UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MANOEL DE JESUS QUARESMA SAGICA

UTILIZANDO OS POLIMINÓS NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

BELÉM – PARÁ

2018

MANOEL DE JESUS QUARESMA SAGICA

UTILIZANDO OS POLIMINÓS NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT na Universidade Federal do Pará – UFPA, para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias.

BELÉM – PARÁ

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Qusresma Sagica, Manoel de Jesus
UTILIZANDO OS POLIMINÓS NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA / Manoel de Jesus Qusresma Sagica. — 2018
101 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias

1. Poliminós. 2. Geometria Plana. 3. Área. 4. Perímetro. I. Farias, Valcir João da Cunha , *orient.* II. Título

---

CDD 510

MANOEL DE JESUS QUARESMA SAGICA

UTILIZANDO OS POLIMINÓS NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias.

Aprovado em: 15/06/2018

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias – PROFMAT/ICEN/UFPA
Orientador

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo – PROFMAT/ICEN/UFPA
Membro

Edilberto Oliveira Rozal

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Rozal – FAC. DE MATEMÁTICA/UFPA
CASTANHAL
Membro

Prof. Dr. João Furtado de Souza – FACULDADE DE FÍSICA/ICEN/UFPA
Membro

DEDICATÓRIA

Dedico está Dissertação de Mestrado a meus pais, filhos e a minha esposa pelo apoio incondicional e constante incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus por me ter dado saúde, força, perseverança, paciência e principalmente humildade para concluir com êxito esse mestrado e a meus pais que me deram os ensinamentos necessários para viver a minha vida com amor, respeito, humildade, responsabilidade, respeito, disciplina, coragem e confiança.

Um agradecimento muito especial à minha família e de forma muito carinhosa a minha esposa que sempre me incentivou e me ajudou em todos os momentos que precisei, e a meus filhos, pela compreensão em minhas ausências e faltas.

Aos meus amigos da turma PROFMAT-2016 pelos laços de amizades estabelecidos durante o curso, pelo trabalho colaborativo, pelas trocas de conhecimentos acerca das disciplinas e a todos os professores que contribuíram de forma significativa para o meu aprimoramento e sucesso no PROFMAT e também pelo apoio incondicional da coordenação do curso e em especial a professora Carmem.

Aos meus colegas de trabalho que me incentivaram a continuar, mesmo quando parecia não ter condições de acompanhar, em especial a professora Cledi que muito me incentivou e orientou em alguns aspectos no decorrer do curso.

Um agradecimento especial ao professor e orientador Dr. Valcir João da Cunha Farias pela ajuda incondicional, incentivo, apoio e orientações necessárias para um bom andamento e desenvolvimento dessa dissertação de Mestrado.

Pela grande ajudada da CAPES como incentivadora financeira durante o decorrer do curso e a SBM pela iniciativa inovadora de qualificar os professores de Matemática de todas as regiões do Brasil.

“Tudo em minha vida devo a Deus”

RESUMO

Diante das dificuldades apresentadas pelos educandos no campo geométrico, mais especificamente na construção do conceito de área e a dissociação entre área e perímetro, o autor viu-se na necessidade em fazer uso dos poliminós para o Ensino de Geometria Plana no Ensino Básico, onde espera-se que os alunos venham a assimilar alguns conceitos da Geometria. Utiliza-se como estratégias no ensino de área e perímetro algumas técnicas de composição e decomposição com as peças dos poliminós, como a distinção entre figura e área, medida e área e a distinção de área e perímetro. Aborda-se alguns Teoremas que serão utilizados na resolução de alguns problemas geométricos com poliminós. Foram selecionados alguns problemas resolvidos, onde mostra-se como aplicar os conceitos e as técnicas e no final são apresentados, também, alguns problemas para que o leitor possa aplicar as técnicas aqui apresentadas. Na elaboração deste trabalho promoveu-se uma detalhada revisão bibliográfica por meio de consulta em livros, teses, dissertações, artigos e Olimpíadas de Matemática Nacionais que tratam desse assunto.

Palavras-chave: Poliminós. Geometria Plana. Área. Perímetro.

ABSTRACT

In the face of difficulties presented by educators in the geometry field, more specifically in area concept building and in dissociation between geographical area and perimeter, the author needed to use polyominoes to teach plane geometry in elementary and high school, level in which students are supposed to learn some geometric concepts. In order to teach geographical area and perimeter, some strategies such as techniques of composing and decomposing using polyominoes pieces, the distinction between figure and area, measure and area, and the distinction between area and perimeter. The author approaches a few theorems that will be used to resolve geometric problems with polyominoes. Quite a few of those problems are selected to demonstrate how to apply the concepts and the techniques, furthermore, some other problems are presented to the reader, so they can apply the techniques introduced. A detailed literature review was made in this paper elaboration by researching books, master thesis, doctoral thesis, articles and national mathematics contests that are related to this subject.

Keywords: polyominoes. Plane Geometry. Area. Perimeter

.

LISTA DE TABELAS

LISTAS DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os conhecimentos de geometria plana são de grande importância para a sociedade, e por essa razão desperta o interesse dos professores de Matemática no sentido de se aprimorarem nesta área. Utilizando-se de ferramentas educativas para auxiliar esses educadores na perspectiva de despertar o interesse e a participação dos seus educandos de maneira que adquiram autonomia e embasamento teórico de modo a relacionar os conteúdos trabalhados em sala de aula com o cotidiano.

De acordo com os PCNS (Brasil, 1998, p. 51),

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.

As novas tendências pedagógicas relacionadas ao ensino da Matemática propõem estratégias de ação que servem de auxílio no processo de ensino da geometria plana, assim como indicam formas de atuar no desenvolvimento de habilidades dos alunos.

Segundo os PCNS [4], a Geometria não tem tido um destaque necessário nas aulas de Matemática e, algumas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu descaso, ela desempenha um papel de fundamental importância no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que ele vive. [4]

Nesse contexto, os recursos pedagógicos devem propiciar a busca da melhoria na qualidade de ensino, através de experiências lúdicas e motivadoras que são de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico, o estímulo ao pensamento independente, o exercício da criatividade, como também à melhoria da capacidade de resolver problemas.

Diante da gama de conhecimentos e experiência que o professor de Matemática têm hoje e em consonância com as técnicas de resolução de problemas, a tecnologia da informação, jogos matemáticos e a história da matemática, ele consegue criar algumas possibilidades metodológicas de estratégias de ensino na construção do saber matemático em sua sala de aula.

De acordo com os PCNS [4],

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Para corroborar com esses procedimentos matemáticos, pretende-se dar ênfase ao ensino dos poliminós, que são figuras planas construídas unindo-se polígonos básicos idênticos, acredita-se que tais ferramentas apontará um direcionamento para construção e exploração de figuras e conceitos geométricos planos, tais como: polígonos, perímetro, área, congruência, semelhança, ladrilhar planos, entre outros...

Segundo os PCNS [4], no que tange o campo das figuras geométricas, há várias possibilidades de se trabalhar esse assunto. Dá para desenvolver atividades que explorem a composição e a decomposição de figuras planas, como por exemplo ladrilhamentos, tangrans, poliminós, etc., espera-se que os alunos percebam que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras, como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos, hexágonos regulares. Assim como a descoberta de que toda figura poligonal pode ser composta/decomposta por outra e, em particular por quadrados, o que pretende-se facilitar o cálculo de áreas. [4]

Nosso principal objetivo nesse trabalho é apresentar formas de utilização metodológica dos recursos e ferramentas dos poliminós na resolução de problemas de Geometria Plana. Nesse sentido propõem-se promover uma detalhada revisão bibliográfica por meio de consulta em livros, teses, dissertações, artigos e Olimpíadas de Matemática Nacionais que tratem desse assunto; apresentar alguns Teoremas onde, espera-se dá embasamento para a resolução de alguns problemas e destinase um capítulo dessa dissertação para elaborar, manipular e adotar em conjunto com a revisão bibliográfica problemas com suas resoluções, onde aborda-se o uso dos poliminós na Geometria Plana na Educação Básica.

Com as técnicas e métodos que serão abordados sobre os poliminós, acredita-se que os educandos da educação básica consigam relacionar e interpretar alguns conceitos da Geometria Plana que sejam pertinentes à formação escolar, onde espera-se favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento estratégico e a criatividade.

Atingindo os objetivos propostos, espera-se contribuir com professores e alunos na compreensão dos conceitos e na aquisição de técnicas de percepção visual, além de promover nos educandos a importância do trabalho coletivo e colaborativo, na perspectiva de um melhor aproveitamento das atividades proposta para eles desenvolverem e aplicarem no cotidiano.

Espera-se que os professores de Matemática utilizem-se essa proposta metodológica com o uso dos poliminós em suas aulas de geometria plana com seus educandos da Educação Básica.

Para auxiliar na leitura deste trabalho apresentemo-los da seguinte ordem, no capítulo 2 (FUNDAMENTAÇAO TEÓRICA), dar-se início fazendo um resgate histórico da Geometria Plana, em seguida apresenta-se alguns conceitos geométricos básicos como: o plano cartesiano, polígonos, área e perímetro de figuras planas. No capítulo 3 (POLIMINÓS) inicia-se com a parte histórica dos poliminós, e em seguida define-se os poliminós, monominós, dominós, etc., autorreplicarão e pavimentação.

No capítulo 4 (POLIMINÓS NO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA) apresenta-se metodologias de ensino de Geometria Plana com os poliminós, no capitulo 5 (EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DOS POLIMINÓS NO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA), seleciona-se quinze exemplos de aplicação com os poliminós, em seguida apresenta-se as (CONSIDERAÇOES FINAIS), as (REFERENCIAS BÁSICAS) e por fim em (ANEXO) seleciona-se mais 15 problemas propostos sobre os poliminós.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Introdução

A geometria vem sendo discutida desde os primórdios da História da Matemática por grandes pensadores como: Aristóteles, Platão, Pitágoras entre outros. Portanto nós não podemos afirmar, a partir de qual período ela foi criada, pois diversos historiadores tem concepções distintas de como, quando e onde a Geometria foi originada. Sendo assim deve-se apoiar esse resgate histórico em documentos que surgiram a partir do advento da escrita. [8]

Dentro dessa perspectiva, nota-se que grande parte dos historiadores afirmam que a Geometria surgiu no antigo Egito, porém outros povos já tinham algum conhecimento de natureza geométrica. Se presume que os chineses e indianos tenham aplicados conhecimentos geométricos semelhantes aos gregos. [8]

Dentre algumas teorias que relatam qual foi a razão pela qual se motivou estudar Geometria, duas delas são norteadas pelos pensadores Heródoto e Aristóteles. De acordo com Boyer [9]

> as ideias divergiam pois Heródoto acreditava que começou-se a pensar em Geometria a partir das necessidades do dia a dia, principalmente no âmbito da construção e medição de terras. Já Aristóteles dizia que a Geometria surgiu de uma pratica sacerdotal, ou seja, por lazer. Dito isso, faz sentido imaginar que o processo de desenvolvimento da Geometria pode ter tido origem conforme o pensamento de Heródoto, e posteriormente estimulando outros pensadores a aprofundar os estudos. [9]

Fazendo-se as devidas observações e indagações no mundo físico, o ser humano descobre algumas propriedades e relações espaciais que levaram à noção de lei ou regra geométrica, abrindo caminho para o desenvolvimento dos conceitos geométricos.

Os pitagóricos se aprimoraram desse conhecimento, fundamentando-o no raciocínio dedutivo, dando origem a uma geometria sistemática, e, por volta do ano 300 a.c., Euclides organizou todo o conhecimento geométrico acumulado até então, dando corpo à uma geometria axiomática. [13]

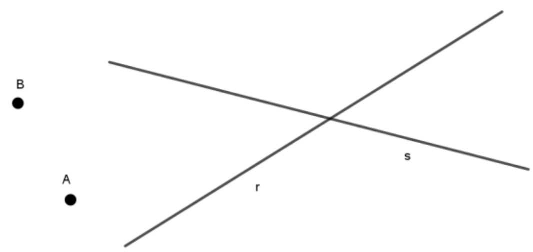
Passados alguns séculos, o modelo euclidiano conservou-se como principal referencial para o ensino escolar da geometria, e de forma a privilegiar as formalizações e abstrações em detrimento dos aspectos intuitivos e do movimento que leva à constituição dos conceitos geométricos. [13]

Assumindo conhecido os conceitos de Geometria Euclidiana Plana, porém alguns deles serão definidos para entender sua descrição analítica e também no intuito de fixar notações.

2.2 Conceitos Geométricos Básicos

O leitor certamente tem uma boa ideia, a partir das experiências diárias, intuitiva do que vem ser os conceitos de um ponto, ou uma reta ou um plano. Portanto, vamos assumir como conceitos primitivos, ou seja, aqueles que são aceitos sem definições formais. Assumiremos ainda, que toda reta é um conjunto de (pelo menos dois) pontos. [8]

Figura 2.1: pontos e retas no plano

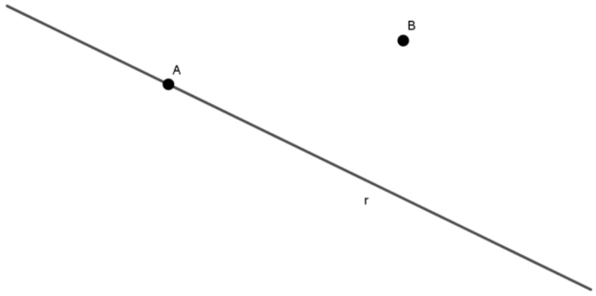


Fonte: O Autor

Na Figura 2.1, temos os ponto A e B e as retas r e s (em geral, denotaremos pontos por letras latinas maiúsculas e retas por letras latinas minúsculas).

Dados, no plano, um ponto **P** e uma reta **r**, só há duas possibilidades: ou o ponto P pertence à reta r ou não; no primeiro caso, escrevemos $P \in r$ (lê-se P pertence a reta r) e, no segundo caso, escrevemos P∉ r (lê-se P não pertence a reta r). Na Figura 2.2, temos A∈ r e B∉ r. [8]

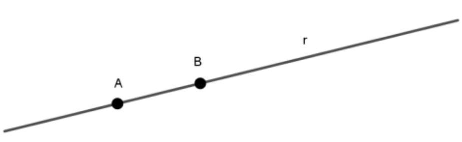
Figura 2.2: posições relativas de pontos e reta.



Fonte: O Autor

Agora, é natural nos perguntarmos sobre quantas retas podem ser traçadas por dois pontos dados. Assumiremos que podemos traçar exatamente uma reta. Em resumo, por dois pontos distintos A e B do plano, podemos traçar uma única reta (Figura 2.3).

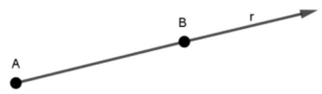
Figura 2.3: dois pontos determinam uma única reta.



Fonte: O Autor

Um ponto A, situado sobre uma reta r, divide essa reta em dois pedaços, quais sejam, as semirretas de origem A, escolhendo pontos B e C sobre r, um em cada um de tais pedaços, podemos denotar as semirretas de origem A por ($\overrightarrow{AB}$). Na Figura 2.4, mostraremos a porção da reta r correspondente à semirreta $\overrightarrow{AB}$. [8]

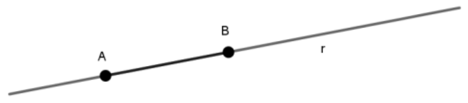
Figura 2.4: semirreta $\overrightarrow{AB}$ de origem em A.



Fonte: O Autor

Dados dois pontos A e B sobre uma reta r, o segmento AB é a porção da reta r situada de A até B, Figura 2.5 abaixo. Escrevemos ($\overline{AB}$) para denotar o comprimento do segmento AB (que será medido em centímetros). Para verificar se dois segmentos dados no plano são iguais, ou seja, se ambos têm comprimentos iguais ou, caso contrário, qual deles é maior, podemos usar um compasso, transportando um dos segmentos para a reta determinada pelo outro segmento. [8]

Figura 2.5: segmento de reta $\overline{AB}$

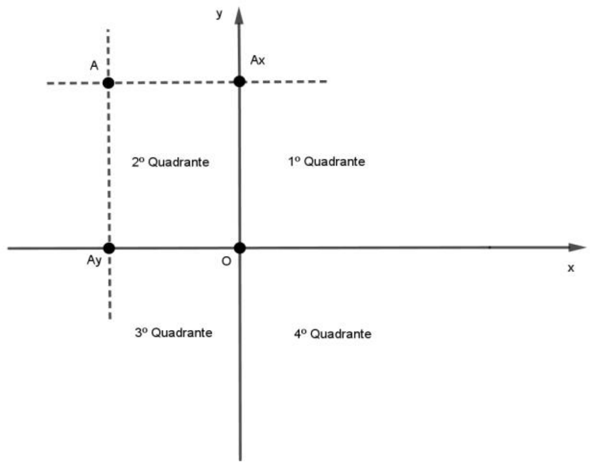


Fonte: O Autor

2.3 O Plano Cartesiano

Trace em um plano duas retas perpendiculares “x” e “y”, que se intersectam no ponto O. considere, em seguida, como copias de ($\mathbb{R}$), escolhendo uma mesma unidade de medida para ambas e fazendo O corresponder a 0 (zero) em ambas. Ficam, assim, determinadas sobre cada uma de tais retas duas semirretas, uma positiva e outra negativa, com a convenção de que, em cada uma delas, a semirreta positiva é indicada por meio de uma pequena seta (na Figura 2.6 supomos, por comodidade, que “x” é horizontal e “y” é vertical em relação ao plano do desenho). Sendo assim, as setas x e y dividem o plano em quatro regiões (angulares), cada uma das quais determinada pelos semieixos das retas x e y que a delimitam. Denominamos essas regiões de “quadrantes”, os quais são numerados do 1º (primeiro) ao 4º(quarto), conforme a convenção de eixos da Figura 2.6; em particular, o ponto A marcado na mesma se encontra no segundo quadrante. [8]

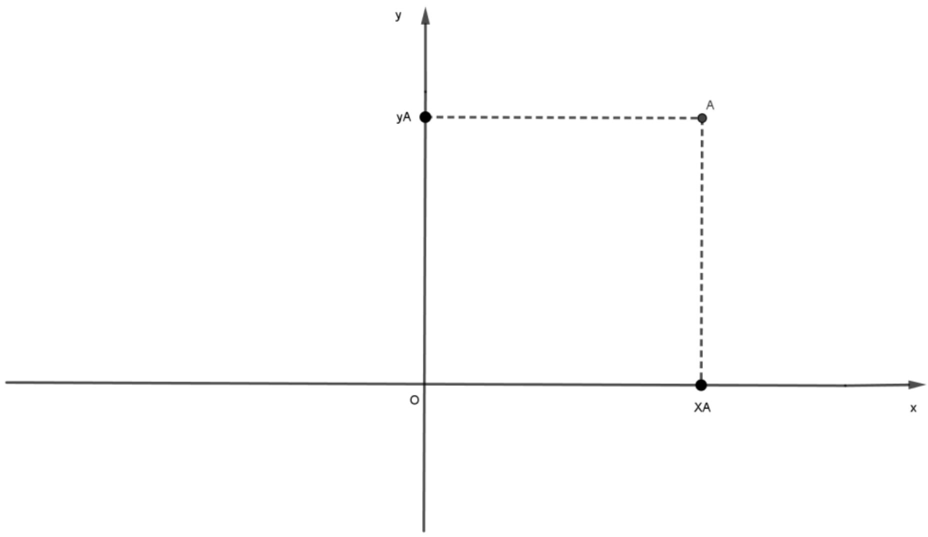
Figura 2.6: construção do plano cartesiano



