UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rildo Vaz da Silva Júnior

A Lotérica de Galton

RECIFE
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rildo Vaz da Silva Júnior

A Lotérica de Galton

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Anete Soares Cavalcanti

RECIFE
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S586L Silva Júnior, Rildo Vaz da
A lotérica de Galton / Rildo Vaz da Silva Júnior. – 2018.
48 f.: il.

Orientadora: Anete Soares Cavalcanti.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Recife, BR-PE, 2018.
Inclui referências e apêndice(s).

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Distribuição (Probabilidades) 3. Probabilidade 4. Análise combinatória 5. Triângulo I. Cavalcanti, Anete Soares, orient. II. Título

CDD 510

RILDO VAZ DA SILVA JÚNIOR

A Lotérica de Galton

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ____ /____/_____

BANCA EXAMINADORA

____

Profª Drª Anete Soares Cavalcanti (Orientador(a))– UFRPE

____

Prof. Dr Cícero Carlos Ramos de Brito – IFPE/Campus Recife

____

Profª Drª Karla Ferreira de Arruda Duque– PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho primeiramente a DEUS, por ser a razão de minha existência. A minha mãe, Cristina, e minha irmã, Roseane, que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida. E de forma especial, dedico a minha vó, Terezinha, "In Memorian", que foi sempre um exemplo de garra e minha maior incentivadora.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a DEUS, pois sem Ele nada disso seria possível.

Agradeço aos colegas de turma, PROFMAT - UFRPE 2016, pelo apoio e companheirismo durante os dois anos do programa, tanto durante as aulas como fora delas.

Agradeço à coordanação e professores do PROFMAT, por sempre estarem a disposição para nos ajudar no que fosse preciso.

Um agradecimento especial ao Espaço Ciência pela disponibilidade do material utilizado e atendimento sempre que requisitado e a minha orientadora Profª. Drª. Anete Soares pela confiança, amizade e principalmente pela paciência e incentivo, pontos essenciais para a conclusão deste trabalho.

Por fim, agradeço à minha esposa, pois esteve sempre a meu lado, me pondo para cima e me fazendo acreditar que posso mais que imagino. Devido a seu companheirismo, amizade, paciência, apoio, alegria, amor e, acima de tudo, compreensão este trabalho pôde ser concretizado. Obrigada por ter feito do meu sonho o nosso sonho.

*“Apesar dos nossos defeitos,
precisamos enxergar que somos
pérolas únicas no teatro da vida
e entender que não existem
pessoas de sucesso ou pessoas
fracassadas. O que existe são
pessoas que lutam pelos seus
sonhos ou desistem deles.
(Augusto Cury)*

DECLARAÇÃO

Eu, **Rildo Vaz Da Silva Júnior** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **A Lotérica De Galton**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativo da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como a professora orientadora **Anete Soares Cavalcanti**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 03 de julho de 2018.

Assinatura: ____

Resumo

Neste trabalho iremos propor uma sequência didática para o ensino de Análise Combinatória, mais especificamente o estudo do triângulo de Pascal e suas propriedades, com o uso da Lotérica de Galton. Esse dispositivo consiste em uma tábua retangular com pregos dispostos como vértices de triângulos equiláteros que servirão como obstáculos para a passagem de bolinhas. Na base da tábua, temos algumas canaletas, onde se depositarão as bolinhas depois da passagem pelos obstáculos. Através da distribuição de probabilidades de trajetórias que as bolinhas podem seguir na descida entre os obstáculos até se depositar em uma das canaletas, desenvolveremos a sequência didática voltado para alunos de 2º ano do ensino médio. A proposta é baseada nos testes numéricos e posterior observação da distribuição teórica de probabilidades. Abrangendo um pouco mais este estudo e com o uso de um simulador da Lotérica de Galton, observaremos a aproximação do histograma da distribuição das bolinhas nas canaletas com a curva gaussiana.

Palavras-chave: Lotérica de Galton; Triângulo de Pascal; Curva gaussiana; Análise combinatória.

Abstract

In this work we will propose a didactic sequence for Combinatorial Analysis teaching, more specifically the study of the triangle of Pascal and its properties, with the use of the Lottery of Galton. This device consists on a rectangular board with nails arranged as vertices of equilateral triangles that will serve as obstacles for the passage of balls. At the base of the board, we have some channels, where the balls are deposited after the passage through the obstacles. Through the distribution of probabilities of trajectories that the balls can follow in the descent between the obstacles until depositing in one of the channels, we will develop the didactic sequence directed to high school second year students. The proposal is based on the numerical tests and subsequent observation of the theoretical distribution of probabilities. Taking a closer look at this study and using a Galton Lottery simulator, we will observe the approximation between the histogram of the distribution of the balls in the channels with the Gaussian curve.

Keywords: Lottery of Galton; Pascal's Triangle; Gaussian curve; Combinatorial analysis.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

O ensino da Matemática tem se tornado um grande desafio para os professores. Muitas estratégias como o uso de aplicativos e o uso de jogos matemáticos vem sendo desenvolvidas para facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Mas, segundo Miorim (1990) (6), "o mais importante não será o material, mas sim, a discussão e resolução de uma situação problema ligada ao contexto do aluno, ou ainda, à discussão e utilização de um raciocínio mais abstrato.

No primeiro encontro de orientação, segundo semestre de 2016, o discente apresentou a vontade de desenvolver um trabalho voltado para o ensino de análise combinatória e que pudesse envolver a criação de algum aplicativo ou uso de computadores que auxiliassem o ensino do tema a ser abordado no TCC, já que trabalhava numa instituição com cursos técnicos na área de informática. A orientadora sugeriu um experimento chamado *"A Lotérica de Galton"*. Em pesquisa realizada, percebemos a escassez de material em português que tratasse da Lotérica de Galton e unindo-se a isso, verificamos o fato da existência de um dispositivo desse no Espaço Ciência que estava sendo usado de forma amadora, sem uma tradução matemática do que estaria por trás de seu funcionamento nem mesmo um histórico da origem da Lotérica, devido a falta de uma formação adequada dos monitores para trabalhar com esse dispositivo. Verificamos ainda, que um dispositivo como este era utilizado em dois programas de TV, intitulados *Jogo das Fichas* e *The Wall*, este último foi verificado a posteriori pois o seu lançamento foi em março de 2018. Neste sentido, escolhemos a Lotérica de Galton, também conhecida como Máquina de Galton ou Quincunx, para elaborarmos um material que servirá para a formação dos monitores do Espaço Ciência e uma sequência didática para o ensino de probabilidade e análise combinatória, mais especificamente, o Triângulo de Pascal e suas propriedades. Abrangendo um pouco mais esse estudo, a partir da construção do Triângulo de Pascal e experimentações, pretendemos mostrar a construção da curva gaussiana (distribuição normal).

Apresentaremos a Lotérica aos alunos, resgatando também um histórico sobre Galton, e através de experimentação, esperamos que os mesmos percebam que os resultados encontrados se aproximam de resultados que iremos adquirir de forma teórica, com a distribuição das probabilidades. Também apresentaremos o Triângulo de Pascal e esperamos que os alunos associem os resultados encontrados na distribuição de probabilidades na Lotérica às linhas do Triângulo. De forma experimental, verificaremos que essa distribuição se aproxima da curva gaussiana.

Finalmente, esperamos que, com os resultados desta experimentação, consigamos sugerir uma sequência didática que possa ser utilizada por professores no ensino de probabilidades, análise combinatória e distribuição normal.

1 Motivação, Origem e Bastidores Matemáticos

1.1 Motivação

Ao longo da história, diversos dispositivos mecânicos e de fácil confecção foram desenvolvidos no sentido de demonstrar, empiricamente, como as leis da Física são aplicáveis no nosso cotidiano. Podemos citar o pêndulo de Newton ou Berço de Newton, como exemplo. Esse dispositivo recebe o nome do físico *Sir Isaac Newton* por demonstrar empiricamente a conservação do momento e da energia, leis físicas estudadas e demonstradas por Newton.

Alguns dispositivos mecânicos com objetivos matemáticos também foram desenvolvidos. O primeiro que destacamos é o **ábaco**. Trata-se um antigo instrumento de cálculo, formado por uma moldura com bastões ou arames paralelos, dispostos no sentido vertical, correspondentes cada um a uma posição digital (unidades, dezenas,...) e nos quais estão os elementos de contagem (fichas, bolas, contas,...) que podem fazer-se deslizar livremente, conforme Figura 1. Teve origem provavelmente na mesopotâmia, há mais de 5.500 anos. O ábaco pode ser considerado como uma extensão do ato natural de se contar nos dedos. Emprega um processo de cálculo com sistema decimal, atribuindo a cada haste um múltiplo de dez. Ele é utilizado ainda hoje para ensinar às crianças as operações de somar e subtrair.

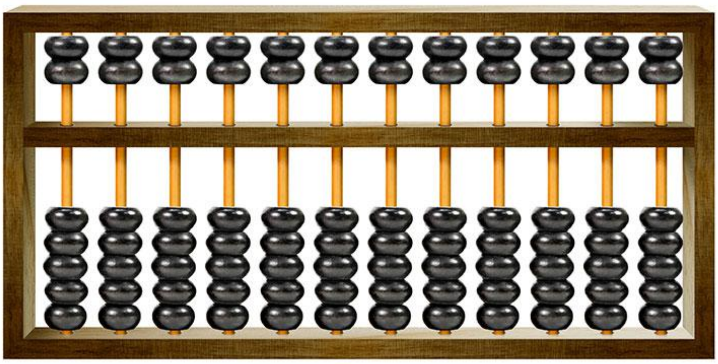


Figura 1 – Ábaco japonês, conhecido como sorobã. (19)

O segundo que destacamos é a "*Máquina de Turing*". Trata-se de um dispositivo teórico que foi concebido pelo matemático britânico Alan Turing (1912-1954), muitos anos antes de existirem os modernos computadores digitais. Num sentido preciso, é um modelo abstrato de um computador, que se restringe apenas aos aspectos lógicos do seu funcionamento (memória, estados e transições) e não à sua implementação física. Numa máquina de Turing pode-se modelar qualquer computador digital. Turing também se envolveu na construção de máquinas físicas para quebrar os códigos secretos das comunicações alemãs durante a Segunda Guerra Mundial. A Máquina de Turing é bem retratada no filme "*O Jogo da Imitação*", Figura 2.

