Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Construção dos Números Reais por Sequências de Cauchy e Cortes de Dedekind †

por

Bruno Pereira da Silva

sob orientação do

Prof. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Junho/2018
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586c Silva, Bruno Pereira da.
Construção dos números reais por sequências de Cauchy e por Cortes de Dedekind / Bruno Pereira da Silva. - João Pessoa, 2018.
55 f.

Orientação: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - UFPB\CCEN.

1. Sequências Racionais de Cauchy e Suas Propriedades.
I. Ribeiro, Bruno Henrique Carvalho. II. Título.

UFPB\BC

Construção dos Números Reais por Sequências de Cauchy e por Cortes de Dedekind

por

Bruno Pereira da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro -UFPB (Orientador)

Elisandra F.G. Moraes

Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - UFPB

Eudes Mendes Barboza

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza - UFRPE

Junho/2018

Agradecimentos

Aos meus pais; Gilma Pereira e Heronildo Borges por toda educação que recebi, sem a mesma seria impossível chegar até aqui e além disso são responsáveis por tudo que há de bom em mim.

Agradeço a minha amada esposa Maria pelo apoio, paciência e companheirismo durante o curso. Muitas vezes cuidando de tudo sozinha e abdicando de si para que eu pudesse estudar com mais afinco.

À CAPES pelos provimentos que contribuíram fortemente com minha sustentabilidade no curso.

Aos meus professores do PROFMAT, Carlos Bocker, Pedro Hinojosa, Flank, Elisandra, Lenimar, Eduardo e em especial ao meu orientador Bruno Ribeiro. Todos contribuíram muito para o meu aprendizado e para a conclusão deste curso.

Finalmente aos companheiros de turma; Wagner, Rodolfo, Joelson, William, Talita, Marcílio e Demétrius com os quais dividi essa jornada de estudos e tive a oportunidade de compartilhar conhecimentos. Com todos eles aprendi algo de bom.

Dedicatória

Ao meu padrasto Hilton Antônio dos Santos (in memorian). Convivência rica, benevolente, um apoio inabalável para a minha educação e formação profissional.

Resumo

Estudaremos a construção dos números reais por dois métodos distintos. Primeiramente por sequências de Cauchy o qual atende a noção intuitiva de que tais números podem ser utilizados para representar pontos em uma reta, por outro lado também seja possível provar todas as propriedades usuais desses números. Essa construção é feita essencialmente via uma relação de equivalência estabelecida no conjunto das sequências racionais de Cauchy, com a hipótese inicial de ser já conhecido o corpo ordenado dos números racionais. A outra construção feita por cortes de Dedekind é diferente, pois no lugar da linguagem de sequências usa-se a linguagem de conjuntos. Apesar da diferença de linguagem chega-se aos mesmos resultados sobre a ótica algébrica da estrutura desses conjuntos. Por fim veremos que existe apenas um corpo ordenado completo, a menos de isomorfismo.

Palavras-chave: Números Reais; Sequências de Cauchy; Cortes de Dedekind.

Abstract

We will study the construction of real numbers by two different methods. Firstly by Cauchy sequences, which is a shrewd and beautiful way of characterizing real numbers given our intuitive notion that such numbers can be used to represent points on a line, yet it is also possible to prove all the usual properties of these numbers. This construction is essentially done via an equivalence relationship established in the Cauchy's set of rational sequences with the initial hypothesis that the ordered body of rational numbers is already known. The construction made by Dedekind cuts is essentially different, because in the place of the language of sequences it is used the language of sets, although the difference of language arrives at the same results on the algebraic properties of these sets. Finally we will see that there is only one complete ordered body, up to isomorphisms.

Keywords: Real Numbers; Sequences of Cauchy; Cuts of Dedekind.

Sumário

Introdução

A partir do século XIX, devido às mudanças causadas pela revolução francesa, a matemática tomou um novo viés. Augustin Louis Cauchy um dos professores da École Polytechnique contribuiu significativamente com o desenvolvimento da matemática em sua época. Por motivações de ensino, a matemática precisou ser organizada de maneira a facilitar o seu aprendizado, pois boa parte dos estudantes eram iniciantes e muitos almejavam ser engenheiros ou oficiais do exército.

Essa nova organização da matemática veio com mais rigor e precisão. O encadeamento lógico, em particular na análise, teve de ser exposto em uma certa ordem. Por exemplo, no estudo do cálculo era necessário estudar inicialmente funções para depois, limites, derivadas, integrais e etc.

Antes desses conceitos, o primordial seria conhecer, com rigor, os números e suas propriedades. Segundo Tatiana Roque (2012)"[...] *a ideia de número real, segundo notas históricas, surgiu com os gregos na descoberta da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado. A construção dos números reais passou por Eudoxo, século IV a.C, com a teoria das proporções, que consta nos Elementos de Euclides, no entanto só foi concretizada no século XIX por Cantor e Dedekind"*. O primeiro pelas sequências de Cauchy e o segundo pelos Cortes de Dedekind.

Estudaremos aqui a construção dos números reais. Veremos inicialmente essa construção algébrica via sequências de Cauchy, mas antes disso é preciso construir uma base teórica sobre sequências racionais e demonstrarmos alguns teoremas que vão garantir algumas relações importantes no processo de construção desses números. Em seguida veremos a construção dos números reais via costes de de Dedekind.

No capítulo 1, considerando a existência do corpo ordenado dos números racionais, é introduzido o conceito de sequência racional. Definimos o conceito de sequências de Cauchy e estabelecemos uma relação de equivalência pertinente ao conjunto dessas sequências. Adiante no capítulo 2 é possível definir uma adição e uma multiplicação sobre o conjunto de todas as sequências racionais de Cauchy. Com essas operações conseguimos provar que o mesmo possui a estrutura algébrica de corpo. Provamos ainda a existência de um subconjunto dessas sequências que preservam a lei do fechamento para as operações de adição, multiplicação e também uma propriedade a mais que caracteriza como um corpo ordenado. Por fim é provada a propriedade especial desse conjunto a qual é denominada completeza, pois intuitivamente completam os racionais no sentido de ser possível estabelecer uma bijeção com uma reta.

O terceiro capítulo traz a construção dos números reais via linguagem de conjuntos. Corte de Dedekind nada mais é que um subconjunto dos números racionais que possui algumas propriedades. A grosso modo, pensando numa reta e um ponto na mesma, assim como essa reta é dividida em duas semirretas e considerando os números racionais distribuidos nessa reta, esse mesmo ponto estaria dividindo o conjunto dos números racionais em duas partes: os números racionais que estão à esquerda desse ponto e os que estão à direita desse ponto. A ideia basicamente é esta, mas é necessário estabelecer com rigor matemático essas noções. Assim como foi feito com as sequências de Cauchy podemos agora estabelecer uma adição de cortes e uma multiplicação de cortes. Essas operações servem para a estruturação do corpo dos cortes de Dedekind.

A operação de inclusão entre conjuntos é utilizada para definir uma relação de ordem no conjunto dos cortes, ou seja, também podemos provar a existência de um subconjunto dos cortes tal que é fechado para adições, multiplicações e com uma propriedade a mais a ser definida adiante. De maneira similar como foi feita com as sequências de Cauchy é provada a completeza.

Para fechamento do texto temos ainda o capítulo quatro. Neste mostraremos o fato da existência de um único corpo ordenado completo o qual conhecemos com conjunto dos números reais. Por meio de isomorfismos provaremos essa unicidade, a priori mostraremos que é sempre possível estabelecer um isomorfismo entre um corpo ordenado completo qualquer e corpo ordenado completo dos cortes de Dedekind. Finalizamos este trabalho com a demonstração de algumas propriedades básicas usuais dos números reais.

Capítulo 1

Sequências Racionais de Cauchy e Suas Propriedades

Nesse capítulo, inicialmente será vista a noção de que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado. Ademais, definir-se-á o que é uma sequência racional e também algumas serão caracterizadas por possuírem uma certa organização estrutural. Uma dessas estruturas é denominada monotonicidade e uma outra, convergência. Assim, já conhecendo um pouco sobre sequências racionais convém definir sequência racional de Cauchy e relacionar a mesma com as definições de monotonicidade e convergência. Elon Lages Lima (2017) define essas propriedades de sequências de forma mais ampla, as quais serviram de referência principal às ideias aqui mencionadas.

1.1 O conjunto dos números racionais é um corpo ordenado

Consideraremos os números racionais e suas propriedades conhecidos que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, isso significa que existem duas operações: uma adição e a outra multiplicação. Em notação matemática representamos do seguinte modo, respectivamente:

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad e \quad \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$(x, y) \mapsto x + y \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

Tanto a adição quanto a multiplicação possuem a mesma estrutura algébrica com quatro propriedades cada operação; a saber são elas: associatividade, comutatividade, existência de um elemento neutro e existência de um elemento simétrico referente a cada número racional tanto em relação à adição quanto à multiplicação. No caso da multiplicação o número neutro da adição, o zero, não possui simétrico em relação à multiplicação, isso juntamente com a propriedade distributiva torna o conjunto dos números racionais um corpo e com a simbologia matemática essas propriedades se traduzem da seguinte forma:

1. *Associativa:*

(a) Na adição. Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$ vale que: $(x+y)+z = x+(y+z)$

(b) Na multiplicação. Para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$ tem-se: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

2. *Comutatividade:*

   (a) Na adição. Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ então é válido que: $x + y = y + x$.

   (b) Na multiplicação. Tomando $x, y \in \mathbb{Q}$ se tem a validez de: $x \cdot y = y \cdot x$.

3. *Existência do elemento neutro:*

   (a) Na adição. Existe um elemento neutro chamado de zero e denotado por 0 tal que para qualquer número racional x vale: $x + 0 = x$.

   (b) Na multiplicação. Existe um elemento neutro chamado de um e denotado por 1 tal que para qualquer número racional x vale: $x \cdot 1 = x$.

4. *Existência do simétrico.*

   (a) Na adição. Para cada número racional x existe um número racional $-x$ tal que a soma de ambos é igual ao elemento neutro da adição, ou seja, $x + (-x) = 0$. O número $-x$ é chamado simétrico aditivo de x ou oposto de x.

   (b) Na multiplicação. Para cada número racional x, com $x \neq 0$, existe um número racional x^{-1} tal que o produto de ambos é igual ao elemento neutro da multiplicação, ou seja, $x \cdot x^{-1} = 1$. O número x^{-1} é nomeado de simétrico multiplicativo de x ou inverso de x.

5. A propriedade que completa a estrutura algébrica de corpo se chama distributiva e relaciona as duas operações, essa propriedade nos diz que multiplicar um número racional x por uma soma racional $y+z$ é equivalente a adicionar o produto $x \cdot y$ com o produto $x \cdot z$, ou seja; $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

O conjunto dos números racionais ser ordenado significa que existe um subconjunto próprio P de $\mathbb{Q}$ tal que:

1. Se $x, y \in P$ então $x + y \in P$
2. Se $x, y \in P$ então $x \cdot y \in P$
3. Se $x \in \mathbb{Q}$ então $x \in P$ ou $-x \in P$ ou $x = 0$

Esse conjunto P é denotado por $\mathbb{Q}^+$ e denominado conjunto dos números racionais positivos. Assim temos a seguinte definição: $x < y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{Q}^+$
Disso decorrem todas as propriedades de ordem dos números racionais, tais como:
Monotonicidade da adição: Dados $x, y, z \in \mathbb{Q}$, se $x < y$ então $x + z < y + z$.
Transitividade: Dados $x, y, z \in \mathbb{Q}$, se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.
Tricotomia: Dado $x \in \mathbb{Q}$ então $x > 0$ ou $x < 0$ ou $x = 0$.

1.2 Sequências Racionais

Inicialmente é necessário o conceito de sequência de números racionais. Uma sequência de números racionais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Por simplicidade denotar-se-á aqui uma sequência de números racionais por

$$(x_n)_n \quad ou \quad (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$$

. **Exemplo 1.1.** A sequência definida por $x_n = \dfrac{1}{n}$ é uma sequência de números racionais. Na notação de listagem escrevemos $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{7}, ...\right)$. Essa sequência será útil em muitos exemplos desse texto.

Exemplo 1.2. Sabendo que não existe um número racional cujo quadrado é igual a dois, podemos definir duas sequências de números racionais da seguinte forma:
$z_n =$ Maior número racional com n algarismos cujo quadrado é menor que dois. Assim temos que esses números escritos na forma de fração são:

$$(z_n) = \left(1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \frac{1414213}{1000000}, ...\right);$$

$y_n =$ Menor número racional com n algaristmos cujo quadrado é maior que dois. Assim temos que esses números escritos na forma de fração são:

$$(y_n) = \left(2, \frac{15}{10}, \frac{142}{100}, \frac{1415}{1000}, \frac{14143}{10000}, \frac{141422}{100000}, \frac{1414214}{1000000}, ...\right)$$

As sequências acima estão bem definidas pois tomando um elemento da sequência $z_{n_0} = 1,41...a_0$, para encontrar o termo z_{n_0+1} acrescentamos um dígito d ao número z_{n_0}, assim temos o número $1,41...a_0d$, o dígito $d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ então temos dois casos a considerar.

- Primeiro: se para todo $d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tivermos $z^2_{n_0+1} < 2$ então $d = 9$. Nessa situação já estará definido o número $y_{n_0+1} = 1,41...(b_0+1)d'$ tal que $d' = 0$.
- Segundo: se para algum dígito $d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tivermos $z^2_{n_0+1} > 2$ então $d-1$ será o dígito que devemos acrescentar a z_{n_0} e também já estaremos definindo o número $y_{n_0+1} = 1,41...b_0d$. As duas sequências são construídas recursivamente por meio do processo explicado acima. O procedimento teria fim se existisse um número racional cujo quadrado é dois, mas isso é um absurdo.

1.3 Sequências Racionais Limitadas

A noção de sequência limitada é muito simples. Dada uma sequência racional $(x_n)_n$ se existir um número racional M tal que todo elemento da sequência racional $(x_n)_n$ for menor ou igual a M diremos que a sequência $(x_n)_n$ é limitada superiormente e que o número M é uma cota superior do conjunto formado pelos elementos da sequência. Com notação matemática temos que para $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ o conjunto dos termos de uma sequência racional, tem-se

$$M = cotsup\, X \Leftrightarrow x_n \leq M \quad \forall\, x_n \in X$$

onde *cotsup* quer dizer cota superior.

Exemplo 1.3. A sequência racional definida por $x_n = \frac{1}{n}$ é limitada superiormente pois todos os seus termos são menores que 2, logo o número racional 2 é uma cota superior para o conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$.

Analogamente, dada uma sequência racional $(x_n)_n$ se existir um número racional m tal que todo elemento da sequência racional $(x_n)_n$ for maior ou igual a m diremos que a sequência $(x_n)_n$ é limitada inferiormente e que o número m é uma conta inferior do conjunto formado pelos elementos da sequência. Com notação matemática temos que dado $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ então:

$$m = cotinf\, X \Leftrightarrow m \leq x_n \quad \forall\, x_n \in\, X$$

onde $cotinf$ quer dizer cota inferior.

Exemplo 1.4. a sequência racional definida por $x_n = n$ é limitada inferiormente pois todos os seus termos são maiores que -1, logo o número racional -1 é uma cota inferior para o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$.

Naturalmente uma sequência racional $(x_n)_n$ será limitada quando for simultaneamente limitada superiormente e limitada inferiormente. Nesse caso existiram dois números racionais M e m tais que todo elemento da sequência racional $(x_n)_n$ será maior que ou igual a m e menor que ou igual a M. Em linguagem simbólica, dada a sequência racional $(x_n)_n$ seja $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ limitado, então:

$$\exists\, m, M \in \mathbb{Q} \quad ; \quad m \leq x_n \leq M \quad \forall\, x_n \in\, X.$$

Decorre disso que uma sequência racional $(x_n)_n$ é limitada se e somente se existe um número racional positivo k tal que o módulo de todo elemento da sequência é menor ou igual a k. Ou seja, dada a sequência racional $(x_n)_n$ seja $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ limitado, então:

$$\exists\, k \in \mathbb{Q}^+ \quad ; \quad |x_n| \leq k \quad \forall\, x_n \in X$$

De fato; supondo $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ limitado, existem $m, M \in \mathbb{Q}$; tais que
$m \leq x_n \leq M \quad \forall\, x_n \in\, X$. Definindo $k = max\{|m|, |M|\}$ então:
$|m| \leq k \Leftrightarrow -k \leq m \leq k$ e também:
$|M| \leq k \Leftrightarrow -k \leq M \leq k$
Portanto

$$-k \leq m \leq x_n \leq M \leq k \Rightarrow -k \leq x_n \leq k \Rightarrow |x_n| \leq k$$

Por outro lado dada a sequência racional $(x_n)_n$ e seja $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ tal que $\exists\, k \in \mathbb{Q}^+ \quad ; \quad |x_n| \leq k \quad \forall\, x_n \in X$ então basta tomar $m = -k$ e $M = k$ e a sequência será limitada superiormente e inferiormente respectivamente pelas cotas inferior m e superior M.

1.4 Sequências Racionais Monótonas

Algumas sequências apresentam uma estrutura regular quando observadas pela ótica da relação de ordem. Essa regularidade pode ser de quatro maneiras distintas. Dada uma sequência $(x_n)_n$ pode ocorrer de:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $x_n < x_{n+1}$. Sequências que apresentam esse comportamento são ditas monótonas crescentes.

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $x_n \leq x_{n+1}$. Sequências que apresentam essa estrutura são ditas monótonas não-decrescentes.

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $x_n > x_{n+1}$. Tais sequências são ditas monótonas decrescentes.

