INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUIÇÃO ASSOCIADA: IFPI – CAMPUS FLORIANO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MEDIAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA: O PROCESSO DE TRANSFORMAÇÃO DOS ALUNOS QUE ATUARAM NA OBMEP

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

Orientador: RONALDO CAMPELO DA COSTA
Coorientador: ODIMÓGENES SOARES LOPES

Junho/2018
Floriano – PI

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MEDIAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA: O PROCESSO DE TRANSFORMAÇÃO DOS ALUNOS QUE ATUARAM NA OBMEP

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Ronaldo Campelo da Costa
Coorientador: Odimógenes Soares Lopes

Junho/2018
Floriano – PI

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Floriano

S231g Santos, Ricardo de Castro Ribeiro

Geogebra como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP. [manuscrito]/ Ricardo de Castro Ribeiro Santos– Floriano - PI, 2018.
180f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Ronaldo Campelo da Costa."

1. Geometria. 2. Obmep. 3. GeoGebra. 4. Tecnologias digitais. I. Titulo.

CDD 515

FOLHA DE APROVAÇÃO: BANCA DE DEFESA DE MESTRADO

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MEDIAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA: O PROCESSO DE TRANSFORMAÇÃO DOS ALUNOS QUE ATUARAM NA OBMEP

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 29/06/2018.

BANCA EXAMINADORA

Ronaldo Campelo da Costa

Prof. Dr. Ronaldo Campelo da Costa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI
Orientador

Roberto Arruda Lima Soares

Prof. Dr. Roberto Arruda Lima Soares
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI
Avaliador Interno

Pedro Antonio Soares Junior

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior
Universidade Estadual do Piauí - UESPI
Avaliador Externo

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os amantes da pesquisa científica e que buscam constantemente alternativas inovadoras nos métodos de ensino.

AGRADECIMENTOS

À família, pela compreensão nos longos momentos de ausência.

Aos professores do PROFMAT pela dedicação e empenho na compreensão e aperfeiçoamento dos conteúdos ministrados, em especial ao nobre orientador Ronaldo.

Ao amigo de longa data e coorientador Odimógenes, por estar sempre à frente na tomada de decisões que contribuem com a realidade educacional de nossa região e sem o qual o PROFMAT em Floriano não seria a realidade que é hoje.

Aos colegas de turma pela convivência sadia e compartilhamento de saberes.

Aos alunos participantes do projeto pelo esforço e contribuição disponibilizados na proposta de trabalho.

Ao parceiro virtual Bruno Glasses pela excelência no material de pesquisa disponibilizado e sem o qual a passagem pelas disciplinas do programa teria sido bem mais árdua.

RESUMO

Certamente um dos grandes desafios dos docentes na atualidade é adequar os conteúdos teóricos de matemática com as tecnologias, em especial, os que tratam de geometria. Nesse sentido, podemos destacar em nossa proposta uma forma de ensino de geometria mediado pelas tecnologias, visando apoiar e complementar as capacidades humanas na construção de associações ou sistemas mais eficientes que podem levar à melhor compreensão de problemas. Esse trabalho originou-se a partir de pesquisas com alunos da educação básica em atividades envolvendo a resolução de problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e teve como objetivo analisar impactos na aprendizagem de geometria dos estudantes que utilizaram o *software* GeoGebra como ferramenta de mediação na resolução de problemas desencadeadores oriundos das provas da Obmep. A metodologia adotada foi um estudo de caso que envolveu alunos do ensino básico e objetivou relacionar conhecimentos matemáticos, tecnologias e didática, assim como também associou a prática da atividade ensino em todo o processo de investigação. Quanto à forma de abordagem dos problemas em nossa investigação, utilizamos a pesquisa qualitativa. Como procedimentos para construção da sequência didática, foi necessário primeiramente selecionar questões de geometria da Obmep. Essas questões selecionadas possibilitaram a construção dinâmica de figuras geométricas pelos participantes da pesquisa, utilizando o *software* GeoGebra e, a partir daí, iniciamos a estruturação dos encontros formativos. Ao longo da aplicação da sequência didática foram realizadas as coletas de informações para análise. As principais formas de coletas que foram usadas foram: gravação em áudio das discussões entre os participantes, anotações feitas ao longo das interações, arquivos salvos das construções realizadas através de mídias digitais, relatórios dos estudantes e aplicação de questionário. Os registros coletados foram usados para realizar a análise segundo a Teoria da Atividade. O projeto foi desenvolvido no Colégio Técnico de Floriano com a participação de 31 alunos. Ao todo foram realizados 12 encontros. Os resultados mostram que a aplicação do projeto contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento dos participantes quanto à interpretação de questões da Obmep, bem como quanto à utilização de um *software* Matemático. O estudo terá continuidade no ano de 2018 com a participação de quatro dos 31 alunos que participaram do projeto em 2017.

Palavras-chave: Geometria, Obmep, GeoGebra, Tecnologias digitais.

ABSTRACT

Certainly one of the great challenges of teachers today is to adapt the theoretical contents of mathematics to the technologies, especially those dealing with geometry. In this sense, we can highlight in our proposal a way of teaching geometry mediated by technologies, aiming to support and complement human capacities in building associations or more efficient systems that can lead to better understanding of problems. This work originated from researches with students of basic education in activities involving the resolution of problems of the Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools and had as objective to analyze impacts in the learning of geometry of the students who used GeoGebra software as a mediation tool in solving the problems triggered by the Obmep tests. The methodology adopted was a case study that involved students of basic education and aimed to relate mathematical knowledge, technologies and didactics, as well as associated the practice of teaching activity throughout the research process. As for the approach to problems in our research, we use qualitative research. As procedures for constructing the didactic sequence, it was necessary to first select questions of Obmep geometry. These selected questions made possible the dynamic construction of geometric figures by the research participants, using the GeoGebra software and, from there, we started the structuring of the formative meetings. Throughout the application of the didactic sequence the information collections were carried out for analysis. The main forms of collections that were used were: audio recording of the discussions among the participants, annotations made during the interactions, files saved from digital media constructions, student reports and questionnaire application. The collected records were used to perform the analysis according to the Theory of Activity. The project was developed at the Floriano Technical College with the participation of 31 students. In all, 12 meetings were held. The results show that the application of the project contributed significantly to the development of the participants regarding the interpretation of Obmep issues as well as the use of Mathematical software. The study will continue in 2018 with the participation of four of the 31 students who participated in the project in 2017.

Keywords: Geometry, Obmep, GeoGebra, Digital technologies.

ÍNDICE ABREVIATURAS E SIGLAS

AOE	Atividades Orientadoras de Ensino
CTF	Colégio Técnico de Floriano
EMTA-1	1º ano do Ensino Médio Concomitante com Agropecuária
IFPI	Instituto Federal do Piauí
LEM	Laboratório de Educação Matemática
LI	Laboratório de Informática
LI.1	Laboratório 01 de Informática
LI.2	Laboratório 02 de Informática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
Pol	Polígono
UFPI	Universidade Federal do Piauí

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. Introdução

A educação no sistema público brasileiro se apresenta como um grande desafio para professores e estudantes, já que por estarem envolvidos diretamente nesse processo, vivenciam a jornada da busca por uma melhor qualidade no ensino oferecido pela escola. Ao tratarmos do ensino de matemática como objeto do nosso estudo, temos aí outro ponto que sempre gera inquietação por boa parte dos estudantes, e que em sua maioria, são as causas de graves problemas na apropriação de conceitos de matemática, o que leva ao insucesso em matemática.

Diversas são as tentativas de minimizar esses problemas, a investigação em educação matemática pode permitir uma diferente dimensão. Ao pensarmos nas causas principais que provocam o insucesso em matemática verificamos que ela é uma disciplina culturalmente constituída pela sociedade e direcionada ao insucesso. Consequência de como o sistema educativo define o seu papel e o modo com que ela é internalizada por todos os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Uma outra alternativa para superar essas dificuldades são as ações desenvolvidas pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas que pode também viabilizar mudanças significativas nesse quadro.

As Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas – Obmep[1] têm como principal objetivo levar aos estudantes uma matemática contextualizada e que envolvem situações que dependem de uma boa base conceitual, de um bom raciocínio lógico e de muita paciência no processo de resolução, e trabalhar todos esses fundamentos dentro do ambiente das escolas públicas, saindo do tradicionalismo por vezes arraigado na comunidade escolar, torna-se um desafio ainda maior.

Nossa proposta de investigação foi um produto de pesquisas desenvolvidas com estudantes de ensino básico da rede federal de educação. Em 2014, surgiu o programa Obmep nas escolas, uma ação voltada para professores de matemática das escolas públicas que tinha como objetivo estimular atividades extraclasse com o uso dos materiais da Obmep para auxiliar os docentes no ensino de modelos de questões das olimpíadas para os estudantes participantes do programa. Assim, iniciamos nossas pesquisas no Colégio Técnico de Floriano (CTF) por meio de encontros formativos onde foram trabalhadas Atividades Orientadoras de Ensino (AOE) em que o tema era a geometria.

---

[1] A **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas** (Obmep) é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA - e tem como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área. Para maiores informações acesse: http://www.obmep.org.br

No decorrer de nossas pesquisas observamos uma dificuldade acentuada dos estudantes na compreensão dos problemas de geometria, como também na construção, análise e interpretação das figuras geométricas. A partir dessa problemática, surgiu a ideia de utilizar o *software* GeoGebra nas aulas de geometria como apoio às questões, oportunizando aos estudantes uma melhor visualização, construção e manipulação das figuras. Assim, o estudante poderia criar conjecturas e análises mediante essa nova interface dinâmica, fato que não teria como ser observado imediatamente visto a construção, fora do GeoGebra, apresentar-se de forma estática.

Em anos letivos anteriores, os conteúdos de geometria plana, bem como a análise de questões da Obmep já haviam sido ministradas sem o auxílio de qualquer outro recurso tecnológico. De posse dessas experiências em um ambiente não digital, decidimos sondar neste estudo a sua aplicabilidade, em um ambiente de aprendizagem dinâmico para investigarmos quais as contribuições do uso de tecnologias digitais computadorizadas, especialmente o *software* GeoGebra, para o processo de interpretação dos problemas de geometria da Obmep pelos estudantes do ensino médio do Colégio Técnico de Floriano?

A procura por metodologias inovadoras que possibilitem outros horizontes para a melhoria da qualidade do ensino tem sido contínua na comunidade de educadores matemáticos. Nesse contexto, apresentamos nossas propostas e reflexões sobre a utilização do *software* GeoGebra como instrumento mediador no ensino de geometria aliado às questões da Obmep.

Ao contrário dos modos de ensino tradicionais, procuramos desenvolver uma metodologia onde está presente o uso das tecnologias digitais, com destaque para as tecnologias digitais computadorizadas, que no nosso estudo focamos nas atividades realizadas com uso do *software* GeoGebra. Tais atividades favoreceram o processo de construções das figuras geométricas planas e espaciais, ampliando a visão e interpretação do estudante por meio de construções, que antes eram de uma forma estática, e agora com o recurso tecnológico apresentam-se de forma dinâmica.

É importante ressaltar, no entanto, que ao propor o ensino como atividade que objetiva a apropriação do conhecimento científico, é preciso que o professor se conscientize em relação ao material didático como um instrumento mediador, sendo capaz de exercer o seu papel a fim de tornar a aprendizagem mais significativa. Desse modo, o material didático poderá proporcionar ao professor mais possibilidades e condições de organizar o ensino, permitindo trabalhar os conceitos em sala de aula e reformular sua metodologia (COSTA; MOURA, 2016).

Neste sentido, nas atividades realizadas, os estudantes foram desafiados a analisar as questões de geometria da Obmep trabalhando com o *software* GeoGebra, sendo capazes de criar conjecturas e conclusões que os ajudavam na interpretação e compreensão dos problemas que, posteriormente, deveriam ser resolvidas sem o auxílio do *software*.

Esta pesquisa teve como objetivo analisar impactos na aprendizagem de geometria nos estudantes que utilizam o *software* GeoGebra como ferramenta mediadora para resolverem problemas desencadeadores oriundos da Obmep. O estudo foi elaborado em 5 capítulos. O primeiro capítulo destina-se à introdução onde são apresentados os argumentos que justificam a pesquisa, um breve histórico das atividades do pesquisador, a problemática de estudo a ser investigado e os objetivos.

No segundo capítulo, apresentamos uma abordagem teórica, realizada a partir de pesquisas em artigos, teses e dissertações de mestrados, indo desde o ensino da matemática e uso de tecnologias até a Teoria da Atividade e mediação com enfoque na aprendizagem matemática.

No terceiro capítulo expomos a Metodologia do trabalho. A metodologia fundamentou-se em um estudo de caso com abordagem qualitativa em que foram utilizadas Atividades Orientadoras de Ensino como sequência didática, intermediando o pré-teste e o pós-teste, bem como aplicação de questionário.

No quarto capítulo apresentamos os resultados da pesquisa. Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos durante a aplicação das Atividades Orientadoras de Ensino planejadas no projeto, bem como os registros obtidos por meio das descrições deixadas pelos participantes nessas atividades, tais registros correspondem às suas falas e aos materiais produzido durante as construções das soluções dos problemas no *software* GeoGebra.

Finalizamos nossa pesquisa com o quinto capítulo, onde apresentamos as conclusões e orientações para trabalhos futuros e em seguida as referências e apêndices.

2. Abordagem Teórica

2.1. Ensino de Matemática

O Ensino de Matemática baseado apenas na manipulação de códigos e símbolos, sem associar os significados atribuídos a eles conforme a contextualização do seu aprendizado e apresentando o pensamento matemático já pronto, tem produzido um grande fracasso escolar nessa disciplina e consequentemente baixos índices na apropriação de conhecimentos e competências matemáticas. Tendo em vista essa realidade, nossa proposta de trabalho visa associar o uso de um *software* matemático como ferramenta de ensino para resolução de questões de Olimpíadas de Matemática, visando que haja um aprendizado significativo e o aluno seja o agente ativo na apropriação do conhecimento.

Segundo Luiz e Col (2013), este ensino deve estar relacionado com práticas do cotidiano e com outras áreas do conhecimento, isso porque ensinar matemática não explicitando a sequência lógica dos conceitos e finalidades, pouco tem a contribuir para a formação integral do estudante.

Desse modo,

> O docente necessita proporcionar um ambiente motivador de tal modo que todos os alunos se sintam seguros e capazes de solucionar os desafios propostos. Para melhor viabilizar o ensino da matemática e trabalhar de forma lúdica, dinâmica, sistêmica e produtiva, de modo que o ensino se torne prazeroso e não maçante. Nessa perspectiva, tem-se fomentado algumas considerações a respeito de diversas possibilidades metodológicas, cabendo ao professor empregar a que julgar mais conveniente em seu projeto de trabalho (LUIZ & COL, 2013, p. 5).

O educador matemático precisa compreender a matemática como criação humana em resposta às necessidades coletivas do ser humano (cultura) e apropriar-se dela como instrumento de conhecimento, para poder mediar junto a seus alunos, a apropriação e recriação deste conhecimento. Precisa ainda, compreender como se dá a aprendizagem dos conceitos matemáticos e organizar seu ensino de modo a propiciar tal aprendizagem, analisando e explicitando os pressupostos contidos nos procedimentos de ensino. Nesse sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), afirmam que,

> O ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 2007, p. 26).

Nesse contexto, o ensino da matemática é tão importante que além de estar relacionado a outras ciências, é capaz de estruturar a maneira de pensar e agir do indivíduo em que,

> [...] a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2007, p.40).

Nesse sentido, nossa proposta irá contribuir para que o aluno consiga construir, visualizar e interpretar através da prática, problemas desafiadores que de maneira geral são apresentados de forma estática nos desafios propostos, motivando-o a de fato analisar questões de Olimpíadas ao invés de apenas “marcar uma alternativa sem análise” como quase sempre ocorre durante as aplicações.

2.2. Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep) que teve início em 2005 é um importante projeto implementado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada e pela Sociedade Brasileira de Matemática, incentivado pelo Governo Federal, no intuito de favorecer o interesse pela Matemática nos estudantes de escolas públicas. De maneira geral, uma Olimpíada de Matemática é composta por provas envolvendo problemas matemáticos intrigantes que exigem dos participantes, além de um conhecimento elementar dos conteúdos básicos de matemática, uma habilidade imaginativa e interpretativa, necessitando normalmente de criatividade e improvisação para serem analisados corretamente (TODESCHINI, 2012).

Em se tratando de problemas genuínos e de investigação, podemos destacar como se deu o processo de escolha do nosso problema de pesquisa que integrou atividades de ensino e a preparação de alunos para a Obmep. Durante os vários anos como docente da rede pública de Ensino e sempre participando ativamente dos processos de aplicação da Obmep, pôde-se perceber que não havia nenhum interesse por parte dos alunos em de fato analisar e resolver corretamente as questões propostas. O dia de aplicação tratava-se mais de um feriado antecipado, visto que em pouco mais de 30 minutos os participantes entregavam as provas e cadernos de respostas, demonstrando claramente que nem chegaram a analisar o conteúdo e em seguida iam todos embora. Também não havia por parte dos docentes uma preparação direcionada para auxiliar o aluno quanto à análise dessas questões que querendo ou não, exigem certa atenção quanto a fundamentos e propriedades. Logo, para os alunos, a Obmep tratava-se de uma prova qualquer, sem a menor importância. Aqui no caso estamos falando de um altíssimo investimento do Governo com a elaboração, confecção e envio dos cadernos de provas aos polos de aplicação com o objetivo de melhorar o ensino de matemática, fazendo da Obmep uma importante aliada na inclusão social dos estudantes.

De forma mais objetiva, Pinheiro (2014), define a Obmep:

> Apesar de a Obmep ser tomada pelo Governo como uma política pública de inclusão, examino-a como uma rede de táticas de governamento. Em outras palavras, um meio para chegar-se a um fim (estratégia), nesse caso, uma das maneiras para conseguir alunos que saibam competir e ser empreendedores de si. O Governo utiliza a competitividade como estratégia para constituir sujeitos competitivos e individualistas que desempenhem seu papel na sociedade neoliberal. Para conseguir alcançar seus objetivos, um dos meios é a Obmep, pois esta possui a característica de ocorrer no campo prático. A Obmep é um esquema operante que se modifica e se transforma no decorrer das avaliações dos resultados obtidos para alcançar as estratégias almejadas (PINHEIRO, 2014, p.78).

Essa competitividade, no caso do ambiente de sala de aula, se mostra presente não no sentido de mostrar quem é o melhor aluno ou o pior, aqui não se trata de ranquear níveis de conhecimento e sim, ciar um ambiente saudável no qual a resolução do problema é o objetivo principal. Daí o esforço individual e coletivo que podem ser vistos em grandes empresas, já passa a ser trabalhado desde o ambiente escolar, preparando o aluno para seu futuro no ambiente de trabalho.

Segundo Biondi, Vasconcellos e Menezes (2007), as escolas que se inscrevem na Obmep recebem um banco de questões no formato de livro com a possibilidade também de obter todo o material de pesquisa e trabalho, incluindo provas anteriores, via plataforma. Nesse material, encontram-se questões desafiadoras de matemática com suas soluções propostas; para os pesquisadores ocorre uma melhoria no desempenho dos estudantes nas avaliações educacionais em larga escala, com a utilização desses recursos. Além disso, conforme estudos de Soares e Candian (2011), devido à preparação dos estudantes para participar das provas das Olimpíadas de Matemáticas, acabam por ocorrer uma melhoria nos índices de desempenho em sala de aula, inclusive dos próprios docentes, conforme observamos na própria proposta da Obmep, que

> Estimular e promover o estudo da matemática entre alunos das escolas públicas; melhorar a qualidade do ensino de matemática na educação básica; identificar jovens talentos e incentivar o seu ingresso na universidade, aperfeiçoar professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; integrar as escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisas e as sociedades

> científicas; e promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (OBMEP REGULAMENTO, 2017)[2].

Agora, quais os impactos que a aplicação de Olimpíadas de Matemática tem nos alunos da Rede Pública de Ensino, além apenas das premiações? Vemos que a resposta mais clara a essa pergunta pode estar relacionada ao despertar de novas possibilidades que os alunos encontram ao se deparar com os problemas desafiadores e intrigantes, como forma de melhorar seu conhecimento e suas práticas fora do ambiente escolar. Sobre isso, Biondi (2012), ressalta que

> A partir do cálculo do retorno econômico, concluímos que a Obmep apresenta uma taxa de retorno elevada e promove benefícios salariais futuros aos jovens participantes, ainda mesmo sem considerar possíveis externalidades positivas para a sociedade e para o país, como redução da criminalidade, aumento do bem-estar social, entre outros resultantes da melhoria da qualidade da educação pública (BIONDI, 2012, p.04).

Devemos também destacar que o universo de questões da Obmep vivenciadas pelos alunos, envolvem entes matemáticos básicos já regidos pelos PCNs, como por exemplo, na aritmética em que precisam analisar operações numéricas, conjuntos, paridade, critério de divisibilidade, fatoração e decomposição, números primos, na geometria com a interpretação de figuras geométricas planas e espaciais, perímetro, áreas, ângulos, triângulos e quadriláteros e na contagem com seu princípio multiplicativo, combinações, permutação e probabilidade, e indo mais além com a possibilidade de se aprofundar em temas como desigualdades, indução matemática, construções geométricas com régua e compasso, recorrências e teoria dos grafos. Então, vemos que não se trata aqui de uma "nova matemática", mas sim de uma matemática voltada para um contexto bem mais interpretativo e o papel do docente acaba por ser tornar fundamental, visto que terá que adotar novas estratégias para despertar nos alunos essa capacidade de interpretar de questões dentro de um contexto já conhecido.

A partir então dessas considerações, utilizamos em nossa proposta de intervenção, questões de geometria previamente selecionadas da Obmep que sejam passíveis de construção utilizando um *software* matemático e nas quais o aluno possa visualizar entes matemáticos primitivos que ao final do processo vão gerar a figura pronta seguindo as mesmas características e mantendo as propriedades da figura apresentada no caderno de provas. Esse processo de construção foi o diferencial na interpretação.

---

[2] Citação vinculada ao site oficial da OBMEP, disponível em http://www.obmep.org.br/regulamento.htm, acesso em 01/02/2018.

2.3. Matemática e Tecnologias

No nosso estudo procuramos alinhar o uso das tecnologias ao ensino de matemática, onde defendemos que a aprendizagem matemática é mediada por instrumentos tecnológicos, o que em nosso caso utilizamos o *software* Geogebra para ensino de geometria. Para tanto, utilizamos diversas questões de geometria plana extraídas da Obmep, tais questões serviram como desencadeadoras das atividades propostas para um coletivo de alunos.

Aliado a essa visão das questões da Obmep e no sentido de buscar uma maior motivação dos alunos quanto à análise e interpretação de problemas matemáticos, temos a inserção do uso de tecnologias na educação. O uso das tecnologias digitais tem se apresentado como uma grande alternativa no ensino, principalmente nas últimas décadas, à medida que seu uso tem facilitado todo o processo de aprendizagem.

Essas tecnologias, se forem devidamente utilizadas, podem se constituir como uma importante ferramenta de apoio pedagógico, para estimular o estudante, promovendo uma interação prazerosa e eficaz entre o conhecimento e o educando. Assim, como vivemos em um mundo dominado pelas tecnologias nada mais conveniente que pensarmos numa prática pedagógica mediada pelas tecnologias digitais (MELO, 2016, p.17).

Dessa forma, é importante que o docente adeque suas práticas pedagógicas ao novo tipo de aluno da sociedade contemporânea. Deste modo, Pozo (2008), afirma que só é possível utilizar tecnologias de forma consciente, quando há a capacitação dos docentes de forma que estes possam direcionar seus estudantes. Ocorre que, primeiramente, os docentes precisam estar familiarizados com essas novas ferramentas de ensino que o auxiliarão neste processo.

> As Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática, em especial para as Licenciaturas, preveem que desde o início do curso o licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador e outras tecnologias como instrumentos de trabalho, incentivando-se suas utilizações para o ensino de Matemática, em especial para a formulação e solução de problemas (GATTI, 2009, p.109).

Porém, de nada adianta inserir tecnologia sem repensar a prática docente, isso porque além da mudança de visão docente quanto a essa utilização, a mesma deve ser feita de forma racional e com muita preparação, a fim de que não haja um sentido contrário do esperado. Visto que,

> Toda inserção de tecnologia no ambiente de ensino e aprendizagem requer um repensar da prática docente, pois ela não é neutra e transforma a relação ensino-aprendizagem. Isso é muito importante para que possíveis decepções ou resultados

> negativos não sejam, de forma simplista, atribuídos à tecnologia (MALTEMPI, 2008, p.2).

Além disso, desenvolver atividades práticas saindo da rotina de explicações maçantes no quadro, apesar de serem quase sempre bastante prazerosas para todos os participantes, acaba por exigir do docente um esforço e preparação muito maiores, isso porque terá que sair de sua zona de conforto e mergulhar em um ambiente que também pode ser novo para ele. Aqui no caso, estamos falando de um laboratório de informática em que cada aluno estaria desenvolvendo um processo de construção em um *software* que não é de sua rotina de uso e que o atendimento do docente acaba sendo individual, visto que cada aluno tem um tempo diferente de construção. Logo o docente deve estar bem preparado tanto quanto ao uso do *software* como quanto aos possíveis problemas que deve encontrar.

2.4. Aplicações no ensino utilizando o *software* GeoGebra

Dentre as possibilidades quanto ao uso de tecnologia por meio do computador, tem-se a utilização de *softwares* matemáticos, a saber, GeoGebra, Calques 3D, Sketchup, Winplot, dentre outros, com funções diversas e possibilidades de se trabalhar tanto no ambiente bidimensional quanto no tridimensional, isso quando se fala em geometria. Segundo os PCNs,

> Já se pensando na Tecnologia para a Matemática, há programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o pensar matematicamente, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas (BRASIL, 2006, p. 90).

Em especial, podemos destacar o GeoGebra como um *software* de geometria dinâmica que possibilita a construção e análise de formas geométricas, auxiliando, portanto, em diversos conteúdos da matemática. Uma das vantagens deste *software* é o fato de ser possível representar, em sua tela principal, a parte geométrica e algébrica de todas as construções matemáticas e poder modificá-las dinamicamente, caso seja necessário. Com ele, é possível trabalhar conteúdos de matemática que vão desde as séries iniciais até os da graduação, como: geometria, álgebra, funções, cálculo, trigonometria e outros, permitindo aos aprendizes uma melhor compreensão do que já foi estudado ou a (re)construção de novos conceitos. Outra vantagem é a construção dinâmica de formas geométricas diversas. O ensino de geometria também possibilita a formação do pensamento matemático, em outras palavras, a geometria representa,

> [...] um campo que oferece um enorme potencial para dar vida à Matemática. A natureza visual da geometria, com sua rica história e origem culturalmente diversa, somada à sua relação com a arte e o desenho, proporciona oportunidades para tornar as aulas interessantes e estimulantes. O potencial para explorar as ideias Matemáticas nesse âmbito enorme (CHAMBERS; TIMLIN, 2015, p. 202).

Por ser um software livre, seu acesso é gratuito, já que o interessado pode adquiri-lo pela internet sem nenhum custo adicional ou mesmo compartilhando o instalador por *pendrive*. Para Santos (2013), a utilização do *software* GeoGebra também pode auxiliar várias áreas do conhecimento além da Matemática, a saber, Física, Química, Geografia, entre outras, tornando-o muito mais dinâmico e com possibilidades diversas. Sobre a importância do *software* livre, os autores ressaltaram,

> [...] o software livre constitui um forte aliado no processo de inclusão digital; inclusão esta que, mesmo sendo um processo complexo, deve contribuir para a formação de professores e aprendizes como sujeitos autônomos e conscientes, capazes de colaborar na constituição de uma sociedade menos desigual e mais justa (NUNES; OLIVEIRA, 2012, p. 20).

Nascimento e Nunes (2013), enfatizam que os softwares livres educativos devem possibilitar que os estudantes manuseiem objetos na tela e, a partir de argumentações e da intermediação por parte do docente, elaborem estratégias e hipóteses sobre os procedimentos a serem executados e conjecturem as análises dos resultados.

O GeoGebra e outros programas similares – os ditos softwares de geometria dinâmica- tem o interessante recurso de "estabilidade sob ação de movimento": feita uma construção, mediante movimento aplicado aos pontos que dão início a construção, a figura que está na tela do computador se transforma quanto ao tamanho e posição, mas preserva as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, bem como as propriedades delas decorrentes (GRAVINA; CONTIERO, 2011, p.3).

Com ele, aprendizes e professores podem enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, de maneira a torná-lo mais significativo e prático, uma vez que o GeoGebra possibilita aos usuários realizarem as construções passo a passo, refletindo sobre cada ação realizada com o auxílio do *software*. A partir disso, é possível observarmos que com o uso deste software podemos, individualmente ou em grupo, nos tornarmos autores do processo de construção do conhecimento matemático, redescobrindo conceitos importantes para a compreensão dos conteúdos estudados em sala de aula. Segundo Nogueira e Sá, com as atividades lúdicas no computador, mediada pelo uso de softwares, temos que

> [...] o professor poderá vivenciar momentos ricos de aprendizados e trocas de experiências, que no futuro poderão ser repassadas para seus alunos com os mesmos objetivos, desenvolvendo competências e habilidades para compreensão dos conceitos matemáticos estudados em sala de aula (NOGUEIRA; SÁ, 2014, p. 7).

Logo, para que fosse possível a utilização do GeoGebra como ferramenta de intervenção do processo de aprendizagem junto a um grupo de alunos, primeiramente deveria haver por parte do pesquisador o pleno conhecimento das potencialidades do *software* bem como as possibilidades de aplicação. Assim, durante as aulas regulares, sempre que possível, recorria-se ao GeoGebra para exibir determinada informação como por exemplo, o gráfico de uma função afim, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, analisando sempre seu comportamento quando alteramos algum coeficiente, estudo de áreas de polígono, círculos, regiões circulares, dentre outros. Com a prática, foi possível perceber o potencial de trabalho que se tinha em mãos e a dinâmica que o *software* possibilitava, além do perceptível aumento na participação dos alunos em sala de aula, tanto nas falas como no desejo de ir ao computador inserir os comandos para construir a figura.

2.5. Teoria da Atividade e Mediação para o Ensino de Matemática

Com relação à aprendizagem matemática, vamos utilizar as atividades de ensino, pois entendemos que estas quando organizadas pelo professor de matemática, intencionalmente, possibilitam aos estudantes uma melhor apropriação dos conceitos científicos, que no nosso caso, os conceitos de geometria.

A Teoria da Atividade proposta por Leontiev (1981), com base em Vygotsky e desenvolvida por Engeström (1999) sugerem que a interação entre um sujeito e outro não se dá diretamente, mas através de um processo de mediação, com o uso obrigatório de um determinado instrumento, que pode ser a própria língua ou algum artefato social como o livro ou o computador. Ao se analisar a interação na aprendizagem mediada por computador, em comparação com a sala de aula tradicional, a questão do instrumento assume uma importância maior, pela diferença que se estabelece entre uma situação e outra. A Teoria da Atividade foi escolhida para explicar essa nova interação pela sua capacidade, a meu ver, de isolar e contextualizar simultaneamente qualquer aspecto importante da interação.

Segundo os autores, “objetos de atividades são geradores de um amplo leque de sentimentos e emoções; eles são de fato ’objetos de paixão’ e ‘objetos de desejo” (p. 262). Para chegarem a afirmações como esta, Kaptelinin e Nardi (2006), servem-se de uma visão da Teoria da Atividade que se funda em atualizações teórico-conceituais, avaliações de ferramentas e sistemas desenvolvidos recentemente, e aplicações do aparato teórico estudado em projetos de Tecnologia da Informação.

Dada a natureza dessa nova disciplina científico-tecnológica, os autores consideram que Teoria da Atividade é a abordagem conceitual mais promissora no caso, uma vez que a mesma enfatiza as dimensões sociais, emocionais, culturais e criativas dos atores humanos em contextos compartilhados. Convém aqui utilizar as próprias palavras dos autores para caracterizar a natureza das interações presentes em usos de ferramentas tecnológicas.

Na Teoria da Atividade a tecnologia não é uma ferramenta neutra; torna-se uma força geradora que molda a natureza autodirigida e social do conhecimento, do fazer e do ser dos alunos e apresenta implicações para a prática educacional (KAPTELININ; NARDI, 2006).

Nesse sentido, para Moura et al. (2010), o professor de matemática necessita dessa ferramenta na busca de organizar o ensino de maneira pela qual o processo educativo na escola seja moldado nos princípios da atividade para aluno e professor, para o aluno, como estudo e para o professor como trabalho. Na nossa investigação utilizaremos o conceito de Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como fundamentação para elaboração e análises das atividades desenvolvidas.

> A AOE mantém a estrutura de atividade proposta por Leontiev ao indicar uma necessidade (apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do conhecimento historicamente acumulado), objetivos (ensinar e aprender) e propõe ações que considerem as condições objetivas da instituição escolar (MOURA et al., 2010, p. 217).

Ainda com o mesmo autor, o modo de organização das atividades que foram desenvolvidas neste trabalho foi orientado pelos fundamentos da AOE,

> Na Atividade Orientadora de Ensino as necessidades, motivos, objetivos, ações e operações do professor e dos estudantes se mobilizam inicialmente por meio da situação desencadeadora de aprendizagem. Esta é organizada pelo professor a partir dos seus objetivos de ensino que, como dissemos, se traduzem em conteúdos a serem apropriados pelos estudantes no espaço de aprendizagem. As ações do professor serão organizadas inicialmente visando colocar em movimento a construção da solução da situação desencadeadora de aprendizagem. Essas ações, por sua vez, ao serem desencadeadas, considerarão as condições objetivas para o desenvolvimento da atividade: as condições materiais que permitem a escolha dos recursos metodológicos,

> os sujeitos cognoscentes, a complexidade do conteúdo em estudo e o contexto cultural que emoldura os sujeitos e permite as interações sócio-afetivas no desenvolvimento das ações que visam o objetivo da atividade - a apropriação de certo conteúdo e do modo geral de ação de aprendizagem. Em outras palavras, os sujeitos, mobilizados a partir da situação desencadeadora, interagem com os outros segundo as suas potencialidades e visam chegar a outro nível de compreensão do conceito em movimento. Além disso, o modo de ir se aproximando do conceito também vai dotando-o de uma qualidade nova ao ter que resolver problemas, pois, além de ter aprendido um conteúdo novo, também adquiriu um modo de se apropriar de conteúdos de um modo geral (MOURA et al., 2010, p. 222).

Assim, a situação desencadeadora de aprendizagem precisa levar em conta as origens do conceito, isto é, o seu âmago. A situação desencadeadora também precisa mostrar o que levou ao homem a criar esse mencionado conceito e como foram surgindo os mais diferentes obstáculos e necessidades do homem em suas atividades cotidianas, posteriormente como a humanidade conseguiu criar meios de soluções para essas problemáticas da vida.

3. Materiais e Métodos

A metodologia adotada nesta pesquisa foi um estudo de caso que envolveu alunos do ensino básico e objetivou relacionar conhecimentos matemáticos, tecnologias e didática, assim como também associou a prática da atividade ensino em todo o processo de investigação. Para Pereira (2016), a escolha desta metodologia se deve à subjetividade envolvida em uma proposta cuja intenção é analisar como ocorre o processo de aprendizagem utilizando tecnologias a fim de verificar as contribuições desta para o ensino, isso porque, apesar do investigador já possuir alguns conceitos iniciais ou algumas conjecturas, durante a aplicação do projeto tivemos o surgimento de novos fatos que modificaram e redirecionaram a pesquisa.

Quanto à forma de abordagem dos problemas em nossa investigação, utilizamos a pesquisa qualitativa, por possuir um aspecto subjetivo e onde o principal objeto de análise é a aprendizagem dos estudantes. Segundo Borba (2013), essa visão de pesquisa está baseada na ideia de que há sempre um aspecto subjetivo no conhecimento produzido, não há, nessa visão, neutralidade no conhecimento que se constrói. O autor ressalta ainda que:

> o que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. E ressalta que nesta modalidade não se deve ignorar informações quantitativas, assim como, pesquisas que seguem outras metodologias (BORBA, 2004, p.2).

Como procedimentos para construção da sequência didática, foi necessário primeiramente selecionar questões de geometria da Obmep. Tais questões deveriam ser passíveis de construção no GeoGebra. Possibilitaram a construção dinâmica de figuras geométricas pelos participantes da pesquisa, utilizando o *software* GeoGebra e, a partir daí, iniciamos a estruturação dos encontros formativos. As questões usadas nas atividades foram obtidas do banco de questões da Obmep disponível no site oficial do evento. Mais especificamente, foi utilizado o nível 3 do banco de questões citado.

Esta sequência foi aplicada aos 31 estudantes do 1º ano do Ensino Médio Concomitante com Agropecuária do Colégio Técnico de Floriano - CTF, escola vinculada à Universidade Federal do Piauí - UFPI e na qual o pesquisador é lotado e docente da turma. Os estudantes que participaram da pesquisa apresentaram um documento com autorização dos pais ou responsáveis. A coleta de dados foi feita durante os encontros formativos com duração de 250 minutos cada, os encontros aconteceram no horário contrário às aulas dos estudantes que estudavam pela manhã. Para a realização das atividades práticas foi utilizado um laboratório de informática que possui o *software* GeoGebra instalado nos 40 computadores disponíveis.

Ao longo da aplicação da sequência didática foram realizadas as coletas de informações para análise. As principais informações coletadas foram: discussões de estudantes na busca de soluções para resolução das questões, dúvidas que surgiram durante as atividades, os resultados propostos pelos estudantes, os arquivos elaborados pelos estudantes, os relatórios dos estudantes e anotações feitas pelo professor e estudantes, entre outras formas de registros que surgiram no processo. As principais formas de coletas que foram usadas serão: gravação em áudio das discussões entre os participantes, anotações feitas ao longo das interações, arquivos salvos das construções realizadas através de mídias digitais, relatórios dos estudantes e aplicação de questionário. Os registros coletados serão usados para realizar a análise segundo a Teoria da Atividade.

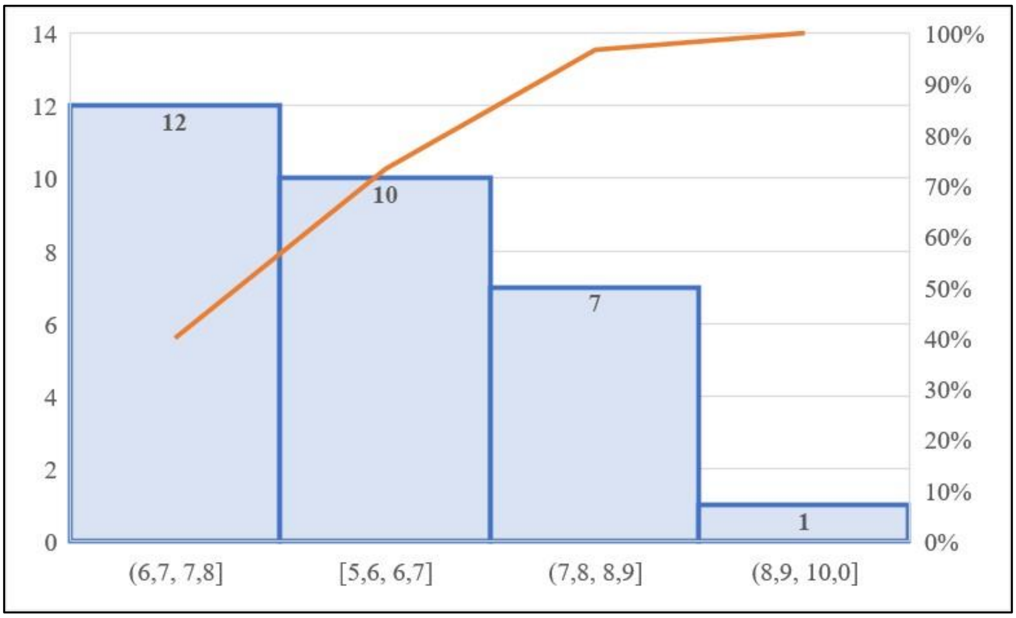
3.1. A fase inicial: organização da turma experimental

Foram selecionados os alunos da turma de 1º ano do Ensino Médio concomitante com o curso técnico em Agropecuária (EMTA-1). A decisão de trabalhar o experimento com esse grupo de alunos se deu pelo fato de já ser docente de mesma turma desde o início de 2017 e de já haver trabalhado com o *software* GeoGebra em diversos conteúdos, como funções afins e quadráticas e cálculo de áreas. Na primeira semana de junho de 2017 realizou-se uma reunião com a turma para apresentar a proposta de trabalho, bem como a metodologia das atividades. Os alunos que aceitaram participar, estavam cientes que os encontros seriam realizados em turno contrário às aulas regulares e que não haveria nenhuma relação de notas com a disciplina de matemática do curso técnico. Foi entregue aos alunos o Termo de Consentimento aos Pais (Apêndice A) e o Termo de Consentimento aos Alunos (Apêndice B) que foi devolvido devidamente assinado pelos alunos participantes.

3.2. Perfil dos estudantes participantes

Com o objetivo de traçar um direcionamento para a produção das atividades orientadoras do grupo de alunos que participaram do projeto, fizemos uma análise da documentação que foi entregue pelos pais no período das matrículas. Destacamos dois pontos de interesse para a nossa pesquisa: o primeiro deles está relacionado ao índice de rendimento dos alunos na disciplina de matemática no 9º ano do ensino fundamental. Dos 36 processos dos estudantes analisados, em seis deles não foi possível verificação do índice de rendimento, visto que não se encontrava no processo o histórico do ensino fundamental. Os resultados obtidos podem ser verificados no gráfico de Pareto[3] abaixo.

Gráfico 1 - Índice de rendimento dos alunos da turma EMTA-1 em Matemática no ano de 2016.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

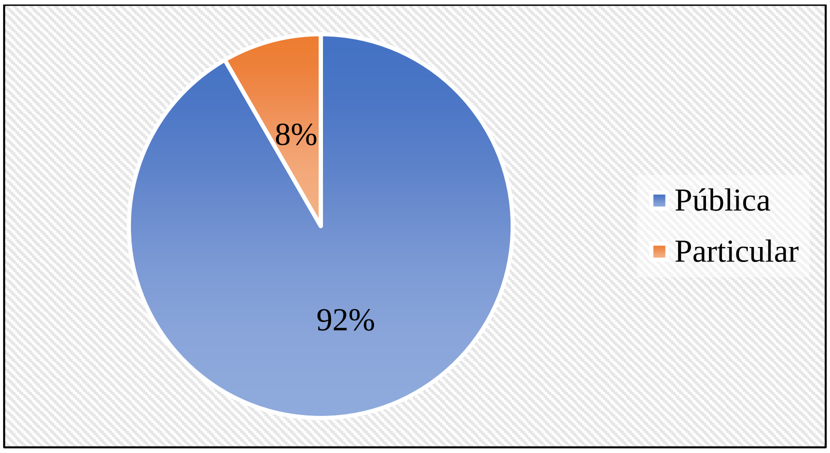
Podemos observar pelo gráfico que aproximadamente 73% dos alunos da turma possuem índice de rendimento abaixo de 7,8 e desses 73%, tem-se que 45% possuem notas variando de 5,6 a 6,7. Tal fato mereceu a nossa atenção e tornou necessário que durante toda a execução desta pesquisa déssemos um reforço constante de matemática básica, bem como de fundamentos matemáticos.

---

3 Um gráfico de Pareto plota a distribuição dos dados em ordem decrescente de frequência, com uma linha cumulativa em um eixo secundário como uma porcentagem do total.

O segundo ponto diz respeito à origem escolar do aluno, com relação a realização de seus estudos, se foi em escola pública ou em particular. Pelo gráfico abaixo, podemos verificar que o grupo de alunos é proveniente predominantemente de escolas públicas.

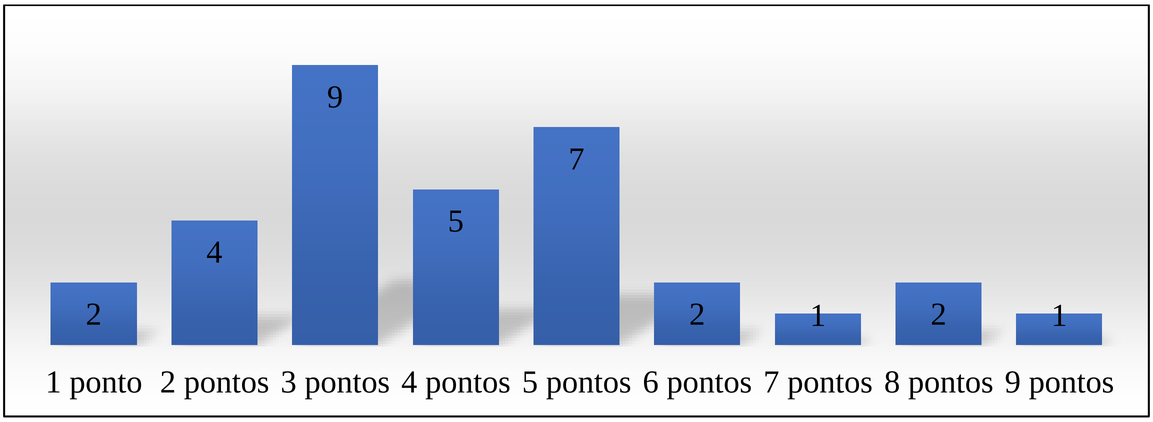
Gráfico 2 - Origem escolar dos alunos da turma EMTA-1.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

Avaliamos também o índice de rendimento dos alunos da turma na Obmep 2017. A aplicação ocorreu dia 6 de junho de 2017 em todas as escolas inscritas no Brasil. A prova constava de 20 questões de múltipla escolha e 33 alunos do CTF participaram da atividade. Conforme gráfico abaixo, pode-se observar que 100% dos participantes obtiveram índices inferiores a 10 pontos, portanto não atingiram nem 50% da pontuação da prova, e desse quantitativo 82% aproximadamente obtiveram pontuação igual ou inferior a 1/4 da pontuação total.

Gráfico 3 - Pontuação obtida pela turma EMTA-1 na prova da OBMEP de 2017.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

Outro fato que foi observado é que a correção da prova da 1ª fase da Obmep é meramente pelo gabarito, tornando o resultado mais lotérico do que efetivo, visto que não é possível determinar se o aluno respondeu ou não a questão usando mecanismos de interpretação coerentes. Analisando o material devolvido pelos alunos após a aplicação da Obmep 2017, pudemos verificar que não havia qualquer indício de algum tipo de interpretação para que determinada questão pudesse ser validada, isso porque, diferente da 2ª fase da Obmep, a 1ª fase é totalmente objetiva e a análise dos resultados é feita considerando apenas o cartão-resposta, sem se preocupar se o participante resolveu ou não a questão corretamente.

3.3. Metodologia de aplicação: organização e distribuição das atividades

Diante da problemática discutida anteriormente, apresentamos uma proposta de intervenção na qual os participantes estarão analisando, construindo e interpretando questões de geometria presentes nas provas anteriores da Obmep utilizando como instrumento de mediação o *software* GeoGebra.

Para a aplicação das atividades, dos 36 alunos da turma, 31 aceitaram o convite e formaram uma turma experimental. No total ocorreram 12 encontros distribuídos conforme quadro 1 abaixo, com a finalidade de realizar o pré-teste, atividades orientadoras, pós-teste e aplicação do questionário, realizadas tanto no Laboratório de Educação Matemática (LEM) como nos Laboratórios 01 e 02 de Informática (LI.1 e LI.2). Os encontros foram realizados à tarde, das 14h às 18h30, exceto no encontro para a aplicação do Questionário, que durou apenas uma aula de 50min. Destacamos que apenas no primeiro encontro e na aplicação do Questionário, os alunos não utilizaram o *software* GeoGebra. A seguir, estaremos discorrendo sobre cada encontro.

Quadro 1 - Distribuição dos encontros.

Encontros	**Data**	**Atividade**	**Duração (aulas de 50min)**	**Espaço Físico**
1º	2/8/17	Pré-teste	5	LEM
2º	9/8/17	Atividade individual	5	LEM/LI.1
3º	16/8/17	Atividade individual	5	LEM/LI.1
4º	30/8/17	Atividade em grupo	5	LEM/LI.1
5º	4/9/17	Revisão	5	LEM/LI.1
6º	6/9/17	Atividade individual	5	LEM/LI.2
7º	20/9/17	Atividade individual	5	LEM/LI.2
8º	10/10/17	Atividade em grupo	5	LI.2

9º	25/10/17	Atividade em grupo	5	LI.2
10º	31/10/17	Atividade individual	5	LI.2
11º	6/11/17	Pós-teste	5	LI.2
12º	22/2/18	Aplicação do Questionário	5	LEM

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

3.4. Encontros Formativos

Primeiro Encontro

No primeiro encontro, objetivamos a aplicação do Pré-teste (Apêndice C). No pré-teste verificamos até que ponto encontra-se o nível de interpretação dos participantes nas questões selecionadas e quais entes matemáticos deverão ser mais abordados durante os encontros seguintes e ainda se será necessário trabalhar revisões relacionadas à matemática básica.

Para a elaboração das questões do Pré-teste foram selecionadas 13 questões de provas anteriores da Obmep de 2005 a 2017, nessa ordem, abordando conteúdos diversos da matemática, conforme Quadro 2. Obrigatoriamente, as questões selecionadas deveriam ser passíveis de construção no *software* GeoGebra, porém, na aplicação do Pré-teste os participantes utilizaram apenas lápis, caneta e borracha para sua resolução.

Quadro 2 - Conteúdos abordados no pré-teste.

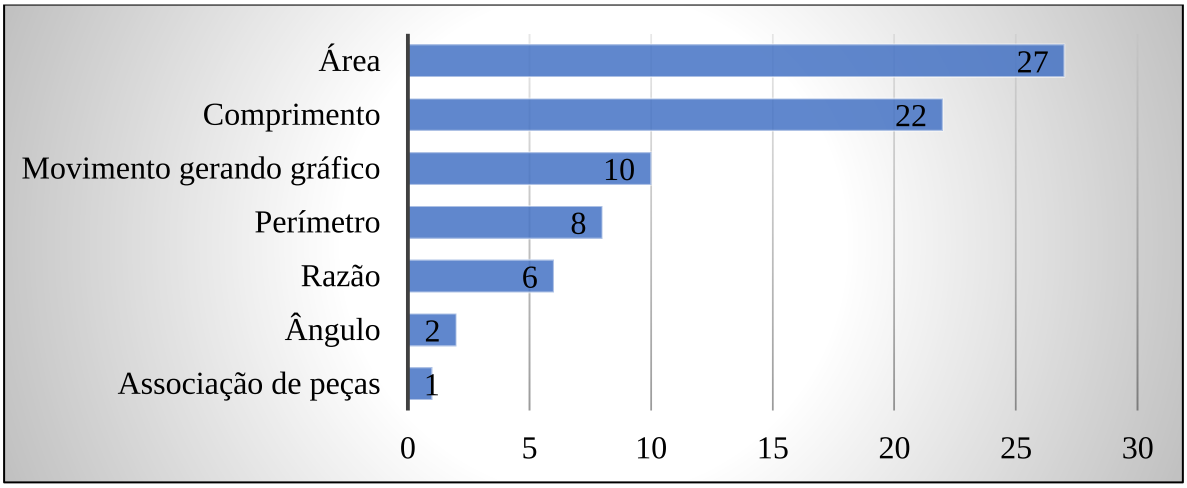
Questão	Ano	Entes Matemáticos
1	2005	Triângulo retângulo, hipotenusa, cateto, segmento, teorema de Pitágoras
2	2006	Comportamento gráfico, circunferência, raio, centro, distância em função do tempo, coordenadas cartesianas
3	2007	Área do polígono, coordenadas cartesianas, comprimento da diagonal do retângulo, função decrescente, triângulos, congruência, altura, área do triângulo, função linear
4	2008	Quadrado, arcos de circunferência, centro, comprimento da circunferência
5	2009	Quadrado, coordenadas cartesianas, reta paralela, ângulos, triângulo retângulo, triângulos congruentes
6	2010	Triângulo retângulo, ângulo, soma dos ângulos internos, ângulos opostos pelo vértice
7	2011	Quadrado, semicírculos tangentes, raio, triângulo retângulo, teorema de Pitágoras
8	2012	Retas paralelas, distância entre retas, ângulo, círculo, retas tangentes a um círculo, área do quadrilátero, diagonal do quadrilátero, triângulo isósceles, losango
9	2013	Comprimento, ponto médio, triângulo isósceles, teorema de Pitágoras

10	2014	Paralelogramo, área, ponto médio, semelhança de triângulos, razão
11	2015	Trapézio, polígono inscrito a uma circunferência, raio, retas paralelas, triângulo isósceles, teorema de Pitágoras, sistemas lineares
12	2016	Quadrado, retas paralelas, comportamento gráfico, área, coordenadas cartesianas, intervalos, máximo de uma função quadrática, vértice da parábola
13	2017	Distância de um ponto a uma figura geométrica, segmentos de retas, arcos de circunferência

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

Antes da elaboração do pré-teste, fez-se uma análise de todas as questões de geometria plana aplicadas no nível 3 da 1ª fase da Obmep de 2005 a 2017, a fim de determinar os conteúdos presentes. Nas questões pôde-se observar interpretações que necessitavam do conhecimento específico de ângulos, áreas, comprimento, perímetro, razão, associação de figuras, bem como da movimentação de um ponto o que geraria um gráfico. O gráfico abaixo apresenta o quantitativo desses conteúdos. Ao todo foram observadas 76 questões. Claramente é possível observar a predominância de questões envolvendo o cálculo de áreas, bem como questões envolvendo a medida de um comprimento qualquer na figura. As duas juntas correspondem a aproximadamente 65% dos conteúdos de Geometria Plana presentes nas provas anteriores da Obmep.

Gráfico 4 - Quantitativo de questões por conteúdo OBMEP 2005 a 2017.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

Nos encontros seguintes foram realizadas atividades orientadoras em que os participantes trabalharam, ora de forma individualizada ora em grupo no momento das construções, agora já utilizando o *software*. A rotina de trabalho sempre acontecia em 2 momentos. O primeiro momento ocorria no Laboratório de Educação Matemática, com duração de 2 aulas de 50min, em que os participantes atuavam como expectadores, participando das etapas de construção das questões de geometria apenas por visualização e indicando a forma de se chegar ao resultado, sem participar diretamente da construção utilizando *software* GeoGebra e o segundo momento, com duração de 3 aulas de 50 minutos no Laboratório de Informática, no qual faziam o registro das questões propostas, agora utilizando o *software* GeoGebra. Ao final, os estudantes descreveram no verso da atividade além das etapas de construção das figuras e sua respectiva interpretação, os aspectos que considerassem positivos e/ou negativos do encontro. Foram utilizados os vídeos e textos disponíveis no site *oGeoGebra*[4]. Dentre os 23 vídeos e textos disponíveis, foram utilizados apenas os vídeos 2, 3, 4, 5, 6 e 12 e textos 1, 2, 3, 4, 5 e 10, por focarem as propriedades básicas de construções no GeoGebra e que são suficientes para as construções das questões de geometria da Obmep que foram propostas nas etapas seguintes.

Segundo encontro

No segundo encontro, deu-se início de fato à utilização do *software* GeoGebra como instrumento de mediação, pois a partir desse encontro, qualquer interpretação ou qualquer análise deveria ser feita sob a ótica do *software*. No Laboratório de Educação Matemática, utilizando instrumento de projeção, foi exibido aos participantes vídeos e textos pré-selecionados do site *oGeoGebra* que serviriam como atividade introdutória dos encontros prosseguindo até o sexto deles. Na ocasião foram abertos os vídeos 02 e 03, que abordavam as ferramentas e construções iniciais e que vamos detalhar em seguida.

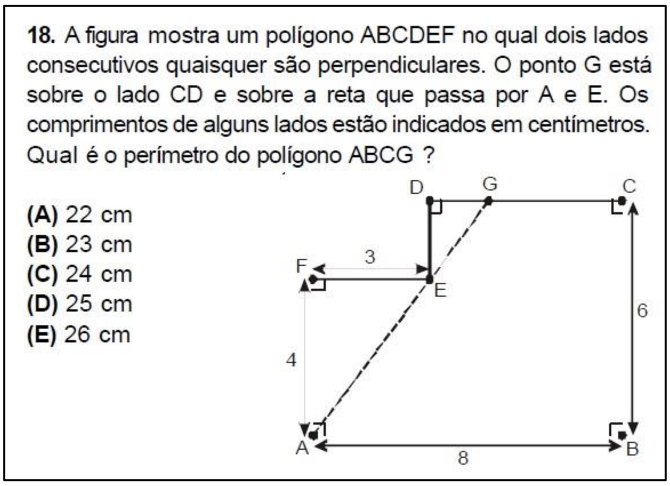
O vídeo 02 (texto 01), com duração de 12min09s, tratava da interface e construções iniciais e tinha por objetivo apresentar as janelas do *software* GeoGebra, algumas funcionalidades e os passos necessários para construção de alguns objetos. Foram realizadas algumas construções e exploradas as representações dos objetos na Janela de Visualização e na Janela de Álgebra, a saber: Barra de Menus, Barra de Ferramentas, Janela de Álgebra, Entrada, Janela de Visualização, Lista de Comandos, Construção de um triângulo, Ferramenta <Ponto>[5], Ferramenta <Segmento>, Ferramenta <Polígono>, construção de um círculo de Centro “A” que

[4] O site oGeoGebra.com.br disponibiliza vídeos, textos e tutorias que auxiliam no aprendizado do software GeoGebra.
[5] Estaremos utilizando esta indicação para representar uma das opções presentes na Barra de Ferramentas do *software* GeoGebra. Trata-se do elemento que o participante deve clicar para que o objeto ou comando seja executado.

passe por um ponto “B”, usando a Ferramenta <Círculo definido pelo centro e um de seus pontos> e construção de um círculo de centro “A” com raio r = 3 cm usando a Ferramenta <Círculo dados centro e raio>. Já o vídeo 03 (texto 02), com duração de 17min17s, tratava das linhas retas e tinha por objetivo abordar como construir linhas retas. Para tal, utilizou-se as Ferramentas <Reta>, <Semirreta>, <Segmento>, <Segmento com comprimento fixo>, <Vetor>, <Vetor a partir de um ponto>. Abordou-se também a construção de caminhos poligonais no GeoGebra, utilizando a Ferramenta <Caminho Poligonal>.

Após realizado este primeiro momento, foi apresentado aos participantes a 1ª questão da Obmep[6] a ser construída e interpretada utilizando o *software* GeoGebra. Como questão introdutória foi escolhida a de número 18 da prova da Obmep de 2005, que apresentamos na Figura 1 abaixo. Tal questão foi resolvida na íntegra pelo pesquisador e os participantes puderam acompanhar os passos a serem seguidos no momento que estivessem diante do *software* GeoGebra, bem como as informações que deveriam retirar do *software* e anotar na folha de Atividades a ser devolvida ao final do encontro.

Figura 1 - Questão 18, OBMEP 2005.