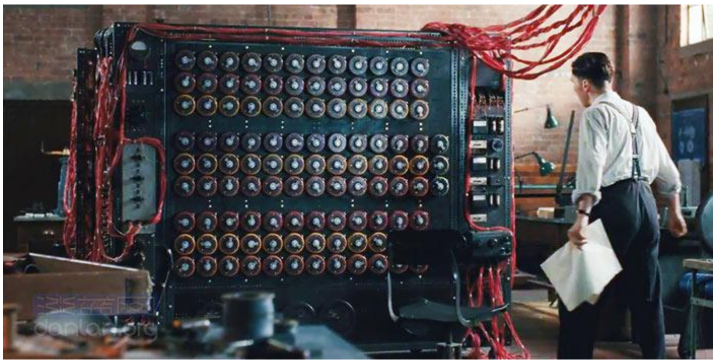


Figura 2 – Cena do filme *O Jogo da Imitação*. (20)

Esses dispositivos auxiliam na compreensão dos conceitos utilizados em suas confecções. O fato da Matemática lidar muito com o abstrato, pode gerar uma certa dificuldade em alguns alunos durante as aulas. Sanches (2004) (8) destaca que as dificuldades de aprendizagem em Matemática podem se manifestar em alguns aspectos, entre eles destacamos:

> Dificuldades relativas à própria complexidade da Matemática, como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos. A hierarquização dos conceitos matemáticos, o que implica ir assentando todos os passos antes de continuar, o que nem sempre é possível para muitos alunos; a natureza lógica e exata de seus processos, algo que fascinava os pitagóricos, dada sua harmonia e sua "necessidade", mas que se torna muito difícil pra certos alunos; a linguagem e a terminologia utilizadas, que são precisas, que exigem uma captação (nem sempre alcançada por certos alunos), não só do significado, como da ordem e da estrutura em que se desenvolve. (SANCHES, J. N. 2004 (8))

Nesse contexto, decidimos escolher um dispositivo que pudesse nos auxiliar na compreensão de conceitos envolvidos em análise combinatória.

Como sugestão da orientadora, decidimos trabalhar com a *Lotérica de Galton*. Essa Lotérica é um dispositivo que estava presente no Espaço Ciência em duas versões. Uma maior, com dimensões de aproximadamente 120cm de comprimento por 60cm de largura, e outra menor, com dimensões 62cm de comprimento por 52cm de largura, conforme Figuras 3, 4 e 5, que foi gentilmente cedida pelo mesmo para que este trabalho pudesse ser feito. Durante o primeiro encontro de orientação, foi verificado que o dispositivo escolhido como objeto de estudo, naquele momento, estava sendo utilizado no Espaço Ciência de forma amadora, pois os monitores não conheciam os "bastidores"matemáticos por trás do funcionamento desse dispositivo e também não tinham conhecimento histórico de sua origem, devido a falta de uma formação adequada para se trabalhar com a Lotérica. Com isso, colocamos como primeira prioridade a criação de um material, tipo um manual, que mostrasse um pouco do histórico e o funcionamento da Lotérica. Esse material seria utilizado na formação dos monitores.

Em pesquisas sobre a Lotérica de Galton, verificamos como aplicá-la na compreensão da construção e das propriedades do Triângulo de Pascal, bem como, uma demonstração numérica de sua aproximação com a curva gaussiana. Encontramos alguns artigos que mostravam as propriedades físicas desse dispositivo, mas como esse não era nosso foco, não os utilizamos. A carência de material em português que trate das propriedades matemáticas da Lotérica foi mais uma motivação para que escolhêssemos esse dispositivo como objeto de estudo.

1.2 Origem da Lotérica de Galton

Segundo Teixeira (10), Francis Galton (1822-1911) nasceu em Sparbrook, na Inglaterra e foi primo de Charles Darwin. O avô de ambos, Erasmus Darwin, influenciou decisivamente na sua formação, sobretudo pela sua participação na Sociedade Lunar de Birmingham. Esta congregava muitos cientistas, inventores, pesquisadores e livres-pensadores ingleses importantes da época. Entre eles destacam-se James Watt, responsável pelo desenvolvimento da máquina a vapor, e Joseph Priestley, responsável pela descoberta do oxigênio conjuntamente com o francês Antoine Lavoisier e o sueco Carl Scheele. Influenciado pelos pais, estudou medicina, mas veio a abandoná-la após terminar o curso. Assim como seu primo, era um viajante entusiasta, tendo sido inclusive premiado pela Sociedade Geográfica Real e pela Sociedade Geográfica Francesa devido aos seus estudos cartográficos na região da atual Namíbia. Realizou estudos nas áreas de Geografia, Estatística, Meteorologia, Psicologia, Educação, Sociologia e Antropologia, mas em 1865 seu principal interesse se definiu: a hereditariedade.

As ideias de Galton foram bastante influenciadas pela publicação do livro "*A origem das espécies*" do seu primo Darwin. Como consequência, Galton procurou, durante o resto de sua vida, estudar as consequências da evolução humana. Focou basicamente forma como as habilidades hmanas eram herdadas. Os seus estudos, conjuntamente com os realizados por Pearson e Fisher, estabeleceram o campo de conhecimento da bioestatística.

Em 1863, após conhecer os escritos de Quetelet, imbuiu-se instantaneamente da universalidade da distribuição normal. O modo como a utilizou, contudo, foi muito diferente do que Quetelet defendia. Galton viu a distribuição normal como um método de classificar dados em grupos de diferentes origens. Galton formulou a polêmica teoria eugênica para expressar a possibilidade do melhoramento racial das gerações seguintes que teve ao longo do século XX uma triste história, já que foi apropriada por ideólogos nazistas e racistas.

Entre 1873 e 1874, Galton projetou um aparelho experimental que ficou conhecido como "A Máquina de Galton"ou também Quincunx. Se tratava de um modelo físico da teoria de erros e aplicável a muitos fenômenos no campo da Biologia e da Física (TEIXEIRA et al., 2008 (10)). Denominamos esse dispositivo de Lotérica de Galton. Esse nome foi escolhido por se tratar de um dispositivo onde poderíamos fazer apostas, já que seus resultados são improváveis.

A Lotérica de Galton consiste em um arranjo de pregos dispostos em uma placa de madeira com espaçamentos iguais. Por baixo de cada prego estão colocados dois pregos numa linha horizontal formando um triângulo equilátero com o prego superior. Esses pregos servirão como obstáculos à passagem de bolinhas em movimento pela atuação da gravidade. Na parte superior da placa de madeira existe um afunilamento na passagem das bolinhas, fazendo com que elas sempre comecem no mesmo ponto. As bolinhas são soltas na parte superior e colidem com os obstáculos acumulando-se numa série de canaletas igualmente espaçadas na base da placa. O modelo que escolhemos para trabalhar, foi gentilmente cedido pelo Espaço Ciência. Sua configuração da disposição dos obstáculos (pregos) diferencia um pouco da maioria dos modelos encontrados em pesquisas, pois nos dá a possibilidade de deslocar o lançamento das bolinhas, podendo ser mais a esquerda, conforme Figura 3, lançamento central, conforme Figura 4, e lançamento mais a direita, conforme Figura 5.

Figura 3 – Lançamento a esquerda.

Figura 4 – Lançamento central.

Figura 5 – Lançamento a direita.

Daqui para frente, a menos que se diga o contrário, todos os lançamentos que tratarmos serão referentes ao lançamento central.

1.3 Bastidores Matemáticos

A Lotérica de Galton

Quando uma esfera encontra um obstáculo, a probabilidade de seguir para direita ou esquerda são iguais a $1/2$, isto é, os eventos são equiprováveis. Após o segundo choque, as probabilidades de queda à esquerda de ambos os pregos ou entre eles ou à direita de ambos deve estar na proporção 1:2:1 (TEIXEIRA et al., 2008 (10)). Como temos uma série de choques sucessivos, a probabilidade com os próximos obstáculos segue uma configuração tipo triângulo de Pascal. O acúmulo em cada canaleta segue uma distribuição binomial, $P(x)$, dada por

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \tag{1.1}$$

em que n representa o número de colisões, ou fileiras de pregos, que o corpo de prova encontra até atingir a canaleta e x é o número de sucessos em cada canaleta com probabilidade p de ocorrer.

Para se entender a equação 1.1, pode-se pensar na seguinte situação: para que a esfera caia na 3^a canaleta ($x = 3$) à direita (sucesso), ela deve seguir na mesma direção três vezes, mas como se tem n fileiras, ter-se-á $(n - x)$ colisões à esquerda (insucesso). A probabilidade de sucesso para tal configuração será p^x e os insucessos serão $(1 - p)^{(n-x)}$; assim, a probabilidade que tal situação ocorra será $p^x\ (1 - p)^{(n-x)}$. O número de trajetórias possíveis é dado por $n!$. Entretanto, para cada trajetória possível existem $x!$ maneiras que a bolinha pode ir à direita, e da mesma forma tem-se $(n - x)!$ maneiras à esquerda. Portanto, o número total de trajetórias possíveis deve ser dividido por esses dois fatores, que é o divisor da equação.

Se fizermos a distribuição das probabilidades nas canaletas, variando o número de canaletas, verificamos que essa distribuição das probabilidades obedece as linhas do triângulo de Pascal, conforme as Figuras 6 e 7.

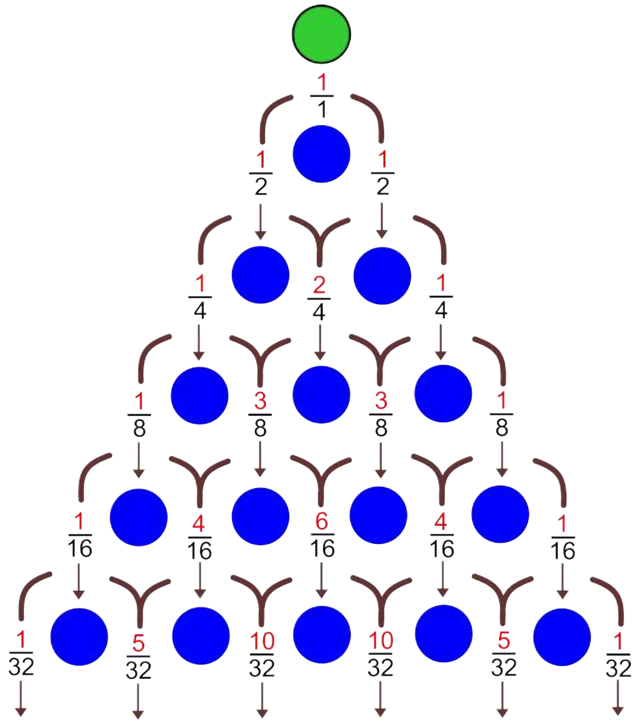


Figura 6 – Distribuição de probabilidades na Lotérica de Galton.

