\begin{aligned}\Delta I_R &= I_{R2} - I_{R1}\\ &= [(s - P - n_2 \cdot 189{,}59) \cdot i_{R2} - P_d] - [(s - P - n_1 \cdot 189{,}59) \cdot i_{R1} - P_d]\\ &= 189{,}59 \cdot i_R \cdot (n_1 - n_2),\ \text{onde } i_R = i_{R1} = i_{R2},\end{aligned}$$

onde verifica-se facilmente através das funções I_R já construídas se $i_{R1} = i_{R2}$. Nota-se que ΔI_R é negativo (já esperado), decrescente e é uma função linear - proporcional à diferença $n_1 - n_2$. O imposto a pagar a menos será maior, quanto maior for i_R. E nota-se que o valor de $R\$$ 14,22 é o menor valor de redução de imposto quando acrescenta-se dependente.

Exemplo 4.3.1. *Um funcionário recebe um salário de* R$ 3.000,00 *e tem um dependente. Caso ele acrescente mais um ou dois dependentes, quanto pagará a menos de IR? Observando a função* I_R *para* $n = 1, 2, 3$, *vemos que* $i_R = i_{R1} = i_{R2} = i_{R3} =$

$7,5\%$. *Portanto, de* 1 *para* 2 *dependentes, ele pagará a menos* $189,59 \cdot 0,075 \cdot (2-1) =$ R$ 14,22*, e de* 1 *para* 3*,* $2 \cdot 14,22 =$ R$ 28,44*. Já se o seu salário fosse de* R$ 3.500,00*, verifica-se que não há proporcionalidade.*

- Uma outra questão: como varia o salário líquido quando aumenta-se o número de dependentes? Sabemos que $S_L = s - P - I_R$, com s e P constantes. Portanto, pelo que vimos logo acima, naquele caso especial, S_L varia em sinal contrário e de igual módulo a ΔI_R. No exemplo anterior, de 1 para 2 dependentes ele receberá um líquido a mais de R$ 14,22, e de 1 para 3, R$ 28,44.

- Na Figura 4.8 está o gráfico do IR para até 3 dependentes no mesmo sistema de coordenadas, o que permite uma análise comparativa simultânea:
1) todos apresentam o mesmo ponto de descontinuidade em $s =$ R$ 2.765,66;
2) nas faixas salariais onde os gráficos são retas paralelas um aumento do número de dependentes resulta em uma diminuição proporcional do imposto apagar - por exemplo, o intervalo [3.815,08; 4.214,69] e a partir de 5.841,39;
3) fica evidente o aumento da faixa de isenção do IR, à medida que n aumenta;
4) as quatro funções são crescentes, exceto em uma pequena vizinhança dos pontos de descontinuidade;
5) é possível perceber através de retas paralelas ao eixo das abscissas quais valores de salários resultam em um mesmo imposto a pagar, e de outro lado, retas paralelas ao eixo das ordenadas permitem saber de um mesmo salário quais os diferentes impostos a pagar - ambos em valores aproximados;

As tabelas da próxima seção permitirão outras análises comparativas.

4.4 Taxa efetiva do Imposto de Renda

As alíquotas de incidência do imposto, apresentadas na Tabela 4.3, não são quanto o trabalhador paga do seu salário bruto. Por exemplo, se $s =$ R$ 3.000,00 e $n = 0$, então $I_R =$ R$ 57,45. Logo, $\frac{I_R}{s} = \frac{57,45}{3000} = 1{,}92\%$ é a taxa efetiva paga, diferente dos 15% da tabela. A seguir apresentaremos resultados da taxa efetiva para até 3 dependentes.

Denotemos a taxa efetiva por T_e. E a seguir a função T_e para até um dependente. Sem dependentes:

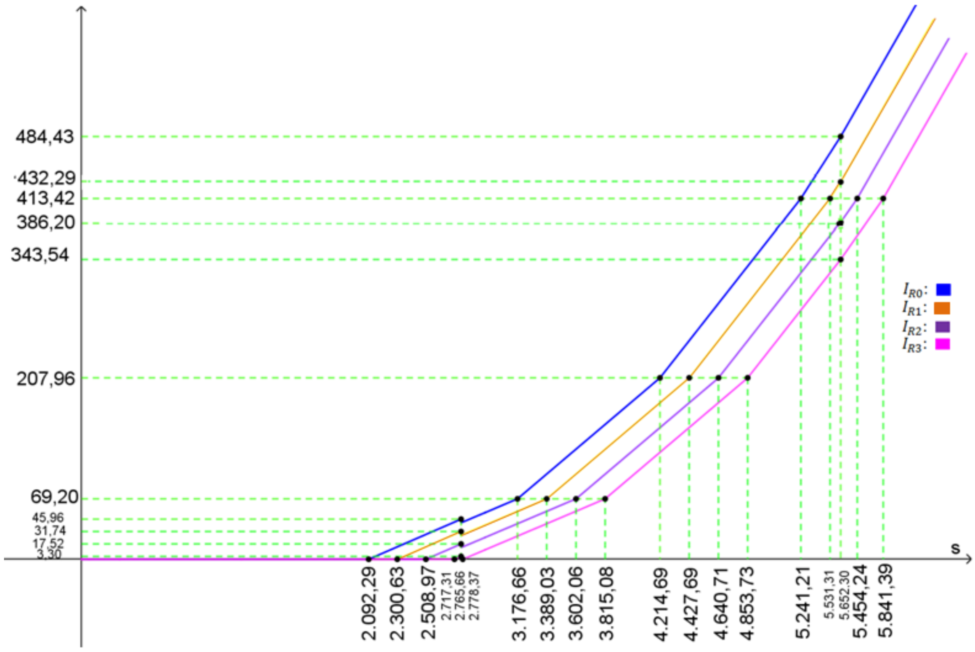


Figura 4.8: Imposto de Renda até 3 dependentes.

$$T_e = \frac{I_R}{s} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1.659{,}38 < s \leq 2.092{,}29 \\ 0{,}06825 - \frac{142{,}80}{s}, & \text{se} \quad 2.092{,}29 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}06675 - \frac{142{,}80}{s}, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.176{,}01 \\ 0{,}13350 - \frac{354{,}80}{s}, & \text{se} \quad 3.176{,}01 < s \leq 4.214{,}66 \\ 0{,}20025 - \frac{636{,}13}{s}, & \text{se} \quad 4.214{,}66 < s \leq 5.241{,}21 \\ 0{,}24475 - \frac{869{,}36}{s}, & \text{se} \quad 5.241{,}21 < s \leq 5.531{,}31 \\ 0{,}27500 - \frac{1.036{,}68}{s}, & \text{se} \quad s > 5.531,31 \end{cases}$$

e

Com 1 dependente:

$$T_e = \frac{I_R}{s} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 1.659{,}38 \\ 0, & \text{se} \quad 1.659,38 < s \leq 2.300{,}63 \\ 0{,}06825 - \frac{157{,}02}{s}, & \text{se} \quad 2.300{,}63 < s \leq 2.765{,}66 \\ 0{,}06675 - \frac{157{,}02}{s}, & \text{se} \quad 2.765{,}66 < s \leq 3.389{,}03 \\ 0{,}1335 - \frac{383{,}24}{s}, & \text{se} \quad 3.389{,}03 < s \leq 4.427{,}69 \\ 0{,}20025 - \frac{678{,}79}{s}, & \text{se} \quad 4.427{,}69 < s \leq 5.454{,}24 \\ 0{,}24475 - \frac{921{,}50}{s}, & \text{se} \quad 5.454{,}24 < s \leq 5531{,}31 \\ 0{,}27500 - \frac{1.088{,}82}{s}, & \text{se} \quad s > 5.531{,}31 \end{cases}.$$

Apresentamos as Tabelas 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 comparando as taxas da base de cálculo e a efetiva, juntamente com as faixas do salário bruto e do imposto a pagar, permitindo-nos uma análise mais ampla do que realmente acontece em termos de taxas e valores monetários, onde destacamos:

- a diferença entre T_e e i_R é por conta da "parcela a deduzir", o valor do INSS e do número de dependentes.
- $T_e < i_R$.
- se $i_R = 27,5\%$, então T_e tende a 27,5% para salários muito altos, ou seja, a taxa efetiva praticamente pode chegar à alíquota da Base de Cálculo (somente nesse caso), o que é comprovado pelo limite da última sentença de T_e quando s tende a $+\infty$. Em particular, para $n = 0$ chega a 15% se $s =$ R\$ 8.293,44, a 20% se $s =$ R\$ 13.822,40. Um visão simultânea para outros valores pode ser visto pelo gráfico de T_e.
- As colunas 2 e 4 fornecem uma visão da variação do imposto a pagar em função de faixas salariais.

Alíquota da Base de Cálculo (%)	Salário Bruto (R$)	Taxa Efetiva (%)	Imposto a pagar (R$)
7,5	[2.092,30; 3.176,01]	[0; 2,18]	[0; 69,20]
15,0	[3.176,02; 4.214,66]	[2,18; 4,93]	[69,20; 207,86]
22,5	[4.214,67; 5.241,21]	[4,93; 7,89]	[207,86; 413,42]
27,5	$\geq$ 5.241,22	[7,89; 27,5)	$\geq$ 413,42

Tabela 4.6: Taxa efetiva do IR sem dependentes.