18. A figura mostra um polígono ABCDEF no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto G está sobre o lado CD e sobre a reta que passa por A e E. Os comprimentos de alguns lados estão indicados em centímetros. Qual é o perímetro do polígono ABCG ?

(A) 22 cm
(B) 23 cm
(C) 24 cm
(D) 25 cm
(E) 26 cm

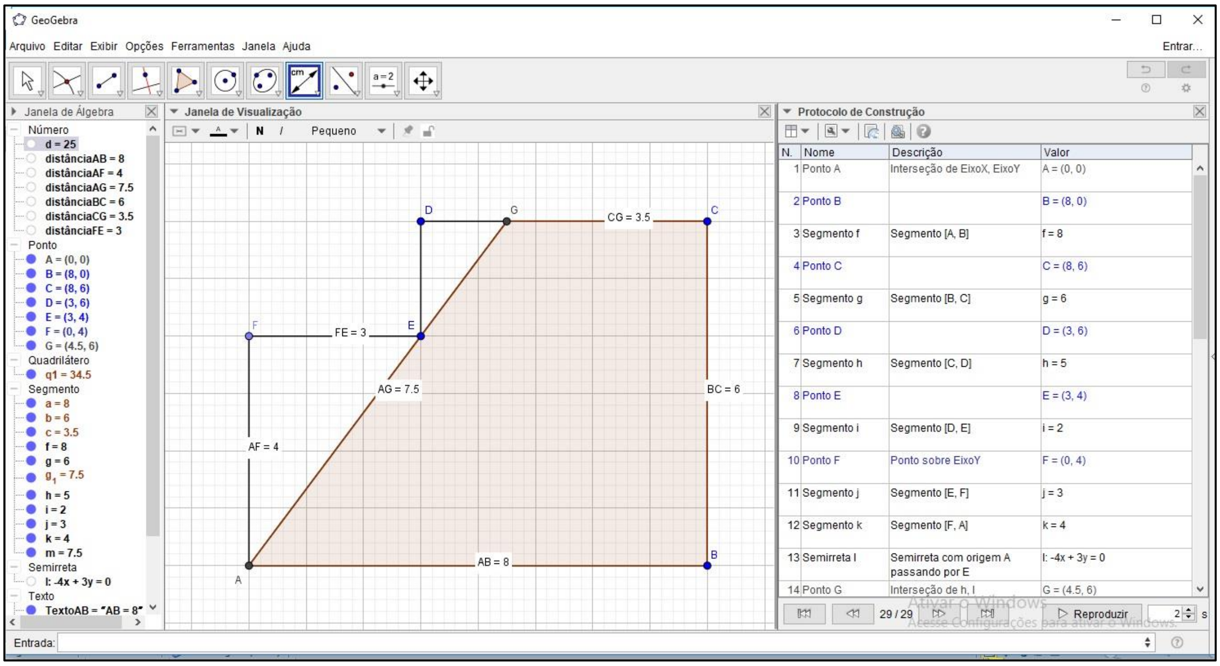
Fonte: Banco de Questões da OBMEP.

Na questão, podemos observar um polígono ABCDEF com medidas AB = 8, BC = 6, CD = 5, visto que EF mede 3, DE = 2, visto que AF mede 4. Os pontos A, E e G são colineares e a questão tinha como objetivo determinar o perímetro do polígono ABCG. Pode-se observar que apenas as medidas AB e BC são conhecidas. A medida AE, algebricamente, pode ser determinada utilizando o teorema de Pitágoras, visto que são conhecidas as medidas dos dois catetos. O grande problema aqui, está em determinar as medidas EG e CG. Passados 10 minutos

[6] Sempre que nos referirmos às questões da OBMEP utilizadas nesta dissertação, estaremos nos referindo às questões da 1ª Fase, Nível 3.

para que os participantes pudessem refletir sobre o processo de resolução algébrica, nenhum conseguiu chegar ao resultado correto. Foi apresentada então pelo pesquisador a resolução da questão usando o *software* GeoGebra que, em questão de pouquíssimos minutos chegou à figura abaixo.

Figura 2 - Questão 18, OBMEP 2005.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador, 2017.

Na figura 2 acima, os participantes puderam visualizar três setores principais do *software* que chamaremos de esquerdo, central e direito. No setor esquerdo encontra-se a janela de álgebra, área em que são exibidas as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos. No setor central, encontra-se a janela de visualização, área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da barra de ícones ou comandos digitados na entrada. Finalmente no setor direito temos a janela de protocolo de construção, que apresenta em ordem cada ferramenta que foi selecionada para construção do objeto, sua descrição, bem como seu valor, seja coordenada, medida ou equação. O quadro 3 apresenta o protocolo de construção da Figura 2. Pela tabela pode-se observar que foram necessárias 35 intervenções no software a fim de que a questão pudesse ser interpretada. No caso, a linha 35, cujo valor é 25, seria a resposta final, portanto para o caso da questão 18 Obmep 2005, teríamos como resposta a letra B; o perímetro do polígono ABCG vale 25.

Quadro 3 - Protocolo de Construção da Figura 2.

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A	Interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Ponto B		B = (8, 0)
3	Segmento f	Segmento [A, B]	f = 8
4	Ponto C		C = (8, 6)
5	Segmento g	Segmento [B, C]	g = 6
6	Ponto D		D = (3, 6)
7	Segmento h	Segmento [C, D]	h = 5
8	Ponto E		E = (3, 4)
9	Segmento i	Segmento [D, E]	i = 2
10	Ponto F	Ponto sobre EixoY	F = (0, 4)
11	Segmento j	Segmento [E, F]	j = 3
12	Segmento k	Segmento [F, A]	k = 4
13	Semirreta l	Semirreta com origem A passando por E	l: -4x + 3y = 0
14	Ponto G	Interseção de h, l	G = (4.5, 6)
15	Segmento m	Segmento [A, G]	m = 7.5
16	Número distânciaAB	Distância de A a B	distânciaAB = 8
18	Texto TextoAB	Nome(A) + (Nome(B)) + " = " + distânciaAB	AB = 8
19	Número distânciaBC	Distância de B a C	distânciaBC = 6
21	Texto TextoBC	Nome(B) + (Nome(C)) + " = " + distânciaBC	BC = 6
22	Número distânciaFE	Distância de F a E	distânciaFE = 3
24	Texto TextoFE	Nome(F) + (Nome(E)) + " = " + distânciaFE	FE = 3
25	Número distânciaAF	Distância de A a F	distânciaAF = 4
27	Texto TextoAF	Nome(A) + (Nome(F)) + " = " + distânciaAF	AF = 4
28	Quadrilátero q1	Polígono A, B, C, G	q1 = 34.5
28	Segmento a	Segmento [A, B]	a = 8
28	Segmento b	Segmento [B, C]	b = 6
28	Segmento c	Segmento [C, G]	c = 3.5
28	Segmento g_1	Segmento [G, A]	g_1 = 7.5
29	Número distânciaCG	Distância de C a G	distânciaCG = 3.5
31	Texto TextoCG	Nome(C) + (Nome(G)) + " = " + distânciaCG	CG = 3.5
32	Número distânciaAG	Distância de A a G	distânciaAG = 7.5
34	Texto TextoAG	Nome(A) + (Nome(G)) + " = " + distânciaAG	AG = 7.5
35	Número d	a + b + c + g_1	d = 25

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Após apresentada toda a sequência didática de trabalho, os participantes se dirigiram ao Laboratório de Informática a fim de executar todas as atividades apresentadas no 1º momento ocorrido no Laboratório de Educação Matemática.

Terceiro encontro

No primeiro momento do 3º encontro, utilizou-se o vídeo 04 (texto 03) que abordava a construção de perpendiculares, paralelas, mediatrizes, bissetrizes e medianas. Para isso, realizou-se a construção do ortocentro, do incentro, do circuncentro e do baricentro de triângulos, também presente no vídeo. Nas Atividades Orientadoras do encontro, presentes no Apêndice D, os participantes, já no Laboratório de Informática, responderam utilizando o *software* GeoGebra, a duas questões: a 1ª referente à questão 1 da prova da Obmep de 2006 e a 2ª referente à questão 4 da prova da Obmep de 2007. O quadro abaixo apresenta os elementos matemáticos presentes nas questões.

Quadro 4 - Conteúdos abordados nas Atividades Orientadoras do 3º Encontro.

Questão	Ano OBMEP	Ente matemático
1	2006	Pontos médios, triângulo congruentes, área do triângulo, área do retângulo.
4	2007	Hexágono regular, diagonais do polígono, triângulo equilátero, ângulo, simetria, triângulo isósceles, congruência de triângulos, área do triângulo.

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

Quarto encontro

No quarto encontro, demos ênfase às construções circulares. Utilizou-se o vídeo 12 (texto 10) para tal fim. Nele foram abordados comandos e ferramentas do GeoGebra úteis para construir círculos, semicírculos, arcos e setores. Nas Atividades Orientadoras do encontro, presentes no Apêndice E, os participantes responderam utilizando o *software* GeoGebra, a cinco questões: a 1ª referente à questão 18 da prova da Obmep de 2010, a 2ª referente à questão 2 da prova da Obmep de 2011, a 3ª referente à questão 7 da prova da Obmep de 2011, a 4ª referente à questão 16 da prova da Obmep de 2011 e a 5ª referente à questão 10 da prova da Obmep de 2012. O quadro abaixo apresenta os elementos matemáticos presentes nas questões.

Quadro 5 - Conteúdos abordados nas Atividades Orientadoras do 4º Encontro.

Questão	Ano OBMEP	Ente matemático
18	2010	Circunferências tangentes, reta, cento da circunferência, teorema de Pitágoras, triângulo retângulo, raio da circunferência, diagonal do quadrado.
2	2011	Perímetro de um polígono, diagonal do retângulo, teorema de Pitágoras.
7	2011	Semicírculo, raio e centro do semicírculo, ponto de tangência, triângulo retângulo, teorema de Pitágoras.
16	2011	Retângulo, área do triângulo, simetria, paralelogramo, teorema de Tales, lados paralelos e congruentes, diagonal, área do retângulo.
10	2012	Centro de um círculo, ponto de tangência entre círculos e entre círculo e reta, teorema de Pitágoras, triângulo.

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

Quinto encontro

O quinto encontro foi planejado para se revisar todo o conteúdo trabalhado até o momento, no sentido de se refazer as construções e questões da Obmep já desenvolvidas, bem como orientar os participantes quanto à questão da formatação das construções feitas no *software* GeoGebra. Utilizou-se o vídeo 05 (texto 04) que abordava como modificar as propriedades dos objetos construídos no GeoGebra, isso porque quando construímos um objeto no GeoGebra, um polígono, uma reta, um ponto, por exemplo, eles são exibidos na Janela de Visualização com atributos como cor, espessura da linha, transparência/opacidade predefinidos pelo *software*. As atividades orientadoras do encontro estão no Apêndice F. Nela estarão também presentes a construção de triângulos, com a representação de seus pontos notáveis, círculos inscritos e circunscritos e área do setor circular e segmento circular, resgatando construções específicas do 3º e 4º encontros.

Sexto encontro

No sexto encontro, os participantes utilizaram os vídeos 06, 08 e 09 que tratam respectivamente de Polígonos regulares ou não (texto 05), Funções parte 1 e Funções parte 2 (texto 07). Tiveram um primeiro contato com a Ferramenta <Controle deslizante>, operações com funções e função composta. Nas Atividades Orientadoras do encontro, presentes no Apêndice G, os participantes deveriam responder utilizando o *software* GeoGebra, a cinco questões: a 1ª referente à questão 6 da prova da Obmep de 2013, a 2ª referente à questão 19 da prova da Obmep de 2013, a 3ª referente à questão 11 da prova da Obmep de 2014, a 4ª referente à questão 4 da prova da Obmep de 2015 e a 5ª referente à questão 17 da prova da Obmep de 2015. O quadro abaixo apresenta os elementos matemáticos presentes nas questões.

Quadro 6 - Conteúdos abordados nas Atividades Orientadoras do 6º Encontro.

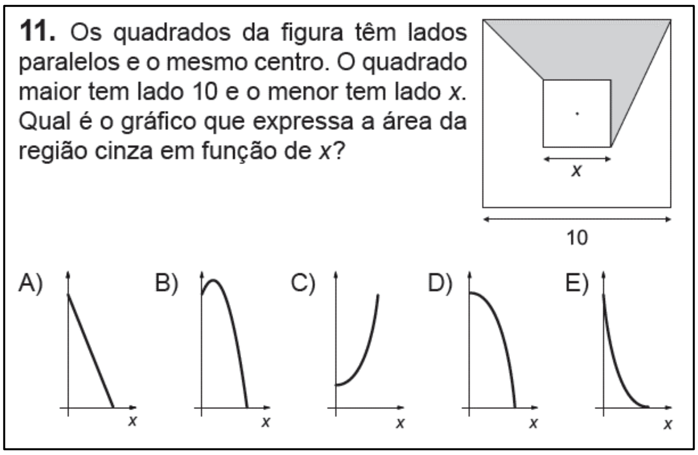
Questão	Ano OBMEP	Ente matemático
6	2013	Raio e centro de uma circunferência, circunferências tangentes, reta, triângulo equilátero, ângulo, arco, ângulo central, comprimento da circunferência.
19	2013	Raio e centro de uma circunferência, triângulo retângulo, teorema de Pitágoras.
11	2014	Simetria, quadrado, centro e raio da circunferência, comprimento de arco.
4	2015	Ponto médio, segmentos paralelos, área do retângulo, área do triângulo, razão.
17	2015	Centro e raio da circunferência, altura do triângulo, segmentos paralelos, trapézio, triângulo isósceles, teorema de Pitágoras.

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

Sétimo Encontro

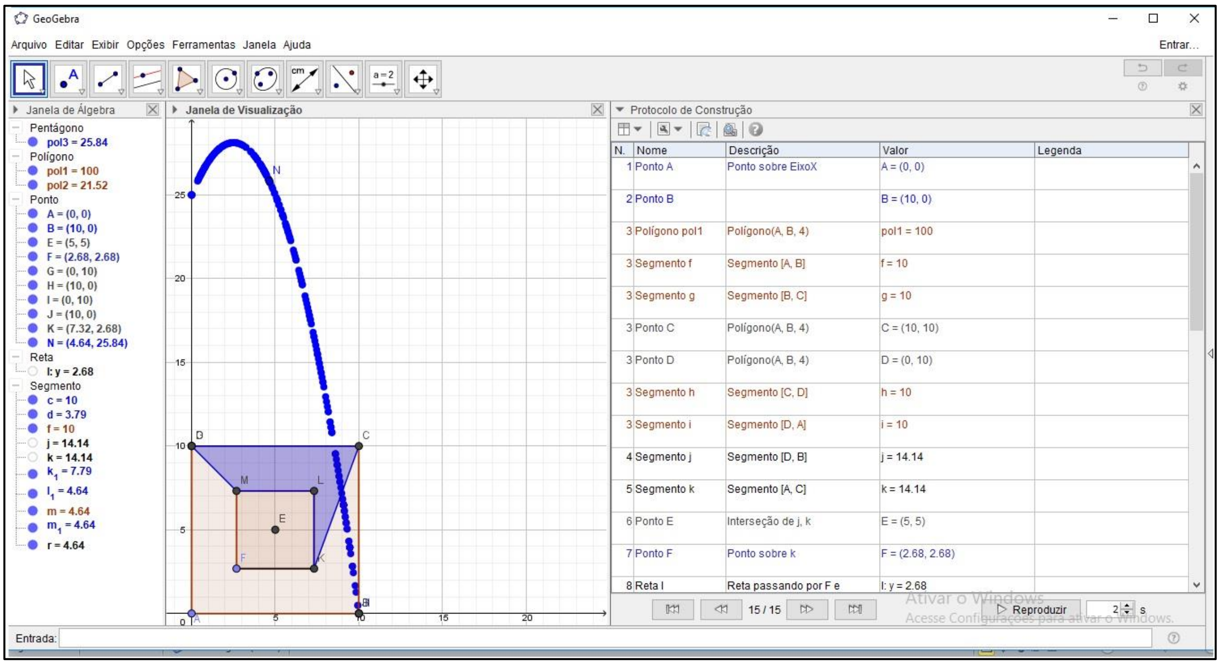
Para o primeiro momento do sétimo encontro, utilizou-se pelo pesquisador a questão 11 da Obmep de 2016, visto que o objetivo principal do encontro era a interpretação gráfica pelos participantes mediante a movimentação de um objeto na figura construída. A figura 3 representa a visão da questão na prova da Obmep e a figura 4, sua construção no *software* GeoGebra.

Figura 3 - Questão 11, OBMEP 2016.



Fonte: Banco de Questões da OBMEP.

Figura 4 - Questão 11, OBMEP 2016.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador, 2017.

Para as Atividades Orientadoras do encontro, foram selecionadas duas questões da Obmep na qual os participantes deveriam observar a movimentação de um objeto e tirar conclusões disso, no caso conclusões gráficas: questão 13 da OBMEP de 2015 e 19 da Obmep de 2009. O quadro abaixo apresenta os elementos matemáticos presentes nas questões.

Quadro 7 - Conteúdos abordados nas Atividades Orientadoras do 7º Encontro.

Questão	Ano OBMEP	Ente matemático
13	2015	Quadrado, área do polígono, segmento, função quadrática, arco de parábola, inequações, análise gráfica.
19	2009	Diâmetro do círculo, teorema de Pitágoras, triângulo, área do quadrado, função quadrática, inequações, análise gráfica.

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

Oitavo Encontro

Para o oitavo encontro, as atividades programadas foram realizadas em grupo. Os participantes dividiram-se em duplas, por afinidade, com o objetivo de construir via *software* GeoGebra o símbolo do Yin Yang e a espiral no retângulo de ouro, conforme Apêndice I. Ao final deveriam responder qual a área da região escura do símbolo Yin Yang e qual o comprimento da espiral no retângulo de ouro.

Nono Encontro

O nono encontro tinha por objetivo resgatar todos os fundamentos discutidos até então. Para isso realizou-se uma aula livre, na qual os participantes, também divididos em grupos assim como no oitavo encontro, deveriam acessar a página da OBMEP, baixar a prova que desejasse, selecionar a questão de geometria passível de construção no *software* GeoGebra, proceder à construção da mesma e interpretar a questão. O único pré-requisito era que a questão selecionada não fosse alguma já discutida. O encontro teve duração de 5 aulas de 50min.

Décimo Encontro

No décimo encontro, retomou-se as resoluções de questões pré-definidas da Obmep de forma individual encerrando a última etapa de construções antes da aplicação do Pós-teste. Ao receber as atividades orientadoras os participantes foram deslocados diretamente para o Laboratório de Informática já para dar início às construções. Nas Atividades Orientadoras do encontro, presentes no Apêndice J, os participantes deveriam responder utilizando o *software* GeoGebra, a três questões: a 1ª referente à questão 10 da prova da OBMEP de 2007, a 2ª referente à questão 14 da prova da Obmep de 2005, a 3ª referente à questão 8 da prova da Obmep de 2009. O quadro abaixo apresenta os elementos matemáticos presentes nas questões.

Quadro 8 - Conteúdos abordados nas Atividades Orientadoras do 10º Encontro.

Questão	Ano OBMEP	Ente matemático
10	2007	Circunferência, semicírculo, segmento, diâmetro, ponto médio, raio, centro, comprimento da circunferência.
14	2005	Comprimento da circunferência.
08	2009	Quadrado, arco de circunferência, raio, diagonal do quadrado, teorema de Pitágoras, razão.

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2017.

Décimo Primeiro Encontro

No décimo primeiro encontro, finalizou-se o processo metodológico com a aplicação do Pós-teste (Apêndice K). Para o pós-teste foram selecionadas as mesmas questões aplicadas no pré-teste, com a diferença que dessa vez as interpretações foram feitas utilizando o *software* GeoGebra e que para validar a resolução deveriam ser apresentadas as etapas de construção.

Décimo Segundo Encontro

Realizou-se neste último encontro do projeto de intervenção a aplicação do questionário (Apêndice L). Era composto de 10 (dez) perguntas fechadas e utilizou-se a escala *Likert*[7] como referência para criar os critérios indo desde 1-discordo completamente até 5-concordo completamente, tendo como elementos centrais 2-discordo, 3-sem opinião e 4-concordo. Os participantes tiveram 50min para responder ao questionário e apenas 19, dos 31 participaram desta etapa.

[7] Para maiores informações sobre a escala *Likert*, acesse "Mensuração e Escalas de Verificação: uma Análise Comparativa das Escalas de *Likert* e *Phrase Completion*" publicado na Revista Brasileira de Pesquisas de Marketing, Opinião e Mídia, disponível em www.revista.pmkt.com.br, ISSN: 2317-0123 (On-line).

4. Resultados e Discussões

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos durante a aplicação das Atividades Orientadoras de Ensino planejadas no projeto, bem como os registros obtidos por meio das descrições deixadas pelos participantes nessas atividades, tais registros correspondem às suas falas e aos materiais produzidos durante as construções das soluções dos problemas no *software* GeoGebra. A fim de garantir o anonimato estaremos indicando cada participante por A1, A2, ... , A30, A31, representando assim os trinta e um integrantes do projeto.

Para uma melhor apresentação dos dados, dividimos o capítulo em doze seções: na seção 4.1 apresentamos o 1º encontro do projeto que ocorreu com a aplicação do pré-teste, sem utilização do *software* GeoGebra, foi elaborada a partir de treze questões previamente selecionadas das provas anteriores da Obmep de 2005 a 2017. Foi exibida, por meio de quadros, a estratégia desenvolvida por cada aluno que fez algum tipo de análise nas questões, bem como a apresentação de figuras que indicam o raciocínio desenvolvido pelo aluno, também optou-se por inserir notas de rodapé que tratam da proposta algébrica de resolução das questões. Ao final da seção apresentamos o depoimento de dois participantes que retratam a realidade de muitos de nossos estudantes nas escolas públicas.

Da seção 4.2 a 4.10 vamos tratar das atividades orientadoras de ensino que foram contempladas tanto com vídeos e textos do site *ogeogebra*, como da construção de questões da Obmep, questões estas diferentes das que foram aplicadas no pré-teste, em síntese as questões abordaram conceitos matemáticos diversos. Em cada uma delas apresentamos e interpretamos gráficos que tratam do índice de rendimento referentes ao desenvolvimento da atividade proposta. Destacamos apenas que na seção 4.9 será apresentada uma nuvem de palavras elaborada no *software* IRaMuTeQ[8] com o objetivo de apresentar os conceitos matemáticos mais e menos presentes nas questões da Obmep selecionadas pelos participantes no encontro.

Na seção 4.11, apresentamos os resultados obtidos no pós-teste que foi composto pelas mesmas treze questões já analisadas pelos participantes no momento do pré-teste com a diferença que agora teriam o *software* GeoGebra como ferramenta de apoio às construções geométricas.

[8] Interface de R para Análises Multidimensionais de Textos e Questionários. Lógica de tratamento de dados para o texto do texto ou do tipo individual. Permite realizar as análises do tipo "ALCESTE". Disponível em https://sourceforge.net/projects/iramuteq/.

Finalmente na seção 4.12, abordamos os resultados do questionário aplicado. O questionário teve como objetivo investigar a percepção dos alunos quanto às atividades orientadoras desenvolvidas, o uso do *software* GeoGebra no processo de interpretação de questões, dificuldades encontradas, bem como o grau de motivação no desenvolvimento das atividades.

4.1. Pré-teste: examinando os conhecimentos geométricos

A aplicação do pré-teste (Apêndice C) ocorreu no dia 09 de agosto de 2017 às 14h com a participação dos 31 alunos que aceitaram participar do projeto. Teve duração de cinco aulas de 50min e foi aplicado na sala 5 do Colégio Técnico de Floriano, sendo fiscalizado pelo pesquisador. Antes da entrega do pré-teste os participantes receberam algumas orientações: o tempo máximo de aplicação seria até às 18h10, não haveria consulta, só poderiam utilizar lápis, borracha e caneta, não poderiam usar folha de borrão, o tempo mínimo de permanência na sala seria de 1h e para ser validada, a questão deveria apresentar um raciocínio lógico coerente, onde receberiam um ponto por questão validada e pontuação zero por questão não validada. Apresentamos abaixo o registro dessa aplicação.

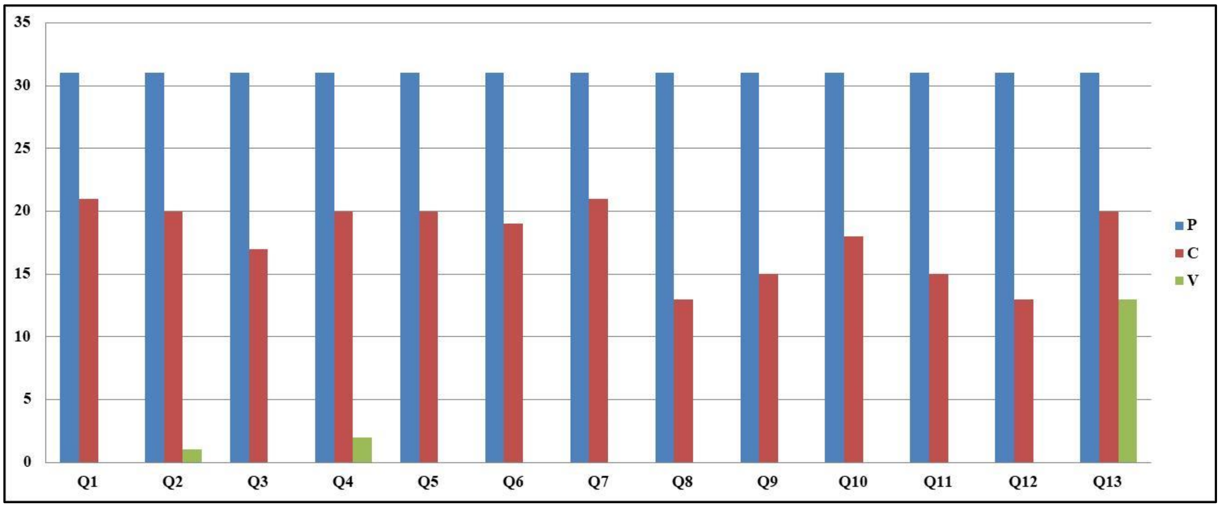
Figura 5 - Registro da aplicação do pré-teste.

Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Dentre as orientações destacamos a última que trata da validação da questão. Durante a correção do pré-teste pudemos identificar diversas situações que acabaram por invalidar a pontuação dos participantes, dentre elas: incoerência na resolução apresentada e marcação da alternativa sem os cálculos. Apresentamos o gráfico abaixo que trata dessas relações. A coluna em azul representada por P indica o número de participantes, no caso 31; a coluna em vermelho

C indica quantos apresentaram alguma consideração para responder a questão; já a coluna verde representada por V indica quantas dessas considerações foram validadas.

Gráfico 5 - Relação entre Participantes, Considerações apresentadas e Validação.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Pelo gráfico observamos que em todas as questões algum aluno deixou de apresentar alguma consideração sobre sua resolução. Destacamos as questões Q3, Q8, Q9, Q11 e Q12 no qual apenas 50% aproximadamente ou menos justificaram alguma coisa. Observe que a coluna em verde torna a análise extremamente preocupante, visto que das 13 questões propostas, todos os 31 participaram não validaram 10 delas. Apenas nas questões 2 (um participante), 4 (dois participantes) e 13 (13 participantes) tivemos alguma validação. De maneira mais geral foram corrigidas 403 questões e em apenas 16, ou seja, 3,97%, obtivemos validação. O teste teve como resultado um índice de aproveitamento extremamente baixo, o que demonstra uma grande dificuldade dos participantes em compreender e interpretar corretamente as questões de geometria da Obmep, tal fato torna mais significativa nossa proposta de intervenção que visa potencializar o ensino mediado pelas tecnologias.

O gabarito do pré-teste foi extraído do banco de questões das provas anteriores da Obmep com o cuidado de resolver previamente a questão para confirmar se o gabarito apresentado estava realmente correto bem como se o espaço para resoluções presentes no pré-teste seria suficiente. Segue quadro abaixo com gabarito esperado.

Quadro 9 - Gabarito do pré-teste.

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ano	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Gabarito	B	B	B	A	A	C	E	B	E	B	B	B	A

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

A seguir apresentaremos a análise das questões e as transcrições das interpretações presentes no pré-teste dos participantes. Os participantes que não foram citados é porque deixaram a questão em branco e não apresentaram qualquer consideração. A fim de evitar repetições, sempre que estivermos nos referindo a alguma questão do pré-teste discutidas nos tópicos 4.1.1 ao 4.1.13, estaremos nos referindo ao Apêndice C.

4.2. Análise das questões do pré-teste

Primeira questão

A questão 01 apresentava uma escada de 25m apoiada na parede de um prédio e com sua base afastada de 7m da base do prédio. A escada então escorrega 4m para baixo e deseja-se saber qual será seu deslocamento na base. Esse é um típico problema que envolve conceitos de triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras. Para uma melhor compreensão apresentamos a sugestão de resolução algébrica proposta[9] pela Obmep. Em síntese, o quadro 10 mostra as interpretações da questão de modo individualizado dos alunos que tentaram respondê-la.

Quadro 10 - Questão 01 – OBMEP 2005 – alternativa correta – Letra B.

Nome	**Interpretações apresentadas pelos participantes**	**Pontuação**
A2	*O topo ele vai para baixo ou para o lado, fiquei em dúvida*	0
A3	$\cos = \frac{h}{tig} \Rightarrow \cos = \frac{24}{5} \Rightarrow \cos = 8$	0
A4	*Não lembro as fórmulas usadas para calcular as medidas de um triângulo*	0
A5	*É 25 de comprimento que estão encostado na parede de 7m de distância da base, mais quando ele escorrega 4m para baixo vai ficar igual a 25-7=8*	0

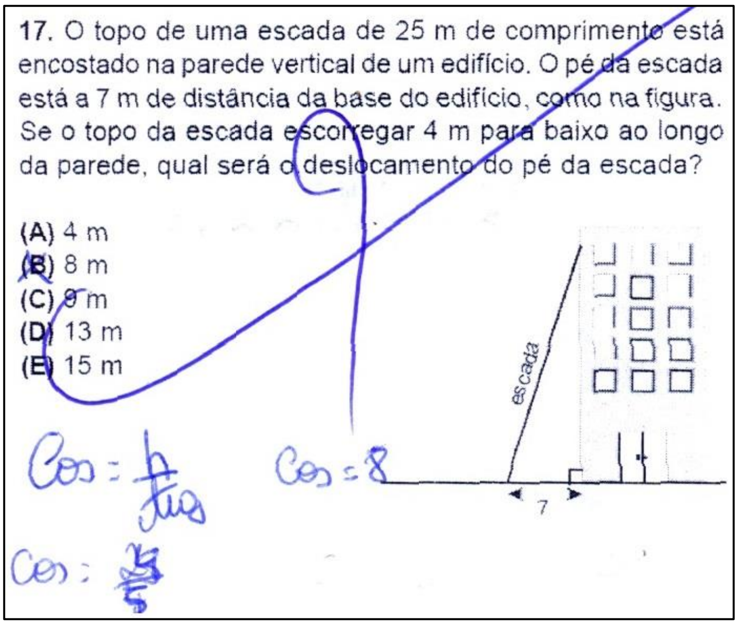
[9] Considere o triângulo retângulo cuja hipotenusa é a escada que mede 25 m, um dos catetos é o segmento ligando o pé da escada à base do edifício, que mede 7 m, e o outro cateto é o segmento da parede do edifício que une o topo da escada ao solo. O comprimento x deste último cateto pode ser calculado imediatamente a partir do Teorema de Pitágoras: temos $25^2 = 7^2 + x^2$ e obtemos x = 24 m. Quando o topo da escada escorrega 4 m para baixo, obtemos um novo triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 25 m e um dos catetos mede 24 - 4 = 20 m. O outro cateto y deste triângulo é determinado, outra vez, pelo Teorema de Pitágoras: temos $25^2 = 20^2 + y^2$ e segue que y = 15 m. Logo, o deslocamento do pé da escada será de 15 - 7 = 8 m.

A6	*Cheguei nessa resposta descobrindo a altura do prédio que é de 24m depois fiz a escala que 1cm equivale a 1mm depois desci os 4cm que mandava e medi a distância*	0
A7	*25-21 = 4m, 14+7=21*	0
A8	*Soma o comprimento mais a distância e divide por 4, 25+7=32/4=8*	0
A9	*4*25/7=100/7=14*	0
A10	*25-4+7+x → 21=7x → 21+7=28/7 = 4*	0
A11	*De 4m porque à medida que a escada escorrega 4m fica 4m mais longe da base do edifício*	0
A12	*Dado o triângulo retângulo de hipotenusa 25m e catetos 7m e 8* $\sqrt{3}$ *m*	0
A13	*Se a escada escorrega em cima, o mesmo tanto ela se move para baixo*	0
A15	*Se com 7cm o topo é 25m, se cair 4m o topo cai para 13m*	0
A16	*Arrisquei na letra C pois fiz uma divisão fora do padrão, fiquei em dúvida entre letra A e letra C*	0
A17	*25-7=18 → 18/4=4,5*	0
A18	*O meu raciocínio foi o seguinte: se ela se deslocou 4 metros para baixo, ela com certeza irá se afastar mais que 4 metros. Então multipliquei 2.4=8. Dificuldade: Não lembrei do que se trata.*	0
A19	*Não entendi o raciocínio da questão, não ficou claro para mim o que ela queria*	0
A20	*Não sei por qual forma resolver*	0
A22	$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 25^2=7^2+c^2 \rightarrow c=24 \rightarrow 24-7=17 \rightarrow 17-4=14$	0
A27	*Não sei resolver*	0
A28	*Porque a cada metro que ela escorrega, ela se afasta 1 metro da base do edifício*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Pelas 21 respostas apresentadas, vemos que todas elas não possuem um raciocínio coerente para se chegar na resposta do problema. Apenas os participantes A12 e A22 identificaram a existência de um triângulo retângulo, porém não souberam concluir a questão, já que realizaram os cálculos de modo equivocado. Sete participantes (A2, A4, A16, A18, A19, A20 e A27) citaram estar em dúvida ou que não sabiam resolver. O estudante A3 usa a função cosseno apresentando uma razão desconhecida e ainda divide 24 por 5 que são números que nem aparecem na questão e ainda diz que o resultado da divisão vale 8, além de nem se referir a ângulo algum. O aluno A5 subtrai 7 de 25 e dá como resultado o número 8. Algebricamente, não há coerência no raciocínio de A10, visto que coloque que 7 + x = 7x. O estudante A22 subtrai 4 de 17 e obtém como resultado 14. Observa-se, portanto que além de problemas relacionados à interpretação da questão, tem-se também problemas de natureza básica, como o procedimento de cálculo com as quatro operações. Destacamos abaixo um recorte da resolução apresentada pelo participante A3.

Figura 6 - Resolução da questão 01 do pré-teste pelo participante A3.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Observe que apesar de o participante ter marcado corretamente a letra B e ter recebido o "certo", tal questão não tinha condições de ser validada em virtude de não apresentar uma resposta com raciocínio coerente, conforme já dito anteriormente. Fato similar ocorreu com a validação da questão aos participantes A5, A8 e A18.

Como síntese, notamos que nas respostas dos alunos para essa questão, foi notável a grande dificuldade na compreensão do problema e de como expressar sua solução correta. Os estudantes não entenderam como estruturar o pensamento e encontrar um processo de resolução seguindo um raciocínio lógico baseado nos conceitos, procedimentos, técnicas e habilidades adquiridas em suas experiências em sala de aula, também deram indícios de dificuldades nas operações básicas de matemática. Sobre essas dificuldades, destacamos

> [...] resultados que evidenciam um ensino que ainda se direciona a um formato do tipo tradicional que consiste em trabalhar conceitos e procedimentos que sejam posteriormente aplicados, sem a devida compreensão, em diferentes situações. [...] trata-se de uma cultura escolar que ainda se baseia na memorização imitativo-repetitiva de procedimentos algoritmos, situação que quase sempre gera incompreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos (PROENÇA, 2017, p. 441).

Segunda questão

A questão 02 sugere que uma formiga caminhando sobre um disco circular com velocidade constante e tem por objetivo a interpretação gráfica (distância em função do tempo) gerada pela movimentação dessa formiga. O conceito de raio do círculo é fundamental para a interpretação da questão e o estudante deveria perceber que quando a formiga se movimenta sobre o arco do círculo, sua distância com relação ao centro é constante. Para uma melhor compreensão apresentamos a sugestão de resolução algébrica proposta[10] pela Obmep.

Quadro 11 - Questão 02 – OBMEP 2006 – alternativa correta – Letra B.

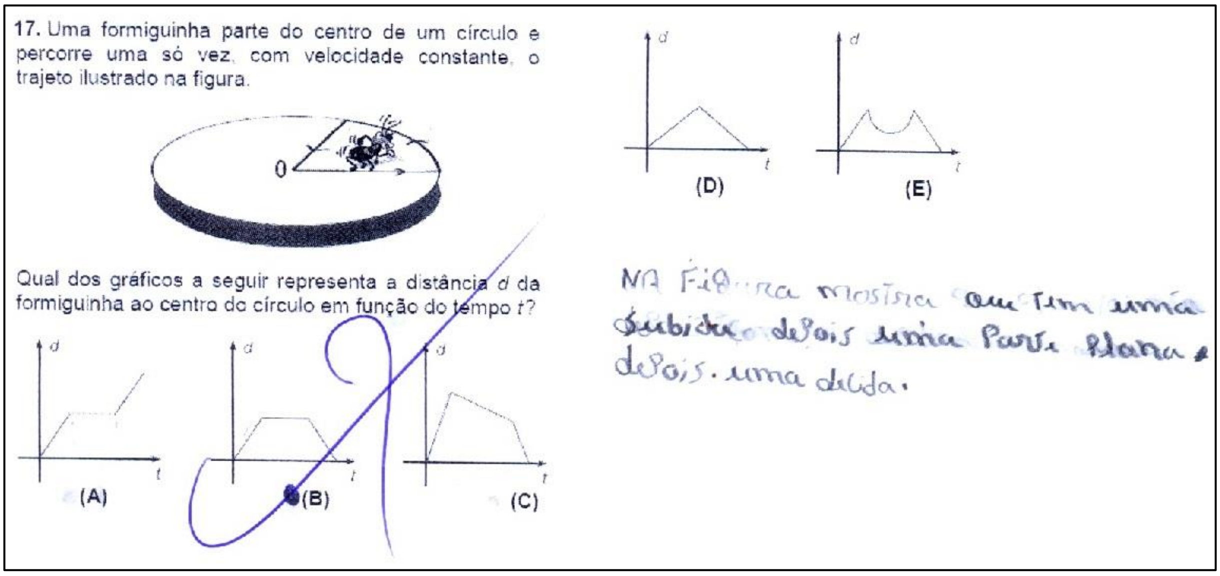
Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A3	*Como assim? Não entendi*	0
A4	*Velocidade constante é aquela que não varia, então a formiga parte do centro do círculo e a velocidade não muda, e analisando as alternativas, a letra A parece demonstrar mais o percurso da formiga*	0
A5	*Envolve física e eu não consegui responder*	0
A6	*Descobri no raciocínio que quanto mais tempo passava mais ela se distanciava do ponto O*	0
A9	*Não consegui compreender*	0
A10	*Alternativa D porque a formiga sai do centro do círculo formando um triângulo*	0
A11	*Na figura mostra que tem uma subida depois uma parte plana e depois uma descida*	0
A12	*Como a formiga saiu do centro do círculo com velocidade constante, o que significa que existem dois patamares de distância igual e na distância percorrida pela formiga sempre está aumentando*	0
A13	*O movimento vai ser alto e depois vai diminuindo com o passar do tempo*	0
A15	*Porque a formiguinha percorre constantemente na parte do centro do círculo*	0
A16	*Marquei a alterativa A pois o gráfico mostra uma só velocidade constante e segue o trajeto*	0
A18	*Não usei cálculo, apenas observei que de todas apenas a letra E existe um tipo de uma curva, que contém na ilustração*	0
A19	*Gráfico letra A, pois o que entendi é que essa velocidade aumenta constantemente e no gráfico A mostra uma velocidade constante crescente*	0
A20	*Pois a distância começa crescente, constante e decresce, respectivamente*	1
A21	*D, porque ela está parecendo um triângulo igual a da figura do gráfico*	0
A22	*E, pois é a única alternativa que melhor representa o trajeto da formiga por conta da curva*	0
A24	*Eu marquei essa alternativa porque acho que é o gráfico que representa melhor*	0
A26	*D, tentei por lógica*	0
A27	*B, pois a formiga deu uma volta e o gráfico é crescente e formado por retas*	0
A28	*D, esse é o melhor gráfico que representa a velocidade constante da formiga*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

[10] A formiguinha (i) primeiro se afasta do centro, depois (ii) fica algum tempo à distância constante do centro, enquanto anda sobre a circunferência e finalmente (iii) retorna ao centro. A observação (ii) elimina as alternativas (C), (D) e (E) e a observação (iii) elimina a alternativa (A).

Apenas 20 participantes apresentaram algum tipo de interpretação e apenas o aluno A20 apresentou um raciocínio coerente. Os alunos A3, A5 e A9 não entenderam a questão. O estudante A10 aproximou um setor circular a um triângulo. Os alunos A2, A9, A11, A17 e o aluno A25 receberam o "certo", mas não tiveram a questão validada. Reforçamos que a validação das questões, estava diretamente relacionada à apresentação, por parte do estudante, de um raciocínio lógico coerente. Observe abaixo o raciocínio descrito pelo participante A11. Observamos que não há qualquer relação do texto descrito pelo mesmo, "*na figura mostra que tem uma subida, depois uma parte plana e depois uma descida*", com a análise correta.

Figura 7 - Resolução da questão 02 do pré-teste pelo participante A11.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Entendemos que esse tipo de questão gera uma dificuldade bem maior ao aluno, visto que exige uma interpretação a nível de movimentação de um objeto dentro da figura. Ademais, construir e interpretar gráficos de funções apresenta altos índices de fracasso. Sobre esse tipo de interpretação, destacamos que,

> [...] investigações sobre o conceito de funções têm demonstrado a importância do estudo específico, em relação às dificuldades dos alunos, ao passarem de uma representação de conceito a outra. Boa parte dos alunos tem dificuldade de esboçar, graficamente, uma situação problema, sem escrever a lei de formação – formalização dessa função. Com base nisso, percebe-se que os alunos perderam as idéias gerais sobre comportamento da função, impossibilitados de ter uma visualização gráfica de uma situação problema [...]. (SILVA, 2007, p.1)

Terceira questão

A questão 03 relaciona a área de um quadrilátero BCDP em função do deslocamento do ponto P sobre o segmento AC e tinha por objetivo determinar graficamente a relação entre a variação do ponto P sobre a diagonal AC e a área do quadrilátero destacado. Para uma melhor compreensão apresentamos a sugestão de resolução algébrica proposta[11]:

Quadro 12 - Questão 03 – OBMEP 2007 – alternativa correta – Letra B.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A3	*Também não entendi*	0
A4	*Não consegui interpretar a pergunta*	0
A5	*A questão envolve área e eu não sei responder*	0
A6	*Descobri porque quanto maior o "x" menor a área do polígono*	0
A8	*Não consegui encontrar*	0
A11	*Está bastante parecido com o desenho do polígono*	0
A12	*Quando a área do polígono diminui, o valor de x aumenta*	0
A13	*Letra A pois é uma reta e começará depois de x*	0
A15	*Eu não entendo muito de gráfico muito menos de variação de área*	0
A16	*Tive dificuldade em lembrar da fórmula correta para executar o cálculo, por isso não realizei*	0
A18	*Letra E, pois achei bem parecido*	0
A19	*Gráfico B onde no desenho parece a variação da área de x = AP*	0
A20	*Não sei como resolver por função*	0
A21	*Porque ela está mais parecida com a de cima*	0
A22	*A, na minha interpretação é o gráfico que representa x = AP*	0
A27	*Não sei resolver*	0
A28	*Não consegui enxergar o que que variação do polígono tem a ver com o gráfico*	0

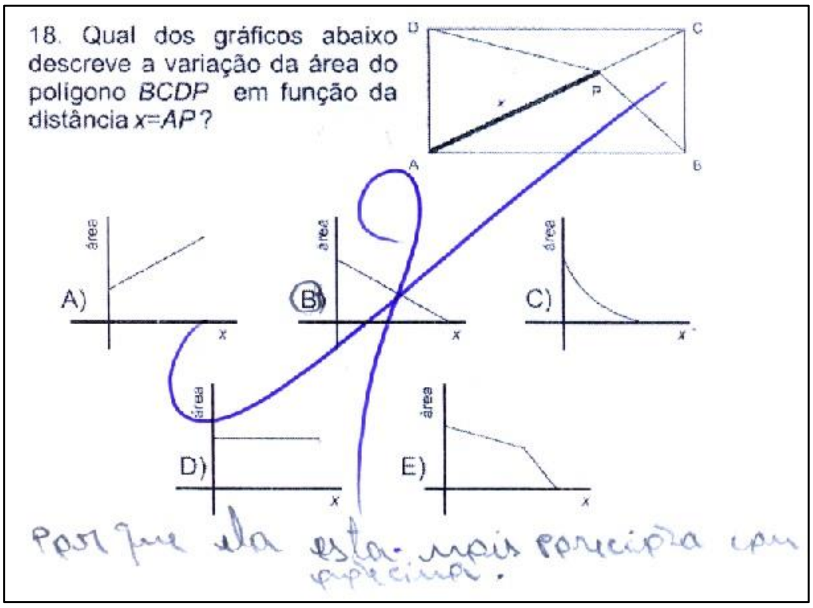
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Observe que das 17 respostas apresentadas, 100% delas foram consideradas incoerentes, devido à falta de apresentação de raciocínio lógico. Dessas, em 9, o participante não conseguiu compreender o que fazer (A3, A4, A5, A8, A15, A16, A20, A27 e A28). Os participantes A2, A10, A18 e A29, marcaram de forma incoerente a letra E, porque associaram o polígono ABPD da pergunta com o gráfico que aparece ne letra; não há relação nessa associação. Receberam o "certo", mas não tiveram a questão validada os participantes A6, A9, A11, A12, A15, A17, A23, A21 e A25. Observe na figura abaixo o raciocínio descrito pelo participante A21. Como

[11] Inicialmente notamos que a função é decrescente, pois à medida que x cresce a área (BCDP) decresce; isso elimina as alternativas (A) e (D). Notamos também que como os triângulos ACB e ACD são congruentes, suas alturas BQ e DR são iguais; vamos denotá-las por h.
Então os triângulos BCP e DCP têm a mesma base CP e a mesma altura h, donde área (BCP)=CP.h/2=área(DCP). Logo área(BCDP)=área(BCP)+área(DCP)=2.CP.h/2=CP.h. Vamos denotar por a o comprimento da diagonal AC. Então CP = $a - x$ e temos área (BCDP) = $(a - x).h = ah - hx$. Como ah e h são constantes, segue que a área (BCDP) é uma função linear de x, o que elimina as alternativas (C) e (E).

o mesmo aluno viu triângulos na pergunta, entendeu que deveria marcar a letra B que era o único gráfico em que um triângulo poderia ser observado. Observe que na resolução ele coloca "*porque ela está mais parecida com a de cima*".

Figura 8 - Resolução da questão 03 do pré-teste pelo participante A21.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Aqui mais uma vez destacamos a dificuldade dos alunos na interpretação de gráficos e de sua relação com outros entes matemáticos, no caso áreas, conforme evidencia Santos et al.,

> [...] os gráficos apresentados são abordados de forma mecânica visando a construção e leitura deles, mas não havendo espaços para discussões no sentido de interpretar e se posicionar criticamente, [...] e sobre informações que se queira evidenciar, ou seja, destacando a discussão dos temas da realidade presentes nos gráficos [...]. (SANTOS et al., 2016, p.4)

Quarta questão

A questão 04 representou quatro arcos de circunferência de raios distintos e tinha por objetivo a soma dos comprimentos desses arcos. O primeiro arco partia do vértice D do quadrado ABCD de lado 1cm. O estudante deveria medir os quatro arcos de circunferência, tendo o cuidado de observar o valor de cada raio que ia se alterando, à medida que o arco determinava um quarto de volta. Apresentamos a sugestão de resolução algébrica proposta[12].

[12] O comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$; um arco de um quarto dessa circunferência tem então comprimento $2\pi r/4 = \pi r/2$. Os raios das circunferências cujos arcos estão sendo considerados no problema são 1cm, 2cm, 3cm e 4cm.

Quadro 13 - Questão 04 – OBMEP 2008 – alternativa correta – Letra A.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A1	*1+1+1+1+1 = 5*	0
A3	*Explicação por favor*	0
A5	*Não estou conseguindo responder porque envolve geometria e eu não sou muito boa*	0
A6	*Descobri fazendo a circunferência e dividindo por 4 pois cada parte equivale a 1/4 de um círculo, depois somei tudo*	1
A10	*4+1=4 → 5*4=20 → 20/4 = 5*	0
A11	*8πcm porque tem 8 traços*	0
A12	*Os arcos são 1/4 da circunferência. Como C = 2πr, fazemos* C_1, C_2, C_3, C_4 *e no final soma tudo, considerando o raio inicial igual a 1cm*	1
A13	*Não lembro direito como é a fórmula do π*	0
A15	*Eu acho que é 8πcm porque cada par pode ser 2πcm*	0
A16	*Não sei a fórmula*	0
A17	*4cm+5cm=9πcm*	0
A19	*Eu somei todos os lados no valor de 1cm*	0
A20	*Não sei como medir o comprimento dos arcos de circunferência*	0
A21	*A, B, C, D, cada uma desses pontos mede 1cm e DE mede 2cm*	0
A22	*2+1+1+1=5=5πcm*	0
A24	*Eu somei o 1 cinco vezes e deu o resultado*	0
A26	*Não sei como resolver*	0
A27	*Não sei resolver*	0
A29	*Já vi esse assunto só que eu nunca aprendi ele*	0
A31	*Eu sei como usar o π, mais como vou fazer o cálculo sem outros valores?*	0

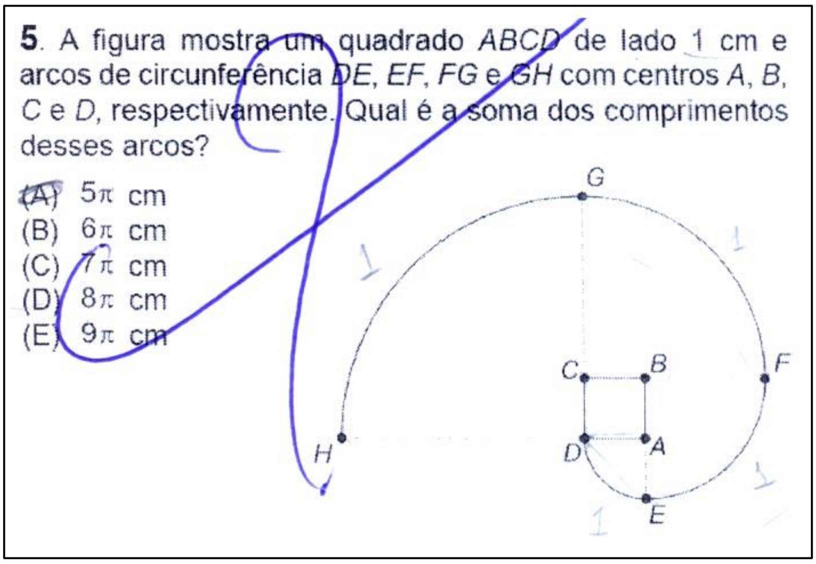
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

A tabela acima apresenta as considerações de 20 participantes. Desses 20, apenas 2 apresentaram um raciocínio coerente que pudesse validar a questão. Observe que tanto A6 quanto A12 perceberam que cada arco corresponde a 1/4 de circunferência e definiram corretamente o comprimento como sendo $2\pi r$. Dez participantes, a saber, A3, A5, A13, A15, A16, A20, A26, A27, A29 e A31, não compreenderam o que deveria ser feito. Veja que o estudante A5 destaca que não conseguiu resolver porque não sabia resolver problemas que envolviam geometria e esta fala foi bastante recorrente durante as atividades e que se comprovam nos resultados do questionário aplicado aos participantes que serão discutidos mais à frente. Vemos que aluno A10 coloca que 4 + 1 é igual a 4 e que tanto o estudante A17 como o A22 efetuam uma soma sem o π e no resultado acrescentam esse valor. Receberam o “certo”, mas não tiveram a questão validada os participantes A1, A9, A10, A13, A22, A23, A24 e A25. Observamos que na figura abaixo a raciocínio utilizado pelo aluno A1; o mesmo considera que

A soma dos comprimentos desses arcos é então $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}=\frac{(1+2+3+4)\pi}{2}=5\pi$.

cada arco tem comprimento de uma unidade e a seguir soma o um, cinco vezes, obtendo como resultado cinco, e daí acrescenta número o π. Mesmo procedimento foi executado pelos participantes A22 e A24. Os demais apenas marcaram a letra A.

Figura 9 - Resolução da questão 04 do pré-teste pelo participante A1.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Encontramos nas estruturas circulares uma dificuldade maior nos alunos no que se refere à interpretação das questões. O problema aqui é que a deficiência nesse tipo de ente matemático acaba por dificultar mais ainda a interpretação em outros problemas em que está diretamente ligado. Segundo Vecchi,

> Dentre os saberes apresentados na escola, historicamente rico e de constante contextualização, o estudo da circunferência é sem dúvida relevante na prática docente. O aluno que o entende bem também compreenderá outros assuntos a este ligados direta ou indiretamente. Dada sua importância, é um conteúdo que aparece tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio (VECCHI, 2015, p.15).

Quinta questão

A questão 05 apresenta um quadrado representado em um sistema de coordenadas cartesianas com um dos vértices na origem e outro no ponto de coordenada (10,7). A questão tem por objetivo determinar a soma das coordenadas de (a,b) pertencente a outro vértice. Nessa questão temos inseridos conceitos de paralelismo e perpendicularidade e semelhança de triângulos. Segue sugestão de resolução algébrica proposta[13] para uma melhor compreensão.

Quadro 14 - Questão 05 – OBMEP 2009 – alternativa correta – Letra A.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A4	*Sou péssima em cálculos de figuras geométricas (geometria)*	0
A5	*Não consegui responder pois eu tentei de toda forma porém não consegui responder*	0
A6	*Eu fiz uma escala e somei os números que eram 20 e 2*	0
A7	*Suponho que quando ele parte do (10, 7) para (a, b) aumente 0,3 com isso seria 11. Daí 11+11=22*	0
A10	*Fiquei um pouco confuso pois não sei se é para somar os pontos*	0
A11	*10,7+10,7=25,4 aproximadamente 22. Tem a mesma distância do segundo para o terceiro*	0
A13	*Não lembro calcular vértice*	0
A15	*Eu não entendi nada dessa questão, não faço ideia de como resolvê-la*	0
A16	*Não entendi*	0
A17	*a+b=10, a+b=7, 2a+b=17, a=-b+7, 2(-b+7)+b=17, b=3, a=10, -3+10=13*	0
A18	*Dificuldade em tudo, mais chutei que era 24 pois a soma de (10, 7) era 17, aí marquei o lugar do 10 e do 7 e deduzi que era 24*	0
A19	*Não sei como resolver essa questão, não sei qual lei da matemática aplico*	0
A20	*Não sei o que é vértice*	0
A21	*Eu não consegui entender*	0
A22	*Não soube interpretar*	0
A24	*Não compreendi essa questão*	0
A26	*Não entendi*	0
A27	*Não sei resolver*	0
A29	*Não sei como fazer para chegar ao resultado*	0
A31	*Eu não consegui entender como vou conseguir encontrar o valor de "a" e "b", sendo que só tenho o valor (10, 7). Nunca fiz uma questão parecida com essa na minha outra escola e esse deve ser o problema, apensar de eu tirar nota boa, com outros assuntos.*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Assim como na questão anterior, os 20 participantes também se pronunciaram nessa questão e em nenhuma resposta deles apresentou um raciocínio coerente. Mais uma vez encontramos participantes que se posicionam quanto a desconhecer conteúdos geométricos (A4) e outros não compreendendo o que fazer na questão (A5, A10, A13, A15, A16, A19, A20, A21, A22, A24, A26, A27, A29 e A31). Observe que o aluno A6 "chutou" que as coordenadas seriam (2,20) e assim somou os números 2+20, assim como o estudante A7 que "chutou" que

[13] Sejam O a origem, A o ponto (10,7) e P o ponto (a,b). Traçando por A uma paralela ao eixo x e por P uma paralela ao eixo y, determinamos os pontos B (PB será perpendicular a AB) e C onde C terá coordenada (0,7). Como $A = (10,7)$, temos $AC = 10$ e $OC = 3$; além disso, $OA = AP$. Denotamos por α ($O\hat{A}B$), β ($B\hat{A}P$) e γ ($A\hat{P}B$) as medidas dos ângulos. Observamos agora que, como o ângulo $O\hat{A}P$ é reto, temos $\alpha + \beta = 90°$. Por outro lado, como o triângulo ABP é retângulo em B, temos $\beta + \gamma = 90°$. Segue que $\alpha = \gamma$ e então os triângulos OAC e ABP são congruentes, pois são triângulos retângulos com um ângulo (além do ângulo reto) comum e hipotenusas OA e AP iguais. Concluímos que $AB = 7$ e $BP = 10$, donde $a = 7 + 10 = 17$ e $b = 10 - 7 = 3$; logo $a + b = 3 + 17 = 20$.

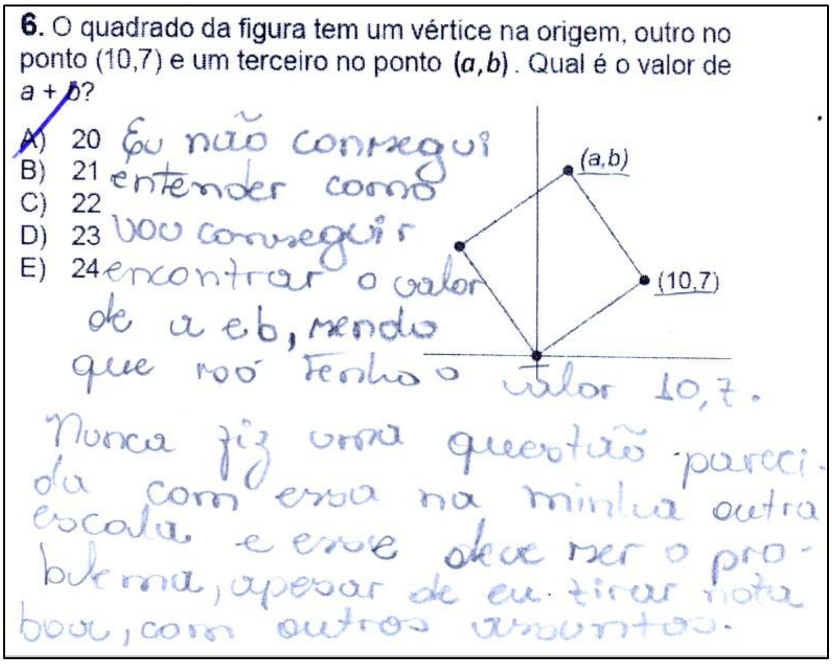
as coordenadas seriam (11,11), bem como o aluno A11 que "chutou" (10,7; 10,7) cuja soma é 25,4 e aproximou para 22. O participante A18 também usa "chute" para justificar a resposta. Já o aluno A17 cria um sistema de equações que não é possível de se determinar qual o fundamento lógico e no final ainda coloca que -3+10=13, que não consta em nenhuma alternativa. Acabou marcando letra D. Apenas o participante A2 acertou a alternativa correta (letra A), porém como apenas "chutou" não teve a questão validada.