4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $x_n \geq x_{n+1}$. Sequências que apresentam esse comportamento são ditas monótonas não-crescentes.

Exemplo 1.5. A sequência definida por $z_n =$ Maior número racional com n dígitos cujo quadrado é menor que dois tal que;

$$(z_n) = \left(1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \frac{1414213}{1000000}, ...\right)$$

é crescente. Isso decorre diretamente de sua definição. Já sequência $(y_n)_n$, onde, $y_n =$ Menor número racional com n algarismos cujo quadrado é maior que dois.

$$(y_n) = \left(2, \frac{15}{10}, \frac{142}{100}, \frac{1415}{1000}, \frac{14143}{10000}, \frac{141422}{100000}, \frac{1414214}{1000000}, ...\right)$$

é decrescente.

1.5 Sequências Racionais de Cauchy

A definição fundamental deste trabalho, a qual compõe o título, é a seguinte:
Definição 1.1. Sequência Racional de Cauchy é uma sequência de números racionais $(x_n)_n$ tais que dado qualquer número racional positivo ϵ todos os termos da sequência, a partir de um certo termo de índice n_ϵ, diferem entre si um número racional inferior a ϵ. Ou seja, dado $0 < \epsilon \in \mathbb{Q}$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > n_\epsilon \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$$

. Antes do primeiro exemplo de uma sequência de Cauchy racional precisamos de uma propriedade dos números racionais conhecida como propriedade arquimediana, enunciada no lema a seguir:

Lema 1.1 Dado dois números racionais positivos r e q existe um número natural n tal que: $n \cdot r > q$.
Demonstração. Dados dois números racionais positivos r , q e considerando o fato de o conjunto dos números naturais não ser limitado superiormente, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \left\lfloor \frac{q}{r} \right\rfloor + 1$, onde $\left\lfloor \frac{q}{r} \right\rfloor$ represente a parte inteira do número racional $\frac{q}{r}$. Portanto:

$$n > \left\lfloor \frac{q}{r} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n > \frac{q}{r} \Rightarrow n \cdot r > q.$$

Logo o lema 1.1 é válido. ∎

Exemplo 1.6. A sequência $(x_n)_n$ tal que $x_n = \dfrac{1}{n}$ é de Cauchy. De fato, dado $0 < \epsilon \in \mathbb{Q}$, pelo lema anterior existe um número natural n_ϵ tal que $n_\epsilon \cdot \epsilon > 2$. Isso equivale a $n_\epsilon > \dfrac{2}{\epsilon}$ que por sua vez equivale a $\dfrac{1}{n_\epsilon} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Portanto, para todo $m, n > n_\epsilon$ se tem:

$$|x_m - x_n| = |x_m + (-x_n)| \leq |x_m| + |-x_n| = |x_m| + |x_n|$$

pela desigualdade triângular dos números racionais e a propriedade de módulo $|-r| = |r|$ onde $r \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, como $m > n_\epsilon$ e $n > n_\epsilon$ equivalem a $\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n_\epsilon}$ e $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_\epsilon}$ se conclui que

$$|x_m - x_n| = |x_m + (-x_n)| \leq |x_m| + |x_n| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto $(x_n)_n$ é de Cauchy.

Teorema 1.1. Toda sequência racional monótona limitada é de Cauchy.
Demonstração. Dada uma sequência racional limitada $(x_n)_n$ temos

$$\exists\, m, M \in \mathbb{Q} \quad ; \quad m \leq x_n \leq M \quad \forall\, x_n \in\ X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}.$$

Então dado $0 < \epsilon \in \mathbb{Q}$ podemos definir o número natural k tal que
$k = 2 \cdot \left\lfloor \dfrac{M - m}{\epsilon} \right\rfloor + 1$. Então é válida a inclusão

$$[m, M] \subset \bigcup_{i=1}^{k} \left[m + (i-1)\frac{\epsilon}{2}\,,\, m + i\frac{\epsilon}{2}\right].$$

Cada intervalo de números racionais $I_i = \left[m + (i-1)\dfrac{\epsilon}{2}\,,\, m + i\dfrac{\epsilon}{2}\right]$ é do tipo $I_i = [a_i, b_i]$ onde $|b_i - a_i| = \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
Para prosseguir, suponhamos que $(x_n)_n$ seja crescente.(os demais casos são análogos). Uma sequência é formada por infinitos termos, então deve existir um intervalo I_i que contém uma infinidade de termos da sequência, do contrário a sequência seria finita. Portanto, para um n_ϵ suficientemente grande os termos da sequência com índice maior que n_ϵ estão em um mesmo intervalo I_i, pois supondo que existe mais de um intervalo I_i, ou seja, supondo que exista um intervalo I_j onde existe uma infinidade de termos da sequência, fixando um termo da sequência pertencente ao intervalo I_j por exemplo um x_0, como $i < j$ todos os termos da sequência no intervalo I_i são menores que ou iguais a x_n. Mas como x_k está fixo e existe uma infinidade de termo em I_i teríamos algum termo $x_p \in I_i$ tal que $p > k$. Todavia isso é um absurdo pois a sequência é monótona crescente e não pode ocorrer de $p > k$ e $x_p \leq x_k$.
Assim existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_\epsilon$ então

$$|x_m - x_n| \leq |I_i| = |[a_i\,,\, b_i]| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Logo $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy. ∎

Exemplo 1.7. Podemos concluir, pelo teorema 1, que as sequências $(z_n)_n$ e $(y_n)_n$ tais que;
$z_n =$ Maior número racional com n dígitos cujo quadrado é menor que dois,

$$(z_n) = \left(1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \frac{1414213}{1000000}, ...\right)$$

e $y_n =$ Menor número racional com n dígitos cujo quadrado é maior que dois,

$$(y_n) = \left(2, \frac{15}{10}, \frac{142}{100}, \frac{1415}{1000}, \frac{14143}{10000}, \frac{141422}{100000}, \frac{1414214}{1000000}, ...\right)$$

São de Cauchy pois são monótonas limitadas.
Teorema 1.2. Toda sequência de Cauhy é limitada.
Demonstração. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy. Dado $\epsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que: $m, n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$ e fixando $n_0 > n_1$ temos

$$|x_m - x_{n_0}| < 1, \, ou \ seja, \, x_m \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1) \quad \forall m > n_1.$$

Isso significa que o conjunto dos elementos da sequência $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ é subconjunto do conjunto $K = \{x_1, ..., x_{n_1}\} \cup [x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1]$ portanto pondo $minK = \alpha$ e $maxK = \beta$ temos que

$$\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \leq x_m \leq \beta$$

Assim toda sequência de Cauchy é limitada.

1.6 Sequências Racionais Convergentes

Existem sequências racionais cujos termos apresentam uma propriedade interessante com relação a um número racional específico. Essa propriedade é a seguinte: dada uma sequência racional $(x_n)_n$ pode existir um número racional r tal que os termos da sequência $(x_n)_n$ para índices suficientemente grandes estão próximos do número r. Ou seja, dado qualquer número positivo $\epsilon \in \mathbb{Q}$ sempre é possível encontrar um índice n_ϵ tal que para todo índice $n \in \mathbb{N}$ maior que n_ϵ temos que o número racional que representa o módulo da diferença entre o termo x_n e o número racional r é inferior a ϵ. Com a simbologia matemática essa propriedade escreve-se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}; \quad n > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - r| < \epsilon.$$

Se esse número racional r existir, diremos que a sequência $(x_n)_n$ converge para o número racional r ou que o número racional r é limite da sequência racional $(x_n)_n$. Outras notações para essa propriedade são: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$ ou $x_n \longrightarrow r$.

Exemplo 1.8. A sequência racional $(x_n)_n$ definida por $x_n = \dfrac{1}{n}$ converge para o número racional zero. Intuitivamente podemos deduzir isso a partir de uma análise dos termos da sequência:

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{10}, ..., \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, ..., \frac{1}{1000000}, ...\right)$$

Demonstração. Dado o número racional $\epsilon > 0$ tomando $n_\epsilon = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$ teremos que se $n > n_\epsilon$ então:

$$n > n_\epsilon \Rightarrow n > \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow n \cdot \epsilon > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

Portanto temos que: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$ ∎

Teorema 1.3. Toda sequência racional convergente é de Cauchy.
Demonstração. Dado um número racional $\epsilon > 0$, definimos $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2} > 0$. Pela definição de convergência de sequência racional, existe $n_{\epsilon_1} \in \mathbb{N}$ tal que se m, n são maiores que n_{ϵ_1} então

$$|x_m - r| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}, \; e \; |x_n - r| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando m, n maiores que n_{ϵ_1} e usando a desigualdade triângular se tem

$$|x_m - x_n| = |x_m - r + r - x_n| \leq |x_m - r| + |r - x_n| = |x_m - r| + |x_n - r|$$

$$< \epsilon_1 + \epsilon_1 = 2 \cdot \epsilon_1 = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto toda sequência racional convergente é de Cauchy.

Dada uma sequência $(x_n)_n$ de números racionais, uma *subsequência* de $(x_n)_n$ é a restrição da função $(x_n)_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_i < ...\}$ de números naturais. Escreveremos $(x_{n_k})_k$ para indicar a subsequência.
Teorema 1.4. Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente para um número racional é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência). (Teorema mais geral pode ser encontrado em (LIMA, 2015))
Demonstração. Sejam $(x_n)_n$ uma sequência racional de Cauchy e $(x_{n_k})_k$ uma subsequência da mesma tal que $x_{n_k} \to r$ e $r \in \mathbb{Q}$. Pela definição de convergência de sequência: dado $0 < \epsilon \in \mathbb{Q}$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > p \Rightarrow |x_{n_k} - r| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, como $(x_n)_n$ é de Cauchy, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > q \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomamos $n_0 = max\{p, q\}$ e fixamos $n_k > n_0$ existe $n_k > n_0$, utilizando a desigualdade triângular temos

$$|x_n - r| = |x_n + (-x_{n_k} + x_{n_k}) - r|$$

$$= |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - r)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - r| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Portanto $x_n \to r$ como queríamos demonstrar. ∎

1.7 Por que sequências de Cauchy ?

Dada duas sequências de Cauchy cuja diferença tende para zero essa situação atende a nossa idéia intuitiva de que um número pode ser representado por um ponto em uma reta, pois sequências de Cauchy, para n suficientemente grande, têm seus termos muito próximos um do outro e dadas duas sequências de Cauchy tal que a sequência formada pela diferença termo a termo tende para zero é razoável considerar que ambas se aproximam do mesmo objeto. Um bom exemplo é:
Sejam $(z_n)_n$ e $(y_n)_n$ sequências de números racionais tais que:
z_n = Maior número racional com n dígitos cujo quadrado é menor que dois. Assim temos que esses números escritos na forma de fração são:

$$(z_n) = \left(1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \frac{1414213}{1000000}, ...\right)$$

y_n = Menor número racional com n dígitos cujo quadrado é maior que dois. Assim temos que esses números escritos na forma de fração são::

$$(y_n) = \left(2, \frac{15}{10}, \frac{142}{100}, \frac{1415}{1000}, \frac{14143}{10000}, \frac{141422}{100000}, \frac{1414214}{1000000}, ...\right)$$

Decorre disso que a diferença entre as duas sequências termo a termo definem outra sequência:

$$(y_n - z_n) = \left(1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, ..., \frac{1}{10^{1000+1}}, \frac{1}{10^{1000+2}}, ..., \frac{1}{10^{1000000}}, ...\right)$$

Intuitivamente, por observação, os termos dessa sequência convergem para zero. No próximo capítulo provaremos que de fato ela tem limite igual a zero. Fica então a cargo do leitor pensar nessa situação e perceber que essa é uma boa maneira de caracterizar um ponto na reta.

Capítulo 2

Construção do Conjunto de Cauchy

Estudaremos nesse capítulo a construção de um conjunto que chamaremos conjunto de Cauchy e denotemos por $\mathbb{S}$. Demonstraremos que esse conjunto é um corpo ordenado completo. Tal conjunto será construído a partir da noção de classes de equivalência de um conjunto, o qual advém de uma relação binária munida de algumas propriedades. Definiremos uma adição, uma multiplicação e verificaremos a estrutura de corpo no conjunto $\mathbb{S}$, definiremos então uma relação de ordem e provaremos algumas propriedades da mesma; finalmente provaremos que o corpo ordenado $\mathbb{S}$ também é completo num sentido a ser definido adiante (AGUILAR; DIAS, 2015).

2.1 Definições e Relação Binária em $S_{\mathbb{Q}}$

Denotemos o conjunto das sequências racionais de Cauchy por:

$$S_{\mathbb{Q}} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q};\, (x_n)_n\ e^{'}\ \textit{de Cauchy}\}$$

. Como já foi visto, a sequência racional definida por $x_n = \dfrac{1}{n}$ é de Cauchy, logo a sequência $x \in S_{\mathbb{Q}}$. Definiremos agora uma relação binária no conjunto $S_{\mathbb{Q}}$ utilizando a noção de convergência de uma sequência racional.

Definição 2.1. Dadas duas sequências x e y diremos que a sequência x está relacionada com a sequência y se, e só se

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Quando as sequências $x, y \in S_{\mathbb{Q}}$ estiverem relacionadas escreveremos $x \sim y$.

Exemplo 2.1 Sejam as sequências racionais x e y tais que: $x_n = 1$ e $y_n = \dfrac{10^n - 1}{10^n}$ ou simplesmente:

$$x = (1, 1, 1, ..., 1, ...) \quad , \quad y = \left(\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}, ..., \frac{10^n - 1}{10^n}, ...\right).$$

Essas sequências são monótonas limitadas. Portanto pelo teorema 1.1 da seção 1.5 são de Cauchy e por outro lado temos que a sequência definida pela diferença entre ambas, x e y, é:

$$(x_n - y_n) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, ..., \frac{1}{10^n}, ...\right)$$

Para que a sequência x esteja relacionada com a sequência y, basta apenas provar que a sequência racional definida por $z_n = \dfrac{1}{10^n}$ converge para zero. Dado $\epsilon > 0$, e considerando a sequência definida por $w_n = \dfrac{1}{n}$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_\epsilon \Rightarrow \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$ mas por outro lado é fácil provar por indução que; $\left|\dfrac{1}{10^n} - 0\right| < \left|\dfrac{1}{n} - 0\right|$ portanto:

$$n > n_\epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{10^n} - 0\right| < 0$$

Assim temos que: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$

Exemplo 2.2 Sejam $(z_n)_n$ e $(y_n)_n$ sequências de números racionais apresentadas no exemplo 1.7 da seção 1.5.
Essas sequências são monótonas limitadas e portanto pelo teorema 1.1 da seção 1.5 são de Cauchy. Temos que:

$$(y_n - z_n) = \left(1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, ..., \frac{1}{10^{1000}}, \frac{1}{10^{1000}+1}, ..., \frac{1}{10^{1000000}}, ...\right)$$

Essa diferença tem limite igual a zero, como já foi provado no exemplo 2.1. Portanto as duas sequências estão relacionadas, logo; $y \sim z$.

A relação binária definida acima sobre o conjunto $S_{\mathbb{Q}}$ é uma relação de equivalência, ou seja, ela possui as seguintes propriedades:

1. **Reflexiva:** Para toda sequência $x \in S_{\mathbb{Q}}$ temos que $x \sim x$.

2. **Simétrica:** Dados $x, y \in S_{\mathbb{Q}}$, se $x \sim y$ então $y \sim x$.

3. **Trasitiva:** Dados $x, y, z \in S_{\mathbb{Q}}$ se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$.

Demonstração. Provemos a propriedade reflexiva. Seja $x \in S_{\mathbb{Q}}$ tal que cada termo da sequência seja representado por x_n. Assim:

$$x_n - x_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - x_n) = 0 \Rightarrow x \sim x.$$

E como a sequência x foi escolhida de maneira arbritária temos que para todo

$$x \in S_{\mathbb{Q}} \Rightarrow x \sim x.$$

Provemos a propriedade simétrica. Dadas as sequências $x, y \in S_{\mathbb{Q}}$ e supondo que $x \sim y$ teremos que; $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Isso significa que dado $\epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que $n > n_\epsilon \Rightarrow |(x_n - y_n) - 0| < \epsilon$. Por outro lado:

$$|(x_n - y_n) - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |x_n - y_n| < \epsilon \Leftrightarrow |y_n - x_n| < \epsilon \Leftrightarrow |(y_n - x_n) - 0| < \epsilon$$

E portanto é válido também que

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0 \Rightarrow y \sim x.$$

Provemos a propriedade transitiva. Supondo dados $x, y, z \in S_{\mathbb{Q}}$ tais que $x \sim y$ e $y \sim z$ isso implica que: dado $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$ existe $n_{\epsilon_1}, n_{\epsilon_2} \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_{\epsilon_1} \Rightarrow |(x_n-y_n)-0| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $n > n_{\epsilon_2} \Rightarrow |(y_n-z_n)-0| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Tomando $n_\epsilon = max\{n_{\epsilon_1}, n_{\epsilon_2}\}$ e utilizando a desigualdade triângular dos números racionais temos que:

$$n > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - z_n| = |(x_n - y_n) + (y_n - z_n)| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto temos que;

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - z_n) = 0 \Rightarrow x \sim z.$$

Assim a relação binária $x \sim y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ tal que $x, y \in S_{\mathbb{Q}}$ é uma relação de equivalência e poderemos agora definir o conjunto quociente referente a essa relação.