Alíquota da Base de Cálculo (%)	Salário Bruto (R$)	Taxa Efetiva (%)	Imposto a pagar (R$)
7,5	[2.300,64; 3.389,03]	[0; 2,04]	[0; 69,20]
15,0	[3.389,04; 4.427,69]	[2,04; 4,69]	[69,20; 207,86]
22,5	[4.427,70; 5.454,24]	[4,69; 7,58]	[207,86; 413,42]
27,5	$\geq$ 5.454,25	[7,58; 27,5)	$\geq$ 413,42

Tabela 4.7: Taxa efetiva do IR com 1 dependente.

Observação 4.4.1. *O site indicado na observação 4.2.1 também apresenta ao contribuinte a taxa efetiva do IR.*

Alíquota da Base de Cálculo (%)	Salário Bruto (R$)	Taxa Efetiva (%)	Imposto a pagar (R$)
7,5	[2.508,98; 3.602,06]	[0; 1,92]	[0; 69,20]
15,0	[3.602,07; 4.640,71]	[1,92; 4,48]	[69,20; 207,86]
22,5	[4.640,72; 5.652,30]	[4,48; 7,31]	[207,86; 413,53]
27,5	$\geq$ 5.652,31	[7,31; 27,5)	$\geq$ 413,53

Tabela 4.8: Taxa efetiva do IR com 2 dependentes.

Alíquota da Base de Cálculo (%)	Salário Bruto (R$)	Taxa Efetiva (%)	Imposto a pagar (R$)
7,5	[2.717,32; 2.765,66]	[0; 0,12]	[0; 3,30]
-	[2.7765,67; 2.778,37]	-	0,00
7,5	[2.778,38; 3.815,08]	[0; 1,81]	[0; 69,20]
15,0	[3.815,09; 4.853,73]	[1,81; 4,28]	[69,20; 207,86]
22,5	[4.853,74; 5.841,89]	[4,28; 7,08]	[207,86; 413,42]
27,5	$\geq$ 5.652,31	[7,08; 27,5)	$\geq$ 413,43

Tabela 4.9: Taxa efetiva do IR com 3 dependentes.

Por fim, apresentamos a Figura 4.9, que indica o gráfico de T_e para 1 dependente, no qual pode-se observar a tendência de $T_e \longrightarrow i_R$ quando $s \longrightarrow +\infty$, e concluímos dizendo: as tabelas, as expressões das funções e os gráficos aqui apresentado, ou mesmo também planilhas eletrônicas, sejam em separados ou comitantemente, permitem um estudo analítico de modo o conhecer e inferir sobre a variação e cálculo de valores específicos; o que demonstra uma rica oportunidade de ensino-aprendizagem em nível de Ensino Médio por diferentes métodos. Ademais, chamamos a atenção outra vez para a possibilidade de estudo do comportamento dessas funções através da taxa de variação das *funções afins* em cada sentença.

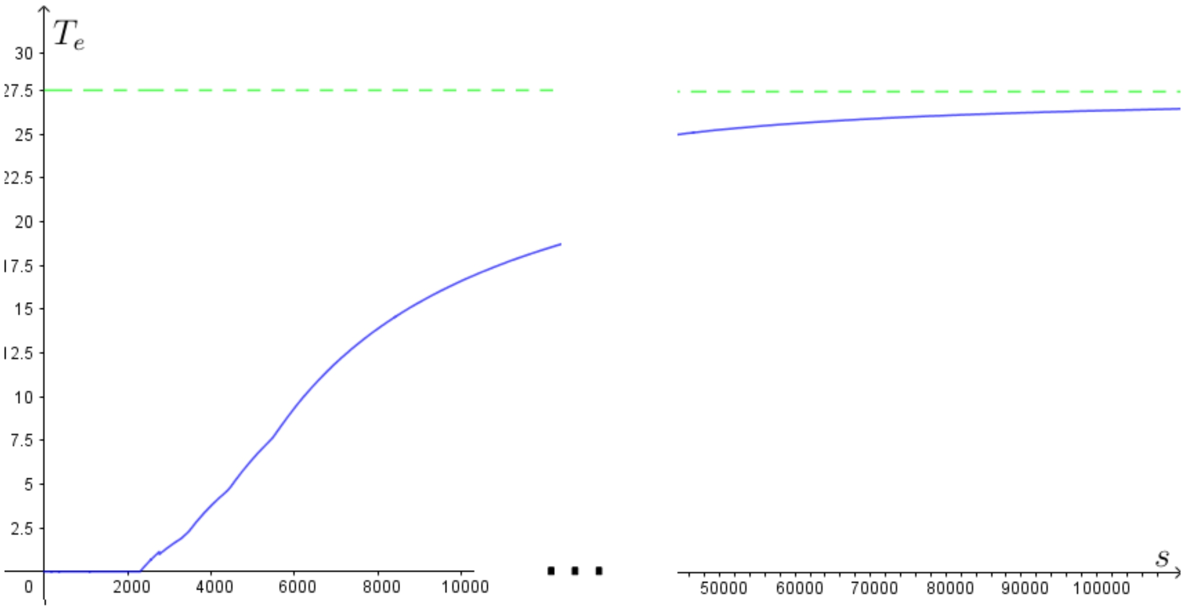


Figura 4.9: Taxa efetiva com 1 dependente.

Capítulo 5

Operações financeiras contemporâneas

Apresentaremos aqui algumas operações atuais no mercado financeiro, analisando-as conforme as teorias estudadas anteriormente.

5.1 Cartão de Crédito: parcelamento e uso do rotativo

A modalidade de pagamento via cartão de crédito é muito utilizada atualmente no mercado. É gerado um valor de fatura todo mês, onde há um mínimo que deve ser pago, 15% do total. No caso de não se efetuar o pagamento total, o saldo a pagar entra em uma linha de crédito chamada de **crédito rotativo**. E é aqui onde as taxas de juros praticadas pelas instituições financeiras de cartão de crédito nos últimos anos têm sido umas das mais elevadas, chegando a ultrapassar os 400% a.a. E com isso, o índice de endividamento tornou-se grande na medida que muitos consumidores não podendo pagar o total da fatura, terminam deixando para o mês seguinte um percentual significativo da dívida, que acrescido de juros altos e, em geral, a novas compras, pode inviabilizar as condições em efetuar o pagamento total novamente; e por seguinte, está sujeito outra vez a altas taxas de juros; e assim, continuando nesse ciclo, a chamada "bola de neve", ocorrendo um crescimento exponencial da dívida com juros sobre juros.

Exemplo 5.1.1. *Vamos considerar um valor de fatura de* R$ 500,00*, com uma taxa de juros efetiva no rotativo de* $i = 14\%$ *a.m., efetuando-se o pagamento mínimo a cada mês e novas compras para o próximo mês de* R$ 300,00*, durante* 5 *meses. Nestas condições, a evolução da dívida é apresentada na Tabela 5.1. No quinto mês observa-se:* 1) *um acumulado de* R$ 1.837,00*, cerca de* 270% *a mais do valor inicial;* 2) *o valor mínimo,*

	Mês					
	0	1	2	3	4	5
Valor rotativo	-	R$ 425,00	R$ 666,83	R$ 901,15	R$ 1.128,22	R$ 1.348,24
Juro	-	R$ 59,50	R$ 93,36	R$ 126,16	R$ 157,95	R$ 188,75
Novas compras	-	R$ 300,00	R$ 300,00	R$ 300,00	R$ 300,00	R$ 300,00
A pagar	R$ 500,00	R$ 784,50	R$ 1.060,18	R$ 1.327,31	R$ 1.586,17	R$ 1.837,00
Mínimo(15%)	R$ 75,00	R$ 117,68	R$ 159,03	R$ 199,10	R$ 237,93	R$ 275,55

Tabela 5.1: Evolução da dívida com pagamento mínimo e novas compras.

R$ 275,55*, já é quase* 4 *vezes o seu valor inicial.*

Nesse contexto, o Banco Central do Brasil emitiu a Resolução no 4.549 de 26 de Janeiro de 2017 e, a posteriori, a Carta Circular no 3.816 de 20 de Abril de 2017 na tentativa de favorecer uma queda nas taxas de juros ora comentadas.

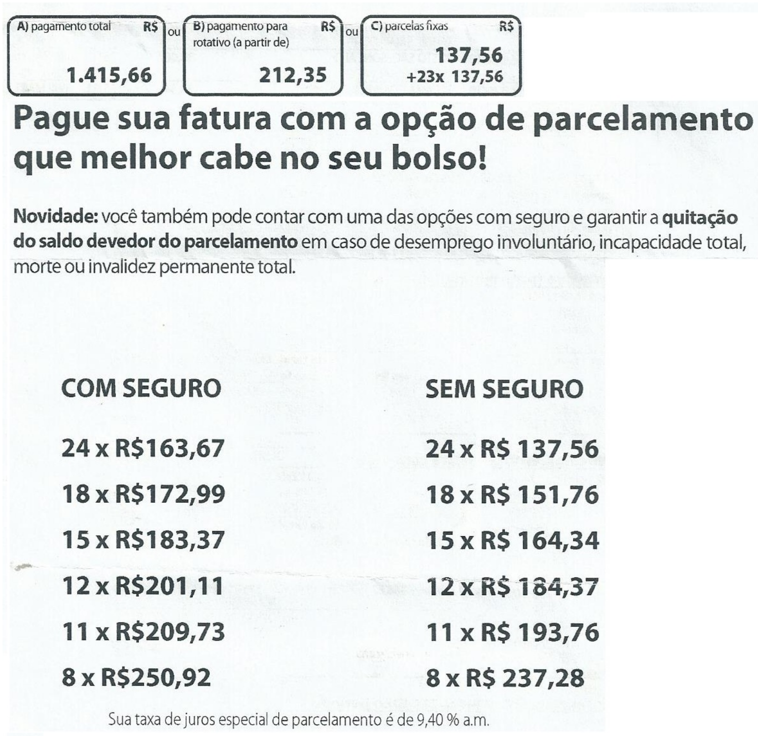
Agora, valendo desde 3 de Abril de 2017, data em que a Resolução entrou em vigor, o valor não pago no vencimento da fatura só poderá ser objeto de financiamento no crédito rotativo apenas uma vez até o vencimento da fatura do mês seguinte, no qual deverá ser realizado o parcelamento desse valor com juros menores ou o pagamento total, e não mais outro crédito rotativo.