Seguindo essa linha de raciocínio,

> Ao analisar os resultados deste levantamento percebemos, em média, que metade dos alunos de cada turma não identificavam as coordenadas de um ponto, não representavam corretamente os pares ordenados e não traçavam corretamente pontos no plano cartesiano. Alguns alunos apresentavam dificuldades até em posicionar os números inteiros na reta real. (BARBOSA; SOUZA, 2013, p.3)

Destacamos na figura abaixo as considerações de A31. Observe que o participante nem se preocupou em marcar alternativa alguma; na realidade deixou em branco, dez das treze questões do pré-teste. Constatamos um problema comum em sua justificava que é o de associar dificuldades hoje com deficiências no aprendizado em anos anteriores, no caso em escolas anteriores. Tal fala, também pôde ser observada em algumas práticas no Laboratório de Informática bem como nos resultados do questionário aplicado.

Figura 10 - Resolução da questão 05 do pré-teste pelo participante A31.



6. O quadrado da figura tem um vértice na origem, outro no ponto (10,7) e um terceiro no ponto (a,b). Qual é o valor de $a+b$?

A) 20
B) 21
C) 22
D) 23
E) 24

Eu não consegui entender como vou conseguir encontrar o valor de a e b, sendo que só tenho o valor 10,7. Nunca fiz uma questão parecida com essa na minha outra escola, e esse deve ser o problema, apesar de eu tirar nota boa, com outros assuntos.

Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Sexta questão

A questão 06 apresenta uma tira retangular dobrada formando um certo ângulo α e o objetivo da questão é determinar o valor desse ângulo α. É apresentada a largura de 1cm da tira, porém apenas uma parte do comprimento é determinado. O Teorema de Pitágoras está presente na questão, assim como a soma dos ângulos internos de um triângulo. O estudante também deverá observar paralelismo e perpendicularidade. Apresentamos a sugestão de resolução algébrica proposta[14].

Quadro 15 - Questão 06 – OBMEP 2010 – alternativa correta – Letra C.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A3	*Só faltou uma explicação*	0
A5	*Não sei*	0
A6	*Os ângulos da questão são semelhantes, o ângulo "a" é igual ao ângulo do triângulo de 2cm que é 120º*	0
A8	*Não consegui calcular o ângulo*	0
A9	*Não sei nada sobre ângulo*	0
A10	*a = 2+1 = 3 → a = 360/3 = 120º*	0
A11	*Se um lado tem 60º o outro também tem e se multiplicar um lado por dois dá 120º*	0
A13	*Acho que a = 110º pela forma de que a folha foi dobrada passando um pouco de 90º*	0
A15	*Eu acho que é 120º porque além de ser um ângulo obtuso ele é reto*	0
A16	*Marquei alternativa C, imaginei a abertura do ângulo e achei que era letra C. não sei fazer o cálculo preciso para tal problema*	0
A17	*No final acho que errei na conta*	0
A18	*Esqueci como se faz a medida do ângulo, não lembro*	0
A19	*Não entendi o que quis dizer com a medida. Não soube como fazer o cálculo*	0
A20	*Não sei como resolver*	0
A22	*Fiz um traço onde seria 90º e tirei ele como base na hora de dizer o ângulo. "olhômetro", algo que é errado!*	0
A24	*Não entendi essa questão*	0
A26	*90º + 45º = 135º , aproximadamente 130º*	0
A27	*Não sei resolver*	0
A29	*Tenho dificuldade nesse assunto também*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Tivemos o posicionamento de 19 participantes e 100% tiveram a questão invalidada; dez desses, A3, A5, A8, A9, A18, A19, A20, A24, A27 e A29, não sabem identificar ângulos

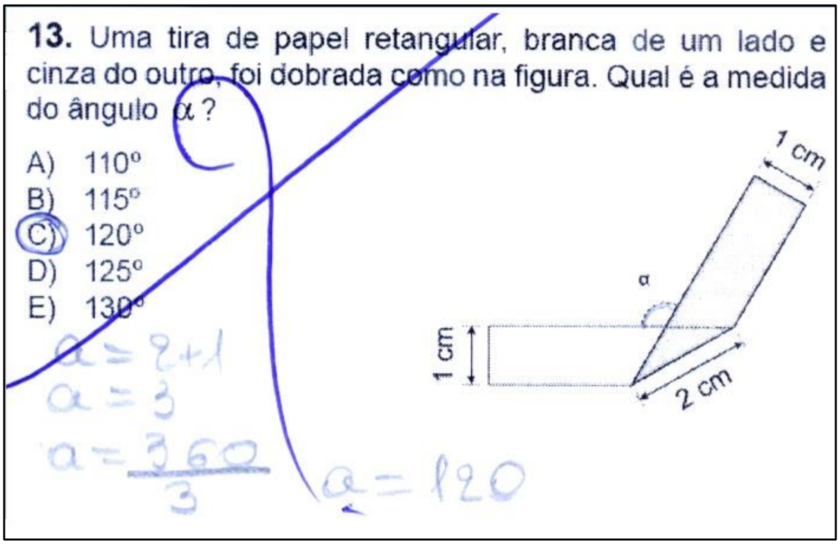
[14] Consideremos o triângulo *ABC* de cateto AB paralelo à largura vertical, AC perpendicular a AB e BC a hipotenusa de 2cm determinada na questão. Ele é retângulo com $AB = 1$ cm e $BC = 2$ cm, ou seja, um cateto é metade da hipotenusa. Segue que $D\hat{C}B = A\hat{C}B = 30^o$ e, analogamente, $C\hat{B}D = 30^o$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, segue que $B\hat{D}C = 180^o - 30^o - 30^o = 120^o$. Como $B\hat{D}C$ e α são opostos pelo vértice, concluímos que $\alpha = 120^o$.

nas figuras, nem o que fazer na questão. A6, A13, A15, A16, A17, A22 e A26 usaram o "chute" ou o "olhômetro", como justificativa.

> Não podemos pensar que o ensino e aprendizagem de ângulos se dão automaticamente após a leitura de um tópico, conceito e após a execução de algumas atividades ligadas a ele, e nem podemos avaliar o que foi aprendido por meio de uma prova com questões semelhantes às que foram desenvolvidas em sala de aula, pois apesar de aparente simplicidade, o conceito de ângulos é um dos mais complexos da Geometria, isso porque é usado com diferentes significados, dentre eles estão: giro, inclinação, região, orientação, e outros (LIMA, 2014, p.14).

Do total 32% dos participantes marcaram corretamente, porém tiveram a questão invalidada. Veja que A10 soma duas medidas conhecidas da figura (1+2=3) e a seguir divide 360º com esse número 3 obtido, encontrando 120º. Apresentamos na figura abaixo o desenvolvimento desse participante.

Figura 11 - Resolução da questão 06 do pré-teste pelo participante A10.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Sétima questão

Na questão 07 tem-se dois semicírculos tangentes de raios distintos internos a um quadrado de lado 36cm. A questão tem por objetivo determinar o raio do semicírculo menor. Como o diâmetro do semicírculo maior está sobre o lado do quadrado, concluímos que seu raio mede 18cm. Já o semicírculo menor terá raio menor que 18cm. Aqui deverá ser observado o triângulo retângulo determinado pelos raios e distâncias e um dos vértices do quadrado. Apresentamos a sugestão de resolução algébrica proposta[15].

Quadro 16 - Questão 07 – OBMEP 2011 – alternativa correta – Letra E.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A2	*O semicírculo é 10cm porque o maior ele é 36cm aí ele praticamente se parte*	0
A3	*Só faltou também*	0
A4	*12 x 3 = 36*	0
A5	*36 é 18^2 e 18/2 = 9*	0
A6	*Eu percebi que as medidas do raio eram semelhantes e a medida que sobrou, logo percebi que se dividíssemos 36 por 3 acharia a resposta*	0
A7	*Se o quadrado mede 36cm, o semicírculo maior pega a metade do quadrado provavelmente seria 18cm. Como o menor pega quase a metade do maior provavelmente seria 8cm o raio*	0
A8	*36/4=9*	0
A9	*36/4=9*	0
A10	*r = 36/4 = 9 → r = 9+2 = 11*	0
A11	*$R = 2\pi r = 6,28*36$*	0
A12	*Se o lado do quadrado mede 36cm, então o raio do semicírculo maior mede 18cm*	0
A13	*Não estou lembrando como é formula do raio R*	0
A15	*Eu não me lembro de como fazer essa questão*	0
A16	*Não sei a fórmula correta. $C^2 + C^2 /2$, $x^2+36^2=r$ → r = 384/2 = 15*	0
A17	*36/3=12*	0
A18	*Se os lados medem 36 então o raio do grande mede 18, então dividi 18 por 2 e achei o 9, que me convenceu*	0
A20	*Não sei como resolver e não encontro referências*	0
A22	*36/4 = 9cm*	0
A26	*36/3=12*	0
A27	*Não sei resolver*	0
A31	*π = 3,14. Eu não sei como descobrir o valor do raio*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Na tabela acima tem-se 21 considerações e 100% delas também não apresentam nenhum raciocínio coerente; observe que o teorema de Pitágoras não foi citado em nenhum momento. Segundo Bastian,

> A maior dificuldade poderá ser a não congruência entre o enunciado do problema e o Teorema de Pitágoras. A percepção da estratégia de resolução vai depender da familiaridade ou não do aluno com problemas não convencionais (BASTIAN, 2000, p.68).

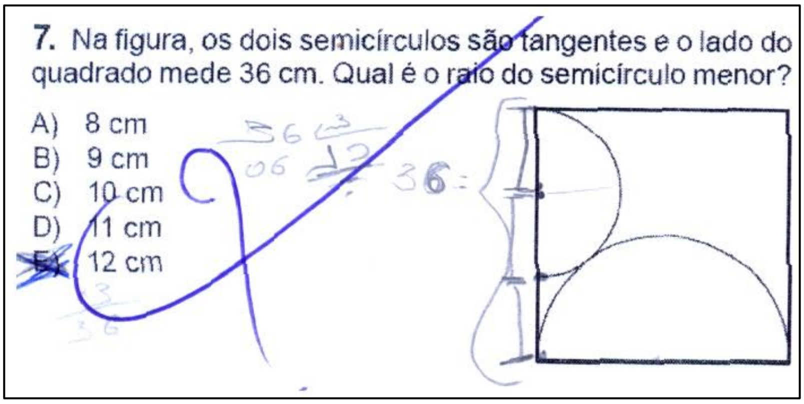
---

[15] Sejam R e r os raios dos semicírculos maior e menor, respectivamente; o lado do quadrado tem então medida $2R = 36$, ou seja, $R = 18$. Como os centros dos semicírculos e o ponto de tangência estão alinhados, o triângulo destacado na figura é um triângulo retângulo de catetos R e $2R - r$ e hipotenusa $R + r$. O teorema de Pitágoras nos dá $(R+r)^2 = R^2 + (2R-r)^2$. Simplificando, obtemos $6Rr = 4R^2$ e segue que $r = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}.18 = 12$.

Seis participantes (A3, A13, A15, A20, A27 e A31) não sabiam o que fazer. A4, A6, A17 e A26 consideram que a resposta é 12 porque 12 vezes 3 é igual a 36 que é o lado do quadrado. A5 considera que 36 e 18^2 são equivalentes e a seguir pega 18 e divide por 2 obtendo 9 que é uma das alternativas. A7, A10 e A12 utilizam estimativas. A8, A9 e A22 entendem que basta dividir 36 por 4 (número de lados do quadrado) obtendo 9. A11 comete dois erros: o primeiro é considerar que $R = 2\pi r$ e o segundo é que r vale 36 que é o lado do quadrado. A16 divide 384 por 2 obtendo 15 (o resultado da divisão é 192) a seguir multiplica 25 por 7 obtendo 175 e pega 175 e divide por 4 obtendo 9 (o resultado da divisão é 43,75); não marcou nenhuma alternativa.

Sete participantes marcaram corretamente, A4, A6, A14, A17, A21, A24 e A26, mas tiveram a questão invalidada. Observe na figura abaixo o raciocínio desenvolvido por A26. Veja que o mesmo, pega o lado do quadrado e dividido em 3 partes e entende que cada parte representa o raio do semicírculo menor.

Figura 12 - Resolução da questão 07 do pré-teste pelo participante A26.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Oitava questão

A questão 08 apresenta duas retas paralelas *r* e *s* separadas por uma distância de 2cm e dois círculos de centros A e C tangentes simultaneamente a *r* e *s* mas não tangentes entre si. Temos também uma reta *t* transversal às paralelas e que intersecta os círculos nos pontos B e D. O objetivo da questão é que seja determinada a área do quadrilátero ABCD, para isso o estudante deverá observar relações entre triângulos, em especial triângulos isósceles, e a existência de um losango com suas diagonais representadas. Abaixo segue sugestão de resolução algébrica proposta[16].

Quadro 17 - Questão 08 – OBMEP 2012 – alternativa correta – Letra B.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A3	*Eu não entendi*	0
A5	*Não sei. Tenho muita dificuldade nessas questões*	0
A6	*Notei que a medida do raio (1cm) se encaixaria na medida que não era dada de cara, depois só multipliquei base (2) x altura (1) e achei o resultado*	0
A10	*Não consegui, pois somente a pergunta sobre a reta*	0
A13	*Não consegui calcular a área*	0
A15	*Não entendi muito de gráfico*	0
A16	*Falta de interpretação na pergunta*	0
A17	$45^o = \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}$	0
A18	*Não lembro como se faz a área então chutei 2*	0
A19	*Não entendo*	0
A22	*Não consegui interpretar a pergunta*	0
A24	*D^BC = 45º* $\rightarrow \tan g 45^o = \frac{x}{2} \rightarrow \frac{1}{1} = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2$	0
A27	*Não sei resolver*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

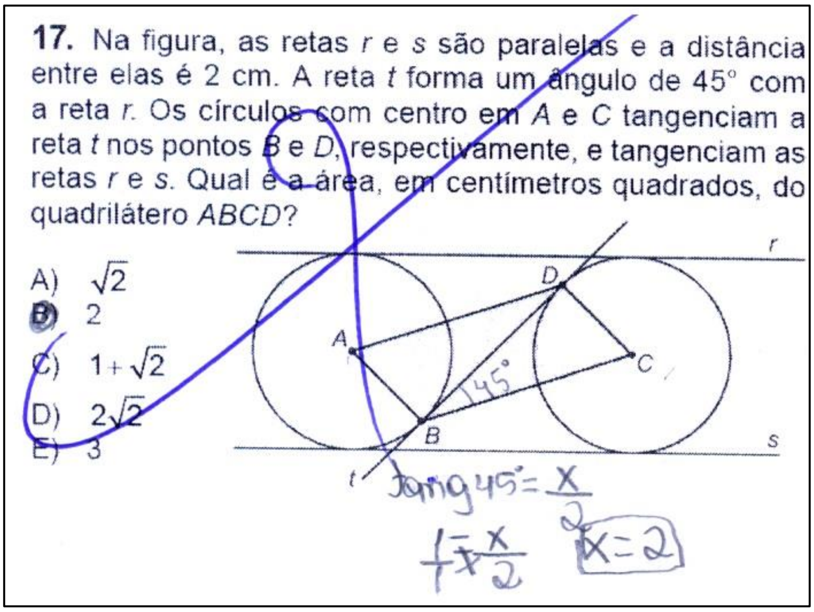
Percebe-se que até aqui essa questão apresenta o menor índice de apresentação de interpretações corretas, 13 do total apenas, ou seja, menos da metade dos participantes apresentaram respostas coerentes. Desses treze, nove não entenderam o que deveria ser feito (A3, A5, A10, A13, A15, A16, A18, A19 e A22). Observe que o aluno A6 determina corretamente a medida do raio, porém considera que ABCD é um retângulo de base 2 e altura igual a 1. Não é possível identificar qual a intenção do aluno A17, visto que inicia associando 45º ao número 2 sobre 2, a seguir insere uma raiz quadrada de 2 no problema e no final diz que 2 dividido por 4 é igual a dois, acrescido da raiz quadrada de dois. Observa-se a ausência de uma função trigonométrica, tangente por exemplo, para ao menos tentar fazer esse tipo de associação, além disso são inseridos elementos de forma meramente arbitrária, sem coerência matemática. Segundo Lima,

[16] A diagonal AC do quadrilátero ABCD é paralela à reta *r*, pois *A* e *C* estão à mesma distância (1cm) de *r*. Como *r* e *t* fazem um ângulo de 45°, segue que $C\hat{E}D$ = 45°. Como $C\hat{D}E$ = 90°, o triângulo CDE é isósceles e temos ED = DC = 1cm. Do mesmo modo obtemos AB = BE = 1 cm e segue que ABCD é um losango de lados 1 cm. As diagonais AC e BD dividem esse losango em quatro triângulos de mesma área; como a área do triângulo AEB é (AB.BE)/2 = 1/2, a área de ABCD é 4.(1/2) = 2cm^2.

> São várias as experiências cotidianas vivenciadas pelos alunos que envolvem o conceito de ângulos, no dia a dia vemos por toda a parte e de diversas maneiras situações em que a ideia de ângulo está presente [...] e nos Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao estudo sobre espaço e forma (campo da geometria) tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitem fazer conjecturas e identificar propriedades, ou seja, é de fundamental importância que os estudos do espaço e forma sejam explorados [...] de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento (LIMA, 2014, p.15).

Os participantes A6, A18, A24 e A25, marcaram corretamente, porém tiveram a questão invalidada devido à ausência de raciocínio lógico coerente. O aluno A24, assim como o aluno A6, também entende que o quadrilátero é um retângulo e que BD representaria a diagonal, logo o ângulo DBC iria medir 45º; a seguir desenvolve a tangente de 45º igualando a x/2, onde x estaria representando a base BC do retângulo, visto que está considerando o raio CD igual a 1 como sendo a altura. Apresentamos na figura abaixo tal interpretação.

Figura 13 - Resolução da questão 08 do pré-teste pelo participante A24.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Nona questão

Na questão 09 tem-se uma escada ABC de comprimento 2,9m em que C representa seu ponto médio. A escada é fixada em B e o ponto C é movido para cima de forma que A se afaste 2cm da posição original. A questão pede a que altura do chão ficou o ponto C após essa movimentação. Com essa movimentação, é possível determinar um triângulo isósceles e deste triângulo, por simetria, destacar um triângulo retângulo, no qual o Teorema de Pitágoras será suficiente para a interpretação. Apresentamos a sugestão algébrica da resolução proposta[17].

Quadro 18 - Questão 09 – OBMEP 2013 – alternativa correta – Letra E.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A2	*A articulação de "C" ela ficou 2 porque ela está sendo inclinada*	0
A3	*Se houve dobramento então é o dobro então é 4*	0
A5	*2,9-2,1=0,8*	0
A6	*Fiz uma escala de novo*	0
A10	*Não sei o que era para fazer*	0
A11	*Se estava a dois centímetros quando se moveu foi para quatro*	0
A13	*Letra A pois achei conveniente já que se a escada movimentou-se 2 cm no ponto A, então acho que C também movimentou 2*	0
A15	*Conforme a escada desliza mais ela aumenta*	0
A16	*Cresce uma imagem na figura na minha cabeça e pronto, letra A*	0
A17	*2,9-0,2=2,7m, arredondando ela fica 2m*	0
A18	*Multipliquei 2*2=4*	0
A20	*Não sei como resolver*	0
A26	*Não compreendi o que a questão quis dizer*	0
A27	*Não sei resolver*	0
A30	*Fica aproximadamente 4, já que o centro da escada estaria há 2,9 do chão*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Aqui também tivemos uma baixa participação nas considerações; pouco menos da metade. Além disso, 100% tiveram a questão invalidada. A10, A20, A26 e A27 não sabem o que fazer. Não há coerência nos argumentos apresentados por A2, A3, A5, A11, A13, A15, A16, A18 e A30. Destacamos na figura abaixo o procedimento feito por A17; o mesmo subtrai 0,2 de 2,9 obtendo 2,7, considera esse valor como sendo a altura pedida e aproxima 2,7 para 2. Nenhum dos 31 participantes, nem "chutando", marcaram a alternativa correta.

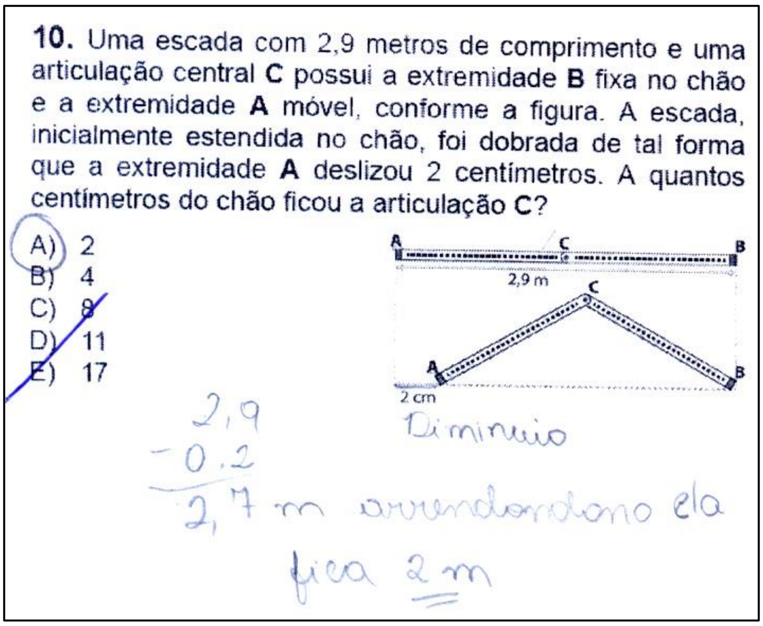
Mais uma vez observamos dificuldades quanto à interpretação de situações que envolvem o cálculo do Teorema de Pitágoras. Ainda segundo Bastian,

> [...] os erros cometidos pelos alunos na aplicação do Teorema de Pitágoras podem ser explicados como consequência da abordagem utilizada no processo de ensino-aprendizagem, porém sem esquecer os fenômenos concernentes à apreensão operatória (BASTIAN, 2000, p.181).

---

[17] Suponhamos que a escada tenha comprimento $AB = x$. Vamos considerar os pontos A_1 e D indicando, respectivamente, as posições dos pontos A e C após o movimento. Como C é o ponto médio de AB, o triângulo A_1BD é isósceles com $A_1B = x - 2$ e $A_1D = BD = x/2$. A distância $h = DE$ do ponto D ao chão pode então ser calculada pelo teorema de Pitágoras como $h = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} = \sqrt{x-1}$. Temos no problema que x = 290cm, então $h = \sqrt{x-1} = \sqrt{290-1} = \sqrt{289} = 17$.

Figura 14 - Resolução da questão 09 do pré-teste pelo participante A17.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Décima Questão

Tem-se na questão 10 um paralelogramo ABCD de área 24 cm^2 e pontos E e F médios dos lados AB e BC, respectivamente. Traça-se a diagonal AC e os segmentos DE e DF. Pede-se a área do quadrilátero EFGH. Observamos aqui a semelhança de triângulos e relações entre alturas e áreas. Abaixo sugestão de resolução algébrica proposta[18].

Quadro 19 - Questão 10 – OBMEP 2014 – alternativa correta – Letra B.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A2	*Porque ele está medindo 24cm^2 e os pontos que medem EF são (AB e BC)*	0
A3	*Então se era 24 ficou 6*	0
A5	*Letra C pois todas as áreas são iguais porque 6x4=20cm^2*	0
A6	*Tive dificuldade em encontrar as medidas*	0
A8	*Como a área é 24cm^2, cada lado do paralelogramo mede 6*	0
A10	*24 / 4 = 6*	0
A11	*24/4=6*	0
A13	*Não lembro bem como calcular a área*	0
A15	*24/4 = 6*	0
A16	*Não me lembrei da fórmula da área*	0
A17	*24cm^2/3=8cm^2*	0
A18	*Não lembro como se faz a área*	0

[18] Área(DFC) = (1/4).Área(ABCD) = 6, Área(DEA) = (1/4).Área(ABCD) = 6, Área(BDE) = (1/8).Área(ABCD) = 3. Daí Área(DEF) = 24 – 6 – 6 – 3 = 9. Temos que ΔDEF ~ ΔDHG e a razão entre suas alturas é ((3BD/4)/(BD/2)) = 3/2. Portanto, Área(DHG) = (4/9).Área(DEF)=4. A área procurada é a diferença 9 – 4 = 5 cm^2.

A19	*Eu não sei como fazer essa conta. Não entendi a questão de medidas dos lados*	0
A20	*Não sei o que são pontos médios*	0
A22	*Não cheguei a uma ideia para a questão*	0
A24	*Área = 24cm^2 → A=b*h → 24=6*h → h=4cm^2*	0
A26	*Não sei como resolver*	0
A27	*Não sei resolver*	0

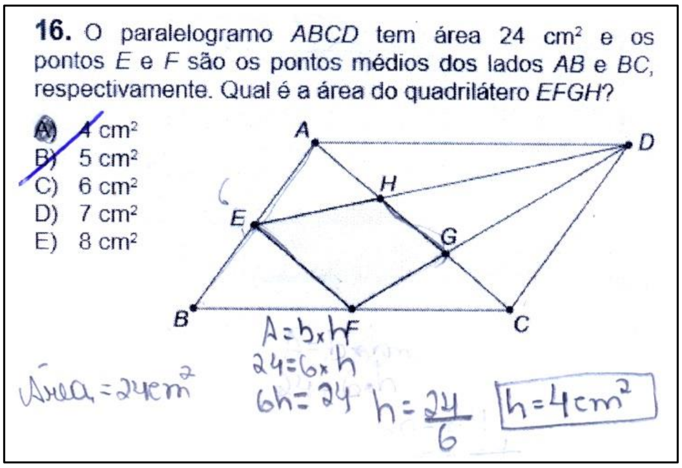
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Dezoito participantes apresentaram considerações sobre a questão e 100% tiveram a pontuação invalidada; nove deles (A6, A13, A16, A18, A19, A20, A22, A26 e A27) ou não sabiam resolver ou não compreenderam como se calcula área ou não sabiam o que eram pontos médios. Não foi possível compreender o que A2 quis dizer. Para A3, A5, A10, A11 e A15 bastava pegar a área do paralelogramo e dividir por quatro, obtendo seis. A17 faz algo parecido só que dividindo por três. Já A24 comete dois erros: primeiro considera que EFGH é um retângulo e usa a fórmula da área como sendo A=b*h, em seguida dá como resposta uma medida de comprimento em cm^2. Para Rocha,

> Alguns alunos apresentavam dificuldade em interpretar as questões e problemas, e, isso foi visto durante a atividade de sondagem quando os alunos deveriam ler e interpretar o que estava escrito na questão [...] Nas últimas questões da oficina, que abordava problemas com cálculo de perímetro e área, alguns alunos não conseguiram resolver os dois últimos problemas por falta de interpretação. Essa dificuldade em interpretar problemas também foi apontada pelo professor da turma durante a entrevista. Segundo ele, a dificuldade em interpretar não ocorre somente na disciplina de matemática, mas também nas outras disciplinas (ROCHA, 2016, p.63).

Assim como na questão 09 nenhum dos 31 participantes, nem "chutando", marcaram a alternativa correta. Destacamos na figura abaixo o raciocínio incorreto de A24.

Figura 15 - Resolução da questão 10 do pré-teste pelo participante A24.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Décima primeira questão

A questão 11 apresenta um trapézio isósceles, inscrito a uma circunferência. São dadas as bases maior e menor do trapézio, bem como sua altura. Pede-se o raio da circunferência. Esse é um típico problema que envolve conceitos de triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras. Podemos observar também o triângulo isósceles envolvido no desenvolvimento da questão e o uso de sistemas lineares para determinar as variáveis envolvidas. Segue sugestão de resolução algébrica proposta[19] pela Obmep.

Quadro 20 - Questão 11 – OBMEP 2015 – alternativa correta – Letra B.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A3	*Queria uma explicação*	0
A4	*Não entendo muito sobre raio. 10+9+16=35/3*	0
A5	*x=10*9/16 → x = 10. Não consegui fazer o resto*	0
A6	*Descobri a circunferência que é 17 depois somei a sua metade*	0
A8	*16+10+9=35, daí divide por 3*	0
A10	*r = 16-10+9=15 → r = 15+10=25 → r = 25/3*	0
A13	*Não lembro bem como se calcular os raios*	0
A15	*Não entendo muito de como fazer essa questão*	0
A17	*10y+x → y+x → 11y+2x*	0
A18	*Respondi no chute*	0
A19	*Eu sabia que tinha que multiplicar (base x altura) mas me perdi no meio da conta e com o resultado que deu*	0
A20	*Não sei como resolver*	0
A22	*Não cheguei ao resultado da alternativa da figura por completo, para conseguir chegar a altura do raio*	0
A26	*Se a base maior é 16, o raio teria que ser pouca coisa maior que 8cm que é a metade da base e 25/3 = 8,333...*	0
A27	*Não sei resolver*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

---

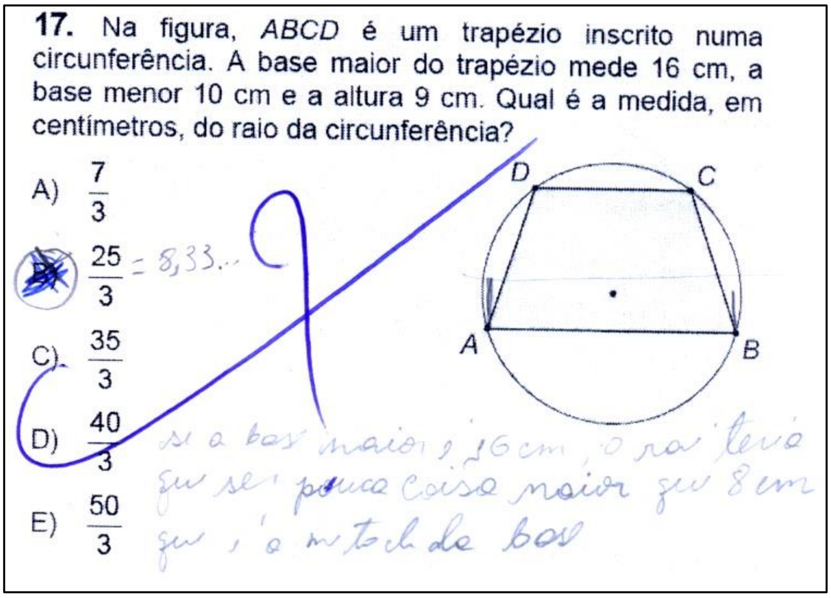
[19] Seja *O* o centro da circunferência, *OM* a altura do triângulo *OAB* relativa à base *AB* e *ON* a altura do triângulo *OCD* relativa à base *CD*. Como *AB* é paralelo à *CD*, segue que os pontos *M*, *O* e *N* estão alinhados e que *MN* é a altura do trapézio. Vamos denotar OA=OB=OC=OD=r, OM=x e ON=y. A altura do trapézio é, assim, igual a x+y=9 cm. Como o triângulo *OAB* é isósceles com base *AB* = 16 cm, segue, pelo teorema de Pitágoras, que $r^2=8^2+x^2$. De forma análoga, como o triângulo *OCD* é isósceles com base *CD* = 10 cm, segue, pelo teorema de Pitágoras, que $r^2=5^2+y^2$. Subtraindo a segunda equação da primeira, e usando que $y^2-x^2=(y+x)(y-x)$, temos $(y+x)(y-x)=8^2-5^2=39$. Embora o desenho indique que o centro da circunferência esteja dentro do trapézio, este fato pode ser confirmado pois se centro da circunferência estivesse no exterior ao trapézio, teríamos as seguintes equações: $\begin{cases} x-y=9 \\ y+x=39/9=13/3 \end{cases}$ que resultariam em x=20/3 e y=−7/3, o que é impossível já que y>0. Assim, o centro da circunferência é interior ao trapézio e temos as seguintes equações: $\begin{cases} x+y=9 \\ y-x=39/9=13/3 \end{cases}$ que resultam em x=7/3 e y=20/3. Pelo teorema de Pitágoras, segue que $r^2=8^2+(7/3)^2=64+49/9=(576+49)/9=625/9$ e, portanto, $r=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{25}{3}$.

Pela tabela acima, vemos que menos da metade dos participantes resolveram se pronunciar e destes, 60% (A3, A4, A5, A13, A15, A18, A19, A20 e A27) não compreenderam o que era para ser feito, desconhecendo, por exemplo, o que representa o raio em uma circunferência. Veja que A4 e A8 fazem simplesmente uma média aritmética entre os três números dados na questão. A5 manipula também os três números pegando dez multiplicando por nove e dividindo por dezesseis, obtendo dez como resultado; ocorre que o resultado da divisão é 5,625. A10 também usa manipulação dos números. Não foi possível compreender qual era a intenção de A6 e A17.

> As características da exploração do pensamento geométrico dos alunos são basicamente relacionadas aos rudimentos da geometria plana. As significações dos conceitos geométricos estão ligadas ao cotidiano. [...] As capacidades geométricas foram demonstradas na visualização espacial; verbalização com as trocas de ideias, negociação de significados, construção e manipulação de objetos, contudo, com restrições ao manuseio da régua, dificuldade em medir e a não utilização do transferidor. Infere-se que os conceitos geométricos raramente são desenvolvidos nas escolas. A ausência de um trabalho com a geometria impede os alunos de ter uma visão ampla da Matemática (BENTO, 2010, p.22,23).

Quatro participaram (A6, A10, A25 e A26) acertaram a questão, mas não apresentaram raciocínio coerente; A25 apenas “chutou”. Na figura abaixo apresentamos o raciocínio descrito por A26 que usou estimativa.

Figura 16 - Resolução da questão 11 do pré-teste pelo participante A26.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Décima segunda questão

A questão 12 apresentava dois quadrados concêntricos, o maior de lado 10 e o menor de lado x e uma região em cinza, determinada por um pentágono. Fazendo variar o lado x a área da região cinza também sofria uma variação. A questão pretendia determinar qual a relação gráfica entre a variação de x e a área cinza. A divisão da figura cinza em regiões é uma estratégia adequada para o problema, visto que serão formados retângulos e triângulos retângulos, cujas áreas possuem um desenvolvimento mais simples e a função determinada pela área será uma função quadrática. Segue sugestão de resolução algébrica proposta[20].

Quadro 21 - Questão 12 – OBMEP 2016 – alternativa correta – Letra B.

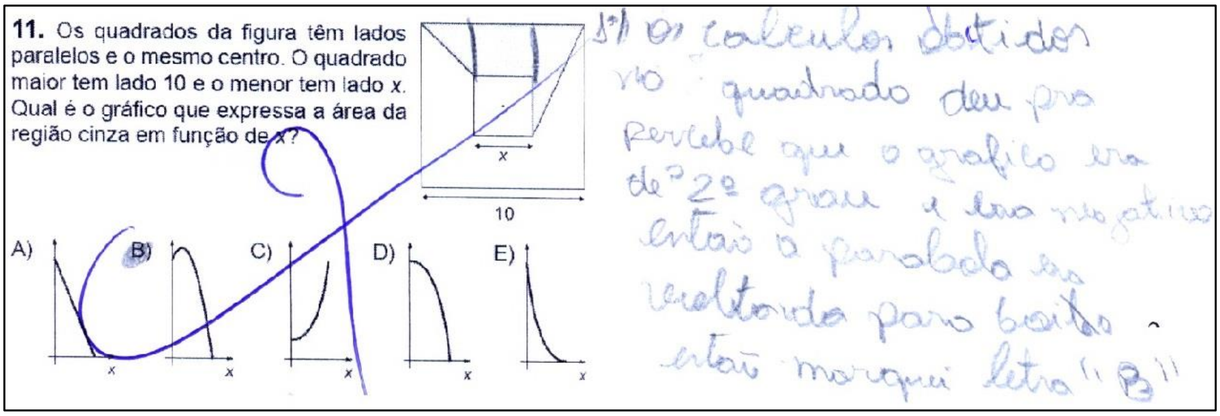
Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A4	*Não faço ideia de como calcular área de quadrado*	0
A6	*Me lembrei da resposta que fez na sala*	0
A13	*Os cálculos obtidos no quadrado deu para perceber que o gráfico era de 2º grau e "a" negativo então a parábola era voltada para baixo, então marquei letra B*	0
A15	*A própria questão diz que tem um lado maior e outro menor, assim o gráfico começará do ponto maior para o menor*	0
A16	*Realizamos em sala de aula mais infelizmente novamente não consegui*	0
A18	*Letra B, porque lembrei que o senhor tinha resolvido no quadro*	0
A19	*Não sabia interpretar essa questão*	0
A20	*Por eliminação*	0
A21	*Porque ela está mais parecida com a figura representada no quadrado*	0
A22	*Foi feita em sala de aula, mas não consegui entender colocar em prática a mesma resolução ou algo coerente*	0
A27	*Não me lembro como resolver*	0
A29	*Não sei esse assunto também*	0
A31	*Não consigo resolver esse problema, apesar do professor já ter resolvido o mesmo na sala, mais tenho bastante dificuldade, ou melhor, esse ano estou tendo um pouco mais de dificuldade, acho que por conta do aprofundamento com que o meu outro professor não era assim*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

[20] A região cinza pode ser dividida em três regiões. Um triângulo retângulo de base e altura (10-x)/2, um retângulo de base x e altura (10-x)/2 e um outro triângulo retângulo de base (10-x)/2 e altura (10+x)/2. A área em cinza será, portanto a soma dessas três áreas. Efetuando os cálculos obtemos a função $A(x) = -\frac{1}{2}.(x-10).(x+5)$. Logo, *A(x)* é representada graficamente, para $0 \leq x \leq 10$, por uma parábola com concavidade voltada para baixo com raízes $x_1 = -5$ e $x_2 = 10$ e abscissa do vértice $x_v = \frac{-5+10}{2} = 2{,}5$.

Apenas 42% dos participantes apresentaram alguma consideração, destes, 54% não sabiam como proceder à resolução. Nenhuma resolução foi validada. Como esta questão foi utilizada como elemento motivacional durante a apresentação do projeto no 1º semestre de 2017, alguns participantes acabaram fazendo referência à mesma nesse sentido, a saber, A6, A16, A18, A22 e A31. O participante A13 se refere a cálculos feitos no quadrado, porém não apresenta nenhum cálculo. Já A20 apresenta uma ideia de resolução por eliminação, mas assim como A13 não apresenta argumentos. Observe que A31 também cita dificuldades de adaptação fazendo uma comparação entre professores, assim como já havia citado na questão 05. Treze (A2, A3, A6, A9, A10, A11, A13, A16, A17, A20, A21, A23 e A28) participantes marcaram a alternativa correta, mas não tiveram a questão validada pelos motivos já discutidos; desses treze, sete apenas "chutaram". Destacamos na figura abaixo a raciocínio descrito por A13.

Figura 17 - Resolução da questão 12 do pré-teste pelo participante A13.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Essa questão já deixa bastante clara a importância do uso de *softwares* matemáticos como ferramenta de suporte à interpretação das questões da Obmep. Temos no caso uma figura estática que deverá ser interpretada pelo aluno a nível de movimentação para poder gerar o gráfico correto nas alternativas, e com o *software* a interatividade e a dinâmica oferecida permitem uma rápida visualização. Conforme Pereira,

> Os softwares de geometria dinâmica favorecem a agilidade na investigação, pois construções geométricas que tomariam certo tempo para serem realizadas no papel são obtidas em segundos na tela do computador. A interatividade oferecida por esses softwares torna real a possibilidade de privilegiar as propriedades geométricas de uma figura (PEREIRA, 2012, p.29).

Décima terceira questão

A questão 13 sugere a movimentação (obedecendo uma certa regra) de um ponto ao redor de duas figuras que deixa um rastro indicando a figura projetada. O objetivo da questão é que seja repetida a regra na terceira figura e que seja determinada a figura projetada. Os segmentos de retas e arcos podem ser facilmente observados nas trajetórias descritas. O detalhe está na distância durante o deslocamento que deve ser constante. Segue sugestão de resolução algébrica proposta[21].

Quadro 22 - Questão 13 – OBMEP 2017 – alternativa correta – Letra A.

Nome	Interpretações apresentadas pelos participantes	Pontuação
A4	*Analisando as duas figuras pode-se perceber que os pontos traçados, tem formato arredondado, portanto a figura que melhor representa é a letra A (obs.: não gosto de geometria)*	1
A5	*No primeiro 1cm ele fez um círculo, no segundo 2cm ele fez um quadrado, então provavelmente no 3cm ele vai fazer um tecido que não ficou nada igual a esse*	1
A6	*Usei a caneta para medir*	1
A8	*De acordo com o desenho eu acho que é a letra B*	0
A10	*As outras figuras não podem ser porque tem pontos que estão com mais de 1cm*	1
A12	*Todos os pontos estão a 1cm da figura*	1
A13	*Porque está bem óbvio que os outros desenhos fogem do padrão, por exemplo na letra B os cantos saíram retos, já na letra A, saiu semelhante à região menor*	1
A15	*Não entendi de forma alguma essa questão*	0
A16	*Apenas observei os detalhes da figura dada e pronto*	1
A18	*Letra E, pois está mais convincente*	0
A19	*Provavelmente figura B, pois parece mais que mediu 1cm de distância*	0
A20	*Porque acompanha a medida e a forma dos outros exemplos*	1
A21	*Porque ela é a única de todos os lados tem 1cm*	1
A22	*B, pois para mim é a que melhor faz o contorno da figura 3*	0
A24	*Eu acho que o desenho da alternativa A pois eu acho que está a 1cm de distância da região poligonal*	1
A26	*Tentei por lógica, observei que as quinas tem que ser curvas*	1
A27	*Letra B, pois suas laterais são retas e acompanha o desenho da figura 3*	0
A28	*Claramente letra A é a opção mais coerente em relação a questão, pois as outras estão a mais ou menos 1cm de distância*	1
A29	*Porque na parte redonda ele faz um círculo e na parte de pontas encurva um pouco*	1
A30	*Letra E, foi a única alternativa que eu achei que estaria coerente com a atividade de alinhar, por consequências de ter seu contorno aparentemente a 1cm*	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

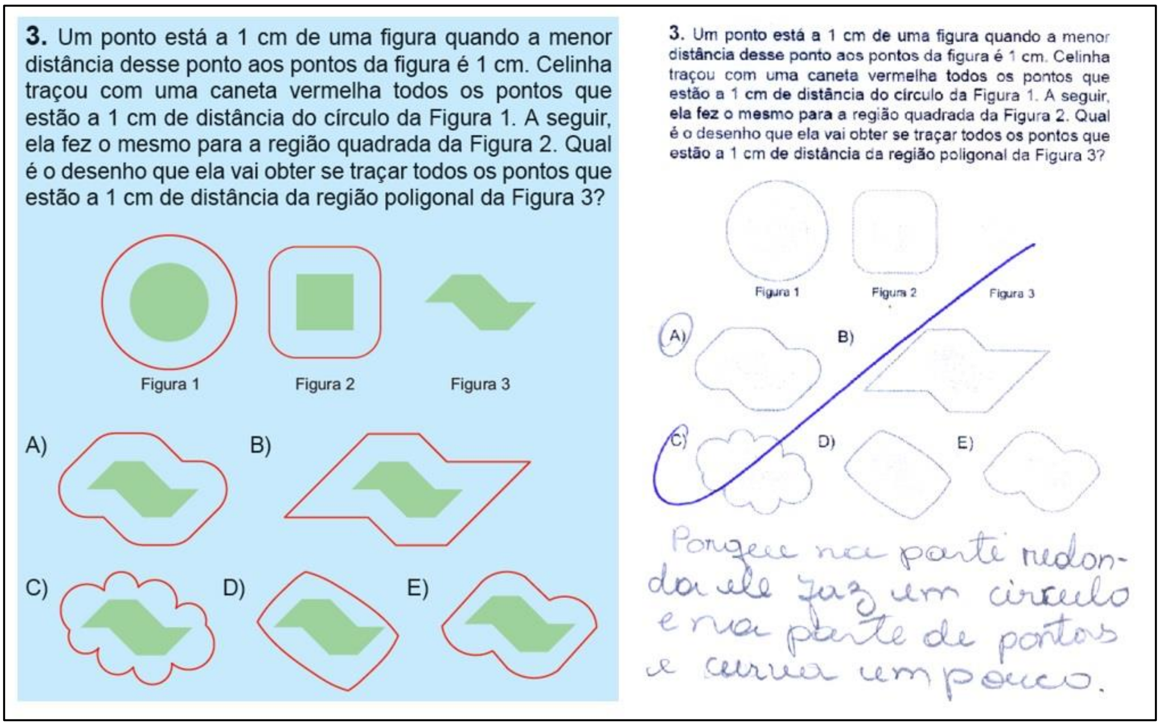
[21] Como a distância de um ponto a uma figura geométrica é a menor distância desse ponto aos pontos da figura, o desenho que Celinha obtém ao traçar os pontos que estão a 1 cm da Figura 3 é a trajetória do centro de um círculo de raio 1 quando este se move pelo contorno da figura tangenciando-o. Nesse caso, as curvas obtidas são segmentos de retas ou arcos de circunferências. Nos vértices em que a figura se lança para fora, aparecem arcos de circunferências, mas isto não ocorre nos dois vértices em que a figura se lança para dentro.

Nessa questão voltamos a ter uma boa participação, algo em torno de 65%. Como não havia necessidade de cálculo, 13 participantes obtiveram a pontuação visto que apresentaram uma estratégia coerente. Observe que A4, mesmo citando que não gosta de geometria, apresentou uma resposta validada. A8, A18, A19, A22, A27 e A30 não apresentaram coerência na explicação e nem marcaram a alternativa correta. A15 não compreendeu o que deveria ser feito. Como A1, A11, A7, A14, A15, A23 e A25, apenas marcaram sem mencionar nenhum argumento, tiveram a pontuação invalidada. No que se refere ao uso de *softwares* de geometria dinâmica, mais uma vez mencionamos Pereira que cita,

> Assim, as construções geométricas propostas no ambiente de geometria dinâmica, constituem uma associação com a função arrastar e, situações em que a necessidade de justificar o resultado é decorrente da busca por validar a própria construção, a ponto de discutir porque funciona ou antever que vai funcionar (PEREIRA, 2012, p.47).

Como a reprodução dessa questão não ficou completamente visível no material entregue aos participantes, tornou-se necessária a exibição em tela de projeção tal questão. Destacamos na figura abaixo a interpretação do A29.

Figura 18 - Resolução da questão 13 do pré-teste pelo participante A29.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Finalizamos este tópico com os dois depoimentos abaixo que infelizmente retratam a realidade de muitos de nossos estudantes nas escolas públicas. No pré-teste não havia essa solicitação, mas os participantes tomaram a liberdade em fazê-los. Observamos pelos depoimentos a grande dificuldade dos alunos em interpretar questões que envolvem geometria e fora isso dois aspectos que pioram a situação: a ausência de professores nos períodos letivos e a dificuldade na interpretação.

> Em geral, tive dificuldades nesses e em outros assuntos, pois não tive professor o ano passado de matemática, o que tivemos foi apenas do meio do ano pro final, e não deu para ensinar muito. Então esses assuntos, eu apenas decorei, e agora tenho dificuldade neles (A29).
>
> Pra começar, eu não entendi nada, tá muito complicado pra mim, tô aqui boiando, e isso é, em todas as questões, não sei medir esses pontos ABCD, e eu sempre que começo a ler a questão no início tô achando, mas quando chego no final complica, é difícil demais medir raio, circunferência e as únicas questões que eu gostei foram as duas últimas (A25).

A seguir apresentaremos o tópico 4.2 que trata do segundo encontro do projeto e onde iniciamos o uso do *software* GeoGebra como ferramenta mediadora do ensino de geometria nas questões da Obmep. Será apresentado o material presente no site *ogeogebra* bem como as questões da Obmep que foram selecionadas como base para fundamentar as resoluções dos participantes e integrá-los ao uso da ferramenta tecnológica. Entendemos que a transformação de fato dos participantes deverá acontecer a partir de agora. Como sugere Bento,

> O computador pode causar uma grande revolução no processo de ensino e aprendizagem se for utilizado não para "informatizar" os processos tradicionais, mas se for introduzido na escola numa perspectiva de mudança da didática. A mudança deve ser acompanhada da introdução de novas ferramentas para facilitar o processo de expressão do nosso pensamento. E esse é um dos papéis do computador no processo de ensinar e aprender. Quando o aluno resolve um problema utilizando o computador, ele começa pensando na solução do problema e procura descrevê-la por meio de uma linguagem de programação. O computador processa as informações e fornece um resultado. Ao observar o resultado, o aluno realiza uma reflexão, e caso o feedback dado não esteja de acordo com o que esperava, o aluno tenta identificar os erros cometidos na descrição, para possíveis correções, depurando, assim, o problema. (BENTO, 2010, p.21)

4.3. Segundo Encontro: iniciando as construções com o GeoGebra

O segundo encontro deu início às práticas tanto no Laboratório de Matemática como no Laboratório de Informática com o uso do *software* GeoGebra como instrumento mediador do ensino de conceitos geométricos, para tanto esse instrumento foi utilizado pelos estudantes em atividades pedagógicas desenvolvidas na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino.

Para iniciar essa fase da nossa investigação nesse encontro exibimos um vídeo do site *ogeogebra* para que os estudantes pudessem acompanhar os processos de construção sob outra ótica. Durante a exibição do vídeo dois[22] do site o participante A5 perguntou o que significava a expressão “pol1 = 8.13” (minuto 1:29) que aparecia na Janela de Álgebra. Até o momento o vídeo ainda não havia comentado sobre o significado desse valor. A pergunta foi então repassada aos demais participantes e uma boa parte rapidamente respondeu que deveria se tratar da área, sendo confirmado pelo pesquisador que a resposta estava correta e que tal número realmente se tratava da área do triângulo ABC.

Nesse momento foi chamada a atenção dos participantes que, devido ao padrão americano que o GeoGebra utilizava, seria visto *ponto* ao invés de *vírgula* nos números que apresentassem casas decimais. Foi dado prosseguimento ao vídeo e no minuto 5:24 o ponto B sofre um deslocamento na tela assumindo uma nova posição e tornando o triângulo retângulo e “pol1” passa a valer “3”. A5 logo diz “*a área do triângulo agora vale 3; o programa alterou automaticamente o valor, foi bem rápida a alteração*”. O pesquisador então pergunta a todos “*como poderíamos provar que a área vale 3?*”. O estudante A12 falou a seguinte resposta

> A base tem duas unidades e a altura tem três unidades, como pra fazer a área do triângulo retângulo é só multiplicar base por altura e dividir por dois, se fizermos isso vai dar três e como é o que o software está dizendo então o triângulo é retângulo (A12).

O participante A14 identificou que as malhas na tela seguem o mesmo padrão dos eixos coordenados que são perpendiculares, logo “*qualquer segmento sobre as malhas horizontais e verticais será perpendiculares*”, o que mostra indícios da compreensão do estudante sobre a estrutura de funcionamento do *software* GeoGebra.

No vídeo três[23] o único comentário foi sobre a opção de construção de <Caminho Poligonal>. Na realidade no vídeo exibido não houve nenhum comentário; apenas quando o pesquisador construiu um <Caminho Poligonal> usando o GeoGebra, colocou um <Ponto em objeto> sobre o caminho poligonal, clicou com o botão direito sobre esse ponto e clicou em <Animar> os participantes ficaram bastante entusiasmados, porque o ponto criado começou a “caminhar” sobre o caminho poligonal descrevendo todo o trajeto. A maioria dos estudantes, demonstraram interesse na utilização do software e se sentiram motivados para iniciar as atividades no Laboratório de Informática.

[22] Tratava da interface e construções iniciais e tinha por objetivo apresentar as janelas do *software* GeoGebra, algumas funcionalidades e os passos necessários para construção de alguns objetos.
[23] Tratava das linhas retas e tinha por objetivo abordar como construir linhas retas.

> [...] o professor em sua sala de aula, tem um grande desafio que é resgatar e manter o interesse dos alunos que não se sentem motivados seja por reprovações sucessivas ou por algum outro motivo. Diante dessas circunstâncias, o professor deve perceber que os métodos por ele utilizados não estão satisfazendo ao objetivo a ser atingido que é a aprendizagem do aluno, disso decorre a necessidade da inserção de novas práticas pedagógicas que despertam o interesse e a curiosidade dos alunos. (SANTOS, 2014, p.10)

Seguimos então para a (re)construção e explicação da questão 18 da prova da Obmep de 2005 feita pelo pesquisador; os participantes ficaram cientes dos objetivos da atividade que foi o de refazer as construções dos vídeos 02 e 03 apresentados, bem como da questão da Obmep trabalhada no encontro.

Figura 19 - Participantes do Laboratório 01 de Informática.

Fonte: Registro do autor, 2017.

Cada participante realizava as construções de forma individual e a disposição dos computadores permitia que um colega solicitasse ajuda do colega ao lado, fato que aconteceu frequentemente em todos os encontros e que não era proibido, visto que muitos estavam tendo contato com o *software* pela primeira vez. Quanto às construções dos objetos presentes nos vídeos 02 e 03 não houve nada a declarar. Vale ressaltar que todos concluíram com êxito a atividade. Sobre isso destacamos,

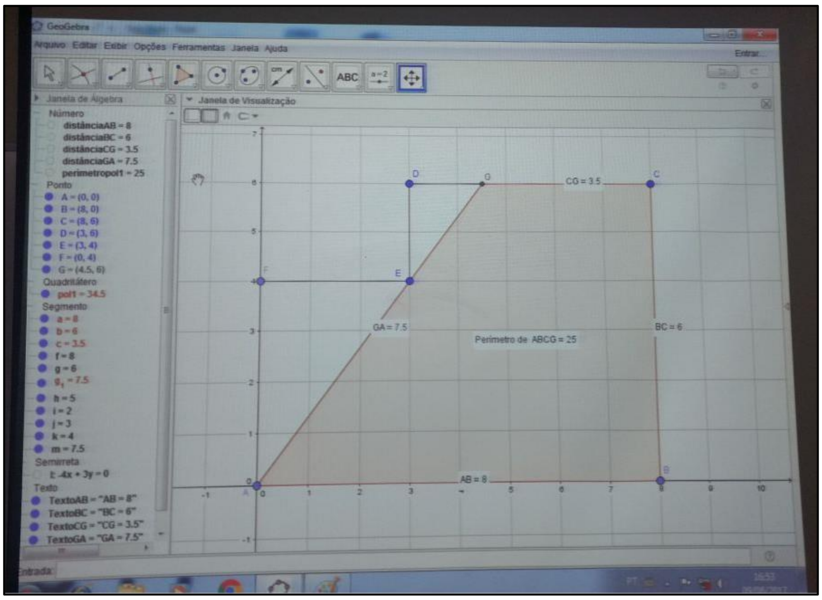
> Importante destacar que a troca de experiências entre os indivíduos mencionada pela teoria da Zona de Desenvolvimento Proximal elaborado por Lev Semenovitch Vygotski no início do século XX , não é uma mera troca ausente de um sentido maior, uma troca que visa o simples aprendizado mecânico de algo. Essa troca sempre pretende o desenvolvimento de novas habilidades, a incorporação de significados, a possibilidade de novas criações. (LEITE, 2013, p.5)

Ainda relacionado às atividades de grupo, de acordo com Chaiklin,

> A concepção comumente difundida sobre a zona de desenvolvimento próximo pressupõe uma interação em uma tarefa entre uma pessoa mais competente e uma pessoa menos competente, de forma que a pessoa menos competente se torne autonomamente proficiente naquilo que de início era uma tarefa realizada conjuntamente. (CHAIKLIN, 2011, p.661)

Já na questão 18, Obmep 2005, das 31 construções analisadas, apenas em duas (A2 e A19) observamos que foi “forçado” o resultado, visto que o ponto G deveria ser gerado de forma automática utilizando a sequência <semirreta, clica em A, clica em E, interseção semirreta com o lado CD>; ao invés disso os dois participantes escolheram a opção <segmento>, clicaram em A e alongaram o segmento até tocar em CD de maneira que o segmento ficasse o mais próximo possível de E. Apesar do erro de construção ambos (e os demais) marcaram corretamente a letra D dando como resposta o perímetro 25. Quanto ao Protocolo de Construção, não foi verificada discrepância quanto ao já apresentado na seção 3.3.2. Ao final cada um salvou sua construção em *pendrive*.

Figura 20 - Construção feita pelo participante A12.



Fonte: Registro do autor, 2017.

Entendemos que o segundo encontro, como fase inicial da aplicação das atividades orientadoras de ensino, deu aos alunos a possibilidade de visualizar de fato os objetivos da pesquisa, e possibilitou um contato inicial com o GeoGebra, que seria utilizado nos demais encontros. Destacamos que a aprendizagem, troca de saberes, busca pelo resultado e resolução de problemas, foram fundamentais para o êxito do encontro, conforme afirma Santos,

> A observação, análise, sondagem investigativa e busca de resultados são princípios que norteiam a prática escolar; dessa forma, pode-se afirmar que a construção do conhecimento desvinculada de um contexto, dificulta uma maior abrangência de aprendizagem no conteúdo. Diante disso, a resolução de problemas é uma estratégia didática/metodológica importante e essencial para o desenvolvimento intelectual do aluno e para o ensino da matemática. Do ponto de vista de muitos matemáticos, o ensino e a aprendizagem da Matemática sem a resolução de problemas é um dos grandes fatores do insucesso escolar. (SANTOS, 2017, p.26)

4.4. Terceiro Encontro: traçando retas no GeoGebra

Para o terceiro encontro utilizou-se o vídeo 04 do site *ogeogebra* que abordava a construção de perpendiculares, paralelas, mediatrizes, bissetrizes e medianas. Antes de iniciar a exibição do vídeo foi perguntando aos participantes sobre qual o conceito que eles dariam a cada um desses elementos. Para o estudante A6 retas perpendiculares "*é quando duas retas formam ângulo de 90 graus*"; O estudante A11 colocou que duas retas paralelas "*são aquelas que nunca vão se cruzar*"; Para o aluno A18 bissetriz "*é uma reta que divide o ângulo na metade*". Nenhum dos participantes soube dizer o conceito de mediatrizes e medianas, eles apenas afirmaram que tinha relação com ponto médio, conforme foi relatado pelo aluno A26, "*professor, nunca ouvi esses nomes nas aulas de geometria em minha escola, mas pelo nome dá a entender que tem a ver com ponto médio*".

Para aprofundar os conceitos de pontos notáveis no triângulo foram sugeridos que os estudantes assistissem os vídeos do Portal da Matemática[24] que tratam do baricentro[25], incentro e circuncentro[26] e ortocentro[27]. Tais vídeos, foram abertos bem rapidamente apenas para ajudar na localização e os links foram disponibilizados no grupo de *WhatsApp* dos alunos. Dirimidas essas dúvidas sobre os conceitos matemáticos, partiu-se para a exibição do vídeo 04.