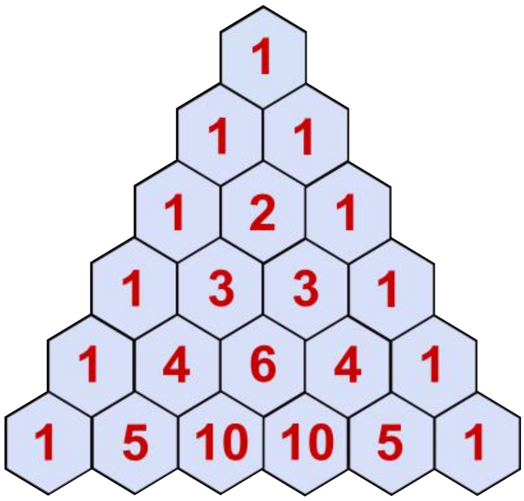


Figura 7 – Triângulo de Pascal com 6 linhas.

O Triângulo de Pascal

Blaise Pascal foi um destacado matemático e físico. Era filho de Étienne Pascal, professor de Matemática, o qual conduziu sua educação visando o desenvolvimento correto de sua razão. Seu pai fez uso de recursos didáticos, jogos, como parte integrante do ensino e não se restringiu a disciplina que ministrava aulas, abrangia disciplinas variadas como História, Geografia e Filosofia.

Devido ao seu talento precoce em Física, sua família foi morar na França, onde Blaise Pascal se destacou no estudo da Matemática. Baseando suas pesquisas nas ideias de Euclides, formulou o famoso "*Teorema de Pascal*". No período em que desenvolvia seus trabalhos sobre cônicas, um amigo lhe indagou sobre probabilidades nos jogos de azar, que estava em alta evidência na época. Buscou conversar com Fermat sobre esse tema. E dessa correspondência entre Pascal e Fermat foi dado início a moderna teoria de probabilidades. Pascal, por fim, relacionou sua pesquisa, sobre probabilidade, ao triângulo aritmético, posteriormente chamado de Triângulo de Pascal (BLAISE, 2017)(1).

Em 1654, Antoine Gombauld, autodenomidado o Cavaleiro de Méré, escreveu uma carta para Pascal, solicitando sua ajuda na solução de alguns problemas ligados a jogos de azar. Entre eles, estava o seguinte

Jogando com um par de dados honestos, quantos lances são necessários para que tenhamos uma chance favorável (ou seja, de mais de 50 %) de obtermos um duplo-seis, ao menos uma vez?

Então Pascal se propôs a encontrar uma solução e em conversas com Fermat, se conveceu que a resolução desse problema passaria pela enumeração combinatorial das possibilidades de ocorrência do duplo-seis. Em busca de uma maneira de fazer essa trabalhosa enumeração de forma inteligente, Pascal redescobriu e aperfeiçou uma interpretação combinatória e probabilística do triângulo aritmético, a mesma que Tartaglia já havia descoberto e estudado.

> Após a resolução do problema proposto por Méré, Pascal gastou um ano escrevendo uma monografia com cerca de sessenta páginas sobre o triângulo aritmético: *Traité du triangle arithmétique*, a qual foi publicada só postumamente, em 1665. Quase cem anos depois, em 1739, o matemático de Moivre publicou trabalho em que usou a denominação *TRIANGULUM ARITHMETICUM PASCALIANUM* para o triângulo aritmético. Dada a repercussão que esse trabalho teve na época, isso acabou tornando consagrada a denominação "*Triângulo de Pascal*" na Inglaterra, França e mais alguns países europeus (SILEIRA, J. F. 2001 (9))

O Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números relacionados entre si e é representado na Figura 8.

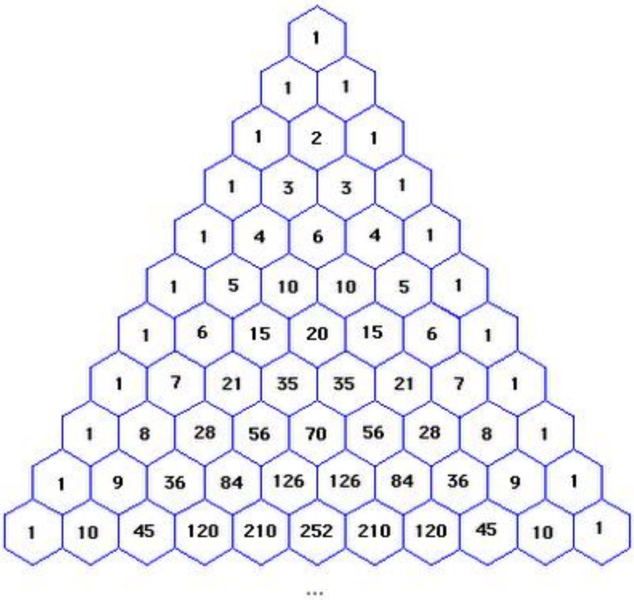


Figura 8 – Triângulo de Pascal com 11 linhas

Bastidores Matemáticos do Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal pode ser construído seguindo a sequência binomial a seguir

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \; \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \; \binom{2}{1} \; \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \; \binom{3}{1} \; \binom{3}{2} \; \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \; \binom{4}{1} \; \color{blue}{\binom{4}{2}} \; \color{blue}{\binom{4}{3}} \; \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \; \binom{5}{1} \; \binom{5}{2} \; \color{blue}{\binom{5}{3}} \; \binom{5}{4} \; \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \; \binom{6}{1} \; \binom{6}{2} \; \binom{6}{3} \; \binom{6}{4} \; \binom{6}{5} \; \binom{6}{6} \\
\cdots
\end{array}$$

Entre as propriedades desse triângulo, destacamos a *relação de Stifel*, que diz o seguinte: *cada elemento do triângulo, que não esteja nas laterais, é igual à soma dos dois adjacentes superiores, em outras palavras, seja n e p números naturais tais que $n \geq p - 1 \geq 0$, podemos dizer que*

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p} \tag{1.2}$$

em que n é a linha em que o elemento se encontra ($n = 0, 1, 2, 3, ...$) e p é a posição do elemento naquela linha ($p = 1, 2, 3, ...$). Por exemplo, $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10 = \binom{4+1}{3}$.

Para demonstrar a relação de Stifel, usaremos argumentos de combinatória e para isso basta responder o seguinte: Considerando um grupo com $n+1$ pessoas, incluindo José, de quantas maneiras podemos formar uma comissão com $p+1$ pessoas desse grupo?

É fácil ver que o total de possibilidades é dado por $\binom{n+1}{p+1}$. Por outro lado, ou José faz parte ou não faz parte da comissão formada. Assim, temos:

<u>Comissões que José faz parte</u>:
Se José ja faz parte da comissão, então basta escolhermos outras p pessoas entre as n restantes, ou seja, teremos $\binom{n}{p}$ comissões.

<u>Comissões que José não faz parte:</u>
Se José não faz parte da comissão, então devemos escolher $p+1$ pessoas entre as n pessoas restantes, ou seja, teremos $\binom{n}{p+1}$ comissões.

Assim, no total, teremos $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ comissões diferentes.

Portanto, $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ $\blacksquare$.

Uma segunda propridade do Triângulo de Pascal que destacaremos é o Teorema das Linhas, que diz o seguinte: *a soma dos elementos da n-ésima linha é igual a* 2^n. Faremos a demonstração desta propriedade por indução em n.

Definimos

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} \tag{1.3}$$

Se $n = 0$, temos $S_0 = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$. Se $n = 1$, temos $S_1 = \binom{1}{0}+\binom{1}{1} = 1+1 = 2 = 2^1$. Suponhamos então que o resultado é válido para todo $n = 1, 2, ..., k$. Vamos mostrar que o mesmo é válido para $n = k+1$.

Temos $\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + ... + \binom{k+1}{k+1}$. Aplicando a Relção de Stifel nas parcelas dessa soma que estão entre a primeira e a última parcela, e utilizando o fato de que $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ e $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$, teremos:

$S_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{1} + ... + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} + \binom{k}{k}$.

Reescrevendo, temos:

$S_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + ... + \binom{k}{k} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + ... + \binom{k}{k}$.

Ou seja, $S_{k+1} = 2.S_k$. Como hipótese de indução, temos $S_k = 2^k$. Assim, teremos: $S_{k+1} = 2.2^k = 2^{k+1}$.

Pelo princípio da indução finita, temos que a propriedade é válida para todo n natural.

Uma aplicação desse Teorema é a resolução do problema de abertura do palácio. O problema é: *Se um palácio possui n portas, de quantos modos pode ser aberto esse palácio?*

Resolvendo esse problema, teremos:

Abrindo 1 porta: $\binom{n}{1}$
Abrindo 2 portas: $\binom{n}{2}$
Abrindo 3 portas: $\binom{n}{3}$
...
Abrindo n portas: $\binom{n}{n}$
O total de modos seria: $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n} - \binom{n}{0} = 2^n - 1$.

Na equação 1.1, vimos que o acúmulo das bolinhas nas canaletas segue uma distribuição binomial. Uma consequência direta do Teorema Central do Limite de De Moivre-Laplace é que podemos calcular, de forma aproximada probabilidade binomiais com o uso da distribuição Normal.

A Curva Gaussiana

Johann Carl Friedrich Gauss, nasceu em 30 de abril de 1777 em Braunschweig na Alemanha e morreu em 23 de fevereiro de 1855 em Göttingen, também na Alemanha. Foi um matemático, astrônomo e físico que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, o estudo da geodésica, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica.

Alguns se referem a ele como "o príncipe da Matemática" ou "o mais notável dos matemáticos" e um "grande matemático desde a antiguidade". Gauss tinha uma marca influente em muitas áreas da Matemática e da ciência e é um dos mais influentes na história da Matemática. Ele considerava a Matemática como "a rainha das ciências".

Em probabilidade e estatística ficou famoso pelo desenvolvimento do método dos mínimos quadrados e pela descoberta da distribuição normal, também conhecida como a distribuição gaussiana, definida graficamente por meio da chamada curva de Gauss ou curva gaussiana.