Analisaremos um caso real de pagamento da fatura de um cartão de crédito sobre duas perspectivas: parcelamento e crédito rotativo. O parcelamento que abordaremos aqui não é o que pode ser feito no momento da compra, mas sim, a possibilidade de parcelar parte do valor da fatura a pagar:

PARCELAMENTO. Valor da fatura: R$ 1.415,66. Taxa de juros: 9,4% *a.m.* Opções de parcelamento com a 1ª parcela no dia do vencimento da fatura: 24 x R$ 137,56, 18 x R$ 151,76, 15 x R$ 164,34, 12 x R$ 184,37, 11 x R$ 193,76 e 8 x R$ 237,28. Dados na Figura 5.1.

Confirmando dados. Por via de regra o pagamento mínimo é 15% do total da fatura. Neste caso, $0{,}15 \cdot 1415{,}66 = 212{,}35$; as prestações estão ocorrendo em uma série antecipada, e, conforme o Teorema 2.5.2, $P = \dfrac{Ai}{(1+i)(1-(1+i)^{-n})}$, o que aplicando as informações em uma calculadora ou planilha eletrônica, obtemos valores indicados na Tabela 5.2.

Conclusões. Os dados informados estão corretos. Apesar de a taxa de juros ser um pouco menor do que 10% *a.m.*, ainda constitui-se uma taxa elevada. Na impossibilidade de pagamento total, sugere-se uma tomada de empréstimo pessoal, se possível, pois nessa modalidade encontram-se taxas de juros menores em cerca de 4 pontos percentuais. Destaca-se ainda que ao efetuar o parcelamento existe a incidência de IOF, o Imposto so-



A) pagamento total R$ 1.415,66 ou B) pagamento para rotativo (a partir de) R$ 212,35 ou C) parcelas fixas R$ 137,56 +23x 137,56

Pague sua fatura com a opção de parcelamento que melhor cabe no seu bolso!

Novidade: você também pode contar com uma das opções com seguro e garantir a **quitação do saldo devedor do parcelamento** em caso de desemprego involuntário, incapacidade total, morte ou invalidez permanente total.

COM SEGURO	SEM SEGURO
24 x R$163,67	24 x R$ 137,56
18 x R$172,99	18 x R$ 151,76
15 x R$183,37	15 x R$ 164,34
12 x R$201,11	12 x R$ 184,37
11 x R$209,73	11 x R$ 193,76
8 x R$250,92	8 x R$ 237,28

Sua taxa de juros especial de parcelamento é de 9,40 % a.m.

Figura 5.1: Condições de parcelamento no cartão de crédito.
Fonte: Fatura de cartão de crédito Itaú Mastercard (dez/2017).

$A =$ R\$ 1.415,66, $i = 9{,}4\%$						
n	8	11	12	15	18	24
P	237,28	193,76	184,3	164,34	151,76	137,56

Tabela 5.2: Confirmando dados: parcelamento no cartão de crédito.

bre Operações Financeiras. A Tabela 5.3 indica o total a ser pago para cada quantidade de parcelas, onde observa-se que em um ano paga-se de juro um pouco a mais da metade do valor da fatura e em dois chegar mais do que dobrar (133,21%).

CRÉDITO ROTATIVO. Valor da fatura: R\$ 1.415,66. Taxa de juros: 10,23 $\% a.m.$. Custo Efetivo Total (CET): 10,86 % a.m.. IOF: R\$ 7,53. Valor financiado(v_f): R\$ 1.203,31. Valor total a pagar em 30 dias: R\$ 1.333,94. Dados na Figura 5.2.

Confirmando dados. Conforme a Resolução supracitada, uma vez efetuado o pagamento mínimo de 15% do total da fatura, então $v_f = 0{,}85 \cdot 1.415{,}66 = 1.203{,}31$. O IOF, segundo legislação pertinente, é na base de 0,38% de v_f, mais 0,0082% $a.d.$ de v_f. Considerando o mês comercial de 30 dias, então o IOF é de $1.203{,}31 \cdot (0{,}38\% + 0{,}0082\% \cdot 30) = 1.203{,}31 \cdot 0{,}626\% =$ R\$ 7,53. O CET, que leva em conta não apenas os juros, mas também

n	8	11	12	15	18	24
Total pago	1.898,24	2.131,36	2.211,60	2.465,10	2.731,68	3.301,44
Percentual pago a mais	34,09%	50,56%	56,22%	74,13%	92,96%	133,21%

Tabela 5.3: Total pago nos parcelamentos do carão de crédito.

Rotativo (pgto mínimo) desta fatura

Valor da fatura atual		1.415,66
Juros máximos do contrato	10,23 % am	227,08% aa
Encargos em caso de pgto. mínimo (R$)		123,10
CET do financiamento da fatura	10,86 % am	250,41 % aa
	Valor em R$	**% do total financiado**
Valor total financiado	1.203,31	100,00 %
Valor do IOF	7,53	
Valor total a pagar	1.333,94	

Figura 5.2: Condições de crédito rotativo no cartão de crédito.
Fonte: Fatura de cartão de crédito Itaú Mastercard (dez/2017).

todos os outros encargos - no nosso caso o IOF - é de $10{,}23 + 0{,}0082 \cdot 30 + 0{,}38 = 10{,}86\%$. E o valor total a pagar é $v_t = v_f + \text{juros} + \text{IOF} = 1.203{,}31 + 1.203{,}31 \cdot 10{,}23\% + 7{,}53 =$ R$ 1.333,94.

Conclusões. Os dados informados estão corretos. A instituição financeira cobra uma taxa menor no parcelamento, porém com uma diferença pequena e ambas taxas ainda são altas. Não pode deixar de ser percebido que, apesar do total pago no rotativo ser menor do que nas opções de parcelamento, esse último ainda é o menos custoso para o consumidor, pois o primeiro é realizado em uma única parcela com taxa de juros maior, e o segundo em mais vezes.

Destacamos que a utilização de exemplos envolvendo operações com cartão de crédito permite propor discussões nas salas do Ensino Médio para uma boa educação financeira da prática de realização de compras conscientes e planejadas, e assim, um bom uso dos cartões de crédito. Afinal, comprar “sem dinheiro” pode resultar em muitas complicações financeiras.

5.2 Compras parceladas

Na compra de bens, algumas lojas oferecem opções de pagamento com ou sem juros. Vamos verificar aqui dois casos reais de anúncios.

n	7	8	9	10	11	12
P	31,80	28,03	25,09	22,75	20,83	19,23

Tabela 5.4: Confirmando dados: parcelamento da venda do conjunto de panelas.

CASO REAL 1. Uma loja oferece um conjunto de panelas por R\$ 209,90 à vista e parcelado em 6 vezes sem juros ou de 7 a 12 vezes com juros de 1,49% *a.m.*, conforme parcelas indicadas no site da loja pela Figura 5.3.

Confirmando dados. O parcelamento sem juros é de fácil inspeção, bastando fazer a

Consulte o valor das parcelas no cartão

1x	sem juros	R$ 209,90	total a prazo R$ 209,90
2x	sem juros	R$ 104,95	total a prazo R$ 209,90
3x	sem juros	R$ 69,97	total a prazo R$ 209,90
4x	sem juros	R$ 52,48	total a prazo R$ 209,90
5x	sem juros	R$ 41,98	total a prazo R$ 209,90
6x	sem juros	R$ 34,98	total a prazo R$ 209,90
7x	com juros de 1.49% a.m.	R$ 31,80	total a prazo R$ 222,59
8x	com juros de 1.49% a.m.	R$ 28,03	total a prazo R$ 224,22
9x	com juros de 1.49% a.m.	R$ 25,09	total a prazo R$ 225,85
10x	com juros de 1.49% a.m.	R$ 22,75	total a prazo R$ 227,48
11x	com juros de 1.49% a.m.	R$ 20,83	total a prazo R$ 229,13
12x	com juros de 1.49% a.m.	R$ 19,23	total a prazo R$ 230,78

*Para financiamento com juros de 1.49% a.m. CET máximo de até 19.42% a.a.

Figura 5.3: Plano de Parcelamento.
Fonte: Loja varejista on-line. Consulta em: 12 de abril de 2018.

divisão de R\$ 209,90 por $n = 2, 3, 4, 5, 6$, o que constata valores corretos. E, aplicando o Teorema 2.5.1, escrito de forma equivalente por $P = \dfrac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$, podemos confirmar os valores com juros. De fato, tomando $A = 209{,}90$, $i = 1{,}49\%$, variando n de 7 a 12, usando uma calculadora ou planilha eletrônica, obtemos os valores indicados na Tabela 5.4. O que está de acordo com o anúncio da loja. Observamos também que nos planos de parcelamento via Cartão de Crédito é considerada uma série uniforme *postecipada*, pois a primeira parcela não é paga à vista.