Durante a exibição do vídeo não houve nenhuma intervenção dos participantes. Em seguida, o pesquisador passou à construção dos quatro pontos notáveis do triângulo usando o *software* GeoGebra. O participante A25 pediu para refazer a construção do Incentro, porque não entendeu o conceito de altura. A5 descreve o encontro como "*algo que irá trazer um aprendizado a mais*".

Na figura abaixo observamos a construção feita pelo estudante A27 de uma circunferência inscrita a um triângulo utilizando os conceitos de incentro. Em vermelho temos as bissetrizes dos ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$ e em azul temos a altura *h* relativa à base AC. De acordo com o Protocolo de Construção foram necessárias apenas 10 etapas para a construção da figura e A27 utilizou ferramentas de <ponto, polígono, segmento, bissetriz, interseção, reta perpendicular, círculo>. Os demais participantes concluíram sem maiores problemas esta

---

[24] O Portal da Matemática da OBMEP oferece, gratuitamente, uma variedade de materiais relacionados à grade curricular do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, além de tópicos adicionais que não costumam ser abordados no Ensino Fundamental ou Médio.

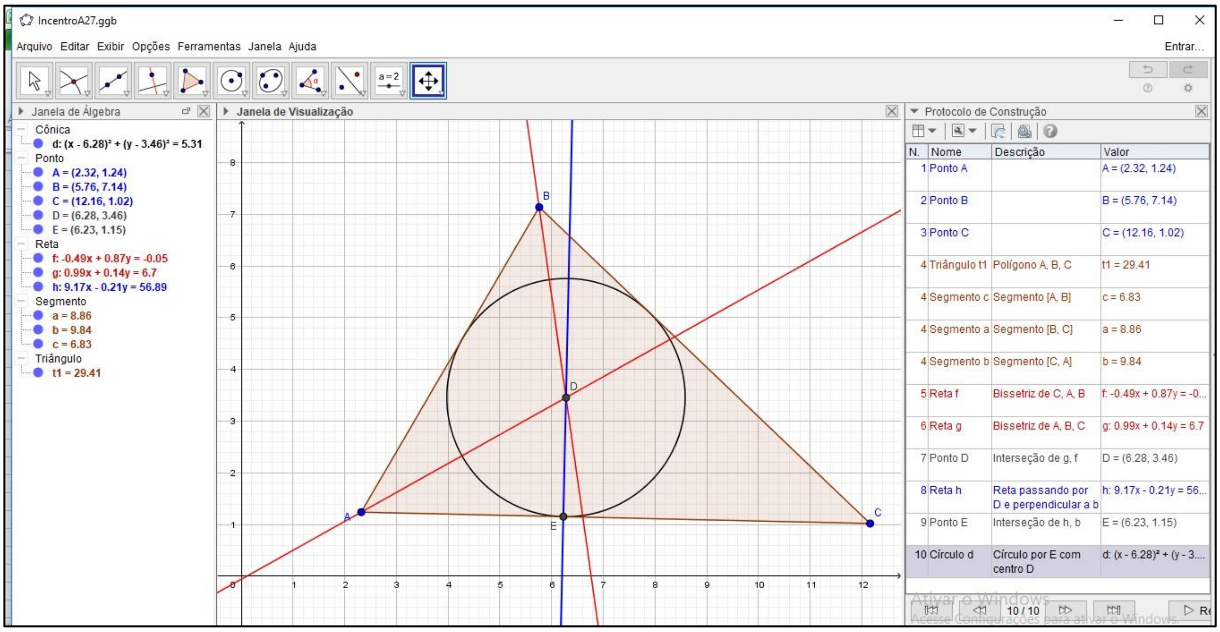
[25] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=0XBVHgvLkZs . Acesso em: 16/08/17.

[26] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=iDuE8ifgFiU. Acesso em: 16/08/17.

[27] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=luEh4spdLWE. Acesso em: 16/08/17.

atividade, com exceção dos participantes A3, A15 e A19 que tiveram dificuldades na construção do incentro e solicitaram ajuda dos colegas.

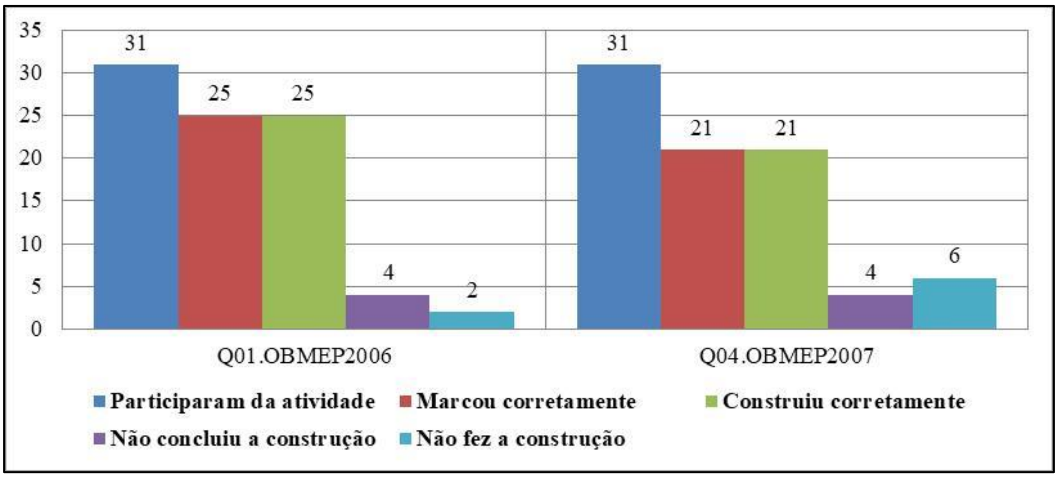
Figura 21 - Construção da circunferência inscrita a um triângulo feita por A27.



Fonte: Registro do autor, 2017.

Quanto às questões da Obmep foram selecionadas as de número 01 do ano 2006 e 04 de 2007, ambas as questões tratavam de áreas. No apêndice D é possível verificar as Atividades Orientadoras de Ensino do encontro. Apresentamos o gráfico com os índices de rendimento dos alunos com relação às suas construções e, em seguida, discutimos cada uma delas de forma mais detalhada.

Gráfico 6 – Índice de rendimento referente às atividades orientadoras do 3º encontro.



Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Pelo gráfico verificamos que ocorreram 100% de assiduidade. Em ambas as questões da Obmep a quantidade que marcou corretamente corresponde à que construiu corretamente a figura; não houve situações em que o participante marcou corretamente, mas não validou a questão porque não construiu corretamente.

Nos demais encontros, percebemos este fato acontecendo, o índice de acertos de Q1.OBMEP2006[28] foi de 81% aproximadamente, índice considerado bem elevado, com apenas 13% de participantes que não foram conclusivos, visto que desenvolveram boa parte da questão, porém não chegaram a terminá-la e 6% não apresentaram nenhuma construção; já em Q04.OBMEP 2007, tivemos um índice de apenas 68%, com os mesmos 13% obtidos anteriores e quase 20% de abstenção, valor relativamente alto se comparado à questão anterior.

Atribuímos esse baixo índice ao fato de que algumas construções não foram conclusivas, e também os participantes não se atentaram ao valor da área dada na questão, sobre isso o estudante A13 afirmou que "*quase não conseguia chegar a 45 cm^2 porque não sabia como chegar aos 45, mas depois de fuçar o app todo consegui*". Observe que o participante A13 deveria ter entrado na estatística de *não concluiu a construção*, porém ele estava motivado a resolvê-la e por tentativas observou um detalhe importante que estava faltando para atingir seu objetivo.

> O papel do professor pode ser decisivo nesse campo de conhecimento escolar diante de sua proposta de ensino, pois ela reflete na aprendizagem do aluno. Buscar um ambiente e estratégias que propiciem um processo ensino-aprendizado é um desafio e uma importante tarefa do professor. Como professora de Matemática, muitas vezes foi possível perceber o desinteresse e desmotivação nos alunos. Logo, mudar essa situação requer estudo, elaboração de estratégias, planos e ações. (VALÉRIO, 2017, p.22)

4.4.1. Construção da questão 01 OBMEP 2006

A questão apresentava um retângulo em que eram destacados os pontos médios A, B e C de três lados consecutivos e o ponto O representando o encontro das diagonais. Três triângulos eram destacados e pedia-se a razão entre a área sombreada desses triângulos e a área total.

Antes de iniciar a construção o estudante A9 fez o seguinte comentário "*oxi prof tá na cara que a resposta é letra C porque se subir o triângulo de baixo até triscar em B vai dar que*

[28] Estaremos usando essa simbologia para representar a questão 1 (nesse caso) aplicada na prova da Obmep do ano de 2006.

a parte cinza vai ficar a metade do retângulo”. Observe que a fala do participante trata corretamente a análise algébrica da questão.

Vamos analisar uma construção feita pelo participante A22. Para resolver a questão o estudante utilizou um total de 14 ferramentas de construção do GeoGebra <ponto, interseção, polígono, segmento e ponto médio> e para interpretar a questão considerou os seguintes parâmetros, q1 corresponde a área igual 60 que é a área do retângulo PRQD, a área do triângulo ABD indicada por t1 sendo igual 7.5, a área do triângulo BCQ representada por t2 igual 7.5 e área do triângulo POR indicada por t3 igual 15. Assim, ao somar os valores t1+t2+t3, obtivemos resultado igual a 30 que corresponde à metade de 60, logo se confirma a resposta como sendo letra C, já mencionada pelo estudante A9.

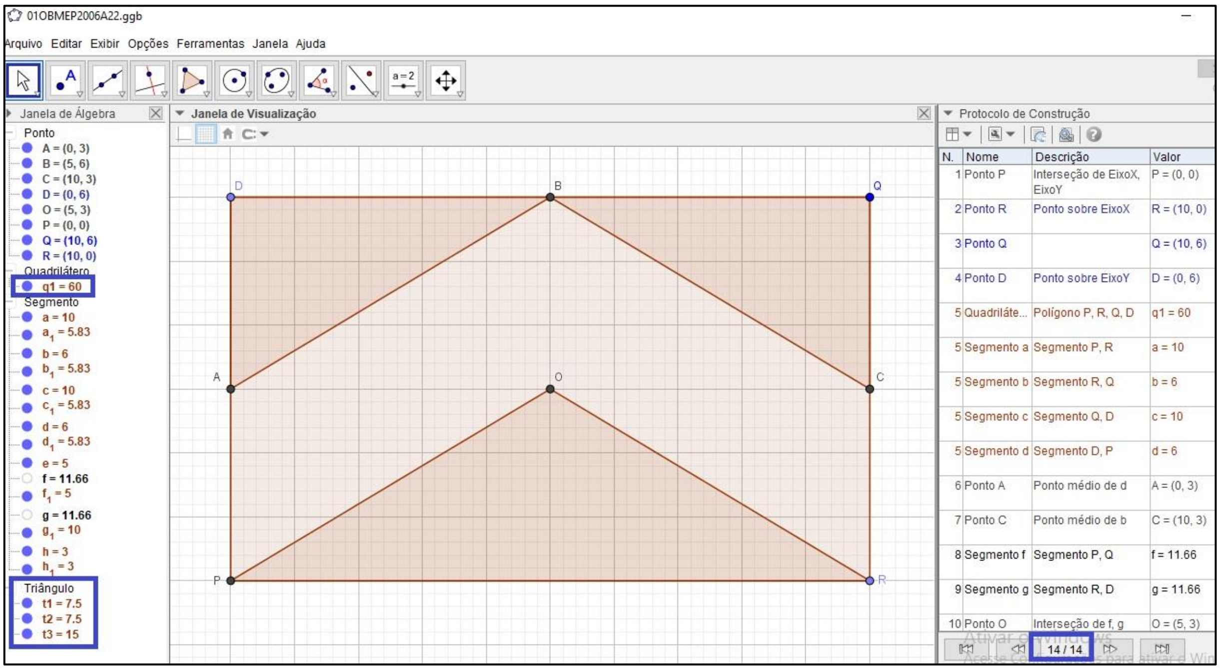
O estudante A22 relatou o seu modo de resolução de Q1.OBMEP2006 da seguinte forma,

> Seleciona a opção polígono e cria um retângulo de tamanho aleatório / seleciona a opção semirreta para descobrir o centro do polígono na opção interseção / seleciona opção ponto médio / seleciona opção polígono para descobrir os polígonos internos / seleciona opção área para descobrir a área de cada polígono (A22).

Alguns participantes perguntaram “*qual é a área do retângulo?*”. Tal pergunta não foi respondida e ao final puderam concluir que tal medida não importava já que se tratava de uma razão e mesmo que cada um fizesse um retângulo de dimensões diferentes, chegariam à mesma conclusão. Os estudantes A1, A2, A14 e A19 não concluíram a construção; já os estudantes A17 e A29 não a apresentaram.

> [...] a construção do conhecimento matemático, quando exposto através da resolução de problemas, proporciona aos alunos o desenvolvimento da capacidade de associar conceitos matemáticos ao seu cotidiano. Fator essencial, pois facilita a compreensão de tais conceitos e desenvolve o raciocínio lógico. Entretanto, não basta apenas ensinar a usar os conceitos e definições matemáticas, mas incentivar o aluno a ter autonomia para propor situações problema, partindo da realidade que o cerca, que mereçam dedicação e estudo. (SANTOS, 2017, p.27)

Figura 22 - Construção questão 01 OBMEP 2006 feita pelo participante A22.



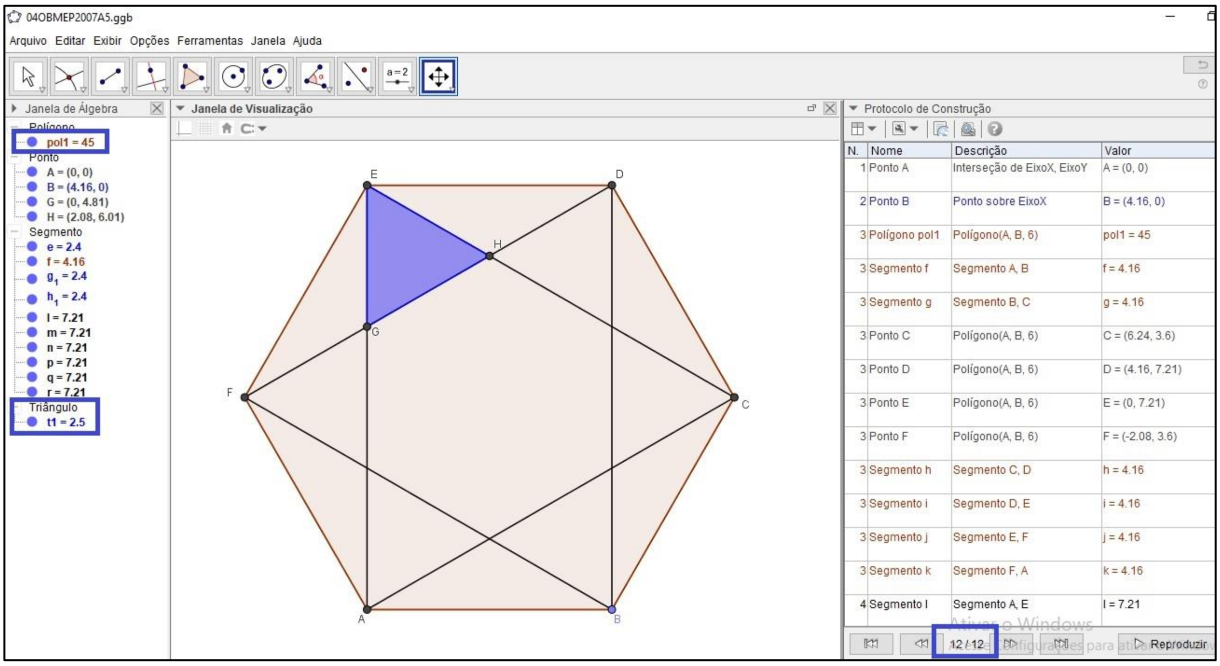
Fonte: Registro do autor, 2017.

4.4.2. Construção da questão 04 OBMEP 2007

A questão apresentava um hexágono regular ABCDEF em que eram destacadas seis diagonais AE, AC, EC, BF, BD e DF; o encontro de três dessas diagonais, a saber AE, AC e BD, determinava uma região triangular em que era pedida sua área. Diferente da questão anterior, o hexágono regular tinha área fixa determinada e de valor 45 cm^2 e esse foi um detalhe que passou despercebido pelos alunos A1, A10, A15 e A21. Os mesmos não marcaram letra B porque construíram um hexágono regular sem se preocupar com a área e quando determinaram a área do triângulo ou não conseguiam encontrar alternativa ou encontraram um valor diferente de 2,5. O estudante A5 realizou os seguintes passos em seu processo de construção: utilizou 12 ferramentas do GeoGebra <interseção, ponto, polígono e segmento>. Observe na janela de álgebra a indicação pol1=45 para tratar da área do hexágono regular ABCDEF e t1=2.5 para tratar da área do triângulo EGH destacado em azul. Não fizeram a construção os participantes A3, A5, A8, A19, A25 e A31. Vejamos como um aluno se posiciona com relação à sua construção,

> Seleciona a opção polígono regular e cria um hexágono / seleciona a opção segmento / seleciona a opção interseção / seleciona a opção polígono / seleciona a opção área (A5).

Figura 23 - Construção questão 04 OBMEP 2007 feita pelo participante A5.



Fonte: Registro do autor, 2017.

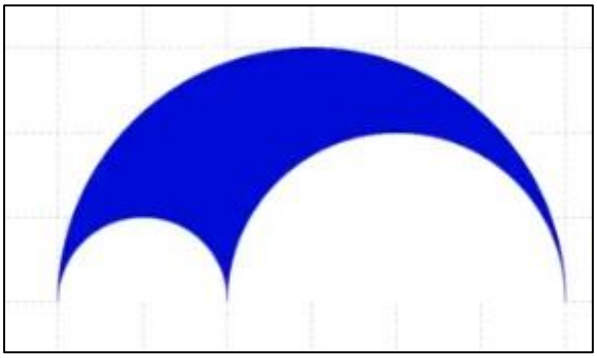
> É reconhecido que as tecnologias vieram transformar o ensino da matemática, permitindo novas formas de abordar e explorar os conteúdos curriculares. Cabe ressaltar que as tecnologias e as ferramentas tecnológicas não carregam em si a possibilidade de construção dos conhecimentos, porém, se bem utilizados, poderão favorecer os processos de ensino/aprendizagem. (COSTA, 2017, p.17,18)

4.5. Quarto Encontro: construindo círculos no GeoGebra

No quarto encontro, utilizou-se o vídeo 12 do site *ogeogebra* que dava ênfase às construções circulares (círculos, semicírculos, arcos e setores), bem como as questões 18 (2010), 02 (2011), 07 (2011), 16 (2011) e 10 (2012), disponíveis no apêndice E. Os participantes tiveram um primeiro contato com a ferramenta <controle deslizante> que possibilita variar medidas apenas arrastando um ponto. No minuto 3:20 foi exibido duas circunferências concêntricas e ao questionar os participantes sobre esse significado A4 sugere que "*são circunferência de mesmo centro*". No minuto 4:36 o vídeo exibe a construção de um semicírculo; A13 coloca que "*um semicírculo é um pedaço de um círculo que foi cortado bem no meio*". Quando perguntados sobre qual a medida do comprimento de um semicírculo, A1, A3, A15 e A21 levantaram a mão e perguntaram "*como se calcula o comprimento de um círculo?*"; já A27 perguntou "*qual a diferença entre círculo e circunferência?*". A24 respondeu “*para se calcular o comprimento de um semicírculo é só pegar $2\pi r$ e dividir por dois*”; A18 cita que “*círculo é como se fosse uma moeda, circunferência é como se fosse uma aliança*”. Dando continuidade ao vídeo, no minuto 6:55 foi apresentado o setor circular. A11 comparou a imagem construída a uma fatia de pizza. A última etapa do vídeo seria a exibição de como se construir a figura abaixo formada por setores circulares com regiões destacas. Tal construção, além de auxiliar nas atividades orientadores do 4º encontro, serviria também para uma das construções do 8º encontro. Conforme afirma Reis (2012),

> A situação que o aluno desenvolve é um trabalho às vezes comparável a culta atividade científica, onde a ação de formular, testar e construir modelos de linguagem, conceitos e teorias e estabelecer intercâmbio com outros, reconhecendo a oportunidade de usá-los e aplicá-los, pois às vezes, resolver um problema é apenas uma parte do processo e encontrar boas perguntas é tão importante como encontrar soluções. Para permitir tal atividade, pretendemos imaginar e propor situações pelas quais os alunos vivenciem (contextualização) e em que o conhecimento da ideia de perímetro (contorno) da Circunferência e área (superfície) do Círculo apareça como a solução de alguns problemas. (REIS, 2012, p.43)

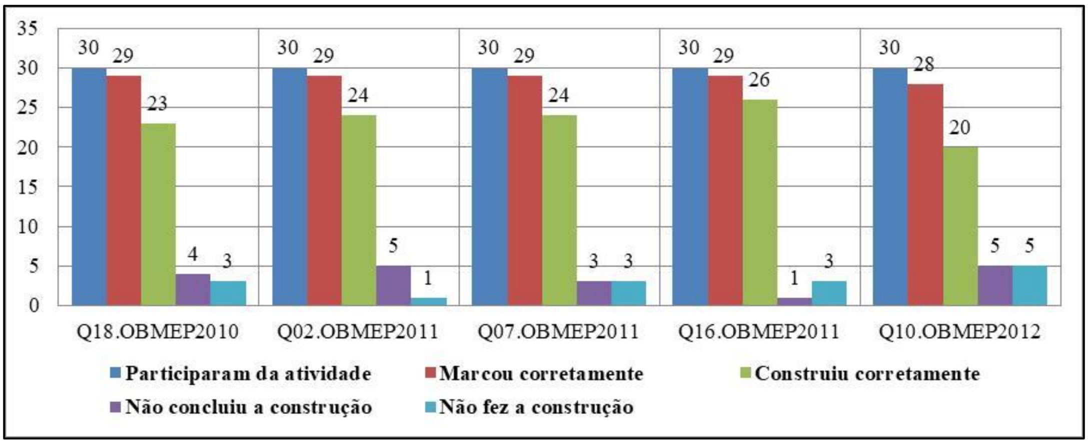
Figura 24 - Construção de setores circulares.



Fonte: Recorte do vídeo 12 disponível no site *ogeogebra*, 2017.

Com o vídeo finalizado, foi entregue a folha de atividades orientadoras com as cinco questões da OBMEP que seriam construídas. Alguns participantes sugeriram que seria interessante que a construção de cada figura fosse discutida antes de irem para o Laboratório de Informática com o objetivo de minimizar as dificuldades de construção de outros colegas. A dinâmica seria que cada etapa na fase de construção deveria ser mencionada por qualquer participante e o pesquisador iria executando a construção; os demais observavam e iriam fazendo suas anotações. Abaixo estaremos apresentando o gráfico com os índices de rendimento das construções e, em seguida, estaremos discutindo cada construção de forma mais detalhada.

Gráfico 7 - Índice de rendimento referente às atividades orientadoras do 4º encontro.



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Observamos pelo gráfico que independente de ter feito ou não uma construção coerente, quase que a totalidade dos participantes marcou a alternativa correta, visto que no 1º momento do Laboratório de Matemática as discussões já haviam acontecido. Ocorre que essa resolução só seria validada caso a construção estivesse coerente, fato que não pôde ser observado em todos os arquivos. Observe que em média 78% do grupo pesquisado construíram e interpretaram corretamente as questões; 12% em média não conseguiram concluir a construção e 10% sequer fizeram a construção. Destacamos a questão 10 da OBMEP de 2012 na qual tivemos o menor índice de construções e o maior índice de erros ou abandono. A fala de A3 "*senti dificuldade nessa questão porque estava muito difícil e tinha muitas etapas para fazer*" representa bem as considerações da maioria do grupo sobre a questão 10. Apenas o participante A31 faltou ao encontro.

Para termos uma visão mais geral das dificuldades subjacentes ao ensino das grandezas geométricas, recorremos a Reis (2012, p.143), quando destaca,

> [...] Observamos que as grandezas geométricas revelam-se espaços complexos, cuja análise aprofundada é necessária para que se possam compreender as dificuldades conceituais dos alunos para se intervir de maneira pertinente e favorecer o estabelecimento das articulações entre as múltiplas concepções possíveis dos conceitos relativos às grandezas. (p.143)

4.5.1. Construção da questão 18 OBMEP 2010

A questão apresentava três círculos de raios iguais a 1, 2 e 3 tangentes dois a dois e em destaque tínhamos os pontos A e B. O objetivo deveria ser determinar o comprimento do segmento AB. Observe que pelo processo de construção o ponto P de tangência foi garantido, porém os pontos A e B foram determinados por aproximação e nenhum outro participante conseguiu sugerir um outro processo de construção que não seguisse esse caminho. Não concluíram a construção A1, A2, A19 e A21. Não fizeram a construção A3, A14 e A25; veja que A14 inclusive participa da discussão, conforme descrito no quadro abaixo, mas durante a execução no Laboratório de Informática, acaba por desistir de resolver. Abaixo segue o quadro com a ordem de construção.

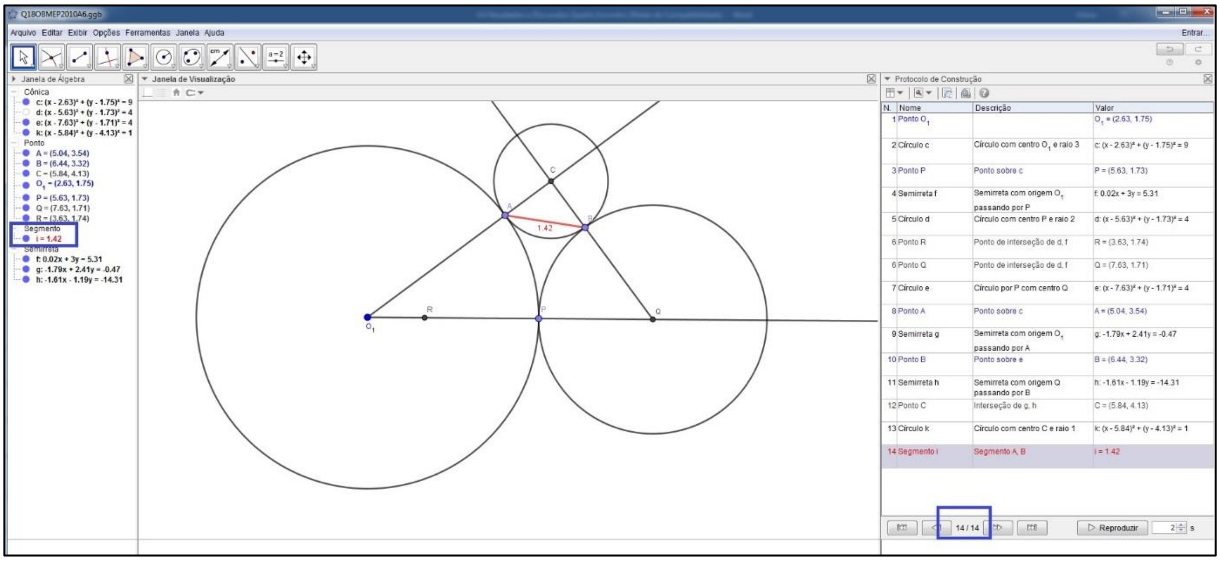
Quadro 23 - Considerações dos participantes sobre a construção da questão 18 OBMEP 2010.

Etapa	Participante	Procedimento a ser executado
1ª	A5	*Construa um círculo de centro O_3 e raio 3*
2ª	A5	*Marque um ponto P sobre esse círculo*
3ª	A14	*Trace uma semirreta com origem em O_3 passando por P*
4ª	A26	*Construa um círculo com centro em P e raio 2 e marque as interseções R e Q da semirreta com esse segundo círculo*
5ª	A14	*Construa um círculo de centro Q e raio PQ e oculte o círculo de centro P; por construção PQ irá medir 2*
6ª	A26	*Trace duas semirretas, uma de centro O_1 passando por A e a outra de centro Q passando por B e marque a interseção C entre essas duas semirretas*
7ª	A7	*Construa um círculo de centro C e raio 1*
8ª	A7	*Construa o segmento AB (marque sua medida) e mova os pontos A e B até conseguir visualizar três círculos tangentes*

Fonte: Registro do autor, 2017.

Na figura abaixo observamos a construção feita por A6 obtendo como resultado 1.42 que corresponde ao valor aproximado da raiz quadrada de dois a qual encontramos na letra B. O protocolo de construção indica 14 etapas e foram utilizadas as ferramentas <ponto, círculo, semirreta, interseção e segmento>.

Figura 25 - Construção da questão 18 OBMEP 2010 feita por A6.



Fonte: Registro do autor, 2017.

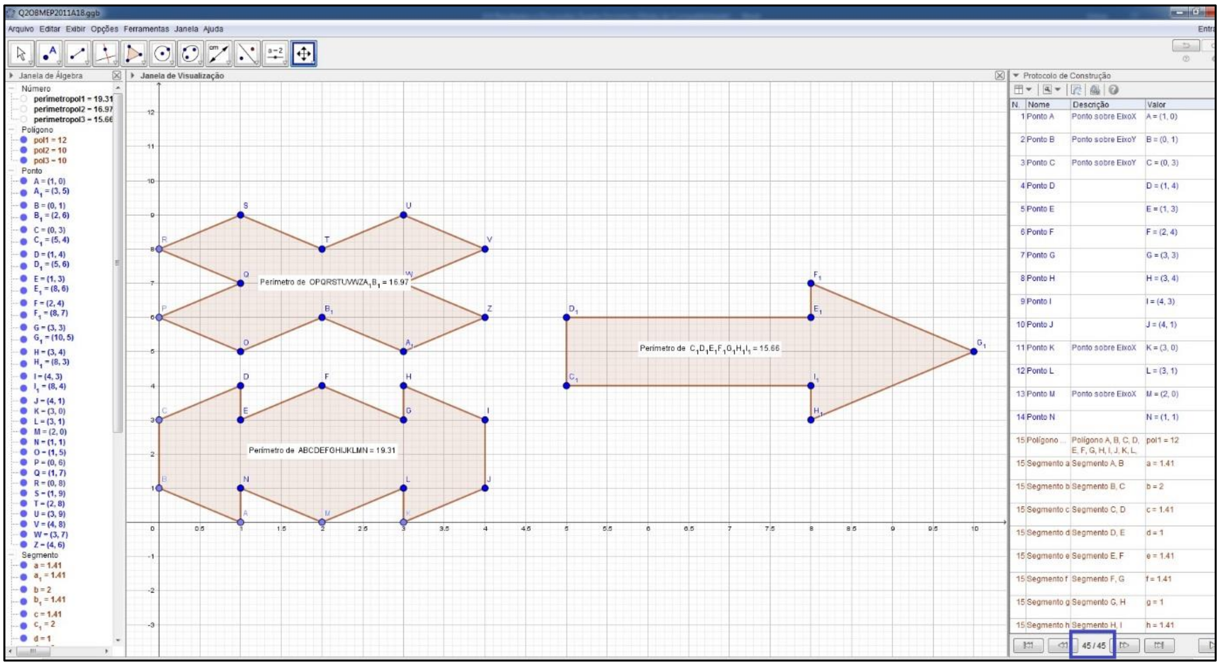
4.5.2. Construção da questão 02 OBMEP 2011

A questão mostrava uma malha retangular contendo três figuras A e B em que são dados seus perímetros. Pedia-se o perímetro da figura C. Todos os participantes entraram em consenso que a resolução deveria partir de um processo de tentativa no qual seria construído os polígonos A e B usando a opção <polígono> em seguida fariam aparecer o valor do perímetro do polígono. Os valores não iriam corresponder ao dado na questão, assim fariam uma relação de proporção para se chegar ao resultado de C. Observe na construção de A18 abaixo que o mesmo encontra como o perímetro de A que é 16.97, perímetro de B igual a 19.31 e perímetro de C que é 15.66. Observe que na construção o perímetro da figura A ficou menor que o da figura B, o que já difere com o apresentado na pergunta. Durante a prática no Laboratório de Informática, já tiveram o cuidado de observar as coerências nas construções e o erro descrito não se repetiu nem para A18, nem para a maioria. Para Reis,

> Não se trata de um erro didático propriamente dito, desde que a situação seja temporária e não volte a acontecer, caso contrário, o processo não permite o controle esperado e provoca dificuldades no ensino, ou seja, quanto mais comentários e convenções o ensino produz, menos os alunos podem controlar as situações que lhes são propostas. (REIS, 2012, p.46)

Destacamos o detalhe para a alteração na escala que foi feita para se aproximar do desenho e o protocolo de construção com 45 etapas, entre elas, ponto, polígono, segmento e perímetro. Não concluíram a construção A1, A4, A5, A19 e A30. Apenas A21 não fez a construção.

Figura 26 - Construção da questão 02 OBMEP 2011 feita pelo pesquisador seguindo orientação de A18.



Fonte: Registro do autor, 2017.

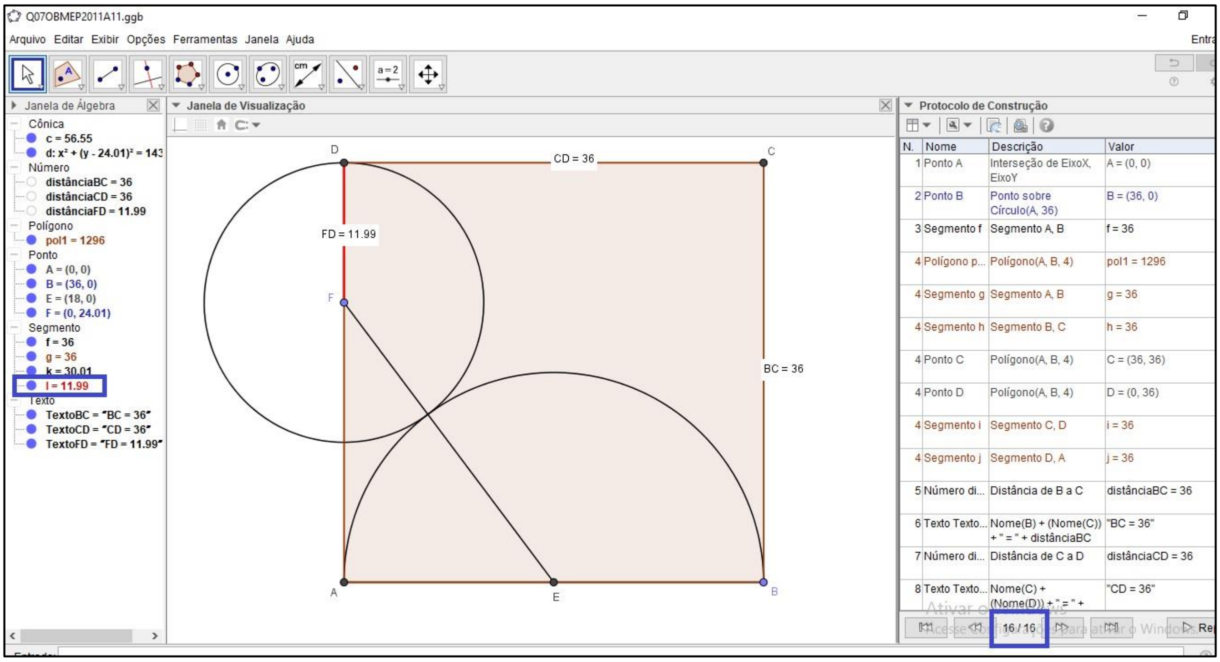
4.5.3. Construção da questão 07 OBMEP 2011

Na questão 07 tínhamos um quadrado de lado 36 cm e dois semicírculos de raios distintos tangentes entre si. A questão procurava determinar o raio do semicírculo menor. Segue as etapas descritas por A11. Diferente da seção 4.4.1, optou-se por selecionar apenas um dos participantes para falar sobre o processo de construção. A11 se pronunciou para falar sobre a mesma,

> Construir um segmento de comprimento igual a 36 / construir um quadrado (polígono regular) de lado 36 / marcar o ponto médio do lado AB determinando o ponto E / opção semicírculo definido por dois pontos, clica em A em seguida em B / opção ponto em objeto clica no lado AD do quadrado determinando o ponto F / círculos dados em um de seus pontos, clica em F e em seguida em D / constrói o segmento FE / movimenta o ponto F de maneira que os semicírculos fiquem tangentes / constrói o segmento FD e determina suas medidas de comprimento que seria a resposta da questão por corresponder ao raio do semicírculo menor (A11).

Observe que pelo processo de construção definido, A11 obtém como resultado 11.99, então aproxima para 12 (letra E); o protocolo de construção apresenta 16 etapas distribuídas entre <ponto, interseção, círculo, segmento, polígono, distância, ponto médio, semicírculo>. Como já observada em outras situações, o procedimento apesar de conduzir a uma resposta correta, também não permite definir o “ponto de interseção” entre os dois semicírculos, fazendo com que a resposta obtida seja por aproximação. Quando A11 cita “*movimenta o ponto F de maneira que os semicírculos fiquem tangentes*”, percebe que ele jamais conseguirá fazer com que os semicírculos fiquem tangentes (o GeoGebra marca o ponto de tangência quando o mesmo ocorre), daí necessita dar um <zoom> na figura para que se aproxime desse ponto. Não concluíram a construção A2, A10 e A19. Não fizeram a construção A1, A21 e A25. Abaixo temos a representação da figura.

Figura 27 - Construção da questão 07 OBMEP 2011 feita por A11.



Fonte: Registro do autor, 2017.

Para Reis (2012),

> [...] a situação adidática é caracterizada pelo fato de o professor elaborar situações problemas permitindo que o aluno expresse, reflita e evolua por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos. Nesta fase o educador é quase ausente, esforçando-se para não intervir na construção da solução da situação problema proposta, sendo somente o mediador no processo de aprendizagem. (p.58)

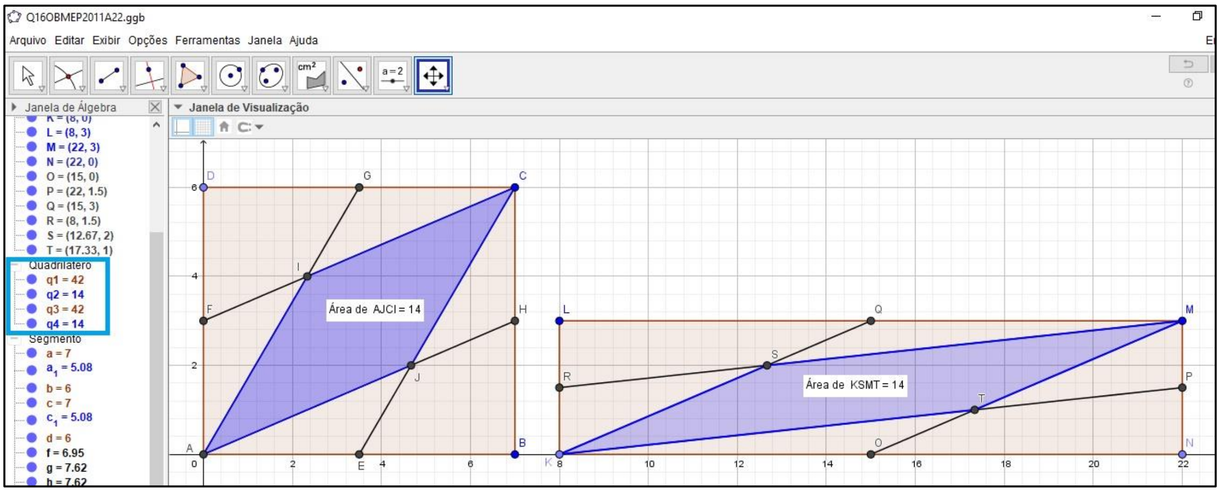
4.5.4. Construção da questão 16 OBMEP 2011

Na questão 16 temos um retângulo de área 42 cm^2 com quatro pontos médios destacados em que são construídos segmentos ligando os vértices do retângulo a esses pontos médios, obtendo um quadrilátero em destaque. O objetivo do problema é determinar a área desse quadrilátero. Estaremos seguindo as etapas descritas por A22,

> Construir um polígono de base 7 e altura 6 / marcar os pontos médios dos 4 lados do polígono / ligar os vértices A e C aos pontos médios do retângulo correspondentes / determinar as interseções entre AG com CF (ponto I) e AH com CE (ponto J) / construir o polígono AJCI que vai dar área 14. (A22)

Questionada sobre porque o retângulo tinha que ser 7 por 6, A22 respondeu "*porque se multiplicar 7 por 6 dá 42*". Perguntada se as dimensões fossem 3 por 14 se não daria na mesma; então respondeu "*a área daria 42 também e a área destacada continuaria 14 porque no GeoGebra o processo de construção seria o mesmo*". Segue abaixo figura construída. Observe que A22 fez questão de construir as duas possibilidades para provar que seu raciocínio estava correto. Em destaque temos as áreas q1=42 (retângulo 7x6) e q3=42 (retângulo 3x14) e as áreas em azul q2=14 e q4=14, destacadas e de mesmo valor. Apenas A19 não concluiu a construção; já A1, A3 e A25 não fizeram construção alguma.

Figura 28 - Construção da questão 16 OBMEP 2011 feita por A22.



Fonte: Registro do autor, 2017.

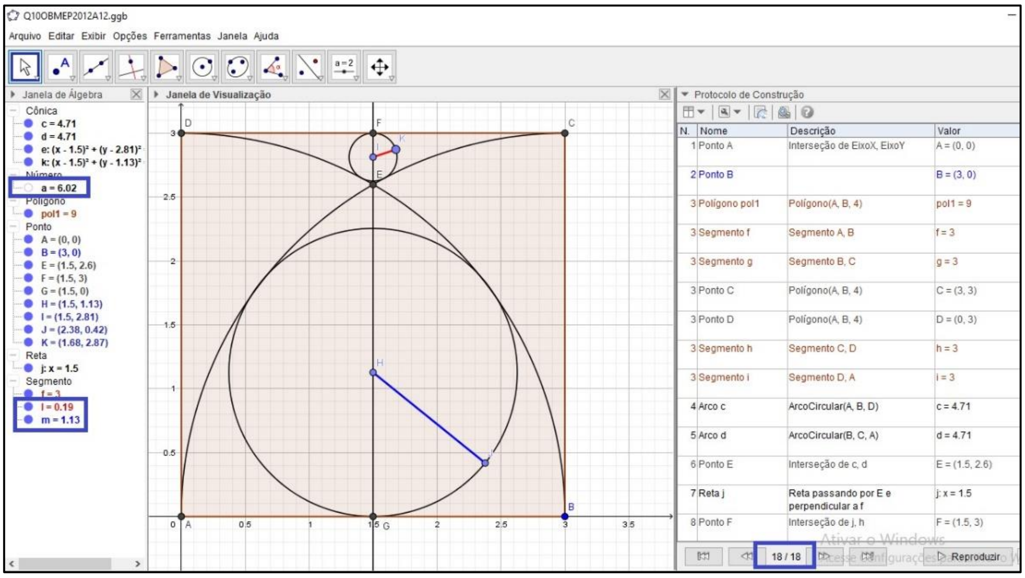
4.5.5. Construção da questão 10 OBMEP 2012

A questão 10 apresenta um quadrado sem definição do valor de seu lado, dois círculos de raios distintos e não tangentes em si, mas tangentes aos lados opostos do quadrado e dois semicírculos de raio igual ao lado do quadrado. A questão pede a razão entre os raios dos círculos maior e menor. Segue construção sugerida por A12,

> Construir um quadrado de lado 3 / construir arcos circulares ABD e BCA / marcar a interseção E entre os arcos e construir uma perpendicular a AB passando por E / marcar as interseções da perpendicular com os lados AB e CD / colocar dois pontos H e I sobre a reta perpendicular / construir círculos de raio HG e IF / movimentar os pontos H e I até se obter tangências entre os círculos e os arcos / determinar os raios HG e IF e dividir esses valores. (A12)

Observe que A12 inicia com a medida do lado do quadrado igual a três justificando que "*assim como a questão anterior daria na mesma qualquer valor já que a questão pedia a razão entre duas medidas*". Outro ponto importante é que também não foi possível uma construção que pudesse gerar os pontos de tangência, sendo feita, portanto por aproximação. A construção da figura levou 18 etapas <ponto, interseção, polígono, segmento, arco circular, reta perpendicular, círculo e razão>. Observe em destaque l=0.19 (em vermelho) e m=1.13 (em azul), representando respectivamente os raios dos círculos menor e maior, bem como a=6.02, razão feita diretamente no GeoGebra, entre os raios dos círculos maior e menor. Não concluíram a construção A5, A10, A14, A16 e A28. Não fizeram a construção A1, A2, A3, A11 e A19.

Figura 29 – Construção da questão 10 OBMEP 2012 feita por A12.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.6. Quinto Encontro: revisando ferramentas

No quinto encontro utilizou-se o vídeo 05 do site *ogeogebra* que abordava como modificar as propriedades dos objetos construídos no GeoGebra; as atividades orientadoras encontram-se disponíveis no apêndice F. O encontro serviu como uma revisão das ferramentas do GeoGebra feitas até então com ênfase nos pontos notáveis do triângulo, já discutidas no terceiro encontro, porém não trabalhadas diretamente no *software* e para reforçar as construções envolvendo setor circular e segmento circular. No minuto 1:41 do vídeo foi exibido um pentágono não regular. Questionados pelo pesquisador se o mesmo era regular A8 coloca "*não é regular porque na janela de álgebra o GeoGebra tá dizendo que os segmentos medem 2.35, 2.79, 3.19, 2.58 e 3.06, tudo diferente e o senhor já explicou para que ser regular tinha que ter todos os lados iguais*". Observe que A8 trata bem da questão de um polígono regular e os demais participantes concordaram com a colocação. Em seguida foram apresentadas as possibilidades de formatação do polígono, como mudança do nome, estilo, cor, inserção de legenda, mostrar valor ou rótulo, ocultar objeto, espessura e preenchimento. Nessas etapas não houve nenhuma intervenção dos participantes. Conforme afirma Lima (2015),

> Cada vez mais as teorias algébricas e as construções geométricas estão se distanciando no ensino básico. O uso de ferramentas informatizadas, não podem deturpar as verdades matemáticas que estão por trás de cada construção. Sendo assim, a ausência destes conteúdos nos manuais dos professores, não pode ser motivo para que não seja utilizada uma forma concreta e com uma justificativa matemática para a solução de determinados problemas ou mesmo para provar a impossibilidades de alguns. O professor precisa estabelecer uma interação com aluno e estimular o raciocínio para determinados questionamentos a fim de enriquecer a aula. (p.52)

Já no Laboratório de Informática os participantes receberam as atividades orientadoras em que constavam onze questões, focando a revisão de ferramentas do *software* como já dito e a formatação das mesmas. A questão 11 pedia para refazer todas as questões até o momento. Na prática essa questão acabou não sendo analisada no encontro porque apenas seis participantes (A6, A7, A8, A9, A13 e A18) concluíram as 10 primeiras e tiveram tempo (20min) para fazer uma ou outra questão anterior da Obmep. Segundo A1, A3, A15, A21 e A25, a "*formatação e a escrita dos procedimentos de construção foram os responsáveis pela demora na conclusão das atividades*", fala bastante presente nas considerações. Decidiu-se então por suspender a validade da questão 11 e no restante do tempo estariam livres para usar qualquer programa; os demais continuariam a atividade até o término do horário. Por se tratarem de construções simples e que não estavam ligadas diretamente a questões da Obmep, estaremos fazendo apenas as considerações de Q6 a Q10.

4.6.1. Construção da questão Q6 da Atividade Orientadora

A questão solicitava a construção de um triângulo ABC qualquer e que fosse determinado o ponto G de encontro das medianas. A22 coloca,

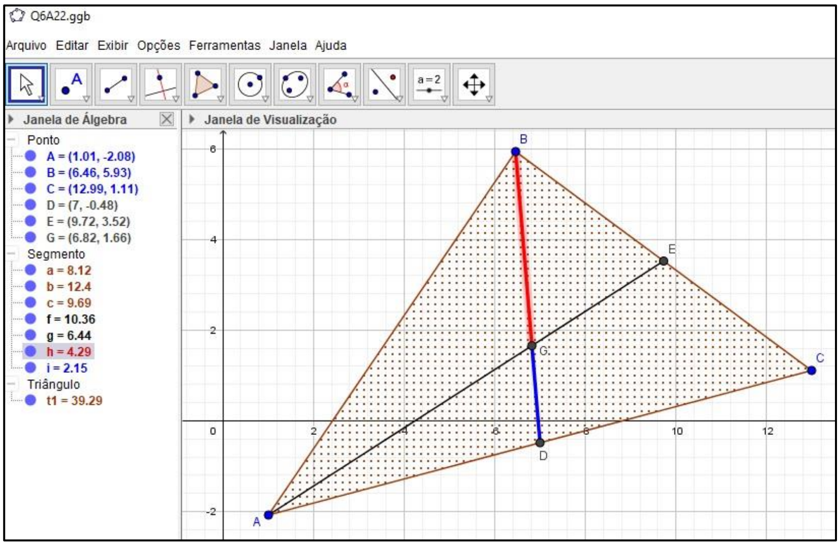
> escolhe a ferramenta <ponto> e clica em três pontos quaisquer da janela de visualização / clica na ferramenta <ponto médio> e clica no lado AC e em seguida em BC / clica na ferramenta <segmento>, clica em B e D e em A e E / clica na ferramenta <interseção de dois objetos> e clica nos dois segmentos gerados / o ponto G é o baricentro. (A22)

Questionada sobre o que ocorre com o ponto G quando movimentamos algum vértice do triângulo, a mesma responde “*ele sempre fica dentro do triângulo ABC*”.

Durante a construção foi pedido que os participantes anotassem na folha qual a relação que eles podiam identificar entre as medidas de cada segmento que ficava dividida pelo baricentro. A22 observou que “*a mediana BD está representada por g=6.44, GD representado por i=2.15 é esse valor dividido por três e BG representado por h=4.29 é o dobro de BD*”. Questionados se esse comportamento se repete nas outras medianas a resposta “*sim*” foi unânime, visto que confirmaram no software antes de dar essa resposta. Na figura abaixo, vemos BG destacado em vermelho e DG em azul. Para Salvador (2013),

> O utilizador cria pontos, retas, circunferências, entre outras e através da régua e compasso eletrônico desenha as figuras desejadas. O seu conjunto de ações possibilita, a quem o usa, interagir e visualizar as figuras em movimento e consegue com isto, ter uma melhor compreensão das noções trabalhadas. Neste poder mexer a figura, encontra-se o dinamismo que o software oferece e que tem a grande vantagem de preservar as relações existentes entre os elementos da figura. (p.16)

Figura 30 - Construção da questão Q6 feita por A22.



Fonte: Registro do autor, 2017.

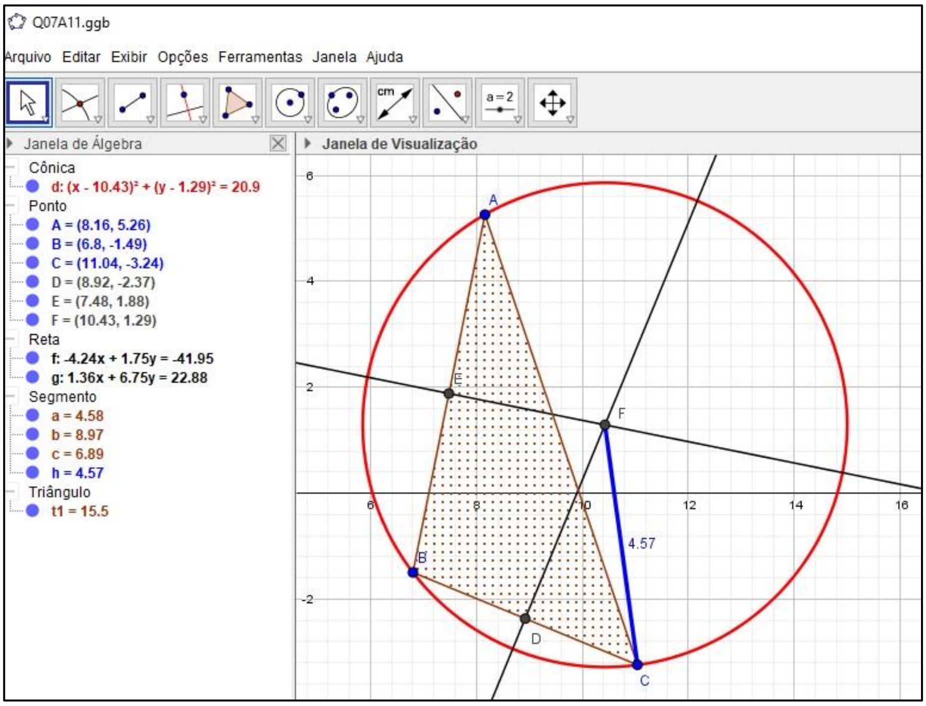
4.6.2. Construção da questão Q7 da Atividade Orientadora

A questão estava agora relacionada à construção da circunferência circunscrita ao triângulo, bem como o valor de seu raio. Veja os passos definidos por A11,

> Selecione <polígono> e clique em três lugares distintos na janela de visualização / selecione <ponto médio> e clique sobre BC e AB / selecione <reta perpendicular> clique em D e depois em BC e em E e depois em AB / selecione <ponto de interseção> e clique nas duas retas perpendiculares / o ponto F é o circuncentro / selecione <círculo definido por centro e um dos pontos> e clique em F e depois em C / selecione <segmento> e clique em F e depois em C, este será o raio que no meu tá medindo h=4.57. (A11)

Quanto à movimentação de um dos vértices destacamos novamente a fala de A11 “*diferente do baricentro, quando fiz A se movimentar percebi que F às vezes ficava dentro do triângulo, às vezes fora e às vezes em cima do lado*”.

Figura 31 - Construção da questão Q7 feita por A11.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.6.3. Construção da questão Q8 da Atividade Orientadora

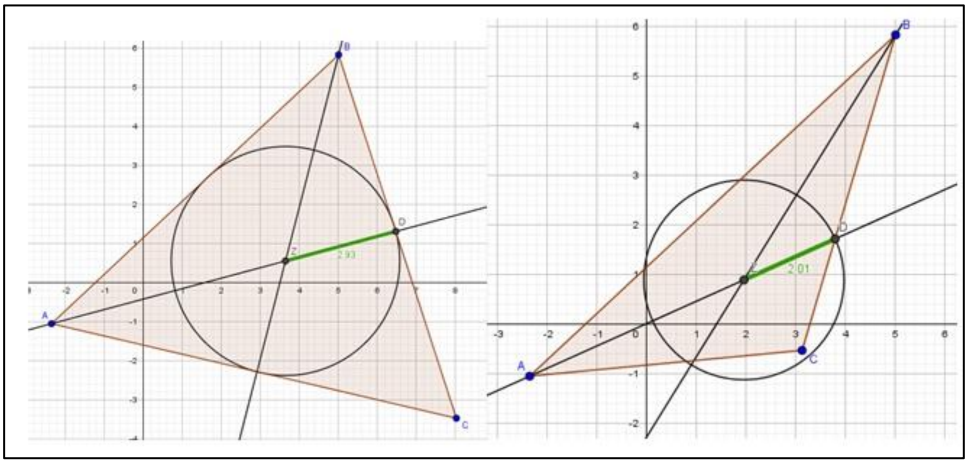
A questão tratava do incentro e pela primeira vez durante a execução da atividade foi observada uma incoerência de construção; 100% dos participantes seguiram roteiro similar ao da seção anterior. Vamos acompanhar os procedimentos de A13,

> Clica na ferramenta <polígono> / clica na ferramenta <bissetriz> / faz a interseção das duas e vai aparecer o Z / faz também a interseção de uma bissetriz com BC, vai aparecer o D / agora é só fazer a circunferência com centro em Z e raio ZD. (A13)

Veja que aparentemente o processo estaria correto; podemos até confirmar isso na figura (abaixo à esquerda) feita por A13. Ao perceber a incoerência na construção, foi solicitado a A13 que movimentasse o ponto C. Feito isso, foi gerada a figura abaixo à direita. A13 e o restante do grupo soltaram um "*viiiixiiii deu errado, a bola era pra ter ficado dentro*" e a partir daí fomos discutir o erro. Conforme afirma Salvador (2013),

> Através dos erros contínuos na construção dos ângulos pedidos, os alunos puderam perceber o que em papel ainda não tinham entendido. Se no papel para medirem vários ângulos inscritos numa circunferência é necessário desenhá-los todos, no GeoGebra basta apenas mover um dos pontos definidos para criar um ângulo diferente. (p.56)

Figura 32 - Construção da questão Q8 feita por A13.



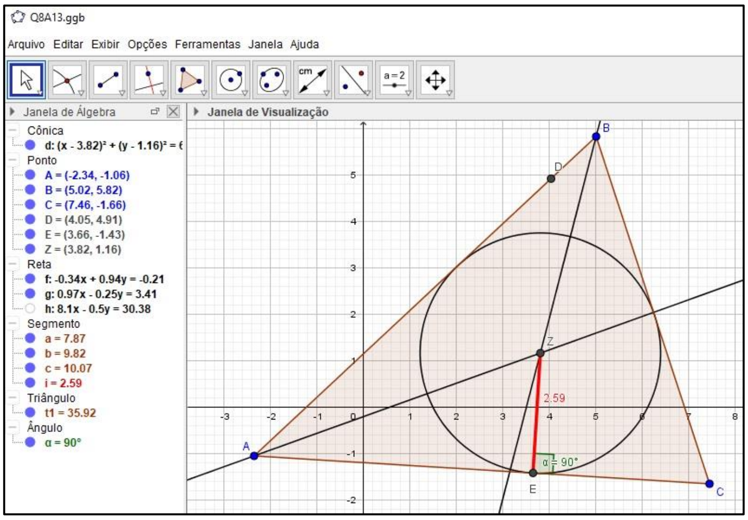
Fonte: Registro do autor, 2017.

O estudante A9 afirma que,

> ZD não deveria então ser o raio, que tinha que ter outro jeito de fazer o raio"; A18 observou que "na construção do circuncentro tinha um ângulo de 90º pelo meio, então aqui tinha que ter também. (A9)

O estudante sugeriu construir perpendiculares; A13 refez a figura até o ponto Z e determinou agora a reta perpendicular a Z passando por AC, marcou a interseção dessa perpendicular com o segmento AC, determinando o ponto E, ocultou a perpendicular e construiu o segmento ZE que considerou sendo o raio da circunferência inscrita medindo i=2.59, feita em seguida. Ao movimentar o ponto C, dessa vez o "*círculo não saiu de dentro*", de acordo com a maioria. Não chegaram a resolver a questão Q8 os participantes A1, A3, A15 e A25.

Figura 33 - (re)Construção da questão Q8 feita por A13.



Fonte: Registro do autor, 2017.