Fonte: O Autor

Uma vez que as retas x e y estão sendo consideradas como copias de $\mathbb{R}$, as projeções A_x e $A_y$do ponto A sobre x e y correspondem aos números reais x_A e y_A, respectivamente, os quais determinam o ponto A (dessa forma x_A e y_A determinam os pontos A_x e A_y). Neste caso, convenciona-se a escrever A(x_A,y_A), ver Figura 2.7 abaixo. [8]

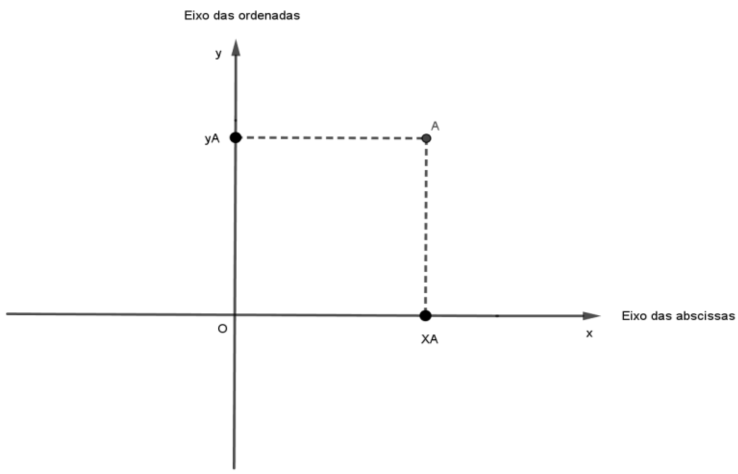
Figura 2.7: construção do plano cartesiano



Fonte: O Autor

Em geral, fixadas em um plano de retas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ perpendiculares entre si no ponto O, e escolhidas em cada uma delas semirretas positivas de origem O, dizemos que o plano está composto de um "sistema de coordenadas Cartesianas" xOy ou, ainda, que o plano Euclidiano transformou-se em um "plano Cartesiano". Para o ponto A(x_A,y_A) do plano, dizemos que x_A e y_A são as coordenadas Cartesianas do ponto A. dentro desse contexto, o número real x_A é a coordenada x ou a abscissa de A, e o número real y_A é a coordenada y ou a ordenada do ponto A. assim, as retas x e y são respectivamente denominadas de **eixo $\boldsymbol{x}$** ou **eixo das abscissas** e **eixo $\boldsymbol{y}$** ou **eixo das ordenadas** do sistema de coordenadas Cartesianas em questão. [8]

Figura 2.8: construção do plano cartesiano xOy



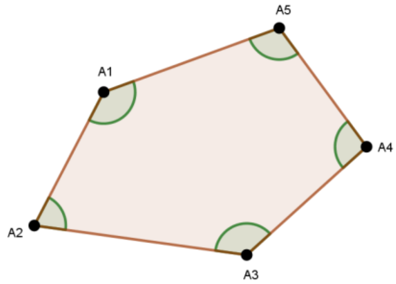
Fonte: O Autor

De forma particular, os pontos situados sobre os eixos x e y tem coordenadas Cartesianas respectivamente escritos na forma (x_0,0) e (0,y_0); o ponto O, que representa 0 (zero) em ambos os eixos, tem no sistema Cartesiano sob consideração, ambas as coordenadas iguais a zero, isto é, O(0,0). [8]

2.4 Polígonos

Definição 2.1: sejam n ≥ 3 um numeral e A_1, A_2, A_3..., A_n pontos distintos do plano. Dizemos que A_1, A_2, A_3..., A_n é um polígono convexo se, para 1 ≤ i ≤ n, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina, sendo assim, segue que, $A_0 = A_n$ e $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$. Na Figura 2.9 abaixo, representamos um polígono convexo de cinco vértices. [8]

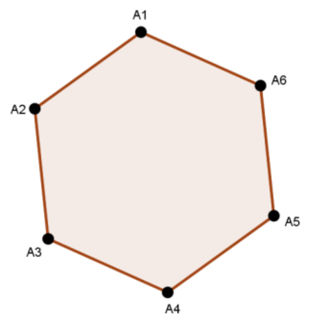
Figura 2.9: um polígono convexo de cinco (vértices e lados).



Fonte: O Autor

Os pontos A_1, A_2, A_3..., A_n são os vértices de um polígono e os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 são respectivamente os lados desse polígono e por sua vez a soma dos comprimentos dos lados do polígono é o perímetro do mesmo. A região poligonal que corresponde ao polígono A_1A_2 ... A_n é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, como representado na Figura 2.10 abaixo. [8]

Figura 2.10: região poligonal delimitada por A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 e A_6A_1.



Fonte: O Autor

2.5 Área de Figuras Planas

Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número real positivo que serve para quantificar o espaço por ela ocupado. [8]

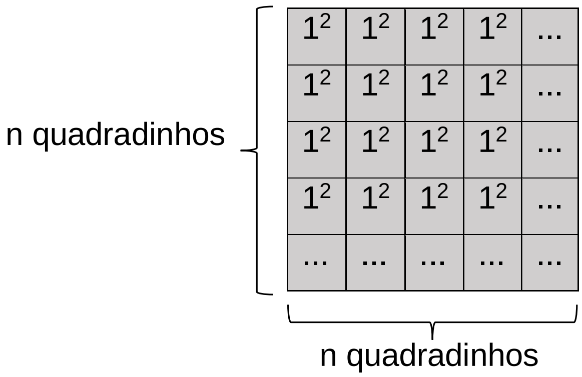
2.5.1 Área de Polígonos

Para um conceito qualquer de área de quaisquer polígonos tenha utilidades, são postulados que as seguintes propriedades sejam válidas:

I. Polígonos congruentes tem áreas iguais.
II. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
III. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
IV. A área de um quadrado de lado 1cm é igual a $1cm^2$.

Sendo válidos os postulados de I a IV acima, particionemos um quadrado de lado $n \in N$ em n^2 quadradinhos de lado 1 cada. Denotando a área do quadrado maior por A_n, devemos ter A_n igual à soma das áreas desses n^2 quadradinhos de lado 1, Figura 2.11 abaixo. [8]

Figura 2.11: n^2 quadradinhos de área 1^2.



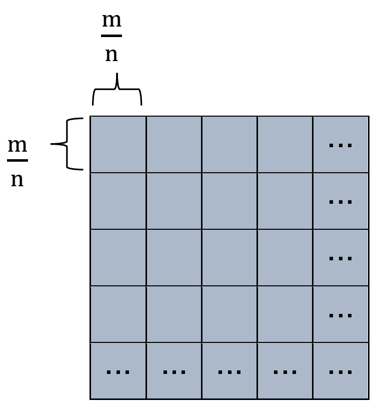
Fonte: O Autor

Portanto, teremos:

$$A_n = n^2.$$

Considere, agora, um quadradinho de lado $\frac{m}{n}$, com m, n ∈ N, e área $A_{\frac{m}{n}}$. Arranje n^2 copias do mesmo, empilhando n quadradinhos de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$. Tal quadrado maior terá, como já sabemos, área m^2; por outro lado, como ele está particionado em n^2 quadradinhos, cada um dos quais de lado $\frac{m}{n}$, sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadradinhos, Figura 2.12, abaixo: [8]

Figura 2.12: n^2 quadrados de lado $\frac{m}{n}$



Fonte: O Autor

Daí, vamos ter,

$$m^2 = n^2 \cdot A_{\frac{m}{n}}.$$

Portanto,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

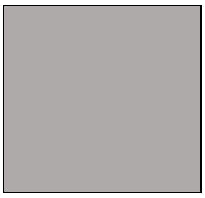
Resumindo o que foi visto acima, e fazendo: $\frac{m}{n}$ = L, logo a área de um quadrado de lado L deve ser igual a L^2, que resulta na proposição a seguir:

Proposição 2.1 Um quadrado de lado L tem área L^2, ver Figura 2.13 a seguir: [8]

Figura 2.13: quadrado de área L^2.

L

L



Fonte: O Autor

2.6 Perímetro de Figuras Geométricas Planas

O perímetro é a medida do contorno de um objeto bidimensional, ou seja, a soma de todos os lados de uma figura geométrica plana.

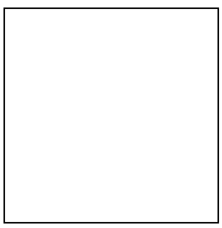
Um polígono qualquer tem perímetro igual à soma do comprimento dos seus lados.

Exemplo 2.1 Seja um quadrado de lado 3 cm, figura 2.14 abaixo. Seu perímetro tem medida de?

Figura 2.14: quadro de lados 3 cm

3 cm

3 cm



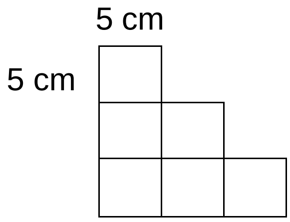
Fonte: O Autor

❖ **Solução**:

Como o perímetro de uma figura plana é a soma de seus lados, então o perímetro desse quadrado de medida 3 cm é 4 × 3 cm = 12 cm ou 3 + 3 + 3 + 3 = 12 cm.

Exemplo 2.2 Quanto mede o perímetro da Figura 2.15 abaixo, sendo que ela é formada por 6 quadradinhos de lados 5 cm?

Figura 2.15: figura formada por seis quadradinhos



Fonte: O Autor

❖ **Solução**:

Da definição temos que o perímetro de uma figura plana é a soma de seus contornos, então como a medida de cada um dos 12 contornos é 5 cm. Logo, teremos 12 × 5 cm = 60 cm de perímetro.

CAPÍTULO 3

POLIMINÓS

3.1 Histórico

Solomon Wolf Golomb (30 de maio de 1932 a 1 de maio de 2016) foi um matemático norte americano, engenheiro e professor de engenharia da University of Southern Califórnia, melhor conhecido por seus trabalhos em jogos matemáticos. Inventou o jogo Cheskers em 1948 e cunhou o nome. Desenvolveu o jogo de poliminós e pentaminós em 1953. Especializou-se em problemas de análise combinatória, teoria dos números, teoria dos códigos, etc. [14]

Salomon W. Golomb, foi o idealizador dos poliminós e sempre esteve inevitavelmente comprometido com seus cuidados e aprimoramento. Logo muito cedo desenvolveu um apetite precoce para a Matemática, bem como para línguas e uma ampla gama de obras literárias clássicas, ele completou seus estudos de graduação em Johns Hopkins em dois anos, em seguida, obteve um doutorado em matemática em Harvard e foi para um Noruega com uma bolsa de estudo, onde conheceu sua futura noiva. [3]

Salomon manteve um forte interesse no ensino, cursos avançados e na teoria dos números elementares e na promoção do popular na matemática. Muitos dos seus trabalhos de pesquisa se direcionavam a perguntas sobre números primitivos. Ele era um colecionador, solucionador e compositor ávido de problemas. [3]

Ele publicou um livro sobre os poliminós em 1965, com uma edição revisada em 1994 com o título de “Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems and Packings” na coluna “Matemática dos jogos Matemáticos” de Martin Gardner na Scientific American, onde popularizou muitos enigmas e problemas de poliminós. [12]

Desde essa época diversos grupos de estudantes do Ensino Médio e Superior e de professores procuram palestras, artigos, como também participam de discussões sobre essa recreação matemática sobre os poliminós, onde mais tarde, tornaram-se um dos ramos mais populares da Matemática recreativa.

Os matemáticos criaram e resolveram centenas de problemas sobre os poliminós e provaram que outros eram insolúveis, onde utilizaram-se de programas de computadores para resolver alguns dos enigmas mais difíceis. Houve também a formação de grupos internacionais para a resolução dos problemas geométricos, impulsionando as pesquisas na área de análise combinatória. [12]

No mundo dos vídeo games, os tetraminós (poliminós formados por 3 quadradinhos) tornaram-se bem conhecidos como os elementos do jogo Tetris. De fato, as figuras desses jogos são tetraminós unilaterais. Os pentaminós (poliminós formados por 5 quadradinhos) tiveram o maior sucesso entre os matemáticos recreativos, jogadores e aficionados ao quebra-cabeça. Uma versão comercial de um enigma pentaminó chamado “Hexed” pode ser encontrada nas lojas de brinquedos. [12]

3.2 Definição de poliminós

Um poliminó é uma figura geométrica plana formada por quadrados congruentes com pelo menos um lado inteiramente comum, aos quais se atribui a mesma unidade de medida para cada lado. Na formação de figuras únicas prevalece a regra que se um poliminó pode ser obtido de outro mediante uma rotação ou uma reflexão, assim ambas figuras são consideradas iguais. [9]

Os poliminós recebem um nome de acordo com o número de quadrados que integram as configurações de cada agrupamento. Conforme o número de quadrados, os poliminós são classificados como: monominó, dominós, triminós, tetraminós, pentaminós, ..., n-minós, eles estão listados de acordo com Tabela 3.1 a seguir: [8]

Tabela 3.1: Classificação e o número de peças dos poliminós [6]

Nome	Número de quadrados	Número de peças
Monominó	1	1
Dominós	2	1
Triminós	3	2
Tetraminós	4	5
Pentaminós	5	12
Hexaminós	6	35
Heptaminós	7	107
Octaminós	8	363
Nonaminós	9	1 248
Decaminós	10	4 460

Fonte: O Autor

3.3 Monominó

O monominó é formado por apenas um quadrado, portanto quanto à forma existe apenas uma, como o representado na Figura 3.1 abaixo: [16]

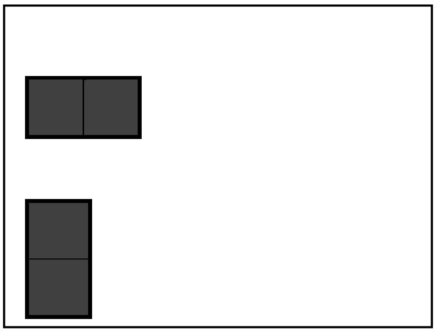
Figura 3.1: Monominó

Fonte: Autor

3.4 Dominós

O dominó é formado por dois quadrados dispostos lado a lado. Como não contamos a rotação como sendo outra forma, temos apenas uma forma de dominó. Segundo a ilustração da Figura 3.2 abaixo: [16]

Figura 3.2: Dominó

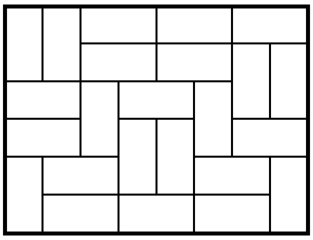


Fonte: O Autor

3.4.1 Dominós e retângulos

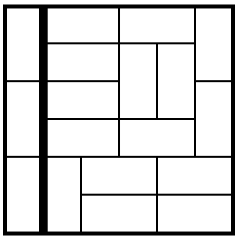
Uma cobertura de um tabuleiro com dominós (ou qualquer tipo de peça) é chamada de sem quebras, quando existe um segmento de reta que corta o tabuleiro em dois, isto é, separa-o em duas partes, mas não corta nenhuma peça. A seguir, podemos observar uma cobertura de um retângulo 6 × 8 (Figura 3.3) sem quebras e outro 6 × 6 (Figura 3.4) com cobertura de um retângulo com quebras: [10]

Figura 3.3: tabuleiro sem quebras



Fonte: O Autor

Figura 3.4: tabuleiro com quebras



Fonte: O Autor

A seguir apresentaremos alguns Teoremas que serão utilizados para dá embasamento na resolução de algumas aplicações do capítulo 4 que envolvem o uso dos poliminós na Geometria Plana.

Teorema 3.1 Um retângulo $m \times n$ admite uma cobertura sem quebras com dominós se, e somente se

i. mn é par;
ii. $m \geq 5$;
iii. $n \geq 5$;
iv. Não ocorre $m = n = 6$. [5]

Demonstração:

Dividindo um retângulo em mn quadradinhos unitários, sabendo que m representam as linhas e n as colunas e notando que cada dominó ocupará dois quadradinhos unitários, então devemos ter m ou n par ou ambos pares.

Por outro lado, não é difícil cobrir um tabuleiro que satisfaz essas condições, vamos supor por exemplo, que **m seja par**, isto é:

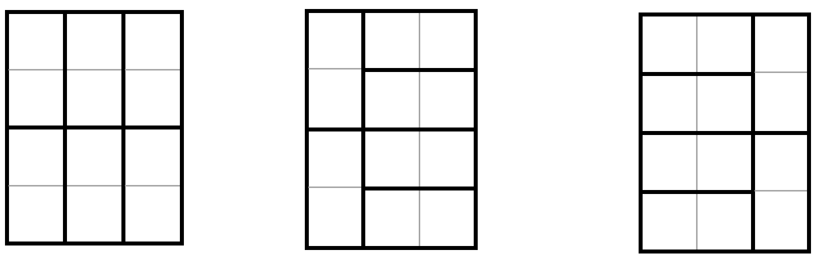
i. Para m = 2 e n = 2 (Figura 3.5), podemos observar que esse tabuleiro pode ser coberto com apenas 2 dominós, isto é, um dominó em cada coluna (figura à esquerda) ou em cada linha (figura à direita);

Figura 3.5: tabuleiros cobertos por dois dominós

Fonte: Autor

ii. Para m = 4 e n = 3 (Figura 3.6), neste caso o tabuleiro poderá ser coberto com dois dominós em cada coluna (figura da esquerda) ou dois dominós em uma das colunas externas e um dominó em cada linha (figuras do meio e da direita), o que nos dá 6 dominós.

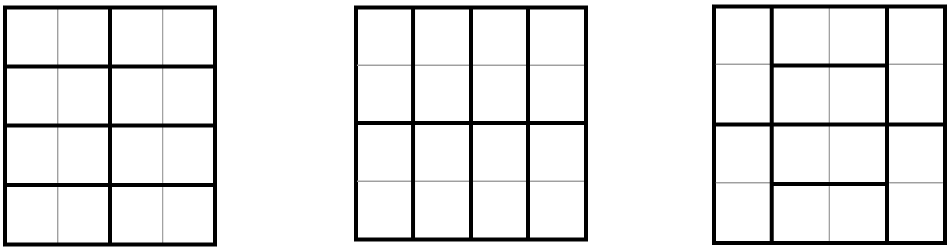
Figura 3.6: tabuleiros cobertos por seis dominós



Fonte: O Autor

iii. Para m = 4 e n = 4 (Figura 3.7), neste caso este tabuleiro pode ser coberto em várias possibilidades, vamos apresentar apenas três, isto é, com dois dominós por linha (figura da esquerda) ou dois dominós por coluna (figura do central) ou dois dominós em cada uma das colunas das extremidades e um dominó em cada linha central (figura da direita).

Figura 3.7: tabuleiros cobertos por oito dominós



Fonte: O Autor

Logo, para m ≤ 5 e n ≤ 5, pode-se observar nestes três casos mencionados acimas, que nem sempre quando mn é par esses tabuleiros se apresentam “sem quebras”. Portanto para valores de m ≤ 5 e n ≤ 5, não é possível apresentá-los sem quebras.