Definição 2.2. Dada uma sequência $(x_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ chamaremos o conjunto

$$\{y \in S_{\mathbb{Q}}; y \sim x\}$$

de classe de equivalência da sequência $(x_n)_n$ e denotaremos o mesmo por $[(x_n)_n]$, ou seja,

$$[(x_n)_n] = \{y \in S_{\mathbb{Q}}; y \sim x\}.$$

Exemplo 2.3. Dada a sequência definida por $x_n = \dfrac{10^n - 1}{10^n}$ temos que a classe de equivalência dessa sequência é o conjunto: $[(x_n)_n] = \{y \in S_{\mathbb{Q}}; y \sim x\}$ portanto temos:

$$\left[\left(\frac{10^n - 1}{10^n}\right)_n\right] = \left\{y \sim S_{\mathbb{Q}}; \left(y_n - \frac{10^n - 1}{10^n}\right) \to 0\right\}$$

Como já foi visto, a sequência definida por $w_n = 1$ é tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left(w_n - \frac{10^n - 1}{10^n}\right) = 0.$$

Assim a sequência $(w_n)_n \in \left[\left(\dfrac{10^n - 1}{10^n}\right)_n\right]$.

Definiremos agora o conjunto essencial desse capítulo via classes de equivalência. Chamaremos de Conjunto de Cauchy o conjunto

$$\mathbb{S} = \{[(x_n)_n]; (x_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}\}.$$

O conjunto $\mathbb{S}$ é claramente não vazio pois o conjunto $S_{\mathbb{Q}}$ não é vazio.

2.2 Adição no conjunto de Cauchy

Inicialmente vejamos que é possível, a partir de duas sequências de Cauchy, definir uma outra sequência de Cauchy.
Dadas duas sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ provemos que a sequência

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ..., x_n + y_n, ...)$$

também é de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n > n_\epsilon \Rightarrow |(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| = |(x_m - x_n) + (y_m - y_n)| \leq ...$$

$$... \leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto a sequência obtida pela adição termo a termo de duas sequências de Cauchy também é de Cauchy.

Definição 2.3. Dadas as classes de equivalência $t, u \in \mathbb{S}$ tais que $t = [(x_n)_n]$ e $u = [(y_n)_n]$, definiremos a operação adição como sendo uma aplicação:

$$+ : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$$

tal que

$$t + u = [(x_n + y_n)_n]$$

Por simplicidade escreveremos $t + u$ ao invés de $+(t, u)$ e também o sinal de adição está sendo o mesmo que o sinal de adição usado no conjunto dos números racionais.
Inicialmente vejamos que essa aplicação está bem definida. Dadas duas classes de equivalência $t, u \in \mathbb{S}$ tais que: $t = [(x_n)_n]$, $u = [(y_n)_n]$ assim como também $t = [(x'_n)_n]$, $u = [(y'_n)_n]$ devemos verificar então que é válida a igualdade:

$$[(x_n + y_n)_n] = [(x'_n + y'_n)_n].$$

Sabemos que se $[(x_n)_n] = t = [(x'_n)_n]$ então $[(x_n)_n] = [(x'_n)_n]$ portanto, por definição, $(x_n - x'_n) \to 0$. Analogamente temos $(y_n - y'_n) \to 0$. Assim, dado $\epsilon > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}; n > n_1 \Rightarrow |x_n - y_n| < \frac{\epsilon}{2}$ e $\exists n_2 \in \mathbb{N}; n > n_2 \Rightarrow |x'_n - y'_n| < \frac{\epsilon}{2}$.
Portanto, utilizando a desigualdade triângular:

$$|(x_n+y_n)-(x'_n+y'_n)| = |(x_n-x'_n)+(y_n-y'_n)| \leq |x_n-x'_n|+|y_n-y'_n| \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ e assim a soma $t + u$ independerá das sequências representantes das classes de equivalências, concluímos então que operação de adição no conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ está bem definida.
Veremos a seguir que esta soma é associativa, comutativa, possui elemento neutro e oposto.

Propriedade Associativa da Adição.

Dados quaisquer elementos $t, u, v \in \mathbb{S}$ é sempre válida a relação

$$(t + u) + v = t + (u + v).$$

Demonstração. Como $t, u, v \in \mathbb{S}$ então existem sequência $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ tais que $t = [(x_n)_n], u = [(y_n)_n]$ e $v = [(z_n)_n]$. Portanto utilizando a definição de adição temos:

$$(t + u) + v = [(x_n + y_n)_n] + [(z_n)_n] = [((x_n + y_n) + z_n)_n]$$

Decorre do conjunto $\mathbb{Q}$ ser um corpo que:

$$((x_n + y_n) + z_n)_n = (x_n + (y_n + z_n))_n$$

Logo:

$$\begin{aligned}(t + u) + v &= [((x_n + y_n) + z_n)_n] = [(x_n + (y_n + z_n))_n] \\ &= [(x_n)_n] + [(y_n + z_n)_n] = t + (u + v)\end{aligned}$$

Portanto é válida a propriedade associativa para a operação de adição no conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$.

Existência do Elemento Neutro da Adição.

Existe o elemento $0 \in \mathbb{S}$ tal que $0 = [(\theta_n)_n]$ onde $(\theta_n)_n = (0, 0, 0, ...)$ é um representante da classe de equivalência do elemento neutro da adição em $\mathbb{S}$, ou seja, dado $t \in \mathbb{S}$ temos que $t + 0 = 0 + t = t$ para todo elemento $t \in \mathbb{S}$.
Demonstração. Sabemos que toda sequência racional constante é convergente e já foi provado no teorema 1.2 da seção 1.6 que toda sequência racional convergente é de Cauchy, assim de fato $\theta_n \in S_{\mathbb{Q}}$ e $0 \in \mathbb{S}$. Sejam $(x_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ tal que $t = [(x_n)_n]$ e $0 = [(\theta_n)_n]$. Assim,

$$t + 0 = [(x_n + \theta_n)_n] = [(x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0, ..., x_n + 0, ...)]$$

$$= [(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)] = [(x_n)_n] = t.$$

Portanto, como o elemento t foi escolhido de maneira arbitrária, a proposição é válida para todo elemento do conjunto de Cauchy. O caso em que temos $0 + t$ é evidentemente análogo e a posteriori veremos que a adição também é comutativa. Outra observação é quanto ao uso do símbolo 0 como elemento neutro da adição no conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e também no conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$. A distinção é feita pelos termos envolvidos.

Existência do Elemento Inverso Aditivo.

Para cada $t \in \mathbb{S}$ existe um elemento denotado por $-t \in \mathbb{S}$ tal que $t + (-t) = 0$, onde $0 = [(\theta_n)_n]$.
Demonstração. A priori, se uma sequência $(x_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ então $(-x_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$, pois se $|x_n - x_m| < \epsilon$ então $|(-x_m) - (-x_n)| < \epsilon \Rightarrow |(-x_n) - (-x_m)| < \epsilon \Rightarrow (-x_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$. Assim dado o elemento $t \in \mathbb{S}$ tal que $t = [(x_n)_n]$ existe $[(-x_n)_n] \in \mathbb{S}$. Denotaremos $-t = [(-x_n)_n]$. Logo:

$$t + (-t) = [(x_n + (-x_n))_n] = [(0, 0, 0, ...)] = [(\theta_n)_n] = 0.$$

Então para todo elemento $t \in \mathbb{S}$ existe um elemento $-t \in \mathbb{S}$ cuja adição com o mesmo dá como resultado o elemento neutro da adição.

Propriedade Comutativa da Adição.

Para quaisquer $u, t \in \mathbb{S}$ temos que $t + u = u + t$.
Demonstração: Dados $t, u \in \mathbb{S}$ temos que $t = [(x_n)_n]$ e $u = [(y_n)_n]$ portanto:

$$t + u = [(x_n + y_n)_n] = [(y_n + x_n)_n] = u + t$$

A segunda igualdade decorre do conjunto dos números racionais ser um corpo e as demais decorrem apenas da definição de soma, logo o conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ possui a propriedade comutativa com relação a adição.

Podemos dizer então, segundo a literatura atual da álgebra, que o conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ junto com a operação de adição formam um grupo abeliano ou grupo comutativo, portanto $(\mathbb{S}, +)$ é um grupo abeliano.

2.3 Multiplicação no conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$

Assim como no caso da adição provemos que dadas duas sequências de Cauchy uma nova sequência gerada pelo produto termo a termo também será uma sequência de Cauchy. Ou seja, dadas duas sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ a sequência

$$(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, ..., x_n \cdot y_n, ...)$$

é de Cauchy.
Demonstração. Dadas duas sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ sabemos pelo Teorema 1.3 do Capítulo 1 que toda sequência de Cauchy é limitada. Portanto existem M e M' tais que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ temos: $|y_m| \leq M$ e $|x_n| \leq M'$. Utilizaremos também a seguinte igualdade:

$$x_m \cdot y_m - x_n \cdot y_n = x_m \cdot y_m + (y_m \cdot x_n - y_m \cdot x_n) - x_n \cdot y_n$$

$$= (x_m \cdot y_m - y_m \cdot x_n) + (y_m \cdot x_n - x_n \cdot y_n) = y_m(x_m - x_n) + x_n(y_m - y_n).$$

Por serem sequências de Cauchy temos

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}; m, n > n_\epsilon \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2 \cdot R} \quad e \quad |y_m - y_n| < \frac{\epsilon}{2 \cdot R}.$$

Assim, tomando $R = M + M'$ e utilizando a desigualdade triângular dos números racionais teremos:

$$|x_m \cdot y_m - x_n \cdot y_n| \leq |y_m||x_m - x_n| + |x_n||y_m - y_n|$$

$$\leq R \cdot |x_m - x_n| + R \cdot |y_m - y_n| = R \cdot (|x_m - x_n| + |y_m - y_n|)$$

$$\Rightarrow |x_m \cdot y_m - x_n \cdot y_n| < R \cdot \left(\frac{\epsilon}{2 \cdot R} + \frac{\epsilon}{2 \cdot R}\right) = \epsilon, \forall m, n > \epsilon.$$

Portanto a sequência $(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, ..., x_n \cdot y_n, ...)$ é de Cauchy.

Definição 2.4. Dadas as classes de equivalência $t, u \in \mathbb{S}$ tais que $t = [(x_n)_n]$ e $u = [(y_n)_n]$, definiremos a operação multiplicação como sendo uma aplicação:

$$\cdot : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

tal que:

$$t \cdot u = [(x_n \cdot y_n)_n].$$

Por simplicidade escreveremos $t \cdot u$ ao invés de $\cdot(t, u)$ e também o sinal de multiplicação está sendo o mesmo que o sinal de multiplicação usado no conjunto dos números racionais, mas podemos distinguir pelos elementos envolvidos.

Inicialmente, assim como foi feito na adição, devemos provar que essa aplicação de multiplicação está bem definida, ou seja, dadas duas classes de equivalência $t, u \in \mathbb{S}$ tais que: $t = [(x_n)_n]$, $u = [(y_n)_n]$ assim como também $t = [(x'_n)_n]$, $u = [(y'_n)_n]$ verificar então que é válida a igualdade:

$$[(x_n \cdot y_n)_n] = [(x'_n \cdot y'_n)_n].$$

Sabemos que se $[(x_n)_n] = t = [(x'_n)_n]$ então $[(x_n)_n] = [(x'_n)_n]$ portanto por definição $(x_n - x'_n) \to 0$, analogamente temos: $(y_n - y'_n) \to 0$. Assim utilizando a desigualdade triângular dos racionais, obtemos

$$|x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n| = |y_n(x_n - x'_n) + x'_n(y_n - y'_n)| \leq |y_n(x_n - x'_n)| + |x'_n(y_n - y'_n)| =$$

$$= |y_n||x_n - x'_n| + |x'_n||y_n - y'_n|$$

Já foi provado no Teorema 1.3 do Capítulo 1 que toda sequência de Cauchy é limitada. Portanto existem M e M' tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $|y_n| \leq M$ e $|x'_n| \leq M'$. Tomando $R = M + M'$ teremos:

$$|x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n| \leq |y_n||x_n - x'_n| + |x'_n||y_n - y'_n| \leq R \cdot (|x_n - x'_n| + |y_n - y'_n|)$$

Como $(x_n - x'_n) \to 0$ e $(y_n - y'_n) \to 0$ então $(x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n) \to 0$ portanto

$$[(x_n \cdot y_n)_n] = [(x'_n \cdot y'_n)_n].$$

Assim, o produto $t \cdot u$ independerá das sequências representantes das classes de equivalências. Concluimos então que a operação de multiplicação no conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ está bem definida. Veremos a seguir algumas propriedades dessa operação.

Propriedade Associativa da Multiplicação.

Dados quaisquer elementos $t, u, v \in \mathbb{S}$ é sempre válida a relação

$$(t \cdot u) \cdot v = t \cdot (u \cdot v)$$

.

Demonstração: Como $t, u, v \in \mathbb{S}$ então existem sequência $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ tais que $t = [(x_n)_n], u = [(y_n)_n]$ e $v = [(z_n)_n]$. Portanto, utilizando a definição de multiplicação, temos

$$(t \cdot u) \cdot v = [(x_n \cdot y_n)_n] \cdot [(z_n)_n] = [((x_n \cdot y_n) \cdot z_n)_n]$$

Decorre do conjunto $\mathbb{Q}$ ser um corpo que

$$[((x_n \cdot y_n) \cdot z_n)_n] = [(x_n \cdot (y_n \cdot z_n))_n].$$

Logo

$$(t \cdot u) \cdot v = [((x_n \cdot y_n) \cdot z_n)_n] = [(x_n \cdot (y_n \cdot z_n))_n] = [(x_n)_n] \cdot [(y_n \cdot z_n)_n] = t \cdot (u \cdot v).$$

Portanto é válida a propriedade associativa para a operação de multiplicação no conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$.

Existência do Elemento Neutro da Multiplicação.

Existe o elemento $1 \in \mathbb{S}$ tal que $1 = [(i_n)_n]$ onde $(i_n)_n = (1, 1, 1, ...)$ é um representante da classe de equivalência do elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{S}$, ou seja, dado $t \in \mathbb{S}$ temos que $t \cdot 1 = 1 \cdot t = t$ para todo elemento $t \in \mathbb{S}$.
Demonstração. Sabemos que toda sequência racional constante é convergente e já foi provado no teorema 1.2 da seção 1.6, que toda sequência racional convergente é de Cauchy, assim de fato, $1 \in \mathbb{S}$. Sejam $(x_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ tal que $t = [(x_n)_n]$ e $1 = [(i_n)_n]$. Assim,

$$t \cdot 1 = [(x_n \cdot i_n)_n] = [(x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, x_3 \cdot 1, ..., x_n \cdot 1, ...)] =$$

$$= [(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)] = [(x_n)_n] = t.$$

Portanto como o elemento t foi escolhido de maneira arbitrária a proposição é válida para todo elemento do conjunto de Cauchy, o caso em que temos $1 \cdot t$ é evidentemente análogo e a posteriori veremos que a multiplicação também é comutativa. Outra observação é quanto ao uso do símbolo 1 como elemento neutro da multiplicação no conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e também no conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$. A distinção é feita pelos termos envolvidos.

Propriedade Comutativa da Multiplicação.

Para quaisquer $s, t \in \mathbb{S}$ temos que $s + t = t + s$.
Demonstração. Dados $t, u \in \mathbb{S}$ temos que $t = [(x_n)_n]$ e $u = [(y_n)_n]$. Portanto,

$$t \cdot u = [(x_n \cdot y_n)_n] = [(y_n \cdot x_n)_n] = u \cdot t.$$

A segunda igualdade decorre do conjunto dos números racionais ser um corpo e as demais decorrem apenas da definição de multiplicação. Logo o conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ possui a propriedade comutativa com relação a multiplicação.

Antes de demonstrarmos a existência do inverso multiplicativo precisaremos de um lema:

Lema 2.1. Se uma sequência racional de Cauchy não tende para o número racional zero então a partir de um certo termo com índice suficientemente grande todos os demais termos da sequência serão não-nulos.
Demonstração. Seja $x \in S_{\mathbb{Q}}$ tal que $x = (x_n)_n$ não tenha limite igual a zero. Supondo que
dado $0 < \epsilon_1 = 1 \in \mathbb{Q}$ exista $x_{n_1} \in \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ tal que $|x_{n_1} - 0| < 1$,
dado $0 < \epsilon_2 = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ exista $x_{n_2} \in \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ tal que $|x_{n_2} - 0| < \frac{1}{2}$,
dado $0 < \epsilon_3 = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ exista $x_{n_3} \in \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ tal que $|x_{n_3} - 0| < \frac{1}{3}$,

$0 < \epsilon_k = \dfrac{1}{k} \in \mathbb{Q}$ exista $x_{n_k} \in \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ tal que $|x_{n_k} - 0| < \dfrac{1}{k}$, enquanto existir x_{n_p} para algum ϵ_p continua-se o processo. Mas esse processo certamente é finito, do contrário poderíamos construir uma subsequência da sequência $(x_n)_n$ tal que a mesma convergiria para zero. Mas pelo Teorema 1.2 da seção 1.5 isso implicaria que a sequência $(x_n)_n$ também ia convergir para zero o que pela hipótese inicial seria um absurdo. Portanto existe um número racional $\epsilon > 0$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ é válido que $|x_n| \geq \dfrac{1}{n_0}$. Portanto, a partir de n_0 todos os temos da sequência são não nulos.

Existência do Elemento Inverso Multiplicativo.