CASO REAL 2. Uma outra loja on-line disponibiliza uma Bicicleta de 21 Marchas por R\$ 899,99 à vista, em até 12 vezes sem juros e outros parcelamentos com juros a partir de 1,89% *a.m.*, conforme parcelas indicadas no site da loja pela Figura 5.4.

Confirmando dados. Temos uma série postecipada. O parcelamento em 12 vezes é de fácil inspeção. O que nesse caso está correto. Já os parcelamentos com juros de acordo com as taxas anunciadas fornecem parcelas indicadas na Tabela 5.5. Observa-se que as

2x sem juros	**R$ 449,50**	11x sem juros	**R$ 81,73**
3x sem juros	**R$ 299,67**	12x sem juros	**R$ 74,92**
4x sem juros	**R$ 224,75**	14x com juros (1,89% a.m.)	**R$ 74,15**
5x sem juros	**R$ 179,80**	17x com juros (3,59% a.m.)	**R$ 72,41**
6x sem juros	**R$ 149,83**	18x com juros (3,49% a.m.)	**R$ 68,89**
7x sem juros	**R$ 128,43**	19x com juros (3,89% a.m.)	**R$ 68,68**
8x sem juros	**R$ 112,38**	20x com juros (4,19% a.m.)	**R$ 68,19**
9x sem juros	**R$ 99,89**	21x com juros (4,49% a.m.)	**R$ 67,99**
10x sem juros	**R$ 89,90**	22x com juros (4,69% a.m.)	**R$ 67,40**
		23x com juros (4,79% a.m.)	**R$ 66,36**
		24x com juros (4,99% a.m.)	**R$ 66,15**

Figura 5.4: Plano de Parcelamento: preço de à vista R$ 899,00.
Fonte: Loja varejista on-line. Consulta em: 12 de abril de 2018.

n	14	17	18	19	20	21	22	23	24
$i(\%)$	1,89	3,59	3,49	3,89	4,19	4,49	4,69	4,79	4,99
P	73,69	71,57	68,10	67,81	67,27	67,01	66,38	65,34	65,09

Tabela 5.5: Confirmando dados: parcelamento da venda da bicicleta.

parcelas anunciadas estão maiores do que o calculado pelas respectivas taxas anunciadas. Logo, as taxas reais cobradas são maiores. Assim, surge um problemas típico da necessidade de saber qual é a real taxa cobrada - o que faremos a seguir. Antes, destacamos que dificilmente um consumidor iria verificar os dados informados, já que atenta-se muito mais para capacidade de pagamento das parcelas, e, quando se observa a taxa, não é feita a comprovação da mesma. Sendo assim, estudantes de Ensino Médio podem ser desafiados a pesquisar e comprovar informações de anúncios, favorecendo uma aprendizagem significativa, ativa e prática.

Para o cálculo da taxa iremos utilizar o GeoGebra: programamos para quatro casas decimais; abrindo o CAS, digitamos $P(1-(1+i)^{-n}) = Ai$ na linha 1 , com o respectivos valor A anunciado no site; seguindo a tabela na ordem, fazemos as substituições: $P =$ 74,15 e $n = 14$; na linha 2 digitamos “resolver (\$1)”, sem as aspas. A resposta é o valor positivo $i =$ 1,98. Para os demais valores podemos copiar a equação 1 na linha 3 e modificar os valores de P e n; na linha 4 digitar “resolver (\$3)”; e assim sucessivamente (vide Figura 5.5). Daí obtemos as reais taxas praticadas pela loja on-line indicadas na Tabela 5.6.

Pelo Código de Defesa do Consumidor(CDC), na ocasião de um produto ser anunciado com mais de um preço, vale o de menor valor. Portanto, os valores das prestações

n	14	17	18	19	20	21	22	23	24
P	74,15	72,41	68,89	68,68	68,19	67,99	67,40	66,36	66,15
$i(\%)$	1,98	3,74	3,63	4,04	4,35	4,65	4,86	4,95	5,16

Tabela 5.6: Taxa real cobrada: parcelamento da venda da bicicleta.

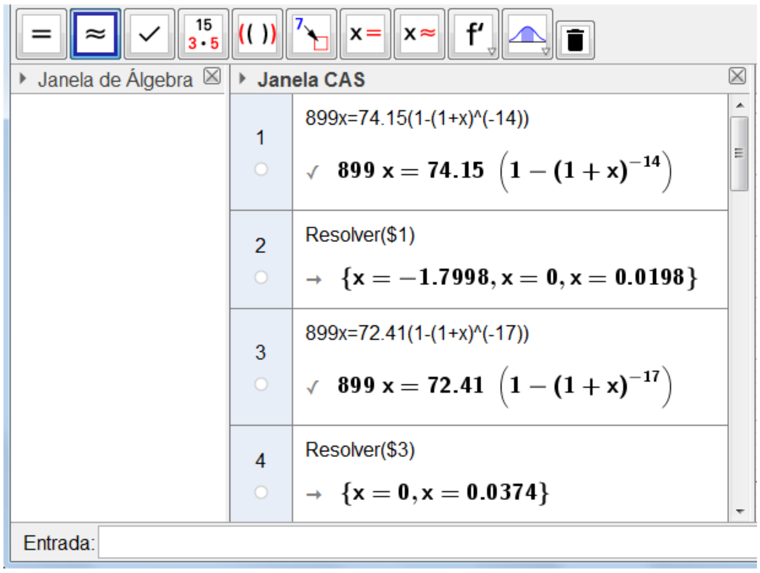


Figura 5.5: GeoGebra: cálculo da real taxa de juros.

geradas pelas taxas anunciadas, conforme visto acima, são menores do que o anunciado, gerando diferenças a mais para o consumidor. Assim, sendo ΔP a diferença no valor da parcela, ΔT o valor pago a mais ao final da quitação do parcelamento e Δi a taxa cobradas a mais, obtemos os dados na Tabela 5.7.

Alguns podem considerar tais diferenças não expressivas, porém isso não isenta da incorreta cobrança da loja.

n	14	17	18	19	20	21	22	23	24
ΔP(R\$)	0,46	0,84	0,79	0,87	0,92	0,98	1,02	1,02	1,06
ΔT(R\$)	6,44	14,28	14,22	16,53	18,40	20,58	22,44	23,46	25,44
$\Delta i(\%)$	0,09	0,15	0,14	0,15	0,16	0,16	0,17	0,16	0,17

Tabela 5.7: Variações causadas no anúncio das taxas não-reais.

5.3 Empréstimo informal

Encontramos um anúncio de empréstimo informal via cartão de crédito, plotado em um poste de uma via pública, conforme Figura 5.6: é oferecido R$ 1.000,00 para pagamento em 10 vezes de R$ 139,90 ou 12 vezes de R$ 117,00. Surge mais uma vez a questão: qual a taxa de juros cobrada? Como já vimos na seção anterior, utilizaremos o CAS no GeoGebra, digitando $P(1-(1+i)^{-n}) = Ai$, com o valor A anunciado. Como mostra a Figura 5.7, são cobradas taxas de 6,62% e 5,65% nos prazos de 10 e 12 vezes, respectivamente.

Destaca-se o caráter indutivo de aceitação da proposta em 12 vezes, na medida que no prazo menor é oferecida uma taxa mais alta, o que não é comum, e além disso, os valores totais nos dois planos são praticamente iguais. Ou seja, o plano de 10 vezes é colocado apenas como uma distração, induzindo a pessoa de imediato a contratar o plano de 12 vezes, não refletindo sua real condição de pagamento ao longo do ano. E, oportuno é falar que existem outras práticas no mercado que desfavorecem o consumidor: altas taxas de juros, o aumento de preços e depois anúncio de desconto, taxas implícitas no parcelamentos, etc.. Ou seja, necessário é ter uma boa educação financeira para não cair nas "armadilhas" do mercado. O que para tanto, acreditamos que um bom ensino da matemática financeira no Ensino Médio é de fundamental importância para a formação contínua de consumidores críticos.

Figura 5.6: Empréstimo no cartão de crédito.
Fonte: Publicação em via pública. Anunciado em: 12 de abril de 2018.

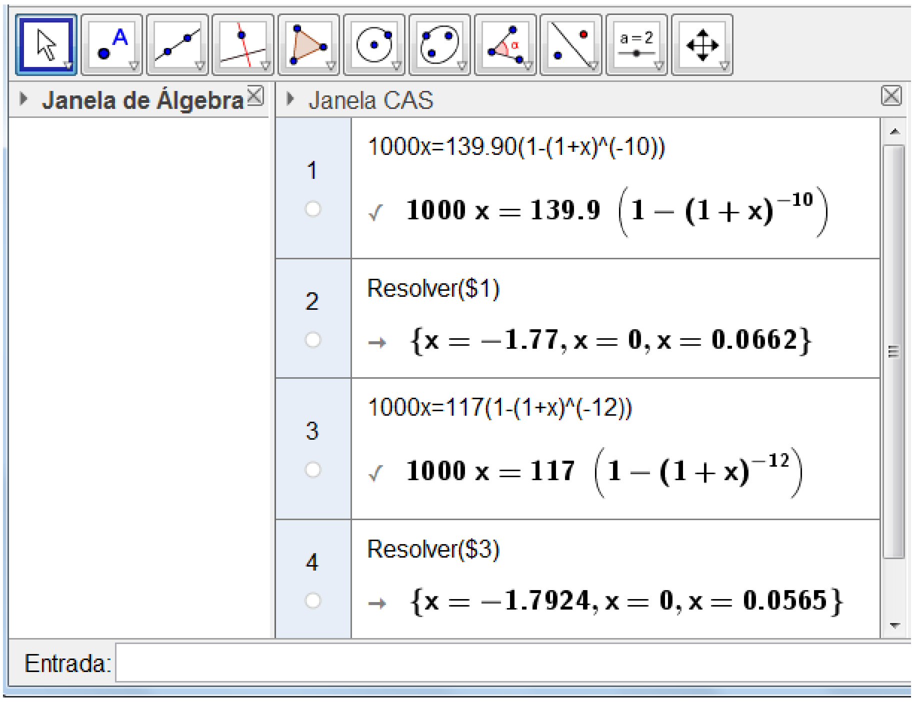


Figura 5.7: Geogebra: cálculo da taxa de juros.