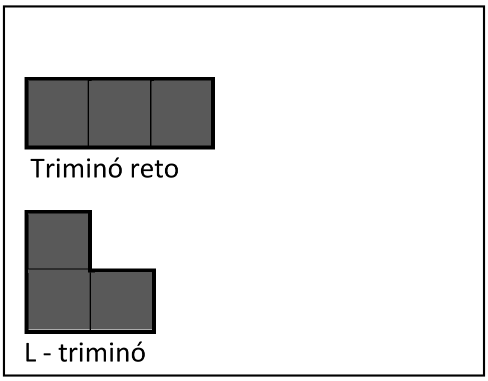
Agora, quando m = 6 e n = 8, ver (Figura 3.3) acima, observemos que nesse caso é possível apresentá-los sem quebras, devido mn ser par e também ocorre que m ≥ 5 e n ≥ 5.

Portanto, de modo geral, basta cobrir cada coluna de tamanho m com m/2 dominós.

3.5 Triminós

No caso dos triminós, temos a formação dessas peças feita por três quadrados. Assim, temos duas formas diferentes de triminós: o L- triminó e o triminó reto, como o representado na Figura 3.8 a seguir: [16]

Figura 3.8: peças triminó reto e L - triminó



Fonte: O Autor

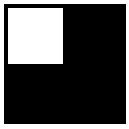
Teorema 3.2 Para n ≥ 2, um quadrado de lado n pode ser coberto com L-triminós e no máximo um monominó, exceto quando n = 3; se 3 não divide n, então podemos colocar o monominó em qualquer posição, a não ser que n = 5. [5]

Demonstração:

Vamos analisar alguns casos, para n ≥ 2, pois para n ≤ 2 não tem sentido.

1º caso, para n = 2, é possível preencher o tabuleiro com um L- triminó e um monominó, onde escolhe-se a posição desse monominó, como mostra a Figura 3.9 abaixo;

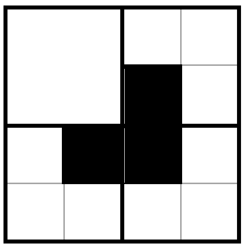
Figura 3.9: tabuleiro coberto com um monominó e um L- triminó



Fonte: O Autor

2º caso, para n = 4, divida o quadrado em quatro quadrados menores e congruentes de lado n = 2, pelo 1º caso, podemos supor que o monominó fique no quadrado superior esquerdo, pois, sabemos preencher essa região, portanto vamos obter cinco L- triminós e um monominó de acordo com a Figura 3.10 abaixo.

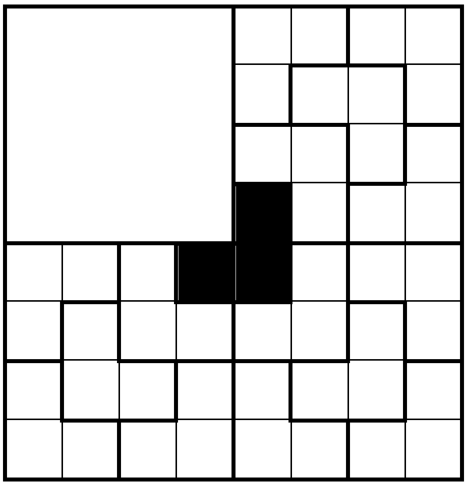
Figura 3.10: tabuleiro coberto com um monominó e cinco L- triminós



Fonte: O Autor

3º caso, para n = 8, divida o quadrado em quatro quadrados menores congruentes de lado n = 4, pelo 2º caso, podemos supor que o monominó fique no quadrado esquerdo, logo vamos ter “vinte e um L- triminós” e um “monominó” como segue a Figura 3.11 abaixo.

Figura 3.11: tabuleiro coberto com um monominó e 21 L- triminós



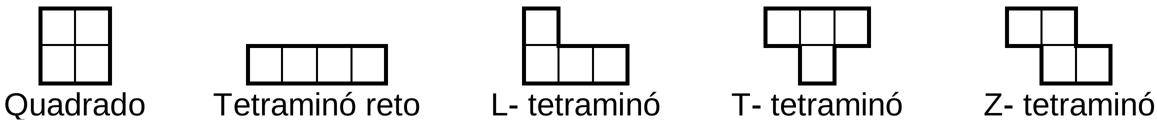
Fonte: O Autor

E note que podemos fazer o mesmo para *n* = 8, *n* = 16, e qualquer potência de base 2. Portanto, para n igual a uma potência de base 2, sempre será possível preencher o tabuleiro com L- triminós e um monominó, onde escolhe-se a melhor posição desse monominó.

3.6 Tetraminós

Os tetraminós, são formados por quatro quadrados congruentes, e se apresentam em cinco formas diferentes, são eles: quadrado, tetraminó reto, L-tetraminó, T- tetraminó e o Z- tetraminó, ver figura 3.12 abaixo: [16]

Figura 3.12: as cinco peças distintas dos tetraminós



Fonte: O Autor

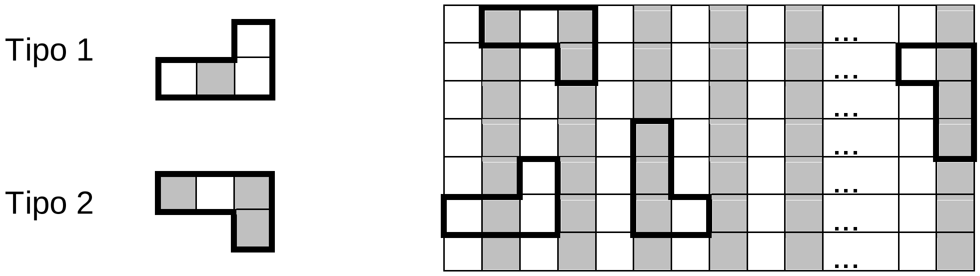
Teorema 3.3 Sejam m e n inteiros maiores que 1. Se um tabuleiro de dimensões m × n pode ser coberto com L- tetraminós então mn é múltiplo de 8.

Demonstração:

Suponha que o tabuleiro possua m linhas e n colunas e que haja uma cobertura com L- tetraminós. Como cada L- tetraminó possui 4 casas, então o número de casas do tabuleiro deve ser um múltiplo de 4.

Logo, m e n não podem ser ambos ímpares. Supondo que n seja par. Então o tabuleiro possui um número par de colunas. Vamos pintar as colunas alternadamente de branco e preto como mostra a Figura 3.13 abaixo:

Figura 3.13: tabuleiro com peças L- tetraminós



Fonte: O Autor

Suponha que ao cobrir o tabuleiro usaremos **a** peças do Tipo 1 e **b** do tipo 2 (Figura 3.13). Sabemos que devemos usar **p** peças no total ou seja a + b = p e além disso o número de casas brancas é igual ao número de casas pretas, pois, há tantas colunas brancas quanto pretas no tabuleiro. Cada peça do tipo 1 possui três casas brancas e uma preta e como temos ao todo (m × n) /2 casas brancas. Assim, o número de casas brancas é igual a 3a + b = (m × n) /2. Por outro lado, cada peça do tipo 2 possui uma casa branca e três pretas, e como temos ao todo (m × n) /2 casas pretas, então temos a + 3b = (m × n) /2. Resolvendo o sistema abaixo, obtemos:

$$\begin{cases} 3a + b = (m \times n)/2 \\ a + 3b = (m \times n)/2 \end{cases}$$

Igualando as equações, temos:

$$3a + b = a + 3b$$

$$2a = 2b$$

$$a = b$$

Substituindo a = b na primeira equação sistema, resulta:

$$3a + a = (m \times n)/2$$

$$4a = (m \times n)/2$$

Logo, isolando a, temos:

$$a = (m \times n)/8$$

Portanto o sistema acima possui solução inteira e positiva se, e somente se, (m × n) /8 for um número inteiro. Portanto, só é possível cobrir esse tabuleiro com L-tetraminós quando m × n for múltiplo de 8.

Alguns possíveis valores de m e n, estão representados abaixo:

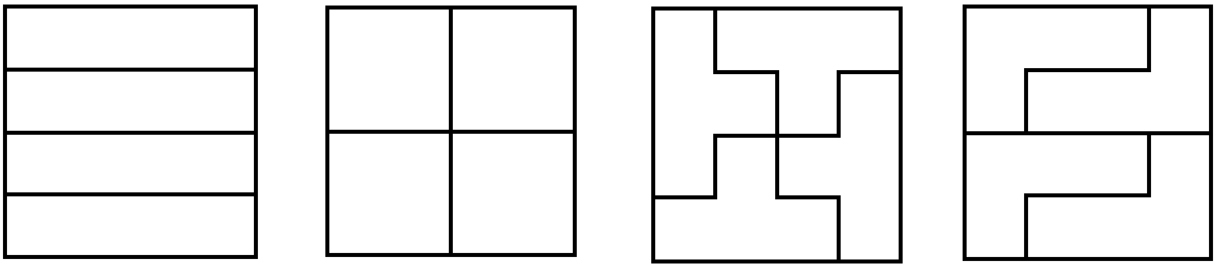
- m = 2 e n = 4
- m = 4 e n = 2
- m = 4 e n = 4
- m = 2 e n = 8

Teorema 3.4 Tabuleiros de xadrez sempre podem ser recobertos com linhas tetraminós, tetraminós quadrados, T- tetraminós ou L- tetraminós. [14]

Demonstração:

Observemos, que dividindo o tabuleiro de xadrez em 4 partes iguais, isto é, em 4 quadrados de lado 4 × 4, podemos recobri-los com 4 linhas tetraminós, ou 4 tetraminós quadrados, ou 4 T- tetraminós ou 4 L- tetraminós. De acordo com a Figura 3.14 abaixo:

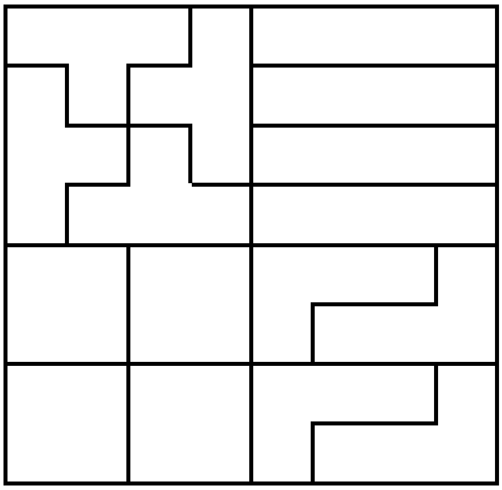
Figura 3.14: tabuleiro 4 × 4 cobertos por peças tetraminós



Fonte: O Autor

Logo, podemos fazer uma configuração dos tabuleiros 4 × 4 da Figura 3.14 acima em um tabuleiro de xadrez, pois 64 é múltiplo de 4 × 4, ver Figura 3.15 abaixo.

Figura 3.15: tabuleiros de xadrez coberto por peças tetraminós



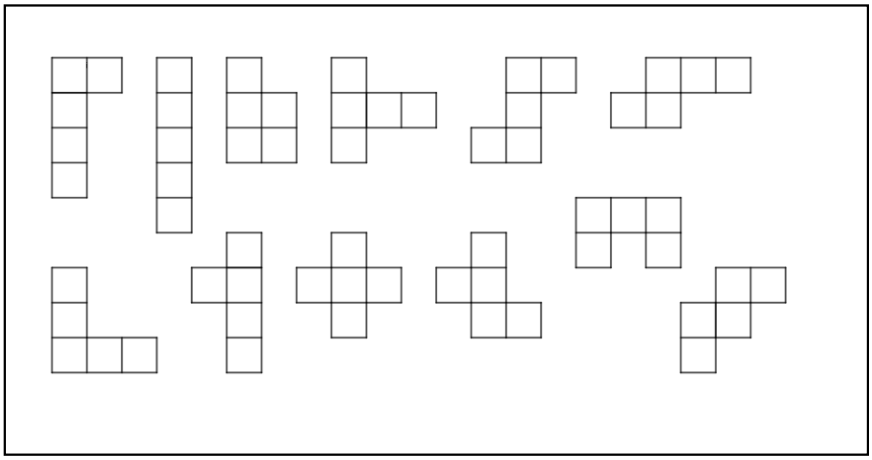
Fonte: O Autor

Portanto, generalizando em relação ao que foi mostrado na figura 3.15, acima sempre podemos recobrir um tabuleiro de xadrez com linhas tetraminós ou tetraminós quadrados ou T- tetraminós ou ainda L- tetraminós, pois, em todos esses casos mencionados acima, temos que 64 é múltiplo de 16, isto é, 4 × 16 = 64.

3.7 Pentaminós

Os pentaminós tratam-se de um caso especifico dos poliminós formados por cinco quadrados de lados justapostos sem a formação de “buracos” possibilitando, assim, a formação de um total de doze peças diferentes como indicado na Figura 3.16 abaixo. [16]

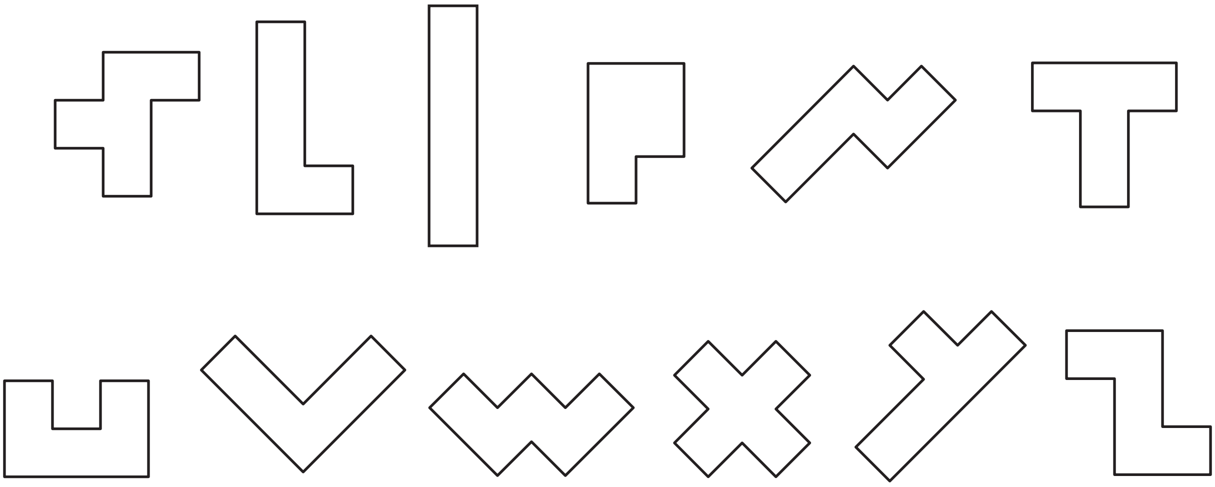
Figura: 3.16: As 12 peças distintas dos pentaminós



Fonte: O Autor

Sem contar as rotações e as simetrias, são doze os diferentes agrupamentos de quadrados que compõem os pentaminós. Para facilitar a manipulação das peças e a comunicação das pessoas que trabalham com elas, costuma-se nomeá-las, a partir da semelhança com as letras do alfabeto, F, L, I, P, N, T, U, V, W, X, Y e Z, respectivamente conforme pode-se verificar a nomenclatura dos pentaminós, na Figura 3.17 abaixo:

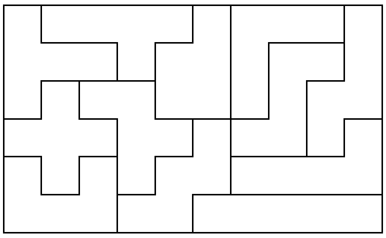
Figura 3.17: Os 12 pentaminós em formas de letras do alfabeto



Fonte: O Autor

Exemplo 3.1 Os 12 pentaminós estão representados na figura 3.18 a seguir. Veja que eles podem preencher um retângulo 6 ×10.

Figura 3.18: tabuleiro 6 ×10 coberto pelas doze peças distintas dos pentaminós

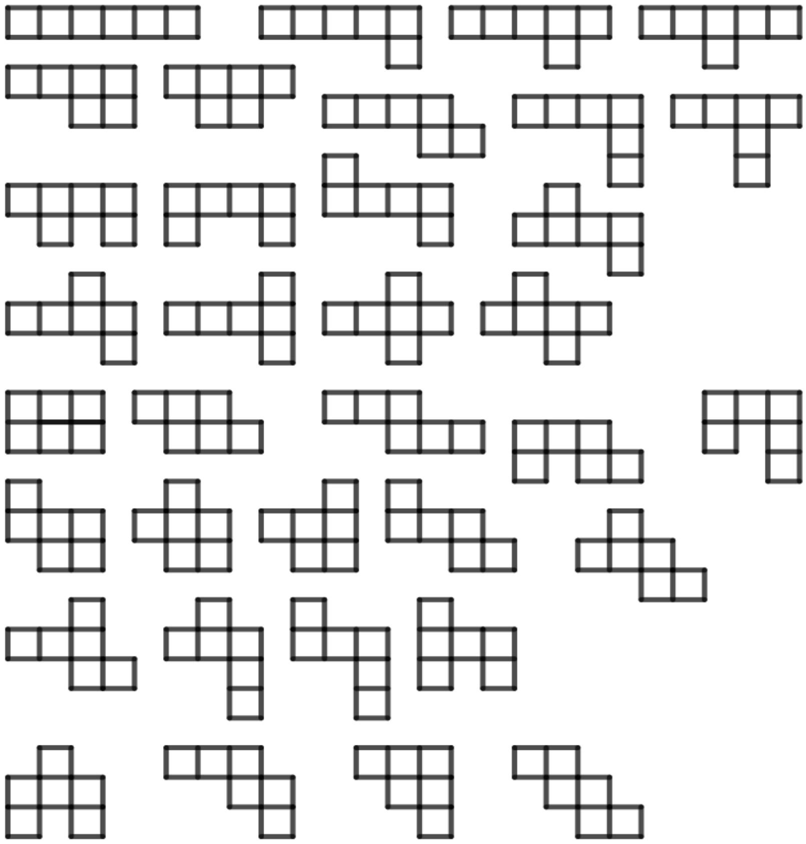


Fonte: O Autor

3.8 Hexaminós

Os hexaminós são formados por seis quadrados de lados justapostos sem a formação de “buracos” possibilitando, assim, a formação de um total de 35 peças diferentes como apresenta a Figura 3.19 abaixo: [6]

Figura 3.19: as 35 peças distintas dos hexaminós



Fonte: O Autor

Por outro lado os heptaminós são formados por sete quadrados congruentes de lados justapostos sem a formação de “buracos” possibilitando, assim, a formação de um total de 107 peças diferentes, os octaminós por oito quadrados congruentes, totalizando 369 peças diferentes, e assim por diante, como mostra a tabela 3.1.