Para cada $t \in \mathbb{S} - \{0\}$ existe um elemento t^{-1} tal que $t \cdot t^{-1} = 1$.
Demonstração. Dado $t \in \mathbb{S}$ tal que $t = [(x_n)_n]$ e $t \neq 0$ isso significa que $(x_n)_n$ não tende a zero. Pelo lema anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \neq 0$. Por outro lado, seja $(y_n)_n$ tal que $y_n = 0$ se $n \leq n_0$ e $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ se $n > n_0$. Logo se $m, n > n_0$, temos

$$\begin{aligned} |y_m - y_n| &= \left| \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} \right| = |x_n - x_m| \cdot \frac{1}{|x_m| \cdot |x_n|} \\ &< \frac{1}{|x_{n_0}|^2} \cdot |x_n - x_m|. \end{aligned}$$

Como $(x_n)_n$ é de Cauchy vemos que $(y_n)_n$ também é. Assim, $x_n \cdot y_n = 0$ se $n \leq n_0$ e $x_n \cdot y_n = 1$ se $n > n_0$. Portanto $(y_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ e

$$[(x_n \cdot y_n)_n] = [(0, 0, 0...., 0, 0_{n_0}, 1, 1, 1, ..., 1, 1, 1, ...)].$$

Assim teremos que

$$(i_n - (x_n \cdot y_n)) \to 0 \quad ; \quad i_n = 1 \, \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Isso implica que

$$1 = [(i_n)_n] = [(x_n \cdot y_n)_n].$$

Logo $t^{-1} = [(y_n)_n]$ é o inverso multiplicativo do elemento t. Portanto o conjunto de Cauchy é um conjunto no qual todo elemento, com exceção do zero, possui inverso multiplicativo.

Para completar a estrutura algébrica de corpo verificaremos a validade de mais uma propriedade. Essa relaciona as duas operações e é chamada de propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição.

Distributividade da multiplicação em relação a adição.

Dados quaisquer $t, u, s \in \mathbb{S}$ é sempre válido que $t \cdot (u + s) = t \cdot u + t \cdot s$.
Demonstração. Dados $t, u, s \in \mathbb{S}$ então existem sequências racionais de Cauchy tais que: $t = [(x_n)_n], u = [(y_n)_n]$ e $s = [(z_n)_n]$. Assim vale que

$$t \cdot (u + s) = [(x_n)_n] \cdot [(y_n + z_n)_n] = [(x_n \cdot (y_n + z_n))_n].$$

Como o conjunto dos números racionais é um corpo, então vale que

$$[(x_n \cdot (y_n + z_n))_n] = [(x_n \cdot y_n + x_n \cdot z_n)_n].$$

Portanto

$$t \cdot (u+s) = [(x_n \cdot (y_n+z_n))_n] = [(x_n \cdot y_n + x_n \cdot z_n)_n] = [(x_n \cdot y_n)_n] + [(x_n \cdot z_n)_n] = t \cdot u + t \cdot s$$

Assim o conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ é um corpo.

2.4 O conjuto de Cauchy é um Corpo Ordenado

A noção de ordem no conjunto de Cauchy significa dizer que do conceito de sequência positiva. A seguir definimos o que é uma classe de equivalência é positiva. Com isso já estabelecido, consideramos o conjunto das classes de equivalência positivas do conjunto de Cauchy. Tal conjunto gozará das propriedades necessárias para a caracterização da relação de ordem em $\mathbb{S}$.

Definição 2.5. Uma sequência $(x_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ é dita positiva se existem $n_0, M \in \mathbb{N}$ tais que $x_n > \dfrac{1}{M}$ para todo $n > n_0$.

Definição 2.6. Naturalmente um elemento $t \in \mathbb{S}$ será dito positivo se existe uma sequência positiva $(x_n)_n \in S_{\mathbb{Q}}$ tal que $t = [(x_n)_n]$.

Exemplo 2.4. A sequência definida por $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ é positiva.De fato, para todo $n > 1$ temos $n+1 > n$ donde segue que $x_n = \dfrac{n+1}{n} > 1$. Neste caso podemos tomar $n_0 = M = 1$. Concluímos também que a classe de equivalência $\left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_n\right]$ é positiva.

Teorema 2.1. Se $t \in \mathbb{S}$ tal que $t = [(x_n)_n] = [(x'_n)_n]$ e por hipótese $(x_n)_n$ é positiva então a sequência $(x'_n)_n$ também é positiva.

Demonstração: Existem $n_0, M \in \mathbb{N}$ tais que $x_n > \dfrac{1}{M}$ para todo $n > n_0$. Por outro lado dado $\epsilon = 1/2\text{M}$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - x'_n| < \epsilon$ pois sabemos que $[(x_n)_n] = [(x'_n)_n]$ e isso significa que $(x_n - x'_n) \to 0$. Tomando $n > max\{n_0, n_\epsilon\} = n_1$ teremos que:

$$|x_n - x'_n| < \epsilon \Rightarrow |x'_n - x_n| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x'_n - x_n < \epsilon$$

$$\Rightarrow x_n - \epsilon < x'_n < \epsilon + x_n$$

Como $x_n > \dfrac{1}{M}$ e $\epsilon = \dfrac{1}{2M}$ segue que

$$\frac{1}{2M} = \frac{1}{M} - \frac{1}{2M} < x'_n, \forall n > n_1.$$

Assim, $(x'_n)_n$ também é positiva.
Logo se uma classe de equivalência é positiva é porque todas as sequências que

pertencem a mesma classe também são positivas.

Seja $P \subset \mathbb{S}$ tal que para todo $t \in P$ temos que t é positivo. Afim de que o conjunto P possa caracterizar uma relação de ordem em $\mathbb{S}$ devemos demonstrar as seguintes propriedades:

Propriedade do Fechamento para Adição.

Se duas classes de equivalência $t, s \in P$ então $(t + s) \in P$.
Demonstração. Sejam $t, s \in P$ tais que $t = [(x_n)_n]$ e $s = [(y_n)_n]$ então existem $n_1, n_2, M, N \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n > n_1 \Rightarrow x_n > \frac{1}{M}$$

e também

$$n > n_2 \Rightarrow y_n > \frac{1}{N}.$$

Tomando $n > max\{n_1, n_2\}$ então,

$$x_n + y_n > \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{N + M}{M \cdot N} > \frac{1}{MN} = \frac{1}{K}$$

Logo existem $n_0, K \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_0 \Rightarrow (x_n + y_n) > \dfrac{1}{K}$, onde $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ e $K = MN$. Portanto $[(x_n + y_n)_n]$ é positiva. Isso implica que $t + s \in P$.

Propriedade do Fechamento para Multiplicação.

Se duas classes de equivalência $t, s \in P$ então $(t \cdot s) \in P$.
Demonstração. Sejam $t, s \in P$ tais que $t = [(x_n)_n]$ e $s = [(y_n)_n]$. Então existem $n_1, n_2, M, N \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n > n_1 \Rightarrow x_n > \frac{1}{M}$$

e também

$$n > n_2 \Rightarrow y_n > \frac{1}{N}.$$

Tomando $n > max\{n_1, n_2\}$ então:

$$x_n \cdot y_n > \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{M \cdot N} = \frac{1}{K}.$$

Logo existem $n_0, K \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_0 \Rightarrow (x_n \cdot y_n) > \dfrac{1}{K}$, onde $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ e $K = MN$. Portanto $[(x_n \cdot y_n)_n]$ é positiva. Isso implica que $t \cdot s \in P$.

Lei da Tricotomia

Dado uma classe de equivalência $t \in \mathbb{S}$ então $t \in P$ ou $t = 0$ ou $-t \in P$.
Demonstração. Supondo que $t \in \mathbb{S}$ não pertença ao conjunto P, então isso

significa que para todo $M, n_0 \in \mathbb{N}$ existe um x_{n_M} tal que $n_M > n_0$ mas $x_{n_M} \leq$ 1/M. Portanto,

$$\begin{aligned}
M = 1 \Rightarrow \exists n_1 \quad &; x_{n_1} \leq 1 \\
M = 2 \Rightarrow \exists n_2 \quad &; x_{n_2} \leq \frac{1}{2} \\
M = 3 \Rightarrow \exists n_3 \quad &; x_{n_3} \leq \frac{1}{3} \\
M = k \Rightarrow \exists n_k \quad &; x_{n_k} \leq \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Olhando para a subsequência $(x_{n_k})_k$ teremos duas possibilidades: $(x_{n_k})_k$ converge para um certo racional r ou não. Se essa subsequência convergir para algum número racional r, daí teríamos que a sequência toda converge para r. Logo $t = [(x_n)_n] = [(x_{n_k})_n] = [(r, r, r, ...)_n]$. Nesse caso, $\left(x_{n_k} - \dfrac{1}{k}\right) \leq 0$ portanto $r \leq 0$. Se $r = 0$ teremos $t = [(\theta)_n] = [(0, 0, 0, ...)_n] = 0$. Se $r < 0$ então $-r > 0$. Neste caso, $-t = [(-x_n)_n] = [(-r, -r, -r, ...)]$ será positiva pois a sequência constate $(-r, -r, -r, ...)$ é positiva. Ou seja, $-t \in P$. No segundo caso, a subsequência não converge para nenhum número racional, em particular não convergirá para zero e pelo Lema 2.1 do Capítulo 2 todos os termos da subsequência, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, serão não nulos, pois $|x_{n_k}| \geq c > 0, \forall k > k_0$, assim a partir de um certo $n_0 \in \mathbb{N}$ todos os termos serão positivos, assim $(-x_n)_n$ será positivo e consequentemente $-t = [(-x_n)_n]$ também será positiva e portanto $(-t) \in P$.
O caso em que $-t \in \mathbb{S}$ não pertence ao conjunto P é inteiramente análogo ao caso anterior.
Se $t = [(x_n)_n]$ não é zero certamente a sequência $(x_n)_n$ não tende a zero e como se trata de uma sequência de Cauchy para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande os termos estariam acumulados todos maiores que zero ou todos menores que zero portanto $(x_n)_n$ é positiva ou $(-x_n)_n$ é positiva e assim temos que $t \in \mathbb{S}$ ou $-t \in \mathbb{S}$.

Diremos que $t \in \mathbb{S}$ é maior que $s \in \mathbb{S}$ e escreveremos $t > s$, se e somente se; $(t - s) \in P$, ou seja, se $(t - s)$ é positiva.

2.5 O conjunto de Cauchy é um Corpo Ordenado Completo

A seguir definiremos o que é uma cota superior de um subconjunto do conjunto de Cauchy e assim poderemos falar sobre conjuntos limitados superiormente. Concluiremos então que qualquer subconjunto do conjunto de Cauchy limitado superiormente possuirá a propriedade de existir a menor das cotas superiores. Um ponto notável a seguir a teoria é que manipularemos sequências de classes de equivalência, ou seja, aplicações do tipo $x : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$. Apesar da distinção denotaremos de maneira análoga a de sequência de números racionais, a distinção pode ser feita mediante o contexto. Utilizaremos também a noção de monotonicidade de uma sequência de classes de equivalência haja vista que já foi estabelecida uma relação de ordem no conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$

Definição 2.7. Seja $T \subset \mathbb{S}$ tal que o conjunto T seja não vazio. Se existir um elemento $c \in \mathbb{S}$ tal que para todo $t \in T$ tivermos $t \leq c$ então o elemento $c \in \mathbb{S}$ será chamado uma *cota superior do conjunto* T. Diremos também que nessa situação o conjunto T é limitado superiormente.
Seja $T \subset \mathbb{S}$, T não vazio e suponhamos que $c \in \mathbb{S}$ é uma cota superior de T. Construiremos duas sequências de classes de equivalência convenientes. Seja $s_0 \in T$. Então faremos

- $t_1 = c$ e $u_1 = s_0$.
- Supondo já definidos t_n e u_n consideremos $v_n = \dfrac{t_n + u_n}{2}$.
- Se v_n é uma cota superior para T, definiremos $t_{n+1} = v_n$ e $u_{n+1} = u_n$.
- Se v_n não é uma cota superior para T, definiremos $t_{n+1} = t_n$ e $u_{n+1} = v_n$.

Como $s_0 \leq c$ provemos que a sequência $(t_n)_n$ é não-crescente e a sequência $(u_n)_n$ não-decrescente. Decorre das definições de $(t_n)_n$ e $(u_n)_n$ que $u_n \leq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim temos que:

$$t_{n+1} = t_n$$

ou então

$$t_{n+1} = v_n = \frac{t_n + u_n}{2} \leq \frac{t_n + t_n}{2} = \frac{2t_n}{2} = t_n.$$

Portanto a sequência $(t_n)_n$ é não-crescente.
Analogamente,

$$u_{n+1} = u_n$$

ou então

$$u_{n+1} = v_n = \frac{t_n + u_n}{2} \geq \frac{u_n + u_n}{2} = \frac{2u_n}{u_n} = u_n.$$

Portanto a sequência $(u_n)_n$ é não-decrescente.
É válido comentar que a sequência $(t_n)_n$ é formado apenas por cotas superiores do conjunto T. Decorre da definição da sequência $(u_n)_n$ que para todo elemento da sequência u_{n_0} existe um elemento $x_0 \in T$ tal que $u_{n_0} \leq x_0$. Observamos ainda que:

$$s_0 = u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq ... \leq t_n \leq ... \leq t_2 \leq t_1 = c$$

Teorema 2.2. O conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ tem a propriedade da menor cota superior, ou seja, dado um conjunto $T \subset \mathbb{S}$ tal que T seja limitado superiormente então existirá $k \in \mathbb{S}$ tal que:

- k é uma cota superior de T.
- Se $c \in \mathbb{S}$ é uma cota superior de T então $k \leq c$.

Demonstração. Considerando as sequências de classes de equivalência $(t_n)_n$ e $(u_n)_n$, com $n \geq 1$ construídas acima, temos três casos a analisar.

1. Se a sequência de classes de equivalência $(u_n)_n$ ficar constante a partir de um certo n_0, ou seja, se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow u_n = k$ então k será a menor cota superior do conjunto T. Sabemos que

$$t_p - u_p = \frac{1}{2^{p-1}}(t_0 - u_0).$$

Então dado $\epsilon > 0$ e denotando $\epsilon = t_p - u_p$para p suficientemente grande $\epsilon_p < \epsilon$ e assim

$$t_p - k = \epsilon_p < \epsilon.$$

.

- Primeiramente qualquer cota superior do conjunto T será maior ou igual a k, pois dada uma cota superior c do conjunto T temos que existe $x_0 \in T$ tal que $k \leq x_0$ por outro lado $x_0 \leq c$. Assim, pela trasitividade da relação de ordem $k \leq c$.
- Por outro lado a sequência $(t_n)_n$ será decrescente, pela definição da construção da mesma, então supondo que exista um elemento $w \in T$ tal que $w > k \Leftrightarrow w - k > 0$ todavia podemos definir $\epsilon_p = t_p - k$, é claro que para valores de p suficientemente grande o valor de ϵ_p é arbitrariamente pequeno, portanto existe p_0 tal que

  $$\epsilon_{p_0} < w - k \Leftrightarrow t_{p_0} - k < w - k \Leftrightarrow t_{p_0} < w$$

  mas isso é um absurdo pois t_{p_0} é cota superior do conjunto T e $w \in T$. Portanto k é a menor cota superior do conjunto T.

2. Analogamente se existir um n_0 tal que a sequência de classes de equivalência $(t_n)_n$ se torne constante, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow t_n = k$ então k será a menor cota superior do conjunto T. Sabemos que $t_p - u_p = \dfrac{1}{2^{p-1}}(t_0 - u_0)$ então dado $\epsilon > 0$ e denotando $e_p = t_p - u_p$ para p suficientemente grande $\epsilon_p < \epsilon$ e assim teremos que para p suficientemente grande:

   $$k - u_p = \epsilon_p < \epsilon$$

   .

   - k é uma cota superior pois é um elemento da sequência $(t_n)_n$.
   - Seja $c \in \mathbb{S}$ uma cota superior. Como a sequência $(t_n)_n$ é constante, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, então a sequência $(u_n)_n$ é crescente, isso decorrer da construção de ambas. Supondo que $k > c$ e olhando para a diferença $k - u_p$, para p suficientemente grande essa diferença será arbitrariamente pequena, portanto existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que

     $$\epsilon_{p_0} = k - u_{p_0} < k - c \Leftrightarrow -u_{p_0} < -c \Leftrightarrow u_{p_0} > c.$$

     Por outro lado, pela construção da $(u_n)_n$ existe um $x_{p_0} \in T$ tal que $x_{p_0} \geq u_{p_0}$. Isso implicaria que $x_{p_0} > c$, mas isso é um absurdo pois por hipótese c é uma cota superior então temos que $k \leq c$. Assim nesse caso k é a menor cota superior do conjunto $T \subset \mathbb{S}$

3. Supondo agora que as sequências $(u_n)_n$ e $(t_n)_n$ não se tornem constantes. Assim existe n_0 tal que $u_{n_0+1} > u_{n_0} \Leftrightarrow u_{n_0+1} - u_{n_0} > 0$ e podemos construir uma subsequência decrescente $(t_{n_k})_k$, pois a sequência $(t_n)_n$ não se torna constante. **Supondo ainda que não exista a menor cota superior** então para cada t_{n_k} existe uma cota superior q_k tal que $q_k < t_{n_k}$.