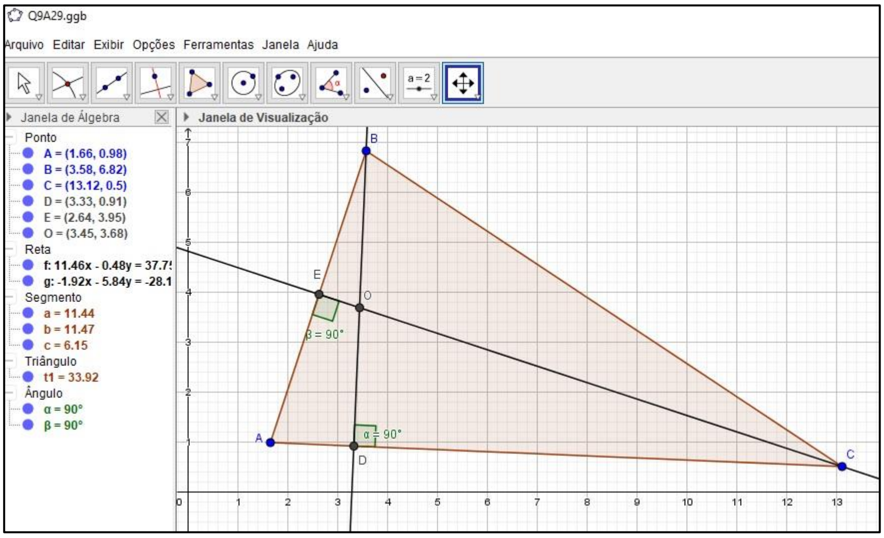
4.6.4. Construção da questão Q9 da Atividade Orientadora

Na questão 09 buscou-se construir um triângulo ABC e marcar seu ortocentro. A29 sugere,

> Use a ferramenta <polígono> e clica em três pontos diferentes na tela / ferramenta <reta perpendicular> clica em B e no lado AC e clica em C e no lado BA / ferramenta <interseção> e marca o ponto O da interseção entre as perpendiculares, marca também a interseção entre cada perpendicular e o lado que ela corta / dá a medida do ângulo pra ver que é 90º. (A29)

A29 também coloca "*se eu movimentar o ponto A, o ortocentro pode ficar fora do triângulo dependendo da movimentação de A*".

Figura 34 - Construção da questão Q9 feita por A29.



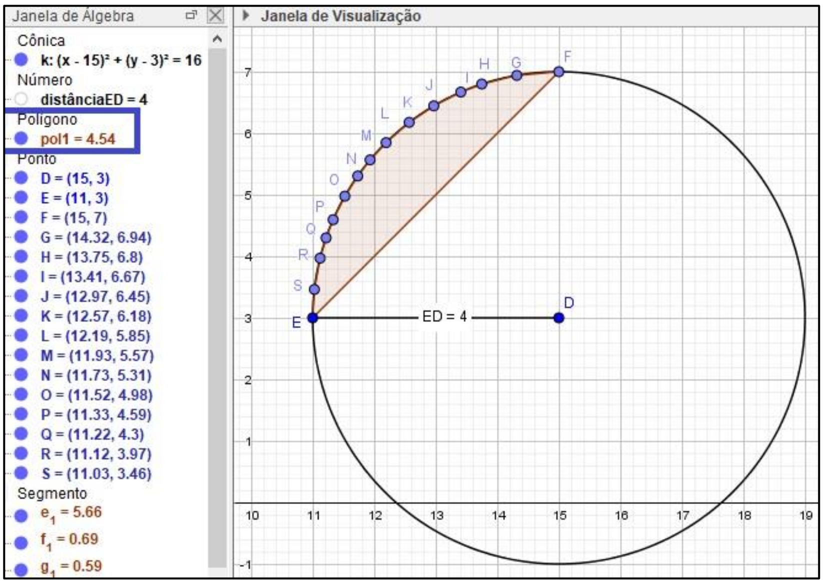
Fonte: Registro do autor, 2017.

4.6.5. Construção da questão Q10 da Atividade Orientadora

A análise da questão 10 merece um destaque especial. Devido às funcionalidades do GeoGebra, aparentemente não deveria haver problemas quanto à construção, porém determinar a área de um segmento circular não se mostrou uma tarefa tão rápida. Abaixo estaremos apresentando as construções de dois participantes, A6 e A17. Adiantamos que a construção feita por A17 e também interpretada por outros participantes, apesar de apresentar um valor bem próximo do valor obtido por A6, não pôde ser validada visto que aproximou um segmento circular a um polígono de 15 lados. Segue etapas definidas por A17,

> Usando a ferramenta <círculo> constrói um círculo de raio 4 marcando os pontos D e E / selecionando <ponto em objeto> clica no círculo de maneira que DF faça 90º com DE / escolhe a ferramenta <polígono> clica em E, clica em F e sai dando um bocado de cliques na parte curva do círculo / a resposta será pol1=4.54 (A17).

Figura 35 - Construção da questão Q10 feita por A17.



Fonte: Registro do autor, 2017.

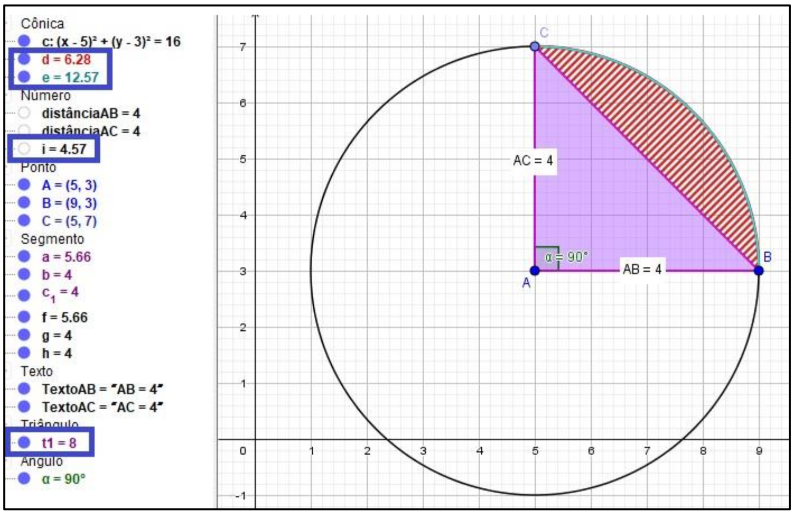
Observe agora a construção sugerida pelo estudante A6,

> Com a ferramenta <círculo> faça um círculo de centro A e raio AB=4 / marque o ponto C sobre o círculo fazendo 90º com AB / use a ferramenta <setor circular> e clique em A, B e C, no GeoGebra teremos e=12.57 / use a ferramenta <polígono> e marque o triângulo ABC, no GeoGebra teremos t1=8 / use a ferramenta <arco circular> e clique em A, B e C, vai aparecer um d=6.28 que não serve pra questão porque se trata do comprimento do arco / dá dois cliques em d para abrir a janela de formatação e usa <preenchimento> para fazer o segmento circular ficar destacado / como eu tinha o valor de e=12.57 e t1=8, fiz só =e-t1 que o GeoGebra deu i=4.57 / não encontrei um jeito de dar a área do segmento circular, só do setor. (A6)

Nos chama a atenção que quando o aluno A6 (e nenhum outro participante) informa que não encontrou um outro jeito de fazer a área pedida, partimos para a construção, pesquisas na internet e vimos que de fato não havia tal maneira o que nos mostra que o aluno estava correto. Segundo Salvador (2013),

> Presentemente, a geometria dinâmica oferece um leque muito mais vasto de opções incluindo elementos algébricos, de modo a abranger um maior número de problemas matemáticos, no entanto, o princípio base mantêm-se, a precisão. Para desenhos complexos que exijam muitos traçados para a sua construção, torna-se difícil fazer uma abordagem com papel, régua, compasso e lápis, mas com o recurso aos softwares fica muito mais simples. (p.16)

Figura 36 - Construção da questão Q10 feita por A6.

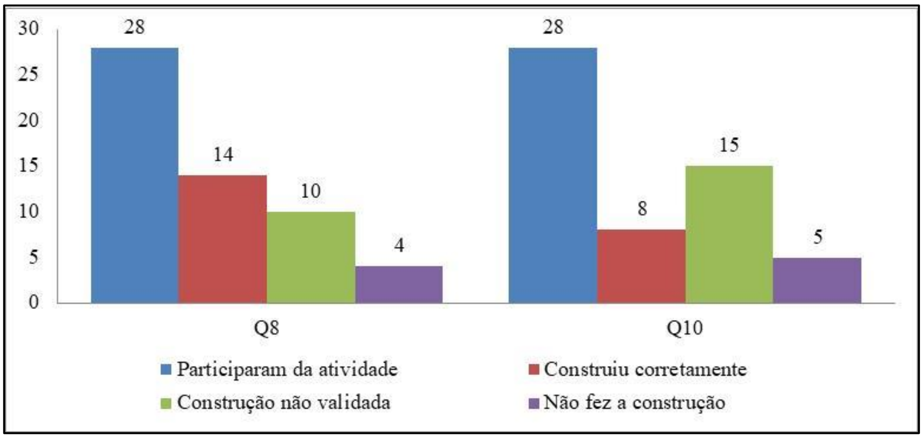


Fonte: Registro do autor, 2017.

Vamos observar que as respostas dos alunos A6 e A17 de fato estão muito próximas (4.54 e 4.57), porém como já foi dito, o estudante A17 partiu do princípio de construção que deveria determinar um polígono ao invés de um segmento circular, daí a não validação de sua resolução. Outros participantes sequer chegaram a uma conclusão. Segue abaixo gráfico que trata dos índices de validação das questões Q8 e Q10; as demais tiveram índice de 100%.

Observamos que pelos resultados do gráfico, tivemos um baixo índice de validação em ambas as questões, especialmente em Q10. Tal índice ficou em 50% para Q8 e 29% em Q10. Vemos também que 54% dos participantes não tiveram a questão validada em Q10. Os participantes A1, A3, A15, A25 e A31 não chegaram a analisar a questão Q10.

Gráfico 8 - Índice de rendimento nas questões Q8 e Q10.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.7. Sexto Encontro: construção de polígonos

Para o sexto encontro, foram utilizados os vídeos 06, 08 e 09 que tratam respectivamente de Polígonos regulares ou não, funções partes 1 e 2 e as cinco questões da Obmep: a 1ª referente à questão 6 da prova de 2013, a 2ª referente à questão 19 de 2013, a 3ª referente à questão 11 de 2014, a 4ª referente à questão 4 de 2015 e a 5ª referente à questão 17 de 2015. O vídeo 06 serviu para reforçar as construções de polígonos regulares ou não e o cálculo de sua área e perímetro; não houve maiores registros a relatar apenas A4 cita "*professor nós já estamos é craques nesse negócio de polígonos*".

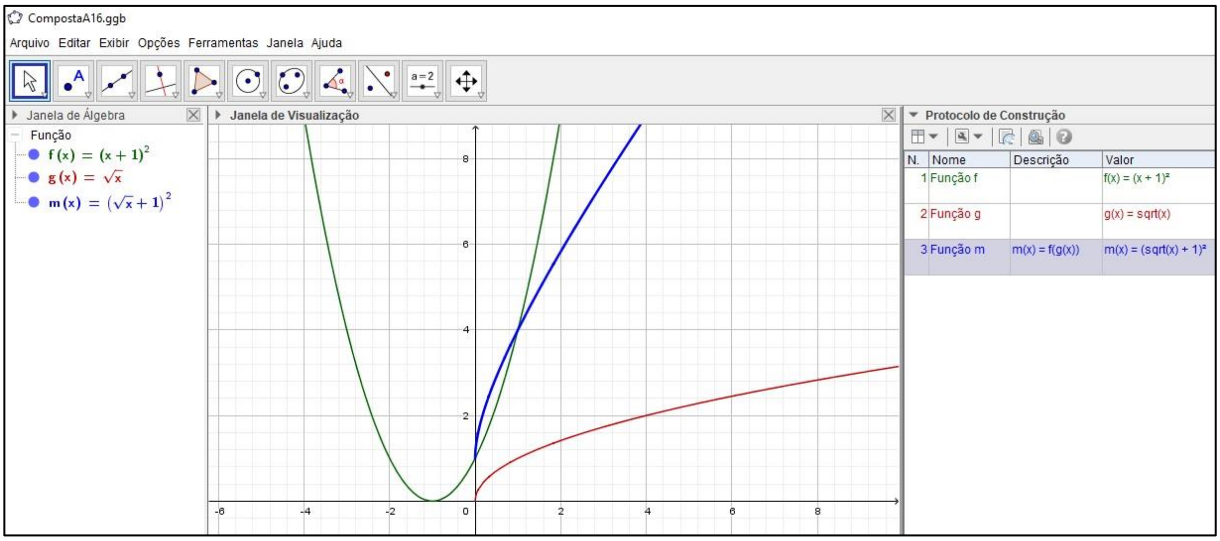
No vídeo 08 de funções (parte 1), foram abordadas as construções de figuras simétricas por retas e pontos. Além disso, abordou-se a translação de uma figura por meio de um vetor. Os tópicos abordavam a sintaxe de funções, funções pré-definidas, operações com funções e funções compostas. No vídeo, apresentou as funções $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ e $g(x)=3^{x+2}+5$, em que a sintaxe a ser digitada pelos participantes na caixa de entrada deveria ser $f(x)=x/(x\text{^}2+1)$ e $g(x)=3\text{^}(x+2)+5$. O objetivo seria observar o comportamento gráfico de tais funções. Também foram apresentadas as funções $f(x)=x^2+3$, cujo comportamento gráfico é uma parábola, $g(x)=x-1$, cujo comportamento é uma reta e $h(x)=\sqrt{x}$ que representa uma curva. Detalhe para sintaxe de $h(x)$, que deveria ser apresentada da forma $h(x)=sqrt(x)$. Apresentou-se também a ferramenta <ajuda> para pesquisar as funções matemáticas presentes no GeoGebra. Utilizou para demonstração a função <RaizNÉsima(x,n)> $f(x)=\sqrt[3]{x}$ no minuto 7:30 e $g(x)=|x|$ utilizando <abs(x)>. Fez-se a edição direto em $g(x)=|x|$, alterando para $g(x)=|x-1|$ e em seguida para $g(x)=|x^2-3|$.

No vídeo também foram apresentadas as funções $f(x)=x^2+3$ e $g(x)=2$ a fim de que fossem trabalhadas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Finalmente, trabalhou-se com funções compostas; para as simulações foram exibidas as funções $f(x)=(x+1)^2$ e $g(x)=\sqrt{x}$. Fez-se na caixa de entrada do GeoGebra $h(x)=g(f(x))$ e sugeriu-se para a prática do laboratório de informática que fizessem também $m(x)=f(g(x))$ e registrassem o comportamento gráfico. A16 apresenta a figura abaixo e faz a seguinte observação "*a função encontrada parece com a vermelha como se tivesse girado no sentido anti-horário e começando do um*". Observe de verde a função $f(x)$, em vermelho a função

$g(x)$ e em azul a função composta $m(x)$. Não houve problemas de construção nas demais questões pelos participantes. Para Salvador (2013),

> Os ambientes de aprendizagem são criados de modo que sejam os próprios discentes a chegar ao conhecimento e que não lhe sejam apenas apresentadas regras que eles têm de aprender e cumprir. É neste contexto que as novas tecnologias vêm ajudar os alunos e os professores nesta nova etapa que a escola atravessa, pois a tecnologia ajuda a criar estes novos ambientes de aprendizagem permitindo aos alunos seguirem mais facilmente o seu ritmo de estudo. (p.5)

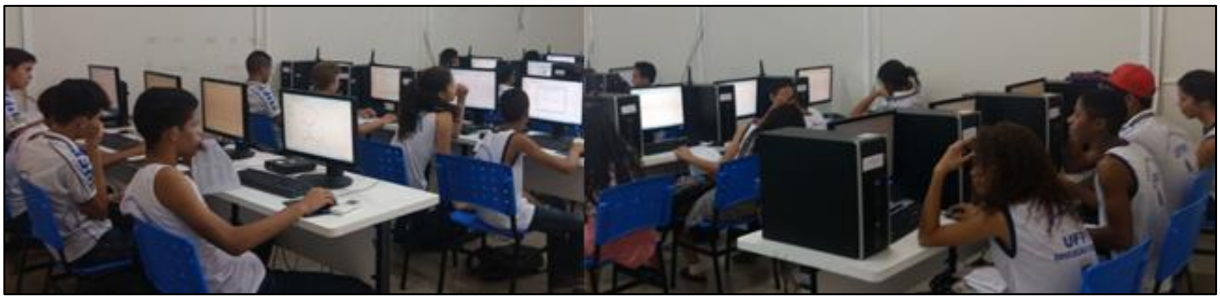
Figura 37 - Construção da função composta $m(x) = f(g(x))$ feita por A16.



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

O vídeo 09 aborda novamente o uso de funções só que acrescido da ferramenta <controle deslizante> a fim de alterar automaticamente os valores de *x* da função. No vídeo é apresentada a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e são alterados os valores x_1 e x_2 criados na ferramenta <controle deslizante>. Mesmo procedimento foi feito com uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ em que foram criados os *controles deslizantes* para *a*, *b* e *c* e variados seus valores. Como sugestão das práticas do laboratório de informática apresentou-se as funções $g(x) = a.\cos(bx + c) + d$, $h(x) = |x + a| + b$, $p(x) = \frac{1}{x + a}$ e $q(x) = (x + a)^2 + b$. Não houve registros a considerar sobre essas construções. Todos desenvolveram a atividade de forma integral.

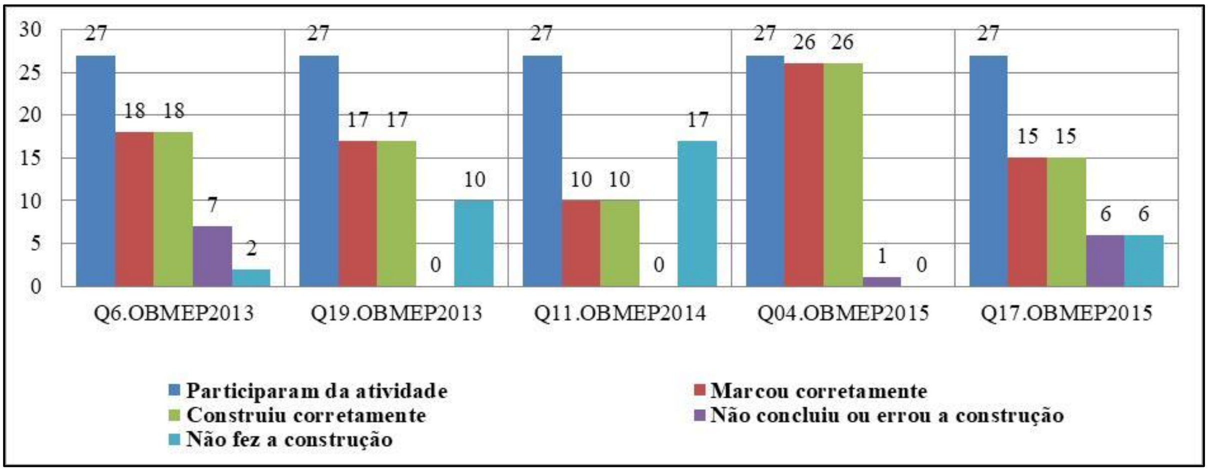
Figura 38 - Prática no laboratório de informática 02.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Abaixo estaremos apresentando o gráfico com os índices de rendimento das construções das questões da Obmep e, em seguida, estaremos discutindo cada construção de forma mais detalhada.

Gráfico 9 - Índice de rendimento referente às atividades orientadoras do 6º encontro.



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Pelo gráfico observamos claramente que na questão Q4 da Obmep do ano de 2015 os estudantes obtiveram um índice de construções excelente, algo em torno de 96%. Em seguida temos as questões Q6 e Q19, ambas da Obmep de 2013, veja que em Q6, 26% ou não concluíram ou apresentaram algum erro de análise, apontando essa questão como a que apresentou o maior índice nesse aspecto. Observe que na Q19, 37% não apresentaram construção. Consideramos as questões Q11 da Obmep de 2014 e Q17 da Obmep de 2015 as que apresentaram menor índice de resultados positivos. Observamos também que em Q17 apenas 55% dos participantes concluíram com êxito as construções. Já em Q11 foi de apenas 37%, além do que nessa questão 63% sequer apresentaram construção. Não tivemos casos de participantes que marcaram corretamente sem ter feito construção ou apresentado construção incoerente. Vemos que ainda há uma enorme dificuldade no tratamento de questões que envolvem estruturas circulares. Por conta disso, será planejado mais um encontro que não estava previsto.

Seguiremos agora para as análises das cinco questões da Obmep definidas para o encontro.

4.7.1. Construção da questão 06 OBMEP 2013

Na questão são apresentadas quatro circunferências de comprimento igual a 1 e tangentes conforme indicação. São destacados arcos formados nesses pontos de tangência e pede-se a soma dos comprimentos desses arcos. Segue construção de A28,

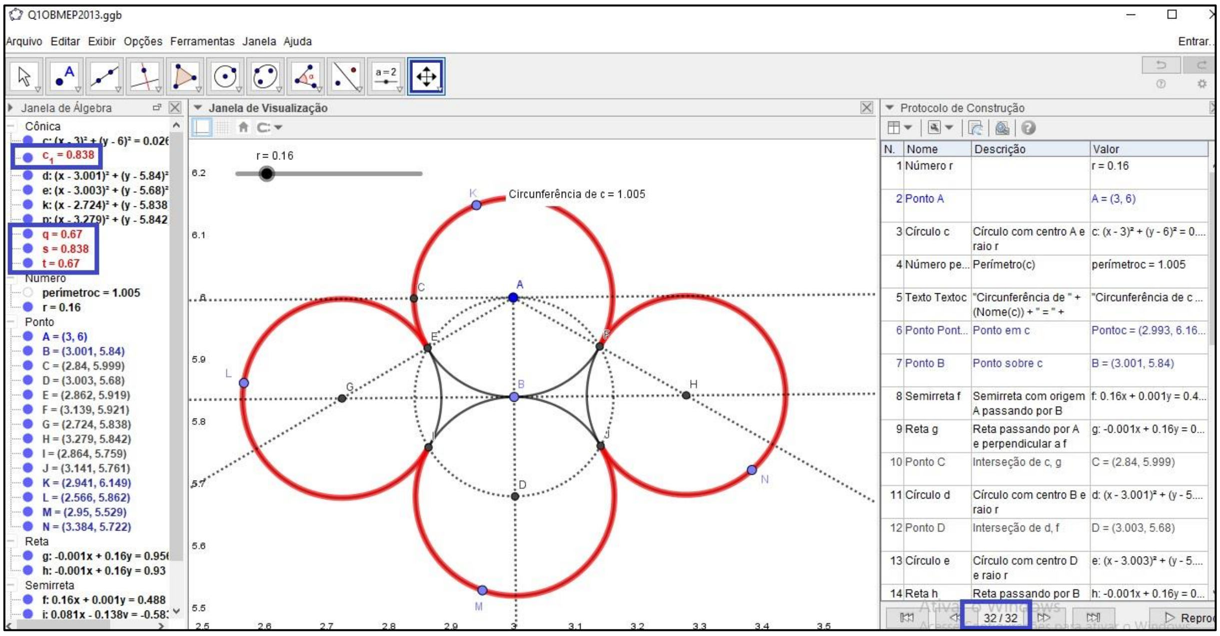
> Ferramenta <controle deslizante> e chama de r variando de 0 a 1 / constrói um círculo de centro A e raio r / mexe no valor de r até o comprimento dar 1 / marca um ponto B sobre o círculo de centro A e traça uma <semirreta> f de origem em A / constrói um círculo de centro em B e raio r / marca os pontos de interseção D, E e F da semirreta f com o círculo de centro em B e entre os círculos / constrói um círculo de centro em D e raio r / constrói uma <perpendicular> a AD passando por B / constrói as semirretas AE e AF e marca as interseções / constrói os círculo de centros G e H e raio r / constrói os arcos, formata e deixa mais visível só o que interessa / daí soma os arcos. (A28)

Veja que o aluno A28 encontra para o raio o valor r=0.16 e o comprimento da circunferência fica aproximadamente c=1.005, não exatamente 1, o que é uma aproximação aceitável visto que estamos trabalhando com o número irracional π (pi). Observe que apesar das circunferências terem o mesmo raio, os arcos são distintos dois a dois; temos dois arcos medindo c1=0.838, s=0.838 e q=0.67, t=0.67. Somando os quatro valores obtém-se 3.016, ou seja, letra E. O protocolo de construção apresenta 32 sequências dentre <número, círculo, perímetro, ponto, semirreta, reta, interseção, reta perpendicular e arco>. Consideramos uma construção bem complexa e que já exige dos participantes uma interpretação mais apurada. Alguns participantes apesar de terem feito a construção correta não receberam a validação, visto que consideraram o raio como sendo igual a 1 e não o comprimento; foram eles: A4, A9, A10 e A19; os participantes A7, A8 e A25 não concluíram a construção; já A1 e A3 não fizeram a questão. Segundo Salvador (2013),

> Os softwares de geometria dinâmica ajudam os alunos porque usam a animação para construir, mover e girar sólidos, podendo assim ser observados sob vários ângulos. As potencialidades que estes softwares apresentam fazem com que tenham um papel mais funcional. Eles são encarados como ferramentas de exploração, fazendo com que a

> intuição, a construção e a noção espacial sejam fatores muito importantes, enaltecendo também os aspetos teóricos. (p.17)

Figura 39 - Construção da questão 06 OBMEP 2013 feita por A28.



Fonte: Registro do autor, 2017.

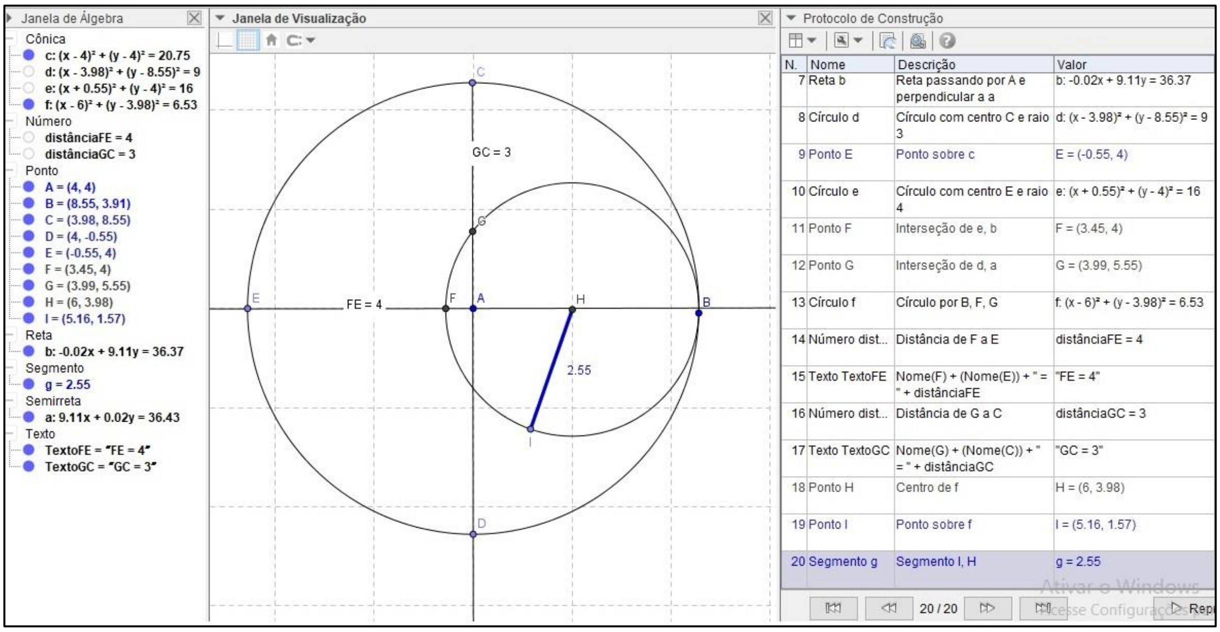
4.7.2. Construção da questão 19 OBMEP 2013

Novamente são apresentadas circunferências tangentes, dessa vez de raios distintos e uma interna à outra. São definidas medidas de segmentos de 4 cm e 3 cm e é pedido o raio do círculo menor. Acompanhe o raciocínio do aluno A13,

> Construa um <círculo> AB centro A de raio qualquer / marque um ponto C sobre o círculo / construa um <semirreta> de origem em C passando por A / construa uma perpendicular a essa semirreta passando por A e trace as interseções / construa um círculo menor tangente ao maior com centro H / marque as interseções F e G / construa o segmento HI e faça aparecer sua medida / faça com que as medidas CG e FE fiquem iguais a 3 e 4 respectivamente movimentando os pontos livres / quando isso acontecer HI será o raio menor e resposta da questão. (A13)

Veja que o estudante A13 também usa aproximação para determinar o resultado. A construção estava dentro do esperado e os demais participantes executaram mesmo processo. O protocolo de construção apresenta 20 sequências dentre <ponto, círculo, semirreta, reta perpendicular, interseção, distância, centro e segmento>. Tal questão apresentou grande desistência no processo de construção; tem-se aqui os participantes A1, A3, A4, A8, A10, A15, A16, A25, A29 e A31. O participante A10 comenta "*geralmente tenho dificuldade com* *questões que envolvem círculos*"; A25, A29 e A31 alegam "*não deu tempo, deixei por último essa e acabou que não cheguei a fazer*". Os demais construíram corretamente.

Figura 40 - Construção da questão 19 OBMEP 2013 feita por A13.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.7.3. Construção da questão 11 OBMEP 2014

Na questão são apresentadas quatro circunferências de mesmo raio e são destacados doze arcos de medida igual a três. Deseja-se a medida do comprimento de cada circunferência. Observe a construção de A5,

> Construa uma semirreta de origem em B e um arco de comprimento 3 sobre ela com ângulo de 45º / trace a bissetriz de 45º e uma perpendicular a ela passando por B / rotacione 45º a semirreta original e marque os pontos de interseção E e F / com esses pontos construa a circunferência equivalente de centro H / repita o processo para as outras duas e determinar o comprimento de cada uma. (A5)

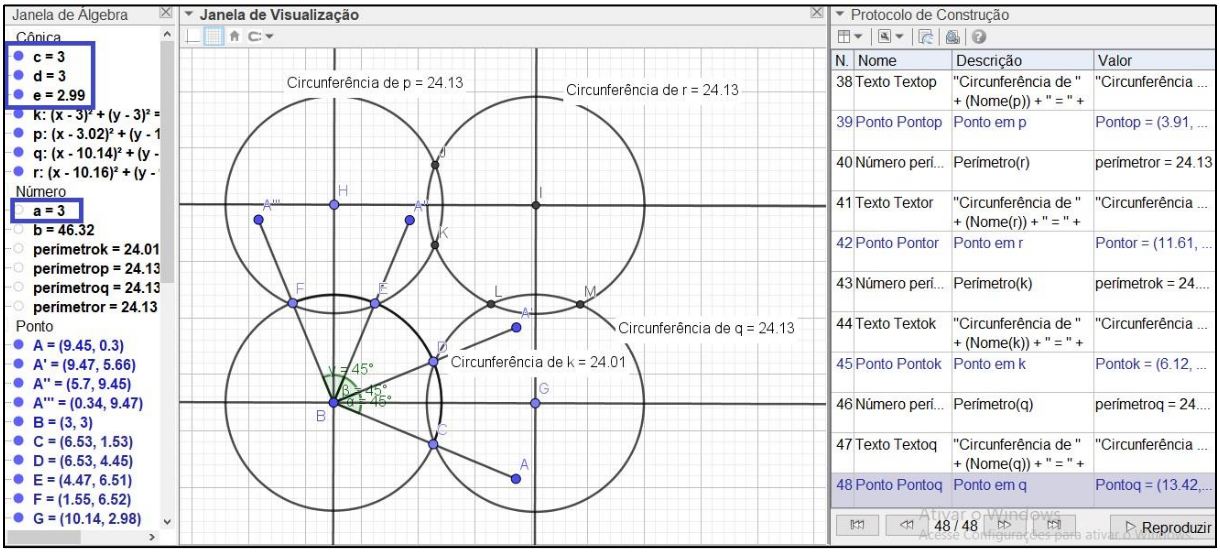
Vejamos que foi utilizado um raciocínio interessante por A5 que percebeu que poderia dividir a circunferência em oito partes iguais dividindo 360º por 8, obtendo 45º, isso garantiria a medida igual de cada arco. A mesma também utilizou <rotação>, ferramenta até então ainda não utilizada. O único ponto que destacamos é a medida e=2.99 do arco que não exatamente 3, daí uma das circunferências apresentou comprimento diferentes das demais, k=24.01, mas nada que pudesse comprometer o resultado.

Assim, como na seção 4.6.1 tivemos uma construção bem complexa com a distribuição em 48 etapas de acordo com o protocolo de construção. Foram utilizadas as ferramentas <ponto, rotação, ângulo, segmento, arco, comprimento de arco, círculo, bissetriz, reta perpendicular, interseção, área e perímetro>, o que torna essa questão bem diversificada quanto ao uso de ferramentas do GeoGebra.

Neste caso, tivemos um índice relevante de participantes que sequer conseguiram apresentar construção; foram eles: A1, A3, A4, A7, A9, A10, A11, A12, A15, A16, A17, A19, A22, A25, A26, A29 e A31. Observe que 63% não apresentaram construção, índice que consideramos extremamente alto, conforme já discutido anteriormente. As justificativas apresentadas pela maioria dos alunos foram as mesmas "*não deu tempo*". Os estudantes A1, A3, A15 e A19 colocam que "*como eu vi que tinha arco pelo meio nem tentei porque já sabia que ia errar mesmo*". O aluno A13 não validou a construção porque apresentou circunferências com arcos diferentes de três; no caso encontrou o comprimento igual a 18.85 cm marcando incorretamente letra A. O participante A8 não chegou a concluir a questão.

Observamos, portanto que muitos estudantes ainda apresentam sérias dificuldades em construções envolvendo estruturas circulares e apesar de terem todas as funcionalidades presentes no GeoGebra, não conseguem determinar o caminho a seguir no processo de análise da figura.

Figura 41 - Construção da questão 11 OBMEP 2014 feita por A5.



Fonte: Registro do autor, 2017.

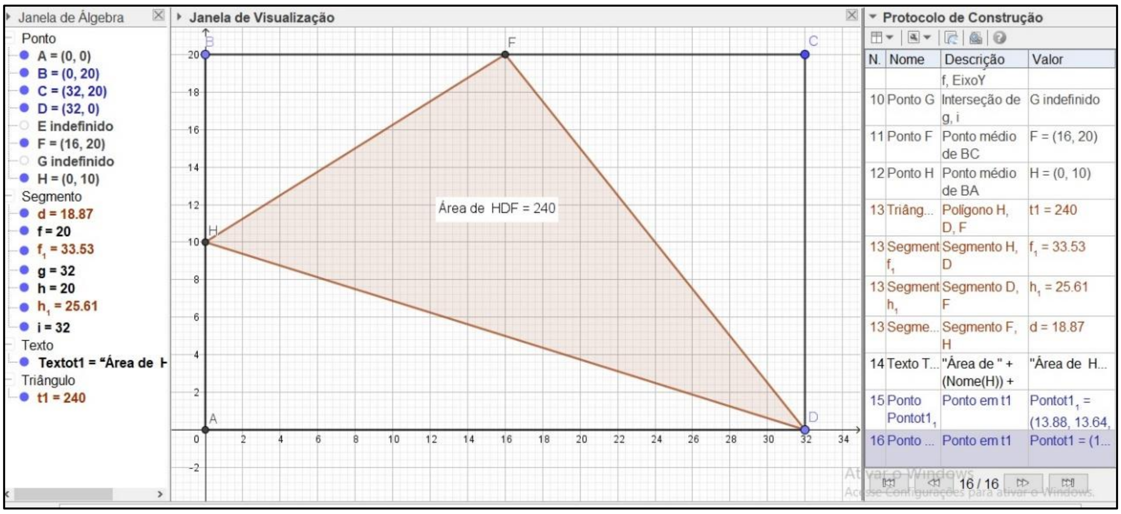
4.7.4. Construção da questão 04 OBMEP 2015

A questão 04 trata de um retângulo de área 640 cm^2 em que são definidos dois pontos médios e construído um triângulo BDF. Pede-se a área desse triângulo. Observe que das cinco questões da OBMEP esta era a única que não apresentava estruturas circulares. Quase que em sua totalidade os participantes resolveram começar pela questão Q4. Vamos analisar o raciocínio descrito pelo estudante A23,

> Construa um retângulo de lados 32 por 20 para garantir a área 640 / usa a ferramenta <ponto médio> e clica em BC e em AB daí vai aparecer os pontos F e H que serão médios / usa a ferramenta <polígono> e clica em HDF / usa e ferramenta <área> e clica no triângulo formado / a resposta é o que aparecer dentro dele (A23).

Aqui tivemos uma situação similar ao que ocorreu no quarto encontro na Q16 da Obmep de 2011 analisada pelo participante A22; da mesma forma que o estudante A22, A23 também arbitrou as medidas 32 por 20 para que a área resultasse em 640 cm^2, conforme pedido na questão. Também justificou que "*as dimensões poderiam até ser outras, mas dando área 640 no retângulo não iria alterar a do triângulo*". Comparada às outras questões, a questão Q4 apresentou um protocolo bem simples, 16 processos apenas, a saber <ponto, interseção, segmento, ponto médio, polígono e área>. Apenas o aluno A25 não concluiu a questão. Destacamos que o aluno A25 não apresentou nenhuma construção e também não quis se pronunciar sobre se estava com algum problema quando abordado pelo pesquisador. Adiantamos que nos resultados do pós-teste do último encontro veremos que A25 apresentou o menor índice de rendimento nas construções.

Figura 42 - Construção da questão 04 OBMEP 2015 feita por A23.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.7.5. Construção da questão 17 OBMEP 2015

Para a última questão foi apresentado um trapézio inscrito a uma circunferência. São dadas a base maior, menor e altura do trapézio. Pede-se a medida do raio da circunferência. Vamos acompanhar o desenvolvimento descrito pelo participante A24,

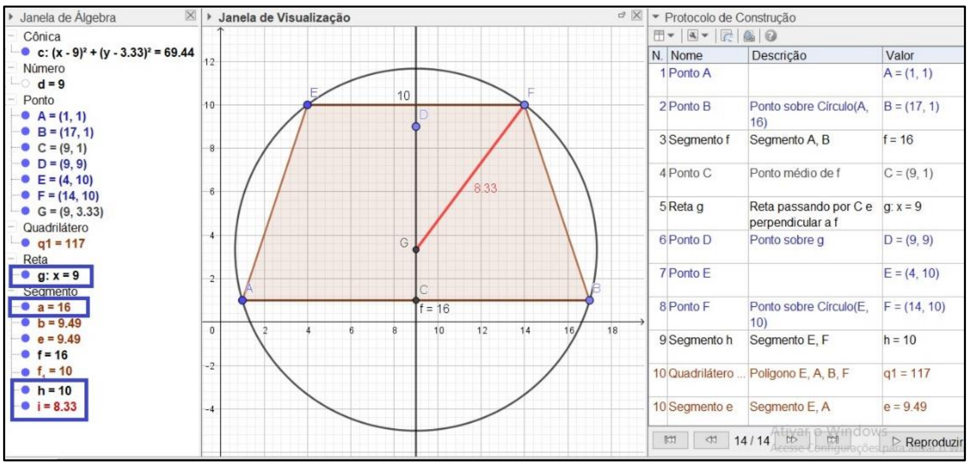
> Construa um segmento AB de medida 16 e marque seu ponto médio C / trace uma perpendicular a AB passando por C / marque um ponto a 9 unidade de C sobre essa reta / trace uma perpendicular a esse ponto e marque os pontos E e F distantes 5 unidades / construa o trapézio e construa a circunferência passando por B, F e E / trace o segmento GF, ele será o raio pedido.

Concordamos com Reis (2012), quando fala,

> [...] propor um ambiente ao aprendizado procurando investigar, também, se a apresentação das demonstrações feitas passo a passo, favorece a aprendizagem do raciocínio lógico e se uma sequência de ensino provoca mudanças no conhecimento. (REIS, 2012, p.23)

Observe na janela de álgebra os valores a=16 (representando a base maior do trapézio), h=10 (representando a base menor), x=9 (representando a altura) e i=8.33 (representando o raio da circunferência). O estudante A24 marca letra B considerando que 25/3 é a fração que representando 8.33 aproximadamente. Aqui também temos um protocolo de construção bem simples, 14 processos, entre <ponto, círculo, segmento, ponto médio, reta perpendicular, polígono e distância>. Apresentou erro na construção ou não conclusão os participantes A3, A7, A8, A9, A13 e A25; o erro observado foram nas dimensões do trapézio, A13, por exemplo, coloca 9.5 como base menor e 6.44 como altura. Não fizeram a construção os alunos A1, A10, A15, A16, A19 e A31.

Figura 43 - Construção da questão 17 OBMEP 2015 feita por A24.



Fonte: Registro do autor, 2017.

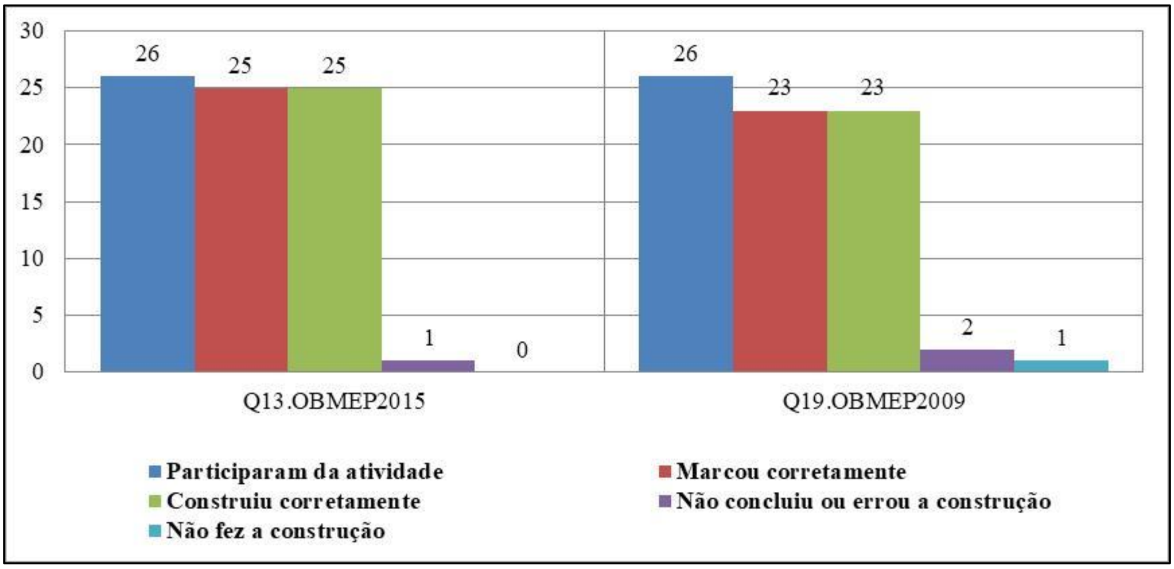
4.8. Sétimo Encontro

A proposta do sétimo encontro foi apresentar as questões da Obmep que envolvem movimentação na interpretação gráfica associando medidas em um sistema de coordenadas cartesianas. Tratava-se de algo novo para os participantes e havia certa apreensão por conta do pouco desempenho no encontro anterior. Apresentou-se o processo de construção da questão 11 da Obmep de 2016 (ver capítulo 3, seção 3.3.7) que apresentava um quadrado de lado 10 e outro concêntrico ao primeiro de lado *x*, além de um pentágono em destaque. Pedia qual a interpretação gráfica da relação entre a variação da medida de *x* e da área do pentágono. O gráfico observado sugeria uma função quadrática com concavidade voltada para baixo e o protocolo de construção com apenas 15 descrições.

Pelo que percebemos nos relatos iniciais não houve dificuldade em compreender o procedimento; pudemos confirmar isso na análise gráfica que será apresentada a seguir. Faltaram ao encontro os participantes A3, A5, A13, A20 e A30. Abaixo apresentamos o gráfico com os índices de rendimento das construções das questões da Obmep e, em seguida, discutiremos cada construção de forma mais detalhada. Foram selecionadas as questões 13 (Obmep 2015) e 19 (Obmep 2009). A média de acertos ficou em 92%, sendo considerado o melhor índice até então e já podemos perceber também certo desinteresse do estudante A1 em participar das construções, tanto que não conclui nenhuma das duas questões, não fez perguntas, não participou, nem solicitou auxilio dos monitores.

Pelo gráfico abaixo, comprovamos o alto índice nos resultados do 7º encontro em que na questão 13, apenas um aluno não fez a construção corretamente e um aluno não a concluiu, e na questão 19, em que três alunos não tiveram êxito.

Gráfico 10 - Índice de rendimento referente às atividades orientadoras do 7º encontro.



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

4.8.1. Construção da questão 13 OBMEP 2015

A questão apresenta um quadrado de área 1 e um ponto P que se desloca segundo uma semirreta AP de lado *x*; S representa a área compreendida entre ABCD e APQR. Pede-se qual gráfico melhor representa a variação de S em função de *x*. Observe as considerações do estudante A17,

> Construa um quadrado ABCD de lado 1 usando a opção <polígono regular> / construir uma semirreta de centro em A passando por B / coloca um ponto P na semirreta e move até no meio do quadrado / construir um quadrado APQR / na opção polígono clique em PBCDRQP e mude a cor / construa o segmento AP e mude a cor e o estilo / marque um ponto qualquer sobre a tela / dois cliques sobre E e mude as coordenadas para (s, pol3) / movimente P deixando bem pertinho de A / clique com o botão direito em E e <habilite rastro> / mova P e observe o gráfico. (A17)

Observe a medida pol1=1 comprovando a área dada na questão, bem como s=1.72 (no momento da captura da imagem) representando a distância x=AP. Temos um protocolo de construção bem simples, contendo apenas 9 etapas, dentre elas <ponto, polígono, segmento e semirreta>. Tivemos um bom índice de aproveitamento nessa questão, em torno de 96%. Algumas falas que retratam bem o encontro, bem como as atividades desenvolvidas até aqui e o nível de compreensão dos participantes quanto ao uso do *software* GeoGebra, em destaque as declarações dos estudantes,

> Bom, as duas questões foram bem fáceis pois já entendi bem as construções, além de aprender uma nova ferramenta na hora do uso, achei tudo muito bom (A18).
>
> Os pontos positivos que eu acho foram na hora de fazer o primeiro gráfico, até o momento só achei pontos positivos, só na segunda figura mais foi besteira, enfim, gostei (A24).
>
> Gostei das questões (A25).
>
> Estava muito fácil, gostei deste gráfico formado (A27).
>
> Atividades fáceis, para mim só há aspectos positivos a ressaltar, atividades bem desenvolvidas (A28).
>
> A primeira achei bem normal, foi fácil de concluir, assim como a 1ª a 2ª também foi boa de se fazer, assim só tive apenas pontos positivos (A29).
>
> Achei que o trabalho do sétimo encontro foi mais fácil, até porque já estávamos bem acostumados com algumas atividades parecidas (A31).

Segundo Lima (2014),

> É preciso que essas novas ideias não sejam apenas pensamentos, mas que seja feita uma reflexão sobre, e que seja ainda colocada em prática de maneira cautelosa e prudente, envolvendo os alunos em um universo em que ele possa aprender e que sinta menos dificuldade. Lembrando que nem sempre serão fáceis tais experiências, pois, precisará ter um envolvimento por parte de todo o corpo docente da escola, professores, diretores, supervisores, coordenadores e alunos. (LIMA, 2014, p.26)

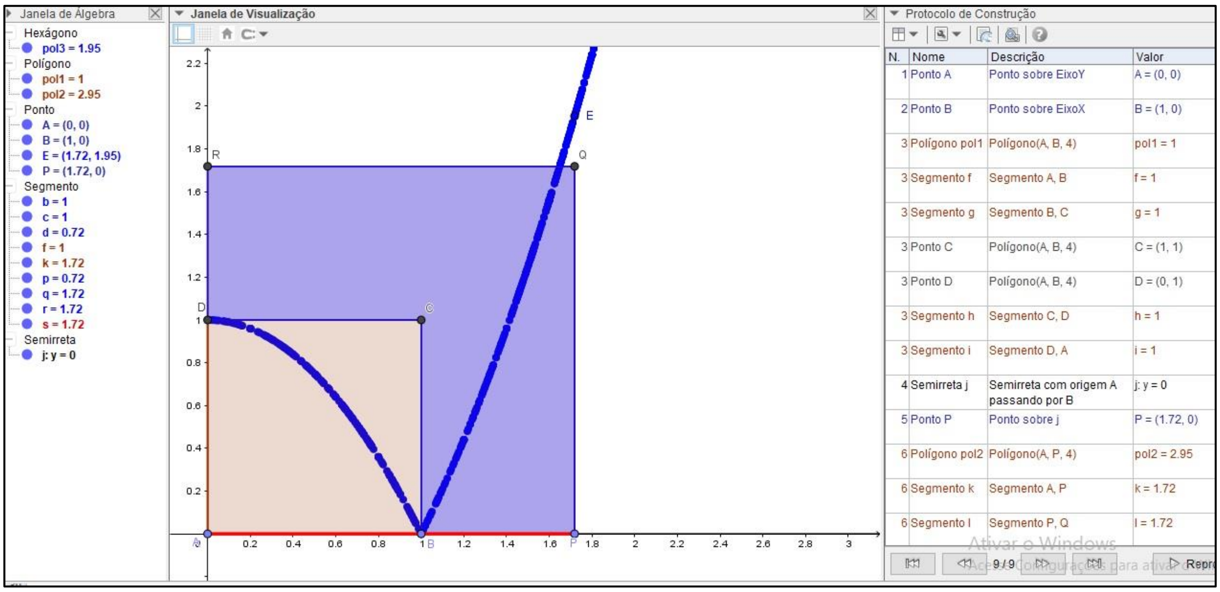
Destacamos apenas A1 que não conseguiu concluir a construção. De acordo com A1 "*tive muita dificuldade em fazer as questões propostas, não consegui concluir nenhuma*"; já A23 apesar de reclamar de dificuldades consegue concluir a construção, "*na 1ª questão foi na hora de colocar um ponto P para chamar de E, na hora de habilitar rastro quase não consigo ver o movimento de onde o rastro começa e termina*"; A25 também alega dificuldades, mas consegue concluir "*na hora de colocar a área de S de pol3 da questão 1*".

Essa recusa à matemática por parte daqueles estudantes que já possuem certa dificuldade de abstrair o conteúdo, cálculos, regras, símbolos acaba gerando ainda uma maior desmotivação e até falta de interesse de tentar desenvolver e interpretar novas situações. De acordo com Santos (2014),

> [...] o professor em sua sala de aula, tem um grande desfio que é resgatar e manter o interesse dos alunos que não se sentem motivados seja por reprovações sucessivas ou por algum outro motivo. Diante dessas circunstâncias, o professor deve perceber que os métodos por ele utilizados não estão satisfazendo ao objetivo a ser atingido que é a aprendizagem do aluno, disso decorre a necessidade da inserção de novas práticas pedagógicas que despertam o interesse e a curiosidade dos alunos. (SANTOS, 2014, p.10)

Segue abaixo figura construída por A17.

Figura 44 - Construção da questão 13 OBMEP 2015 feita por A17.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.8.2. Construção da questão 19 OBMEP 2009

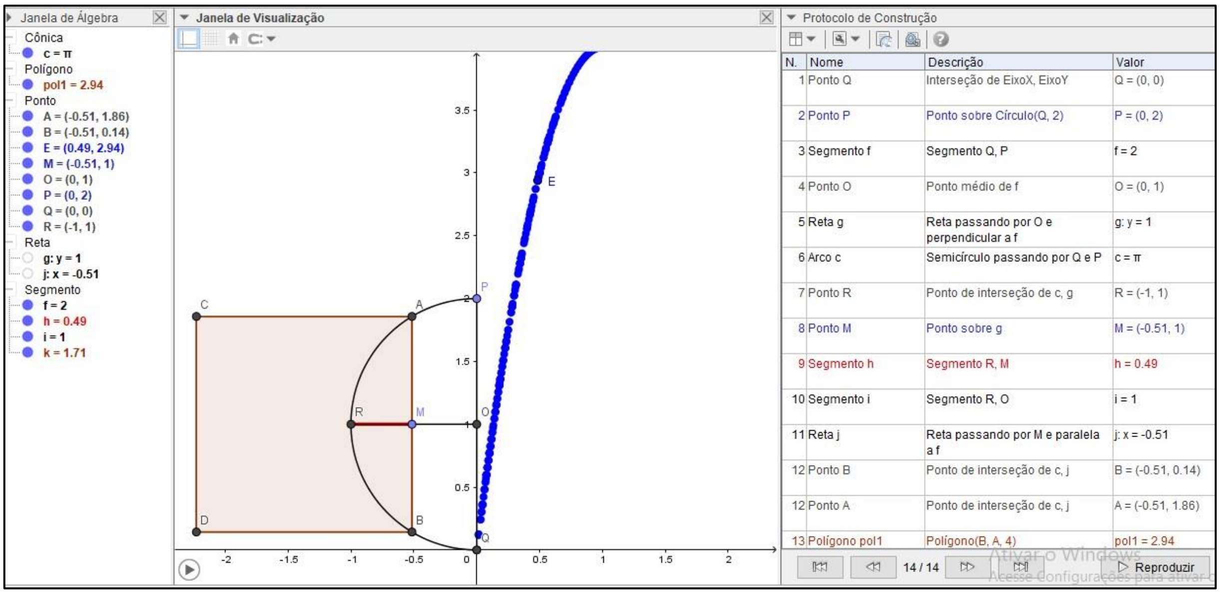
Neste problema observamos que é dado um semicírculo e um quadrado com dois vértices A e B que intersectam o semicírculo. Faz-se um ponto M deslocar-se sobre o raio OR, gerando um segmento de medida RM=*x* e alterando a área *y* do quadrado dado. Pede-se qual gráfico expressa a relação entre *x* e *y*. Vamos acompanhar os passos definidos por A29,

> Construa o segmento PQ renomeado de medida 2 e determine seu ponto médio O / construa uma reta perpendicular PQ passando por O / construa um semicírculo definido por dois pontos clicando em Q depois em P / marque a interseção R do semicírculo e da reta / marque um ponto em objeto sobre a reta perpendicular renomeando como M / construa o segmento RM (h) e RO (i) e oculte e reta perpendicular / construa uma reta paralela a PQ, passando por M / marque as interseções da reta paralela j com o semicírculo e oculte e reta paralela e renomeie como A e B / construa o polígono regular triscando em B e em A / clica em um ponto qualquer sobre a tela e mude as coordenadas para h, pol1 / habilite o rastro / clica com o botão direito e M e usa a ferramenta <animar> para o ponto se mexer sozinho. (A29)

Ao analisar a tela do computador no momento da construção desenvolvida pelo aluno A29 temos pol1=2.94 representando a área do quadrado ABCD e h=0.49 a medida de RM. O ponto E apresenta as coordenadas (0.49, 2.94) que tratam justamente dos pontos em questão. Veja também que temos um protocolo de construção simples, com 14 descrições <interseção,

ponto, segmento, ponto médio, reta perpendicular, semicírculo, reta paralela e polígono>. O aluno A29 usa também uma estratégia interessante que é o do <animar> um ponto, segundo esse estudante "*desse jeito fica melhor que não preciso ficar arrastando o M*". Alguns relatos são bem interessantes; veja, por exemplo, a descrição de A9, "*tive muita dificuldade na hora de fazer a questão dois, mais no final deu tudo certo*". A1 e A16 não concluíram a figura e A25 não fez a questão. Vemos também um índice de acertos significante, 88%. Segue abaixo construção.

Figura 45 - Construção da questão 19 OBMEP 2009 feita por A29.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.9. Oitavo Encontro: iniciando os trabalhos coletivos

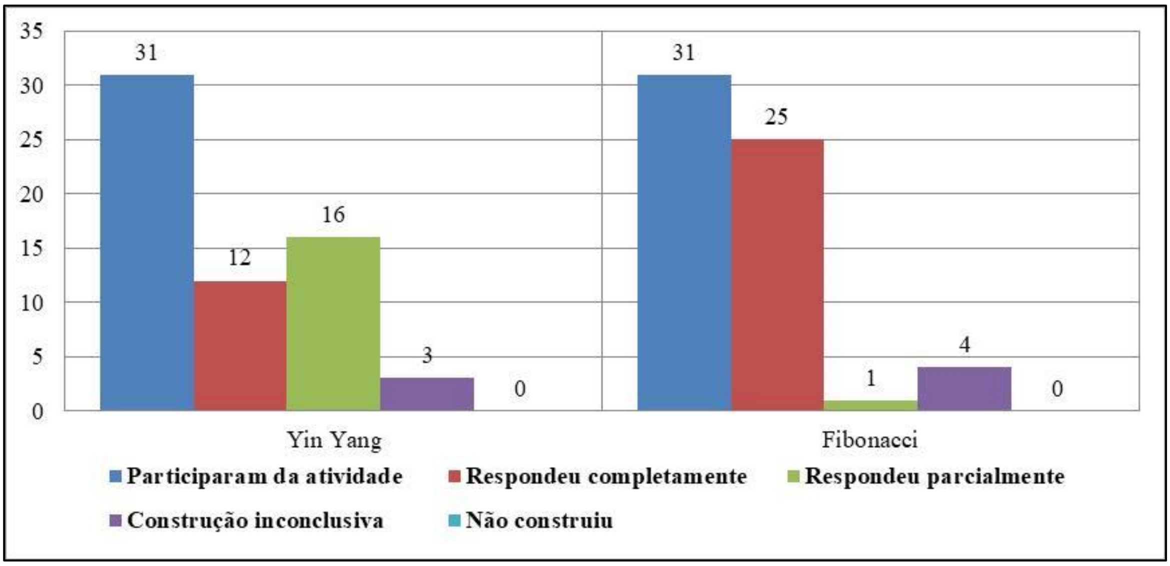
No oitavo encontro realizou-se uma atividade em grupo; os participantes foram divididos em equipes de 4 integrantes (a formação ficou a critério de cada um) que deveriam apresentar a resolução de duas questões que não tinham relação direta com questões da OBMEP, mas que estariam colaborando para as interpretações dos encontros seguintes. A primeira era o símbolo do Yin Yang e a segunda a espiral de Fibonacci construída no retângulo de ouro. Apesar de a discussão ser conjunta, a construção deveria ser individual, visto que cada participante teria sua construção avaliada. Para o encontro a assiduidade foi de 100%; este é um fator positivo, visto que houve ausências nos encontros anteriores que inevitavelmente atrapalharam o desenvolvimento coletivo da pesquisa e que comprovaremos nos resultados do pós-teste.

Para a elaboração do gráfico abaixo, diferente dos anteriores, usou-se a legenda: Participaram da atividade (compareceram ao encontro); respondeu completamente (fez a construção corretamente e analisou de forma coerente a pergunta); respondeu parcialmente; (fez a construção corretamente e não respondeu à pergunta); construção inconclusiva (apresentou erros de construção); não construiu (deixou de apresentar alguma construção).