A Distribuição Normal, distribuição que terá como gráfico a curva gaussiana, é uma das mais importantes distribuições contínuas de probabilidade pois, muitos fenômenos aleatórios, físicos e biológicos, por exemplo, comportam-se próximos a essa distribuição. Ela pode ser utilizada para calcular, de forma aproximada, probabilidades para outras distribuições, como por exemplo, para a distribuição binomial

O responsável mais direto da curva normal foi Abraham de Moivre, matemático francês exilado na Inglaterra, que a definiu em 1730, dando sequência aos trabalhos de

Jacob Bernoulli (teorema ou lei dos grandes números) e de seu sobrinho Nicolaus Bernoulli, matemáticos suíços. Moivre publicou seus trabalhos em 1733 na obra *The doctrine of the chances* (A doutrina das chances). O sucesso da descoberta foi rápido e grandes nomes passaram a trabalhar sobre a curva normal, tais como Laplace, que em 1783 a utilizou para descrever a distribuição dos erros, e Gauss, que em 1809 a empregou para analisar dados astronômicos. Inclusive, a curva normal é chamada de distribuição de Gauss.

A equação matemática para a distribuição de probabilidade da variável normal depende de dois parâmetros, μ e σ, a sua média e desvio padrão, respectivamente.

A densidade de probabilidade da distribuição normal é denotada como

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1.4}$$

Temos, como exemplos de gráficos para a distribuição normal, ou curva gaussiana, a Figura 9.

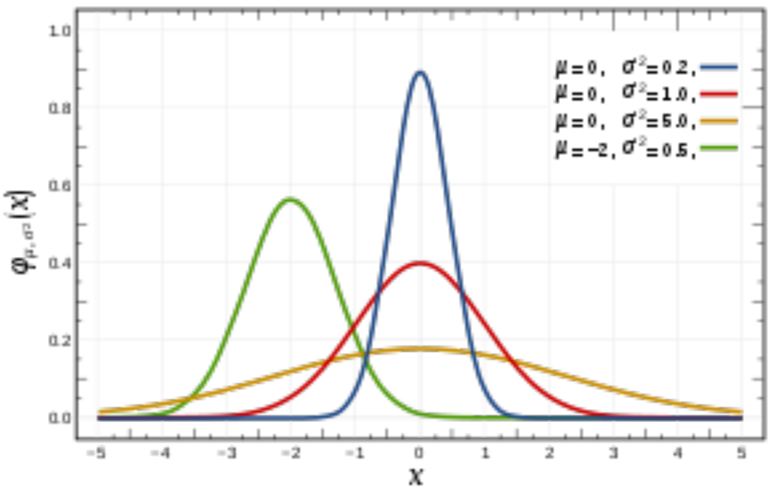


Figura 9 – Gráficos da Distribuição Normal

Uma verificação numérica da aproximação da curva gaussiana com o histograma da distribuição das bolinhas nas canaletas da Lotérica será feita na Seção 3.2. A Figura 31 mostra essa verificação.

Podemos verificar a aproximação da distribuição Normal a partir da distribuição Binomial através do Teorema do Limite Central. Uma versão do enunciado desse Teorema diz: *Sejam* x_1 *, ..., x_n , n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e desvio-padrão σ. A distribuição da soma das n variáveis tende a apresentar um comportamento Normal*, como segue:

$X_1 + X_2 + ... + X_n = \Sigma\chi_i \sim Normal(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Com a média μ aplicada na distribuição normal sendo determinada pela esperança da distribuição binomial, $E(X)$,definida como

$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x.p(x) = n.p$

E o desvio padrão σ aplicado na distribuição normal sendo determinado pela raiz quadrada da variância da distribuição binomial, $Var(X)$, que por sua vez é definida por

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) \Rightarrow Var(X) = npq$

Com n sendo o número de obstáculos que a bolinha se chocará até se depositar numa canaleta, p é a probabilidade da bolinha ir para a direita em um choque e q a probabilidade da bolinha ir para a esquerda, ambos iguais a 1/2.

Uma demonstração para o Teorema do Limite Central, bem como as demonstrações para as fórmulas da esperança e da variância da distribuição binomial, podem ser encontradas em Moretti (2010) (4).

2 Aplicações

Em 2017, o Ministério de Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações difiniu que ***A Matemática está em tudo*** seria o tema para a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia. Esse tema não foi à toa. Como bem sabemos, podemos encontrar a Matemática em tudo no nosso cotidiano. Segundo Morgado (2004) (5), "foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da análise combinatória". Assim como nos jogos de azar, alguns jogos em programas de TV também são baseados em conceitos matemáticos.

Em pesquisas, verificamos que a ideia da Lotérica de Galton é utilizada em dois jogos de programas de TV, o que gera um bom motivo para o estudo desse dispositivo. O primeiro é o quadro "*O Jogo das Fichas*" do Programa de Silvio Santos no SBT. Nesse jogo, cada participante deve rodar 6 piões. Estes piões tem valor diferentes que vão de R$ 1.000,00 a R$ 1.000.000,00. Depois de rodá-los, será somado o valor de cada pião. Dando sequência, na segunda etapa do programa o participante vai fazer a prova da canaleta. Nesta etapa ele vai receber algumas fichas que devem ser liberadas em uma "mesa", a nossa Lotérica de Galton, conforme mostra a Figura 10. O participante poderá soltar a sua ficha em qualquer ponto na parte superior da "mesa". A ficha vai descendo, passando pelos obstáculos até se depositar em uma das canaletas, fazendo com que o participante ganhe o valor representado naquela canaleta.

Figura 10 – Jogo das Fichas - SBT (14)

O segundo é o quandro "*The Wall*" do programa Caldeirão do Huck na Rede Globo. O objeto que dá nome ao jogo, a parede é a protagonista de The Wall, jogo de perguntas e respostas. The Wall é um sucesso em mais de 20 países e pode render mais de R$ 1.700.000,00 em prêmios. Os participantes jogam em dupla, tendo como desafiante justamente a parede, a Lotérica de Galton, de onde aparecem as perguntas e de onde caem bolas coloridas. A bola verde acrescenta um valor em dinheiro ao saldo do participante. A bola vermelha desconta e, sim, é capaz de acabar com toda a quantia acumulada. A Figura 11 mostra a Lotérica do jogo.

Figura 11 – The Wall - Rede Globo (13)

3 A Sequência Didática

Zabala considera as sequências didáticas como uma "das diferentes variáveis que configuram as propostas metodológicas" e define essa variável como uma "série ordenada e articulada de atividades que formam as unidades didáticas" (ZABALA, A. 1998: p.53(11)).

Masseron (1996, p. 4 apud MACHADO, 2000, p. 07) (3) define, de forma mais ampla, como "uma sequência de atividades progressivas, planificadas, dirigidas por um tema, um objetivo geral ou por uma produção".

Já Schneuwly (1991, p 134-137 apud MACHADO, 2000, p. 07 (3)) define sequência didática como

> unidade de trabalho escolar, constituída por um conjunto de atividades que apresentam um número limitado e preciso de objetivos e que são organizadas no quadro de um projeto de apropriação de dimensões constitutivas de um gênero de texto, com o objetivo de estruturar as atividades particulares em uma atividade englobante, de tal forma que essas atividades tenham um sentido para os aprendizes. (SCHNEUWLY, 1991, p 134-137 apud MACHADO, 2000, p. 7 (3))

Baseando-se nas definições acima citadas, definiremos sequência didática como um conjunto de procedimentos formados por etapas ligadas entre si para tornar mais eficiente o processo ensino-aprendizagem.

3.1 Montagem

Apresentaremos aqui a sequência didática desenvolvida através de pesquisa, com o objetivo de tornar mais lúdico o ensino de análise combinatória (triângulo de Pascal).

Tema: Análise combinatória (Triângulo de Pascal) e curva gaussiana.

Público alvo: alunos do 2º ano do ensino médio.

Duração: 8 aulas (aproximadamente 4 encontros com duas aulas cada).

Disciplina: Matemática.

Objetivo geral: Apresentar uma sequência didática utilizando a máquina de Galton no ensino de probabilidade, análise combinatória, mais especificamente o Triângulo de Pascal e suas propriedades, e uma aplicação para a curva gaussiana (distribuição normal).

Objetivos específicos:

1. Perceber um acúmulo maior de bolinhas (corpo de prova) nas canaletas centrais na máquina de Galton através de experimentações.
2. Comprovar o maior acúmulo nas canaletas centrais através da distribuição das probabilidades.
3. Perceber que a distribuição teórica das bolinhas nas canaletas segue a sequência do Triângulo de Pascal.
4. Verificar a relação de Stifel no Triângulo de Pascal.
5. Perceber a aproximação que a distribuição de probabilidades nas canaletas tem com a curva gaussiana (distribuição normal) de forma numérica.

Desenvolvimento: A sequência será desenvolvida através dos encontros a seguir:

1º Encontro: apresentar a Lotérica de Galton perguntando em que canaleta os alunos apostariam que a bolinha cairia. Logo em seguida, apresentar uma breve história de quem foi Galton. Por fim, ainda no primeiro encontro, promover testes com os alunos, soltando uma quantidade fixa de bolinhas. Essa quantidade de bolinhas deve ser determinada de acordo com a capacidade das canaletas. Para quantidades maiores, alguma canaleta central pode transbordar, o que modificaria o resultado real do teste. Sugere-se, que previamente solte bolinhas até que uma canaleta transborde, para determinar o número máximo de bolinhas que podem ser utilizadas. Espera-se que nos testes, os alunos sejam capazes de perceber que as bolinhas têm uma maior concentração nas canaletas centrais.

2º Encontro: trabalhar com os alunos a distribuição de probabilidades ao longo da máquina, utilizando a definição de probabilidade. A princípio, mostrar que com 1 obstáculo, teríamos duas canaletas (uma a esquerda e outra a direita do obstáculo) e as probabilidades se distribuirão de forma igualitária, na proporção 1:1. Com 3 obstáculos, dispostos como vértice de uma triângulo equilátero, teremos 3 canaletas, e a distribuição das probabilidades ficará na proporção 1:2:1. Adicionar outros 3 obstáculos abaixo dos que existiam de forma a continuar com triângulos equiláteros, teremos 4 canaletas e as probabilidades se distribuirão na proporção 1:3:3:1. Espera-se que os alunos entendam essa mecânica de distribuição de probabilidades e sejam capazes de determinar para números maiores de obstáculos. Como sugestão, deixar, como atividade, para que os alunos determinem a distribuição de probabilidades com um número maior que as demonstradas em aula.

3º Encontro: apresentar aos alunos o Triângulo de Pascal e sua construção binomial. Espera-se que os alunos percebam que as proporções da distribuição de probabilidades, determinadas no encontro anterior, representam as linhas do Triângulo de Pascal. Ainda nesse encontro, apresentar a relação de Stifel e demonstrá-la.