Então seja $\epsilon = u_{n_0+1} - u_{n_0}$ e por outro lado sabemos que $t_p - u_p = \frac{1}{2^{p-1}}(t_1 - u_1)$. Em particular para $p = n_0$ temos que

$$t_{n_0} - u_{n_0} = \frac{1}{2^{n_0-1}}(t_1 - u_1)$$

Por outro lado, temos

$$q_0 < t_{n_0} \Rightarrow q_0 - u_{n_0} < t_{n_0} - u_{n_0} = (t_{n_0} - u_{n_0+1}) + (u_{n_0+1} - u_{n_0})$$

Como $t_{n_0} - u_{n_0+1} \geq 0$, pois existe $x_0 \in T$ tal que $t_{n_0} \geq x_0 \geq u_{n_0+1}$. Assim, temos

$$q_0 - u_0 < \epsilon \Rightarrow q_0 - u_{n_0} < u_{n_0+1} - u_{n_0} \Rightarrow q_0 < u_{n_0}.$$

Mas isso é um absurdo, pois existe $x_1 \in T$ tal que $x_1 \geq u_{n_0}$. Isso implicaria que $q_0 < x_1$, mas contraria o fato que q_k é cota superior do conjunto T e $x_1 \in T$, portando existe a menor cota superior.

Assim o conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ é um corpo ordenado completo, nas demonstrações acima foi utilizadas propriedades da relação de ordem, entre outras do conjunto de Cauchy. Essas propriedades serão demonstradas no capítulo 5, mas é claro que a ordem nas demonstrações destas propriedades não alterará os resultados aqui provados, assim estão postos apenas por finalidade didática.

Capítulo 3

Construção dos Números Reais por Cortes de Dedekind

3.1 Cortes

A seguir construiremos o conjunto de Dedekind, $\mathbb{D}$. Para tal, precisaremos definir o que vem a ser um corte. Assim como foi feito com o conjunto de Cauchy, $\mathbb{S}$, consideraremos aqui já conhecido o corpo ordenado dos números racionais. A construção desse conjunto em comparação com a construção feita do conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ aparentemente é mais simples devido a utilizarmos apenas manipulações com conjuntos.
De acordo com Cássio Neri (2010) podemos definir um corte racional C como um subconjunto de números racionais, que possui as seguintes propriedades:

1. $C \neq \phi$, $C \neq \mathbb{Q}$
2. Se $r \in C$ e $s \in \mathbb{Q}$ é tal que $s < r$ então $s \in C$
3. Se $r \in C$ então existe $u \in C$ tal que $u > r$.

A primeira propriedade nos diz que o conjunto $C \subset \mathbb{Q}$ é não vazio assim como o seu complementar também não é vazio. A segunda propriedade significa que todo número racional menor que r pertencerá a C bastando apenas que $r \in C$, por fim a terceira e mais curiosa propriedade nos diz que o conjunto C não possui elemento máximo, ou seja, dado um elemento do conjunto sempre existirá um maior do que o mesmo que pertencerá ao conjunto.

Um primeiro exemplo de corte será o seguinte conjunto $R_q = \{r \in \mathbb{Q}\,;\, r < q\}$, onde $q \in \mathbb{Q}$ é fixado. Demonstremos que de fato R_q é um corte:

1. Definindo $r = q - 1$ e utilizando as propriedades de ordem do conjunto $\mathbb{Q}$ temos que:

$$1 > 0 \Leftrightarrow 1 - q > 0 - q \Leftrightarrow q - 1 < q \Leftrightarrow r < q \Leftrightarrow r \in R_q$$

Portanto o conjunto R_q é não vazio. Trivialmente $R_q \neq \mathbb{Q}$ pois o número racional q não pertence a R_q caso contrário isso implicaria que $q < q$, portanto temos que: $C \neq \mathbb{Q}$.

2. Utilizando a propriedade transitiva da relação de ordem dos números racionais, dado $r \in \mathbb{Q}$ e por hipótese seja $s < r$, concluímos que: $s < r$ e $r < q \Rightarrow s < r \Rightarrow s \in R_q$. Assim o conjunto R_q não goza da propriedade da boa ordenação, ou seja, não existe em R_q um menor elemento.

3. Seja $r \in R_q$ definindo $u = \dfrac{r+q}{2}$ teremos que:

$$r < q \Rightarrow r + r < q + r \Rightarrow 2r < q + r \Rightarrow r < \frac{q+r}{2} \Rightarrow r < u.$$

Por outro lado temos que:

$$r < q \Rightarrow r + q < q + q \Rightarrow r + q < 2q \Rightarrow \frac{r+q}{2} < q \Rightarrow u < q \Rightarrow u \in R_q.$$

Portanto existe um elemento $u \in R_q$ tal que $u > r$. Assim concluímos que para todo $q \in \mathbb{Q}$ o conjunto R_q, definido acima, é um corte. Esse corte será denominado *corte racional*.

Exemplo 3.1. Entre os cortes racionais existem dois cortes que exerceram papéis importante na nossa construção. São eles:

$$R_0 = \{r \in \mathbb{Q}; r < 0\},$$

denominado corte nulo e

$$R_1 = \{r \in \mathbb{Q}; r < 1\},$$

denominado por corte unidade.

Veremos agora a existência de cortes de Dedekind não racionais, ou seja, cortes de Dedekind que não são do tipo R_q. Antes disso provemos o seguinte;
Lema 3.1. Dado $x \in \mathbb{Q}^+$ tal que $1 \leq x^2 < 2$ existe $h \in \mathbb{Q}$ com $0 < h < 1$ e $h < k$ onde $k = \dfrac{2-x^2}{2x+1} \in \mathbb{Q}$.
Demonstração. Seja $h = \dfrac{k}{2}$ então claramente $h < k$ e temos que:

$$x^2 < 2 \Rightarrow 2 - x^2 > 0 \Rightarrow \frac{2-x^2}{4x+2} > 0 \Rightarrow h > 0$$

a segunda implicação decorre do fato de x ser positivo. Por outro lado,

$$4x + 2 - (2 - x^2) = x^2 + 4x > 0 \Rightarrow 4x + 2 > 2 - x^2 \Rightarrow \frac{2-x^2}{4x+2} < 1 \Rightarrow h < 1$$

Assim existe $h \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < h < 1$ e $h < k$ ■.

Seja $X = K \cup R_1$ tal que $K = \{x \in \mathbb{Q}^+; 1 \leq x^2 < 2\}$. Afirmamos que o conjunto X é um corte de Dedekind.

1. $1 \in X \Rightarrow X \neq \phi$. Por outro lado, $3 \in (\mathbb{Q} - X) \Rightarrow X \neq \mathbb{Q}$.

2. Sejam $r \in X$ e $s < r$. Se $r \in R_1 \Rightarrow s \in R_1 \Rightarrow s \in X$. Por outro lado, se $r \in K$ e s não pertence a R_1 então

$$1 \leq s < r \Rightarrow 1 \leq s^2 < r^2 \Rightarrow 1 \leq s^2 < 2 \Rightarrow s \in K \Rightarrow s \in X$$

.

3. Dado $r \in X$ se $r \in R_1$ existe $s > r$ tal que $s \in R_1$ isso implica que $s \in X$. Por outro lado se $r \in K$ então $1 \leq r^2 < 2$ pelo lema anterior existe $h \in \mathbb{Q}$ tal que; $0 < h < 1$ e também:

$$h < \frac{2 - r^2}{2r + 1} \Rightarrow 2rh + h < 2 - r^2 \Rightarrow r^2 + 2rh + h < 2.$$

Como $0 < h < 1$ temos $0 < h^2 < h$ portanto,

$$r^2 + 2rh + h^2 < r^2 + 2rh + h < 2 \Rightarrow r^2 + 2rh + h^2 < 2 \Rightarrow (r + h)^2 < 2.$$

Tomando $s = r + h$ temos que $s > r$ e $1 \leq s^2 < 2$ logo $s \in K \Rightarrow s \in X$.

Concluímos assim que o conjunto X é um corte de Dedekind, mas ele difere dos cortes racionais R_q pois o seu complementar $\mathbb{Q} - X$ não possui elemento mínimo. Já para os cortes racionais, R_q, o seu complementar sempre possui elemento mínimo, no caso $min(\mathbb{Q} - R_q) = q$, pois se $x \in \mathbb{Q} - R_q \Rightarrow x \geq q$.

3.2 Adição no Conjunto $\mathbb{D}$ de Dedekind

Seja $\mathbb{D}$ o conjunto formados por todos os cortes racionais. Ou seja,

$$\mathbb{D} = \{X \subset \mathbb{Q}; X \quad e' \quad corte \quad racional\}.$$

Definiremos agora a operação de adição $+ : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, na verdade precisaremos provar que de fato o conjunto obtido no resultado da adição é um corte de Dedekind.

Dados $X, Y \in \mathbb{D}$ definiremos $X + Y = \{r + q;\ r \in X\ ,\ q \in Y\}$.

1. $X, Y \neq \phi \Rightarrow X + Y \neq \phi$, claramente. Dados $a \in (\mathbb{Q} - X)$ e $b \in (\mathbb{Q} - Y)$, provemos que $a + b \in (\mathbb{Q} - (X + Y))$. De fato, supondo que $a + b \in X + Y$ isso implica que existem $r \in X$ e $q \in Y$ tais que $a + b = r + q$. Mas $a > r$, pois do contrário teríamos $a \leq r \Rightarrow a \in X$, pois $X \in \mathbb{D}$, todavia isso não pode ocorrer pois $a \in \mathbb{Q} - X$. Analogamente $b > q$, se não teríamos que $b \leq q \Rightarrow b \in Y$, pois $Y \in \mathbb{D}$, outrora b não pode pertencer a Y pois por hipótese $b \in \mathbb{Q} - Y$. Assim:

$$a > r\ ,\ b > q \Rightarrow a + b > r + q$$

Contrariando a hipótese inicial $a + b = r + q$, assim concluímos por redução ao absurdo que $a + b \in \mathbb{Q} - (X + Y)$ e assim $(\mathbb{Q} - (X + Y)) \neq \phi$.

2. Sejam $r \in X+Y$ e $s < r$. Provemos que $s \in X+Y$ também. Definindo $k = s-a$ temos que $k < b \Rightarrow k \in Y$, pois supondo que $k \geq b \Rightarrow k+a \geq b+a \Rightarrow s \geq r$, mais isso é um absurdo, portanto $k \in Y$, logo,

$$s = a + (s-a) \Rightarrow s = a+k \Rightarrow s \in X+Y.$$

Então dado qualquer $s < r \Rightarrow s \in X+Y$, onde $r \in X+Y$.

3. Seja $r \in X+Y$. Então existem $a \in X$ e $b \in Y$ tais que $r = a+b$. Como $X \in \mathbb{D} \Rightarrow \exists c > a\,,\, c \in X$. Assim definindo $s = c+b$ se tem $s \in X+Y$ e $s = c+b > a+b = r$. Logo não existe elemento máximo em $X+Y$.

Então de fato a operação acima está bem definida, assim $X, Y \in \mathbb{D} \Rightarrow X+Y \in \mathbb{D}$. Veremos agora que a adição possui as propriedades desejadas.

Propriedade Associativa da Adição.

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{D}$ é válida a seguinte igualdade $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$. *Demonstração.* Seja $r \in (X+Y)+Z$ então existem $a \in X, b \in Y, c \in Z$ tais que $r = (a+b)+c$ e como $a, b, c \in \mathbb{Q}$ se tem que $r = a+(b+c) \Rightarrow r \in X+(Y+Z)$ assim $(X+Y)+Z \subset X+(Y+Z)$. Seguindo o mesmo raciocínio, dado $s \in X+(Y+Z)$ existem $d \in X, e \in Y, f \in Z$ tais que $s = d+(e+f)$ e como $d, e, f \in \mathbb{Q}$ se tem que $s = (d+e)+f \Rightarrow s \in (X+Y)+Z$ assim $X+(Y+Z) \subset (X+Y)+Z$. Portanto concluímos que $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$.

Propriedade Comutativa da Adição.

Dados $X, Y \in \mathbb{D}$ é válida a igualdade $X+Y = Y+X$. *Demonstração.* Seja $r \in X+Y$ então existem $a \in X$ e $b \in Y$ tais que $r = a+b$ como $a, b \in \mathbb{Q}$ temos $r = b+a$, pois $\mathbb{Q}$ é corpo. Assim $r \in Y+X$ e portanto $X+Y \subset Y+X$, analogamente dado $s \in Y+X$ existem $c \in Y$ e $d \in X$ tais que $s = c+d$, como $c, d \in \mathbb{Q}$ temos que $s = d+c$ e portanto $s \in X+Y$, logo $Y+X \subset X+Y$. Essas duas inclusões implicam que $X+Y = Y+X$.

Elemento Neutro Aditivo

Dado $X \in \mathbb{D}$ existe $R_0 \in \mathbb{D}$ tal que $X+R_0 = X$. *Demonstração.* Seja $r \in X+R_0$ então existem $a \in X$ e $b \in R_0$ tais que $r = a+b$. Assim $b \in R_0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow b+a < 0+a \Rightarrow r < a$, como $a \in X$ e $X \in \mathbb{D}$ temos que $r \in X$ portanto $X+R_0 \subset X$. Agora seja $s \in X$ como $X \in \mathbb{D}$ existe $k \in X$ tal que $s < k$, definindo $b = s-k$ temos $b < 0 \Rightarrow b \in R_0$ assim podemos escrever $s = k+b$ onde $k \in X$ e $b \in R_0$, portanto $X \in X+R_0$. As duas inclusões provam que $X+R_0 = X$ e como X foi arbitrário, então é válida a propriedade para todo $X \in \mathbb{D}$.

Elemento Simétrico Aditivo

Dado $X \in \mathbb{D}$ definiremos o conjunto

$$Z = \{a \in \mathbb{Q}; -a \in (\mathbb{Q}-X), \exists b \in (\mathbb{Q}-X); b < -a\}$$

Provemos que o conjunto Z é um corte de Dedekind.

1. Seja $r \in X$ então $-(-r) \in X$, assim $-r$ não pertence Z e como $Z \subset \mathbb{Q}$ temos que $-r \in (\mathbb{Q} - Z)$, logo $(\mathbb{Q}) - Z \neq \phi$. Seja $s \in (\mathbb{Q} - X)$, então como $s < s+1 \Rightarrow s+1 \in (\mathbb{Q} - X)$, pois do contrário $s \in X$ violando a hipótese inicial. Assim por definição $-(s+1) \in Z$, pois $s+1 \in \mathbb{Q} - X$ e existe $s \in \mathbb{Q} - X$ tal que $s < s+1$ e portanto $Z \neq \phi$.

2. Sejam $a \in Z$ e $b < a$. Segue que $a \in Z \Rightarrow -a \in \mathbb{Q} - X$ e que $-a < -b$ assim $-b$ deve pertencer ao complementar de X pois do contrário $-a \in X$ o que é um absurdo, portanto $-b \in \mathbb{Q} - X$ e existe um elemento menor que $-b$ no complementar, logo pela definição de Z temos $b \in Z$.

3. Seja $a \in Z$. Pela definição de Z existe $b \in \mathbb{Q} - X$ tal que $b < -a$. Definindo $c = \dfrac{a-b}{2}$, temos que

$$b < -a \Rightarrow a < -b \Rightarrow a + a < a - b \Rightarrow a < \frac{a-b}{2} \Rightarrow a < c$$

por outro lado

$$b < -a \Rightarrow b + b < b - a \Rightarrow b < -\frac{a-b}{2} \Rightarrow b < -c$$

Como $b \in \mathbb{Q} - X$ isso implica que $-c \in \mathbb{Q} - X$ assim; como o elemento $-c \in \mathbb{Q} - X$ e não é o mínimo desse conjunto, por definição do conjunto Z segue que $c \in Z$ e $c > a$.

Assim o conjunto $Z \in \mathbb{D}$, provaremos que esse conjunto é o simétrico aditivo do corte X e por essa razão escreveremos $-X$ no lugar de Z.

Dado $X \in \mathbb{D}$ seja $-X \in \mathbb{D}$ tal que

$$-X = \{a \in \mathbb{Q}; -a \in (\mathbb{Q} - X), \exists b \in (\mathbb{Q} - X); b < -a\}$$

provemos que $X + (-X) = R_0$.
Demonstração. Seja $r \in X + (-X)$ então existem $a \in X$ e $b \in -X$ tal que $r = a + b$, pela definição de $-X$ existe $c \in \mathbb{Q} - X$ tal que $c < -b$. Primeiramente devemos ter $a < c \Leftrightarrow a - c < 0$ pois $a \in X$ e $c \in \mathbb{Q} - X$, por outro lado

$$c < -b \Rightarrow b < -c \Rightarrow a + b < a - c \Rightarrow r < a - c \Rightarrow r < 0 \Rightarrow r \in R_0$$

Portanto é válida a inclusão $X + (-X) \subset R_0$.
Dado $s \in R_0$, seja $a \in X$. Definindo o conjunto $A = \left\{n \in \mathbb{N}; a - \dfrac{sn}{2} \in (\mathbb{Q} - X)\right\}$, fixando $b \in \mathbb{Q} - X$ tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{2a - 2b}{s} \Rightarrow sn < 2a - 2b \Rightarrow -sn > 2b - 2a \Rightarrow a - \frac{sn}{2} > b$$

Como b pertence ao complementar de X temos que $a - \dfrac{sn}{2} \in \mathbb{Q} - X$ implicando que o conjunto A é não vazio e pelo princípio da boa ordenação existe $minA = n_0$. Definiremos agora os seguintes números

$$k = a - \frac{s(n_0 - 1)}{2}, \; p = a - \frac{sn_0}{2}, \; q = a - \frac{s(n_0 + 1)}{2}$$

Temos então que $p \in \mathbb{Q} - X$ e como $q > p$ então $q \in \mathbb{Q} - X$, assim por definição temos que $-q \in -X$. Temos ainda que $k \in X$ e assim podemos concluir que

$$k + (-q) = a - \frac{s(n_0 - 1)}{2} - \left(a - \frac{s(n_0 + 1)}{2}\right) = \frac{-sn_0 + s + sn_0 + s}{2} = \frac{2s}{2} = s$$

Portanto $s \in X + (-X)$ e é válido que $R_0 \subset X + (-X)$ essas inclusão com a que foi provada acima garetem a validade de $X + (-X) = R_0$.