3.9 Autorreplicação

Um poliminó é autorreplicante se com a justaposição de um certo número de peças idênticas pode-se obter um novo poliminó semelhante, só que em uma escala maior. Quais são essas peças de poliminós de um mesmo tipo que se convertem em sim mesmos? Observemos os exemplos 1 e 2 abaixo. [15]

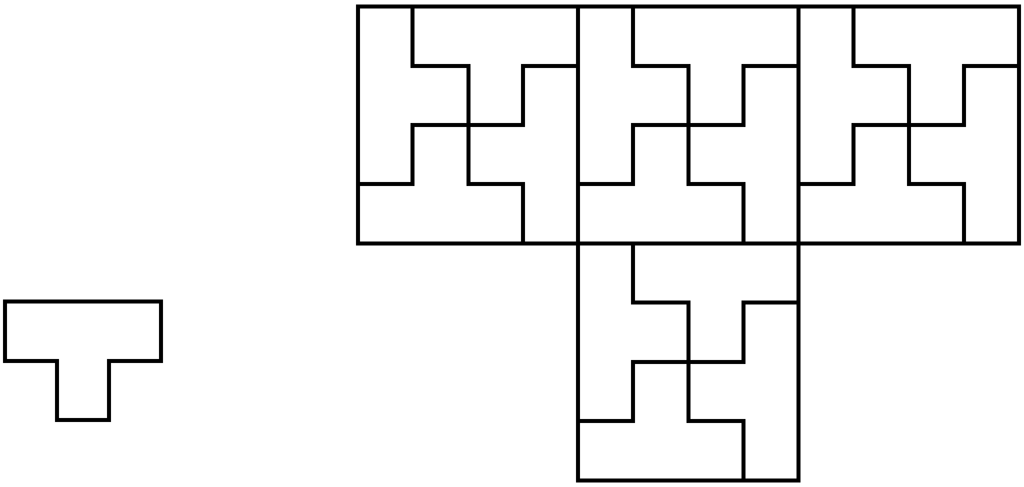
Exemplo 3.2 Na Figura 3.20 abaixo temos um autorreplicante formado por 4 L-triminós.

Figura 3.20: autorreplicação com L- triminós

Fonte: O Autor

Exemplo 3.3 Na Figura 3.21 abaixo temos um autorreplicante formado por 16 T-tetraminós.

Figura 3.21: autorreplicação do T- tetraminó



Fonte: O Autor

3.10 Pavimentação

Definição 3.1 Uma pavimentação de um polígono P é uma subdivisão de P em um número finito de figuras planas simples tais que:

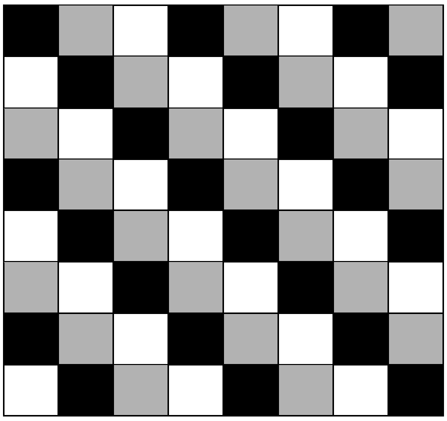
i. P é a união de todas estas figuras planas simples;
ii. A interseção dos interiores de quaisquer duas destas figuras planas simples é vazia.

Observação 3.1: Quando todas as figuras planas simples de uma pavimentação forem regiões poligonais então o item (ii) da definição é equivalente a dizer que a interseção de quaisquer duas regiões poligonais é um conjunto finito de pontos ou de segmentos de reta.

Dizemos que temos uma pavimentação do plano se dividirmos todo o plano euclidiano com as propriedades anteriores.

Exemplo 3.4 Pavimentação do tabuleiro de xadrez com 64 monominós, Figura 3.22 abaixo.

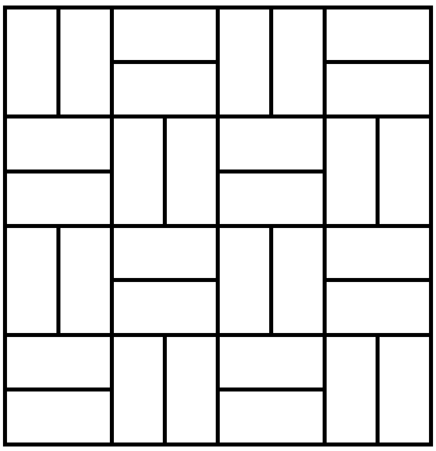
Figura 3.22: pavimentação do tabuleiro de xadrez com 64 monominós



Fonte: O Autor

Exemplo 3.5 Pavimentação do plano com 32 dominós, ver Figura 3.23 a seguir.

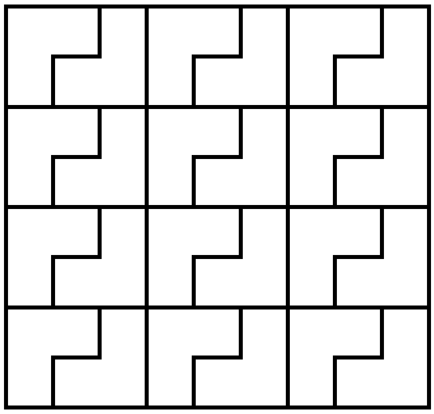
Figura 3.23: Pavimentação do plano com 32 dominós



Fonte: O Autor

Exemplo 3.6 A pavimentação do plano com 24 L-triminós, estão representados na Figura 3.24 abaixo.

Figura 3.24: Pavimentação do plano com 24 L- triminós

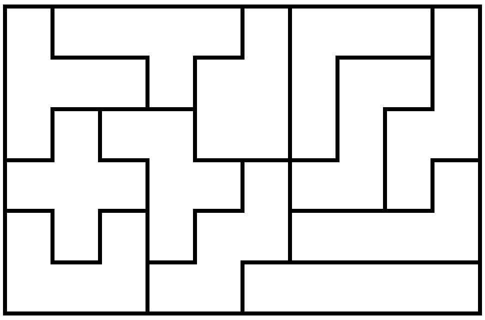


Fonte: O Autor

As pavimentações com polígonos regulares foram obtidas a partir dos trabalhos de Platão e Arquimedes. Dessa forma buscamos entender a existência de planificação do plano com regiões poligonais regulares de um só tipo e a outra com regiões de tipos diferentes. Como podemos observar no exemplo a seguir:

Exemplo 3.7 Na Figura 2.4 abaixo temos a pavimentação do plano com os 12 pentaminós distintos.

Figura 3.25: Pavimentação do plano com 12 pentaminós distintos.



Fonte: O Autor

CAPÍTULO 4

POLIMINÓS NO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA

4.1 Introdução

Atualmente a resolução de problemas, a história da matemática, a tecnologia da informação e os jogos são alguns caminhos para "fazer matemática" em sala de aula, essas estratégias de ensino indicam possibilidades metodológicos na construção do saber matemático, visto que no campo geométrico, na construção do conceito de área e a dissociação entre área e perímetro aparecem algumas dificuldades apresentadas pelos educandos, possivelmente pela complexidade dessas grandezas que serão discutidas mais adiante.

Diante do que vimos acima escolhemos elencar as possibilidades de uso dos poliminós para auxiliar a construção dos conceitos de área e perímetro como grandezas geométricas, partido da hipótese que a observação e a manipulação das diferentes peças, podem permitir o reconhecimento que figuras diferentes podem ter a mesma área e que a mesma área pode ter medidas diferentes, dependendo da unidade de medida escolhida.

Nesse trabalho propomos utilizar estratégias com uso dos poliminós no ensino de área e perímetro, partindo do pressuposto que, além de permitir a realização de atividades que favoreça a articulação entre os quadros geométrico, das grandezas e o numérico, esperamos que esse recurso possa despertar o interesse e a participação dos educandos.

O uso dos poliminós na Geometria plana poderia favorecer de certa forma a construção do conceito de área e de perímetro pelas características de seus variados modelos de peças, que viriam para contribuir com o desenvolvimento da percepção espacial, criatividade nas pavimentações de figuras geométricas e também na distinção entre figuras planas e seus atributos.

Nesse sentido vamos dar mais ênfase aos poliminós que são formados por mais de uma peça, como é o caso dos triminós, tetraminós, pentaminós, etc., pois estas, permitirão o trabalho com diferentes aspectos relacionados ao conhecimento a ser construído. Assim, teremos a composição de diferentes figuras geométricas planas com essas peças, como por exemplo, construiremos figuras planas com os tetraminós com a mesma área e perímetros diferentes.

Nas pavimentações com os modelos dos poliminós existentes será possível a composição de figuras geométricas planas, conservando sua área mas não o perímetro, com o uso de unidades de medidas não convencionais, possibilitando assim a mudança de unidade de medida e a construção de uma classe de equivalência de área.

Diante disso, analisaremos algumas possibilidades com composição e decomposição de figuras geométricas planas utilizando-se de superfícies unitárias distintas e não convencionais, como por exemplo os triminós, tetraminós e pentaminós para construção de uma classe de equivalência de área.

Proposta por Douady e Perrin-Glorian é que:

> Frequentemente os livros didáticos e o próprio professor enfatiza, no estudo de área, perímetro e das grandezas em geral, o aspecto numérico, o que pode favorecer o pensamento de que a grandeza é o número que representa sua medida. Uma possibilidade para superação das concepções geométricas e numéricas, bem como os erros frequentes a elas associadas é a abordagem da área como uma grandeza. [17]

Agora, trata-se de distinguir área e figura, assim como área e número. Na distinção entre área e figura, o procedimento de decomposição e recomposição tem um papel muito importante, pois a partir de uma figura inicial é produzida outra figura pela decomposição e recomposição, assim teremos uma nova figura geométrica plana com mesma área.

Na distinção entre área e número, a mudança de unidades é de fundamental importância, pois se medirmos a área de uma figura, por exemplo, ora com uma unidade A (tetraminó), ou com uma unidade B (pentaminó), obteremos resultados numéricos diferentes; no entanto, uma vez que essa figura plana não foi alterada, não faria sentido pensar que sua área sofreu alguma alteração.

Nesse sentido, acreditamos que o recurso didático com os poliminós pode trazer importantes contribuições no estudo da composição e decomposição de figuras planas, de modo a obter figuras de mesma área (classe de equivalência), facilitando a articulação entre o quadro geométrico (diversas figuras planas) com o quadro das grandezas (área da grandeza).

As questões relacionadas com a mudança de unidade e o uso de diferentes superfícies unitárias associadas a uma mesma unidade podem ser exploradas com os poliminós, contribuindo para estabelecer a articulação entre o quadro numérico e o quadro das grandezas.

Nesse esquema serão evidenciados elementos para o desenvolvimento de estudos das situações que dão sentido ao conceito de área, segundo Bellemain e Lima: [17]

- As superfícies planas (objetos do quadro geométrico);
- As áreas (objetos do quadro das grandezas);
- As medidas de áreas-números reais positivos (objeto do quadro numérico);
- A relação de equivalência "ter mesma área" (objeto que permite passar do quadro geométrico ao quadro das grandezas);
- As unidades de área (objeto que permite passar do quadro das grandezas ao quadro das medidas).

O recurso didático em foco nesse estudo, os poliminós, podem ser um forte aliado na elaboração desses vários tipos de situação que dão sentido a área, tais situações por exemplo, podem ser apresentadas, pelo fato de que os triminós, os tetraminós e os pentaminós, serem formados por mais de uma peça, respectivamente, duas, cinco e doze peças (ou figuras) distintas.

4.1.1 Distinção entre figura e área

Os triminós, Figura 3.8 do capítulo 3, são representados por dois modelos de figuras planas, sendo que uma é um retângulo e a outra um hexágono irregular, essas duas figuras possuem mesma área e mesmo perímetro.

Para a representação dos tetraminós, Figura 3.12 capítulo 3, existem cinco modelos de figuras planas diferentes: um quadrado, um retângulo, um hexágono irregular e dois octógonos irregulares, respectivamente, essas figuras diferentes possuem mesma área, com exceção da figura em forma de quadrado, os outros polígonos possuem mesmo perímetro.

Na representação dos pentaminós, Figura 3.16 do capítulo 3, contamos com doze modelos de figuras planas: um retângulo, três representações diferentes de hexágonos irregular, cinco octógonos irregulares, dois decágonos irregulares e um dodecágono irregular, não necessariamente nessa ordem. Todos esses polígonos que representam os pentaminós possuem mesma área.

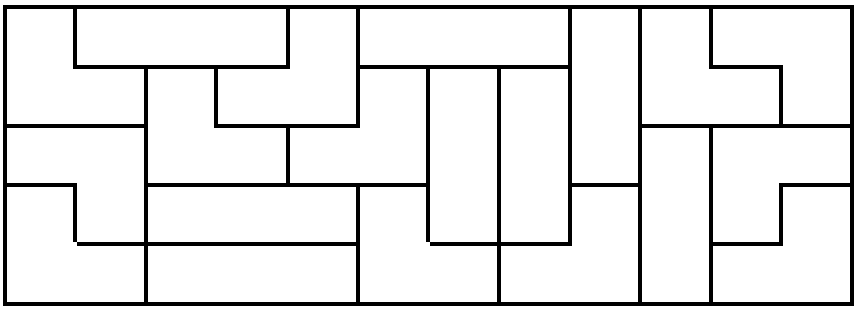
A manipulação e observação dos modelos de triminós, tetraminós e pentaminós possibilitará a identificação de figuras (peças) diferentes com mesma área, ou seja, a construção de uma classe de equivalência de área, articulando o quadro geométrico com o quadro das grandezas, figuras (peças) diferentes com mesma área. Esse trabalho com figuras (peças) não congruentes de áreas iguais facilita a percepção de que a figura (peça) e a área dessa figura (peça) são distintas.

4.1.2 Distinção entre medida e área

A pavimentação de figuras planas com os poliminós deve ser pelo processo de justaposição de suas peças, não deve haver lacunas e nem sobreposição das superfícies unitárias. A escolha de unidades não convencionais (triminós, tetraminós, pentaminós) como unidade de área permitirá encontrar a medida de área de figuras geométricas planas sem uso de cálculo e nem de fórmula. Observemos abaixo os padrões de pavimentações de retângulos com os diferentes poliminós (Figura 4.1, Figura 4.2 e Figura 4.3).

Para o retângulo (5 × 12) u.c., sendo que u.c. são unidades de comprimento, representado na Figura 4.1 logo abaixo, foram usados os triminós: nessa pavimentação com justaposição dessas peças usamos vinte triminós, permitindo afirmar que a medida da área dessa figura é vinte triminós.

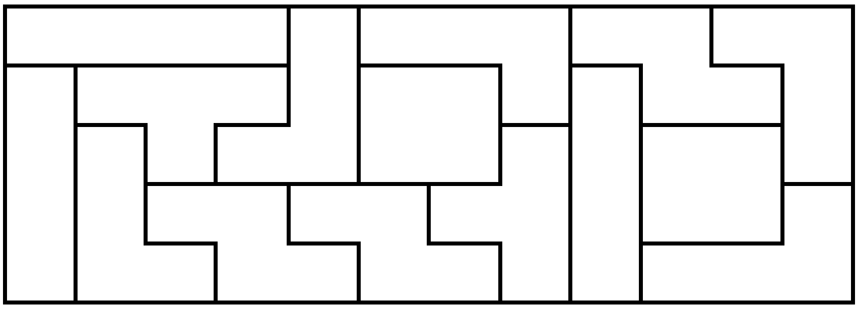
Figura 4.1: retângulo pavimentado com triminós



Fonte: O Autor

Nessa representação retangular, (5 × 12) u.c. na Figura 4.2 foram usadas as peças dos tetraminós, observamos ser necessário para recobrir todo retângulo quinze peças, a medida de sua área são quinze tetraminós.

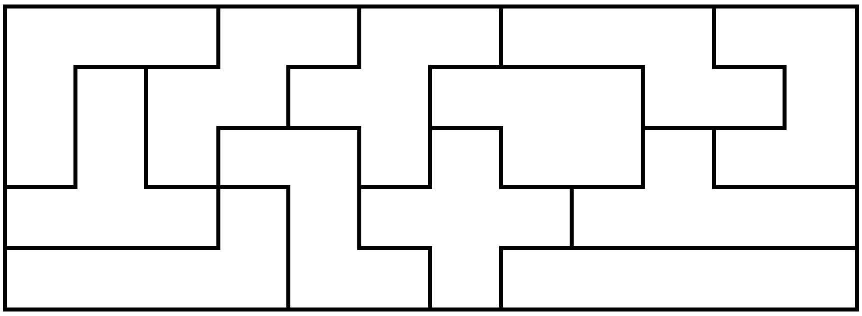
Figura 4.2: retângulo pavimentado com tetraminós



Fonte: O Autor

No retângulo (5 × 12) u.c. a seguir, Figura 4.3 foi pavimentado com as peças dos pentaminós, ao optarmos pelos pentaminós foram necessárias doze peças para compor o retângulo. A quantidade de peças necessária na pavimentação de uma figura plana corresponde à medida da área. Assim doze pentaminós é a medida de área do referido retângulo.

Figura 4.3: retângulo pavimentado com pentaminós



Fonte: O Autor

Com o recobrimento dos retângulos percebe-se que ao mudar a unidade de medida de área com os triminós, depois com os tetraminós e em seguida com os pentaminós, respectivamente, o número que representa a medida de área dessas peças sofre alterações, mas a figura geométrica que se construiu (retângulo 5 × 12) não se altera. Nesse procedimento ocorre a articulação entre o quadro numérico e o quadro das grandezas geométricas, ou seja, a unidade de medida de área se altera mas a área da figura plana construída é invariante não sofre nenhuma alteração.

Passaremos a observar a pavimentação do retângulo, ver Figura 4.2 acima, representado pela composição das peças dos tetraminós. Pretendemos destacar o comportamento do perímetro a partir de escolhas de diferentes unidades de comprimento. A nossa primeira opção será a medida do lado do “monominó” conseguindo, assim 34u.c. como o perímetro dessa Figura 4.2. Uma outra possibilidade de escolha adotada será o lado do “tetraminó quadrado” como unidade de comprimento o que confere 17u.c. de perímetro. Com esse procedimento temos a articulação do quadro numérico com o quadro das grandezas, isto é, o número que corresponde à medida do perímetro das peças se altera a partir da escolha da unidade de comprimento, mas o perímetro da figura geométrica não altera, pois esse atributo é invariante.

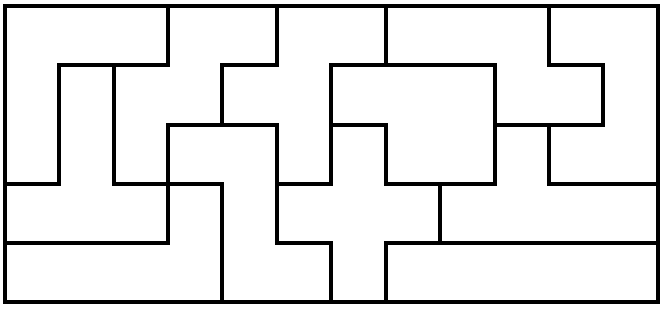
4.1.3 Distinção de área e perímetro

Inicialmente observemos que as peças que compõem os triminós, tetraminós, pentaminós, etc. representam, respectivamente, unidades de medidas de áreas distintas na composição e decomposição de figuras geométricas planas. Para o perímetro adotaremos como unidade de comprimento do lado do **momominó**.

As duas peças, dos triminós, Figura 3.8, tem oito unidades de comprimento como medida de perímetro, com essas peças temos conservação de área e de perímetro. Nos tetraminós, Figura 3.12, a peça representada pelo quadrado tem perímetro igual a oito unidades de comprimento enquanto para as outras o perímetro tem medida 10 u.c. Nos pentaminós, Figura 3.16, a peça em formato de P que representa um hexágono irregular tem 10 u.c. como medida de perímetro, mas todas as outras peças têm 12u.c. de perímetro.