4º Encontro: apresentar aos alunos a Lotérica de Galton virtual desenvolvida no Geogebra (disponível gratuitamente para download em https://www.geogebra.org/material/show/id/10276) e afetuar testes com número de bolinhas acima de 5000. Mostrar, de forma numérica, a proximidade do histograma da distribuição de bolinhas nas canaletas com a curva gaussiana.

Recursos:

- Lotérica de Galton: consiste em uma tábua retangular com pregos dispostos como vértices de triângulos equiláteros que servirão como obstáculos para a passagem de bolinhas. Na base da tábua, temos algumas canaletas, onde se depositarão as bolinhas depois da passagem pelos obstáculos, conforme Figura 12.

Figura 12 – Lotérica de Galton

- Computador com o Geogebra instalado.

Avaliação: A avaliação pode ser feita de forma contínua, levando em consideração a participação dos alunos em todas as discussões e atividades propostas, tanto em sala de aula como em casa.

Nas Figuras 13, 14, 15 e 16, mostramos a Lotérica de Galton confeccionada com diferentes materiais. Dessa forma, pretendemos mostrar que a contrução do dispositivo e a aplicação da sequência seja realizadas de forma sustentável, com material de baixo custo ou até mesmo com material reciclado.

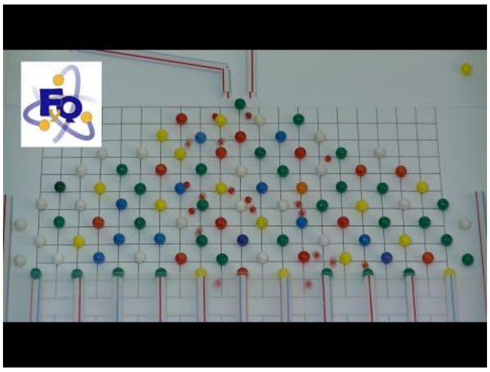


Figura 13 – Lotérica de Galton confeccionada com papel, canudos e alfinetes. (15)

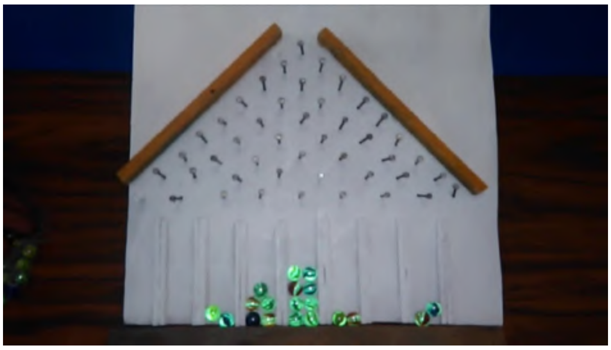


Figura 14 – Lotérica de Galton confeccionada com papael, pregos e madeira. (16)

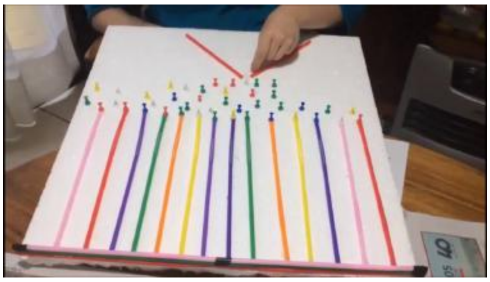


Figura 15 – Lotérica de Galton confeccionada com papel, canudos e alfinetes. (17)

Figura 16 – Lotérica de Galton confeccionada com garrafas pet. (18)

Disponibilizamos o link onde podemos encontrar como cofeccionar a Lotérica de Galton com garrafas pet, conforme a Figura 16: *http://divermates.es/blog/como-hacer-una-maquina-de-galton-quincunx/*.

3.2 Aplicação

A sequência didática se desenvolveu ao longo de 4 encontros semanais com uma hora e meia de duração (tempo de duas aulas). A sequência foi aplicada a 4 alunos do 2º ano do ensino médio, de uma escola particular, em um projeto de iniciação científica da escola. Devido ao curto tempo para trabalhar assuntos de Combinátoria e Probabilidade e a priorização da escola trabalhada para outros temas, a Lotérica de Galton não foi abordada na turma regular do semestre de 2017.2, mas pretendemos, no futuro, abordar este tema em uma sala de aula regular e em escolas públicas, principalmente pelas aplicações em outras ciências e importâncias já citadas do tema. Assim sendo, criamos um grupo de iniciação científica com o qual nos reuníamos no contraturno.

O grupo foi formado através da iniciativa dos alunos. Como não seria possível levar o dispositivo para a turma regular, formamos o grupo com alunos interessados em montar uma equipe de iniciação científica para trabalharmos com conceitos em analise combinatória de forma mais aprofundada e aplicada.

Na aplicação da sequência didática, utilizamos a Lotérica de Galton e as bolinhas cedidas pelo Espaço Ciencia, conforme a Figura 4. Essa placa tem 62cm de comprimento por 52cm de largunta e possui 45 pregos igualmente espaçados em 6cm. As bolinhas utilizadas eram de vidro, todas com diâmetro medindo aproximadamente 2cm e do mesmo fabricante. Como exposto anteriormente nesse trabalho, decidimos utilizar essa Lotérica, pois nos daria três opções de pontos de lançamento das bolinhas, conforme esquemas apresentados nas Figuras 17, 18 e 19.

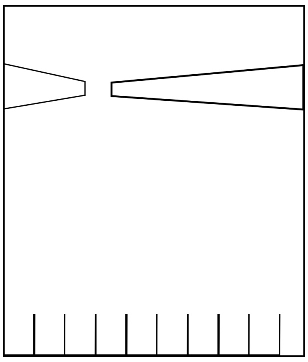


Figura 17 – Esquerda.

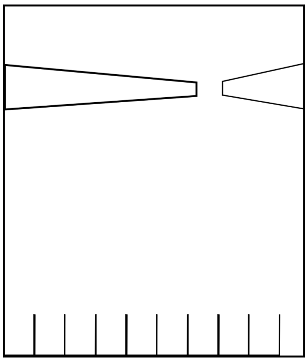


Figura 18 – Direita.

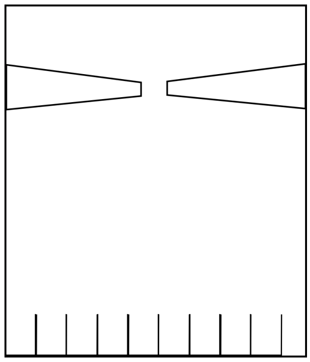


Figura 19 – Central.

Todos os encontros foram devidamente registrados no diário de bordo, indicado, resumidamente, na Tabela 1.

Encontro	Atividades desenvolvidas
1º (11/08/17)	Apresentamos a Lotérica, um histórico de Galton e colocamos os alunos para testarem o dispositivo e anotarem os resultados.
2º (18/08/17)	Calculamos a distribuição teórica de probabilidades nas canaletas e foi deixado um exercícios com mais obstáculos
3º (25/08/17)	Nesse encontro apresentamos o Triângulo de Pascal e os alunos já perceberam a ligação com as atividades do encontro anterior. Um aluno conseguiu conjectura a relação de Stifel e com isso apresentamos essa relação e a demonstramos.
4º (08/09/17)	Nosse encontro, com um uso do Geogebra no meu laptop, mostramos aos alunos uma simulação da Lotérica de Galton e com ela em andamento, mostramos a aproximação do histograma de distribuição das bolinhas nas canaletas com a curva gaussiana.

Tabela 1 – Diário de Bordo

1º Encontro: Inicinialmente a máquina de Galton foi apresentada para um grupo de 4 alunos do 2º Ano do ensino médio, que participaram de forma voluntária, e um pouco da história de Galton foi repassada para os alunos. Ainda nesse primeiro momento foram feitos alguns experimentos, onde os alunos soltaram várias bolinhas, sem limitação na quantidade, conforme mostram as Figuras 20, 21 e 22.

Figura 20 – Testes

Figura 21 – Testes

Figura 22 – Testes.

Após 3 testes, verificaram que precisariam determinar uma quantidade de bolinhas de forma que o resultado não fosse alterado pelo transbordamento de alguma canaleta. Assim sendo, verificaram que 90 bolinhas seria suficiente para que nenhuma canaleta central (as que tendem a receber mais bolinhas) transborde. Dai em diante, os testes foram feitos com 90 bolinhas e a quantidade depositada em cada canaleta foi anotada. Esses números encontram-se na Tabela 2, com C_i significando a i-ésima canaleta lendo da esquerda para a direita.

Teste	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	Total de Bolinhas
1º	9	9	9	16	8	14	8	6	11	90
2º	5	11	7	17	16	11	5	10	8	90
3º	7	4	15	9	18	8	13	7	9	90
4º	5	5	11	17	15	21	8	1	7	90
5º	4	6	12	14	12	13	14	9	6	90
6º	3	15	11	13	16	9	8	3	12	90
7º	9	3	12	9	16	13	16	5	7	90
8º	7	11	13	10	12	11	10	9	7	90
9º	11	5	10	18	14	13	8	7	4	90
10º	4	9	12	13	17	10	14	3	8	90
Média	6,3	7,8	11,2	13,5	14,4	12,3	10,4	6	7,9	

Tabela 2 – Distribuição das bolinhas

Nessa etapa, como esperado, os alunos perceberam uma maior concentração das bolinhas nas canaletas centrais. Nos testes com pontos de lançamento deslocados para à esquerda, conforme Figura 3, e deslocados à direita, conforme Figura 5, os alunos puderam comprovar que tal deslocamento, apenas transladaria, no sentido do deslocamento do ponto de lançamento, a distribuição das bolinhas.

2º Encontro: Nesse segundo momento, trabalhamos com os alunos a distribuição de probabilidades ao longo da máquina, utilizando a definição de probabilidade. A princípio, mostramos que com 1 obstáculo, teríamos duas canaletas (uma a esquerda e outra a direita do obstáculo) as probabilidades se distribuíam de forma igualitária, na proporção 1:1. Com três obstáculos, dispostos como vértice de uma triângulo retângulo, teríamos 3 canaletas, e a distribuição das probabilidades ficou na proporção 1:2:1, conforme Figura 23. Adicionando outros três obstáculos abaixo dos que existiam de forma a continuar com triângulos equiláteros, teremos 4 canaletas e as probabilidades se distribuíram na proporção 1:3:3:1, conforme Figura 24.

Foi deixado como atividade, a distribuição das probabilidades quando tivermos 4 abstáculos a mais, totalizando 10 obstáculos, (mais uma vez, adicionando logo abaixo a disposição anterior formando triângulos equiláteros), o que geraria 5 canaletas e a distribuição das probabilidades quando tivermos 16 obstáculos (obtido a partir da configuração com 10 obstáculos adicionando os outros 6 abaixo formando triângulos equiláteros).