3.3 Multiplicação no Conjunto $\mathbb{D}$ de Dedekind

Inicialmente definiremos o que é um corte positivo e a posteriori definiremos também multiplicação entre cortes positivos. Feito isso generalizaremos a multiplicação para todo o conjunto de Dedekind $\mathbb{D}$.

Definição 3.2. Seja $X \subset \mathbb{D}$. O corte X será dito positivo quando $R_0 \subsetneq X$. Representaremos o conjunto de todos os cortes positivos por $\mathbb{D}^+$, ou seja,

$$\mathbb{D}^+ = \{X \in \mathbb{D}; R_0 \subsetneq X\}$$

Teorema 3.1. Sejam $X, Y \subset \mathbb{D}^+$ então o conjunto Z tal que

$$Z = \{a \in \mathbb{Q}; a < 0 \, ou \, a = b \cdot c, b \in X, c \in Y, b \geq 0, c \geq 0\}$$

é um corte, ou seja, $Z \in \mathbb{D}$.

Demonstração.

1. Como $R_0 \subset Z$ então $Z \neq \phi$. Por outro lado sejam $a' \in X^{\complement}$ e $b' \in Y^{\complement}$, afirmamos que $c' = a' \cdot b'$ pertence ao conjunto $Z^{\complement}$. Supondo, por absurdo, que $c' \in Z$ então $c' < 0$ ou $c' = a \cdot b, a \geq 0, b \geq 0$, mas se $c' < 0 \Rightarrow c' \in X$ no entanto isso é um absurdo, por outro lado se $c' = a \cdot b, a \geq 0, b \geq 0$ então $a' \cdot b' = a \cdot b$, todavia $a' > a$ pois do contrário $a' \in X$ pois $X \in \mathbb{D}$ e $a' \in X^{\complement}$, analogamente $b' > b$ decorre da monotonicidade da multiplicação da relação de ordem dos números racionais que $a' \cdot b' \geq a' \cdot b > a \cdot b$ mas isso contraria a igualdade $a' \cdot b' = a \cdot b$. Enfim concluímos que $Z^{\complement} \neq \phi$.

2. Seja $a \in Z$, $b < a$. Se $b < 0$, então $b \in Z$. Se $b \geq 0$, então $a > 0$ e como $a \in Z$ deve existir $c \in X$ e $d \in Y$ tal que $a = c \cdot d$ com $c \geq 0$, $d \geq 0$. Por outro lado temos $a > 0 \Rightarrow c > 0$. Seja $e = \frac{b}{c}$, então $e \in Y$, pois $e < d$ do contrário se $e \geq d \Rightarrow c \cdot e \geq c \cdot d \Rightarrow b \geq a$, mas é um absurdo, portanto

   $$b = e \cdot c \,,\, e \in Y \,, c \in X, \, e \geq 0, \, c \geq 0$$

   Portanto $b \in Z$.

3. Seja $a \in Z$. Se $a < 0$, então $b = \frac{a}{2}$ é tal que $a < b < 0 \Rightarrow b \in Z$ e $b > a$. Se $a \geq 0$, então $a = b \cdot c$, $b \in X$, $c \in Y$, existem $d > b$, $e > c$, com $d \in X$, $e \in Y$ logo;

   $$a = b \cdot c \geq d \cdot c < d \cdot e$$

   Assim tomando $f = d \cdot e$ temos que $f \in Z$, $f > a$.

   O corte Z definido acima será denotador por $X \cdot Y$.

Para definir a multiplicação utilizaremos a noção de inverso aditivo e módulo de um corte de Dedekind. O inverso aditivo já foi estabelecido, agora vejamos a definição de módulo.

Definição 3.3. Dado $X \in \mathbb{D}$, o módulo de X, denotado por $|X|$ é definido por:

$$|X| = \begin{cases} X, \, se \, R_0 \subset X \\ -X, \, se \, X \subsetneq R_0 \end{cases}$$

Observamos ainda que dado $X \in \mathbb{D}$ temos que $R_0 \subset X$ ou $X \subsetneq R_0$. Se $r \geq 0$ pertence a X então $R_0 \subset X$ e caso X só possua racionais negativos então $X \subsetneq R_0$. Dados $X, Y \in \mathbb{D}$ definiremos a multiplicação de X por Y como uma aplicação $\cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que:

$$X \cdot Y = \begin{cases} |X| \cdot |Y|, \, se \, R_0 \subset X, \, R_0 \subset Y \\ -(|X| \cdot |Y|), \, se \, R_0 \subset X, \, Y \subsetneq R_0 \\ -(|X| \cdot |Y|), \, se \, X \subsetneq R_0, \, R_0 \subset Y \\ |X| \cdot |Y|, \, se \, X \subsetneq R_0, \, Y \subsetneq R_0 \end{cases}$$

Propriedade comutativa da multiplicação

Inicialmente vejamos o caso em que os termos são positivos, ou seja, dados $X, Y \in \mathbb{D}^+$ temos que; seja $a \in X \cdot Y$. Se $a < 0$ então por definição teremos $a \in Y \cdot X$. Se $a \geq 0$, então $a = b \cdot c$ com $b \in X$, $c \in Y$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Como o conjunto dos números racionais é um corpo então; $a = c \cdot b$ com $c \in Y$, $b \in X$, $c \geq 0$, $b \geq 0$ e assim temos $X \cdot Y \subset Y \cdot X$. Analogamente teremos válida a inclusão $Y \cdot X \subset X \cdot Y$ e portanto $X \cdot Y = Y \cdot X$. Segundo caso; se $R_0 \subset X$, $Y \subsetneq R_0$ e sabendo que $|X| \in \mathbb{D}^+ \, \forall X \in \mathbb{D}$ então:

$$X \cdot Y = -(|X| \cdot |Y|) = -(|Y| \cdot |X|) = Y \cdot X$$

A primeira e terceira igualdade decorre da definição de multiplicação e a segunda já foi provada no primeiro caso. O terceiro caso é identico ao segundo. O quarto caso é se $X \subsetneq R_0$, $Y \subsetneq R_0$ então:

$$X \cdot Y = |X| \cdot |Y| = |Y| \cdot |X| = Y \cdot X$$

A primeira e terceira igualdade decorre da definição de multiplicação e a segunda já foi provada no primeiro caso.

Propriedade associativa da multiplicação

Primeiro caso; analogamente a comutatividade seja $X, Y, Z \in \mathbb{D}^+$ então dado $a \in (X \cdot Y) \cdot Z$ se $a < 0$ então por definição $a \in X \cdot (Y \cdot Z)$ por outro lado se $a = k \cdot b$ tal que $k \in X \cdot Y$, $b \in Z$, $k \geq 0$, $b \geq 0$, assim como $a, b \geq 0$ temos $k \geq 0$ e como $k \in X \cdot Y$ existem $c \in X$ e $d \in Y$ com $c, d \geq 0$ tal que $k = c \cdot d$, portanto como o conjunto dos números racionais é um corpo temos:

$$a = k \cdot b = (c \cdot d) \cdot b = c \cdot (d \cdot b) = c \cdot k' , c \in X, k' \in Y \cdot Z, \, c \geq 0, \, k \geq 0$$

Portanto $(X \cdot Y) \cdot Z \subset X \cdot (Y \cdot Z)$ de maneira similar temos a inclusão inversa e assim é válida a associatividade.

Lema 3.2. Para todos $X, Y \in \mathbb{D}$ vale que

$$|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$$

.

Demonstração. Temos quatro casos a considerar e em todos os casos aplicaremos primeiro a definição de multiplicação, assim temos;

1. Se $R_0 \subset X$, $R_0 \subset Y$ então $|X \cdot Y| = ||X| \cdot |Y|| = |X| \cdot |Y|$
2. Se $R_0 \subset X$, $Y \subsetneq R_0$ então $|X \cdot Y| = |-(|X| \cdot |Y|)| = -(-(|X| \cdot |Y|)) = |X| \cdot |Y|$
3. Se $X \subsetneq R_0$, $R_0 \subset Y$ então $|X \cdot Y| = |-(|X| \cdot |Y|)| = -(-(|X| \cdot |Y|)) = |X| \cdot |Y|$
4. Se $X \subsetneq R_0$, $Y \subsetneq R_0$ então $|X \cdot Y| = ||X| \cdot |Y|| = |X| \cdot |Y|$

Segundo caso; se $X \subsetneq R_0$, $R_0 \subset Y$, $R_0 \subset Z$ e utilizando a propriedade $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$ juntamente com o primeiro caso temos:

$$(X \cdot Y) \cdot Z = K \cdot Z = -(|K| \cdot |Z|) = -[(|X| \cdot |Y|) \cdot |Z|] = -[|X| \cdot (|Y| \cdot |Z|)]$$

$$= -(|X| \cdot |K'|) = X \cdot K' = X \cdot (Y \cdot Z)$$

A terceira e quinta igualdade decorrem que o módulo da multiplicação de dois cortes é igual ao produto dos módulos; e isso decorre diretamente da definição de multiplicação juntamente com a definição de módulo.

Terceiro caso; se $R_0 \subset X$, $Y \subsetneq R_0$, $R_0 \subset Z$ e usando a propriedade comutativa juntamente com o segundo caso temos:

$$X \cdot (Y \cdot Z) = (Y \cdot Z) \cdot X = Y \cdot (Z \cdot X) = Y \cdot (X \cdot Z) = (Y \cdot X) \cdot Z = (X \cdot Y) \cdot Z$$

Quarto caso; se $R_0 \subset X$, $R_0 \subset Y$, $Z \subsetneq R_0$ e usando a propriedade comutativa juntamente como o segundo caso temos:

$$(X \cdot Y) \cdot Z = Z \cdot (X \cdot Y) = Z \cdot (Y \cdot X) = (Z \cdot Y) \cdot X = (Y \cdot Z) \cdot X = X \cdot (Y \cdot Z)$$

Quinto caso; se $X \subsetneq R_0$, $Y \subsetneq R_0$, $R_0 \subset Z$ e utilizando a propriedade $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$ juntamente com a definição de multiplicação em cada caso e o primeiro caso temos:

$$(X \cdot Y) \cdot Z = K \cdot Z = |K| \cdot |Z| = (|X| \cdot |Y|) \cdot |Z| = |X| \cdot (|Y| \cdot |Z|) = ...$$

$$... = |X| \cdot |K'| = X \cdot K' = X \cdot (Y \cdot Z)$$

Sexto caso; se $R_0 \subset X$, $Y \subsetneq R_0$, $Z \subsetneq R_0$ e usando a propriedade comutativa juntamente com o quinto caso temos:

$$X \cdot (Y \cdot Z) = (Y \cdot Z) \cdot X = (Z \cdot Y) \cdot X = Z \cdot (Y \cdot X) = Z \cdot (X \cdot Y) = (X \cdot Y) \cdot Z$$

Sétimo caso; se $X \subsetneq R_0$, $R_0 \subset Y$, $Z \subsetneq R_0$ e usando a propriedade comutativa juntamente com o quinto caso temos:

$$(X \cdot Y) \cdot Z = Z \cdot (X \cdot Y) = (Z \cdot X) \cdot Y = (X \cdot Z) \cdot Y = X \cdot (Z \cdot Y) = X \cdot (Y \cdot Z)$$

Oitavo caso; se $R_0 \subset X$, $Y \subsetneq R_0$, $Z \subsetneq R_0$ e usando a propriedade comutativa juntamente com o quinto caso temos:

$$X \cdot (Y \cdot Z) = (Y \cdot Z) \cdot X = (Z \cdot Y) \cdot X = Z \cdot (Y \cdot X) = (Y \cdot X) \cdot Z = (X \cdot Y) \cdot Z$$

Nono e último caso; se X, Y, Z são subconjuntos próprios de R_0. Utilizando a propriedade $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$ juntamente com a definição de multiplicação e o primeiro caso:

$$(X \cdot Y) \cdot Z = K \cdot Z = -(|K| \cdot |Z|) = -[(|X| \cdot |Y|) \cdot |Z|] = -[|X| \cdot (|Y| \cdot |Z|)]$$
$$= -[|X| \cdot |K'|] = X \cdot K' = X \cdot (Y \cdot Z)$$

Existência do elemento neutro da multiplicação

Afirmamos que R_1 é o elemento neutro da multiplicação, ou seja, dado $X \in \mathbb{D}$ temos que $X \cdot R_1 = X$. Inicialmente vejamos o caso em que $X \in \mathbb{D}^+$ ou $X = R_0$. Seja $a \in X \cdot R_1$ se $a < 0$ então $a \in R_0$, mas se $X \in \mathbb{D}^+$ temos $R_0 \subsetneq X$ e portanto $a \in X$. Por outro lado se $a \geq 0$ então por definição da multiplicação existem $b \in X$ e $c \in R_1$ ambos maiores ou iguais a zero, tal que $a = b \cdot c$ como $c \in R_1$ então $c < 1$ decorre disso que $a = b \cdot c < b \cdot 1 = b \in X$ e como X é um corte temos $a \in X$, portanto é válida a inclusão $X \cdot R_1 \subset X$. Agora seja $a \in X$ se $a < 0$ por definição $a \in X \cdot R_1$ e se $a \geq 0$ escolhemos um $p \in X$ tal que $0 \leq a < p$, isso é possível pois X é um corte, tomando $q = \dfrac{a}{p}$ temos que $0 \leq q < 1$ e assim $q \in R_1$. Portanto $a = p \cdot q$ como $p \in X$, $q \in R_1$ e ambos p, q não negativos, assim $a \in X \cdot R_1$ e também é válida a inclusão $X \in X \cdot R_1$. Decorre das duas inclusões que para $X \in \mathbb{D}$ temos $X \cdot R_1 = X$.
Vejamos o caso em que $X \subsetneq R_0$. Pela definição de multiplicação e utilizando que foi prova a pouco temos:

$$X \cdot R_1 = -(|X| \cdot |R_1|) = -(|X|) = -(-X) = X$$

Portanto para todo $X \in \mathbb{D}$ temos que $X \cdot R_1 = X$

Elemento simétrico multiplicativo

Dado $X \in \mathbb{D}$ tal que $R_0 \subsetneq X$ o conjunto

$$X^{-1} = \{a \in \mathbb{Q}; a \leq 0 \; ou \; a^{-1} \in X^{\complement} \; e \; \exists \, b \in X^{\complement} \; tal \; que \; b < a^{-1}\}$$

é um corte de Dedekind.

1. Como o conjunto X^{-1} contém os racionais negativos ele não é vazio. Se $a \in X$ e $a > 0$ então $a^{-1} \in (X^{-1})^{\complement}$, de fato supondo que $a^{-1} \in X^{-1}$ então $(a^{-1})^{-1} \in X^{\complement} \Rightarrow a \in X^{\complement}$ contrariando a hipótese que $a \in X$, portanto $X^{-1} \neq \phi$

2. Seja $a \in X^{-1}$ e $b < a$. Se $b \leq 0$ então, por definição, $b \in X^{-1}$. Se $b > 0$ então $0 < b < a \Rightarrow a^{-1} < b^{-1}$ mas, como foi visto acima, $a \in X^{-1} \Rightarrow a^{-1} \in X^{\complement}$ isso implica que $b^{-1} \in X^{\complement}$, pois se $b^{-1} \in X$ então $a^{-1} \in X$ o que não é possível, além disso b^{-1} não é o mínimo de $X^{\complement}$, pois $a^{-1} \in X^{\complement}$ e $a^{-1} < b^{-1}$, portanto $b \in X$.

3. Por fim seja $a \in X^{-1}$. Pela definição do conjunto x^{-1} ele contém racionais positivos, portanto existe $b \in X^{-1}$ tal que $b > 0$, se $a \leq 0 \Rightarrow a \leq 0 < b \Rightarrow a < b$ e $b \in X^{-1}$. Por outro lado se $a > 0$ então pela definição de X^{-1} existe $c \in X^{\complement}$ tal que $c < a^{-1}$. Seja $b = \dfrac{c + a^{-1}}{2}$, assim temos que

$c < b < a^{-1}$ portanto $b \in X^{\complement}$, pois $c \in X^{\complement}$. Logo $b^{-1} > a$ e também $b^{-1} \in X^{-1}$, pois $b \in X^{\complement}$ e b não é mínimo de $X^{\complement}$.