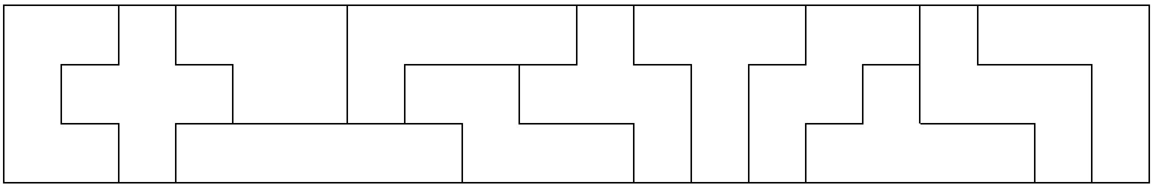
A identificação da conservação de área e variação de perímetros nas peças dos pentaminós e dos tetraminós permite afirmar que as variações entre área e perímetro são independentes. Na composição dos retângulos, Figura 4.4, Figura 4.5 e Figura 4.6 abaixo, foram usadas doze peças dos pentaminós.

Figura 4.4: Retângulo (5 × 12) u.c. formados pelas doze peças dos pentaminós



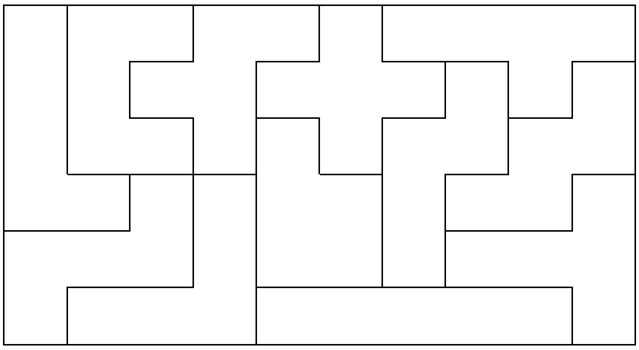
Fonte: O Autor

Figura 4.5: Retângulo (3 × 20) u.c. formados pelas doze peças dos pentaminós



Fonte: O Autor

Figura 4.6: Retângulo (6 × 10) u.c. formados pelas doze peças dos pentaminós



Fonte: O Autor

Essas figuras foram compostas por todas as peças dos pentaminós pelo procedimento de pavimentação dos diferentes retângulos, as figuras geométricas planas são diferentes e a grandeza área foi conservadas nas três representações. Adotando a medida do lado do **monominó** como unidade de comprimento, podemos observar que no retângulo da Figura 4.4 têm 34 u.c. de perímetro, no retângulo da

Figura 4.5, o perímetro passou a ser 46 u.c. e no retângulo da Figura 4.6, temos 30 u.c. como medida de perímetro.

Portanto esse procedimento didático de composição de figuras planas com as mesmas doze peças dos pentaminós em relação a medida de área e de perímetro, podemos observar que as áreas dessas três figuras planas permaneceram invariantes, ver Figuras 4.4, 4.5 e 4.6, enquanto que as medidas de seus perímetros variaram nestas três situações acima. Daí permite-se dizer que esses atributos são grandezas independentes.

No capítulo que segue será proposta algumas aplicações do uso dos poliminós abordando a Geometria Plana.

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DOS POLIMINÓS NO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA

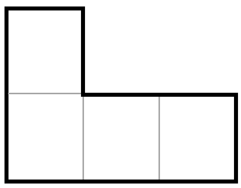
A seguir abordaremos algumas aplicações fazendo-se uso dos **Teoremas** que foram apresentados no capítulo 3, bem como as técnicas que foram vistas no capítulo 4, como a: **Distinção entre figura e área**, **entre medida e área**, **de área e perímetro** como também utilizar os recursos dos poliminós os quais irão trazer um melhor embasamento na resolução de alguns exemplos de aplicações que serão propostos neste capítulo e no posterior envolvendo a Geometria Plana no Ensino Básico.

5.1 EXEMPLO 1

(Adaptada da 2.ª Fase OBMEP – 2016) A peça ilustrada abaixo é formada por quatro quadradinhos de 1cm de lado ver Figura 5.1. Observe que o perímetro desta peça, ou seja, a medida de seu contorno, é 10 cm.

Roberto forma figuras juntando duas dessas peças, sem sobreposição, e fazendo coincidir lados de quadradinhos.

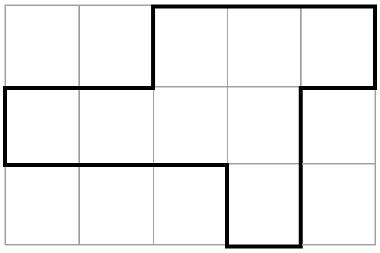
Figura 5.1: peça L - tetraminó



Fonte: O Autor

Roberto formou a Figura 5.2 abaixo. Qual é o perímetro e a área desta figura?

Figura 5.2: composta por dois L - tetraminós



Fonte: O Autor

- Solução 1:

Podemos notar que o contorno da Figura 5.2, contém 16 lados desses quadradinhos, assim adotando como unidade de medida o lado do **monominó** e da **distinção entre área e perímetro** pode-se dizer que esta figura tem 16 u.c. de perímetro. Agora, da **distinção entre medida e área**, pode-se dizer que a área da Figura 5.2 em questão é **dois L- tetraminós**.

- Solução 2:

Observemos que como cada peça do L- tetraminó tem perímetro 10cm. Logo, quando duas dessas peças estão em contato com dois de seus lados em comum, elas vão ter perímetro igual a:

$$\underset{\text{Dois lados em comum}}{\underset{\uparrow}{\overset{\text{Duas peças}}{\overset{\downarrow}{20}} - 2 \times 2}} = 16 \text{ cm.}$$

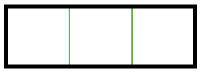
Por outro lado, como a área de um quadradinho dessa Figura 5.2 é 1 cm^2 e como ela é composta por 8 quadradinhos, logo sua área é $8 \times 1\ cm^2 = 8\ cm^2$.

5.2 EXEMPLO 2

(Adaptada da OBMEP 2ª Fase – 2011) Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, no formato de uma peça I– triminó, Figura 5.3 abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm^2 de área. Encontre as medidas do perímetro dos retângulos que ela recortou.

Figura 5.3: peça I- triminó

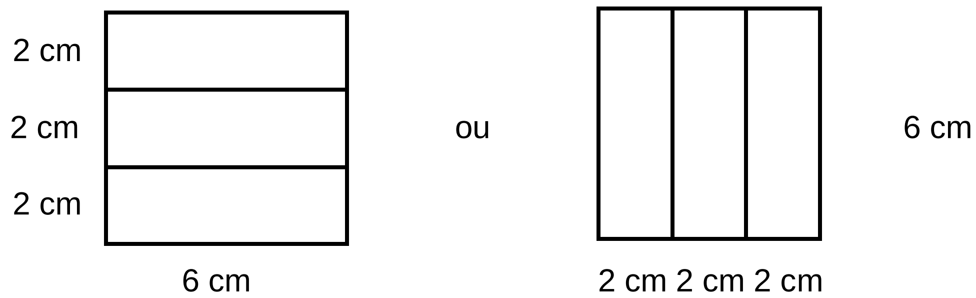


Fonte: O Autor

❖ Solução 1:

Como cada peça I- triminó, Figura 5.3 é formada por três quadradinhos, então para compor um quadrado com essas peças, serão necessários 3 × 3 = 9 quadradinhos congruentes de lados 2 cm, pois 6 cm × 6 cm = 36 cm^2, ver Figura 5.4 abaixo. Logo serão necessárias três peças I- triminós para compor esse quadrado. Assim as medidas dos lados desses retângulos são 2 cm e 6 cm. Agora, adotando como unidade de medida o lado do **monominó** e fazendo a **distinção entre área e perímetro,** assim o perímetro desses retângulos é 2 + 2 + 6 + 6 = 16 u.c.

Figura 5.4: quadrado coberto por I- triminós



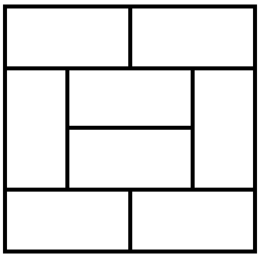
Fonte: O Autor

❖ Solução 2:

Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área 36 cm^2, seu lado mede 6 cm. Logo o comprimento dos retângulos é 6 cm e sua largura é um terço de seu comprimento, ou seja, 2 cm representado na Figura 5.4. Portanto, a medida do perímetro de cada retângulo é: 2 × (2 + 6) = 16 cm.

b) Sara recortou a segunda tira em oito retângulos congruentes (peças de dominós) de medidas 1,5 cm por 3 cm e com eles(as) formou um quadrado como o indicado na Figura 5.5. Determine o perímetro e a área desse quadrado.

Figura 5.5: quadrado coberto por dominós



Fonte: O Autor

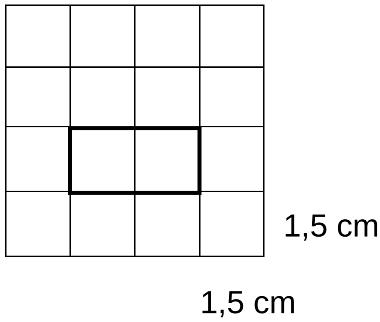
❖ Solução 1:

Fazendo a **distinção entre medida e área**, pode-se afirmar que a área do quadrado, representado na Figura 5.5, são **oito dominós**. Este quadrado pode ser decomposto em 16 quadradinhos com medidas de lados congruentes em seguida adotando como unidade de medida o lado do **monominó** e da **distinção entre área e perímetro**, pode-se dizer que 16 u.c. é a medida de seu perímetro.

❖ Solução 2:

Decompondo o quadrado em 16 quadradinhos congruentes de lados 1,5 cm por 1,5 cm, conforme figura 5.6, daí a medida do lado do quadrado será 4 × 1,5 cm = 6 cm. Portanto a área do quadrado têm medida de 6 cm × 6 cm = 36 cm^2 e seu perímetro é 4 × 6 = 24 cm.

Figura 5.6: quadrado decomposto em 16 quadradinhos

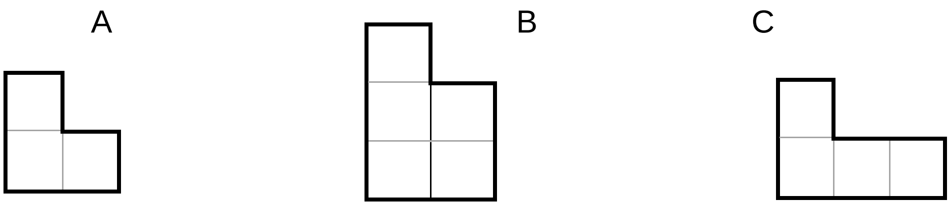


Fonte: O Autor

5.3 EXEMPLO 3

(Adaptada da OBMEP 2012, 2ª Fase) Pedro brinca com um tabuleiro quadriculado 4 x 6 e com peças dos tipos A, B e C, respectivamente L- triminó, P- pentaminó e L- tetraminó, Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 abaixo. Ele tenta cobrir inteiramente o tabuleiro com as peças, encaixando-as sem que nenhuma fique sobre outra.

Figura 5.7: L- triminó Figura 5.8: L- triminó Figura 5.9: L- tetraminó



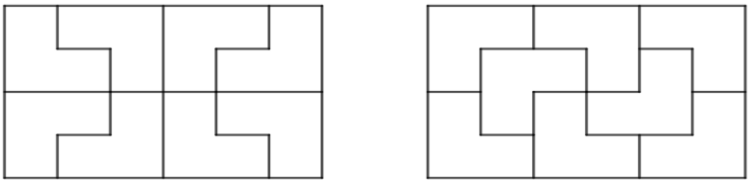
Fonte: O Autor

a) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo A e determine sua área.

❖ Solução:

Há várias formas de se cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo A; a Figura 5.10 mostra duas delas. Agora, fazendo a **distinção entre medida e área**, pode-se afirmar que a área do quadriculado 4 × 6, representado na Figura 5.10 é **oito L- triminós**.

Figura 5.10: tabuleiro coberto com peças L- triminós



Fonte: O Autor

b) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro com peças dos tipos A e B, usando uma ou mais peças do tipo B.

❖ Solução:

Há várias formas de se cobrir o tabuleiro com peças dos tipos A e B, com pelo menos uma do tipo B, a Figura 5.11 abaixo nos apresenta duas delas.

Figura 5.11: tabuleiro coberto com peças L- triminós e P- pentaminós

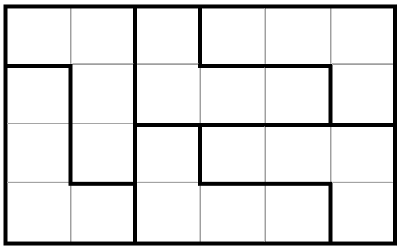
Fonte: O Autor

c) Usando somente peças do tipo C, Figura 5.9, Pedro conseguirá cobrir o tabuleiro, se possível mostre uma solução e em seguida determine a medida de sua área.

❖ Solução:

Há várias formas de se cobrir este tabuleiro usando somente peças do tipo C, na Figura 5.12 apresentamos uma delas. Por outro lado, fazendo a **distinção entre medida e área**, pode-se afirmar que a área do quadriculado 4 × 6, representado na Figura 5.12, é **seis L- tetraminós**.

Figura 5.12: tabuleiro coberto por L- tetraminós

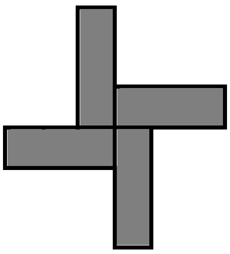


Fonte: O Autor

5.4 EXEMPLO 4

(Adaptada da OBMEP 2005 – 2ª Fase) Tia Anastácia uniu quatro retângulos (peças de I- triminós) de papel de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura, formando a Figura 5.13 abaixo.

Figura 5.13: figura composta por peças I- triminós



Fonte: O Autor

a) Qual é o perímetro da figura?

❖ Solução:

Adotando como unidade de medida o lado do **monominó** e observando que a Figura 5.13 acima, tem 4 lados de 3 u.c, 4 lados de 2 u.c., 4 lados de 1 u.c. e da

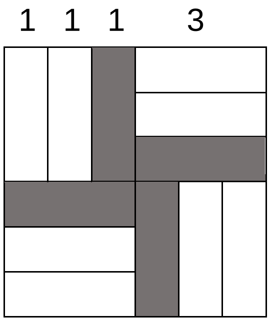
distinção entre área e perímetro, pode-se dizer que a medida de seu perímetro é 4 x 3 + 4 x 2 + 4 x 1 = 24 u.c.

b) Qual é o menor número de retângulos (peças I- triminós) de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura que serão necessários para juntar a essa Figura 5.13 para se obter um quadrado? Faça um desenho ilustrando sua resposta.

❖ Solução:

A resposta está na Figura 5.14 abaixo, onde podemos observar que basta juntar 8 retângulos (peças de triminós) à figura original para formar o quadrado desejado.

Figura 5.14: pavimentação do quadrado com peças I- triminós



Fonte: O Autor

c) Qual é a área e o perímetro do quadrado obtido no item anterior?

❖ Solução 1:

Pela **distinção entre medida e área**, pode-se dizer que a área do quadrado, representado na Figura 5.14, é **doze triminós**. Por outro lado, adotando como unidade de medida o lado do **monominó** e como este quadrado tem 1 + 1 + 1 + 3 = 6 u.c. de lado, como indicado na Figura 5.14, e da **distinção entre área e perímetro**, pode-se afirmar que esse quadrado tem 4 × 6 cm = 24 u.c. de perímetro.

❖ Solução 2:

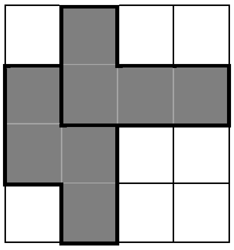
De acordo com a figura 5.14 acima, cada retângulo tem área igual a 3 × 1 = 3 cm^2. Como o quadrado é composto de 12 retângulos, a sua área é igual a 12 × 3 =

36 cm^2 e como a medida de cada lado do quadrado é 1 + 1 + 1 + 3 = 6 cm, logo a medida de seu perímetro é 4 × 6 = 24 cm.

5.5 EXEMPLO 5

(Adaptada da XIV Olimpíada Paraense de Matemática - 2ª Fase 2013) Na Figura 5.15, composta de quadrados, temos a junção de duas peças tetraminós, onde a área desta região sombreada é 200 cm^2. Qual é o perímetro da área sombreada?

Figura 5.15: figura composta por peças tetraminós



Fonte: O Autor

- Solução 1:

Consideremos que a medida do lado de um quadradinho da Figura 5.15 tenha medida igual a medida **m** de um **monominó**. Como a área da região sombreada desta figura é 200 cm^2, então temos que a área de uma peça tetraminó que compõe essa figura é 100 cm^2, logo a medida do lado **m** de um quadradinho é:

$$4 \,.\, m^2 = 100$$

$$m^2 = \frac{100}{4}$$

$$m^2 = 25$$

$$m = \sqrt{25}$$

$$m = 5 \text{ u.c.}$$

Daí, como essa região sombreada é formada por 16 lados de medida **m** = 5 u.c e da **distinção entre área e perímetro**, pode-se concluir que 16 × 5 u.c. = 80 u.c. é o perímetro dessa região sombreada.

- Solução 2:

Seja L a medida do lado de um quadradinho. Como a área da região sombreada é 200 cm^2, isto é, a área de 8 quadradinhos é igual a 200 cm^2. Logo podemos escrever:

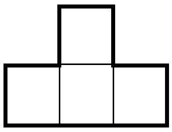
$$8 \cdot L^2 = 200$$
$$L^2 = \frac{200}{8}$$
$$L^2 = 25$$
$$L = \sqrt{25}$$
$$L = 5 \text{ cm}$$

Logo, a medida do lado de cada quadradinho mede 5 cm. Como a região sombreada é formada por 16 lados de medida L = 5 cm, temos que seu perímetro tem medida de 16 x 5 cm = 80 cm.

5.6 EXEMPLO 6

(Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2017) João possui um brinquedo com peças planas e quadradas de lado 1m. Ele pode unir duas peças através de um lado. A Figura 5.16 abaixo mostra um exemplo de configuração que João construiu com 4 quadrados.

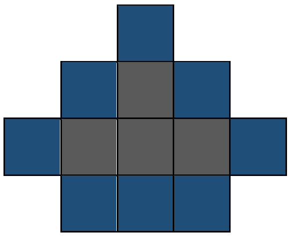
Figura 5.16: peça T- tetraminó



Fonte: O Autor

Perceba que o perímetro da figura é formado por 10 segmentos unitários. Depois de construir uma configuração, ele pode construir uma nova figura apenas acrescentando um quadrado a todos os encaixes da figura inicial formando assim uma nova camada de quadrados. Por exemplo, a partir da figura anterior, ele poderia acrescentar uma camada obtendo a próxima Figura 5.17.

Figura 5.17: peça dodecaminó



Fonte: O Autor

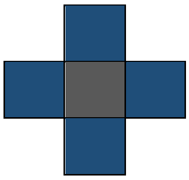
Note que os 8 quadrados acrescentados usam em suas conexões todos os 10 segmentos do perímetro anterior, então é possível acrescentar um novo quadrado encaixando apenas na figura original.

a) Começando com um quadrado 1 × 1, encontre a área e o perímetro da configuração que João irá obter ao acrescentar uma camada.