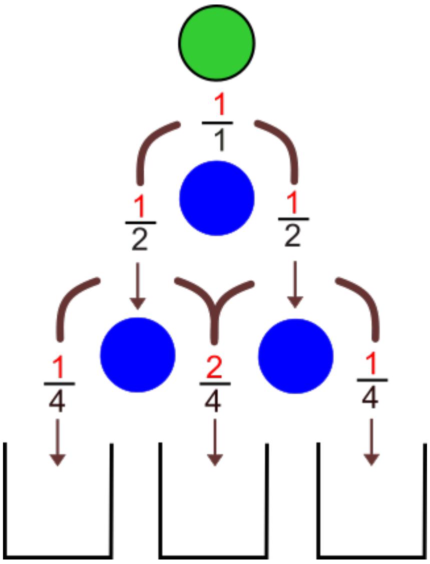


Figura 23 – Distribuição de probabilidades em 3 canaletas

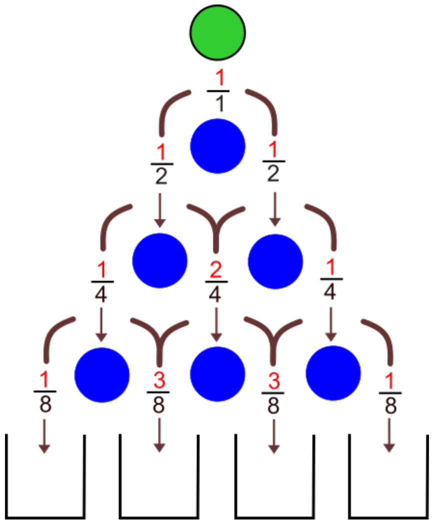


Figura 24 – Distribuição de probabilidades em 4 canaletas

3º Encontro: No terceiro momento, os alunos mostraram as atividades deixada no encontro anterior e foi apresentado aos alunos o Triângulo de Pascal e sua construção binomial. A partir desse encontro, os alunos já perceberam que as proporções da distribuição de probabilidades determinadas no encontro anterior, representavam as linhas do Triângulo de Pascal. Um aluno do grupo percebeu que era possível conjecturarmos a relação de Stifel a partir do Triângulo de Pascal. Logo depois dessa observação dos alunos, foi apresentada e demonstrada a relação de Stifel (1.2).

4º Encontro: No quarto e último encontro, foi apresentado para os alunos a Lotérica de Galton virtual no Geogebra em um laptop, pois não tínhamos um laboratório de informática disponível no momento, conforme Figuras 25 e 26.

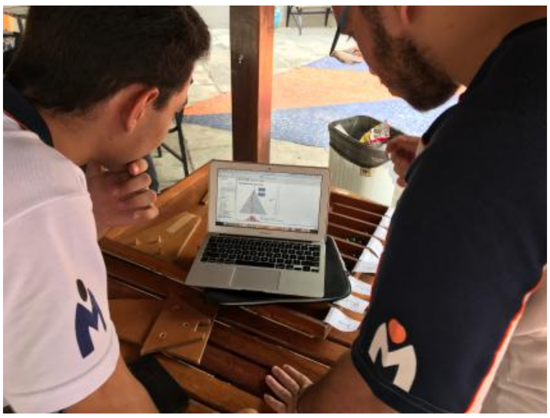


Figura 25 – Testes no Geogebra.

Figura 26 – Testes no Geogebra.

Fizemos alguns testes através de simulações da Lotérica de Galton virtual no

Geogebra. O código fonte que utilizamos foi o sugerido por FLEITAS, C. (2), e encontram-se nas Figuras 27 e 28. Na Figura 29 temos a visualização da Lotérica virtual no Geogebra.

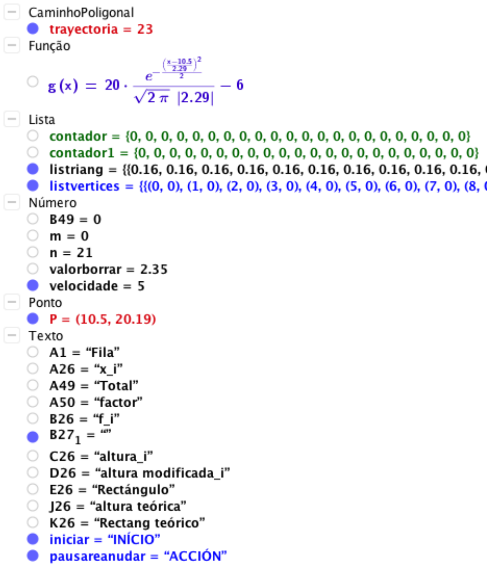


Figura 27 – Código fonte (parte 1)

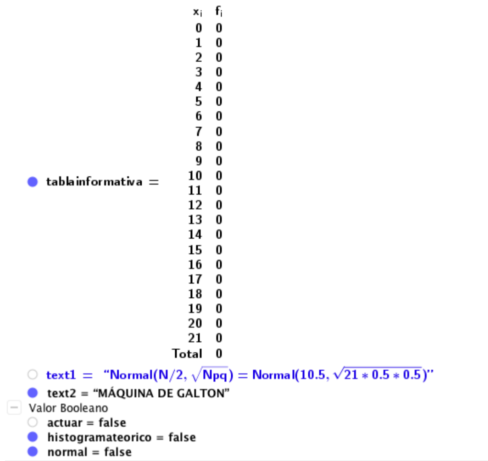


Figura 28 – Código fonte (parte 2)

Figura 29 – Visualização

Também foi apresentado a curva gaussiana e com testes utilizando 10000 bolinhas no Geogebra, eles puderam observar, numericamente, a aproximação do histograma de distribuição das bolinhas nas canaletas com a curva gaussiana. Os resultados dos testes podem ser vistos na tabela da Figura 30. A última linha dessa tabela, traz o resultado do teste mostrado na Figura 31.

DISTRIBUIÇÃO DE 10000 BOLINHAS NAS CANALETAS EM 20 TESTES DA LOTÉRICA VIRTUAL NO GEOGEBRA

TESTE \ CANALETA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0	0	1	4	34	89	271	582	995	1383	1658	1713	1341	1011	549	239	106	19	5	0	0	0
2	0	1	0	5	24	107	249	539	949	1439	1663	1700	1400	968	554	270	86	32	11	3	0	0
3	0	0	2	8	38	109	255	586	958	1415	1714	1700	1374	936	543	232	94	24	11	1	0	0
4	0	0	0	5	28	99	270	590	947	1478	1653	1632	1450	949	550	227	90	28	3	1	0	0
5	0	0	1	8	23	71	259	539	990	1350	1730	1727	1422	896	580	276	88	34	6	0	0	0
6	0	0	0	4	32	103	248	553	980	1398	1691	1731	1354	967	529	242	128	30	9	1	0	0
7	0	0	1	6	23	97	249	557	956	1364	1720	1723	1386	967	537	281	100	24	8	1	0	0
8	0	0	3	12	25	101	280	539	973	1392	1574	1708	1417	1004	564	278	99	21	9	1	0	0
9	0	0	3	5	32	88	264	568	980	1394	1613	1698	1432	980	559	261	86	30	6	1	0	0
10	0	0	1	7	27	98	253	539	951	1424	1710	1662	1399	1013	527	252	106	23	8	0	0	0
11	0	0	0	10	19	93	268	591	1004	1401	1684	1617	1432	932	551	272	89	30	7	0	0	0
12	0	0	1	5	31	105	270	555	958	1478	1642	1727	1325	974	526	275	90	29	9	0	0	0
13	0	0	1	12	30	110	259	566	959	1387	1705	1678	1417	1005	502	246	94	23	6	0	0	0
14	0	0	0	6	21	82	268	586	927	1460	1683	1660	1374	976	568	260	89	33	5	2	0	0
15	0	0	2	10	29	108	272	556	970	1367	1642	1680	1405	1012	551	255	95	38	7	1	0	0
16	0	0	1	6	26	103	256	515	937	1361	1732	1658	1454	981	568	260	99	34	8	1	0	0
17	0	0	0	7	32	86	254	513	1006	1444	1663	1661	1428	968	544	265	95	27	3	4	0	0
18	0	0	2	4	30	98	249	544	982	1383	1655	1743	1389	989	526	267	109	23	4	2	1	0
19	0	1	0	5	30	102	259	554	974	1397	1669	1716	1449	945	551	240	69	33	6	0	0	0
20	0	0	0	5	28	99	240	559	964	1420	1657	1770	1410	957	541	231	90	24	2	3	0	0

Figura 30 – Tabela de resultados da Lotérica virtual no Geogebra.