Portanto o conjunto $X^{-1} \in \mathbb{D}$.
Dado $X \in \mathbb{D}$ e $X \neq R_0$ afirmamos que o corte X^{-1} é o inverso multiplicativo de X caso $X \in \mathbb{D}^+$ e se $X \subsetneq R_0$ o inverso multiplicativo será $-(|X|^{-1})$.
Para todo $X \in \mathbb{D}$ temos que $X \cdot X^{-1} = R_1$. Demonstraremos primeiro o caso em $X \in \mathbb{D}^+$. Seja $a \in X \cdot X^{-1}$, se $a \leq 0$ então $a \in R_1$, por definição. Se $a > 0$ então existem $b \in X$, $c \in X^{-1}$, $d \in X^{\complement}$ tais que $b > 0$, $c > 0$, $d < c^{-1}$. Como $b \in X$ e $b^{-1} \in X^{-1}$ então $b < d \Rightarrow \dfrac{b}{d} < 1$. Por outro lado $d < c^{-1} \Rightarrow d^{-1} > c \Rightarrow \dfrac{b}{d} > c \cdot b$, pois $b > 0$, portanto temos $a = b \cdot c < \dfrac{b}{d} < 1 \Rightarrow a \in R_1$ logo é válida a inclusão $X \cdot X^{-1} \subset R_1$
Dado $a \in R_1$ se $a < 0$ então $a \in X \cdot X^{-1}$ por definição, caso $a = 0$ temos que $0 \in X$ e $0 \in X^{-1}$, portanto $a = 0 \cdot 0$ e assim $a \in X \cdot X^{-1}$. Supondo agora $a > 0$, seja $b \in X$; $b > 0$ e n o menor natural tal que $b \cdot (a^{-1})^n \in X^{\complement}$; como $0 < a < 1$ temos $a^{-1} > 1$ e assim existe o menor n que cumpre essa condição. Tomemos então:

$$c = b \cdot (a^{-1})^{n-1} \quad , \quad d = b \cdot (a^{-1})^n$$

Pela escolha do n temos que $c \in X$ e $d \in X^{\complement}$. Seja $e > c$, $e \in X$ tomando $f = d^{-1} \cdot e^{-1} \cdot c$ temos que:

$$c < e \Rightarrow 1 < e \cdot c^{-1} \Rightarrow d < d \cdot e \cdot c^{-1} = f^{-1} \Rightarrow d < f^{-1}$$

Como $d \in X^{\complement}$ então $f^{-1} \in X^{\complement}$. Podemos concluir então que:

$$e \cdot f = e \cdot d^{-1} \cdot e^{-1} \cdot c = b^{-1} \cdot a^n \cdot b \cdot a^{1-n} = a$$

Portanto por tudo foi descrito acima o número a pode ser escrito como produto de dois termos não negativos, pertencentes respectivamente a X e a X^{-1}, logo $a \in X \cdot X^{-1}$ e com isso temos $R_1 \subset X \cdot X^{-1}$. Portanto se $X \in \mathbb{D}^+$ então existe X^{-1} tal que $X \cdot X^{-1} = R_1$. Vejamos agora o caso em que $X \subsetneq R_0$, utilizando a definição de multiplicação, usando também o fato que $X \subsetneq R_0 \Rightarrow X^{-1} \subsetneq R_0$ e o que foi provado a pouco; temos:

$$X \cdot X^{-1} = |X| \cdot |X^{-1}| = |X| \cdot |-(|X|^{-1})| = |X| \cdot |X|^{-1} = R_1$$

Logo para cada $X \in \mathbb{D} - R_0$ exite o seu simétrico multiplicativo.

Distributividade

Vejamos inicialmente o caso em que $X, Y, Z \in \mathbb{D}^+$. Provemos então que $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$, seja $a \in ((X + Y) \cdot Z)$ então se $a < 0$ por definição teremos $a \in (X \cdot Z + Y \cdot Z)$, se $a = 0$ então $a = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$ e como $0 \in X, Y$ e Z temos que $a \in (X \cdot Z + Y \cdot Z)$. Supondo agora $a > 0$ então existem $b \in ((X + Y)$ e $c \in Z$ tais que $a = b \cdot c$ com $b > 0$, $c > 0$. Como $b \in (X + Y) \Rightarrow b = d + e$ com $d \in X$ e $e \in Y$, assim;

$$a = b \cdot c = (d + e) \cdot c = d \cdot c + e \cdot c$$

Basta provar que $d \cdot c \in X \cdot Y$ e $e \cdot c \in Y \cdot Z$, se $d \cdot c < 0$ então por definição $d \cdot c \in X \cdot Z$, por outro lado se $d \cdot c \geq 0 \Rightarrow d \geq 0$ pois $c > 0$ então por definição

de multiplicação de cortes temos $d \cdot c \in X \cdot Z$. Analogamente temos $e \cdot c \in Y \cdot Z$ e portanto vale a inclusão $(X+Y) \cdot Z \subset X \cdot Z + Y \cdot Z$.
Vejamos agora a outra inclusão, seja $a \in (X \cdot Z + Y \cdot Z)$, se $a < 0$ então por definição $a \in (X+Y) \cdot Z$, se $a = 0$ então $a = (0+0) \cdot 0$ e como $0 \in X, Y, Z$ então por definição de adição e multiplicação de cortes teremos $a \in (X+Y) \cdot Z$. Supondo agora $a > 0$ existem $b \in X \cdot Z$ e $c \in Y \cdot Z$ tais que $a = b + c$ como $a > 0$ então $b > 0$ ou $c > 0$. Supondo $b > 0$ então por definição existem $d \in X$, $e \in Z$ tais que $b = d \cdot e$, $d > 0$, $e > 0$. Pela tricotomia dos números racionais analisaremos três casos quanto ao valor de c:

1. Se $c > 0$ então existem $f \in Y$ e $g \in Z$ tais que $c = f \cdot g$ com $f > 0$, $g > 0$. Supondo $g \leq e$, o caso $g > e$ é análogo a este, temos que:
$$a = d \cdot e + f \cdot g = (d + f \cdot \frac{g}{e}) \cdot e$$
Como $\frac{g}{e} \leq 1$ temos que $f \cdot \frac{g}{e} \in Y$ assim segue das definições das operações que $a \in (X+Y) \cdot Z$.

2. Se $c = 0$ então tomando $d \in Y \cdot Z$ tal que c, d e como $a = b + c$ temos que $a = b + c < b + d$ e pelo caso anterior $(b+d) \in (X+Y) \cdot Z$ e portanto $a \in (X+Y) \cdot Z$.

3. Se $c < 0$ então escrevemos $a = d \cdot e + c = (d + c \cdot e^{-1}) \cdot e$ como $c \cdot d^{-1} < 0$ segue que $c \cdot e^{-1} \in Y$ e portanto segue das definições de operações que $a \in (X+Y) \cdot Z$.

Os demais casos em que temos algum X, Y ou Z não positivo decorre diretamente desse caso ou segue uma demonstração análoga a esta, assim podemos concluir que é válida a distributividade.
Assim o conjunto de cortes de Dedekind munido com as operações de adição e multiplicação é um corpo.

3.4 O conjunto $\mathbb{D}$ é um corpo ordenado

Já utilizado e conhecido o conjunto $\mathbb{D}^+ \subset \mathbb{D}$ dos cortes positivos, basta apenas demonstrar as seguintes propriedades desse conjunto:

1. Se $X, Y \in \mathbb{D}^+$ então $X + Y \in \mathbb{D}^+$

2. Se $X, Y \in \mathbb{D}^+$ então $X \cdot Y \in \mathbb{D}^+$

3. Dado $X \in \mathbb{D}$ então ocorrerá um dos três casos: $X \in \mathbb{D}^+$ ou $X = R_0$ ou $-X \in \mathbb{D}^+$

Após demonstramos esses fatos estabeleceremos a ordem.
Demonstração.

1. $X, Y \in \mathbb{D}^+ \Rightarrow R_0 \subsetneq X$ e $R_0 \subsetneq Y \Rightarrow R_0 \subsetneq X \cup Y \subset X + Y$ portanto $R_0 \subsetneq X + Y \Rightarrow X + Y \in \mathbb{D}^+$.

2. Por definição $X \cdot Y = \{a \in \mathbb{Q}; a < 0 \, ou \, a = b \cdot c, b \in X, c \in Y, b \geq 0, c \geq 0\}$ portanto $R_0 \subsetneq X \cdot Y \Rightarrow X \cdot Y \in \mathbb{D}^+$.

3. Supondo $X \in \mathbb{D}$ tal que R_0 não é subconjunto próprio de X, então $a \in X \Rightarrow a \leq 0$, pois X é corte. Assim temos que $X \subset R_0$ portanto $X = R_0$ ou é subconjunto próprio do mesmo, caso ocorra o segundo caso $0 \in -X$ e assim $R_0 \in -X$ logo $-X \in \mathbb{D}^+$.

Essas três propriedades garantem que o corpo $\mathbb{D}$ é ordenado. Dados $X, Y \in \mathbb{D}$ diremos que X é menor que Y escrevendo $X < Y$ para descrever a seguinte situação $Y - X \in \mathbb{D}^+$. Dessa definição podesse provar todas as propriedades da relação de ordem comumente conhecidas no corpo $\mathbb{Q}$. No capítulo 4 serão demonstradas as principais propriedades dessa relação de ordem nesse corpo ordenado.

3.5 $\mathbb{D}$ é um corpo ordenado completo

Definiremos agora o que é um conjunto de cortes limitado superiormente, seja $A \subset \mathbb{D}$ tal que exista um corte $S \in \mathbb{D}$ onde para todo $X \in A \Rightarrow X \subset S$. Assim sendo o corte S é dito uma cota superior do conjunto de cortes A e caso exista a menor das cotas superiores essa tal cota superior será dita supremo.
Exemplo 3.2. Seja $A = \{X \in \mathbb{D};\, X \subset R_0\}$ afirmamos que R_0 é cota superior do conjunto A e mais que isso também é o supremo do conjunto A.
Demonstração. Pela definição do conjunto A temos que R_0 é cota superior do mesmo. Por outro lado se M é uma cota superior do conjunto A e supondo que R_0 não esteja contido em M então deve existir um número racional $q \in R_0$ tal que q não é elemento de M, todavia $R_q \subset R_0 \Rightarrow R_q \in A \Rightarrow R_q \subset M \Rightarrow q \in M$ contrariando o fato que q não é elemento de M. Portanto qualquer outra cota superior do conjungo A é subconjunto de R_0 e assim R_0 é o supremo de A.

Teorema 3.2. Todo conjunto $A \subset \mathbb{D}$ limitado superiormente tem a propriedade da menor cota superior, ou seja, existe o supremo do conjunto A.

Demonstração. Seja $S = \cup_{X \in A} X$ é claro que todo elemento conjunto A é subconjunto de S e se M é uma cota supeior de A então $X \subset M$ para todo $X \in A$ logo $S = \cup_{X \in A} X \subset M$ e assim $S \subset M$, configurando S como supremo. Precisando verificar ainda se de fato o conjunto S assim definido é um corte, ou seja, $S \in \mathbb{D}$. Vejamos;

1. Como $A \neq \phi \Rightarrow S \neq \phi$. Seja M uma conta Superior de A temos que $S \subset M \Rightarrow M^{\complement} \subset S^{\complement} \Rightarrow S^{\complement} \neq \phi$.

2. Seja $a \in S$ e $b < a$. Assim; $a \in S \Rightarrow \exists X \in S\, ;\, a \in X \Rightarrow b \in X \Rightarrow b \in S$.

3. Seja $a \in S$. Assim; $a \in S \Rightarrow \exists X \in S\, ;\, a \in X \Rightarrow \exists b \in X \subset S\, ;\, b > a \Rightarrow existsb > a\, ;\, b \in S$.

Portanto de fato S é um corte e assim ele é o supremo do conjunto A.
A propriedade da completeza caracteriza o corpo ordenado $\mathbb{D}$ como completo, no próximo capítulo demonstraremos todas as propriedades básicas desse corpo ordenado completo.

Capítulo 4

O corpo ordenado completo $\mathbb{R}$ dos números reais

4.1 Um corpo ordenado completo $\mathbb{K}$

É possível provar via isomorfismos que só existe um corpo ordenado completo, assim tanto o conjunto de Cauchy $\mathbb{S}$ construído no capítulo dois quanto o conjunto dos cortes de Dedekind $\mathbb{D}$ construído no capítulo três são maneiras diferentes de representar o mesmo conjunto. Vejamos antes os teoremas sobre corpos ordenados completos que garantiram esse isomorfismo.

(Christian d'Elbée, 2015) foi referência fundamental às proposições demonstradas a seguir que corroboram com a formulação das mesmas.
Observaremos antes o fato que todo corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ possui uma cópia"dos números naturais, inteiros e racionais em si. Denotando por $1_{\mathbb{K}}$ a unidade do corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ escreveremos:

$$n_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + ... + 1_{\mathbb{K}}$$

ou seja $n_{\mathbb{K}}$ é a soma em $\mathbb{K}$ de n parcelas das unidades de $\mathbb{K}$. Assim temos uma bijeção do entre os naturais e um subconjunto de $\mathbb{K}$ o qual denotaremos por $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$.

Definição 4.1. Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é dito arquimediano se para todo $x \in \mathbb{K}$ existe um elemento $n_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ tal que $x < n_{\mathbb{K}}$. Isso equivale a dizer que para todos $x, y \in \mathbb{K}^+$ existe $n_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ tal que $x < y \cdot n_{\mathbb{K}}$. Demonstrando essa equivalência temos: a priori supondo que o conjunto cópia dos naturais seja ilimitado e dados $x, y \in \mathbb{K}^+$ existe um $n_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ tal que $x \cdot y^{-1} < n_{\mathbb{K}} \Rightarrow x < n_{\mathbb{K}} \cdot y$. A recíproca também é válida, pois supondo que $\mathbb{K}$ tenha essa propriedade de dados quaisquer $x, y \in \mathbb{K}^+$ exista $n_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ com $x < n_{\mathbb{K}} \cdot y$ supondo que a cópia dos naturais $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ não seja limitado existiria um $c \in \mathbb{K}$ tal que $c > n_{\mathbb{K}}$ para todo elemento de $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$, mas tomando $y = 1_{\mathbb{K}}$ e $x = c$ existiria um $n_{\mathbb{K}}$ tal que

$$x < n_{\mathbb{K}} \cdot y \Leftrightarrow c < n_{\mathbb{K}} \cdot 1_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow c < n_{\mathbb{K}}$$

O que contraria a hipótese inicial, portanto $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ é ilimitado superiormente.
Podemos definir agora o conjunto $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ como sendo a cópia dos números inteiros

em $\mathbb{K}$. Assim temos:

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{K}} = \{x \in \mathbb{K}; x \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \quad ou \quad x = 0_{\mathbb{K}} \quad ou \quad x \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}^{-}\}$$

Onde $0_{\mathbb{K}}$ representa o elemento neutro da adição em $\mathbb{K}$ e o conjunto $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}^{-}$ representa o conjunto dos elementos simétricos aditivos dos números cópias dos naturais em $\mathbb{K}$.
Analogamente aos inteiros podemos definir o conjunto cópia dos racionais em $\mathbb{K}$ da seguinte forma:

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = \left\{x \in \mathbb{K}; x = \frac{n_{\mathbb{K}}}{r_{\mathbb{K}}}, n_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}, r_{\mathbb{K}} \in (\mathbb{Z}_{\mathbb{K}} - \{0_{\mathbb{K}}\})\right\}$$

Definição 4.2 Diremos que um cojunto $X \subset \mathbb{K}$ é denso em $\mathbb{K}$ se dados quaisquer $x < y$, com $x, y \in \mathbb{K}$ existe um $r \in X$ tal que $x < r < y$.

Teorema 4.1. O conjunto cópia dos racionais $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é denso em qualquer corpo ordenado arquimediano $\mathbb{K}$.
Demonstração. Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$ distintos, assim podemos supor $x < y$ sem perda de generalidade. Decorre das propriedades de corpo ordenado que são válidas as seguintes equivalências:

$$x < y \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow (y - x)^{-1} > 0$$

Como por hipótese $\mathbb{K}$ é arquimediano temos que existe um $m \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ tal que

$$(y - x)^{-1} < m \Leftrightarrow 1 < my - mx$$

Usando novamente a hipótese do conjunto $\mathbb{K}$ ser arquimediano e considerando no mesmo o princípio da boa ordenação tomemos

$$n = min\{z \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}; mx < z\}$$

Assim temos que $mx < n$ e $n - 1 < mx$, pois n é mínimo. Então temos duas desigualdades a considerar; a primeira é:

$$1 < my - mx \Rightarrow (n - 1) + 1 < my - mx + (n - 1)$$

A segunda desigualdade; é:

$$n - 1 < mx \Rightarrow n - 1 + (my - mx) < mx + (my - mx) \Rightarrow n - 1 + (my - mx) < my$$

Pela transitividade da relação de ordem em $\mathbb{K}$ se tem:

$$(n - 1) + 1 < my \Rightarrow n < my$$

Portanto é válida a seguinte desigualde

$$mx < n < my \Leftrightarrow x < n \cdot m^{-1} < y$$

Tomando $r = nm^{-1}$ temos que $r \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ e $x < r < y$ como queríamos demonstrar, logo o conjunto cópia dos racionais $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é denso no corpo ordenado arquimediano $\mathbb{K}$.
Teorema 4.2. Todo corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ é arquimediano.

Demonstração. Supondo que o conjunto cópia dos naturais $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ seja limitado, pela completeza do corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ deve existir um $m = sup\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$. Assim o elemento $m - 1 \in \mathbb{K}$ não é cota superior do conjunto $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ portanto existe um $n_0 \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ tal que $n_0 > m - 1$ mas isso equivale a $n_0 + 1 > m$, ou seja, existe $p \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ tal que $p = n_0 + 1$ e $p > m$, porém isso contraria o fato de m ser o supremo desse conjunto, logo $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ é um conjunto ilimitado em $\mathbb{K}$ disso concluímos que o corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ também é arquimediano.

4.2 Unicidade do Corpo Ordenado Completo

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo e $\mathbb{D}$ o corpo dos cortes de Dedekind. Definiremos uma aplicação

$$\varphi(x) = C_x \quad com \quad C_x = \{r \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Q}; r < x\}$$

Em diante não faremos distinção explícita sobre os números racionais $\mathbb{Q}$ e os elementos de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$, pois é fácil ver que existe um isomorfismo entre ambos, ademais consideraremos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

Provemos inicialmente que de fato o conjunto C_x é um corte de Dedekind.

1. Se para algum $x \in \mathbb{K}$ o conjunto C_x fosse vazio teríamos que $r \geq x$ para todo r racional, mas isso é um absurdo, pois conjunto dos números racionais não é limitado inferiormente. Portanto C_x é não vazio, analogamente $\mathbb{Q} - C_x$ é não vazio, pois do contrário o conjunto dos números racionais seria limitado superiormente e assim o conjunto $\mathbb{Q} - C_x$ é não vazio para todo $x \in \mathbb{K}$.