❖ Solução 1:

Da **distinção entre figura e área**, pode-se dizer que a área da Figura 5.18, é **um pentaminó**. Agora adotando como unidade de medida o lado do **monominó** e da **distinção entre figura e área**, pode-se concluir que 4 + 4 × 2 = 12 u.c. é a medida de seu perímetro.

Figura 5.18: peça X- pentaminó



Fonte: O Autor

❖ Solução 2:

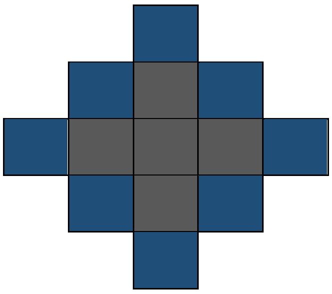
A Figura 5.18 abaixo mostra a configuração que João obtém ao acrescentar uma camada a esse quadrado1 × 1, logo a medida de seu perímetro é: 4 + 4 × 2 = 12 m e como área de cada quadrado (monominó) é 1 m^2, portanto a área da figura em questão será: 5 × 1 m^2 = 5 m^2.

b) Começando com um quadrado 1 × 1, calcule a área e o perímetro da configuração que João irá obter após a segunda camada sucessiva.

- Solução 1:

Pela **distinção entre figura e área**, pode-se afirmar que a área da Figura 5.19, é **um tridecaminó**. Por outro lado, adotando como unidade de medida o lado do **monominó** e da **distinção entre figura e área**, pode-se concluir que 12 + 4 × 2 = 20 u.c. é a medida de seu perímetro.

Figura 5.19: peça tridecaminó



Fonte: O Autor

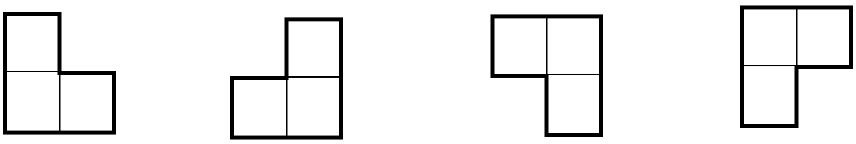
- Solução 2:

Na Figura 5.19 acima temos a configuração que João obtém ao acrescentar duas camadas sucessivas, logo seu perímetro é 12 + 4 × 2 = 20 m e como essa figura é composta por treze quadrados de área 1 m^2, assim temos que sua área é 13 × 1 m^2 = 13 m^2.

5.7 EXEMPLO 7

(Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2017) As peças a seguir Figura 5.20 são chamadas de L- triminós.

Figura 5.20: peças L- triminós



Fonte: O Autor

Essas peças são usadas para cobrir completamente um tabuleiro 6 × 6. Nessa cobertura, cada L- triminó cobre exatamente 3 quadradinhos do tabuleiro 6 × 6 e nenhum quadradinho é coberto por mais de um L- triminó.

a) Quantos L - triminós são usados para cobrir um tabuleiro 6 × 6?

❖ Solução:

Seja p o número de L- triminós usados para cobrir um tabuleiro 6 × 6. Como esse tabuleiro possui exatamente 6 × 6 = 36 quadradinhos e cada um deve ser coberto por exatamente um dos L- triminós, então 3p = 36, ou seja, p = 12.

b) Se cada um dos quadradinhos deste tabuleiro tem 2 cm de lado, quanto mede o perímetro e a área desse tabuleiro?

❖ Solução 1:

Do item anterior, temos que são necessários 12 peças L- triminós para cobrir o tabuleiro e da **distinção entre medida e área**, pode-se dizer que a área do tabuleiro 6 × 6 são **doze L- triminós**. Adotando como unidade de medida o lado do **monominó** e como o lado deste tabuleiro passa a ter 6 u.c. de lado e da **distinção entre área e perímetro**, pode-se afirmar que 4 × 6 = 26 u.c. é a medida de seu perímetro.

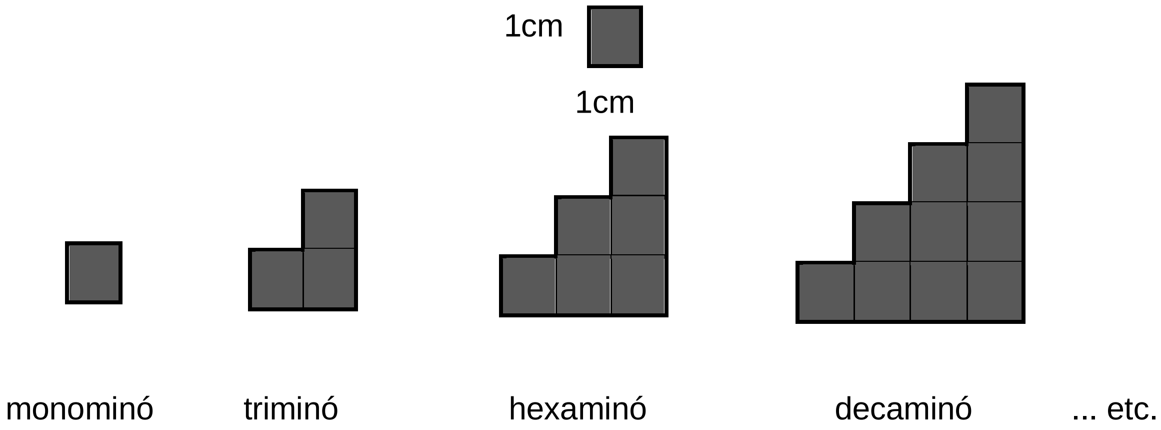
❖ Solução 2:

Observemos que cada lado do tabuleiro 6 × 6 têm medida de 6 × 2 cm = 12 cm, logo a medida de sua área é $12^2 = 12 \times 12 = 144$ cm^2 e seu perímetro tem medida de 4 × 12 cm = 48 cm.

5.8 EXEMPLO 8

(Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2013) Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas figuras em formato de escadas ou peças respectivamente, como monominó, triminó, hexaminó, decaminó, etc., conforme a Figura 5.21 abaixo:

Figura 5.21: peças poliminós



Fonte: O Autor

a) Calcule a área total e o perímetro da quarta escada construída.

❖ Solução 1:

Pela **distinção entre figura e área**, pode-se concluir que a área da quarta escada, ver Figura 5.19 acima, é **um decaminó**. Por outro lado, adotando como unidade de medida o lado do **monominó** e como temos 4 + 4 segmentos verticais e 4 + 4 segmentos horizontais e da **distinção entre figura e área**, o perímetro dessa escada (decaminó) é 4 + 4 + 4 + 4 = 16 u.c.

❖ Solução 2:

Começamos com uma observação: A primeira escada é composta de apenas um quadradinho. A segunda escada é obtida, a partir da primeira adicionando um novo nível contendo dois quadradinhos. Assim ela tem 1 + 2 = 3 quadradinhos. A terceira escada é obtida, a partir da segunda adicionando um novo nível contendo três quadradinhos, logo ela tem 1 + 2 + 3 = 6 quadradinhos. Esse mesmo raciocínio funciona para as demais escadas.

Assim, para calcular a área da quinta escada, observamos que temos 5 quadradinhos no primeiro nível, 4 quadradinhos no segundo nível, 3 quadradinhos no terceiro nível, 2 quadradinhos no segundo nível, e um quadradinho no primeiro nível. No total, a escada está constituída por 1 + 2 + 3 + 4 = 10 quadradinhos. Cada quadradinho tem 1 cm^2 de área. Portanto, a área total da escada é 10 cm^2.

Para calcular o perímetro podemos contar o número de segmentos verticais e o número de segmentos horizontais que compõem o contorno da quarta escada.

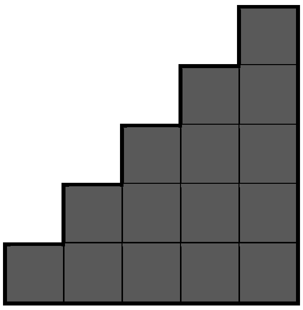
Como temos quatro degraus, há 4 segmentos verticais e mais 4 segmentos horizontais compondo os degraus. Note ainda que para cada segmento horizontal em um degrau, existe um segmento horizontal na base da escada. De maneira análoga, para cada segmento vertical em um degrau, existe um segmento vertical na lateral direita da escada. No total, temos então 4 + 4 segmentos verticais e 4 + 4 segmentos horizontais. Portanto, o perímetro total da escada é (4 + 4 + 4 + 4) = 16 cm.

b) Calcule a área total e o perímetro da quinta escada construída.

❖ Solução 1:

Fazendo a **distinção entre figura e área**, pode-se dizer que a área da quinta escada, Figura 5.22 abaixo, é **um pentadecaminó**. Por outro lado, como temos 5 + 5 segmentos verticais e 5 + 5 segmentos horizontais e adotando como unidade de medida o lado do **monominó**, e da **distinção entre figura e área**, logo temos 5 + 5 + 5 + 5 = 20 u.c. como perímetro dessa figura.

Figura 5.22: peça pentadecaminó



Fonte: O Autor

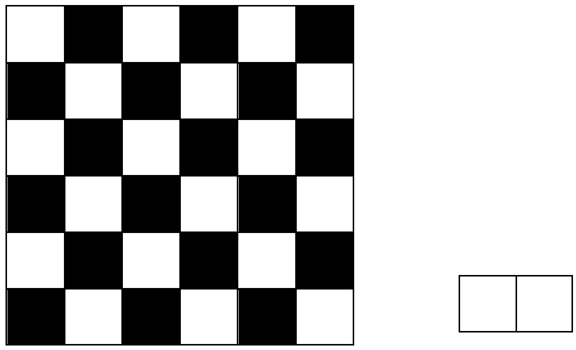
❖ Solução 2:

Em relação a solução alternativa do item anterior, temos que a escada está constituída por 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 quadradinhos e como cada quadradinho tem 1 cm^2 de área. Portanto, a área total da escada é 15 cm^2. Para calcular o perímetro podemos contar o número de segmentos verticais e o número de segmentos horizontais que compõem o contorno da quinta escada. Assim, temos então 4 + 4 segmentos verticais e 4 + 4 segmentos horizontais. Portanto, o perímetro total da escada é (5 + 5 + 5 + 5) = 20 cm.

5.9 EXEMPLO 9

(Adaptada da OBMEP - Banco de Questões 2013) Wanderson tem um tabuleiro 6 × 6 e peças de dominó como ilustrado na Figura 5.23 abaixo.

Figura 5.23: tabuleiro 6 × 6



Fonte: O Autor

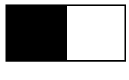
Cada uma das duas faces da peça de dominó é quadrada e tem a mesma medida de cada uma das casas do tabuleiro que é de 3 cm de comprimento.

a) Wanderson quer cobrir todo o tabuleiro utilizando suas peças de dominó de forma que cada face das peças de dominó fique posicionada sobre uma casa do tabuleiro. Quantas peças de dominó Wanderson precisará para fazê-lo? Qual é a área e o perímetro desse tabuleiro?

❖ Solução 1:

Começamos colorindo as peças de dominó de Wanderson em preto e branco como desenhado abaixo, ver Figura 5.24:

Figura 5.24: peça de dominó



Fonte: O Autor

Note que o tabuleiro de Wanderson pode ser então dividido em exatamente 18 pares de casas coloridos como as peças de dominó. Logo, é possível cobrir o tabuleiro usando exatamente 18 peças. Agora da **distinção entre medida e área**, pode-se dizer que a área do tabuleiro, Figura 5.23 é **dezoito dominós**.

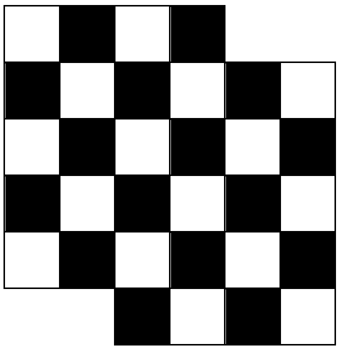
Observemos que esse novo tabuleiro tem 24 segmentos e adotando como unidade de medida o lado do **momominó** a medida do contorno de cada casa do tabuleiro e da **distinção de área e perímetro**, pode-se afirmar que o perímetro desse tabuleiro, Figura 5.23 é 24 u.c. Por outro lado, adotando como unidade de medida o lado do **dominó** e da **distinção de área e perímetro**, pode-se dizer que o perímetro desse tabuleiro é 12 u.c.

- ❖ Solução 2:

Observemos que $6 \times 6 = 36$ é par, logo esse tabuleiro pode ser coberto com $36/2 = 18$ peças de dominós. Como cada peça de dominó, Figura 5.24 tem área de $6 \times 3 = 18$ cm^2, logo esse tabuleiro, Figura 5.23 tem área de 18×18 cm^2 $= 324$ cm^2.

b) Renato recorta do tabuleiro de Wanderson quatro faces de forma que o novo tabuleiro tenha 32 casas como desenhado abaixo, Figura 5.25:

Figura 5.25: tabuleiro de 32 casas



Fonte: O Autor

Logo após, Renato desafia Wanderson a cobrir o novo tabuleiro usando as suas peças de dominó. Existe algum modo de Wanderson vencer o desafio? Qual é a área e o perímetro desse novo tabuleiro?

- ❖ Solução:

Podemos notar que esse novo tabuleiro de Wanderson pode ser dividido em exatamente 16 pares de casas coloridos como as peças de dominó, Figura 5.24

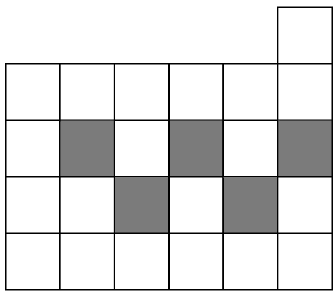
acima. Logo, é possível cobrir o tabuleiro usando exatamente 16 peças. Assim da **distinção entre medida e área**, pode-se afirmar que a área desse tabuleiro, Figura 5.25 é **dezesseis dominós**.

Podemos notar que esse novo tabuleiro tem 24 segmentos, sendo assim adotaremos como unidade de medida o lado do **momominó** a medida do contorno de cada casa do tabuleiro e da **distinção de área e perímetro**, pode-se concluir que o perímetro desse tabuleiro, Figura 5.25 acima é 24 u.c.

5.10 EXEMPLO 10

(Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2011) Divida a Figura 5.26 em cinco partes do mesmo formato e com áreas iguais de tal modo que cada parte contenha exatamente um quadrado cinza em seguida determine a área e o perímetro dessa figura.

Figura 5.26: tabuleiro recortado

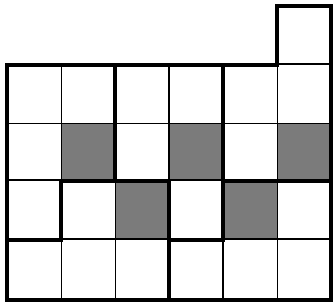


Fonte: O Autor

❖ Solução:

A solução do problema é a Figura 5.27 abaixo, formada por exatamente cinco P- pentaminós e da **distinção entre medida e área**, pode-se dizer que a área dessa figura é **cinco P- pentaminós**. Podemos notar que essa figura contém 22 segmentos congruentes. Adotando como unidade de medida o lado do **momominó** a medida do contorno de cada casa dessa figura e da **distinção de área e perímetro**, pode-se concluir que essa Figura 5.25, tem 22 u.c de perímetro.

Figura 5.27: tabuleiro coberto por P- pentaminós

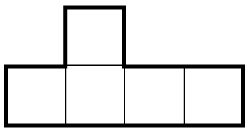


Fonte: O Autor

5.11 EXEMPLO 11

(Adaptada de Tabuleiros) É possível cobrir um tabuleiro 5 × 10 usando apenas peças Y- pentaminós como na Figura 5.28 abaixo? E que área essas peças vão ocupar nesse tabuleiro?

Figura 5.28: Y- pentaminó

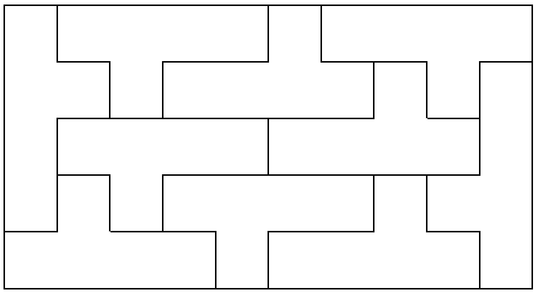


Fonte: O Autor

- Solução:

Note que para cobri-lo são necessárias 10 peças, como está representado na Figura 5.29 abaixo. Dessa forma, dizemos que o Y- pentaminó tem ordem 10. Veja que alguns poliminós já são um tabuleiro, como acontece com o monominó e o dominó. Por outro lado da **distinção entre medida e área,** pode-se concluir que a área desse retângulo é **10 Y- pentaminós.**

Figura 5.29: retângulo 5 × 10 coberto com Y- pentaminós

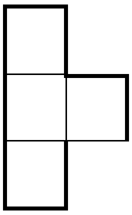


Fonte: O Autor

5.12 EXEMPLO 12

(Adaptada da OBMEP 2ª FASE – 2014) Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a Figura 5.30 abaixo. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.

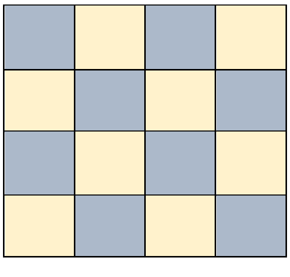
Figura 5.30: peça T- tetraminó



Fonte: O Autor

a) Desenhe na Figura 5.31 abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4 × 4 com essas peças.

Figura 5.31: tabuleiro 4 × 4

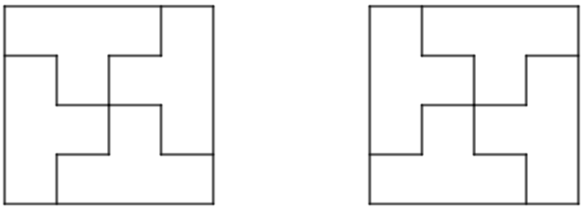


Fonte: O Autor

❖ Solução 1:

O Teorema 3.4 garante que os T- tetraminós sempre cobrem um tabuleiro de xadrez, logo 4 T- tetraminós como os da Figura 5.30 também sempre cobrem o tabuleiro da Figura 5.31 acima, pois esse tabuleiro representa a quarta parte do tabuleiro de xadrez. Na Figura 5.32 abaixo temos essas representações.

Figura 5.32: tabuleiros 4 × 4 cobertos por T- tetraminós



Fonte: O Autor

❖ Solução 2:

A Figura 5.32 acima apresentam as duas únicas maneiras possíveis de cobrir o tabuleiro 4 × 4.

b) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

❖ Solução 1:

Pelo Teorema 3.4, observemos que só é possível cobrir com peças T-tetraminós tabuleiros que sejam múltiplos 4, isto é, múltiplos do tabuleiros 4 × 4 = 16 quadradinhos, ou seja, por números quadrados perfeitos e como 80 não é um número quadrado perfeito, logo não é possível cobri-lo com essas peças.

❖ Solução 2:

Cada peça cobre exatamente 4 quadradinhos, e portanto 20 peças cobrem uma área formada por 80 quadradinhos. Como 80 não é um número quadrado perfeito, não existe um tabuleiro quadrado com exatamente 80 quadradinhos.

c) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10 × 10 com suas peças.