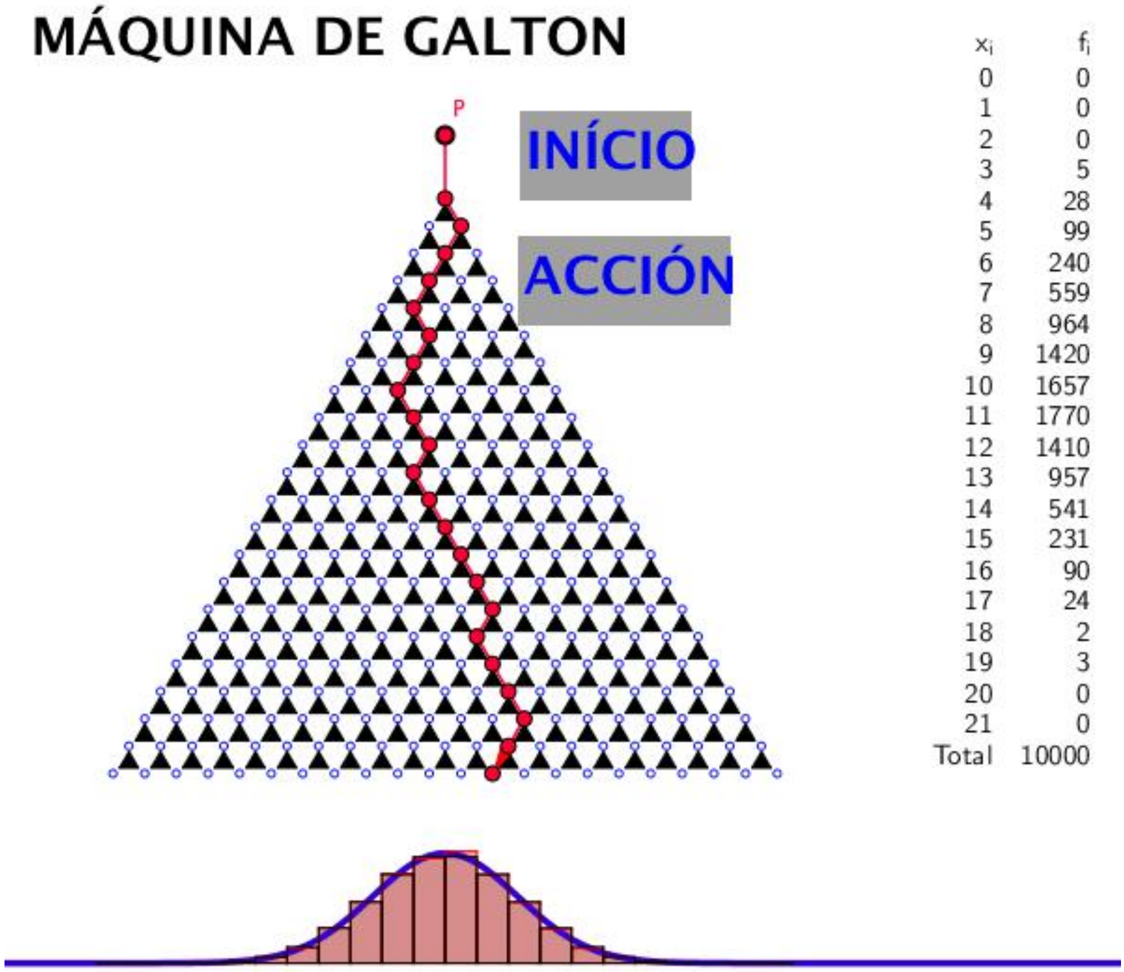


Figura 31 – Resultado do TESTE 20 no Geogebra.

4 Resultados e Projetos Futuros

Resultados

Nas primeiras pesquisas, descobrimos que o Espaço Ciência possuía uma versão grande da Lotérica de Galton que estava subutilizada, pois os monitores não sabiam como explorar o dispositivo. Com isso, nossa primeira prioridade foi elaborar um material que servirá para a formação de monitores no Epaço Ciência. O material foi elaborado fazendo um breve levantamento histórico sobre Galton e a origem da Lotérica. Também incluímos um breve histórico sobre Gauss e Pascal e a origem da curva gaussiana e do Triângulo de Pascal. Finalizamos com algumas demonstrações matemáticas que podem ser aplicadas ao uso da Lotérica. Em seguida foi realizada uma formação, *in loco*, com os monitores. É importante salientar que, com esse texto fazendo parte dos arquivos do Espaço Ciência, será mais simples de serem feitas reciclagens dos atuais ou formações de novos monitores. O material segue no Apêndice. Como fruto desse material, o Espaço Ciência gravou e divulgou, em seu canal no YouTube (12), vídeos mostrando a utilização da Lotérica de Galton para "prever" os resultados dos jogos da primeira rodada da copa do mundo de 2018. Além dos vídeos, o Espaço Ciência convidou o público para fazerem suas apostas na Lotérica e verificarem se o palpite da Lotérica coincide com o resultado real.

Através da descrição dos encontros, relatados no capítulo anterior, pudemos perceber que o uso de material concreto, no ensino da Matemática, facilita o aprendizado. Com o manuseio da Lotérica de Galton, os alunos conseguiram construir o Triângulo de Pascal através da distribuição de probabilidades e perceberam, através de simulação da Lotérica virtual no Geogebra, a aproximação do histograma de distribuição das bolinhas nas canaletas e a curva gaussiana.

Apesar de não conhecerem a curva gaussiana previamente, ela foi mostrada aos alunos sem muitos detalhes, pois não se tratava de nosso objeto de estudo. Mesmo com limitações sobre o conhecimento da gaussiana, os alunos perceberam de forma clara sua aproximação com a distribuição das bolinhas em simulação no Geogebra.

Nesse ponto não conseguimos um laboratório de informática para que cada aluno pudesse fazer suas simulações no Geogebra. Com isso, utilizamos apenas um laptop para mostrar a todos as simulações. Não gerou problema, pois só trabalhamos com 4 alunos. Isso deve ser observado na aplicação da sequência didática em turmas numerosas.

Assim sendo, a sequência didática sugerida conseguiu alcançar seu objetivo, pelo menos em um grupo de 4 alunos. Ficando como projetos futuros a sua aplicação em turmas regulares de uma escola pública.

Dificuldades encontradas

A primeira dificuldade encontrata do desenvolver desse trabalho foi na limitação de artigos que tratasse sobre a Lotérica focando em sua propriedades matemáticas, principalmente material em português.

Em seguida foram as restrições impostas pela escola escolhida, que devido ao curto tempo disponível e a priorização de outros conteúdos de análise combinatória, impossibilitou a aplicação da sequência na turma completa. Como consequência, a aplicação à um grupo com 4 alunos, não possibilitou obtermos um resultado que nos permitisse inferir a eficácia da sequência numa turma regular.

A Lotérica que utilizamos limitou um pouco o número de bolinhas que poderíamos soltar. Como vimos, com uma quantidade maior de bolinhas e linhas de obstáculos conseguiríamos uma boa aproximação entre o histograma do número de bolinhas em cada canaleta e a curva gaussiana. Esse tipo de teste, tivemos que fazer através de simulação com a Lotérica virtual no Geogebra.

Os compromissos que os alunos tinham com as atividades regulares da escola, tais como provas, trabalhos e preparação para os vestibulares, não permitiram que aprofundássemos mais os conteúdos trabalhados. Daí o motivo de trabalharmos apenas a relação de Stifel entre todas as propriedades do Triângulo de Pascal. Isso também não permitiu que os alunos contruíssem uma Lotérica de Galton com material reciclado.

A indisponibilidade de um laboratório de informática impediu que os alunos pudessem fazer testes individualmente com a Lotérica virtual no Geogebra. Assim sendo, os alunos fizeram o teste de forma coletiva em um laptop. Caso existisse um aplicativo para celular que simulasse o funcionamento da Lotérica já seria suficiente para que os alunos realizassem seus própios testes.

Devido a limitação de tempo de professores técnicos de outra institução, os quais contribuiriam com a criação da Lotérica virtual em português, não foi possível a criação de um aplicativo, como esperávamos. Pretendemos criar uma força tarefa e realizar a empreitada o quanto antes.

Projetos Futuros

Pretendemos a partir desse trabalho, aplicar a sequência didática em turmas regulares de escolas públicas e com os resultados, publicar trabalhos em congressos e revistas da área.

A carência de material que trate da Lotérica de Galton em português se extende aos simuladores virtuais. Para nossas simulações, utilizamos um arquivo do Geogebra, em espanhol, que nos obrigava a ter instalado o Geogebra para poder simular. Assim sendo, deixaremos como sugestão de projetos futuros a criação de um aplicativo em português que simule a Lotérica com parâmetros variáveis, como o número de bolinhas soltas, o número de canaletas (o que definiria também o número de obstáculos) e velocidade de descida das bolinhas. Esse aplicativo poderá ser executado online ou facilmente feito seu download e instalação. Estendendo para o desenvolvimento de um aplicativo para celular.

Conclusão

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise de como o uso de jogos ou dispositivos mecânicos, possíveis de serem construídos de forma sustentável com material reciclado, pode facilitar no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos tidos como complexos, pela maioria dos alunos do ensino básico.

Ao fazer testes na Lotérica de Galton, os alunos foram capazes de verificar a construção do Triângulo de Pascal e comprovar a relação de Stifel. Isso foi mostrado através das avaliações feitas. Essas avaliações se deram por meio de participação e interação dos alunos nos encontros, bem como da resolução do exercício deixado para que fossem resolvidos em casa.

Dada à importância do assunto, torna-se necessário a continuação do trabalho através dos projetos futuros, das pesquisas em busca de outras propriedades matemáticas que possam ser extraídas da Lotérica e na busca de outros dispositivos, que possam ser utilizados como facilitador no entendimento de conteúdos matemáticos.

Referências

1 BLAISE. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2016. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal>. Acesso em: 23 set. 2016.

2 FLEITAS, C. **Máquina de Galton virtual**. *Geogebra*. Disponível em:<https://www.geogebra.org/material/show/id/10276>. Acesso em: 28 mai. 2017.

3 MACHADO, A. R. Uma experiência de assessoria docente e de elaboração de material didático para o ensino de produção de textos na universidade. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/%0D/delta/v16n1/a01v16n1.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2018.

4 MORETTIN, L. G.. Estatística básica: probabilidade e inferência: volume único. São Paulo: Pearson, 2010.

5 MORGADO, A. C. et al. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

6 MIORIM, M. A.; FIORENTINI, D. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

7 MITROFANOVA, M. **Galton Board**. Disponível em: <http://www.turpion.org/php/full/getFT.phtml/rd_8_431.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2018.

8 SANCHEZ, J. N. Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica. Porto Alegre: Artmed, 2004.

9 SILVEIRA, J. F. **O triângulo de Pascal é de Pascal?**. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/ portosil/histo2b.html>. Acesso em: 15 jan. 2018.

10 TEIXEIRA, R. et al. **A Distribuição Normal e o Quincunx**. Cad. Bras. Ens. Fís., V. 25, n. 2, p. 340-353, 2008.

11 ZEBALA, A. **A Prática Educativa: Como Ensinar**. Editora Artmed: Porto Alegre, 1998.

12 ESPAÇO CIÊNCIA PE. **Confira a previsão para o segundo jogo do Brasil**. 2018. Disponível em: <https://youtu.be/F38J9R5wuqo>. Acesso em: 25 jun. 2018.

13 GShow - Caldeirão do Huck. Disponível em: <https://gshow.globo.com/programas/caldeirao-do-huck/noticia/caldeirao-estreia-em-marco-o-the-wall-jogo-famoso-em-mais-de-20-paises.ghtml>. Acesso em: 24 mar. 2018.

14 SBT - Jogo das Fichas. Disponível em: <http://www.sbt.com.br/sbtnaweb/fiquepordentro/96128/Assista-ao-programa-Jogo-das-Fichas-deste-domingo-03.html>. Acesso em: 24 mar. 2018.

15 Lotérica de Galton confeccionada com papael, canudo e alfinetes. Disponível em: <https://i.ytimg.com/vi/8P2pfJ_gXPE/hqdefault.jpg>. Acesso em: 15 mar. 2018.