Vemos que 100% dos participantes apresentaram algum tipo de construção em ambas as questões e claramente os índices apresentados na construção do Yin Yang foram melhores; 90% para Yin Yang e 84% para Fibonacci. Assim, de maneira geral, quase que a totalidade dos participantes tiveram um excelente rendimento no encontro. O detalhe mesmo ficou por conta das duas perguntas. Observe que na questão do Yin Yang tivemos um fato interessante: 39% construíram corretamente e responderam corretamente e 52% construíram corretamente, porém erraram ou não apresentaram a resposta da pergunta. Observem que o processo de construção no *software* já apresenta bons resultados, porém ainda há problemas de interpretação presentes. Nesse ponto a espiral de Fibonacci acaba ganhando, porque apenas A11 construiu corretamente, mas não apresentou a resposta correta.

Essa é uma discussão interessante porque devemos lembrar que no início desta seção falamos que a atividade foi desenvolvida em grupo e ainda assim, tivemos elementos de um mesmo grupo com resultados distintos. Não foi possível identificar nos registros porque esse fato aconteceu.

Gráfico 11 - Índice de rendimento referente às atividades orientadoras do 8º encontro.



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Antes de passarmos para a discussão mais detalhada de cada questão é interessante também comentar o registro abaixo. Nele podemos observar durante as construções, dois PCs que apresentamos em destaque, em que os participantes estão utilizando o Portal da Matemática, que não era objeto de trabalho do oitavo encontro. Questionados os participantes que estavam utilizando o portal, obtivemos a seguinte resposta de A29, "*professor, a gente lembra que nas aulas de geometria o senhor explicou que no portal falava do retângulo de ouro, daí a gente tava dando uma olhada para entender melhor a questão dois*".

É fato que o Portal da Matemática já fazia parte da rotina dos alunos por conta das aulas regulares de Matemática em que sempre eram sugeridos os vídeos do portal para revisões sobre os conteúdos. Foi bastante positiva a decisão de alguns participantes quanto a usar essa referência por conta própria. Para Amaral (2013),

> [...] seguramente que a atuação do professor sempre pode contribuir para a aprendizagem dos alunos. O que nos chama a atenção nesses vídeos é o fato de que neles aparecem discussões matemáticas. Especialmente aqueles embasados em problemas cotidianos, há sempre uma resolução matemática para solucionar o problema em questão. Apenas assisti-los faz do vídeo uma mídia informativa. Mas a partir deles é possível resgatar os problemas com os alunos e retomar a solução matemática, ampliando-a. Muitos dos vídeos apresentam soluções não muito simples de acompanhar na tela, em poucos minutos. Ampliar a resolução matemática do problema é um caminho para aprofundar conceitos matemáticos na sala de aula, transformando a iniciativa do uso do vídeo num processo formativo. (AMARAL, p.42-43)

Figura 46 - Registro da utilização do Portal da Matemática no 8º encontro.

Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

O oitavo encontro também foi marcado por um *pique* de energia que comprometeu o trabalho de muitos dos participantes. Até então não havia acontecido nada do tipo e apesar de já terem sido alertados em outros momentos sobre a necessidade de gravar constantemente em *pendrive* o material produzido, muitos não o fizeram. 68% apresentaram reclamação nos registros nesse sentido, uns com maior gravidade, outros menos. Observem os comentários: A6, A17, A29, A31, "*teve uma falta de energia, mas nós já tínhamos salvado a 1ª questão e como a 2ª estava no começo, foi fácil recomeçar*"; A1, A4, A10, A14, A16, "*pudemos observar que com a falta de energia não só nosso grupo como também os demais grupos perderam todo o trabalho produzido, tendo assim que refazer todas as construções, tendo menos tempo para essa reconstrução*"; A13, A22, A24, A28, "*a queda de energia atrasou o desenvolvimento das questões*"; A3, A11, A12, A19, A20, A25, A27, A30, "*falta de energia atrasou na entrega das resoluções*". Após o episódio do *pique* de energia, todos passaram a se policiar salvando os arquivos constantemente.

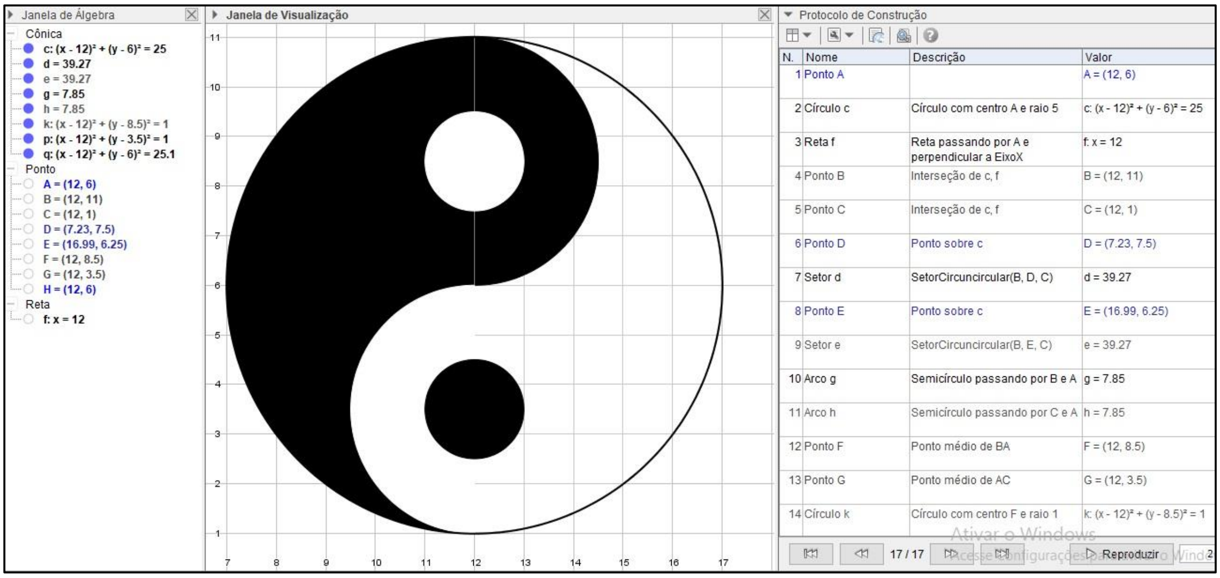
4.9.1. Construção da questão 01 Yin Yang

O símbolo do *Yin Yang* apresenta uma estrutura simétrica em que podemos destacar dois círculos menores, um círculo maior, dois semicírculos maiores de raios idênticos e dois semicírculos menores de raios idênticos. O processo de construção envolve inserir elementos e trabalhar com formatação ocultando alguns já criados. Vamos acompanhar a descrição do grupo formado por A13, A22, A24 e A28,

> Construir um círculo dado centro e raio (5) / reta perpendicular passando por (x, A) / interseção entre a reta perpendicular e o círculo / opção setor circuncircular / colorir os setores circuncirculares / construir os arcos circulares / ponto médio da reta perpendicular (A, B) e (A, C) / círculo dado centro e raio 1 nos dois pontos médios / ocultar o que não interessa (A13; A22; A24; A28).

Podemos observar no processo de construção, círculos de raios 1, 5 e 5.01 e muitos elementos ocultos como pontos e retas. Identificamos também quatro semicírculos *d*, *e*, *g* e *h*. O protocolo de construção foi elaborado com 17 itens <ponto, círculo, reta perpendicular, interseção, setor circuncircular, semicírculo e ponto médio>. O grupo optou em não apresentar o cálculo referente à pergunta usando o GeoGebra, apenas respondeu "*tá na cara que é 50% porque se transferir o círculo preto menor para o círculo branco menor vai ocupar a metade do círculo maior*", raciocínio descrito também por outros grupos. Apenas o grupo formado por A18, A20 e A23, apresentaram o cálculo "*área total igual a 52.49 e área pintada 26,245, logo metade ou 50%*". A2, A3 e A25 apresentaram construções inconclusivas.

Figura 47 - Construção da questão 01 Yin Yang feita por A13, A22, A24 e A28.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.9.2. Construção da questão 02 Espiral de Fibonacci

Na espiral de Fibonacci os participantes deveriam construir um retângulo de ouro e dentro dele, quadrados, todos de dimensões pré-determinadas. Em seguida, deveriam ser construídos arcos em sequência; tal sequência representa a sequência de Fibonacci como discutido. Para melhor compreensão, antes de todos serem deslocados para o laboratório de informática, foi exibido no laboratório de matemática o vídeo <Sequência de Fibonacci e Número de Ouro[29]> de 5:53. Na descrição feita por A6, A17, A29 e A31, temos "*construa polígonos regulares conforme a figura / faça arcos circulares conforme a figura / ocultar o que não interessa / colorir a figura e cônicas / soma os comprimentos dos arcos*". Apesar de uma descrição bem resumida, a ideia do grupo estava correta e coerente. Apresentaram um protocolo de construção com 24 itens entre <ponto, interseção, polígono, segmento e arco circular>. Para determinar o resultado fizeram "*soma c2=3.15, d2=1.57, e2=1.58, p1=32.99, q1=20.41, r1=12.57, s1=7.85, t1=4.7, obtendo 84,82*". Destacamos também um registro do grupo, "*não tivemos muitas dificuldades, só tivemos mais trabalho na montagem da 2ª questão, mas ao final concluímos e tudo deu certo*". De acordo com Silva (2016),

[29] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=QaWepnGWRs8&t=50s. Acesso em: 10/10/17.

> O acesso a outros métodos e estratégias de ensino que vinculem o uso das tecnologias atuais aos conhecimentos específicos das disciplinas, garantem maior diversidade de recursos, promovendo possibilidades de ensino e consequentemente, ampliando o universo de alternativas para a aprendizagem, proporcionando ao aluno um ambiente mais atraente para construção de conhecimentos, seja pelo acréscimo de mais uma ferramenta facilitadora ao processo de ensino e aprendizagem, como também, a utilização pela escola de instrumentos compatíveis com a realidade dessa geração de educandos, uma vez que nós educadores fomos alfabetizados em uma geração onde não existiam recursos tecnológicos digitais e a nossa formação acadêmica inicial ocorreu em meio ao desenvolvimento expressivo da tecnologia computacional, mas, a margem da sua utilização. (SILVA, 2016, p.19-20)

Apenas para efeito comparativo de descrição de procedimentos, observemos as anotações de A18, A20 e A23,

> Na opção <polígono regular> faça um quadrado medindo 21x21 / faça outro quadrado ao lado medindo 5x5 / na mesma opção <polígono regular> faça outro quadrado de lado medindo 8x8 / em cima faça outro quadrado medindo 13x13 / faça as alterações e deixe que nem a figura / na opção (arco circular) clica em B e em C e em seguida em A / na mesma opção (arco circular) faça os arcos circulares nos quadrados que nem na figura (A18; A20; A23).

Observem que tivemos uma descrição bem maior e mais rica em detalhes que a apresentada pelo 1º grupo, porém com a mesma essência de construção. A1, A3, A8 e A25 apresentaram construções inconclusivas.

Figura 48 - Construção da questão 02 Espiral de Fibonacci feita por A6, A17, A29 e A31.

Fonte: Registro do autor, 2017.

4.10. Nono Encontro

Para o nono encontro, cada grupo deveria arbitrariamente selecionar as questões da Obmep que desejassem e proceder à construção. Deveriam acessar à página da Obmep, clicar em <Material Didático> e em seguida <Provas e Soluções>. Selecionar o <ano> da edição, em seguida o <nível>. Definiu-se que as questões deveriam ser da 1ª fase, visto que na 2ª fase as questões não apresentam alternativas e que o mínimo esperado de construções deveria ser de três por participante.

Abaixo segue o quadro com a distribuição das questões selecionadas. Lembramos que o propósito da formação de grupos tinha como objetivo a integração entre os participantes e troca de conhecimento, porém cada construção individualizada deveria ser apresentada.

Quadro 24 - Distribuição das questões da Obmep selecionadas

Partic.	Ano	Nível	Questão	Partic.	Ano	Nível	Questão
A21	2005	1	8	A12, A20	2013	3	7
A12, A14, A20	2005	3	8	A26	2013	3	12
A27	2005	3	14	A31	2013	3	16
A11, A12, A20, A27	2005	3	18	A12, A20	2014	1	3
A13	2006	1	3	A4	2014	1	7
A5, A17	2006	1	8	A12, A20	2014	2	9
A8	2006	2	4	A12, A20, A22, A26	2014	3	16
A8, A13, A28	2006	3	1	A4	2015	1	10
A13	2006	3	4	A15, A21	2015	2	16
A13	2006	3	12	A1, A2, A5, A9, A10, A16, A19, A22, A23, A26, A29, A30, A31	2015	3	4
A1, A2, A6, A10, A16, A23, A24, A28	2007	3	4	A5	2015	3	17
A19, A30	2007	3	10	A5	2016	1	19
A15, A21	2008	1	8	A9	2016	3	1
A16	2008	3	5	A4, A18, A27	2016	3	3
A22	2009	3	9	A14, A19, A30	2016	3	10
A6, A24	2010	3	10	A2, A10, A23	2016	3	12
A1	2010	3	20	A27	2016	3	14
A4	2011	1	11	A6, A7, A8, A9, A11, A24, A29, A31	2017	1	7
A22	2011	3	2	A3	2017	2	13

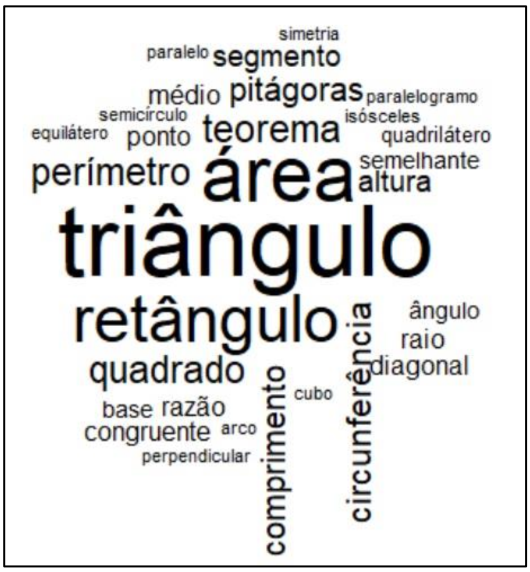
A2, A6, A7, A10, A22, A23, A24, A28	2011	3	16	A7, A14, A17, A18, A22, A27, A28, A29	2017	3	1
A17	2012	2	6	A25	2017	3	4
A26	2012	3	14	A11, A14, A18, A19, A30	2017	3	10
A26	2013	2	7	A19, A30	2017	3	12
A15	2013	3	6				

Fonte: dados da pesquisa, 2017.

Podemos observar pelo quadro acima que determinados grupos de questões foram unanimidades na escolha; foram elas: Q4.N3.2015 (tratava de ponto médio, retângulo, segmento, paralelos, área, triângulo, razão), Q4.N3.2007 (tratava de hexágono regular, diagonal, triângulo equilátero, eixo de simetria, triângulo isósceles, triângulos congruentes, base, altura), Q16.N3.2011 (área, retângulo, triângulo retângulo, base, altura, simetria, teorema de Tales, segmentos congruentes, vértice), Q7.N1.2017 (quadrado, triângulo, ponto médio, área) e Q1.N3.2017 (triângulos congruentes, área). As demais apareceram no máximo cinco vezes.

Na figura abaixo, apresentamos a nuvem de palavras que resumem bem os entes matemáticos presentes nas questões. Utilizamos o software IRaMuTeQ para gerar a figura. Nela vemos com muita ênfase os entes matemáticos triângulo, área, retângulo em destaque e os demais aparecendo em menor quantidade. Das 260 ocorrências de palavras, triângulo aparece em 12%, área em 9%, retângulo 8%. As demais representam menos de 4% da frequência, mas ainda assim não menos importantes.

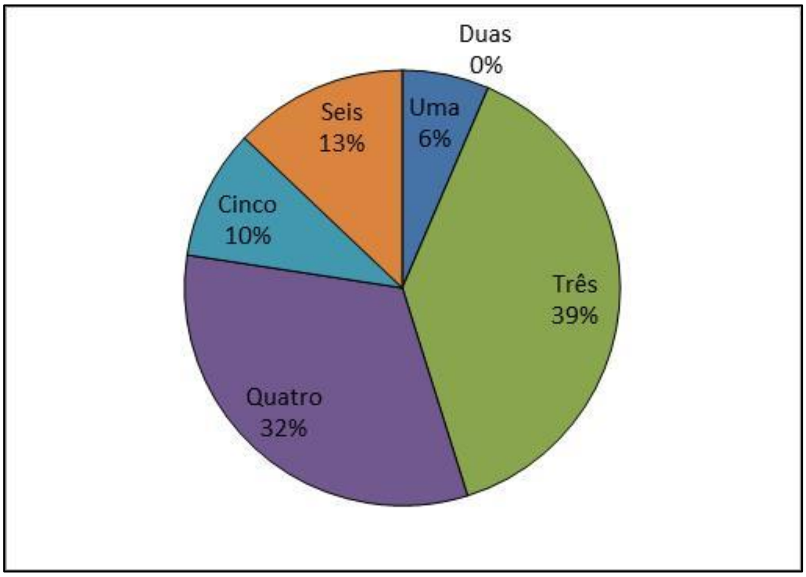
Figura 49 - Nuvem de palavras com os entes matemáticos presentes nas questões.



Fonte: dados da pesquisa, 2017.

Os participantes também não se limitaram apenas a questões do nível 3; pudemos observar construções envolvendo níveis 1 e 2. Das 116 construções analisadas, 17% optaram pelo nível 1, 7% pelo nível 2 e 76% nível 3. Outro fator também que merece destaque está relacionado ao número de questões analisadas. Pelo gráfico abaixo observamos que 94% fizeram três questões ou mais, dentro do esperado, com destaque para os estudantes A1, A2, A5, A9, A10, A16, A19, A22, A23, A26, A29, A30, A31 que fizeram seis construções. Não podemos deixar de citar A3 e A25 que apresentaram apenas uma construção.

Gráfico 12 - Quantidade de questões apresentadas.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

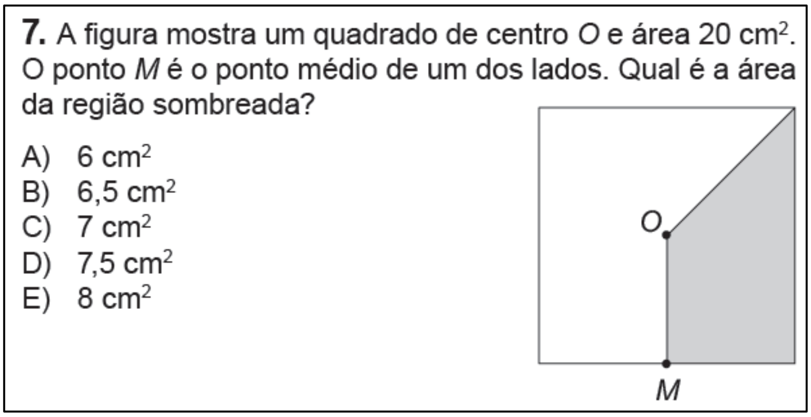
Podemos destacar que a atividade foi bastante divertida e com muita interação. Não tivemos problemas de energia nem de acesso à internet. Os arquivos em *pdf* das provas anteriores obtidas na página da OBMEP carregaram sem nenhum problema e muito material foi produzido conforme quadro acima.

Para Silva (2016),

> [...] o GeoGebra é um software facilitador para aprendizagem, auxiliando na localização de pontos no sistema cartesiano, na representação escrita das coordenadas cartesianas, na construção de segmentos, na análise de suas medidas com dados já calculados ou verificação da posição do segmento em relação aos eixos, na representação do ponto médio de um segmento identificando suas coordenadas e agilizando a construção das medianas de um triângulo e a localização do baricentro. Assim o caracterizamos, como recurso favorável a aprendizagem por possibilitar a visualização, construção, reconstrução, movimentação, reflexão sobre a ação e durante a ação sendo mais um recurso que o educador poderá agregar a outros para ser utilizado em sua prática. (SILVA, 2016, p.154)

A fim de continuar seguindo a linha de análise dos encontros anteriores vamos apresentar a construção apenas da Q7.N1.2017 feita por A7.

Figura 50 - Questão 7, nível 1, ano 2017.



7. A figura mostra um quadrado de centro *O* e área 20 cm². O ponto *M* é o ponto médio de um dos lados. Qual é a área da região sombreada?

A) 6 cm²
B) 6,5 cm²
C) 7 cm²
D) 7,5 cm²
E) 8 cm²

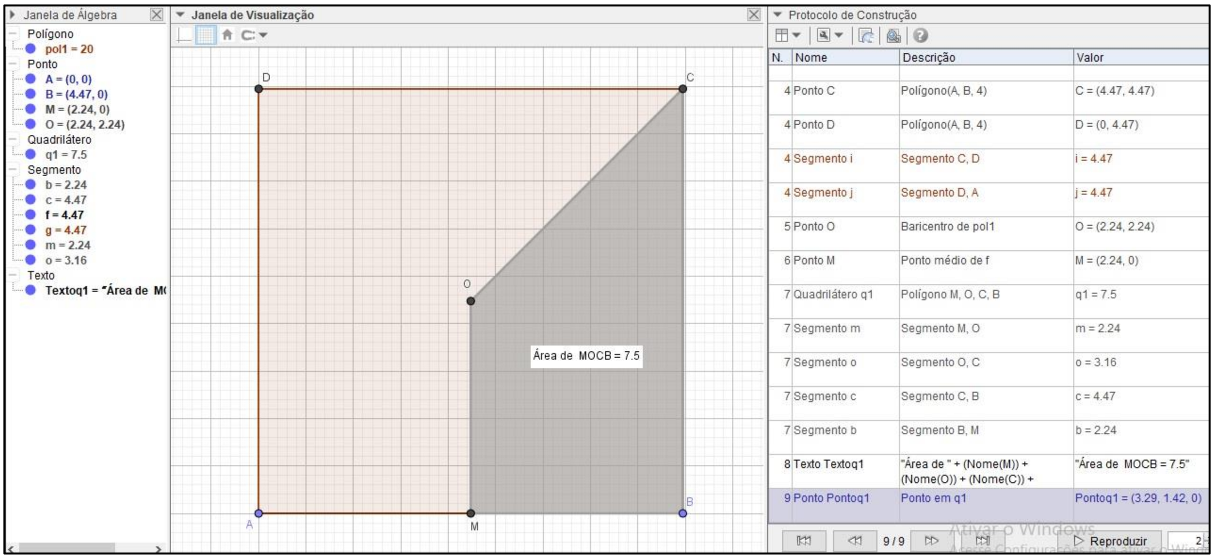
Fonte: Banco de provas anteriores da OBMEP, 2017.

A questão apresentava um quadrado de área 20 cm^2 com um ponto O, central e um ponto M médio de um dos lados. Um trapézio era destacado na figura e pedia-se a área desse trapézio. A7 definiu as seguintes etapas,

> Constrói um segmento de comprimento fixo digitando sqrt(20), isso vai dar o lado do quadrado que é a raiz de 20 / usando a ferramenta <polígono regular> constrói o quadrado / usando a ferramenta <ponto médio ou centro> clica dentro do polígono para marcar o centro e no lado de baixo para marcar o ponto médio / o geogebra vai chamar de E e F, então renomeia para O e M / usa <polígono> e clica em MOCBM para fazer a figura cinza / a resposta será q1=7.5. (A7)

Observamos um ótimo desenvolvimento, com destaque para o comando *sqrt(20)* que vai dar a raiz quadrada de 20 e consequentemente o lado do quadrado; o que vemos na maioria dos casos são construções em que arrastam um ponto e fazem um *20* de área aproximado. A figura também apresenta um protocolo de construção bem simples, com apenas 9 entradas <ponto, segmento, polígono, centro, ponto médio e área>.

Figura 51 - Construção da Q7.N1.2017 feita por A7.



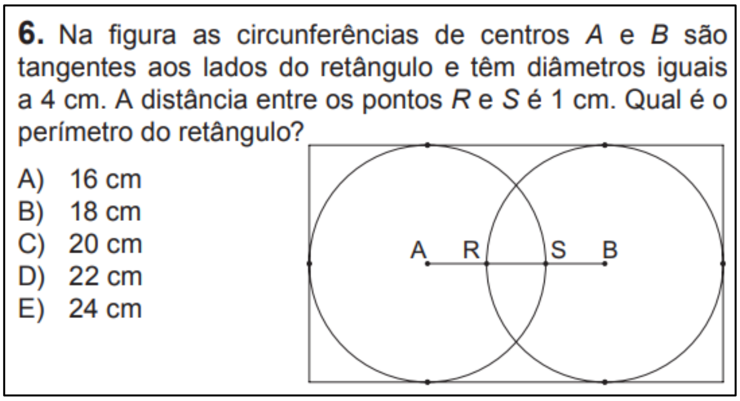
Fonte: Registro do autor, 2017.

4.11. Décimo Encontro

O décimo encontro não estava previsto na proposta inicial deste projeto; por conta dos baixos resultados nos encontros (4º e 6º) em que foram utilizadas estruturas circulares nas construções, fez necessária a elaboração de mais um encontro (antes da aplicação do pós-teste no último encontro) para tentar sanar ou minimizar tais problemas.

Destacamos também que no 9º encontro, quando os participantes tiveram a liberdade de escolher a questão Obmep que iriam construir, os dados apresentados na seção 4.9 mostram essa presença em apenas 21% das construções; observamos então certa “fuga” às mesmas, apesar de ser evidente que aparecem em menor quantidade em todas as provas anteriores da Obmep. Foram definidas então as questões 10 (2007), 14 (2005) e 08 (2009), disponíveis no apêndice J; nas três, a ênfase eram construções envolvendo arcos, setores circulares, círculos e semicírculos, além de outros elementos. Definiu-se como atividade inicial, a construção e análise de Q6.N2.2010, visto que não fora escolhida por nenhum participante no 9º encontro, não estava presente em nenhuma atividade orientadora e possuía estruturas circulares.

Figura 52 - Questão 06, nível 02 OBMEP 2010.

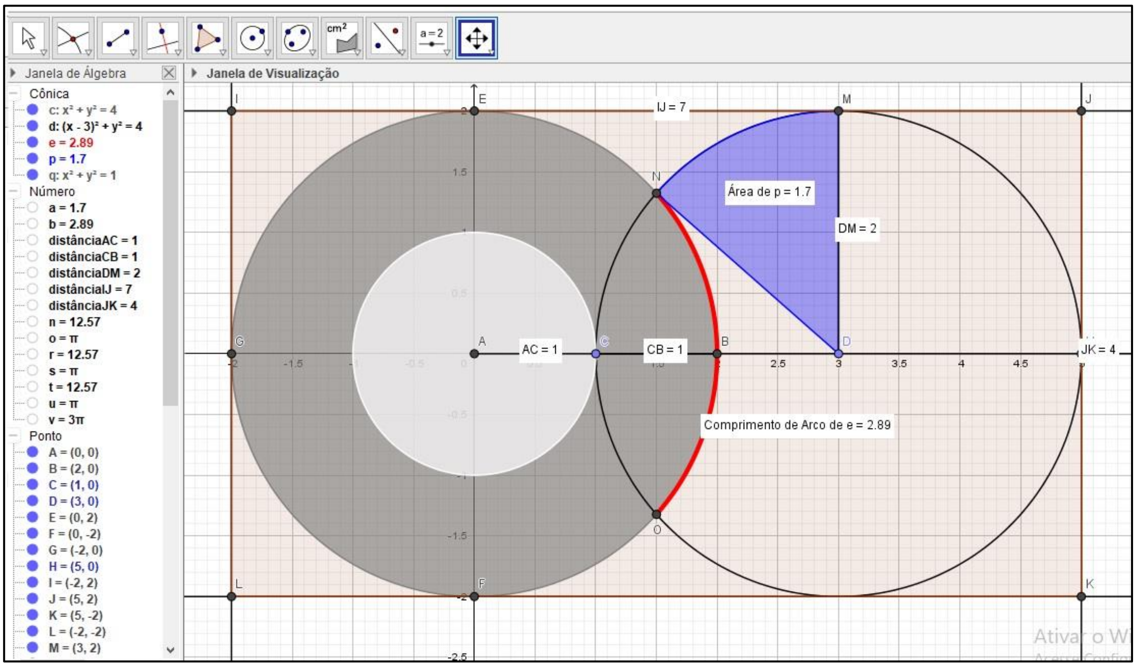

6. Na figura as circunferências de centros *A* e *B* são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos *R* e *S* é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?

A) 16 cm
B) 18 cm
C) 20 cm
D) 22 cm
E) 24 cm

Fonte: Banco de questões da OBMEP, 2017.

Tal construção ficou sob a responsabilidade do pesquisador que ia discutindo o passo a passo com a participação de todos. A questão apresentava um retângulo e dois círculos secantes e tangentes ao retângulo; algumas medidas eram dadas e pedia-se o perímetro do retângulo. A fim de explorar melhor a questão, outras perguntas foram solicitas: a) Qual o comprimento do arco NBO; b) Qual a área do setor circular MDN; c) Construindo um círculo de raio AC, qual será a área da coroa circular determinada pelos círculos de raios AC e AB.

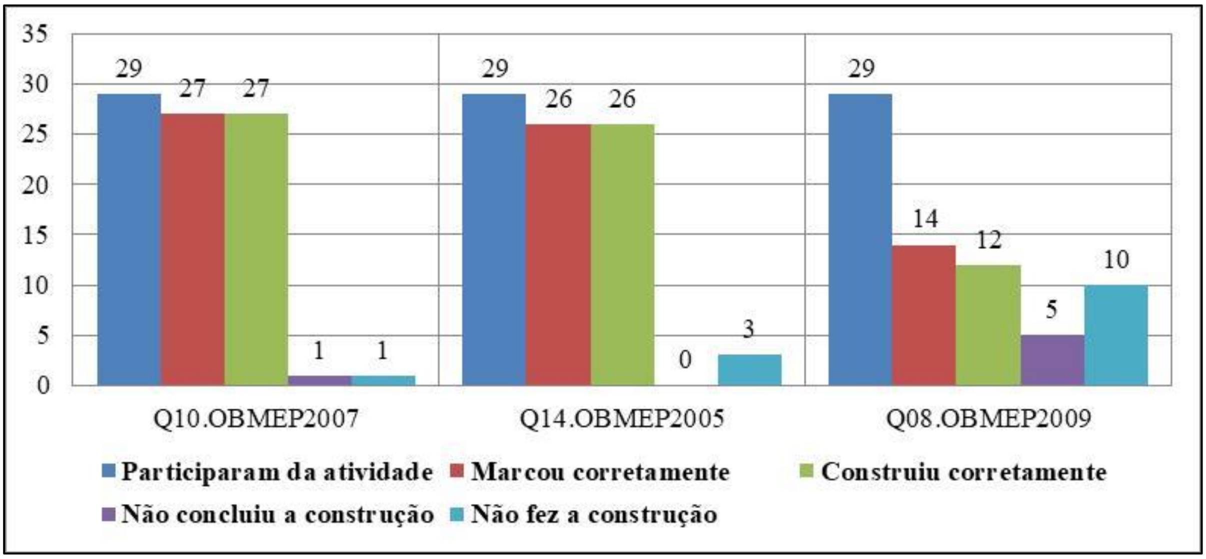
Figura 53 - Construção da questão 06, nível 02 OBMEP 2010 feita pelo pesquisador em conjunto com os participantes.



Fonte: Registro do autor, 2017.

Na figura acima observamos as medidas IJ=7 e JK=4, logo o perímetro pedido será 7+7+4+4=22 cm, portanto letra D. A letra (a) no GeoGebra está representada pelo arco NBO em vermelho que mede e=2.89, a letra (b) no GeoGebra está representada pelo setor azul p=1.7 e a letra (c) no GeoGebra está representada por v=3π (coroa circular em cinza) que vem da diferença entre r=12.57 (área do círculo de raio 2) e s=π (área do círculo de raio 1). Durante essa primeira atividade não se observou dúvidas quanto ao processo de construção e a participação do grupo foi muito boa. Em seguida, partimos para o laboratório de informática para trabalhar a construção das três questões. Abaixo estaremos apresentando o gráfico com os índices de rendimento das construções e, em seguida, estaremos discutindo cada construção de forma mais detalhada.

Gráfico 13 - Índice de rendimento referente às atividades orientadoras do 10º encontro.



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

O gráfico acima deixa bastante claro que o desempenho do grupo foi expressivo, salvo em Q08. Tivemos um aproveitamento de 93% em Q10 e 90% em Q14, já em Q8 esse índice foi de apenas 41%. Observa-se que em Q8 dois participantes marcaram corretamente, mas apresentaram erros na construção, 17% não concluíram a construção e 34% sequer a fizeram. Já em Q10, apenas um participante não concluiu a questão e outro não a fez. Em Q14, 10% não fizeram a questão. Faltaram ao encontro A5 e A14. Pelos resultados, consideramos que o encontro foi bem proveitoso e acreditamos que os participantes se encontram bem mais preparados para a aplicação do pós-teste no último encontro em seguida.

4.11.1. Construção da questão 10 OBMEP 2007

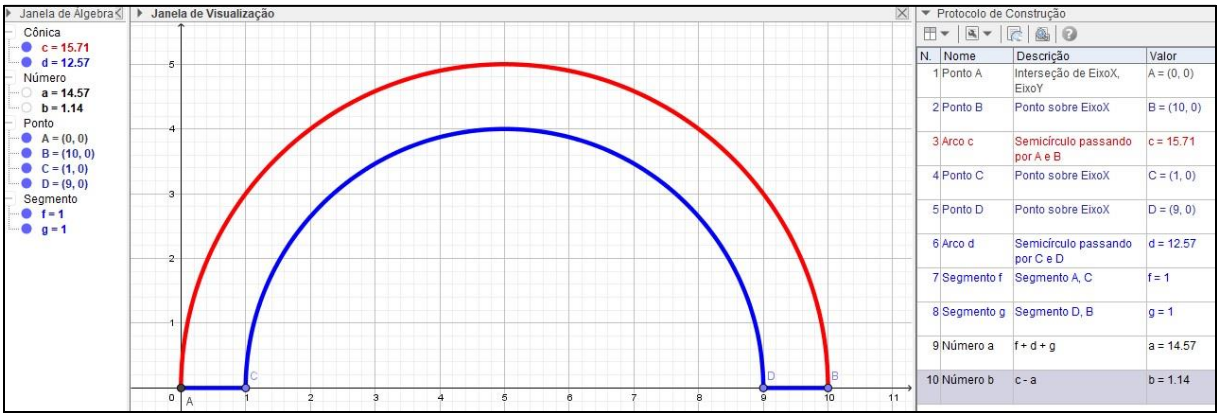
A questão apresenta dois percursos, um de formato completamente circular e outro com um trecho semicircular e dois retilíneos de mesmo tamanho. Dois corpos saindo do mesmo ponto vão se deslocar sobre os trechos; pergunta-se quantos centímetros uma andou a menos que a outra. Vamos acompanhar a construção de A28,

> Crie pontos A e B, C e D ambos de distância 1 / com a opção semicírculo, crie os mesmos de A até D e outro de B até C / use os dados da janela de álgebra e faça os cálculos / resultado 1.14 letra D, pi menos 2. (A28)

Percebam que se trata de uma construção bem simples e que como já dito acima, não apresentou grandes dificuldades para grande parte do grupo, apenas o estudante A19 não concluiu a construção e o aluno A25 não a fez, apenas citou que "*sabia que ia usar ponto, segmento e arco circular*", mas que "*não estava lembrando como fazer*". Na figura abaixo vemos a construção feita por A28 obtendo como resultado 1.14 que corresponde ao valor aproximado $\pi - 2$, veja que A28 ainda destaca os caminhos em vermelho e azul para "*diferenciá-los melhor*", segundo ele.

Na janela de álgebra do GeoGebra vemos c=15.71 em vermelho representando o comprimento do arco maior e a=14.57 representando a soma de AC com BD, ambos iguais a 1 e d=12.57 (arco menor), em seguida é feita a operação b=c-a resultando em b=1.14. Observem também que o raio do semicírculo maior não era um valor a ser considerada fixo, tanto que analisando as outras construções corretas, pudemos detectar raios distintos e resultados finais corretos, o que mostra que o raio do círculo maior poderia ser qualquer valor. O protocolo de construção indica apenas 10 descrições e foram utilizadas as ferramentas <ponto, semicírculo e segmento> o que de fato a torna bem simples que confirmarmos tantos com índices do gráfico acima como nos depoimentos dos estudantes A7, "*consegui responder às duas primeiras e acho o geogebra muito interessante, tá me ajudando muito*" e A23, "*as duas primeiras questões consegui fazer a achar o resultado facilmente*", que inclusive já citam a questão seguinte. Apenas dois participantes tiveram problemas, A19 que não concluiu a construção e A25 que nem a fez.

Figura 54 - Construção da questão 10 OBMEP 2007 feita por A28.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.11.2. Construção da questão 14 OBMEP 2005

A questão apresentava uma pista de corrida com duas partes curvas (semicírculos) e duas partes retilíneas de medida C. Eram dados cinco valores para C e a questão procurava determinar para qual valor de C a soma dos comprimentos dos trechos retos era mais próxima da soma dos comprimentos dos trechos semicirculares. No caso os participantes tinham duas opções: ou faziam cinco construções com cada valor de C dado ou utilizariam a opção <controle deslizante>. Felizmente nenhum seguiu a opção mais trabalhosa. Apresentamos a seguir os passos descritos por A4,

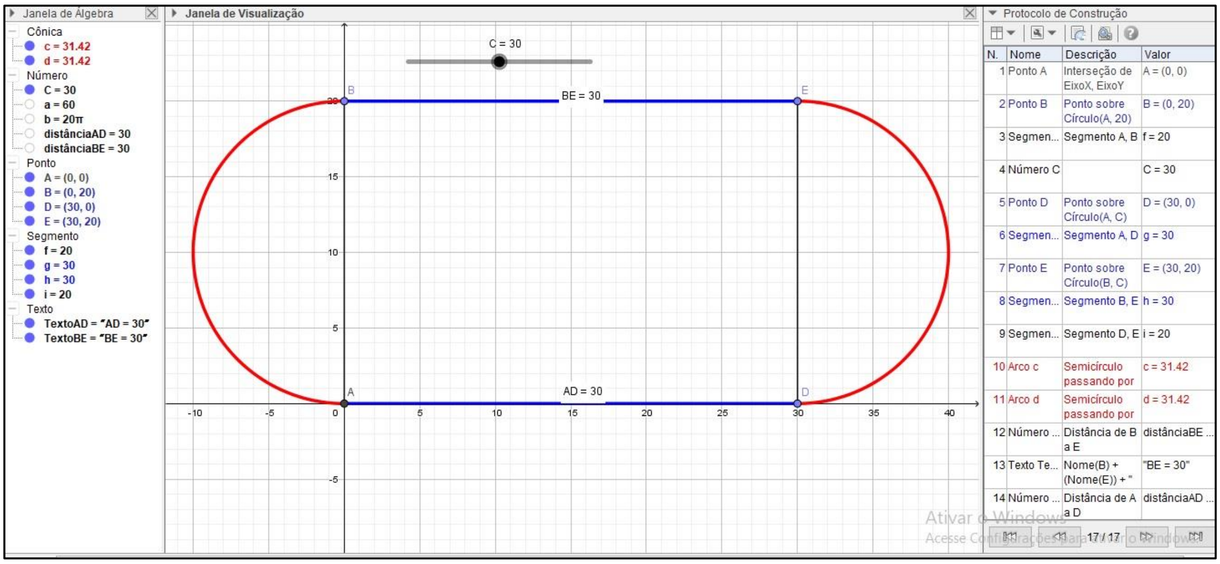
> Construa um segmento AB de comprimento fixo igual a 20 e gire 90º até que B fique sobre o eixo y / habilite a ferramenta <controle deslizante> dando o nome de C com valor mínimo 20, máximo 40 e incremento 5 / cria dois segmentos de comprimento fixo iguais a C, um começando em A e o outro em B / constrói o segmento DE e os dois semicírculos / faz aparecer as medidas de BE e AD e formata / soma g com h dando a e soma c com d dando b / compara os resultados de a e b quando move C e a gente vê que eles ficam mais próximos quando C é igual a 30 porque a dá 60 e b dá 62,8 aproximadamente (A4).

Observe que com a opção <controle deslizante> é possível variar C e já conferir a nova configuração da construção, tornando o processo bem mais simples do que construir cinco figuras. O protocolo de construção possui um pouco mais de descrições com relação à questão anterior, 17 no total entre <ponto, interseção, segmento, semicírculo e distâncias> e apenas A1, A25 e A30 não apresentaram construções. A29, "*não estava compreendendo a 2ª questão, mas resolvi*", cita dificuldades, mas consegue concluir corretamente.

> [...]o professor precisa deixar de ser o repassador de conhecimento e passar a ser criador de ambientes de aprendizagem e o facilitador do processo de desenvolvimento intelectual do aluno”. Nesse contexto, cabe ao professor buscar conhecimentos que possam ser utilizados como recursos auxiliadores, que favoreçam positivamente as suas aulas, tornando-o mediador no processo ensino aprendizagem. (SILVA, 2016, p.45)

Segue abaixo construção feita por A4.

Figura 55 - Construção da questão 14 OBMEP 2005 feita por A4.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.11.3. Construção da questão 08 OBMEP 2009

A última questão do encontro tratava de dois quadrados ABCD e AMPN com um vértice comum A e dois setores circulares de mesmo centro, também em A. O ponto P representava a interseção entre o arco maior e a diagonal do quadrado maior. Havia uma região pintada entre os dois setores. A questão queria que fosse determinada a razão entre a área desse setor e a área do quadrado ABCD. Observe o desenvolvimento de A18,

> Usando <polígono regular> construa um quadrado ABCD (pol1) / ferramenta <segmento> constrói a diagonal AC do quadrado ABCD / constrói o arco ABD e marca a interseção P do arco com a diagonal / usando <reta perpendicular> faz uma perpendicular a AB e passando por P / marca a interseção M entre AB e a perpendicular / usando <polígono regular> construa um quadrado AMPN (pol2) / construa dois setores circular, um de centro em A e arco MN (será o r) e outro de centro em A e arco BD (será o e) / formate para destacar apenas o que interessa / subtraia e=32.78 de r=16.39 para obter a=16.39 que será a área da região pintada de vermelho / agora faça a=16.39 dividido por pol1=41.73 que é a razão pedida / vai dar b=0.39 que é equivalente a pi sobre 8, logo letra E. (A18)

O aluno A18 apresenta uma construção dentro do esperado e executou todas as etapas com muito rigor matemático. Veja também que o protocolo de construção é composto de 15 descrições bem distribuídas <ponto, interseção, polígono, segmento, semirreta, arco circular, reta perpendicular e setor circular> o que mostra que a questão de fato necessitava de muitas ferramentas do GeoGebra.

Os outros 11 participantes que tiveram a questão validada seguiram a mesma linha de raciocínio de A18. Veja por exemplo a fala de A29, "*usei a opção de tentar fazer a última questão e consegui com facilidade*" que mostra que de fato alguns participantes não tiveram dificuldades e de A4, "*todas as atividade foram ótimas menos a última que foi mais complicada*", A18, "*quase não acho a resposta última, mas enfim consegui*", A23, "*na última questão quase não consegui fazer, mas consegui, nem sei se fiz certo*" e A20, "*bastante dificuldade em fazer a construção da última questão*", que apesar de também citarem dificuldades, conseguem concluir corretamente.

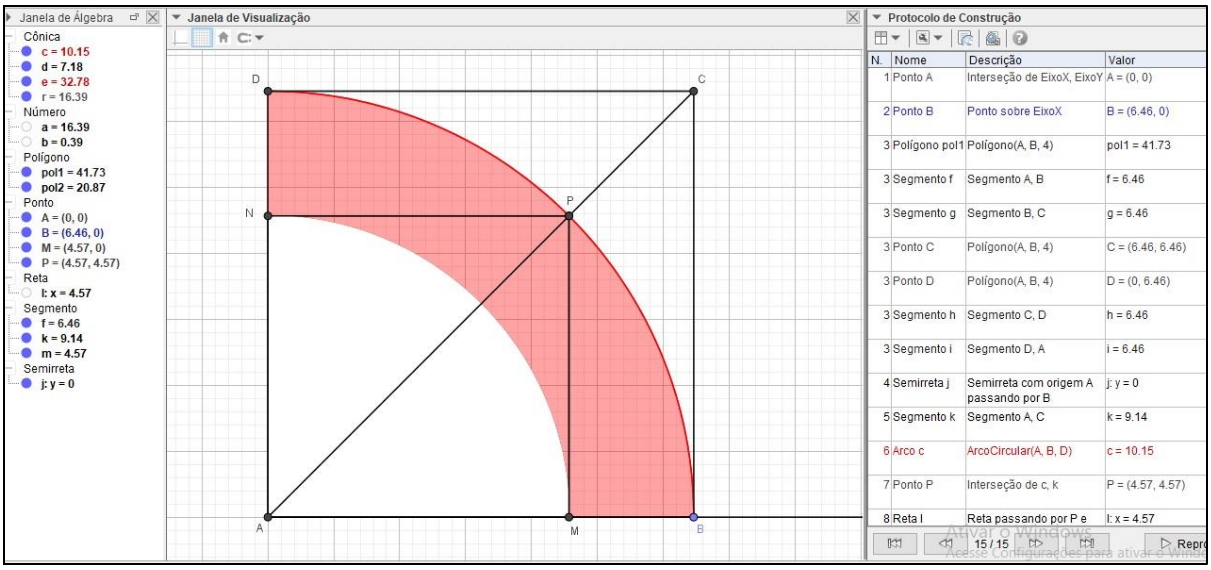
Já os estudantes, A8 e A31 marcaram corretamente, mas não tiveram a questão validada, pois não determinaram corretamente o ponto P; como o mesmo era um ponto de interseção não deveria se mover e no momento que a questão era conferida, era possível movimentar o ponto P. Observe os depoimentos de A8,

> Primeiro que mexer em um programa como o geogebra não é nada fácil, a cada etapa do projeto as perguntas vão se tornando mais complexas, principalmente essa última que mexeu muito com o meu psicológico" e A31, "nem sempre consigo achar o valor, principalmente essa 3ª. (A8)

Os mesmos tratam da dificuldade na questão e não conseguem concluir a construção. O mesmo vale para A2, A3, A24, A26, A27 que também são inconclusivos. Na fala de A3, "*tô sentindo dificuldade na última*", a dificuldade na questão continua sendo observada. A1, A7, A9, A11, A15, A16, A19, A21, A25, A30 sequer apresentaram alguma construção. Acompanhe alguns posicionamentos,

> Tive muita dificuldade na última questão. (A7)
>
> Não consegui responder certo à última questão, não foi nada fácil, tive muita dificuldade no começo, mais com a ajuda de meus colegas e com o meu esforço consegui aprender pelo menos 5%. (A9)
>
> Tive dificuldades em terminar essa última questão porque não consegui traçar do ponto G para o H e não sabia fazer com que ele fizesse uma curva, fui na opção <arco circular> mas não deu certo. (A11)
>
> Tive dificuldade em mover a figura. (A19)
>
> Grande dificuldade em fazer as duas últimas. (A30)

Figura 56 - Construção da questão 08 OBMEP 2009 feita por A18.



Fonte: Registro do autor, 2017.

4.12. Pós-teste

A aplicação do pós-teste (Apêndice K) ocorreu no dia 06 de novembro de 2017 às 14h com a participação dos 31 alunos que aceitaram participar do projeto. Teve duração de cinco aulas de 50min e foi aplicado no laboratório de informática 02 do Colégio Técnico de Floriano, sendo fiscalizado pelo pesquisador e pela técnica de informática escalada para tal, bem como para dar suporte técnico, caso necessário. Adiantamos que nenhum problema de natureza técnica foi registrado, nem queda de energia, nem travamento do *software*.

Antes da entrega do pós-teste, os participantes foram informados que estariam analisando as mesmas questões que deram início ao projeto no pré-teste, só que agora utilizariam o *software* GeoGebra como ferramenta de análise e interpretação. A validação seguiria os mesmos critérios adotados durante os encontros e as construções seriam estritamente individuais, sem consulta a demais colegas, monitores ou pesquisador. A cada questão interpretada deveriam salvar em *pendrive* o arquivo com o nome Q1.2005, por exemplo, para indicar a questão 01 da prova de 2005 e assim, sucessivamente; ao final todos os *pendrives* seriam recolhidos. Lembramos que durante os encontros, tal procedimento já era executado e todos os *pendrives* já estavam nomeados.

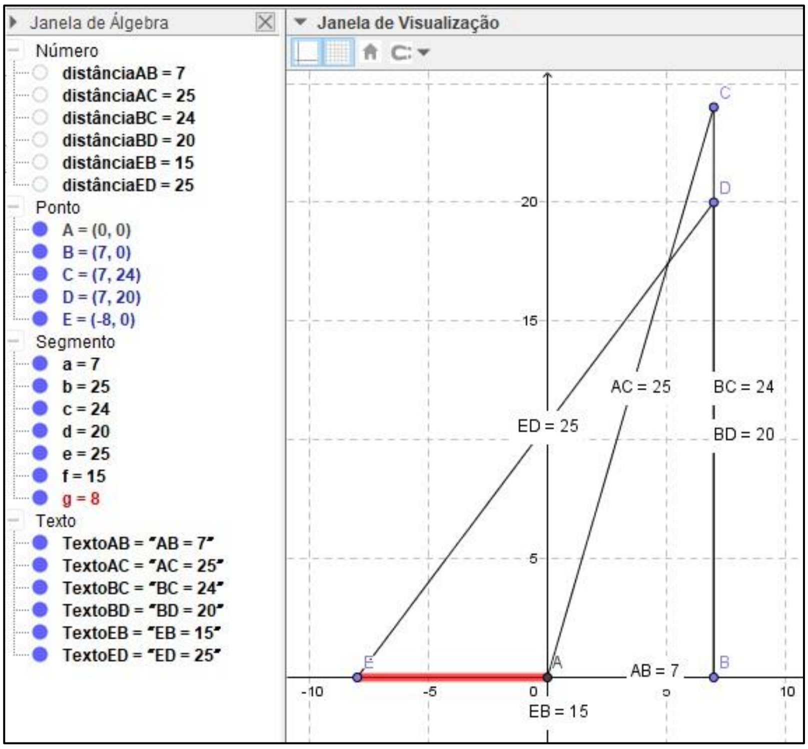
A seguir apresentaremos as construções das questões e as transcrições dos textos e falas presentes nos arquivos do pós-teste entregue pelos participantes. A fim de evitar repetições, sempre que estivermos nos referindo a alguma questão do pós-teste discutidas nas seções 4.12.1 a 4.12.13, estaremos nos referindo ao Apêndice K.

Nas seções 4.13 e 4.14, estaremos apresentando considerações gerais sobre o pós-teste, principalmente no que se refere ao comparativo dos resultados do pré-teste e pós-teste, bem como a fala dos participantes sobre a visão geral da aplicação do projeto, além dos resultados obtidos na aplicação do questionário.

4.12.1. Questão 01 do pós-teste (A6)

Utilizando a ferramenta <ponto> marcou o ponto A = (0, 0) na origem do sistema de coordenadas / marcou sobre o eixo x o ponto B = (7, 0) / usando a ferramenta <segmento> uniu os pontos A e B, obtendo a = 7 / marcou o ponto C = (7, 24) / criou o segmento AC, com b=25 / criou o segmento BC, com c = 24 / marcou a distância de AB, obtendo AB=7 / marcou a distância de AC, obtendo AC=25 / marcou a distância de BC, obtendo BC=24 / marcou um ponto D = (7, 20) sobre o segmento BC / mediu BD, obtendo d =20 / marcou a distância de BD, obtendo BD=20 / marcou sobre o eixo x o ponto E=(-8, 0) / uniu D com E, obtendo e=25 / uniu B com E, obtendo f=15 / marcou a distância BE, obtendo BE=15 / subtraiu AB de EB, obtendo g=15-7=8, destacado em vermelho. O protocolo de construção apresenta 24 entradas <ponto, interseção, segmento e distância> e apenas 35% dos participantes construíram e interpretaram corretamente; foram eles A4, A6, A10, A13, A16, A17, A22, A24, A29, A30 e A31. Observe que apesar da questão apresentar o uso de apenas quatro ferramentas principais, o índice de aproveitamento foi abaixo de 50%. O aluno A1 coloca "*quando a escada escorregou não entendi o que a questão pedia, até consegui fazer a primeira parte do desenho, mas depois não soube continuar*".

Figura 57 - Resolução da questão 01 do pós-teste pelo participante A6.

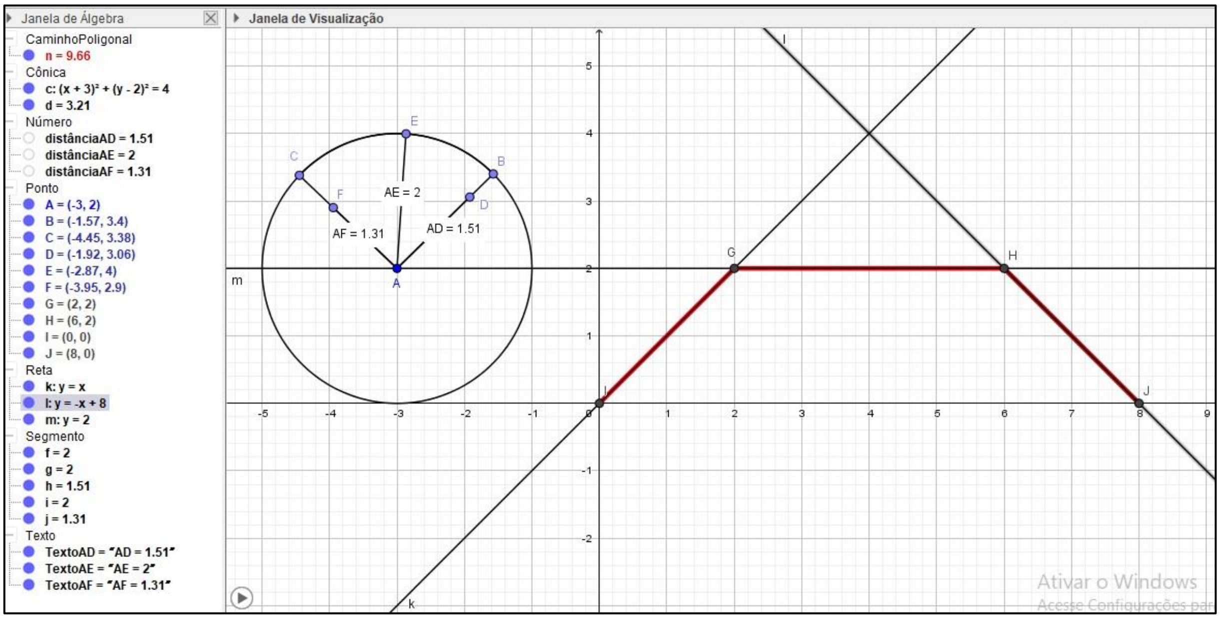


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.2. Questão 02 do pós-teste (A5)

Utilizando a ferramenta <círculo dado centro e raio> cria um círculo de raio qualquer, no caso raio igual a 2 / marca os raios AB, AE e AC / ferramenta <arco> constrói o arco de centro em A e curva BC / ferramenta <ponto sobre objeto> marca D sobre AB, F sobre AC e E sobre o arco BC / faz aparecer as distâncias e faz variar D, E e F e fica observando o que acontece com relação ao centro A / observei que AD vai de zero até 2, não passa disso, que E o valor não varia e que AF faz é diminuir de dois para zero / então fiz y=x representando AD, y=2 representando AE e y=-x+8 representando AF e destaquei em vermelho o setor do gráfico correspondente. A5 utilizou uma estratégia de resolução segmentada, já que não analisou a formiguinha se deslocando sobre o setor circular, o que não invalida sua interpretação. Observe que o raio 2, escolhido, foi meramente aleatório, já que não influenciara a interpretação e trabalhou em cima de comportamentos de reta (crescente no primeiro trecho, constante no segundo e decrescente no terceiro trecho), trata-se do grupo de questões que envolvem o movimento de corpo sobre uma figura gerando um gráfico. O índice de aproveitamento de Q2 ficou em 45% onde A5, A6, A7, A8, A9, A10, A12, A14, A16, A17, A18, A20, A21 e A26, concluíram a questão corretamente. Destaque para a fala de A5 quando coloca "*não tem como ser as letras C, D e E porque no segundo trecho não há variação da distância da formiguinha ao centro*".

Figura 58 - Resolução da questão 02 do pós-teste pelo participante A5.

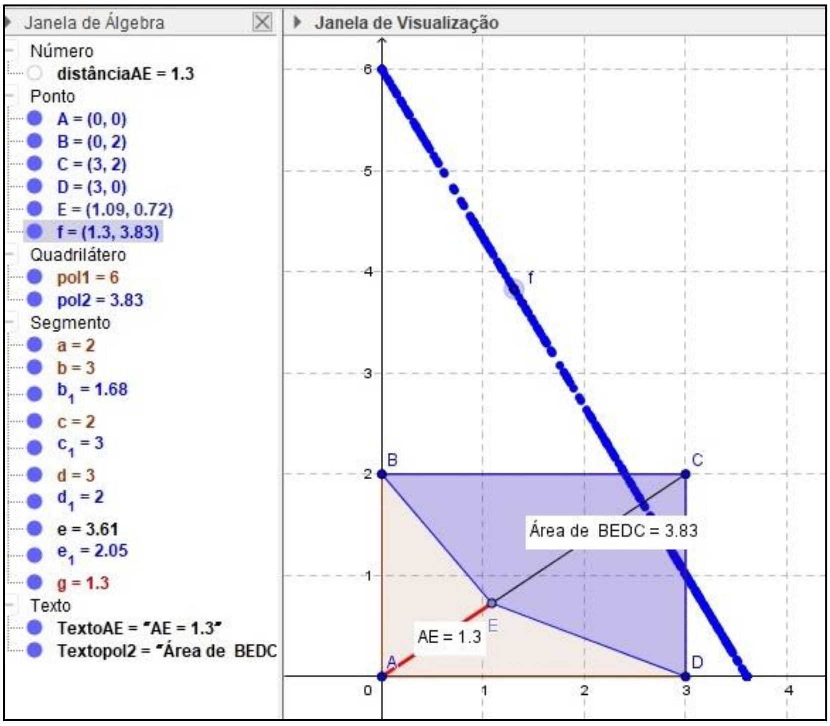


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.3. Questão 03 do pós-teste (A7)

Ferramenta <polígono> constrói um retângulo ABCD de dimensões 3 por 2 / marca a diagonal AC / ferramenta <ponto sobre objeto> marca um ponto E sobre a diagonal AC / constrói o polígono BCDE / ferramenta distância dá o valor de AE=1.3 / ferramenta área dá o valor da área do polígono azul, vai ficar BEDC=3.83 / marca um ponto f sobre a tela e muda as coordenadas para (g, pol2), onde g é medida AE e pol2 a área do polígono azul / habilita o rastro de f, movimenta E e marca o gráfico que ficar determinado pelo rastro azul. Assim como em Q2, Q3 também envolvia movimentação de ponto gerando gráfico. A7 assim como 42% dos demais participantes (A5, A6, A8, A9, A12, A15, A17, A21, A22, A24, A29, A30), utilizou corretamente todas as ferramentas necessárias à construção e facilmente observaram uma função afim decrescente. A7 coloca que "*tinha certeza que quando o x aumenta a área azul tende a diminuir então já havia descartado as letras A e D*". O protocolo de construção apresenta <ponto, segmento, polígono, distância e área> e para analisar o comportamento gráfico a ferramenta <habilitar rastro> foi acionada.