❖ Solução 1:

Pelo Teorema 3.4, observemos que só é possível cobrir com peças T- tetraminós tabuleiros que sejam múltiplos 4, isto é, múltiplos do tabuleiros 4 × 4 = 16 quadradinhos, ou seja, por números quadrados perfeitos e como 100 não é um número quadrado perfeito, logo não é possível cobri-lo com essas peças.

❖ Solução 2:

Para cobrir um tabuleiro 10 × 10, são necessárias 25 peças, uma vez que 100 = 4 × 25. Cada peça cobre 3 quadradinhos de uma cor e 1 da outra cor. Assim podemos dividir as peças que cobrem o tabuleiro em dois grupos:

Grupo 1: As que cobrem exatamente uma casa amarela (e, portanto, três azuis).

Grupo 2: As que cobrem exatamente três casas amarelas (e, portanto, uma azul).

Suponha que fosse possível distribuir as 25 peças sobre o tabuleiro cobrindo todas as suas casas.

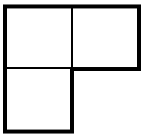
Se o número de peças do Grupo1 for par, o número de peças do Grupo 2 deve ser ímpar, pois a soma desses números deve ser igual à quantidade de peças usadas (25). Neste caso, o número de casas azuis cobertas deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que há 50 casas azuis num tabuleiro 10 × 10.

Se o número de peças do Grupo1 for ímpar, o número de peças do Grupo 2 deve ser par, pois, pelo mesmo motivo, a soma do número de peças destes dois grupos deve ser 25. Neste caso, o número de casas amarelas cobertos deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que também há 50 casas amarelas num tabuleiro 10 × 10.

5.13 EXEMPLO 13

(Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2013) Uma peça L- triminó, Figura 5.33 a seguir, que é composta por três quadrados.

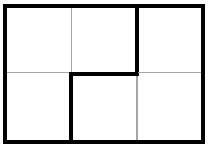
Figura 5.33: peça L- triminó



Fonte: O Autor

Podemos juntar triminós para formar figuras. Por exemplo, podemos juntar dois L- triminós para formar um retângulo 2 × 3, Figura 5.34 conforme observa-se abaixo:

Figura 5.34: retângulo coberto por L- triminós



Fonte: O Autor

a) Mostre que não é possível juntar L- triminós (sem sobrepô-los) de maneira a formar um quadrado 3 × 3.

❖ Solução 1:

O Teorema 3.2 nos garante que um quadrado não pode ser coberto por L- triminós quando n = 3, como é o caso aqui.

❖ Solução 2:

Vamos dividir um quadrado 3 × 3 em nove quadrados 1 × 1 numerados como na Figura 5.35 abaixo:

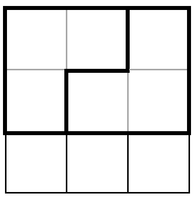
Figura 5.35: quadrado 3 × 3 numerado de 1 a 9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: O Autor

Aqui estamos supondo que cada uma das faces quadradas numeradas de 1 a 9 têm a mesma área de cada uma das três faces quadradas usadas para construir o triminó. Como cada triminó tem três faces, e o quadrado 3 × 3 tem nove, caso fosse possível montar tal quadrado usando triminós, a quantidade de triminós utilizada seria exatamente três, mas, podemos observar que é impossível fazê-lo, pois, haveria sobreposição de peças triminós. Logo não é possível juntar triminós para formar um quadrado 3 × 3, ver Figura 5.36 abaixo.

Figura 5.36: quadrado 3 × 3



Fonte: O Autor

b) Mostre que não é possível juntar triminós (sem sobrepô-los) de maneira a formar um quadrado 4 × 4.

❖ Solução 1:

O Teorema 3.2 nos garante que um quadrado 4 × 4 não pode ser coberto por L- triminós pois 3 não divide n, que nesse caso especifico aqui n é igual a 4, isto é, 3 não divide 4.

❖ Solução 2:

Um quadrado 4 × 4 pode ser dividido em 16 faces quadradas 1 × 1 como mostrado na Figura 5.37 abaixo:

Figura 5.37: quadrado 4 × 4 numerado de 1 a 16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fonte: O Autor

Aqui estamos supondo que cada uma das faces quadradas numeradas de 1 a 16 têm a mesma área de cada uma das três faces quadradas usadas para construir o triminó. Como cada L- triminó tem três faces, caso fosse possível montar tal quadrado usando L- triminós, a quantidade total de faces presentes nesse quadrado deveria ser um múltiplo do número 3. Como 16 não é um múltiplo de 3, é impossível juntar L- triminós para formar o quadrado.

c) Qual o número mínimo de L- triminós necessários para formar um quadrado? Justifique sua resposta.

❖ Solução 1:

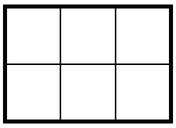
O Teorema 3.2 garante que um quadrado pode ser coberto com L-triminós quando 3 divide n e se restringe caso n = 3, como podemos observar no item (a). Logo o menor valor de n para cobrirmos um quadrado com L- triminós é 6, pois 3 divide 6. Portanto são necessários 36/3 = 12 triminós para formar um quadrado 6 × 6.

❖ Solução 2:

Já vimos nos item a) e b) que é impossível juntar L- triminós para montar quadrados 3 × 3 e 4 × 4 respectivamente. Utilizamos um argumento análogo ao do item b) para mostrar que não é possível também montar um quadrado 5 × 5. De fato, isso é consequência do fato de que tal quadrado teria um total de 25 faces quadradas 1 × 1, e 25 não é um múltiplo de 3 (ver a solução do item b)).

Vamos porém mostrar que é possível montar um quadrado 6 × 6. De fato, como foi dito no enunciado do problema, é possível juntar dois triminós para formar um retângulo 2 × 3 como ilustrado na Figura 5.38 a seguir:

Figura 5.38: retângulo 2 × 3



Fonte: O Autor

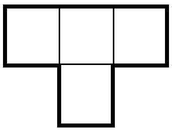
Podemos repetir o procedimento mais cinco vezes montando um total de seis desses retângulos 2 × 3. Para isso seriam necessários então 6 × 2 = 12 triminós. Podemos agora separar esses seis retângulos em três pares. Para cada um desses pares, podemos pegar os dois retângulos e posicioná-los lado a lado para formar um único retângulo 2 × 6. Como tínhamos três pares, vamos obter um total de três retângulos 2 × 6.

Finalmente, posicionamos esses três retângulos um sobre o outro para obter um quadrado 6 × 6. Como dito anteriormente, foi necessário utilizar uma quantidade de 12 L- triminós. Logo, essa é a quantidade mínima de triminós exigida para se formar um quadrado.

5.14 EXEMPLO 14

(Adaptada de Tabuleiros) Podemos cobrir um tabuleiro 10 × 10 usando apenas peças T- tetraminós como representado na Figura 5.39 abaixo?

Figura 5.39: peça T- tetraminó



Fonte: O Autor

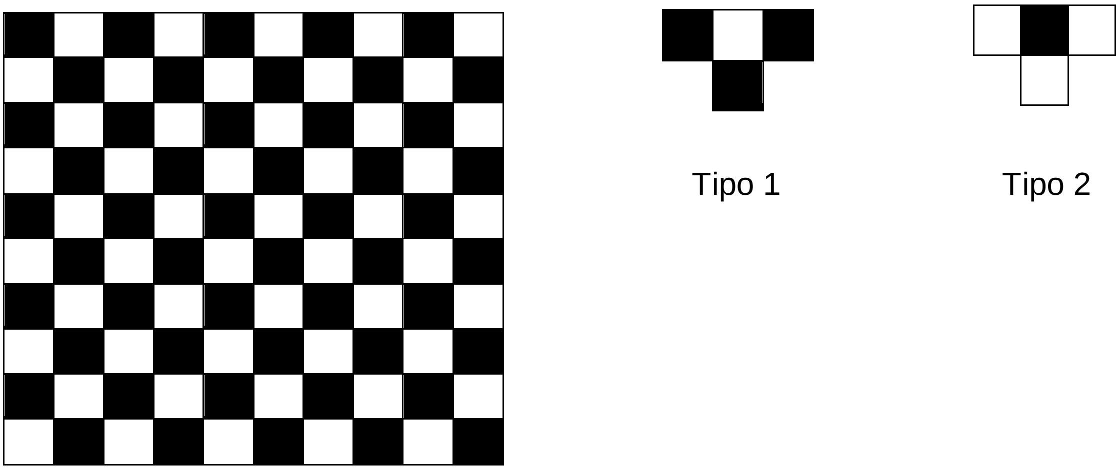
- Solução 1:

Pelo Teorema 3.4, observemos que só é possível cobrir um tabuleiro com T- tetraminós quando n for múltiplo de 4, pois as peças T- teraminós são formados por quatro quadradinhos de mesma área. Portanto neste caso não será possível cobrir com T- teraminós o tabuleiro da Figura 5.40 abaixo, visto que n = 10 não é múltiplo de 4.

❖ Solução 2:

Pinte o tabuleiro de branco e preto da maneira usual, como no tabuleiro xadrez, Figura 5.40. Note que ao colocarmos um T- tetraminó no tabuleiro ele pode assumir colorações do tipo 1 ou 2.

Figura 5.40: tabuleiro 10 × 10 e peças T- tetraminós



Fonte: O Autor

Suponha que ao cobrir o tabuleiro usamos A peças do tipo 1 (Figura 5.40.) e B do tipo 2 (Figura 5.40). Sabemos que devemos usar 25 peças no total ou seja A + B = 25. Cada peça do tipo 1 possui uma casa branca e cada peça do tipo 2 possui três casas brancas, e como temos ao todo 50 casas brancas no tabuleiro; A + 3B = 50. Por outro lado, cada peça do tipo 1 tem três casas pretas e cada peça do tipo 2 tem uma casa preta, e como temos ao todo 50 casas pretas nesse tabuleiro, então B + 3A = 50. Resolvendo o sistema abaixo, obtemos:

$$\begin{cases} A + 3B = 50 \\ B + 3A = 50 \end{cases}$$

Igualando as equações, temos:

$$A + 3B = B + 3A = 50$$

$$2B = 2A$$

$$B = A$$

Substituindo B = A na primeira equação, resulta:

$$A + 3A = 50$$

$$4A = 50$$

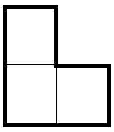
$$A = 12,5$$

Portanto o sistema acima não possui solução inteira. Logo, não é possível cobrir o tabuleiro.

5.15 EXEMPLO 15

(OBMEP – Banco de Questões 2011) Você dispõe de doze peças em formato de L-triminó, como a mostrada na Figura 5.41. Cada figura é formada por três quadrados de lado 1. Mostre como cobrir um quadrado 6 × 6 com essas peças, de modo que nenhum retângulo 2 × 3 seja formado por exatamente duas de tais peças.

Figura 5.41: peça L- triminó



Fonte: O Autor

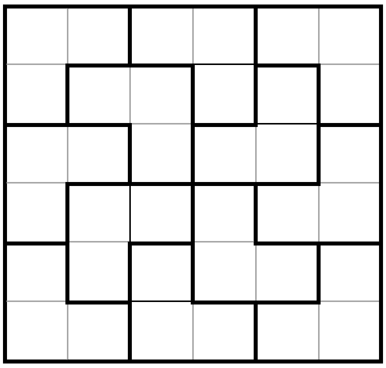
- Solução 1:

O Teorema 3.2 garante que um quadrado pode ser coberto com L- triminós quando 3 divide n, isto é, 3/6. Portanto são necessários 36/3 = 12 triminós para cobrir um quadrado 6 × 6, e uma das possíveis soluções estão exibidas na Figura 5.42 abaixo.

- Solução 2:

A Figura 5.42 abaixo exibe uma possível divisão com estas peças L- triminós para cobrir um quadrado 6 × 6.

Figura 5.42: quadrado 6 × 6 coberto por peças L- triminós



Fonte: O Autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que nos levou a elaborar esse trabalho de conclusão de curso com o uso dos poliminós na resolução de problemas de Geometria plana na Educação Básica, foi o fato de que esses problemas, poderiam ser resolvidos sem o uso de fórmulas matemáticas, o que de uma certa forma viria a facilitar o entendimento e a motivar o interesse dos nossos educandos e também por estes estarem presentes nas olimpíadas de Matemática nacionais.

Em meio as técnicas utilizadas nas resoluções das atividades que foram desenvolvidas no capítulo 4, elas avançam não somente no sentido de investigar as ideias e os conceitos geométricos envolvidos na Geometria Plana, como também a utilização de Teoremas que envolvem tais peças dos poliminós, sendo que estes irão nos dá embasamento na resolução destes problemas.

Foram investigados quais tópicos da Geometria que os educandos mais tinham dificuldades em relação a visualização, construção, comparação e cálculo dessas figuras planas, diante dessa pesquisa foi feito um planejamento prévio, buscando métodos de inserção dos recursos dos poliminós no processo de ensino-aprendizagem da Geometria Plana.

Sabe-se que a Geometria nos apresenta uma vasta variedade de conteúdos e conceitos a serem estudados e trabalhados. No entanto, tornou-se de certa forma nesse trabalho enfatizar alguns pontos que achamos pertinentes, como apresentar os conceitos de área e perímetro com o uso dos poliminós, pouco visto no Ensino Médio, mas com muita aplicabilidade na resolução de problemas das olímpiadas de Matemática nacionais.

A variedade de problemas que podem ser propostos e resolvidos com o uso de poliminós é muito ampla e não pôde ser totalmente desenvolvida nesta Dissertação de Mestrado. Mas as aplicações apresentadas acima podem ser adaptadas aos diferentes níveis de escolaridade, visando as necessidades dos educandos na perspectiva do ensino-aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

REFERÊNCIAS BÁSICAS PRELIMINARES

[1] Olimpíada Mineira de Matemática. Disponível em: www.mat.ufmg.br>olimpiada. Acesso em 23 de março de 2018.

[2] Olimpíada Paraense de Matemática-OPRM. Disponível em: www.mat.ufpr.br>oprm. Acesso em 28 de março de 2018.

[3] BERLEKAMP, E. **INTRODUÇÂO DE SALOMON W. GOLOMB.** Universidade da Califórnia, Los Angeles. Disponível em: coding.yonsei.ac.kr > kart - berlekamp pdf. Acesso em 09 de maio de 2018.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

[5] CAMPOS, Onofre. **SHINE, Carlos. Poliminós e o Tabuleiro de Xadrez**. OBM. Disponível em: www.obm.org.br.2017/01 > poliminós - 2, OBM. Acesso em: 21 de abril de 2018.

[6] GOLOMB, Salomon Wolf. **Polyominoes - Puzzles, Patterns, Problems and Packings**. Princeton University Press, 3^{nd}edition, pp. 198, 1996.

[7] MOTTA, Marcelo Souza. **Contribuições do Superlogo ao Ensino de Geometria do sétimo ano da Educação Básica.** 2008, 226 f. Dissertação de Mestrado – PREPES, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

[8] NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar** - Volume 2. Geometria Euclidiana Plana, 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[9] PARREIRA, Gabriela Aparecida; GANDULFO, Ana Maria Redolfi; GALLETTI, Agda Jéssica de Freitas; DA SILVA, Francisca Priscila Ferreira; BARBOSA, Jéssica de Abreu; CARDOSO, Lenise de Abreu. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. **CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E ARTÍSTICAS COM POLIMINÓS**.

Curitiba - Paraná, 2013. Disponível em: www.sbem.web1471.kinghost.net > anais > pdf. Acesso em 12 de abril de 2018.

[10] PEREIRA, Lucas Rodrigues. **Práticas de Ensino em Geometria Plana**. 2017, 174 p. Dissertação de Mestrado – PROFMAT, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Teófilo Otoni, 2017.

[11] PICCIOTTO, Henri. **POLYOMINO LESSONS**. 1986, 60 p. Livro de bolso. Idioma inglês. Editora Creative Publicações, 1986.

[12] POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTOS. **Tabuleiros.** Disponível em: www.face.ufg.br > Aula 09 – Tabuleiros. Acesso em 12 de abril de 2018.

[13] ROSSI, Izabela Caroline. **Aprendendo Isometria com Mosaicos.** 2014, 68 p. Dissertação de Mestrado – PROFMAT, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2014.

[14] SANTOS, Marli Regina dos. **Pavimentações do Plano: Um estudo com Professores de Matemática e Arte**. 2006, 177 p. Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro SP, 2006.

[15] SANTOS, Newton Luís. Poliminós e seu Curioso Universo. **2º Simpósio da Formação do professor de Matemática da Região Nordeste**, 1a edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[16] SILVA, Enedina Brodt; GÖRGEN, Ariane Cereça; DOS SANTOS, Mônica Bertoni; PORTANOVA, Ruth. **Pentaminós, uma experiência enriquecedora**. Artigo do Curso de Licenciatura Plena em Matemática - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul, 16 p.

[17] SILVA, Amanda Rodrigues marques; DE SANTANA, Walenska Maysa Gomes. **O uso dos poliminós para o ensino de área e perímetro:** Uma proposta para o 6º ano do Ensino Fundamental. I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática. Bonito 2016. Mato Grosso do Sul.

[18] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Disponível em: www.obmep.org.br. Acesso em 10 março de 2018.

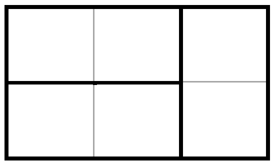
[19] XII Olimpíada Regional de Matemática - UFSC. Disponível em: www.orm.mtm.ufsc.br. Acesso em 13 de fevereiro de 2018.

ANEXO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS SOBRE POLIMINÓS

A1 (Adaptada da OBMEP 2ª Fase - 2017) Marcela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros quadriculados com peças retangulares e cada uma dessas peças cobre exatamente duas casas do tabuleiro. A Figura A.1 abaixo mostra uma maneira de cobrir um tabuleiro 2 x 3 utilizando três peças de dominós. Desenhe as outras duas maneiras de cobrir com três peças o mesmo tabuleiro.