16 Lotérica de Galton confeccionada com papael, pregos e madeira. Disponível em: <https://i.ytimg.com/vi/H76NtJzHUnU/maxresdefault.jpg>. Acesso em: 15 mar. 2018.

17 Lotérica de Galton confeccionada com papael, canudos e alfinetes. Disponível em: <https://i.ytimg.com/vi/z-Y12l-RTas/maxresdefault.jpg>. Acesso em: 15 mar. 2018.

18 Lotérica de Galton confeccionada com garrafas PET. Disponível em: <https://i.ytimg.com/vi/z-Y12l-RTas/maxresdefault.jpg>. Acesso em: 15 mar. 2018.

19 A história do ábaco. Disponível em: <http://www.editoradobrasil.com.br:81/blog-da-gabi/a-historia-do-abaco/>. Acesso em: 27 mar. 2018.

20 O Jogo da Imitação e o backstage da 2ª Guerra Mundial - Crítica. Disponível em: <http://meialua.gamehall.uol.com.br/o-jogo-da-imitacao-e-o-backstage-da-2a-guerra/>. Acesso em: 27 mar. 2018.

5 Apêndice A - Material do Espaço Ciência

Lotérica de Galton

1. Seria a "*Lotérica da Galton*" algo aleatório?

Esse dispositivo foi projetado por Galton (1873 – 1874) como um modelo físico da teoria de erros e aplicável a muitos fenômenos no campo da Biologia e da Física (Teixeira et al., 2008; Helene e Vanin, 1991).

A Lotérica de Galton consiste de um arranjo de pregos dispostos em uma placa de madeira com espaçamentos iguais. Por baixo de cada prego estão colocados dois pregos numa linha horizontal formando um triângulo equilátero com o prego superior. Esses pregos servirão como obstáculos à passagem de bolinhas em movimento pela atuação da gravidade. Na parte superior da placa de madeira existe um afunilamento na passagem das bolinhas, fazendo com que elas sempre comecem no mesmo ponto. As bolinhas são soltas na parte superior e colidem com os obstáculos acumulando-se numa série de canaletas igualmente espaçadas na base da placa.

Quando uma esfera encontra um obstáculo, a probabilidade de seguir para direita ou esquerda são iguais a 1/2, isto é, os eventos são equiprováveis. Após o segundo choque, as probabilidades de queda à esquerda de ambos os pregos ou entre eles ou à direita de ambos deve estar na proporção 1:2:1 (Teixeira et al., 2008). Como temos uma série de choques sucessivos, a probabilidade com os próximos obstáculos segue uma configuração tipo *triângulo de Pascal*. O acúmulo em cada canaleta segue uma distribuição binomial, $P(x)$,

$$P(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

em que n representa o número de colisões, ou fileiras de pregos, que o corpo de prova encontra até atingir o acumulador e x é o numero de sucessos em cada canaleta com probabilidade p de ocorrer.

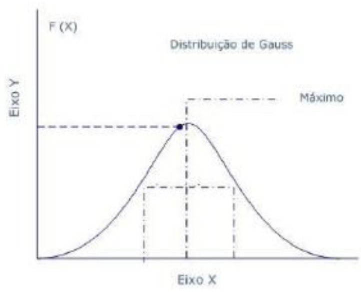
Para se entender a Equação, pode-se pensar na seguinte situação: para que a esfera caia na 3ª canaleta ($x = 3$) à direita (sucesso), ela deve seguir na mesma direção três vezes, mas como se tem n fileiras, ter-se-á $(n - x)$colisões à esquerda (insucesso). A probabilidade de sucesso para tal configuração será p^x e os insucessos serão$(1 - p)^{n-x}$; assim, a probabilidade que tal situação ocorra será$p^x(1 - p)^{n-x}$. O número de trajetórias possíveis é dado por $n!$. Entretanto, para cada trajetória possível existem $x!$maneiras que a bolinha pode ir à direita, e damesma forma tem-se $(n - x)!$ maneiras à esquerda. Portanto, o número total de trajetórias possíveis deve ser dividido por esses dois fatores, que é o divisor da Equação.

Como falado anteriormente, as quantidades de bolinhas acumuladas nas canaletas se aproxima a uma linha do triângulo de Pascal.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 16 \quad 1
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}
\end{array}
$$

Se tivermos um número de bolinhas muito grande, veremos que a curva formada pelas bolinhas nas divisórias segue uma distribuição normal de Gauss (ou uma gaussiana, se o número de divisórias for muito grande) (AQUINO, Priscila M., 2004).

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$



Esta curva é definida por dois parâmetros: sua média ($\bar{x}$) e sua variância (σ^2). Dessa forma, são possíveis infinitas curvas normais, ora variando a média, ora a sua variância. Suas principais características são:

- A variável x pode assumir qualquer valor real (-∞ a +∞).
- Os valores de y são assintóticos em relação ao eixo das abscissas, isto é, nunca tocam o eixo de x.
- A curva é simétrica é unimodal, apresentando um ponto de inflexão à esquerda ($x = \bar{x} - \sigma$) e outro à direita ($x = \bar{x} + \sigma$).

2. Galton

Francis Galton (1822-1911) (KEYNES, 1993; GILLHAM, 2001) nasceu em Sparbrook, na Inglaterra e foi primo de Charles Darwin. O avô de ambos, Erasmus Darwin, influenciou decisivamente na sua formação, sobretudo pela sua participação na Sociedade Lunar de Birmingham que congregava muitos cientistas, inventores, pesquisadores e livres-pensadores ingleses importantes da época como James Watt responsável pelo desenvolvimento da máquina a vapor e Joseph Priestley responsável pela descoberta do oxigênio conjuntamente com o francês Antoine Lavoisier e o sueco Carl Scheele. Influenciado pelos pais, estudou medicina, mas veio a abandoná-la após terminar o curso. Assim como seu primo, era um viajante entusiasta, tendo sido inclusive premiado pela Sociedade Geográfica Real e pela Sociedade Geográfica Francesa devido aos seus estudos cartográficos na região da atual Namíbia. Realizou estudos nas áreas de geografia, estatística, meteorologia, psicologia, educação, sociologia e antropologia, mas em 1865 seu principal interesse se definiu: a hereditariedade.

A publicação do livro *"A origem das espécies"* por Darwin, em 1859, influenciou marcadamente as idéias de Galton, que procurou, ao longo do resto de sua vida, estudar as consequências da evolução na espécie humana, linha de pensamento com a qual o próprio Darwin era bastante cuidadoso. Seu foco passou a ser a forma como habilidades humanas inclusive as intelectuais são ou não são herdadas; para isto, ele realizou estudos e levantou dados biométricos com o objetivo de separar as influências ambientais das características hereditárias, iniciando o debate *"nature versus nurture"* que se estende até hoje e que, para muito além da sua característica científica, tem consequências políticas óbvias. Os seus estudos, conjuntamente com os realizados por Pearson e Fisher, estabeleceram o campo de conhecimento da bioestatística. Particularmente, foi Galton quem propôs originalmente a ideia de regressão e correlação entre diferentes tipos de dados.

Em 1863, após conhecer os escritos de Quetelet, imbuiu-se instantaneamente da universalidade da distribuição normal. O modo como a utilizou, contudo, foi muito diferente do que Quetelet defendia. Galton viu a distribuição normal como um método de classificar dados em grupos de diferentes origens. Dalton criou a polêmica ideia de eugenia o melhoramento racial das gerações seguintes que teve ao longo do século XX uma triste história, já que foi apropriada por ideólogos nazistas e racistas.

3. Pascal

Blaise Pascal era filho de Étienne Pascal, professor de matemática, e de Antoinette Begon. Perdeu a sua mãe com três anos de idade. Seu pai tratou da sua educação por ele ser o único filho do sexo masculino, orientando-o com vistas ao desenvolvimento correto da sua razão e do seu juízo. O recurso aos jogos didáticos era parte integrante desse ensino que incluía disciplinas tão variadas como história, geografia e filosofia.

O talento precoce para as ciências físicas levou a família a Paris, onde ele se consagrou ao estudo da matemática. Acompanhou o pai quando este foi transferido para Rouen e lá realizou as primeiras pesquisas no campo da Física. Suas experiências sobre sons resultaram em um pequeno tratado (1634). No ano seguinte chega à dedução de 32 proposições de geometria estabelecidas por Euclides. Publica *Essay pour les coniques* (1640), obra na qual está formulado o célebre teorema de Pascal.

Blaise Pascal contribuiu decisivamente para a criação de dois novos ramos da matemática: a Geometria Projetiva e a Teoria das probabilidades. Em Física, estudou a mecânica dos fluidos, e esclareceu os conceitos de pressão e vácuo, ampliando o trabalho de Evangelista Torricelli. É ainda o autor de uma das primeiras calculadoras mecânicas, a Pascaline, e de estudos sobre o método científico.

4. Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss, nasceu em 30 de abril de 1777 em Braunschweig na Alemanha e morreu em 23 de fevereiro de 1855 em Göttingen, também na Alemanha. Foi um matemático, astrônomo e físico que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésica, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica.

Alguns se referem a ele como "o príncipe da matemática" ou "o mais notável dos matemáticos" e um "grande matemático desde a antiguidade". Gauss tinha uma marca influente em muitas áreas da matemática e da ciência e é um dos mais influentes na história da matemática. Ele considerava a matemática como "a rainha das ciências".

5. REFERÊNCIAS

TEIXEIRA, Ricardo R.; PEREIRA, Riama G.; TAKEUCHI, Margareth Y. **A Distribuição Normal e o Quincunx**. Cad. Bras. de Ens. de Fís., São Paulo, v. 25, n. 2, p. 340-353, ago. 2008.

PASSOS, Wilson E.; MICHELS, Flávio S.; SILVA, Paulo S.;SILVA, Nilson de O.; SOUZA, Paulo C.; TRINDADE, Antônio C. **Plinko ou Máquina de Galton: como um instrumento de ensino nos fenômenos aleatórios**. Simpósio Nacional de Ensino de Física de 2009 em São Paulo.

AQUINO, Priscila M. **O Estudo da Distribuição Normal por Galton**. Universidade Estadual de Campinas, jun. 2004.

Curva de Gauss. Disponível em:
<https://cms.totvs.com/mktfiles/tdiportais/helponlineprotheus/portuguese/plsa981_curva_de_gauss.htm>. Acesso em 19 de maio de 2017.

Carl Friedrich Gauss. Disponível em:
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>. Acesso em 18 de maio de 2017.

Distribuição Normal. Disponível em:
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_normal>. Acesso em 24 de abril de 2017.

Blaise Pascal. Disponível em:
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal>. Acesso em 24 de abril de 2017.