2. Seja $s \in C_x$ e $q < s$. Como $s \in C_x$ temos que $s < x$ pela transitividade da relação de ordem temos $q < s\,,\ s < x \Rightarrow q < x$ e portanto $q \in C_x$.

3. Seja $s \in C_x$. Então $s < x$ e como o corpo $\mathbb{K}$ é arquimediano, vide teorema 4.1., existe $r \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ tal que $s < r < x$. Assim $r < x \Rightarrow r \in C_x$ e por outro lado $r > s$. Logo o conjunto $C_x \in \mathbb{D}$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

Provemos agora que de fato a aplicação φ está bem definida. Supondo que $C_x \neq C_y$ deve existir um elemento que pertence a um deles, mas não pertence ao outro conjunto. Supondo sem perda de generalidade que exista $z \in C_x$ tal que z não seja elemento de C_y. Assim temos que $z < x$ e $z \geq y$ pela transitividade da relação de ordem temos $y < x$ isso implica que $x \neq y$. Portanto a aplicação φ está bem definida.

A aplicação φ é bijetiva. Provemos a injetividade da aplicação; sejam C_x, $C_y \in \mathbb{D}$ supondo que $C_x = C_y$, se $x < y$ pela propriedade arquimediana do corpo $\mathbb{K}$ existiria $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$ assim $r \in C_y$, mas r não pertenceria a C_x contrariando a hipótese de que $C_x = C_y$, analogamente se prova que não pode ocorrer de $y < x$, portanto duplamente pela contra-positiva da proposição temos que $C_x = C_y \Rightarrow x = y$ assim a função φ é injetiva.

A aplicação φ é sobrejetiva. Dado um $C \in \mathbb{D}$ temos que $C \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ como o conjunto C é limitado superiormente e o conjunto $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo seja $x = sup(C)$ em $\mathbb{K}$. Afirmamos que $C_x = C$, ou seja, sendo $sup(C) = x \in \mathbb{K}$ então $\varphi(x) = C$.

1. Seja $y \in C_x$, assim $y < x$ supondo que y não seja elemento do corte C isso implica que
$$y \geq sup(C) \Rightarrow y \geq x \Rightarrow y \in (\mathbb{Q} - C_x)$$
Portanto y não pertence ao corte C implica que ele não pertence ao corte C_x usando a contra-positiva temos que se $y \in C_x$ então $y \in C$, assim é válida a inclusão $C_x \subset C$.

2. Seja $y \in C$ isso implica que $y \leq sup(C)$, logo; $y \leq x$. A igualdade não pode ocorrer, pois do contrário $y = sup(C)$ e $y \in C$ acarretaria que $y = max(C)$, mas C é corte e não possui elemento máximo. Portanto $y \in C \Rightarrow y \in C_x$ e assim é válida a inclusão $C \subset C_x$, logo φ é sobrejetiva.

Concluímos assim que a função φ é bijetiva. Demonstraremos agora a correspondência das operações entre os corpos ordenados completos, dados $x, y \in \mathbb{K}$ temos que:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
Demonstração. Pela definição da função φ temos que
$$\varphi(x + y) = C_{x+y} = \{r \in \mathbb{Q}; r < x + y\}$$
por outro lado
$$\varphi(x) + \varphi(y) = C_x + C_y = \{r \in \mathbb{Q}; r = a + b, a \in C_x, b \in C_y\}$$
pela definição de soma de cortes de Dedekind. Então se $s \in \varphi(x + y) \Rightarrow s < x + y$ tomando um $a < x$ e definindo $b = s - a$ basta provar que $b < y$, supondo que $b \geq y$ teriamos:
$$b \geq y \Rightarrow a + b \geq a + y \Rightarrow s \geq a + y \Rightarrow x + y \geq a + y \Rightarrow x \geq a$$
Mas isso contraria a hipótese inicial que $a < x$. Portanto $a \in C_x$, $b \in C_y$ e $s = a + b$ logo $s \in \varphi(x) + \varphi(y)$. Concluímos que a inclusão $\varphi(x + y) \subset \varphi(x) + \varphi(y)$ é verdadeira. Por outro lado se $s \in \varphi(x) + \varphi(y) \Rightarrow s = a + b$ tal que $a \in C_x$ e $b \in C_y$, portanto:
$$s = a + b < x + b < x + y \Rightarrow s \in C_{x+y} \Rightarrow s \in \varphi(x + y)$$
Logo é válida a inclusão $\varphi(x) + \varphi(y) \subset \varphi(x + y)$. Assim temos que $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

2. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.
Demonstração. Demonstraremos o caso em que $C_x, C_y \in \mathbb{D}^+$, os demais casos decorrem deste, observemos que nesse caso $x > 0$ e $y > 0$. Pela definição da função φ temos que
$$\varphi(x \cdot y) = \{r \in \mathbb{Q}; r < x \cdot y\}$$
por outro lado decorre da definição de produto de cortes de Dedekind que
$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \{r \in \mathbb{Q}; r < 0 \quad ou \quad r = a \cdot b, a \in C_x, b \in C_y, a > 0, b > 0\}$$

Então se $s \in \varphi(x \cdot y)$ isso implica que $s < x \cdot y$, temos dois casos a considerar, primeiro: se $r < 0$ então por definição $r \in \varphi(x) \cdot \varphi(y)$. Segundo: se $r > 0$ tomando um $a \in C_x$ tal que $a > 0$ definiremos $b = \dfrac{r}{a}$ então basta provar que $b \in C_y$, supondo que b não pertença a C_y teríamos:

$$b \geq y \Rightarrow a \cdot b \geq a \cdot y \Rightarrow r \geq ay \Rightarrow xy \geq ay \Rightarrow x \geq a$$

Mas isso contraria a hipótese que $a \in C_x$. Portanto $s \in \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ e é válida a inclusão $\varphi(x \cdot y) \subset \varphi(x) \cdot \varphi(y)$. Seja agora $s \in \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ isso implica que; $r < 0$ ou $r = a \cdot b$ com $0 < a \in C_x$, $0 < b \in C_y$. Como x e y são positivos no primeiro caso claramente $s < 0 < x \cdot y$ e portanto $r \in C_{x \cdot y}$, no segundo caso temos:

$$r = a \cdot b < x \cdot b < x \cdot y \Rightarrow r \in C_{x \cdot y} \Rightarrow r \in \varphi(x \cdot y)$$

Concluímos que $\varphi(x) \cdot \varphi(y) \subset \varphi(x \cdot y)$
Pelas inclusões demonstradas acima temos $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

3. $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$
   Demonstração. Supondo $x < y$ temos que:

$$s \in \varphi(x) \Rightarrow s \in C_x \Rightarrow s < x \Rightarrow s < y \Rightarrow s \in C_y \Rightarrow s \in \varphi(y)$$

   Portanto $\varphi(x) \subset \varphi(y)$, mas isso em $\mathbb{D}$ é equivalente a $\varphi(x) < \varphi(y)$.

Concluímos então que a função φ é um isomorfismo do corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ no corpo de Dedekind $\mathbb{D}$. Ademais fazendo $\mathbb{K} = \mathbb{S}$ o corpo ordenado completo de Cauchy teremos um isomorfismo entre o mesmo e o corpo ordenado completo de Dedekind. Assim existe apenas um corpo ordenado completo, a menos de isomorfismo é claro. Adiante denotaremos tal corpo ordenado completo por $\mathbb{R}$ e o chamaremos de conjunto dos números reais, a seguir temos as demonstrações de algumas propriedades usuais dos números reais.

4.3 Propriedades básicas da adição

A seguir, veremos algumas propriedades da operação de adição dos números reais; tais demonstrações, entre outras, podem ser encontradas em (Elon, 2017).
Propriedade 1. Denotando o elemento neutro da adição dos números reais por 0 e dado um elemento $x \in \mathbb{R}$ seja $-x$ o seu simétrico aditivo é válida as seguintes igualdades: $0 + x = x$ e $-x + x = 0$.
Demonstração. $0 + x = x + 0$ pela propriedade comutativa da adição, por outro lado $x + 0 = x$ pois 0 é o elemento neutro da adição, então; $0 + x = 0$ pela transitividade da relação de igualdade. A outra igualdade é inteiramente análoga.

Propriedade 2. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ e definindo $x + (-y) = z$ como sendo $x - y = z$ temos que $x - y = z \Leftrightarrow x = y + z$.
Demonstração. $x - y = z \Leftrightarrow (x-y)+y = z+y$ pois podemos somar em ambos os membros da equação o mesmo valor y, $(x-y)+y = z+y \Leftrightarrow x+(-y+y) = z+y$ devido a propriedade associativa da adição, $x+(-y+y) = z+y \Leftrightarrow x+0 = z+y$

devido a segunda parte da propriedade um, $x + 0 = z + y \Leftrightarrow x = z + y$ pois 0 é elemento neutro da adição.

Propriedade 3. Unicidade do elemento neutro da adição. Se dados $x, \theta \in \mathbb{R}$ tivermos $x + \theta = x$ então $\theta = 0$. Demonstração; decorre da propriedade dois que $x + \theta = x \Leftrightarrow \theta = x - x$ portanto $\theta = 0$, ou seja, só existe um único elemento neutro para a adição.

Propriedade 4. Unicidade do elemento simétrico aditivo. Se dados $x, y \in \mathbb{R}$ tivermos $x + y = 0$ então $y = -x$. Demonstração; decorre da propriedade dois que $x + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 - x$ mas $0 + (-x) = (0 - x)$ e portanto $y = 0 - x = 0 + (-x) = -x \Rightarrow y = -x$. Como queriamos demonstrar.

Propriedade 5. A propriedade de tomar o simétrico aditivo é idempotente, ou seja, dado $x \in \mathbb{R}$ temos que $-(-x) = x$. Demostração; decorre da propriedade um e da propriedade quatro que dado $x \in \mathbb{R}$ temos $-x + x = 0 \Leftrightarrow x = -(-x)$, assim o simétrico aditivo do simétrico aditivo de $x \in \mathbb{R}$ é o próprio número real x.

Propriedade 6. Lei do corte. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ se $x + z = y + z$ então $x = y$. Demonstração $x + z = y + z \Rightarrow (x + z) - z = (y + z) - z$ e pela propriedade associativa da adição temos $x + (z - z) = y + (z - z)$ portanto $x + 0 = y + 0 \Rightarrow x = y$.

4.4 Propriedades básicas da multiplicação

Propriedade 1. Denotando o elemento neutro da multiplicação dos números reais por 1 e dado um elemento $0 \neq x \in \mathbb{R}$ seja x^{-1} o seu simétrico multiplicativo é válida as seguintes igualdades: $1 \cdot x = x$ e $x^{-1} \cdot x = 1$. Demonstração: $1 \cdot x = x \cdot 1$ pela propriedade comutativa da multiplicação, por outro lado $x \cdot 1 = x$ pois 1 é o elemento neutro da multiplicação, então; $1 \cdot x = x$ pela transitividade da relação de igualdade. A outra igualdade é inteiramente análoga.

Propriedade 2. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, como $y \neq 0$ e definindo $x \cdot y^{-1} = z$ como sendo $\frac{x}{y} = z$ temos que $\frac{x}{y} = z \Leftrightarrow x = y \cdot z$. Demonstração: $\frac{x}{y} = z \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right) \cdot y = z \cdot y$ pois podemos multiplicar em ambos os membros da equação o mesmo valor y, $(x \cdot y^{-1}) \cdot y = z \cdot y \Leftrightarrow x \cdot (y \cdot ^{-1}) = z \cdot y$ devido a propriedade associativa da multiplicação, $x \cdot 1 = z \cdot y$ pois 1 é o elemento neutro da multiplicação, portanto temos que $\frac{x}{y} = z \Leftrightarrow x = y \cdot z$.

Propriedade 3. Lei do corte. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ com $0 \neq z$ se tivermos $x \cdot z = y \cdot z$ então $x = y$.
Demonstração.

$$x \cdot z = y \cdot z \Leftrightarrow (x \cdot z) \cdot z^{-1} = (y \cdot z) \cdot z^{-1} \Leftrightarrow x \cdot (z \cdot z^{-1}) = y \cdot (z \cdot z^{-1}) \Leftrightarrow x \cdot 1 = y \cdot 1 \Leftrightarrow x = y$$

Propriedade 4. Unicidade do elemento neutro da multiplicação. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \cdot y = x$. Temos dois casos a considerar; primeiro: se a igualdade $x \cdot y = x$ for válida para todo $x \in \mathbb{R}$ e um $y \in \mathbb{R}$ qualquer então tomando $x = 1$ temos que $1 \cdot y = 1 \Rightarrow y = 1$, segundo: se $x \cdot y = x$ para um $x \in \mathbb{R}$ qualquer então se $x \neq 0$ teremos que $x \cdot y = x = x \cdot 1$ e pela lei do corte teremos $y = 1$, mas caso $x = 0$ então y pode assumir qualquer valor real, pois como veremos a seguir $0 \cdot x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Propriedade 5. Unicidade do elemento simétrico multiplicativo. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ se $x \cdot y = 1$ então $y = x^{-1}$.
Demonstração. Se $x \cdot y = 1$ então $x \neq 0$ e $y \neq 0$, fato esse a ser demonstrado, então existe x^{-1} portanto $x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot$, por associatividade da multiplicação e propriedade o elemento neutro da multiplicação temos $(x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1}$, assim $1 \cdot y = x^{-1} \Rightarrow y = x^{-1}$.

4.5 Outras propriedades usuais e as regras dos sinais

Propriedade 6 Para todo $x \in \mathbb{R}$ é válida a igualdade $0 \cdot x = 0$.
Demonstração. $0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0+1) \cdot x = 1 \cdot x = x$ pois é válida a distributividade e pela unicidade do elemento neutro da adição temos que $0 \cdot x = 0$.

Propriedade 7. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \cdot y = 0$ então temos que $x = 0$ ou $y = 0$.
Demonstração. se $x \cdot y = 0$ e supondo $x \neq 0$ então existe o simétrico multiplicativo x^{-1} consequentemente teremos $x \cdot y = 0 \Rightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0$ pelas propriedade associativa da multiplicação e propriedade um temos: $(x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0$ portanto $1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Propriedade 8. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ temos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$.
Demonstração. $x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y - y = x \cdot 0 = 0)$ isso decorre da distributividade e da propriedade um desta seção decorre ainda da unicidade do elemento simétrico aditivo que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. A segunda igualdade é totalmente análoga a esta.

Propriedade 9. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ é válida a igualdade $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
Demonstração. basta aplicarmos a propriedade três jutamente com a propriedade cinco da seção um, assim; $(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y$.

4.6 Propriedades básicas da relação de ordem

Propriedade 10. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$ temos que $x^2 \in \mathbb{R}^+$, onde R^+ é o conjunto dos números reais positivos.

Demonstração. se $x \in \mathbb{R}^+$ então $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$ por propriedade do fechamento da multiplicação no conjunto $\mathbb{R}^+$, do contrário teremos $-x \in \mathbb{R}^+$ e assim $(-x) \cdot (-x) \in \mathbb{R}$, mas vimos na propriedade quatro da seção anterior que $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$ e portanto como $x \cdot x = x^2$ temos nesse caso também que $x^2 \in \mathbb{R}^+$.

Propriedade 11. Transitividade. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.
Demonstração. $x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$ e $y < z \Leftrightarrow z - y \in \mathbb{R}^+$ portanto pela propriedade do fechamento da adição no conjunto $\mathbb{R}^+$ temos; $z - x = z + (-y + y) - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{R}^+$ e portanto $x < z$, pois $z - x \in \mathbb{R}^+$.

Propriedade 12. Lei do corte. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ se $x + z < y + z$ então $x < y$.
Demonstração. Por definição temos $x + z < y + z \Leftrightarrow (y + z) - (x + z) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x < y$.

Propriedade 13. Tricotomia. Dado $x, y \in \mathbb{R}$ teremos que $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$.
Demonstração. considerando o número real $y - x$ temos três casos; $y - x \in \{0\} \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow y = x$ ou $y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow (y - x) + x > 0 + x \Rightarrow y > x$ ou $-(y - x) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -(y - x) > 0 \Rightarrow (x - y) - (x - y) < (x - y) + 0 \Rightarrow 0 < x - y \Rightarrow y < x$.

4.7 Completeza de $\mathbb{R}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, como já foi provado, possui a propriedade da menor cota superior. Essa propriedade é de fundamental importância para análise real, pois a mesma está relacionada com a noção de limites de sequências de números reais. Ideia essa que acarreta no conceito de limites de funções e assim de derivadas, integrais, etc. Concluímos que a construção rigorosa desses números possibilitou a base sólida matemática necessária para a exploração de novos horizontes na matemática moderna, corroborando na construção axiomática da análise real entre outras áreas.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática Para Licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

[2] AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina Sequeiros. **A Construção dos Números Reais e Suas Extensões**. Rio de Janeiro: UFF, 2015.

[3] Christian d'Elbée. ON THE COMPLETE ORDERED FIELDS. 2013. 53. University Bordeaux 1 , Manchester, Reino Unido.

[4] DOMINGUES, Hygino; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

[5] FERREIRA, Jamil. **A construção dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[6] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de Álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[7] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Àlgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[8] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Vol. 1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[9] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[10] NERI, Cássio; CABRAL, Marcos. **Curso de Análise Real**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2010.

[11] NETO, Antônio Caminha Muniz. **Fundamentos de Cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[12] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.