5.4 Simulação de Financiamento Habitacional pela CEF

Como já dissemos, as tabelas SAC e PRICE aparecem como opções de pagamento no financiamento de imóveis. No dia 24 de maio de 2018 fizemos uma simulação no site da Caixa Econômica Federal (CEF) para um imóvel no valor de R$ 300.000,00, financiado por 240 meses nos dois sistemas, dando uma entrada de R$ 200.000,00. O valor financiado ficou, portanto, em R$ 100.000,00. A Figura 5.8 mostra os dados fornecidos pelo simulador on-line da CEF no sistema SAC, onde mostramos apenas as três primeiras e as três últimas prestações (amortização + juro). A Figura 5.9 mostra as mesmas posições das parcelas no PRICE. Em ambos os casos a taxa nominal informada é de 9,5690% $a.a.$. A taxa administrativa e o seguro estão separados.

Confirmando dados. A data de vencimento da primeira prestação está para o dia 24 de junho de 2018, configurando uma série de pagamento postecipada, e de acordo o Teorema 3.0.1 temos que as prestações no SAC são $P_k = \left[\frac{1}{n} + i\frac{n-(k-1)}{n}\right] D_0$, onde $n = 240$, $i = 0,79742\%$ $a.m.$(taxa efetiva), $D_0 = 100.000{,}00$ e $1 \leq k \leq n$. Com esses dados e a ajuda de uma calculadora ou planilha eletrônica chegamos na Tabela 5.8, permitindo assegurar que o simulador informa os dados corretamente. Já no sistema PRICE aplicamos o Teorema 3.0.2: $P = \dfrac{D_0 i}{1-(1+i)^{-n}}$; assim, substituindo os valores encontramos o valor

1 Dados iniciais

Este financiamento é para uma pessoa: Pessoa Física
Qual o tipo de financiamento você deseja? Residencial
Em qual destas categorias o imóvel se enquadra? Aquisição de Imóvel Usado
Valor aproximado do imóvel: R$ 300.000,00
Onde está localizado o imóvel? SALVADOR-BA
Possuo imóvel nesta cidade: Sim

4 Resultados

Confira o resultado da simulação.
Se desejar, imprima a simulação
e leve a uma agência.

SBPE - SE VOCÊ TEM OU QUER TER RELACIONAMENTO COM A CAIXA.

Valor de financiamento	R$ 100.000,00
Prazo	240 meses
Valor da entrada	R$ 200.000,00
Juros	9,5690% a.a

Fase de Amortização

Nº	Vencimento	Prestação	Seguro/ FGHAB	Taxa de Administração (TA)	Encargo	Saldo Devedor
1	24/06/2018	R$ 1.214,09	R$ 46,70	R$ 25,00	R$ 1.285,79	**R$ 99.583,33**
2	24/07/2018	R$ 1.210,76	R$ 46,60	R$ 25,00	R$ 1.282,36	**R$ 99.166,66**
3	24/08/2018	R$ 1.207,44	R$ 46,51	R$ 25,00	R$ 1.278,95	**R$ 98.749,99**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
238	24/03/2038	R$ 426,63	R$ 24,44	R$ 25,00	R$ 476,07	**R$ 832,54**
239	24/04/2038	R$ 423,31	R$ 23,92	R$ 25,00	R$ 472,23	**R$ 415,87**
240	24/05/2038	R$ 419,19	R$ 0,00	R$ 25,00	R$ 444,19	**R$ 0,00**

Figura 5.8: Financiamento Habitacional pela Tabela SAC.
Fonte: Simulador da CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. Acessado em: 24 de maio de 2018.

da prestação constante de R\$ 936,64, o que também valida o encontrado pelo simulador, sendo que na última parcela há uma pequena diferença para compensar a aproximação feita no valor da parcela.

Aproveitando os dados verificamos quando $P_{kS} = P_{kP}$: utilizando a equação 3.4, $k = \frac{(1+i)^{n+1}-1-ni-i}{i[(1+i)^n-1]}$, donde obtemos $k = 84{,}50$. Logo, as oitenta e quatro primeiras parcelas do SAC são maiores que as do PRICE e para as demais (65,0%), as do PRICE são maiores. Para saber quando a metade da dívida será amortizada no sistema PRICE, aplicamos o Teorema 3.0.8 com $t = \log_{1+i}[\lambda((1+i)^n - 1) + 1]$, tomando $\lambda = 0{,}5$, e obtendo $t = 170{,}10$, ou seja, tal amortização se dará na 171a prestação, quando se efetivar 71,25% das prestações pagas.

Uma análise importante para a tomada de decisão na escolha de qual sistema adotar é a diferença $P_{1S} - P_{1P}$, cujo valor é R\$ 277,45, de modo que a 1ª parcela do PRICE é 29,62% maior do que a primeira do SAC, acarretando uma possível dificuldade de pagamento inicial como parcelas mais altas, e por seguinte, restando o sistema PRICE como única opção de financiamento viável. Por outro lado, ainda que seja possível iniciar

1 Dados iniciais

Este financiamento é para uma pessoa: Pessoa Física
Qual o tipo de financiamento você deseja? Residencial
Em qual destas categorias o imóvel se enquadra? Aquisição de Imóvel Usado
Valor aproximado do imóvel: R$ 300.000,00
Onde está localizado o imóvel? SALVADOR-BA
Possuo imóvel nesta cidade: Sim

4 Resultados

Confira o resultado da simulação. Se desejar, imprima a simulação e leve a uma agência.

SBPE - SE VOCÊ TEM OU QUER TER RELACIONAMENTO COM A CAIXA.

Valor de financiamento	R$ 100.000,00
Prazo	240 meses
Valor da entrada	R$ 200.000,00
Juros	9,5690% a.a

Fase de Amortização

Nº	Vencimento	Prestação	Seguro/ FGHAB	Taxa de Administração (TA)	Encargo	Saldo Devedor
1	24/06/2018	R$ 936,64	R$ 46,77	R$ 25,00	R$ 1.008,41	R$ 99.860,78
2	24/07/2018	R$ 936,64	R$ 46,73	R$ 25,00	R$ 1.008,37	R$ 99.720,45
3	24/08/2018	R$ 936,64	R$ 46,70	R$ 25,00	R$ 1.008,34	R$ 99.579,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
238	24/03/2038	R$ 936,64	R$ 25,71	R$ 25,00	R$ 987,35	R$ 1.852,42
239	24/04/2038	R$ 936,64	R$ 24,56	R$ 25,00	R$ 986,20	R$ 930,55
240	24/05/2038	R$ 937,97	R$ 0,00	R$ 25,00	R$ 962,97	R$ 0,00

Figura 5.9: Financiamento Habitacional pela Tabela PRICE.
Fonte: Simulador da CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. Acessado em: em 24 de maio de 2018.

com sistema PRICE, outras variáveis como já dissemos devem ser consideradas nessa importante decisão de financiamento a longo prazo.

Por fim, salientemos que para garantir a mesma taxa de financiamento nos dois sistemas, fornecemos as mesmas condições de mutuário, como a data de nascimento, a renda bruta, o número de anos de conta de FGTS, etc., pois ao mudar um desses parâmetro pode haver alteração da taxa de financiamento segundo critérios da CEF.

k	1	2	3	$\cdots$	238	239	240
P	1.214,09	1.210,76	1.207,44	$\cdots$	429,63	423,31	419,19

Tabela 5.8: Confirmando dados: simulação CEF.

Capítulo 6

Sugestões de atividades didáticas e problemas

Apresentaremos algumas propostas de atividades com o mundo real de operações financeiras, que podem contribuir para o estudante do Ensino Médio desenvolver sua formação crítica da Educação Financeira, de tal forma que tenhamos um sujeito ativo na tomada de decisões em tais operações. AS propostas serão em seções, de modo a facilitar a identificação dos temas.

As atividades propostas podem ser adaptadas à realidade das turmas para o seu melhor aproveitamento. Além disso, o professor deve decidir como os alunos farão a apresentação: trabalho escrito, seminário, banner, cartaz, vídeo, etc. E destacamos a importância de os estudantes terem o preparo antecipado do uso da calculadora, em especial com uso de parênteses e da função potência, e do GeoGebra, um software gratuito, dinâmico e de computação algébrica, numérica e geométrica.

6.1 ATIVIDADE 1: Pagar à vista ou parcelado?

Recursos utilizados: GeoGeobra e calculadora.