Figura 59 - Resolução da questão 03 do pós-teste pelo participante A7.

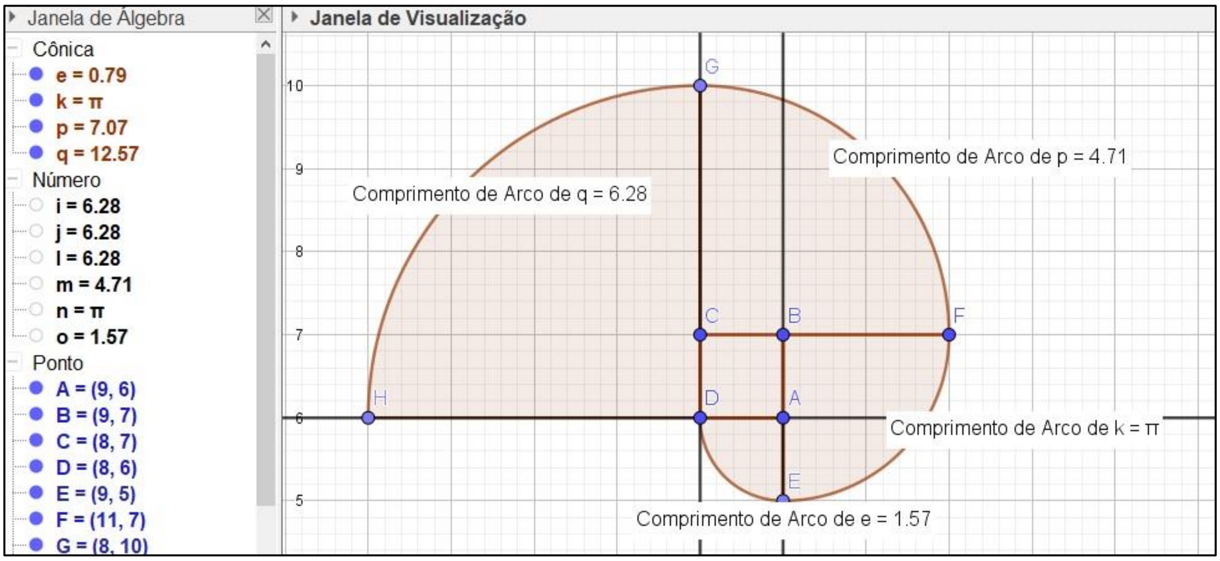


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.4. Questão 04 do pós-teste (A16)

Ferramenta <polígono regular> constrói um quadrado ABCD de lado 1 / constrói um arco DE de centro em A e determina sua medida e=1.57 / constrói um arco EF de centro em B e determina sua medida k=π / constrói um arco FG de centro em C e determina sua medida p=4.71 / constrói um arco GH de centro em D e determina sua medida q=6.28 / ao final soma os quatro valores obtendo 15,7 ou 5π. Observe que Q4 apresenta um processo de construção relativamente simples, com protocolo tendo <ponto, polígono regular, semirretas e arcos> e o índice de aproveitamento ficou em torno de 75%, valor bem alto se comparado às três anteriores. Como observado em muitas outras construções, a questão pedia uma determinada soma durante o processo e, apesar do GeoGebra possibilitar essa soma direto do software, não pôde ser observado tal comando nas construções analisadas. A16 questionado quanto a isso coloca "*como eu já sou acostumado a usar minha calculadora, prefiro fazer direto nela mesmo*". Esperava-se que os participantes utilizassem o <campo de entrada> e digitassem "*=e+k+p+q*"; o GeoGebra iria então pegar os valores desses arcos e somar apresentando na janela de álgebra o resultado. Claro que o procedimento não interfere em nenhum momento o raciocínio principal que seria o de construção e interpretação. Não concluíram ou nem chegaram a construir a questão, os participantes A1, A2, A4, A15, A19, A21 e A31.

Figura 60 - Resolução da questão 04 do pós-teste pelo participante A16.

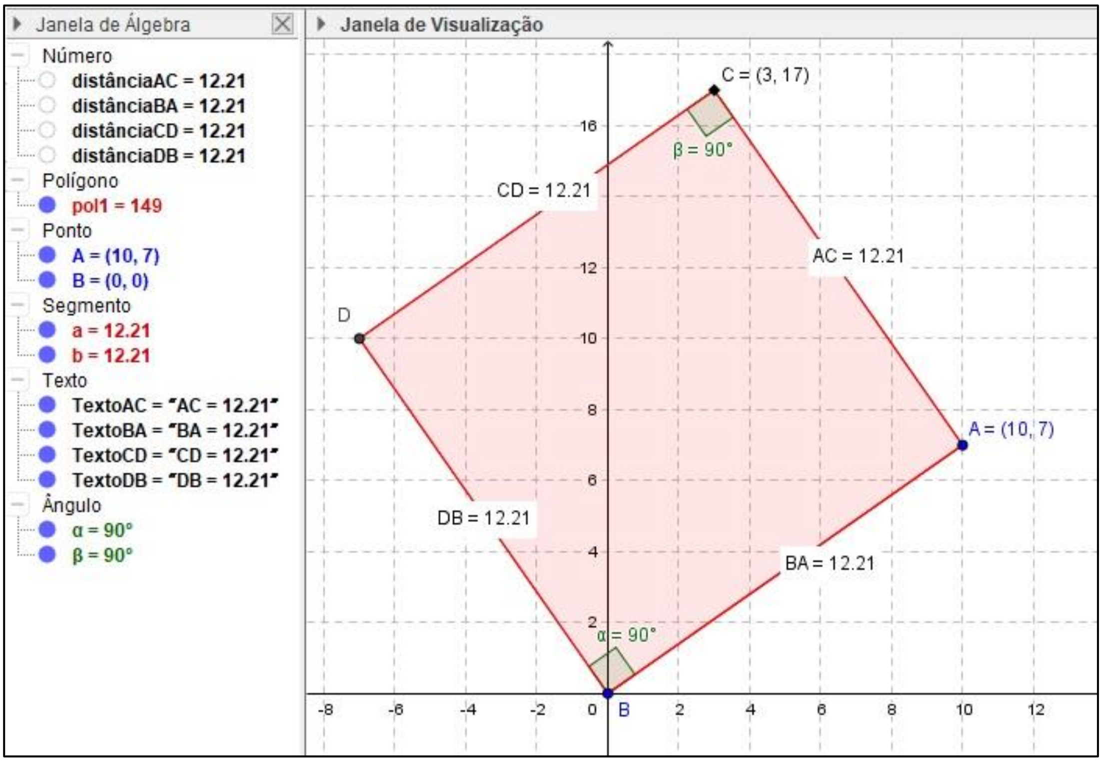


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.5. Questão 05 do pós-teste (A23)

Marca um ponto A=(10, 7) e B=(0, 0) / ferramenta <polígono regular> constrói um quadrado de lado AB / faz aparecer as medidas dos lados o dos ângulos do quadrado / como C=(3, 17) daí é só somar 3+17=20. Observe que o raciocínio descrito por A23 é bem completo e direto. O mesmo teve o cuidado em fazer aparecer as medidas dos lados e ângulos do quadrado, segundo ele "*para garantir que o polígono era um quadrado mesmo*". Observe na janela de álgebra que A23, assim como A16 na questão anterior, também não usa o <campo de entrada> para digitar a soma das coordenadas de C. A23 também observa que "*como pol1 tá dando 149, isso quer dizer que a área do quadrado é 149, então tem sentido a medida do lado ser 12.21; fiz aqui na calculadora a raiz quadrada de 149 e deu isso mesmo aproximado*". O índice de aproveitamento foi de 65% e não concluíram ou nem chegaram a construir a questão, os participantes A1, A3, A4, A10, A19, A21, A25, A26, A29, A30 e A31.

Figura 61 - Resolução da questão 05 do pós-teste pelo participante A23.

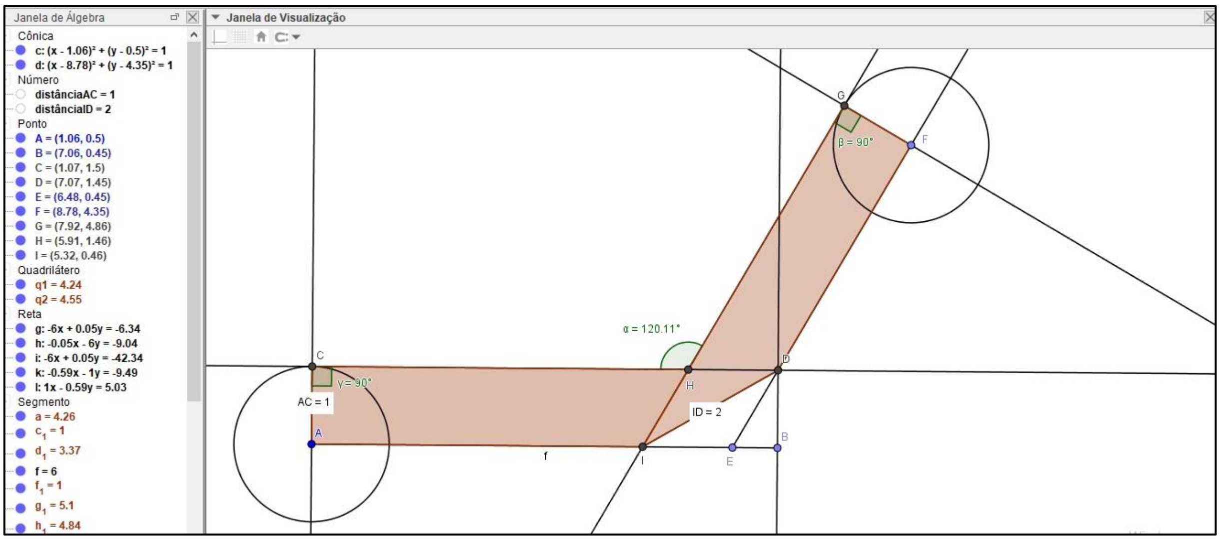


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.6. Questão 06 do pós-teste (A20)

Marque um ponto A sobre a tela / construa um segmento AB de comprimento fixo igual a 6 / trace duas perpendiculares a AB, uma passando por A e a outra por B / construa um círculo de centro em A e raio 1 / marque a interseção C entre o círculo e a perpendicular que passa por A / construa uma perpendicular a AC passando por C / marque o ponto D de interseção entre as duas perpendiculares / marque um ponto E sobre o lado AB e trace uma semirreta ED / marque um ponto F sobre essa semirreta e construa uma perpendicular a ela / trace um círculo de centro em F e raio 1 / marque a interseção G entre a nova perpendicular e o novo círculo / trace uma paralela e EF passando por G / marque as interseções H e I / determine a medida do ângulo alfa CHG / determine a medida do segmento ID / mova o ponto E até que ID seja igual a 2 / observe o valor de alfa. A20 apresenta um processo de construção extremamente elaborado, visto que Q6 pode ser considerada uma questão que exigia muitas etapas. Temos aqui um protocolo envolvendo <ponto, círculo, segmento, reta perpendicular, reta paralela, ângulo, distância, polígono e semirreta>. A20 coloca que usou a estratégia do círculo "*para garantir que a largura fosse sempre 1 porque quando fiz de outro jeito o valor alterava*". O índice de aproveitamento ficou em torno de 48% e tiveram a questão validada também os participantes A2, A4, A5, A7, A9, A11, A13, A16, A18, A20, A23, A26, A27, A29 e A31.

Figura 62 - Resolução da questão 06 do pós-teste pelo participante A20.

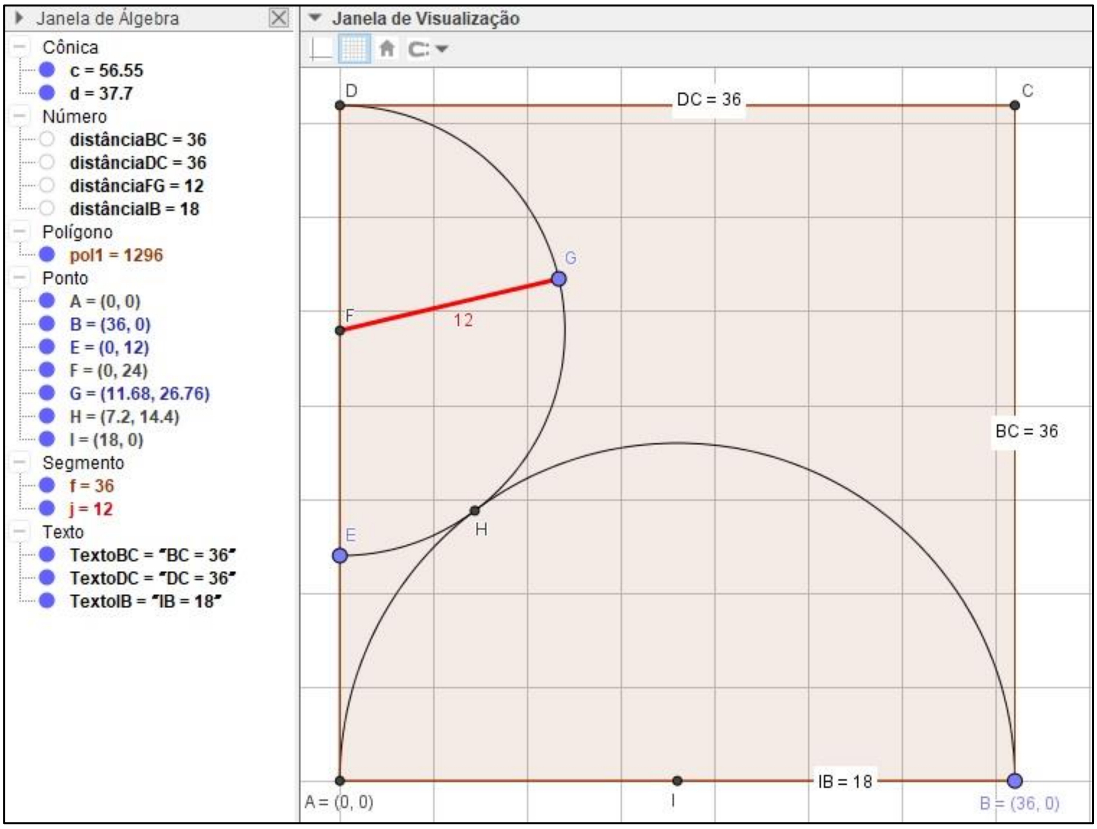


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.7. Questão 07 do pós-teste (A26)

Marca o ponto A=(0, 0) e o ponto B =(36, 0) / ferramenta <polígono regular> constrói o quadrado de lado AB / faz um semicírculo passando por A e B / marca um ponto E sobre o lado AD / faz um semicírculo passando por D e E / marca o ponto médio F de DE / marca um ponto G sobre o arco DGE e determina a distância FG / faz a interseção H entre os dois arcos / marca as distâncias. Os passos descritos por A26, em termos de construção, estavam dentro do esperado, apenas pelo fato de ter "*decidido*" que a coordenada de E deveria ser (0,12). Quando questionado essa decisão o mesmo coloca "*eu fiz o semicírculo menor cinco vezes e o ponto de tangência H com o semicírculo maior só aparecia quando o raio menor era 12, daí conclui que ele era a resposta*". Pela fala vemos que A26 usou as alternativas para proceder à construção, fato que geralmente era combatido, mas que não era proibido. Outras construções apresentaram aproximações do valor 12, mas também validadas. Tanto em Q7 como em Q10 que veremos à frente, tiverem os maiores índices de aproveitamento, em torno de 87%. Apenas os participantes A3, A16, A25 e A29 não apresentaram construção.

Figura 63 - Resolução da questão 07 do pós-teste pelo participante A26.

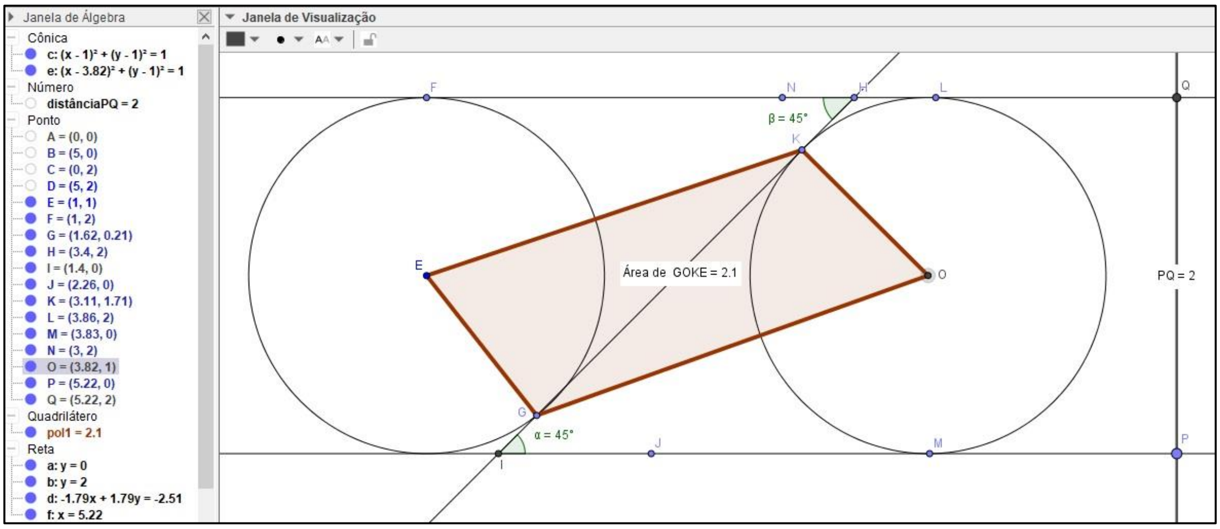


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.8. Questão 08 do pós-teste (A18)

Construa uma reta a:y=0 / marque um ponto P sobre ela <ponto em objeto> / construa uma perpendicular a y=0 passando por P <reta perpendicular> / marque um ponto Q sobre a perpendicular distante 2 de P / construa uma perpendicular b:y=2 passando por Q / construa o segmento LM e marque seu ponto O médio <ponto médio> / faça também o ponto médio E e construa os dois círculos de raio 1 / construa o ponto H sobre y=2 e faça passar sobre ele uma reta com ângulo de 45º / marque o ângulo de 45º embaixo também / ative a ferramenta <interseção> e selecione a reta inclinada e os dois círculos / vá movimento a reta inclinada e os círculos até que apareçam os pontos tangentes G e K / construa o quadrilátero GOKE <polígono> / determine a área do quadrilátero / vai dar GOKE=2.1, aproximadamente 2. A base de construção de Q8 seguia uma sequência bem definida de etapas, conforme descritas por A18. O mesmo decidiu por começar pela reta horizontal inferior, partir para a perpendicular e daí garantir os valores médios para só aí construir os círculos e a reta transversal. Decidiu também não fixar o ângulo de 45º e usar movimentação de um ponto para chegar nele e consequentemente à área do polígono. Apenas 42% apresentaram ideia similar, foram eles, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A13, A14, A18, A22, A23, A26 e A28. Os demais não chegaram a construir a figura. Podemos até considerar que essa foi a questão "*mais abandonada*", em termos de construção. A13 coloca "*na hora que eu vi essa questão eu desisti logo porque já sabia que ia dar trabalho, fui logo nas mais fáceis e acabou não dando mais tempo*".

Figura 64 - Resolução da questão 08 do pós-teste pelo participante A18.

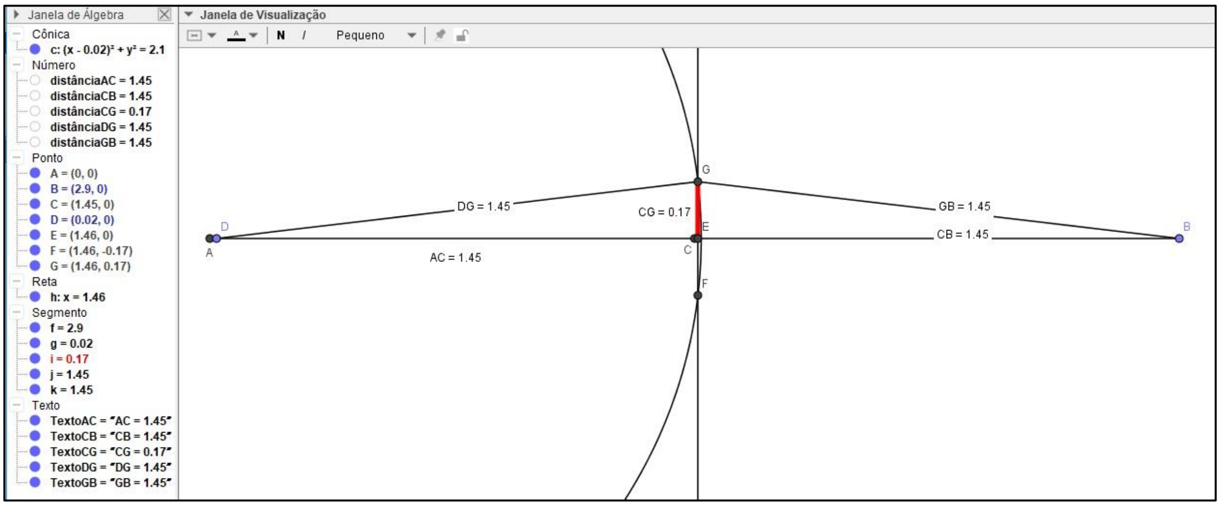


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.9. Questão 09 do pós-teste (A4)

Construa um segmento AB de comprimento fixo igual a 2.9 e marque seu ponto médio C / trace um segmento AD de comprimento fixo 0.02 / trace a mediatriz BD e marque a interseção E / trace um círculo de centro em D e raio 1.45 / marque a interseção G entre a mediatriz e o círculo e construa o segmento GE e dê sua medida 0.17. Q9 merece duas considerações: a primeira é que o processo de construção necessita de um *zoom* bem maior do que as outras exigiram. Veja que os pontos D e A, assim como C e E aparecem bem próximos, visto que a distância de D a A deveria ser de apenas 0.02, isso visualmente torna a construção não muito apresentável, mas nada que impedisse alguns participantes de construí-la; o segundo ponto está que Q9 foi a que obteve o menor índice de rendimento, ficando apenas com 9%, apenas A4, A18 e A27 tiveram a questão validada. Um dos maiores erros encontrados foi que muitas construções usaram 2 ao invés de 0.02 visto que esqueceram de transformar centímetro para metro; outra grande parte sequer construiu. O processo de construção era bem simples com apenas os protocolos <segmento e mediatriz> presentes e como a maioria não chegou a construí-la não é possível identificar a dificuldade presente em Q9. O depoimento de A19 resume bem a fala da maioria que não chegou a essa construção, "*professor não fiz esse porque quando recebi o teste procurei selecionar as que eu achava mais fáceis para fazer, conforme o senhor já tinha nos orientado, daí não consegui fazer todas e esse foi uma das que não fiz*".

Figura 65 - Resolução da questão 09 do pós-teste pelo participante A4.

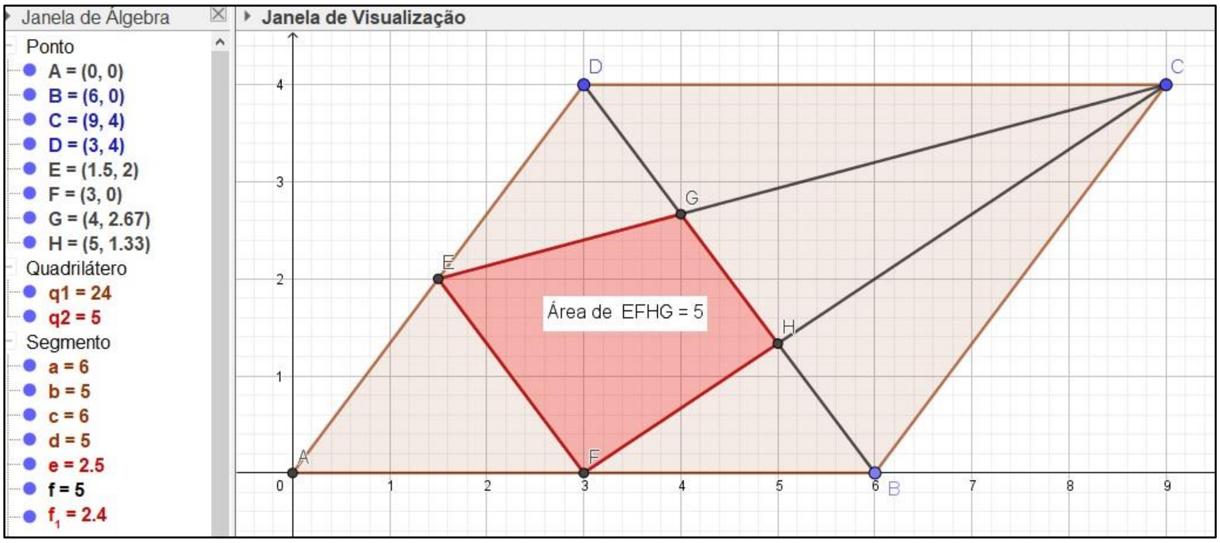


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.10. Questão 10 do pós-teste (A24)

Com a ferramenta <polígono> constrói um quadrilátero ABCD de base 6 e altura 4, logo área q1=24 / marca o ponto F médio de AB e o ponto E médio de AD / constrói os segmentos CF, CE e BD / marca as interseções G e H dos segmentos CF e CE com BD / constrói o polígono EFHG e determina sua área q2=5. Veja que A24 decide iniciar por um quadrilátero com base 6 e altura 4, apenas com o objetivo "*de encontrar a área igual a 24, se fosse 12 por 2 também daria certo, mas com as dimensões que escolhi ficou mais parecido com a pergunta*". Como já dito anteriormente, tanto Q10 quanto Q7 apresentaram os maiores índices de construção, girando em torno de 87%. Aqui o protocolo usou apenas <polígono, ponto médio, segmento e área> e a construção era relativamente simples. No início do encontro percebemos que a maioria dos participantes optou por começar por Q10, A24 coloca, "*como nos encontros anteriores a gente já tinha feito várias parecidas, tinha certeza que essa seria bem rápida, daí fiz ela logo*", já A8, "*fiz primeiro todas que não tinham curvas na questão, ainda tenho receio em construções com curvas, mas não tanta dificuldade*". Essas falas são muito presentes na maioria das outras considerações. Apenas A3, A16, A25 e A29 não concluíram a construção, sendo que A3 e A25 não chegaram a fazê-la. O polígono ABCD construído por A25 e A29 não tinha área igual a 24.

Figura 66 - Resolução da questão 10 do pós-teste pelo participante A24.

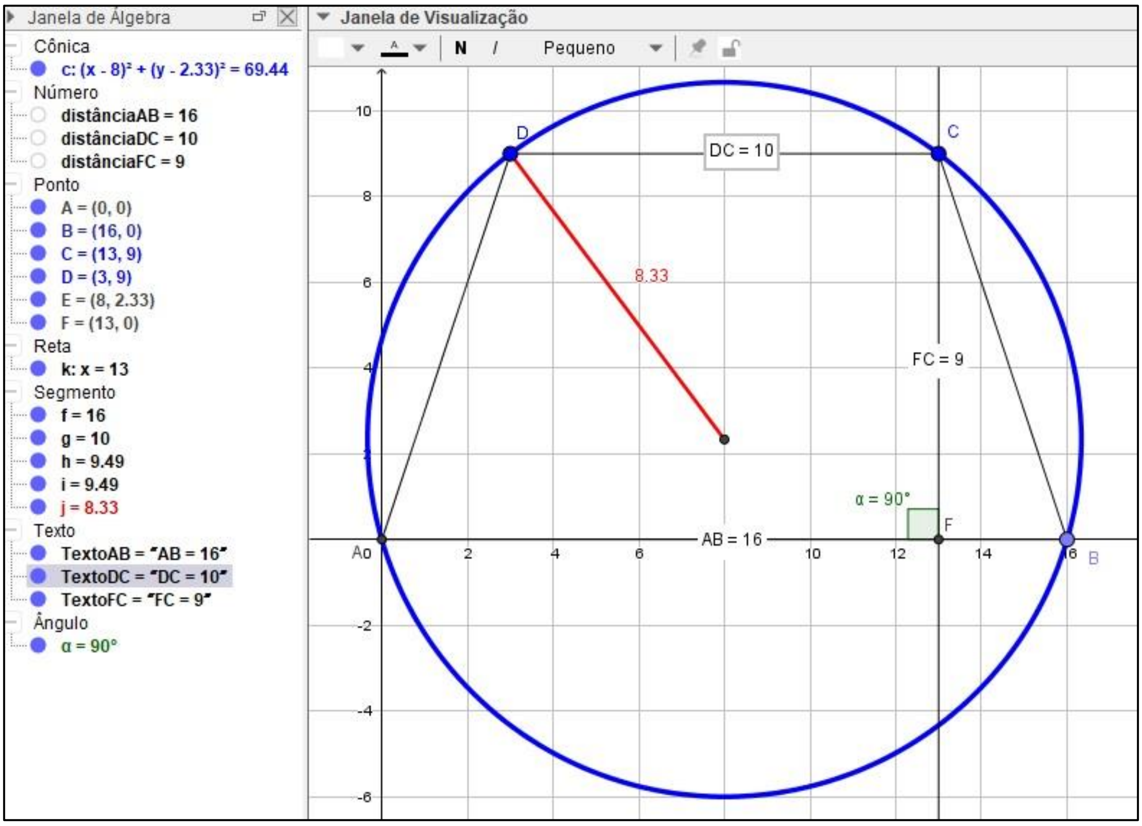


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.11. Questão 11 do pós-teste (A12)

Marque os pontos A = (0, 0), B = (16, 0), C = (13, 9) e D = (3, 9) / usando a ferramenta <círculo definido por 3 pontos> clique em B, C e D / use a opção <ponto médio ou centro> e clique no círculo que irá aparecer o centro / trace o segmento em vermelho que será o raio j=8.33 ou 25/3 / a perpendicular FC é só para garantir que a altura é 9. A construção de A12 reflete bem o observado em 32% dos outros 25 participantes que a fizeram; observe que o processo de construção do trapézio isósceles foi feita marcando os pontos A, B, C e D de forma que as medidas 16, 10 e 9, dadas na questão fossem respeitadas. Já para os 68% restantes, priorizaram garantir as medidas 16, 10 e 9 para só então fazer o trapézio. Claro que ambos os raciocínios estão corretos e isso só mostra o quanto o GeoGebra disponibiliza *n* maneiras de desenvolvimento de construções. Q11 também foi uma questão em que o índice de rendimento foi bem alto, ficando em torno de 84%. A1, A10, A24, A25 e A30 não validaram a questão; apesar de todos terem feito a construção, esses não respeitaram as medidas dadas no problema.

Figura 67 - Resolução da questão 11 do pós-teste pelo participante A12.

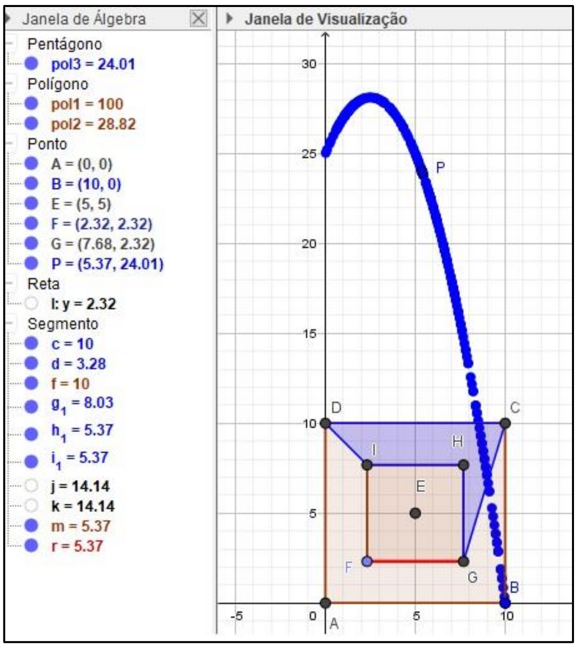


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.12. Questão 12 do pós-teste (A9)

Constrói um quadrado ABCD <polígono regular> de lado medindo 10 / traça os segmentos AC e BD que irão representar as diagonais / marca a interseção E das diagonais / crie um <ponto em objeto> F sobre a diagonal AC / trace uma perpendicular ao eixo y passando por F / marque a interseção G da diagonal BD com a perpendicular / com a opção <polígono regular> clique em F e em seguida em G / oculte a reta perpendicular e as diagonais / crie o polígono DIHGC / crie o segmento FG / coloque um ponto P qualquer sobre a tela e altere as coordenadas para (r, pol3) e habilite o rastro / mova F e observe o caminho descrito por P. Tanto Q3 quanto Q12 apresentavam a mesma linha de raciocínio, só que agora o comportamento gráfico identificado foi uma parábola com curvatura voltada para baixo; foram etapas de construção bem similares e A9 acertou a ambas. Interessante destacar que apesar da semelhança na construção, tivemos participantes que acertaram uma, mas erraram a outra: A1, A2, A10, A11, A16, A27 e A31, acertaram Q12, mas erraram Q3; já A17, A22, A29 e A30 acertaram Q3 e erraram Q12. Realmente um comportamento de resultados bem peculiar. 52% dos participantes validaram Q12; não validaram: A3, A4, A13, A14, A17, A18, A19, A20, A22, A23, A25, A26, A28, A29 e A30. Aqui destacamos que 35% dos participantes não validaram nem Q3 nem Q12, o que mostra ainda dificuldades em construções que envolvam interpretações gráficas.

Figura 68 - Resolução da questão 12 do pós-teste pelo participante A9.

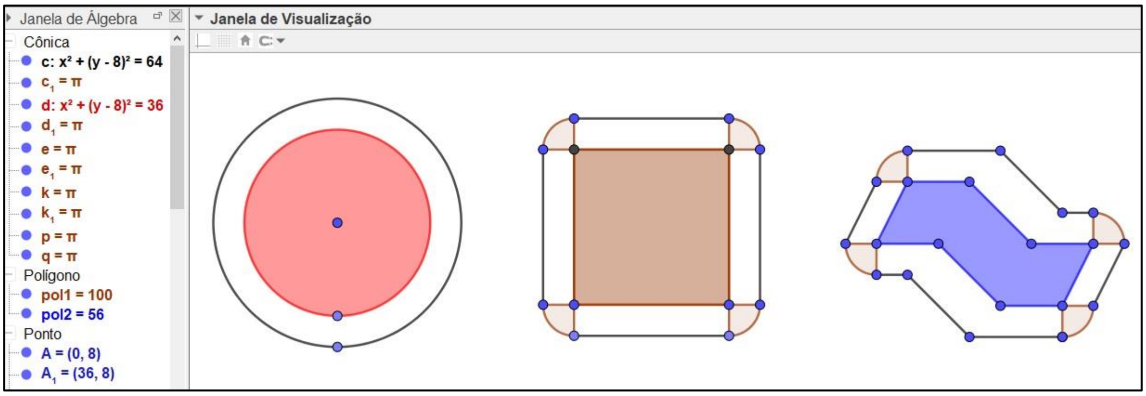


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.12.13. Questão 13 do pós-teste (A14)

Primeiro fiz as figuras coloridas da pergunta depois fui marcando as projeções das figuras sempre a distâncias iguais a 1; a última poderia ter melhorado, mas com ela já deu pra ver que era letra A. Observe que o processo de construção e análise de Q13 é bem simples e as considerações de A14 refletem o que foi feito pela maioria. A14 procurou caprichar bem na distância de uma unidade dada utilizando ferramentas de perpendicularidade, segmentos e arcos para tal. Aqui o índice também foi bem alto, 81% pra ser mais preciso. A3, A15, A17, A19, A25 e A31, não apresentaram construção coerente; chegaram até a construir o octógono, mas não concluíram o raciocínio.

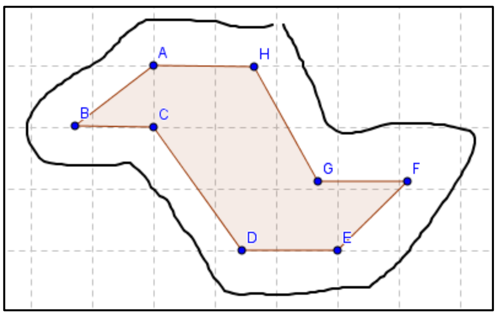
Figura 69 - Resolução da questão 13 do pós-teste pelo participante A14.



Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

Quando usamos a expressão *caprichar* acima, falamos no sentido comparativo a outras construções presentes. Veja, por exemplo, a figura apresentada por A17; a mesma utilizou a ferramenta <traço> para riscar ao redor do polígono. Apesar de estar muito próximo com a figura presente em A, a mesma acabou marcando letra E e não validou a questão.

Figura 70 - Resolução da questão 13 do pós-teste pelo participante A17.

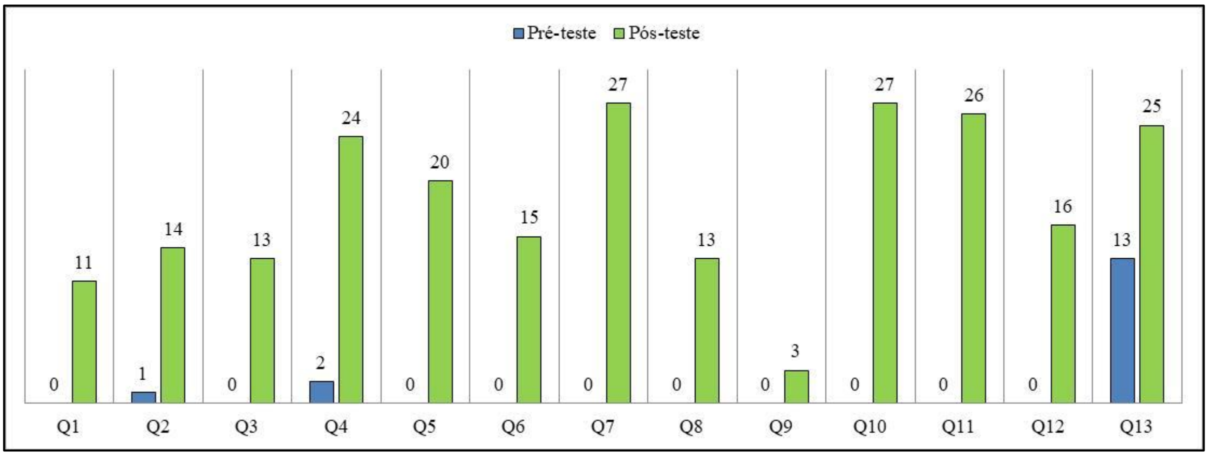


Fonte: Dados da pesquisa, 2017.

4.13. Considerações gerais sobre o pós-teste

Abaixo apresentamos o gráfico que resume o comparativo entre a aplicação do pré-teste (em azul) e pós-teste (em verde). Observa-se que após toda a execução das atividades orientadoras durante os encontros utilizando *software* GeoGebra, o índice de aproveitamento foi extremamente positivo, mais em umas questões, menos em outras, mais ainda assim, em todas tivemos um ganho de conhecimento. Veja que apenas em Q2, Q4 e Q13 os participantes no pré-teste haviam pontuado. Agora, podemos perceber em absolutamente todas, pontuações bem relevantes, com destaque para Q7 e Q10 na qual o comparativo do antes e depois, mostra um ganho de 87%, em Q1 tal ganho foi de 84%, 71% para Q4, 65% em Q5 e 52% em Q2. Nas demais questões o aproveitamento foi abaixo de 50%, o que não é um agravante, visto que no pré-teste havia sido zero. Q13 continuou sendo uma questão em que o nível de interpretação continuou alto. Vemos também que Q9 teve um índice muito baixo de interpretação, conforme já discutido.

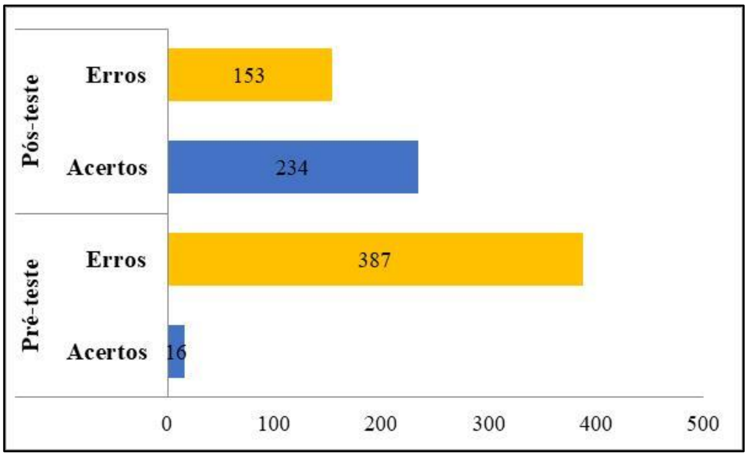
Gráfico 14 - Relação entre pré-teste e pós-teste.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Quanto ao desempenho individual de cada participante, podemos fazer também algumas considerações. Apenas 26% dos participantes apresentaram desempenho inferior a 50%, foram eles: A1, A3, A15, A19, A21, A25, A30 e A31. No caso A25 validou apenas Q4 e Q7, ambas as questões de simples construção. Na outra ponta estão os 74% restantes que validaram mais de 50%, com destaque para A5, A6, A7 e A9 que obtiveram índices na ordem de 85%. Abaixo apresentamos um gráfico que deixa mais clara essa enorme diferença no quantitativo de resoluções validadas antes (4%) e após a aplicação do projeto (58%). Consideramos aqui o universo de 403 resoluções esperadas, em que no pré-teste só foram obtidas 16 e no pós-teste 234.

Gráfico 15 - Resoluções validadas no pré-teste e pós-teste.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2017.

Algumas considerações sobre o projeto merecem destaque e corroboram com os elevados índices obtidos no projeto. Considerando os aspectos positivos temos as seguintes afirmações: A2, "*foi que nas atividades dos encontros elas foram bem desenvolvidas*" e "*quando começou o projeto pra gente eu achava bom porque nesses horários vagos que a gente tinha agora poderíamos aprender mais alguma coisa*"; A6, "*estou aprendendo muito, o programa é top*"; A7, "*foi legal e não tive muitas dificuldades nesse encontro*"; A8, "*mais é legal participar ao lado dos meus amigos e resolvermos as dificuldades juntos*" e "*apesar de não ser uma atividade muito fácil, o geogebra é uma atividade que requer muito a interpretação do que está sendo pedido nas questões já trabalhadas, então é legal poder sair da rotina*"; A9, "*foi legal, apesar de ter bastante dificuldade no começo*" e "*compreendi um pouco na parte das resoluções das questões e aprendi um pouco mexer no geogebra*"; A10, "*eu consegui fazer todas as perguntas sem ter muito trabalho*"; A11, "*foi bem mais ligeiro resolver as questões quem conhece o aplicativo*"; A12, "*é uma atividade bastante interessante, que me faz aprender coisas novas e me aprofundar ainda mais na matemática, só encontrei aspectos positivos na atividade*" e "*um aprendizado a mais*"; A14, "*foi uma atividade muito prática, eu achei, não foi muito de usar cálculos, apenas para desenhar o gráfico como foi pedido*"; A15, "*um novo aprendizado no geogebra*"; A16, "*foi uma atividade interativa pois o professor interagiu bastante, enfim foi muito legal, acho que esse novo jeito de apresentações das aulas foi bem interessante, só tenho coisas boas a declarar, foi uma ótima aula*"; A17, "*foi a facilidade de desenvolver muito rápido, achei melhor que as anteriores das aulas passadas e encontrar o* *resultado mais rápido, só encontrei aspectos positivos, a primeira e a segunda foi muito boa de se fazer*"; A18, "*ajuda na minha dificuldade na matéria*"; A19, "*um aprendizado a mais";* A20, "*um aprendizado a mais*"; A21, "*é que eu achei o programa muito bom e dá para resolver várias questões*"; A22, "*até agora estou conseguindo compreender todas as instruções repassadas e conseguindo desenvolver as figuras*", A23, "*adquiri maior conhecimento com o geogebra fazendo com que você usando esse programa vai aprender mais ainda fazer várias coisas, como resolver questões, como as da obmep*"; A26, "*o geogebra facilita bastante a forma de responder as questões, sem ele o tempo de resolução seria bem maior, só vejo aspectos positivos*"; A30, "*foi um aprendizado a mais*"; para A1, A4, A10, A14, A16 concordam que, "*foi uma atividade prazerosa em realizar, fazendo assim nos exercitamos melhor, foram ótimos encontros*" e A31, "*é legal quando começa a construir a figura, super fácil*". Observamos com as considerações que acima que o GeoGebra foi bem aceito pelos participantes que relatam desde a facilidade do uso, até a possibilidade de trabalhar em grupo. A mudança de rotina na apresentação da disciplina de matemática também teve destaque nas falas.

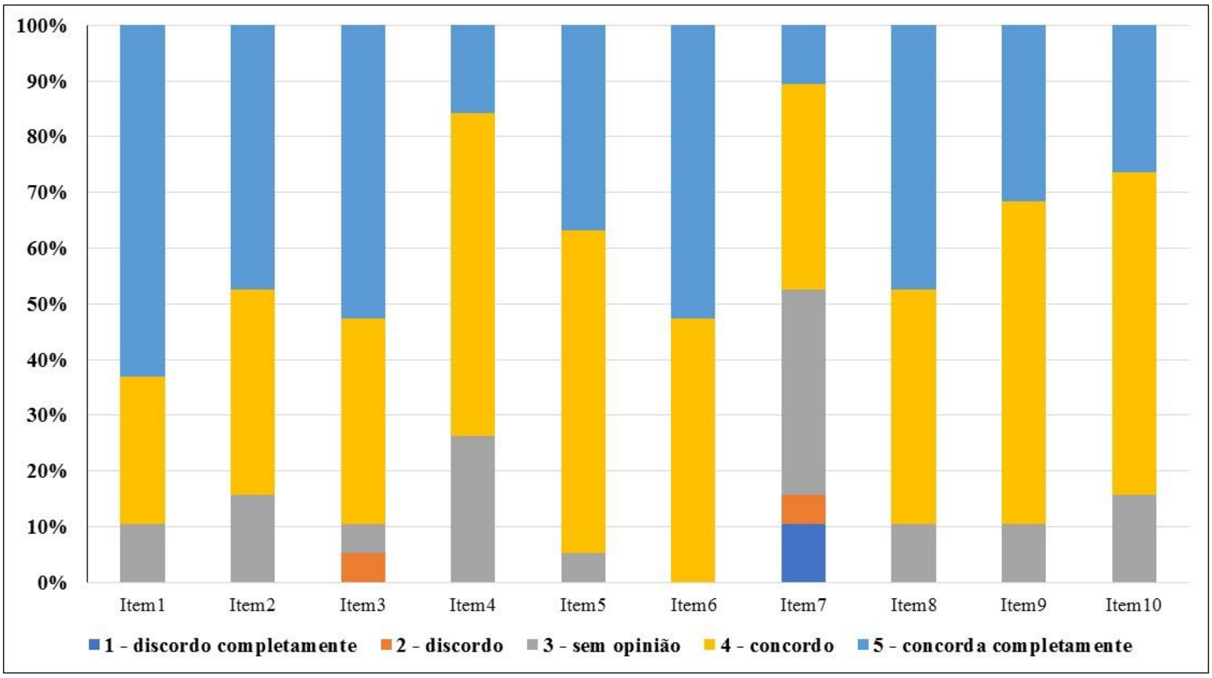
Já considerando aspectos negativos, temos: A2, "*no decorrer dos encontros as questões ia aumentando de nível*"; A8, "*apesar de ser muito boa a atividade, ela tem muitas dificuldades, pois não é fácil mexer em uma aplicação como o geogebra*"; A10, "*eu fiz a questão toda e quando estava terminando apagou tudo e tive que fazer de novo*"; A11, "*porque tem hora que erro alguma coisa e tenho que voltar tudo de novo se não me perco, mais eu gosto muito do aplicativo, ele é interessante*"; A15, "*que no começo tive dificuldades mas depois eu aprendi*"; A21, "*no começo é um pouco difícil*". Observem que apenas seis participantes resolveram apresentar alguma consideração negativa quanto ao *software*, mas de maneira geral, foram aspectos que não diminuem a importância da aplicação e o aprendizado adquirido.

4.14. Considerações sobre o questionário aplicado

Dos 31 participantes do projeto, aplicou-se o questionário (Apêndice L) a apenas 19, em virtude de reprovação de 12 participantes e consequente desligamento da instituição, conforme Organização Didático Pedagógica[30]. O questionário foi aplicado no dia 22 de fevereiro de 2018, e como o último encontro com a aplicação do Pós-teste ocorreu dia 06 de novembro de 2017, optou-se por apresentar os resultados preliminares, desde a aplicação do Pré-teste até o último dia de construções no laboratório de informática. Foram exibidos alguns registros fotográficos dos encontros, bem como diversas construções e falas registradas nos resultados da pesquisa. Após esse resgate, passou-se às orientações de que se tratava o questionário, assim como deveriam responder.

O questionário era composto de 10 (dez) perguntas fechadas e utilizou-se a escala *Likert* como referência para criar os critérios indo desde 1-discordo completamente até 5-concordo completamente, tendo como elementos centrais 2-discordo, 3-sem opinião e 4-concordo. No caso, apenas uma opção deveria ser escolhida de cada pergunta. No gráfico abaixo apresentamos os resultados obtidos. A seguir, discutimos os resultados de cada item.

Gráfico 16 – Dados obtidos no questionário aplicado usando escala *Likert*.



Fonte - Elaborado pelo próprio autor, 2018.

[30] Disponível em http://www.leg.ufpi.br/ctf/index/pagina/id/3690. Acesso em: 22/02/18.

A questão 1 buscava verificar o interesse quanto ao uso de recursos computacionais na aprendizagem de matemática. Foram favoráveis com a afirmação 89% e apenas 11% marcaram sem opinião; podemos deduzir que há indícios de que a aplicação de recursos computacionais em sala de aula, auxiliam na aprendizagem de matemática.

No item 2 foi levantado um questionamento sobre se o uso do GeoGebra havia trazido algum benefício ou contribuição para o aprendizado na disciplina matemática. Do total dos estudantes, 84% manifestaram-se favoráveis contra 16% que marcaram sem opinião. Há sinais favoráveis que a utilização do GeoGebra em sala de aula, trouxe benefícios ou contribuiu de alguma forma no aprendizado de geometria.

A questão 3 queria avaliar se o participante considerava que após as atividades realizadas a sua habilidade no manuseio do *software* GeoGebra havia melhorado. Neste quesito, 89% dos participantes se manifestaram de forma favorável, 5% sem opinião e 5% discordaram; logo, entendemos que o projeto auxiliou os participantes em melhorar sua habilidade quanto ao uso do *software*, sendo que os mesmos demonstraram isso conscientemente, além disso também destacamos as melhorias obtidas no rendimento escolar desses participantes. Causa apenas estranheza que 1 (um) participante tenha discordado, visto que após 10 (dez) encontros de 5 (cinco) aulas de 50 min cada, de atividades totalmente práticas utilizando o *software* GeoGebra, essa habilidade quanto ao uso não tenha sido percebida pelo mesmo. Aqui entendemos que deverá haver uma investigação futura sobre o participante para detectar possíveis falhas na aplicação das práticas a fim de compreender por que motivo ainda há dificuldades quanto o uso do *software*, mesmo após uma prática tão longa.

No item 4 abordamos a apropriação de elementos fundamentais da matemática presentes na geometria. Neste caso, 26% manifestam-se indiferentes quanto a essa apropriação, 58% concordaram e 16% concordaram plenamente, logo, em termos gerais, 74% dos participantes entendem que tiveram uma melhora quanto a aprendizagem dos fundamentos matemáticos. Pudemos observar essa melhora na aprendizagem quanto à capacidade de interpretação dos entes matemáticos presentes nas questões da Obmep pelo nível das construções apresentadas.

Na questão 5 avaliamos se houve um aumento na capacidade de interpretação de questões de geometria após o uso do *software* GeoGebra. Para 95% dos estudantes, esse aumento de fato ocorreu e apenas para 1 aluno se manifestou indiferente; assim, temos que a pesquisa possibilitou notarmos que houve evidências para uma melhora na capacidade de interpretação de questões de Geometria devido à redução das perguntas relacionadas aos mesmos e ao aumento no índice de acertos nas questões. No início eram constantes as dúvidas dos alunos em não compreender de que se tratava por exemplo uma mediatriz ou a área de um polígono qualquer, dentre outros entes.

No item 6 perguntava se foi mais fácil interpretar as questões de geometria da Obmep utilizando o *software* GeoGebra. Aqui tivemos 100% de posicionamentos favoráveis, onde 47% concordaram com a afirmação e 53% concordaram plenamente. Logo entendemos que utilizar o GeoGebra para interpretar as questões de geometria da Obmep favorece a interpretação desses problemas por parte dos participantes, visto que a maioria compreendia que era possível apresentar algum argumento para validar determinada questão mediante construção, fato que não podia ser observado sem o auxílio do *software*. Em resumo, criou-se um ambiente em que o aluno era consciente da possibilidade de resolver qualquer questão da Obmep, mediante o uso do *software* GeoGebra.

A questão 7 abordou se houve problemas de natureza técnica durante o uso do *software* GeoGebra nos laboratórios de informática. Como durante os encontros tivemos problemas como quedas de energia, *software* que não abria e sistema *Windows* travando, observamos nas respostas dos participantes um desconforto quanto ao tema, porém a oscilação nas respostas mostra que essa problemática não trouxe prejuízos para o andamento das construções. 11% ou discordaram completamente ou concordaram completamente, 5% discordaram e 37% ou se mostraram indiferentes ou concordaram. Logo, para 47% dos participantes, os problemas técnicos que de fato ocorreram, puderam ser percebidos e corrigidos no decorrer da investigação.

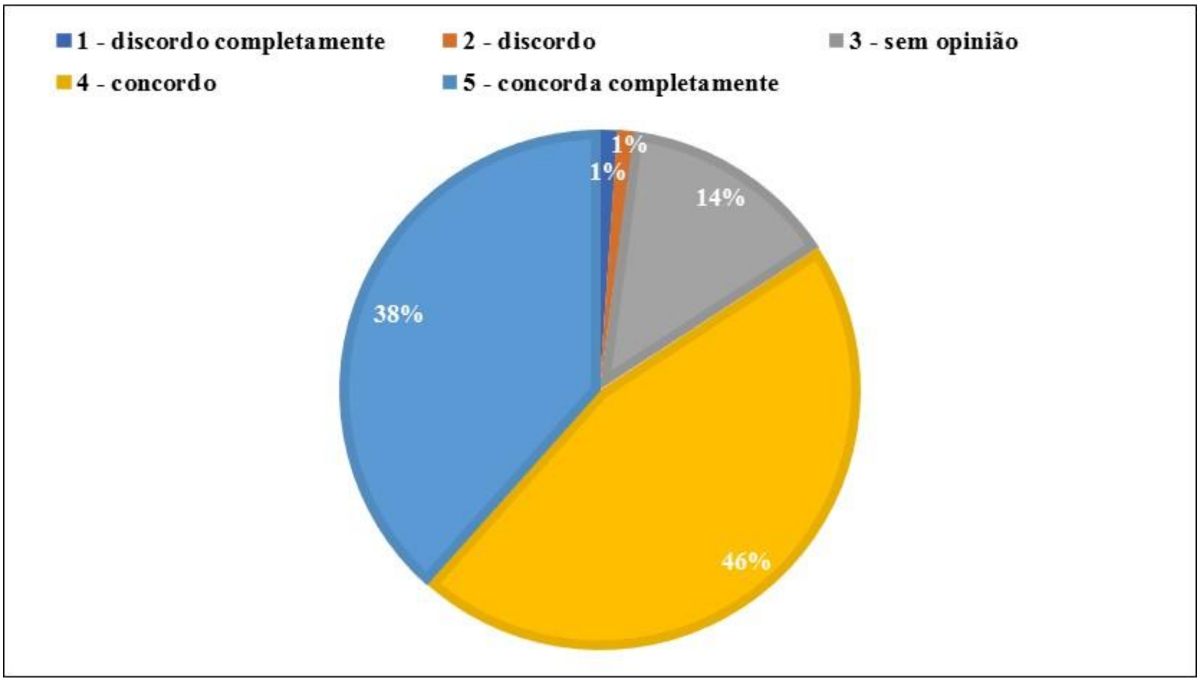
O item 8 buscava identificar se as instruções para a execução das atividades envolvendo o uso do *software* GeoGebra na interpretação de questões de geometria da OBMEP foram adequadas. Do total de estudantes envolvidos, 89% manifestaram-se favoráveis e apenas 11% indiferentes. Logo, entendemos que a elaboração das atividades orientadoras de ensino cumpriu seu papel nos encontros em razão da rotina de estudos adquirida e do aluno, ao receber o material de trabalho, já compreender de forma clara como deveria interpretar a atividade.

O item 9 perguntava se os participantes entendiam que mais atividades com o uso do *software* GeoGebra, envolvendo outros conteúdos matemáticos, deveriam ser trabalhadas. Concordaram com a afirmação 58%, 32% concordaram plenamente e 11% se mostraram indiferentes. Assim, com 89% dos participantes favoráveis quanto à aplicação de mais atividades nesse sentido, entendemos que outros projetos utilizando o *software* GeoGebra devem ser pensados como por exemplo a análise dos conteúdos geométricos presentes nos livros didáticos adotados, análise de questões do ENEM e a própria estruturação dos conteúdos geométricos presentes nos cursos técnicos dos alunos utilizando a ferramenta.

Finalmente, o item 10 buscava relacionar as atividades envolvendo o GeoGebra com o aumento da motivação no estudo da disciplina de Matemática. Concordaram com a afirmação 58%, 26% concordaram plenamente e apenas 16% se mostraram indiferentes. Vemos que 84% se sentiram motivados em estudar matemática utilizando o GeoGebra, pois a ferramenta possibilitava interação e troca de conhecimento, os resultados eram observados de forma imediata, daí o aluno já tinha condições de avaliar se estava seguindo o caminho certo e não haviam mais barreiras que tornasse a questão impossível de ser resolvida.

De maneira geral, observando os dados do questionário acima analisados e observando também o gráfico, destacamos que o projeto contribuiu de forma positiva aos participantes. Pelo gráfico podemos verificar uma predominância das colunas azul (concorda plenamente) e amarela (concorda) em praticamente todos os itens, exceto no 7 que estava relacionado a problemas de natureza técnica e não de aprendizagem. O gráfico abaixo, destaca essa predominância.

Gráfico 17 – Distribuição dos critérios da escala *Likert* no questionário aplicado.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2018.

5. Conclusão

A procura por metodologias inovadoras que possibilitem outros horizontes para a melhoria da qualidade do ensino, especialmente em relação à geometria, tem sido contínua na comunidade de educadores matemáticos. O presente trabalho teve como objetivo investigar impactos na aprendizagem de geometria dos estudantes que utilizaram o *software* GeoGebra como ferramenta de mediação na resolução de problemas desencadeadores oriundos das provas da Obmep.