Figura A.1: tabuleiro coberto por dominós

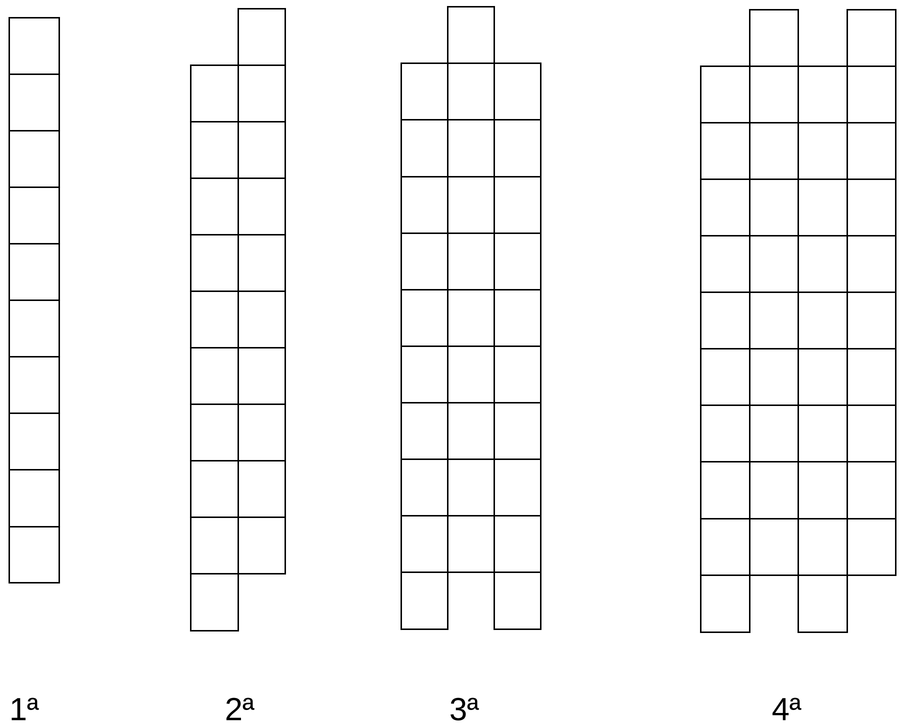


Fonte: O Autor

A.2 (Adaptada da OBMEP 2016 - 1ª Fase) Abaixo temos uma sequência de figuras (ou peças) formadas por quadradinhos de 1 cm de lado. Cada figura da sequência, a partir da segunda, é formada acrescentando-se à figura anterior um retângulo igual a 1ª figura da esquerda como representado na Figura A.2 abaixo, deslocando-o de um quadradinho, ora para cima, ora para baixo, como mostra a ilustração. Qual é o perímetro da figura com 1 000 quadradinhos?

a) 220 cm b) 380 cm c) 400 cm d) 414 cm e) 418 cm

Figura A.2: peças formadas por quadradinhos de lado 1 cm



Fonte: O Autor

A.3 (Adaptada da XII Olimpíada Regional de Matemática - UFSC 2ª Fase 2009) Quadrados de lado 1 são empilhados formando sucessivamente figuras (peças dos poliminós) com 3 quadrados na base, 5 quadrados na base, 7 quadrados na base, e assim por diante. Calcule o perímetro da figura que tem 2009 quadrados em sua base. (Observação: o perímetro de uma figura é o comprimento da linha que delimita a figura. Por exemplo, a Figura A.3 abaixo tem perímetro 10 e a Figura A.4 tem perímetro 16).

Figura A.3: tetraminó

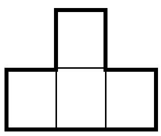


Figura A.4: nonaminó

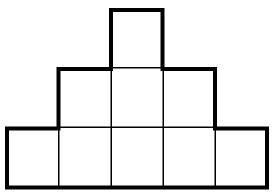
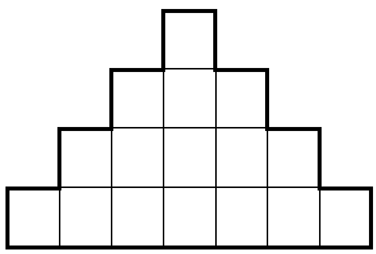


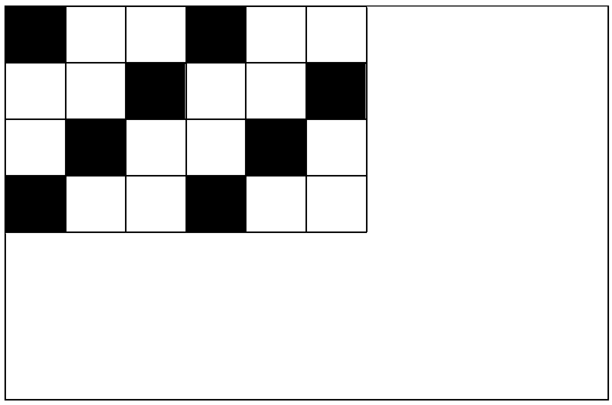
Figura A.5: hexadecaminó



Fonte: O Autor

A.4 (Adaptada da OPRM 2016 - 3ª Fase) Um piso é feito de ladrilhos (peças monominós) brancos e pretos, quadrados e de mesmo tamanho. Na primeira fila horizontal, a cada ladrilho preto seguem-se dois brancos. Na segunda fila, a cada dois ladrilhos brancos segue-se um preto. A terceira fila começa com um ladrilho branco e, a partir daí, a cada ladrilho preto seguem-se dois brancos. Nas filas 4, 7,10, ... repete-se a distribuição da primeira fila. Nas filas 5, 8,11, ... repete-se a distribuição da segunda fila e nas filas 6, 9,12, ... repete-se a distribuição da terceira fila. Desse modo fica preenchido todo o piso. Na Figura A.6 abaixo estão desenhados apenas alguns ladrilhos de uma parte quadrada 2015 × 2015 do piso. Quantos ladrilhos pretos há em todo o quadrado 2015 × 2015?

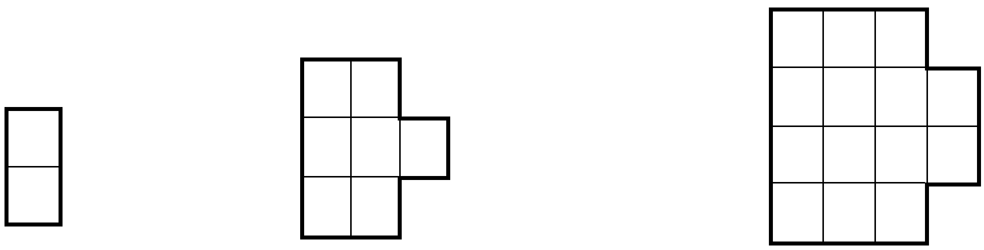
Figura A.6: piso coberto por peças monominós



Fonte: O Autor

A.5 (Adaptada da OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA - 2006) Observe o padrão das figuras abaixo, a 1ª um dominó, a 2ª um heptaminó e a 3ª um tetradecaminó:

Figura A.7: peças dos poliminós



1ª figura 2ª figura 3ª figura

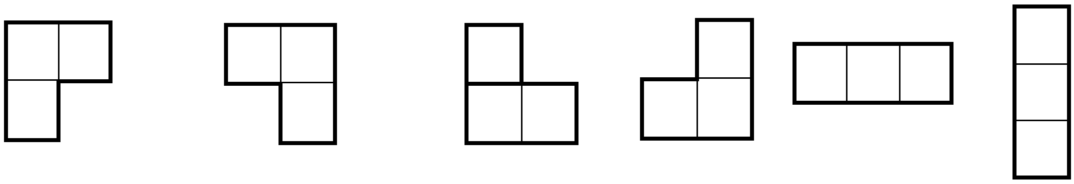
Fonte: O Autor

a) Qual é a quinta figura?

b) Quantos quadradinhos são necessários para construir a figura de número 2006?

A.6 (Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2017) Queremos cobrir um tabuleiro quadriculado com certas pecinhas sem sobreposição e de modo que nenhuma parte delas fique fora do tabuleiro. Usaremos pecinhas, formadas por quadradinhos, chamadas L- triminós e I- triminós e que podem ser rotacionadas nas posições descritas na Figura A.8 a seguir.

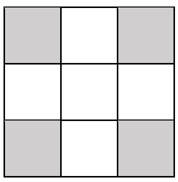
Figura A.8: peças L- triminós e I- triminós



Fonte: O Autor

Para provar que é possível realizar uma cobertura, basta mostrar uma maneira de posicionar as pecinhas. Por outro lado, para provar que não é possível realizar alguma cobertura, nem sempre é conveniente testar todas as configurações possíveis de peças e muitas vezes precisamos esboçar argumentos engenhosos. Por exemplo, provaremos que não é possível cobrir um tabuleiro 3×3 usando apenas L-triminós, ver Figura A.9.

Figura A.9: tabuleiro 3×3



Fonte: O Autor

a) Mostre uma maneira de cobrir um tabuleiro 3 × 4 usando apenas L- triminós.

b) Prove que não é possível cobrir um tabuleiro 3 × 5 usando apenas L- triminós.

c) É possível cobrir o tabuleiro 3 × 5 usando exatamente um I-triminó e alguns L-triminós. Determine as posições que o I-triminó pode ocupar de modo que o resto do tabuleiro possa ser coberto com L-triminós.

A.7 (Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2016) Um poliminó é uma sequência de quadradinhos 1 × 1 justapostos compartilhando lados em comum com seus vizinhos e formando uma única peça. Os poliminós de dois quadradinhos são conhecidos como dominós e os poliminós com quatro quadradinhos são conhecidos como tetraminós, as pecinhas do famoso jogo Tetris. A Figura A.10 a seguir mostra um quadrado 3 × 3 com números de 1 até 9 escritos em cada um de seus quadradinhos 1 × 1.

Figura A.10: quadrado 3 × 3 numerado de 1 a 9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: O Autor

Sabendo que 1 + 2 + ... + 9 = 45, podemos tentar dividir o quadrado em 3 poliminós com mesma soma, cada um com soma $\frac{45}{3}$ = 15. A Figura 6.11 a seguir, mostra uma maneira de fazer isto.

Figura A.11: quadrado 3 × 3 coberto por poliminós

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: O Autor

a) Mostre que não é possível dividir o quadrado 3 × 3 em uma quantidade maior que três de poliminós de mesma soma.

b) Considere o quadrado 4 × 4 com os números de 1 até 16, escritos em ordem crescente como indicado na Figura A.12 abaixo.

Figura A.12: quadrado 4 × 4 numerados de 1 a 16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

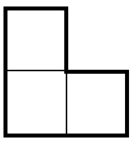
Fonte: O Autor

Mostre como dividir este quadrado em dois poliminós de modo que a soma dos números em cada um deles seja a mesma.

c) Considere o quadrado 5 × 5 com os números de 1 até 25 escritos em ordem crescente seguindo o padrão da figura anterior. Mostre que não é possível dividir este quadrado em dois ou mais poliminós com a mesma soma dos números em cada um deles.

A.8 (Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2015) Paladino deve pintar de preto algumas casas de um tabuleiro 4 × 4 de modo que quaisquer três quadradinhos que formem uma figura congruente ao desenho abaixo (peça L- triminó), Figura A.13 tenham pelo menos um de seus quadradinhos pintados. Qual o menor número de quadradinhos que devem ser pintados por Paladino?

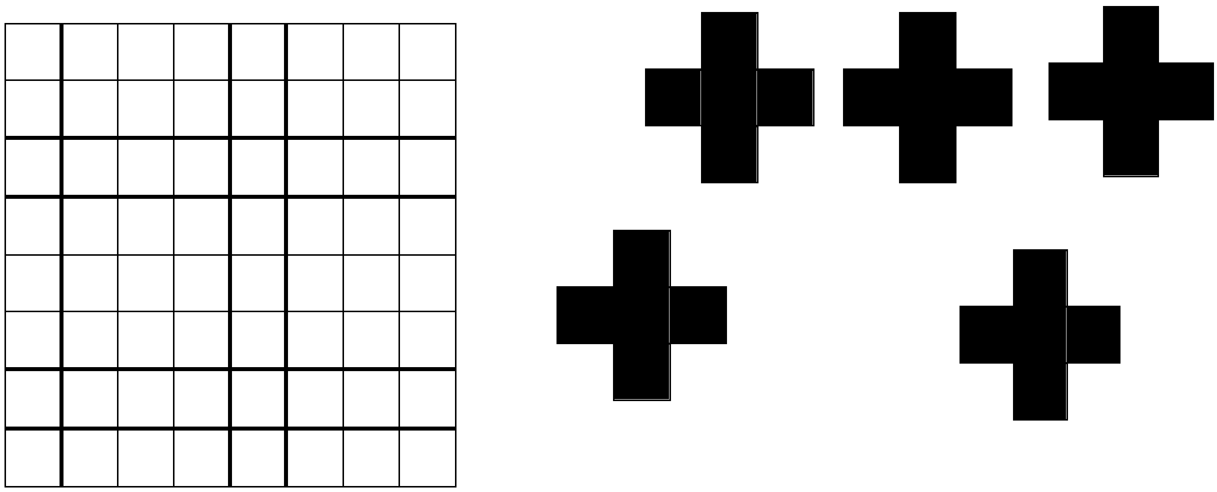
Figura A.13: peça L- triminó



Fonte: O Autor

A.9 (Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2013) Luana precisa colocar sobre um tabuleiro de 8 × 8 cruzes (peças X- pentaminós) do formato desenhado a seguir, Figura A.14 abaixo.

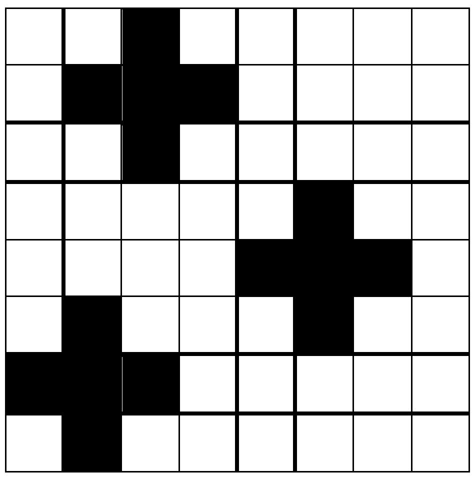
Figura A.14: tabuleiro 8 × 8 e peças X- pentaminós



Fonte: O Autor

de modo que duas cruzes não ocupem o mesmo quadrinho. Por exemplo:

Figura A.15: tabuleiro coberto por três peças X- pentaminós

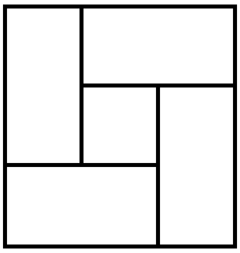


Fonte: O Autor

No máximo, quantas cruzes Luana pode colocar sobre o tabuleiro?

A.10 (Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2013) Dona Lígia tem um terreno em forma de quadrado. Ela decide dividi-lo em cinco regiões, sendo quatro retângulos (dominós) e um quadrado (monominó) como ilustrado na Figura A.16 abaixo:

Figura A.16: quadrado coberto um monominó e quatro dominós



Fonte: O Autor

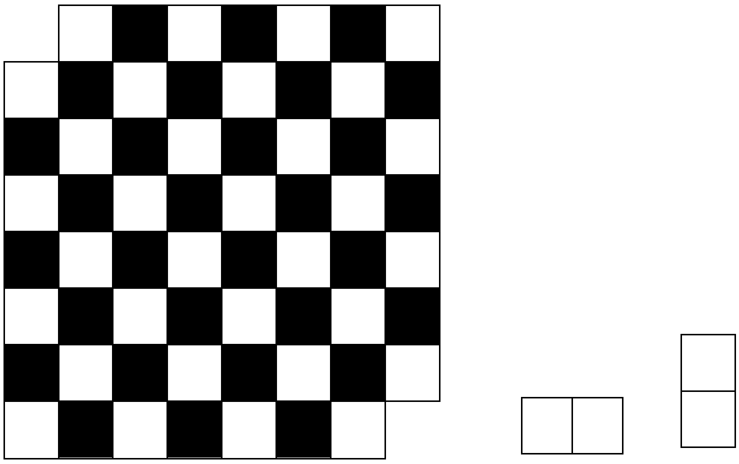
Na Figura A.16 temos que:

- O quadrado do centro tem área igual a 64 m^2;
- Os lados maiores dos quatro retângulos têm o mesmo comprimento;
- As quatro regiões têm o mesmo perímetro;
- Cada lado do retângulo tem o dobro do lado do quadrado.

Determine a área e o perímetro do terreno de Dona Lígia.

A.11 (Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2011) A Figura A.17 abaixo mostra um tabuleiro 8 × 8 no qual duas casas foram retiradas (a do canto inferior direito e a do canto superior esquerdo). É possível cobrir este tabuleiro com 31 dominós 2 × 1? Cada dominó pode ser colocado na horizontal ou na vertical cobrindo exatamente duas casas.

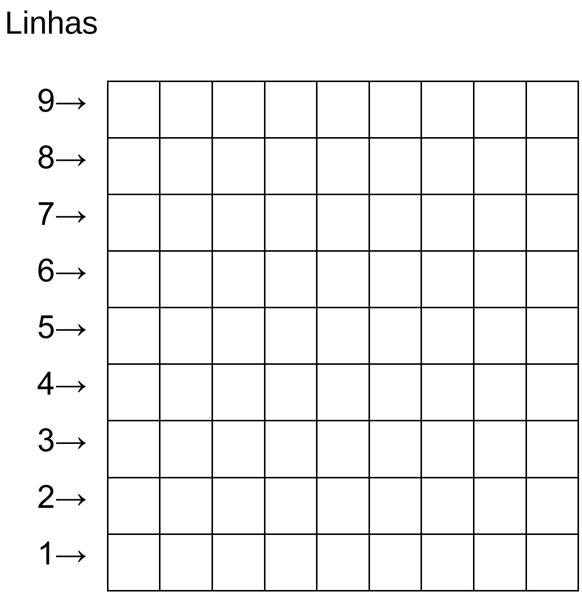
Figura A.17: tabuleiro 8 × 8



Fonte: O Autor

A.12 (Adaptada da OBMEP – Banco de Questões 2011) Considere o tabuleiro 9 × 9 mostrado na Figura A.18 abaixo. As linhas estão numeradas de 1 a 9.

Figura A.18: tabuleiro 9 × 9

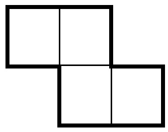


Fonte: O Autor

Colorimos as casas das linhas ímpares do tabuleiro com as cores azul e branco, alternadamente, começando com azul e pintamos as casas das linhas pares do tabuleiro de cinza e vermelho, alternadamente, começando com a cor cinza.

a) Quantas casas foram pintadas com cada cor?
b) Qual é o número máximo de peças da forma da Figura A.19 abaixo que podem ser colocadas, sem sobreposição, nesse tabuleiro?

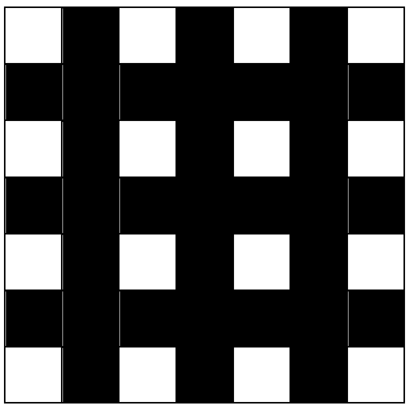
Figura A.19: Z- tetraminó



Fonte: O Autor

A.13 (Adaptada da OMM 2016) O diagrama abaixo, Figura A.20 representa um piso de tamanho 7 m × 7 m formado por azulejos quadrados (monominós) pretos e brancos de lado de comprimento 1 m. Observe que os cantos têm azulejos brancos.

Figura A.20: piso coberto por monominós



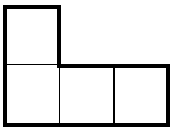
Fonte: O Autor

a) Qual é a área preta deste piso?

b) Se um piso 15 × 21 é preenchido da mesma forma, ainda com cantos brancos, quantos azulejos pretos serão necessários?

A.14 (Adaptada - Tabuleiros) Para que valores de m, n podemos cobrir um tabuleiro m × n usando apenas peças L- tetraminós como na Figura A.21 abaixo?

Figura A.21: peças L- tetraminó



Fonte: O Autor

A.15 (Adaptada – Tabuleiros: Estônia 1993) Para quais naturais n é possível cobrir um retângulo de tamanho 3 × n com peças mostradas na Figura A.22 abaixo sem sobreposição?

Figura A.22: peças L- triminó e Z- tetraminó

Fonte: O Autor