O que vale mais: R$ 100,00 hoje ou R$ 105,00 daqui a um mês se tivermos juros de 5% $a.m.$? Certamente o mesmo valor! Devemos comparar valores quando eles estão em uma mesma época. Essa atividade tem como objetivo fazer comparações desse tipo.

Um cenário comum na vida é a tomada de decisões frente a diferentes opções de pagamento e investimento. Digamos que um bem é oferecido por R$ 1.800,00 com 5% de desconto para pagamento à vista ou parcelado em 6 vezes mensais de R$ 300,00 com a primeira para 30 dias. O dinheiro pode ser aplicado com rendimento de 2% $a.m.$. Deseja-se saber qual melhor opção: pagar à vista ou parcelado.

Responda e/ou execute:

- Qual o valor do bem com desconto?

- Lembre-se: o valor atual é $A = P\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Mostre que $A =$ R\$ 1.680,43.

- Justifique qual é a opção mais vantajosa.

  Agora vamos usar os controles deslizantes do GeoGebra para buscar novos resultados variando os dados fornecido acima. Iremos escrever x no lugar de i e deixar o valor em porcentagem.

- Crie um controle deslizante n, variando de 1 até 12, com incremento de 0,5.

- Crie um controle deslizante d (percentual de desconto em porcentagem), variando de 0 até 30, com incremento de 0,5.

- Crie um controle deslizante V (valor do bem), variando de 0 até 6000, com incremento de 100.

- Crie a função v_d (valor com desconto): digite $v_d(x) = (1 - \frac{d}{100})V$, com $x > 0$. Cor: azul.

- Crie a função valor atual $A(x) = \frac{V}{n}\frac{1}{\frac{x}{100}}\left(1 - \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{-n}\right)$, com $x > 0$, onde x representa a taxa em percentual de quanto o dinheiro pode ser aplicado por quem está a tomar decisão de compra. Tenha cuidado no uso dos parênteses. Cor: verde.

- Coloque o eixo OY para variar de -500 até 7000 e o eixo OX de -4 até 45. Determine o ponto de intersecção do gráfico das duas funções. Use o comando Interseção(Objeto, Objeto) na caixa de entrada, digitando Interseção(A, v_d). Denomine o ponto de F.

- Atribua $V = 1800,\ n = 6,\ d = 5\%$. O ponto de intersecção deve ser $G(1{,}49; 1710)$. O que significa esse ponto de intersecção?

- Mova os controles deslizante e observe os resultados. Responda: 1) Por que ao mover "n" só o gráfico de A se move?; 2) Por que ao mover "d" apenas o gráfico de v_d se move?; 3) E ao mover V, por que os dois gráficos de movem?

- Seja F$(x_0; V_0)$. Observe: se $x > x_0$ então $V_d > A$; se $x < x_0$ então $V_d < A$. Responda: Quando é mais vantajoso comprar? Explique.

- Vá aumentando o valor de n e observe o valor de x_0. Nesse caso, irá se precisar de taxas de investimento x mais baixas ou mais altas, de modo que seja melhor a compra parcelada?

- Vá aumentando o valor de V e observe o valor de x_0. Explique o que acontece com x_0. Justifique.

- Vá aumentando o valor de d e observe o valor de x_0. Nesse caso, irá se precisar de taxas investimento x mais baixas ou mais altas de modo que seja melhor a compra parcelada?

- Refletir para discussão em sala de aula: se uma pessoa não tem no momento o dinheiro para pagar à vista, então necessariamente ela deve recorrer ao parcelamento. Certo ou errado?

Interagindo com o professor. O professor poderá criar outras situações para tomada de decisões dentro de possíveis realidades, enriquecendo ainda mais o processo de ensino-aprendizagem. Por exemplo, comprar um impressora ou alugá-la? Importante também discutir a necessidade atual de a pessoa em adquirir um bem, pois ela até poderá ter um melhor resultado econômico se adiar sua compra, porém e se sua necessidade for imediata? Ou seja, se a compra do bem não pode ser adiada, quais variáveis analisar para se fazer logo a compra?

6.2 ATIVIDADE 2: É realmente desconto?

Recursos utilizados: GeoGeobra e internet.

Você sabia que nem todo desconto é na verdade um desconto? Vamos conferir!

1. Reúnam-se em grupo de 4 colegas.

2. Pesquise na internet, em uma loja de venda on-line, quatro produtos que estejam anunciados com desconto para pagamento no boleto ou débito e com parcelamento sem juros no preço à vista. E imprima as informações da tela do anúncio contendo as respectivas parcelas.

3. Para cada produto escolha um número de parcelas e some o total delas, comparando o total encontrado com o valor anunciado com desconto. Os dois totais deram iguais? Sendo o parcelamento sem juros, não deveria ser igual? O que você pode concluir: existem juros embutidos? Justifique.

4. Agora é a hora de calcular a taxa de juros implicitamente cobrada. Escolha para cada produto o maior número de parcelas anunciada sem juros. Lembre-se: $A =$

$P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.
Por exemplo, suponha que o produto esteja no valor de R$ 1.000,00 anunciado com desconto de 10% e 10 de R$ 100,00. Assim, aplique na fórmula $A = 900,\ P = 100,\ n = 10$. Daí, $900 = 100\frac{1-(1+i)^{-10}}{i}$ ou $9i = 1-(1+i)^{-10}$. Agora como não existe um método direto para resolver esta equação, usaremos o GeoGebra como recurso.
No GeoGebra abra o CAS e digite a equação na linha 1. Programe para 5 casas decimais. Na linha 2 digite soluções($1) ou use a ferramenta "Resolver".
A solução positiva é a resposta: 0,0196=1,96% .
O grupo deve fazer esse procedimento par cada um dos produtos e para todos os números de parcelas apresentados no site.

5. A taxa de juros embutida aumenta ou diminui quando cresce o número de parcelas? Justifique.

Interagindo com o professor. Aqui é um momento oportuno para falar sobre resolução de equações polinomiais.

6.3 ATIVIDADE 3: O que fazer para acumular y reais?

Recursos utilizados: GeoGeobra e calculadora.

Um dos assuntos importantes no planejamento financeiro é projetar um valor a ser alcançado no futuro. Por exemplo, por quanto tempo deve-se investir x reais por mês para alcançar y reais? No que segue, considere as séries postecipadas, lembrando que o valor futuro F é considerado na data do último termo da série.

Responda e/ou execute:

- Mostre: $F = P\frac{(1+i)^n-1}{i} \Rightarrow n = \log_{1+i}(\frac{Fi}{P}+1)$.
- Quantas aplicações devem ser feitas por mês no valor de R$ 100,00, a uma taxa de 0,6% a.m, para acumular um total de R$ 5.000,00? Sem considerar a fórmula anterior, explique por que não faz sentido afirmar que são $\frac{5000}{100} = 50$ meses.

  Outras situações alguém poderia perguntar: e se for dobrada a taxa ou se for dobrado o valor investido por mês? Vamos analisar essas e outras variações usando o GeoGebra através do recurso "controle deslizante".

- Crie um controle deslizante F (valor futuro), variando de 0 até 5000, com incremento de 100.

- Crie um controle deslizante P (valor das aplicações), variando de 0 até 1000, com incremento de 25.

- Usando o comando "$log(< b >, < x >)$"na caixa de entrada do GeoGebra, onde a primeira entrada é a base e a outra é o logaritmando, crie a função $n(x) = \log_{1+\frac{x}{100}}(\frac{Fx}{100P} + 1)$ (número de parcelas), onde estamos usando x no lugar de i com $x > 0$ e na forma percentual.

- Crie o controle deslizante i (taxa de investimento), variando de 0 até 100, com incremento de 0,1. Assim, vamos pensar na variação de até 100%.

- Crie a reta $x = i$, digitando $r : x = i$.

- Coloque o eixo OY variando de -4 até 60 e o eixo OX de -4 até 110. Faça a intersecção do gráfico de n e r, usando o comando *"Interseção(Objeto, Objeto)"* na caixa de entrada, digitando Interseção(n,r). Atribua os valores de F, P, e x vistos anteriormente, isto é, $F = 5000$, $P = 100$ e $a = 0{,}6$, e confirme o ponto de intersecção: $(0{,}6; 43{,}86)$. Qual o significado desse ponto?

- Vá aumentando o valor de P. Para cada novo valor de P, crescendo x, o valor de n aumenta ou diminui? O que isso quer dizer?

- Verifique, movendo P e F, que se $P \cong F$ o gráfico de n se aproxima de uma reta horizontal. Qual? Comprove usando equação de n.

- Verifique, fixados P e F, que aumentando-se o valor de i, o valor de n vai diminuindo. O que isso quer dizer?

  Agora vamos pensar no valor de P para acumular um valor F.

- Mostre que $P = \dfrac{Fi}{(1+i)^n - 1}$.

- Quanto deve ser aplicado por mês para acumular um total de R$ 3.000,00, com um rendimento de 1,0% a.m, em 12 aplicações?

- Crie controles deslizante apropriados (F, n e i) para a função prestação $P(x) = \dfrac{F\frac{x}{100}}{(1+\frac{x}{100})^n - 1}$ e faça dois estudos da variação de P em função de F, n e x. Compare-os com outros grupos e analise se houver diferenças. E, por fim, confirme no programa o valor encontrado no item anterior.