Durante as fases iniciais de nossa pesquisa, sobretudo nas análises dos resultados do pré-teste, observamos uma dificuldade acentuada dos estudantes na compreensão dos problemas de geometria e análise das figuras geométricas. Porém, à medida que os estudantes eram submetidos às intervenções mediadas pelas atividades orientadoras de ensino com o uso do *software*, tais dificuldades foram diminuindo gradativamente, respeitando a individualidade de cada participante, conforme foi demonstrado nos resultados obtidos no pós-teste, as considerações destacadas no questionário e a própria evolução dos envolvidos no desenvolvimento das atividades.

Nas atividades realizadas, os estudantes foram desafiados a analisar as questões de geometria da Obmep trabalhando sob a ótica do GeoGebra, sendo capazes de criar conjecturas e conclusões que os ajudavam na interpretação e compreensão dos problemas. Percebemos que o uso do GeoGebra despertou nos estudantes um maior interesse no que trata da construção, interpretação e análise de figuras geométricas, pois ao utilizarem essa ferramenta coletivamente eles tiveram a oportunidade de interação o que possibilitou a estruturação de seu pensamento geométrico e o compartilhamento e troca de saberes; o trabalho em grupo foi o grande diferencial dessa pesquisa investigativa. Além dessas, a própria *interface* do GeoGebra possibilita que o estudante, ao definir qual ferramenta deveria utilizar, associasse a figura à sua definição, permitindo expressar toda sua criatividade e imaginação nas inúmeras construções.

Foi possível perceber que a cada encontro, os participantes não se sentiam mais amedrontados com questões de olimpíadas porque com uso da ferramenta, foram capazes de analisar qualquer questão proposta nas atividades. Aqui mais uma vez devemos refletir sobre o processo de avaliação dos resultados da Obmep na 1ª fase que ocorrem em todo o Brasil como meramente lotéricos, visto que não há por parte da maioria dos estudantes que participam do processo, uma análise de fato das questões que são apresentadas. E diferente dessa realidade, observamos durante a pesquisa uma motivação constante em buscar o resultado proposto mediante construção geométrica.

Entendemos que o projeto contribuiu de forma significativa não só no âmbito das olimpíadas, mas também na vida em sala de aula dos estudantes, pois possibilitou a eles, a realização de análises matemáticas em todas as situações cuja geometria possa ser inserida. Um exemplo disso é que os participantes do projeto, que atualmente estão no 2º ano do ensino médio e durante as aulas de circunferência trigonométrica, razões trigonométricas na circunferência, lei dos senos, lei dos cossenos e funções trigonométricas, ministradas até o momento, puderam acompanhar as explicações que se valeram por parte do pesquisador (e docente da turma) do uso do *software* GeoGebra, sem maiores dificuldades, inclusive interagindo constantemente durante a realização das construções. Para a mesma turma ainda está previsto o uso do GeoGebra no ambiente 3D para as explicações dos conteúdos de Geometria Espacial e de Geometria Analítica quanto estiverem no 3º ano do ensino médio, sem contar nos conteúdos que envolvem geometria, limites, derivadas e integrais por exemplo, para aqueles que enveredarem para a área de Exatas na Graduação.

Apesar de entendermos que foram inúmeras as contribuições do uso do *software* na vida acadêmica dos participantes, como já destacado, entendemos também que há limites quanto ao uso da ferramenta e métodos em que a pesquisa precisa avançar. Quanto à questão dos limites não devemos considerar o GeoGebra como o salvador de todos os problemas de geometria, visto que na aplicação da Obmep, no ENEM, nos vestibulares, nos concursos, nas avaliações regulares, dentre outros, o aluno não terá o mesmo à sua disposição, assim como não terá também uma calculadora à disposição. Precisamos reforçar que a ferramenta vem para contribuir no aprendizado do estudante e auxiliá-lo em seus estudos.

Na questão dos métodos, percebemos também que a observação de três pontos poderiam ter melhorado (ou facilitado) o desempenho dos estudantes na pesquisa. O primeiro ponto diz respeito ao uso do *software*. Tanto a compreensão do uso do *software* quanto sua aplicação direta na resolução de questões da Obmep, foram feitas de forma concomitante e isso acabou por tornar necessário, em diversos momentos, explicações mais voltadas ao *software* do que à construção da questão em si. Para trabalhos futuros, a sugestão é que haja primeiro uma capacitação quanto ao uso da ferramenta, algo em torno de 20h, para só então partir para um estudo de caso mais específico. O segundo ponto está relacionado à distribuição dos encontros. Havíamos planejado apenas oito encontros com o uso da ferramenta, e durante o desenvolvimento das atividades, percebendo a dificuldade que os participantes estavam encontrando em trabalhar com estruturas circulares; adicionamos então mais um encontro para tratar do tema. Ocorre que durante a análise dos resultados vimos que, apesar da melhora no rendimento das resoluções comprovadas no pós-teste, ainda assim foram as questões onde os participantes apresentaram mais dificuldades, mostrando, portanto, que a dificuldade em trabalhar com estruturas circulares ainda não havia sido sanada ou ao menos, minimizada. Sugerimos, portanto, que seja dedicado um maior tempo de discussão em situações que envolvam círculos, arcos, setores circulares, segmentos circulares, dentre outros. Finalmente, o terceiro ponto trata do próprio conhecimento de matemática básica que o estudante trás das outras escolas. Pôde-se perceber que os conceitos matemáticos não eram de conhecimento de uma boa parcela do grupo, chegando ao ponto de lermos depoimentos em que o estudante coloca nunca ter tido aulas de geometria em seu ensino fundamental. Esse último fator também contribuiu de forma considerável no aumento do tempo de explicação sobre determinados entes que não estavam programados e, assim como no primeiro ponto, sugerimos um minicurso de 20h voltado à matemática básica, para buscar balizar o conhecimento do grupo.

A pesquisa também trouxe como aspecto positivo, a possibilidade e continuidade de novos estudos. Dos 31 participantes, 19 progrediram de série e destes, os quatro que mais se destacaram, foram selecionados e aprovados como bolsistas pesquisadores nos projetos de pesquisa do GeoGebra programados para 2018 no CTF, os projetos serão desenvolvidos nas turmas de alunos ingressantes e durante as práticas, estarão auxiliando nas construções como monitores, bem como gerando novas construções que estarão sendo propostas no decorrer da pesquisa. O novo projeto prevê a criação de um site onde estarão sendo disponibilizados os vídeos e tutorais com as construções.

Destacamos ainda que, dentre os quatro selecionados, uma das participantes (os quatro concorreram) conseguiu aprovação na 13ª edição do Curso de GeoGebra[31]. O curso é na modalidade *on-line* e concorreram candidatos de todo o Brasil, onde para o Piauí foram disponibilizadas apenas sete vagas. Apesar de os outros três não estarem fazendo parte de forma oficial do curso, todo o material enviado é disponibilizado no grupo de *WhatsApp* para discussão conjunta e troca de ideias nas construções, mantendo assim o padrão de compartilhamento de ideias já adquirido no projeto.

Vemos, portanto que ainda há um grande potencial pela frente em termos de produção científica aos participantes e ao pesquisador. Aos participantes, a 1ª delas já ocorreu e foi apresentada pelo grupo na IV Jornada Acadêmica[32] do CTF neste ano de 2018, na modalidade

---

[31] Disponível em: http://www.ogeogebra.com.br/arquivos/editaldevagas.pdf. Acesso em: 26/4/2018.
[32] Disponível em: http://jornadacademica.000webhostapp.com/. Acesso em 26/4/18.

de pôster. Para 2018, com esse grupo, está programada a análise bidimensional, conforme já habituados a trabalhar. Já para 2019, estaremos partindo para a análise das construções no GeoGebra no ambiente 3D que deverá exigir bem mais dos participantes, mas que entendemos que pelo fato de que até lá já estarão dominando bem a ferramenta no ambiente 2D, a dificuldade será menor. Para o pesquisador, a temática do projeto possibilitou a divulgação de trabalhos científicos em eventos como a III Jornada Acadêmica do CTF[33] realizada em Floriano no ano de 2017, na modalidade de Pôster e Minicurso; a própria IV Jornada Acadêmica do CTF já mencionada, nas modalidades de Pôster, Comunicação Oral e Minicurso; IV Congresso Internacional das Licenciaturas COINTER-PDVL 2017[34] realizado na cidade de Natal, na modalidade de Relato de Experiência; I Encontro PROFMAT[35] realizado na cidade de Floriano-PI em 2017, nas modalidades de Minicurso e Comunicação Oral e VIII Bienal de Matemática[36] realizada no Rio de Janeiro-RJ no ano de 2017, na modalidade de Oficina.

Por fim, destacamos a importância que as pesquisas científicas representam no ambiente escolar, em especial aquelas em que o estudante atua como agente principal da ação e que compreende que os resultados dependem exclusivamente de seu esforço e desempenho. Os seis meses de trabalho acabaram por tornar o grupo mais coeso e mais consciente de suas obrigações, tanto em nível de Ensino quanto em nível de Pesquisa e Extensão, que é o tripé que rege as instituições da rede federal e que deveria servir de modelo para outras instituições. Vemos que hoje os alunos do projeto apresentam um novo olhar sobre a Matemática e encontram-se mais motivados e seguros a fazer questionamentos.

[33] Disponível em: https://docs.wixstatic.com/ugd/4e2222_93a8cbcee3204b3aa87d569c45e54392.pdf. Acesso em 1/5/18.
[34] Disponível em: http://cointer-pdvl.com.br/index.php/anais-2017-issn-2358-9728-2/. Acesso em 1/5/18.
[35] Disponível em: http://libra.ifpi.edu.br/floriano/profmat_programacao.pdf. Acesso em 1/5/18.
[36] Disponível em: https://www.sbm.org.br/bienal/. Acesso em 1/5/18.

REFERÊNCIAS

AMARAL, Rúbia Barcelos. **Vídeo na sala de aula de Matemática: Que possibilidades?** Disponível em: <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/recursos/offline/videos/rubia.pdf>. Acesso em 22 de maio de 2018.

BARBOSA, Lucas Alves Lima; SOUZA, Magaly Marinello. **O uso de material didático manipulativo no ensino de Coordenadas Cartesianas**. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba-PR, 2013.

BASTIAN, Irma Verri. **O Teorema de Pitágoras**. 2000. 184f. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2000.

BENTO, Humberto Alves. **O desenvolvimento do pensamento geométricos com a construção de figuras geométricas planas utilizando o *software* GeoGebra**. 157f. Dissertação de Mestrado. Belo Horizonte-MG, 2010.

BIONDI**,** R. L. **Avaliando o impacto da OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - na qualidade da educação.** Artigo publicado na revista Economia, do LACEA, volume 12, número 2, Spring, 2012.

BIONDI, Roberta Loboda; VASCONCELOS, Lígia e MENEZES FILHO, Naercio Aquino de: **Avaliando o impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho de Matemática nas avaliações educacionais**. Disponível em: <http://virtualbib.fgv.br/ocs/index.php/sbe/EBE09/ paper/view/1092/315>. Acesso em 27 de junho de 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 27 de junho de 2017.

Carvalho; OLIVEIRA, Luisa Xavier de. **Formação de professores para as tecnologias digitais**: *software* livre e educação a distância. Brasília: Liber Livro, v. 2, 2013. p. 39-52.

CHAIKLIN, Seth. **A zona de desenvolvimento próximo na análise de Vygotski sobre aprendizagem e ensino**. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/pe/v16n4/a16v16n4. Acesso em: 20 de março de 2018.

CHAMBERS, Paul; TIMLIN, Robert. **Ensinando Matemática para adolescentes**. Tradução de Gabriela Wondracek Linck. 2ª. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

COSTA, Andressa Solane Moreira. **A utilização do GeoGebra como ferramenta para o ensino de trigonometria**. 122f. Dissertação de Mestrado PROFMAT. Vitória, 2017.

GATTI, Bernardete A. **Formação de professores para o ensino fundamental:** estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas / Bernardete A. Gatti; Marina Muniz R. Nunes (orgs.) São Paulo: FCC/DPE, 2009.

GRAVINA, Maria Alice; CONTIERO, Lucas de Oliveira. **Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?.** Disponível em <http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/21917>. Acesso em: 27 de junho de 2017.

KAPTELININ , Victor; NARDI , Bonnie A. **Acting with technology**: activity theory and interaction design. Cambridge: Massachusetts: MIT Press, 2006. 333 p.

LEITE, Leonardo Ripoll Tavares. **Zona de Desenvolvimento Proximal e o comportamento organizacional: a dialética de Vygotski no ambiente de uma organização**. UFSC, 2013.

LIMA, Kelisson Ferreira de. **Polígonos construtíveis por régua e compasso: uma apresentação para professores de Educação Básica**. 54f. Dissertação de Mestrado PUC-Rio. Rio de Janeiro, 2015.

LIMA, Maria Aparecida Alves de. **O Ensino e a Aprendizagem de ângulos utilizando materiais concretos: o tangram, o geoplano, dobraduras e construções geométricas**. 2014. 53f. Campina Grande-PB, 2014.

LUIZ, Elisete Adriana José; COL, Lidiane de. **Alternativas Metodológicas para o Ensino de Matemática visando uma Aprendizagem Significativa**. VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Rio Grande do Sul. 2013.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. **Educação matemática e tecnologias digitais**: reflexões sobre prática e formação docente. Disponível em: <www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/download/78/70>. Acesso em: 27 de junho de 2017.

MELO, Cristiane das Graças Silva. **O Portal da Matemática (OBMEP) como instrumento de estímulo aos estudantes de Matemática no Ensino Fundamental II**. São João Del Rey, MG, 2016.

NASCIMENTO, Karla Angélica Silva do; NUNES, João Batista Carvalho. **Formar é preciso:** *software* educativo livre para o ensino de Geometria. In: NUNES, João Batista

NOGUEIRA, Cleia Alves; SÁ, Antônio Villar Marques de. **O uso lúdico do *software* GeoGebra na formação continuada de professores de Matemática da SEDF**. VI Encontro Brasiliense de Educação Matemática: ser educador matemático. Disponível em: <http://www.viebrem.sbemdf.com/wp-content/uploads/2014/09/o-uso-ludico-do-*software*-GeoGebra_CC47351926115_REF-aprov-sem-exig.pdf>. Acesso em 27 de junho de 2017. Brasília: SBEM-DF. 2014. p. 1-16.

NUNES, João Batista Carvalho; OLIVEIRA, Luisa Xavier de Oliveira. Formação docente para as tecnologias digitais: novas perspectivas. In: NUNES, João Batista Carvalho; OLIVEIRA, Luisa Xavier de Oliveira. **Formação de professores para as tecnologias digitais**: *software* livre e educação a distância. Brasília: Liber Livro, v. 1, 2012. Cap. 1, p. 15-23.

PCN. **Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC, 2006.

PEREIRA, Thales de Lélis Martins. **O uso do software GeoGebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio**. 118f. Dissertação de Mestrado. Juiz de Fora. 2012.

PINHEIRO, J. M. **Estudantes forjados nas arcadas do Colégio Militar de Porto Alegre (CMPA):** “novos talentos” da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. 2014. 228 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, RS, 2014.

POZO, J.I. **A sociedade da aprendizagem e o desafio de converter informação em conhecimento**. In: Tecnologias na Educação: ensinando e aprendendo com as TIC: guia do cursista / Maria Umbelina Caiafa Salgado, Ana Lúcia Amaral. – Brasília; Ministério da Educação, Secretaria de Educação à Distância; 2008. Cap. 1, p.29.

PROENÇA, M. C. **A visão de professores sobre dificuldades dos alunos na resolução de problemas**. Zetetiké, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez.2017, p.440-456

REIS, Helder Gustavo Pequeno dos. **Compreensão dos conceitos perímetro da circunferência e área do círculo com o auxílio do GeoGebra**. 176f. Dissertação de Mestrado UEPB. Campina Grande-PB, 2012.

ROCHA, Tatiane de Oliveira. **Dificuldades no cálculo de perímetro e de área das figuras planas na Educação de Jovens e Adultos**. Vitória da Conquista, 2016.

SALVADOR, Cátia Mariana de Oliveira Ferreira. **Geometria: um estudo sobre ângulos e polígonos, no 9º ano de escolaridade, com recurso ao GeoGebra**. 138f. Dissertação de Mestrado na Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade Nova de Lisboa, 2013.

SANTOS, Elaine Costa dos. **Proposta de aplicação da Estatística na Educação Básica**: uma investigação do cotidiano com o auxílio do GeoGebra. 2013. 66 f. Dissertação de Mestrado PROFMAT. Salvador, BA, 2013.

SANTOS, M. J. B. S. **O Ensino e aprendizagem das frações utilizando materiais concretos**. Cubati-PB. 2014. 44p.

SANTOS, Wagner Cardoso. **Números Racionais Fracionários: Mesopotâmia à OBMEP**. 88f. Dissertação de Mestrado PROFMAT. São João del Rei, 2017.

SANTOS, Y.C; SOUZA, L. M.; ROSA, S. S.; REIS, R. S. **Atividade de Interpretação de Gráficos Estatísticos a partir de notícias vinculadas nos meios de comunicação**. XIII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo-SP, 2016.

SILVA, Girleide Maria. **UM ESTUDO SOBRE O USO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO**. 180f. Dissertação do Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação da Universidade Federal de São Carlos. São Carlos-SP. 2016.

SILVA, Magda Vieira. **Dificuldade na Representação Gráfica quando apresentado num Contexto Real**. In: ENEM, IX, 2007, Belo Horizonte. Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa. Belo Horizonte: 2007. Disponível em:

http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.ht ml Acesso em: 5 mai. 2018.

SOARES, José F.; CANDIAN, Julina F.. **O impacto da OBMEP no desempenho dos alunos na Prova Brasil**. In: *Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP) 2010*. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011. p.73-79.

TODESCHINI, Isabel Lovison. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): uma visão sobre a avaliação na perspectiva da resolução de problemas.** Porto Alegre, 2012.

VALÉRIO, Wiviane. **Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula**. 89f. Dissertação de Mestrado. USP – São Carlos, 2017.

VECCHI, Gabriel Rosaboni. **O estudo da circunferência no Ensino Médio: uma proposta utilizando um software livre**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 86f. Rio Claro, 2015.

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA RESPONSÁVEIS

Eu, **Ricardo de Castro Ribeiro Santos**, aluno do Mestrado Profissional em Matemática do Instituto Federal do Piauí, campus Floriano, venho respeitosamente solicitar autorização para que seu filho(a) participe de um estudo que tem como objetivo **Analisar impactos na aprendizagem de geometria dos estudantes que utilizam o GeoGebra como ferramenta mediadora para resolverem problemas desencadeadores oriundos da OBMEP**. Estas informações serão utilizadas para o entendimento quanto à maneira como alunos interpretam as formas geométricas bidimensionais presentes nas questões das Olimpíadas de Matemática utilizando um *software*.

Este estudo será realizado nas instalações do CTF – Colégio Técnico de Floriano através de **Estudo de Caso**, em caráter voluntário, com garantia do anonimato da identidade dos estudantes.

Pelo presente consentimento, declaro que fui informado(a) e estou ciente dos objetivos e procedimentos a que meu filho(a) será submetido(a) e dos benefícios do presente estudo. Fui igualmente informado:

1- do direito de receber resposta a qualquer pergunta ou dúvida sobre esta pesquisa;
2- da liberdade de retirar meu consentimento a qualquer momento para meu filho participar da pesquisa;
3- da liberdade de meu filho deixar de participar da pesquisa, sem que isso traga prejuízo;
4- do direito de ser mantido o anonimato da identidade de meu filho e ter sua privacidade preservada.

Declaro que tenho conhecimento da realização da pesquisa, bem como de sua finalidade e permito que meu filho participe das atividades elaboradas pelo pesquisador citado neste termo de consentimento.

Floriano(PI), _______ de _____________________________ de 20____.

Nome do responsável:____

Assinatura:____

Nome do estudante:____

Assinatura:____

Contato: Ricardo de Castro Ribeiro Santos
Telefone: (89) 99984-3280
e-mail: ricardogarapa@gmail.com

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA ALUNOS

Eu, **Ricardo de Castro Ribeiro Santos**, aluno do Mestrado Profissional em Matemática do Instituto Federal do Piauí, campus Floriano, convido-o para participar de um estudo que tem como objetivo **Analisar impactos na aprendizagem de geometria dos estudantes que utilizam o GeoGebra como ferramenta mediadora para resolverem problemas desencadeadores oriundos da OBMEP**. Estas informações serão utilizadas para o entendimento quanto à maneira como alunos interpretam as formas geométricas bidimensionais presentes nas questões das Olimpíadas de Matemática utilizando um *software*.

Este estudo será realizado nas instalações do CTF – Colégio Técnico de Floriano através de **Estudo de Caso**, em caráter voluntário, com garantia do anonimato da identidade dos estudantes.

Pelo presente consentimento, declaro que fui informado(a) e estou ciente dos objetivos e procedimentos que serei submetido(a) e dos benefícios do presente estudo. Fui igualmente informado:

1- do direito de receber resposta a qualquer pergunta ou dúvida sobre esta pesquisa;
2- da liberdade de retirar meu consentimento a qualquer momento para participar da pesquisa;
3- do direito de ser mantido o anonimato da minha identidade e ter minha privacidade preservada.

Declaro que tenho conhecimento da realização da pesquisa, bem como de sua finalidade e permito que meu filho participe das atividades elaboradas pelo pesquisador citado neste termo de consentimento.

Floriano(PI), _______ de _____________________________ de 20____.

Nome do estudante:____

Assinatura:____

Contato: Ricardo de Castro Ribeiro Santos
Telefone: (89) 99984-3280
e-mail: ricardogarapa@gmail.com

APÊNDICE C

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

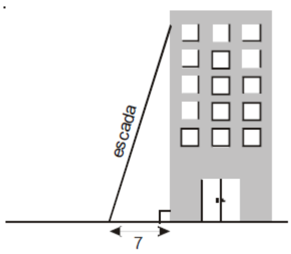
Participante:

PRÉ-TESTE – 02/08/17

Q1 – OBMEP 2005

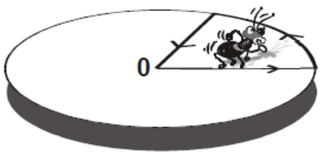
17. O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?

(A) 4 m
(B) 8 m
(C) 9 m
(D) 13 m
(E) 15 m

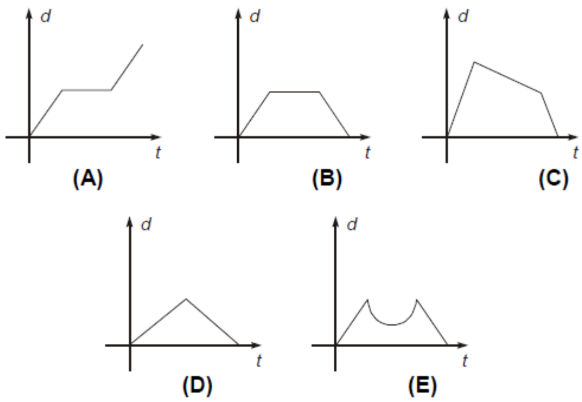


Q2 – OBMEP 2006

17. Uma formiguinha parte do centro de um círculo e percorre uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura.

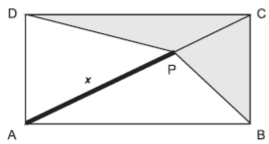


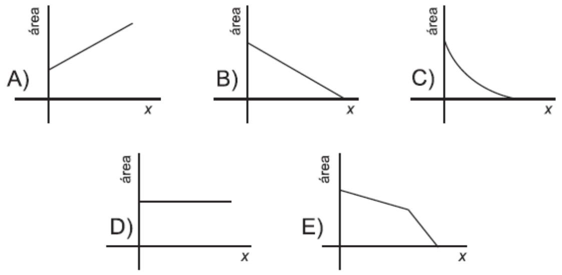
Qual dos gráficos a seguir representa a distância *d* da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo *t*?



Q3 – OBMEP 2007

18. Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do polígono *BCDP* em função da distância *x=AP*?

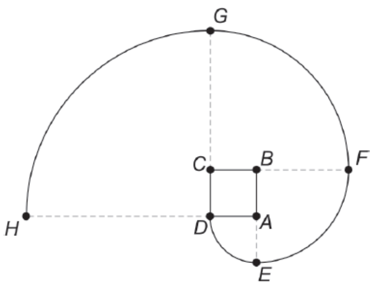




Q4 – OBMEP 2008

5. A figura mostra um quadrado *ABCD* de lado 1 cm e arcos de circunferência *DE*, *EF*, *FG* e *GH* com centros *A*, *B*, *C* e *D*, respectivamente. Qual é a soma dos comprimentos desses arcos?

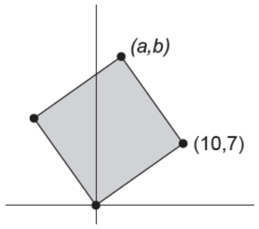
(A) 5π cm
(B) 6π cm
(C) 7π cm
(D) 8π cm
(E) 9π cm



Q5 – OBMEP 2009

6. O quadrado da figura tem um vértice na origem, outro no ponto (10,7) e um terceiro no ponto (a,b). Qual é o valor de $a+b$?

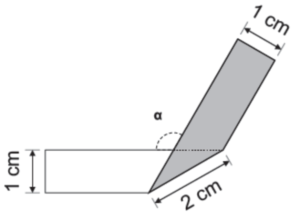
A) 20
B) 21
C) 22
D) 23
E) 24



Q6 – OBMEP 2010

13. Uma tira de papel retangular, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura. Qual é a medida do ângulo α?

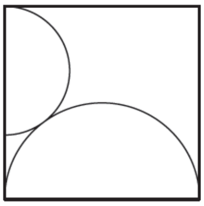
A) 110º
B) 115º
C) 120º
D) 125º
E) 130º



Q7 – OBMEP 2011

7. Na figura, os dois semicírculos são tangentes e o lado do quadrado mede 36 cm. Qual é o raio do semicírculo menor?

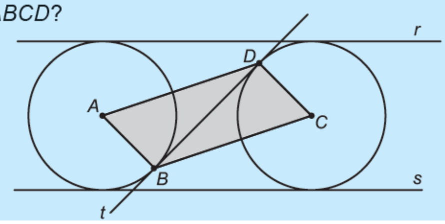
A) 8 cm
B) 9 cm
C) 10 cm
D) 11 cm
E) 12 cm



Q8 – OBMEP 2012

17. Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas e a distância entre elas é 2 cm. A reta *t* forma um ângulo de 45° com a reta *r*. Os círculos com centro em *A* e *C* tangenciam a reta *t* nos pontos *B* e *D*, respectivamente, e tangenciam as retas *r* e *s*. Qual é a área, em centímetros quadrados, do quadrilátero *ABCD*?

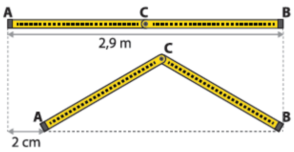
A) $\sqrt{2}$
B) 2
C) $1+\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$
E) 3



Q9 – OBMEP 2013

10. Uma escada com 2,9 metros de comprimento e uma articulação central **C** possui a extremidade **B** fixa no chão e a extremidade **A** móvel, conforme a figura. A escada, inicialmente estendida no chão, foi dobrada de tal forma que a extremidade **A** deslizou 2 centímetros. A quantos centímetros do chão ficou a articulação **C**?

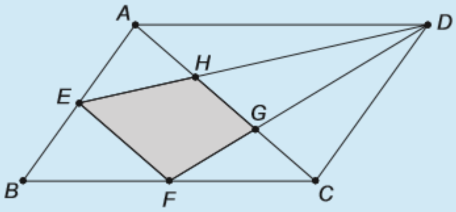
A) 2
B) 4
C) 8
D) 11
E) 17



Q10 – OBMEP 2014

16. O paralelogramo *ABCD* tem área 24 cm² e os pontos *E* e *F* são os pontos médios dos lados *AB* e *BC*, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero *EFGH*?

A) 4 cm²
B) 5 cm²
C) 6 cm²
D) 7 cm²
E) 8 cm²



Q11 – OBMEP 2015

17. Na figura, *ABCD* é um trapézio inscrito numa circunferência. A base maior do trapézio mede 16 cm, a base menor 10 cm e a altura 9 cm. Qual é a medida, em centímetros, do raio da circunferência?

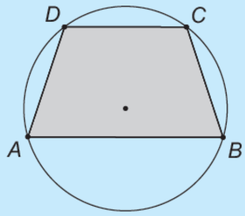
A) $\frac{7}{3}$

B) $\frac{25}{3}$

C) $\frac{35}{3}$

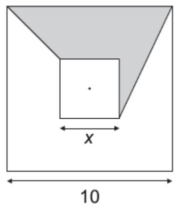
D) $\frac{40}{3}$

E) $\frac{50}{3}$



Q12 – OBMEP 2016

11. Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 e o menor tem lado *x*. Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de *x*?



A) 

B) 

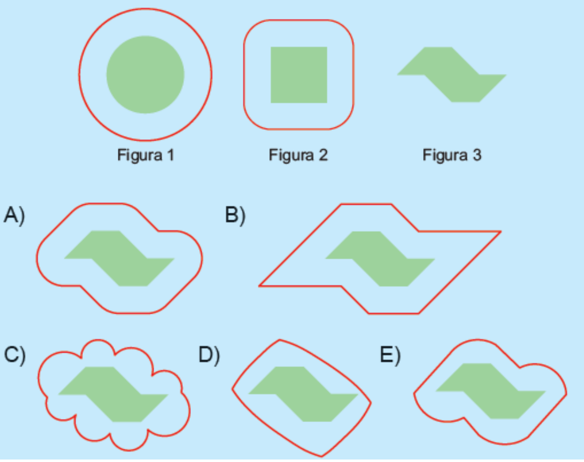
C) 

D) 

E) 

Q13 – OBMEP 2017

3. Um ponto está a 1 cm de uma figura quando a menor distância desse ponto aos pontos da figura é 1 cm. Celinha traçou com uma caneta vermelha todos os pontos que estão a 1 cm de distância do círculo da Figura 1. A seguir, ela fez o mesmo para a região quadrada da Figura 2. Qual é o desenho que ela vai obter se traçar todos os pontos que estão a 1 cm de distância da região poligonal da Figura 3?



APÊNDICE D

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

INSTITUTO FEDERAL
Piauí

PROFMAT

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

Participante:

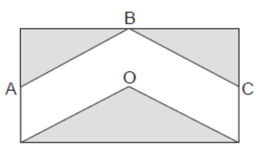
Atividades Orientadoras – 3º Encontro no LI – 16/08/17

Q1 – No site "ogeogebra" assistir ao vídeo 4 (perpendicular, paralela, mediatriz, bissetriz e mediana).

Q2 – No site "ogeogebra" baixar o texto 3 (perpendicular, paralela, mediatriz, bissetriz e mediana) e proceder às análises e construções.

Q3 – Construa e interprete a questão 1 da OBMEP de 2006 utilizando o *software* GeoGebra. Descreva os passos.

1. No retângulo ao lado, *A*, *B* e *C* são pontos médios de seus lados e *O* é o ponto de encontro de suas diagonais. A área da região sombreada é



(A) $\frac{1}{4}$ da área do retângulo.

(B) $\frac{1}{3}$ da área do retângulo.

(C) $\frac{1}{2}$ da área do retângulo.

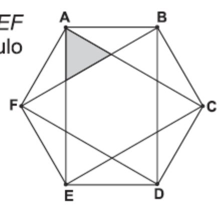
(D) $\frac{3}{5}$ da área do retângulo.

(E) $\frac{2}{3}$ da área do retângulo.

Q4 – Construa e interprete a questão 4 da OBMEP de 2007 utilizando o *software* GeoGebra. Descreva os passos.

4. A área do hexágono regular *ABCDEF* é 45 cm^2. Qual é a área do triângulo sombreado?

A) 2,0 cm²
B) 2,5 cm²
C) 3,0 cm²
D) 3,5 cm²
E) 4,0 cm²



Q5 – Descreva os aspectos que considerar positivos e/ou negativos deste encontro e as atividades desenvolvidas.

APÊNDICE E

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

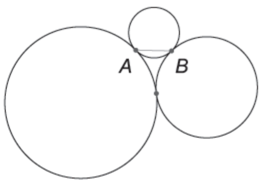
Participante:

Atividades Orientadoras – 4º Encontro no LI – 30/08/17

Q1 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 18 OBMEP 2010 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

18. A figura mostra três circunferências de raios 1, 2 e 3, tangentes duas a duas nos pontos destacados. Qual é o comprimento do segmento *AB*?

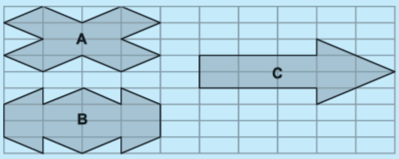
A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
D) $\frac{3}{2}$
E) $\sqrt{3}$



Q2 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 2 OBMEP 2011 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

2. Na malha retangular ao lado, o perímetro da figura A é 156 cm e o da figura B é 144 cm. Qual é o perímetro da figura C?

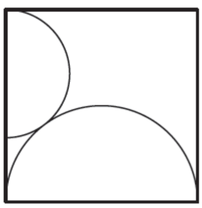
A) 125 cm
B) 144 cm
C) 160 cm
D) 172 cm
E) 175 cm



Q3 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 7 OBMEP 2011 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

7. Na figura, os dois semicírculos são tangentes e o lado do quadrado mede 36 cm. Qual é o raio do semicírculo menor?

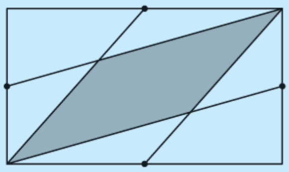
A) 8 cm
B) 9 cm
C) 10 cm
D) 11 cm
E) 12 cm



Q4 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 16 OBMEP 2011 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

16. A figura mostra um retângulo de área 42 cm^2 com os pontos médios dos lados em destaque. Qual é a área, em cm^2, da região cinza?

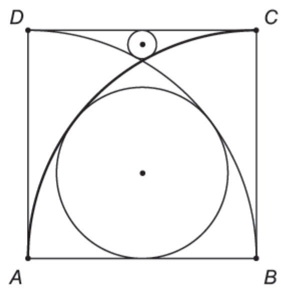
A) 8
B) 10
C) 12
D) 14
E) 16



Q5 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 10 OBMEP 2012 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

10. Na figura, *ABCD* é um quadrado de lado 1 e os arcos $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{AC}$ têm centros *A* e *B*, respectivamente. Os círculos tangenciam esses arcos e um lado do quadrado, como indicado. Qual é a razão entre os raios do círculo maior e do círculo menor?

A) 4,5
B) 5
C) 5,5
D) 6
E) 6,5



Q6 – Descreva os aspectos que considerar positivos e/ou negativos deste encontro e as atividades desenvolvidas.

APÊNDICE F

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

Participante:

Atividades Orientadoras – 5º Encontro no LI – 04/09/17 (Revisão)

Q1 – Utilizando o *software* Geogebra, construa um triângulo ABC qualquer e determine a medida de seus lados, o perímetro e a área.

Q2 – Utilizando o *software* Geogebra, construa uma circunferência de raio 3cm e determine seu comprimento e sua área.

Q3 – Utilizando o *software* Geogebra, trace duas retas concorrentes e determine as coordenadas do ponto de interseção.

Q4 – Utilizando o *software* Geogebra, trace um caminho poligonal com as coordenadas [(1,2), (3,1), (4,0), (3,4)].

Q5 – Utilizando o *software* Geogebra, construa um ângulo de 60º e determine sua bissetriz.

Q6 – Utilizando o *software* Geogebra, construa um triângulo ABC qualquer. A seguir construa o ponto de encontro G das medianas (baricentro). Mova um dos vértices do triângulo e verifique o que ocorre com o ponto G.

Q7 – Utilizando o *software* Geogebra, construa um triângulo ABC qualquer. A seguir construa o ponto de encontro F das mediatrizes (circuncentro). Mova um dos vértices do triângulo e verifique o que ocorre com o ponto F. Construa agora a circunferência circunscrita ao triângulo e determine o raio.

Q8 – Utilizando o *software* Geogebra, construa um triângulo ABC qualquer. A seguir construa o ponto de encontro Z das bissetrizes (incentro). Mova um dos vértices do triângulo e verifique o que ocorre com o ponto Z. Construa agora a circunferência inscrita ao triângulo e determine o raio.

Q9 – Utilizando o *software* Geogebra, construa um triângulo ABC qualquer. A seguir construa o ponto de encontro O das alturas (ortocentro). Mova um dos vértices do triângulo e verifique o que ocorre com o ponto O.

Q10 – Utilizando o *software* Geogebra, construa um círculo de raio 4 cm e um setor circular de ângulo 90º. Determine a área do segmento circular formado.

Q11 – Utilizando o *software* Geogebra, refaça todas as questões da OBMEP desenvolvidas até então.

APÊNDICE G

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

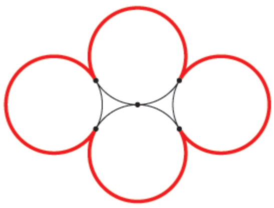
Participante:

Atividades Orientadoras – 6º Encontro no LI – 06/09/17

Q1 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 6 OBMEP 2013 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

6. A figura mostra quatro circunferências, todas de comprimento 1 e tangentes nos pontos indicados. Qual é a soma dos comprimentos dos arcos destacados em vermelho?

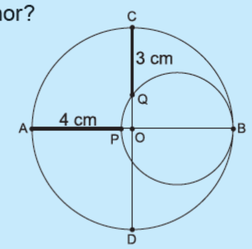
A) $\frac{3}{2}$
B) 2
C) $\frac{9}{4}$
D) $\frac{8}{3}$
E) 3



Q2 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 19 OBMEP 2013 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

19. Duas circunferências são tangentes internamente, como na figura. Os segmentos *AB* e *CD* são perpendiculares e o ponto *O* é o centro da circunferência maior. Os segmentos *AP* e *CQ* medem, respectivamente, 4 e 3 centímetros. Qual é a medida do raio do círculo menor?

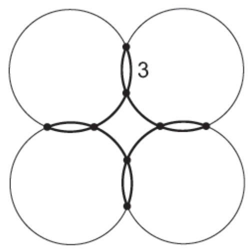
A) 2,25 cm
B) 2,5 cm
C) 2,75 cm
D) 3 cm
E) 3,5 cm



Q3 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 11 OBMEP 2014 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

11. Quatro circunferências de mesmo raio estão dispostas como na figura, determinando doze pequenos arcos, todos de comprimento 3. Qual é o comprimento de cada uma dessas circunferências?

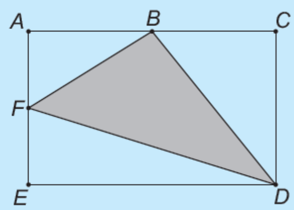
A) 18
B) 20
C) 21
D) 22
E) 24



Q4 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 4 OBMEP 2015 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

4. O retângulo da figura possui área igual a 640 cm^2. Os pontos *B* e *F* são pontos médios dos lados *AC* e *AE*, respectivamente. Qual é a área do triângulo *BDF*?

A) 100 cm²
B) 120 cm²
C) 160 cm²
D) 220 cm²
E) 240 cm²



Q5 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 17 OBMEP 2015 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

17. Na figura, *ABCD* é um trapézio inscrito numa circunferência. A base maior do trapézio mede 16 cm, a base menor 10 cm e a altura 9 cm. Qual é a medida, em centímetros, do raio da circunferência?

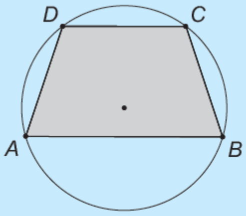
A) $\frac{7}{3}$

B) $\frac{25}{3}$

C) $\frac{35}{3}$

D) $\frac{40}{3}$

E) $\frac{50}{3}$



Q6 – Descreva os aspectos que considerar positivos e/ou negativos deste encontro e as atividades desenvolvidas.

APÊNDICE H

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

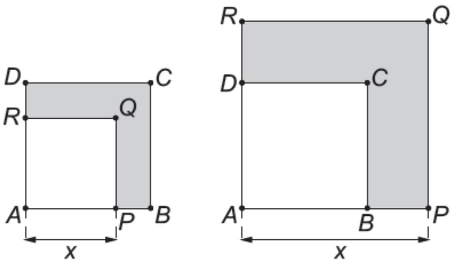
***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

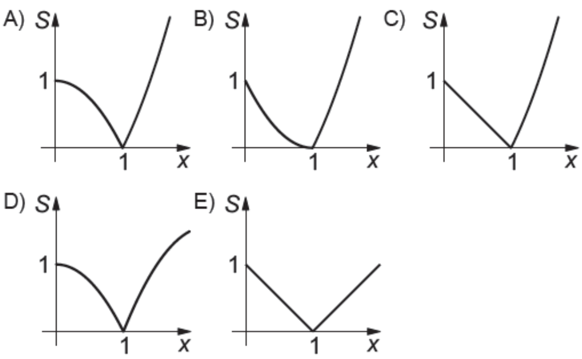
Participante:

Atividades Orientadoras – 7º Encontro no LI – 20/09/17

Q1 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 13 OBMEP 2015 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

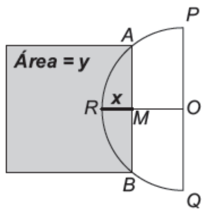
Um quadrado *ABCD* tem área 1. Um ponto *P* desloca-se ao longo da semirreta *AB*, partindo do ponto *A* para a direita, conforme mostra a figura. Se *S* é a área da região compreendida entre os quadrados *ABCD* e *APQR*, destacada em cinza, qual é o gráfico que melhor representa a variação de *S* em função de *x*?

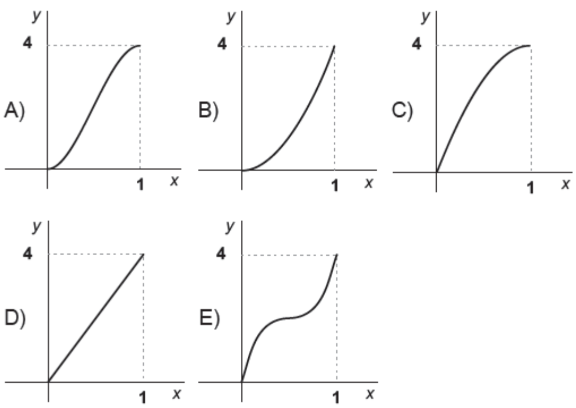




Q2 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 19 OBMEP 2009 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

O semicírculo da figura tem centro *O* e diâmetro $PQ = 2$ cm. O raio *OR* é perpendicular a *PQ*. Por um ponto qualquer *M* de *OR* traça-se a corda *AB* perpendicular a *OR*. Sejam *x* o comprimento de *RM*, em cm, e *y* a área do quadrado de lado *AB*, em cm². Qual dos gráficos abaixo expressa a relação entre *x* e *y*?





Q3 – Descreva os aspectos que considerar positivos e/ou negativos deste encontro e as atividades desenvolvidas.

APÊNDICE I

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

Participante:

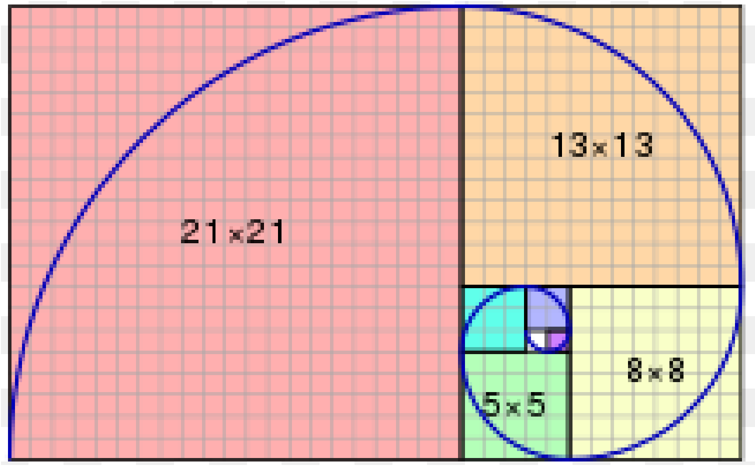
Atividades Orientadoras – 8º Encontro no LI – 10/10/17

1) Yin Yang é um princípio da filosofia chinesa, onde yin e yang são duas energias opostas. Yin significa escuridão sendo representado pelo lado pintado de preto, e yang é a claridade. A luz, que é uma energia luminosa e apresenta-se de maneira muito intensa, é o yang, e a luz muito fraca, é o yin. Segundo os chineses, o mundo é composto por forças opostas e achar o equilíbrio entre elas é essencial. Alguns autores descrevem como a lua e o sol, o homem e a mulher, mas são definições equivocadas. A filosofia chinesa é composta basicamente da energia, negativa e positiva. As duas esferas dentro do símbolo simbolizam a ideia de que, toda vez que cada uma das forças atinge seu ponto extremo, manifesta-se dentro de si um sentimento oposto. No mundo das tatuagens, o símbolo do yin yang é dos mais populares, dado que representa o equilíbrio.
Seguindo as medidas aproximadas da figura abaixo, faça a construção no GeoGebra e descreva os passos. **Pergunta: Com relação à área do círculo maior, qual a porcentagem que a área pintada representa? Obs.: desconsidere a espessura da borda.**

2) Dentre todos os mistérios da Matemática, a sequência de Fibonacci é considerada uma das mais fascinantes descobertas da história. A sequência de números proposta pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, possui o numeral 1 como o primeiro e o segundo termo da ordem, e os elementos seguintes são originados pela soma de seus dois antecessores, observe: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181...

Fibonacci surge por volta do ano de 1200 estabelecendo a famosa sequência, a partir de observações feitas na evolução da população de um casal de coelhos. Ao observar a beleza da natureza, descobriu a divina proporção em várias plantas, como por exemplo, a espiral da folha de uma bromélia. A espiral cresce na mesma medida que o retângulo de ouro, obedecendo a proporção de 1,618. Veja esquema na ilustração da evolução da espiral:

Seguindo as medidas abaixo, construa a figura no GeoGebra e descreva os passos. **Pergunta: Qual o comprimento da curva determinada pela Sequência de Fibonacci?**



3) Descreva os aspectos que considerar **positivos e/ou negativos** deste encontro e as atividades desenvolvidas.

APÊNDICE J

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

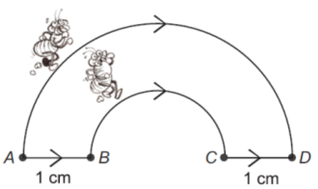
Participante:

Atividades Orientadoras – 10º Encontro no LI – 31/10/17

Q1 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 10 OBMEP 2007 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

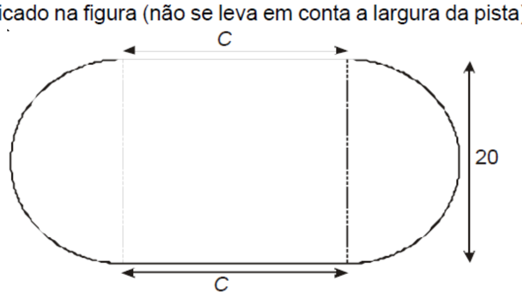
10. Duas formigas partem do ponto *A* e vão até o ponto *D*, andando no sentido indicado pelas flechas. A primeira percorre o semicírculo maior; a segunda, o segmento *AB*, o semicírculo menor e o segmento *CD*. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* estão alinhados e os segmentos *AB* e *CD* medem 1 cm cada um. Quantos centímetros a segunda formiga andou menos que a primeira?

A) 2
B) π
C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\pi - 2$
E) 2π



Q2 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 14 OBMEP 2005 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

14. Uma escola resolveu construir uma pista de corrida, formada por dois trechos retos de comprimento *C* e dois trechos semicirculares de raio igual a 10 metros, conforme indicado na figura (não se leva em conta a largura da pista).



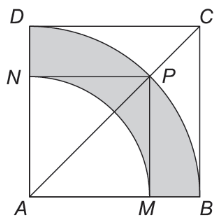
Os alunos da escola propuseram cinco valores para *C*: 20 m, 25 m, 30 m, 35 m e 40 m. Para qual desses valores de *C* a soma dos comprimentos dos trechos retos está mais próxima da soma dos comprimentos dos trechos semicirculares?

(A) 20 m
(B) 25 m
(C) 30 m
(D) 35 m
(E) 40 m

Q3 – Em conjunto com o pesquisador, descreva os passos para a construção da questão 08 OBMEP 2009 no *software* GeoGebra. Em seguida, **proceda à construção no *software***.

8. Na figura, *ABCD* e *AMPN* são quadrados e $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{MN}$ são arcos de círculos de centro *A*. Qual é a razão entre a área sombreada e a área do quadrado *ABCD*?

A) $\frac{\pi}{4}$
B) $\frac{\pi}{5}$
C) $\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{\pi}{7}$
E) $\frac{\pi}{8}$



Q4 – Descreva os aspectos que considerar positivos e/ou negativos deste encontro e as atividades desenvolvidas.

APÊNDICE K

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS

***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

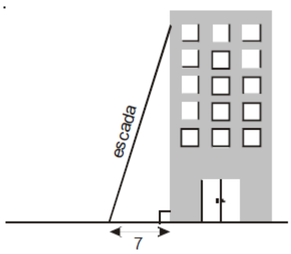
Participante:

PÓS-TESTE – 06/11/17

Q1 – OBMEP 2005

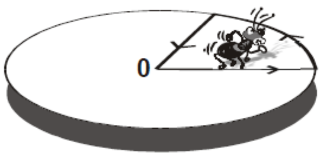
17. O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?

(A) 4 m
(B) 8 m
(C) 9 m
(D) 13 m
(E) 15 m

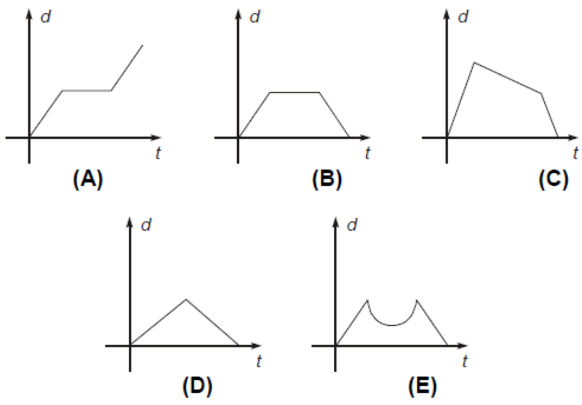


Q2 – OBMEP 2006

17. Uma formiguinha parte do centro de um círculo e percorre uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura.

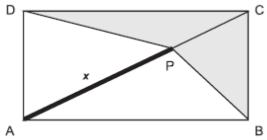


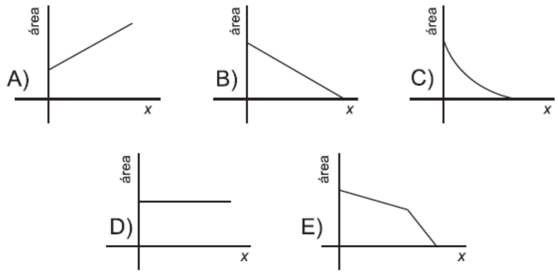
Qual dos gráficos a seguir representa a distância d da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo t?



Q3 – OBMEP 2007

18. Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do polígono *BCDP* em função da distância *x=AP*?

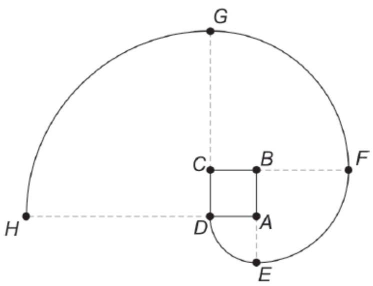




Q4 – OBMEP 2008

5. A figura mostra um quadrado *ABCD* de lado 1 cm e arcos de circunferência *DE*, *EF*, *FG* e *GH* com centros *A*, *B*, *C* e *D*, respectivamente. Qual é a soma dos comprimentos desses arcos?

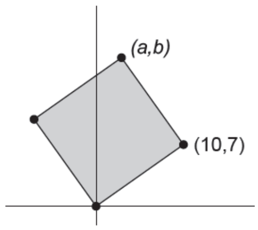
(A) 5π cm
(B) 6π cm
(C) 7π cm
(D) 8π cm
(E) 9π cm



Q5 – OBMEP 2009

6. O quadrado da figura tem um vértice na origem, outro no ponto (10,7) e um terceiro no ponto (a,b). Qual é o valor de $a + b$?

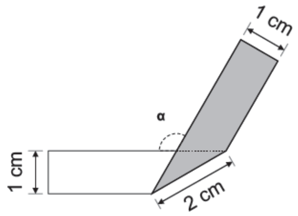
A) 20
B) 21
C) 22
D) 23
E) 24



Q6 – OBMEP 2010

13. Uma tira de papel retangular, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura. Qual é a medida do ângulo α?

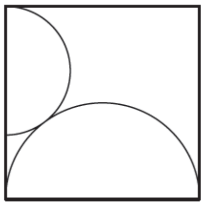
A) 110º
B) 115º
C) 120º
D) 125º
E) 130º



Q7 – OBMEP 2011

7. Na figura, os dois semicírculos são tangentes e o lado do quadrado mede 36 cm. Qual é o raio do semicírculo menor?

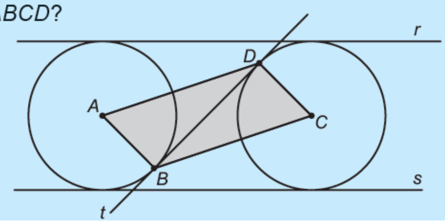
A) 8 cm
B) 9 cm
C) 10 cm
D) 11 cm
E) 12 cm



Q8 – OBMEP 2012

17. Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas e a distância entre elas é 2 cm. A reta *t* forma um ângulo de 45° com a reta *r*. Os círculos com centro em *A* e *C* tangenciam a reta *t* nos pontos *B* e *D*, respectivamente, e tangenciam as retas *r* e *s*. Qual é a área, em centímetros quadrados, do quadrilátero *ABCD*?

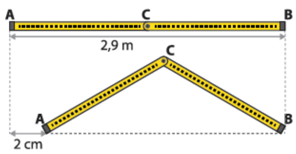
A) $\sqrt{2}$
B) 2
C) $1+\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$
E) 3



Q9 – OBMEP 2013

10. Uma escada com 2,9 metros de comprimento e uma articulação central **C** possui a extremidade **B** fixa no chão e a extremidade **A** móvel, conforme a figura. A escada, inicialmente estendida no chão, foi dobrada de tal forma que a extremidade **A** deslizou 2 centímetros. A quantos centímetros do chão ficou a articulação **C**?

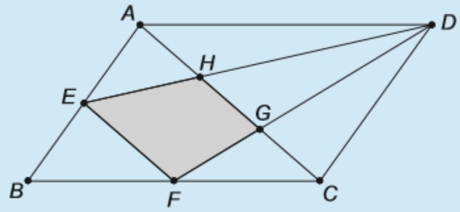
A) 2
B) 4
C) 8
D) 11
E) 17



Q10 – OBMEP 2014

16. O paralelogramo *ABCD* tem área 24 cm² e os pontos *E* e *F* são os pontos médios dos lados *AB* e *BC*, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero *EFGH*?

A) 4 cm²
B) 5 cm²
C) 6 cm²
D) 7 cm²
E) 8 cm²



Q11 – OBMEP 2015

17. Na figura, *ABCD* é um trapézio inscrito numa circunferência. A base maior do trapézio mede 16 cm, a base menor 10 cm e a altura 9 cm. Qual é a medida, em centímetros, do raio da circunferência?

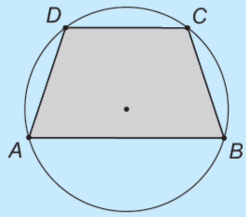
A) $\frac{7}{3}$

B) $\frac{25}{3}$

C) $\frac{35}{3}$

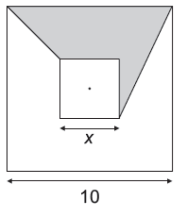
D) $\frac{40}{3}$

E) $\frac{50}{3}$



Q12 – OBMEP 2016

11. Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 e o menor tem lado *x*. Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de *x*?



A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Q13 – OBMEP 2017

3. Um ponto está a 1 cm de uma figura quando a menor distância desse ponto aos pontos da figura é 1 cm. Celinha traçou com uma caneta vermelha todos os pontos que estão a 1 cm de distância do círculo da Figura 1. A seguir, ela fez o mesmo para a região quadrada da Figura 2. Qual é o desenho que ela vai obter se traçar todos os pontos que estão a 1 cm de distância da região poligonal da Figura 3?

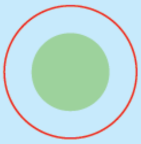
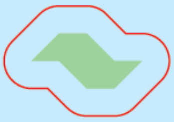
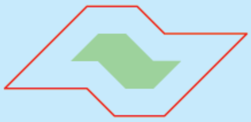


Figura 1

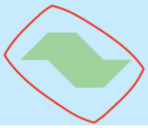
Figura 2

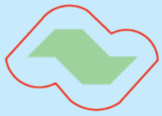
Figura 3

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

APÊNDICE L

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RICARDO DE CASTRO RIBEIRO SANTOS
***GeoGebra* como instrumento de mediação no ensino de geometria: o processo de transformação dos alunos que atuaram na OBMEP**

Participante:

Questionário

Responda, numa escala de ***1 (discordo completamente)*** a ***5 (concordo completamente)***, qual o seu grau de concordância com cada uma das afirmações seguintes:

Item	**1 – discorda completamente**	**2 – discorda**	**3 – sem opinião**	**4 - concorda**	**5 – concorda completamente**
1 - Você considera interessante o uso de recursos computacionais para sua aprendizagem de matemática?	☐	☐	☐	☐	☐
2 - O uso do GeoGebra trouxe algum benefício ou contribuição para o seu aprendizado na disciplina matemática?	☐	☐	☐	☐	☐
3 - Você considera que após as atividades realizadas sua habilidade no manuseio do *software* GeoGebra melhorou?	☐	☐	☐	☐	☐
4 - Conseguiu se apropriar de elementos fundamentais da matemática presentes na geometria?	☐	☐	☐	☐	☐
5 - Você considera que aumentou sua capacidade de interpretar questões de Geometria após o uso do *software* GeoGebra?	☐	☐	☐	☐	☐
6 - Foi mais fácil interpretar as questões de geometria da OBMEP utilizando o *software* GeoGebra?	☐	☐	☐	☐	☐
7 - Houve problemas de natureza técnica durante o uso do *software* GeoGebra nos laboratórios de informática?	☐	☐	☐	☐	☐
8 - As instruções para a execução das atividades envolvendo o uso do *software* GeoGebra na interpretação de questões de geometria da OBMEP foram adequadas?	☐	☐	☐	☐	☐
9 - Acredita que mais atividades com o uso do software GeoGebra, envolvendo outros conteúdos matemáticos, devam ser trabalhadas?	☐	☐	☐	☐	☐
10 – Você considera que sua motivação para estudar a disciplina matemática aumentou com as atividades com o GeoGebra?	☐	☐	☐	☐	☐