Interagindo com o professor. Esse é um momento oportuno para se discutir o *espírito poupador* versus o *espírito consumidor*: o que guarda e o que tudo gasta. Sugestivo: mostrar um exemplo da vida real em que uma pessoa sem ter salário alto conseguiu adquirir bens ao longo dos anos.

6.4 ATIVIDADE 4: Qual a taxa de juros aplicada?

Recurso utilizado: GeoGeobra.

É de interesse descobrir a taxa necessária para se obter n prestações P de uma valor atual A. Ou, de uma maneira prática, saber a taxa aplicada em um parcelamento na compra de um bem.

Exemplo. Um fogão no valor de R$ 2.000,00 é parcelado em 12 vezes de R$ 213,10. Deseja-se saber a taxa cobrada. Assim,

$$2000 = 213{,}10\frac{1-(1+\frac{i}{100})^{-12}}{\frac{i}{100}} \text{ ou } 20i = 213{,}10\left(1-\left(1+\frac{i}{100}\right)^{-12}\right),$$

pois $A = P\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ i. Agora não existe um método direto para resolver a equação em i. Vamos fazer uso do GeoGebra para encontrar essa taxa.

Responda e/ou execute:

- No GeoGebra abra o CAS e digite a equação na linha 1.
- Programe para 5 casas decimais.
- Na linha 2 digite: soluções($1) ou use a ferramenta "Resolver". A solução positiva $i = 4{,}00\%$ é a resposta.
- Agora vamos pensar um pouco mais! Para o mesmo valor P, aumente o número de parcelas para mais dois valores e veja os resultados das taxas encontradas. A taxa aumentou ou diminui? Justifique por que já era de se esperar que isso acontecesse.

Interagindo com o professor. Existem situações de parcelamentos em que além do juro, existe a incidência de taxas, seguro ou impostos. Nesses casos tais valores terão que ser considerados também, pois do contrário a taxa encontrada certamente será diferente da anunciada.

6.5 ATIVIDADE 5: SAC OU PRICE

Recurso utilizado: GeoGeobra.

No sistema de amortização SAC, o total pago e os juros são menores do que no PRICE. Apesar disso, não podemos dizer de imediato que no financiamento de um imóvel a longo prazo a escolha do sistema mais indicado será o SAC, pois outras variáveis precisam ser levadas em conta.

Essa atividade tem como objetivo refletir um pouco sobre essa importante escolha. E para isso, utilizaremos a ferramenta "controle deslizante" do GeoGebra.

Responda ou execute.

- Crie o controle deslizante D_0 (valor do imóvel), variando de R$ 50.000,00 até R$ 280.000,00, com incremento de 1000.

- Crie o controle deslizante i (taxa de financiamento mensal), variando de 0,7 até 1,2 (já expresso em porcentagem), com incremento de 0,05. Aqui, uma variação razoável para a época atual.

- Crie um controle deslizante n (número de prestações em meses), variando de 120 até 300, com incremento de 12. Ou seja, de 10 anos até 25 anos, variando de ano em ano.

  Agora vamos entrar com as prestações. E para isso iremos colocá-las como pontos do gráfico de funções. As prestações nos SAC, P_{kS}, estão na reta $P_{kS} = \left(\frac{1}{n} + i + \frac{i}{n}\right) D_0 - \frac{iD_0}{n}x$, onde $x = k$, e no PRICE no gráfico da função $P_{kP} = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.

- Coloque o eixo OY variando de -200 até 5000 e o eixo OX de -30 até 320, sendo que ao variar mais à frente os controles deslizantes se um dos gráficos sair da janela de visualização, ajustes deverão ser feitos.

- Entre com as funções P_{kS} (cor azul) e P_{kP} (cor verde), com $x > 0$, colocando a taxa na forma percentual, isto é, dividindo por 100.

- Crie um controle deslizante a, variando de 1 até n, que será usado para avaliarmos a $a-$ésima prestação.

- Crie a reta vertical $x = a$ (cor **preta**), digitando $s : x = a$.

- Faça a intersecção entre os gráficos de P_{kS} e s, usando o comando *"Interseção(Objeto, Objeto)"* na caixa de entrada, digitando E=Interseção(P_{kS}, s), e para entre P_{kP}

e s digite G=Interseção(P_{kS}, s). E por último, intersecte P_{kS} e P_{kP}, digitando M=Interseção(P_{kS}, P_{kP}). Considere x_0 a abscissa de M. Observe que $P_{kP} > P_{kS}$ se, e somente se, $k > x_0$.

A janela do GeoGebra até esse momento deve está de acordo com a Figura 6.1, considerando os valores indicados nos controles deslizantes.

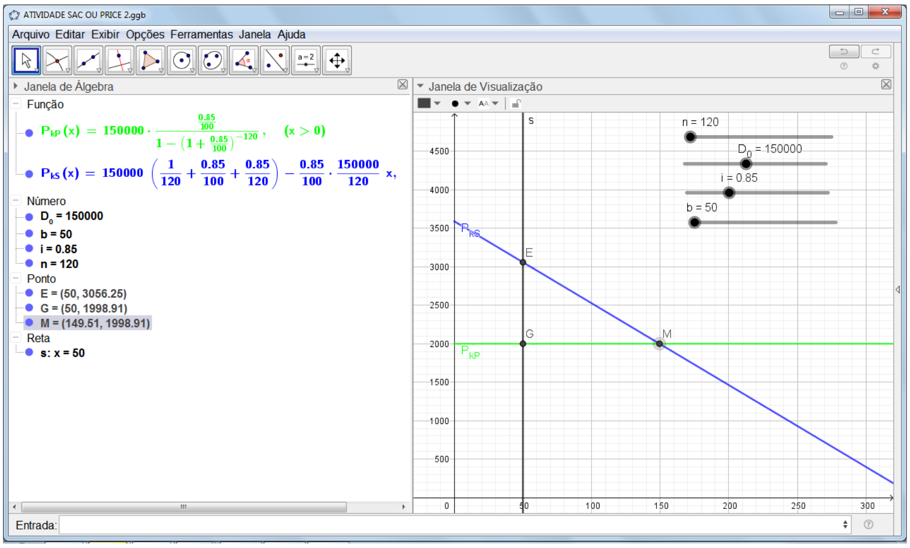


Figura 6.1: Janela do Geogebra: Atividade 4.

- Esconda a reta s. Crie o segmento ligando o ponto E ao ponto G, digitando c=segmento(E,G). O valor de c significa a diferença absoluta entre as prestações P_{aS} e P_{aP}.

- Crie mais uma reta: $t : x = n$. Intersecte a reta t com P_{kS} e P_{kP}, denomine os pontos de intersecção de Y e Z, respectivamente. Crie mais um segmento digitando d=segmento(Y, Z). O valor de d mede a diferença entre a última parcela nos dois sistemas: $P_{nP} - P_{nS}$. Esconda a reta t.

- Mova os controles deslizantes observando atentamente o valor de c e o das coordenadas dos pontos E, G e M.

- Fixe $a = 1$ e escolha valores para i e n. Aumentando D_0, c aumenta ou diminui? O que isso significa para o comprador? Qual o valor de c para $D_0 = 100.000$, $i = 0,9$ e $n = 120$? Dê o seu significado. E trocando apenas D_0 para 200.000 e 300.000? De que forma o valor de c pode inviabilizar a escolha da tabela SAC pelo comprador do imóvel? E, por fim, prove analiticamente que c é proporcional a D_0.

- Fixe $a = 1$, $i = 1$ e $D_0 = 150.000$. Se $n = 120$ (10 anos), mostre que 60% da quantidade de parcelas PRICE são maiores do que as SAC. Aumentando o valor de n, c aumenta ou diminui? E x_0? E d? O que essas variações significam para o comprador do imóvel?

- Colocando $n = 300$ (25 anos) no item anterior, temos c mínimo, d máximo. O que isso significa para o comprador? E para esse valor mínimo de c, é correto afirmar que a escolha da tabela SAC torna-se viável para o comprador? Justifique.

- O valor da prestação nos financiamentos não pode exceder a 30% da renda bruta (r_b) do comprador. Se r_b = R$ 5.000,00 e i = 0,95%, encontre valores de n para quais sejam possíveis o financiamento de R$ 110.000,00 nas duas tabelas. E se fosse R$ 200.000,00, seria possível financiar? Por que? Observe que tal análise influencia na decisão de qual tabela escolher!

- Faça outras simulações variando os controles deslizantes, observe e/ou anote resultados verificados e discuta-os com outros colegas. Lembre-se: compartilhar e discutir ideias é uma ótima forma de aprendizagem.

Interagindo com o professor. Essa atividade é riquíssima em propostas para análise. Uma vez construídos todos os objetos (funções, segmentos, controles deslizantes, etc) dentro do GeoGebra, o professor poderá propor perguntas em diferentes etapas, permitindo um contato mais permanente do aluno com a ferramenta computacional e com diferentes aspectos do tema, favorecendo mais chances de aprendizagem. Vale destacar que no contrato final com a instituição financeira a prestação final será um pouco maior devido aos seguros e taxa administrativa que também serão pagos mês a mês, além da atualização monetária conforme expresso em cláusula contratual. Veja [5].

6.6 Alguns problemas interessantes (e que ensinam)

Os problemas propostos a seguir tem como objetivo apresentar ao aluno situações do dia-a-dia as quais favorecem não apenas aplicações de fórmulas e conceitos da matemática financeira fechados em si, mas também que contribuem para uma Educação Financeira, objetivando desenvolver um consumidor crítico e consciente.

- **PROBLEMA 1.** Uma empresa anuncia um bônus salarial para os seus funcionários no próximo ano. Ela dará 6% de aumento dividido em duas vezes: 2% em Janeiro e 4% em Junho ou 4% em Janeiro e 2% em Junho. A decisão é dos funcionários. Explique qual é a melhor decisão para eles?

  Comentário para o professor. A segunda opção é a melhor, pois no primeiro semestre eles gozarão de maior salário e no segundo semestre o salário será o mesmo nas duas opções.

- **PROBLEMA 2.** Algumas promoções são do tipo "Leve 3 e Pague 2"ou "Leve 4 e Pague 3". Se tais anúncios são de fato verdadeiros, isto é, em cada um dos casos o preço por unidade é igual ao preço de venda no varejo, determine o percentual de desconto nos dois tipos de promoção? Agora veja um caso de anúncio falso: o preço no varejo é R$ 100,00, e é anunciado "Leve 3 e Pague 2"por R$ 250,00. Nesse caso, qual é o desconto verdadeiro? Dê um outro tipo de situação em que a promoção anunciada não é verdadeira.

  Comentário para o professor. No primeiro tipo o desconto é $\frac{1}{3} = 33,33\%$ e no outro $\frac{1}{4} = 25\%$. No anúncio falso o desconto verdadeiro é $1 - \frac{250}{300} =$ 16,67% - um valor menor do que o anunciado de 33,33%. Temos aqui uma rica oportunidade de discussão quanto à possibilidade de estarmos sendo lesados nas ditas promoções.

- **PROBLEMA 3.** Um comerciante decide oferecer desconto em alguns itens de sua loja. Na tentativa de atrair ainda mais consumidores ele promove uma desconto mascarado, ou seja, ele eleva o preço atual P dos itens e depois anuncia um desconto maior. Caso ele tenha dado um aumento de 30%, qual é o percentual de desconto d que ele deve anunciar de tal modo que o percentual de desconto real r, em cima do preço atual, seja de 10%?

  Comentário para o professor. O preço final é $P \cdot 1,30 \cdot (1 - d)$. O preço com desconto real será de $P(1 - r)$. A condição imposta implica que deve-se ter $P \cdot 1,30 \cdot (1 - d) = P(1 - r)$. Resposta: 30,77%. E de maneira mais geral tem-se

$$P \cdot (1 + a) \cdot (1 - d) = P(1 - r),$$

  onde a é a taxa de aumento acrescido ao preço atual para mascarar os altos descontos. Perguntas interessante podem ser formuladas em cima dessa última equação. Por exemplo, um aumento de 10%, seguido de um desconto de 10%, resulta no mesmo preço?

- **PROBLEMA 4.** Quando trabalhadores recebem um aumento salarial de $a = k_1\%$ após um período sem reajuste e de inflação acumulada de $i = k_2\%$, o seu percentual de aumento real é $r = k_3\%$, onde

$$r = \frac{1}{1+i}a - \frac{i}{1+i},$$

  onde podemos ver r como uma função afim em a.

(a) Seja $i = 8\%$. Determine o valor de r para um aumento salarial de 5%, 8% e 11%.

(b) Mostre que se $a < i$ então $r < 0$.

(c) Mostre que se $a = i$ então se $r = 0$.

(d) Mostre que se $a > i$ então se $r > 0$.

(e) Qual o significado para um trabalhador dos resultados dos itens a, b, c e d?

(f) Qual a taxa de variação de r? Ela aumenta ou diminui com o aumento da inflação acumulada? E o que isso significa?

(g) Em uma empresa não foi concedido aumento salarial em um período de inflação de 9,00%. Para os seus trabalhadores que podiam contratar a prestação de um serviço no início de tal período, determine quantos por cento desse serviço eles poderão contratar agora no final desse período? Pense no que aconteceria se inflação fosse cada vez maior.

Comentário para o professor. Nos itens anteriores: (b) perda real; (c) aumento suficiente apenas para repor o poder de compra; (d) ganho real; (f) $\frac{1}{1+i}$ - diminui; (g) perda de $\frac{0{,}09}{1+0{,}09} = 8,26\%$, e assim, poderão contratar $100 - 8{,}26 = 91{,}74\%$ do serviço. Um problema em que muitas pessoas desentendidas ignorando o efeito inflacionário têm percepções errôneas dos aumentos salarias. E para o professor, mais um oportunidade de conscientizar o aluno do Ensino Médio a respeito de lutas por aumentos salariais reais e não apenas aparentes.

Considerações Finais

Ao pensar no tema dessa dissertação, já mesmo antes de terminar as disciplinas obrigatórias do mestrado, tínhamos em mente desenvolver um trabalho nessa área que descrevemos, isso motivado por um anseio no passado em se estudar a Matemática Financeira pelo seu lado qualitativo, enxergando as fórmulas financeiras além do que elas podem revelar em um olhar menos atento. Foi quando discutida a proposta com o professor que aqui orienta, tivemos a sua aceitação. O que representou desde então uma enorme expectativa de se cumprir a missão proposta.

E assim se concretiza. Foi possível interligar diferentes assuntos de matemática básica. Conseguimos dar novas abordagens a assuntos da Matemática Financeira. Foi possível estabelecer resultados e análises das tabelas SAC e PRICE mais abrangentes do que é comumente apresentado nos livros textos ou anunciados em vídeos e sites na internet sem as devidas explicações matemáticas. Apresentamos o estudo do imposto de renda sobre um olhar não comum, favorecendo um enriquecimento das aulas de funções afins. Fizemos um lado prático também, onde testamos a veracidade nos valores de cobranças e anúncios financeiros, o que representa uma possibilidade de metodologia a ser aplicada em sala de aula.

Já quanto às atividades propostas com o uso do GeoGebra: 1) não queremos dizer que as calculadoras financeiras ou planilhas eletrônicas sejam esquecidas, mas somando-se a elas, aproveitar potenciais pedagógicos de cada um para ampliação do conhecimento; 2) que fomente a criação de outras; e 3) que possam dar mais luz para o professor a cada dia estar inserido no mundo das TIC's de forma não meramente "usar para dizer que está usando", mas para de fato ter um instrumento auxiliador na tarefa de mediar a construção do conhecimento.

Na educação básica, quanto aos resultados que foram encontrados com o uso do Cálculo, é indicada a realização de simulações dentro de intervalos através da parte dinâmica do GeoGebra, de formar a ilustrar os casos mais gerais. E, apesar de ao longo do texto mencionarmos apenas Ensino Médio, todo material aqui exposto, incluindo as passagens do Cálculo, pode ser aproveitado no Ensino Superior, em cursos que também o contempla, como Matemática, Administração e Economia.

E por fim, desejamos que esse trabalho contribua para o ensino da Matemática Financeira tão necessária para uma boa gestão das finanças pessoais, comprovar o juro cobrado por atraso de pagamento, decidir a escolha do sistema de amortização em um financiamento imobiliário a longo prazo e muito mais. E não só por esse lado prático, mas também por toda a matemática aqui presente.

Referências Bibliográficas

[1] AMORIM, V. **O Ensino de Matemática Financeira: do livro didático ao mundo real**. 2o Simpósio de Formação de Professor de Matemática da Região Nordeste. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[2] BRASIL. **BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)**. Ministério da Educação, Brasília-DF, 2016. Disponível em: http://historiadabncc.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf. Acesse em: 01 de junho de 2018.

[3] BRASIL. **BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)**. Ministério da Educação, Brasília-DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf. Acesso em: 01 de junho de 2018.

[4] CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. 2018. **Simulador Habitacional Caixa**. Disponível em: http://www8.caixa.gov.br/siopiinternet-web/simulaOperacaoInternet.do?method=inicializarCasoUso. Acesso em: 24 de maio de 2018.

[5] FERREIRA, D. B. **SAC ou PRICE?** Revista do Professor de Matemática, no. 85, Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[6] FEITOSA, J. R. F **Minicurso GeoGebra**. PROJETO PIBID/LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. Santa Maria: UFPB, 2016. Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/pos/arquivos/MINICURSO%20GEOGEBRA.pdf. Acesso em: 05 de junho de 2018.

[7] FRISKE, A. L. et al. **Minicurso de GeoGebra**. GRUPO PET DE MATEMÁTICA DA UFSM. Santa Maria: UFSM, 2016. Disponível em: http://w3.ufsm.br/petmatematica/images/minicursos/GeoGebra/Apostila_GeoGebra.pdf. Acesso em: 05 de junho de 2018.

[8] HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. Tradução e adaptação por Antonio Ribeiro. **Ajuda Geogebra: Manual Oficial da Versão 3.2**. 2009. Disponível em: https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf. Acesso em: 29 de maio de 2018.

[9] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas, 1993.

[11] MORGADO, A. C.; e CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[12] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; e ZANI, S. C. **Progressões e Matemática Financeira**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[13] RECEITA FEDERAL DO BRASIL. **História do Imposto de Renda**. Disponível em: http://idg.receita.fazenda.gov.br/sobre/institucional/memoria/imposto-de-renda. Acesso em: 15 de março de 2018.

[14] RECEITA FEDERAL DO BRASIL. **Simulação de Alíquota Efetiva** http://www.receita.fazenda.gov.br/aplicacoes/atrjo/simulador/simulador.asp?tipoSimulador=M. Acesso em: 10 de janeiro de 2018.

[15] SOBRINHO, J. D. V. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas, 1997.