

**COLÉGIO PEDRO II**

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Bruno das Chagas Silva

**FRACTAIS GERADOS POR INVERSÕES NO CÍRCULO**

Rio de Janeiro  
2018



Bruno das Chagas Silva

## **FRACTAIS GERADOS POR INVERSÕES NO CÍRCULO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Marilis Bahr Karam Venceslau

Rio de Janeiro  
2018

**COLÉGIO PEDRO II**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**  
**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**  
**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

S586 Silva, Bruno das Chagas  
Fractais gerados por inversões no círculo / Bruno das Chagas  
Silva. –Rio de Janeiro, 2018.  
86 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa,  
Extensão e Cultura.  
Orientador: Marilis Bahr Karam.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Fractal. 3. Inversão no círculo.  
I. Karam, Marilis Bahr. II. Título.

CDD 510

Bruno das Chagas Silva

## **FRACTAIS GERADOS POR INVERSÕES NO CÍRCULO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_.

Banca Examinadora:

---

Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau (Orientadora)  
Colégio Pedro II

---

Dr. Nelson Maculan Filho - COPPE/UFRJ

---

Dra. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa  
Colégio Pedro II

Rio de Janeiro  
2018

Dedico este trabalho exclusivamente a Deus, porque dEle e por Ele, e para Ele são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém.

## AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado o fôlego de vida e me sustentando em cada madrugada de estudo. Eu não conseguiria chegar até aqui sem o direcionamento de suas mãos.

Aos meus pais, Sérgio Murilo e Lucineia Chagas, e meu irmão, Leonardo Chagas, por terem acreditado mais em mim do que eu mesmo, a convicção de vocês e as palavras de apoio foram essenciais nos momentos mais difíceis. Vocês, como sempre, têm grande parcela em mais esta conquista. Que Deus lhes dê longos anos de vida.

À minha esposa Kelly Chagas por suportar minha ausência nesses quase três anos de estudos e, que apesar disso, nunca me deixou desistir de nenhum dos meus sonhos me incentivando a cada dia. Que Deus nos conduza em todos os dias de nossas vidas.

Ao meu sobrinho Murilo, que por ser criança e não entender a seriedade desse curso, interrompia-me com suas risadas e corridas pelo quarto, proporcionando a mim momentos de descontração em meio ao estresse do estudo intenso. Que Deus guie seu desenvolvimento.

À minha orientadora Marilis Venceslau por ter se dedicado em orientações e esclarecimentos de dúvidas sem os quais seria impossível a conclusão deste trabalho. Que Deus abençoe a sua vida.

Aos professores do Colégio Pedro II que brilhantemente ministraram um excelente curso, não apenas transmitiram conhecimento, mas me ensinaram que podemos fazer o que temos que fazer com amor e dedicação.

Aos companheiros da primeira turma do PROFMAT – CP II pelas trocas de mensagens entre os dias de aula que ajudaram muito a solidificação do conhecimento adquirido.

“Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”

Lobachevsky

## RESUMO

SILVA, Bruno das Chagas. **Fractais gerados por inversões no círculo**. 2018. 86 f.. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

A Geometria Fractal é um ramo recente da Matemática criada por Benoit Mandelbrot em 1975. Essa proporciona modelos matemáticos mais apropriados para a representação de muitos fenômenos da natureza do que as figuras da geometria clássica. Quando se fala em fractais no Ensino Médio, geralmente, trata-se do conjunto de Cantor, do tapete de Sierpinski, da curva de Koch, ou outro exemplo qualquer de fractal linear para empregar a contextualização em alguns assuntos tais como: funções, progressões geométricas, logaritmos, etc.. Dessa forma, pode parecer que as noções de fractal e a de autossimilaridade exata estão “casadas”. Porém, há outras classes de fractais. Por exemplo, os fractais gerados por inversões no círculo, os quais diferem fundamentalmente dos fractais autossimilantes exatos. Esses fractais aparecem na forma de cristais líquidos, insetos, cefalópodes e até alguns tipos de plantas. Assim, pretende-se com este trabalho mostrar que o conceito de fractal é mais amplo do que é difundido, além de, concomitantemente, trabalhar com a inversão no círculo, uma transformação importante e fundamental na demonstração de alguns teoremas de Geometria, mas que não é estudada no Ensino Médio. Para isso, primeiro fala-se dos fractais autossimilantes exatos e seus exemplos clássicos. A seguir faz-se um estudo sobre inversão no círculo, para finalmente tratar dos fractais gerados por inversões no círculo.

**Palavras-chave:** Fractal; Inversão no Círculo; Fractais gerados por inversões.



## ABSTRACT

SILVA, Bruno das Chagas Silva. **Fractais gerados por inversões no círculo**. 2018. 86 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

The Fractal Geometry is a recent branch of Mathematics created by Benoit Mandelbrot in 1975. It provides more appropriate mathematical models to represent many phenomena of nature than classical geometric figures. When fractals are taught in high school, the Cantor set, the Sierpinski carpet, the Koch curve, or any other linear fractal example are used to employ contextualization in some subjects such as: functions, geometric progressions, logarithms, etc. Therefore, it may seem that the concepts of fractal and that of self-similarity are connected. But there are other classes of fractals. For instance, fractals generated by circle inversions, which differ fundamentally from the exact self-similar fractals. These fractals appear in the form of liquid crystals, insects, cephalopods and even some types of plants. Thus, the purpose of this work is to show that the concept of fractal is broader than it is widespread, while also, concurrently, working with the circle inversion, an important and fundamental transformation in the demonstration of some theorems of Geometry, but which is not studied in high school. For this purpose, firstly, the concept of the exact self-similar fractals and their classic examples are discussed. Then a study is made about circle inversion, to finally deal with the fractals generated by circle inversions.

**Keywords:** Fractal Geometry; Circle inversion; Self-inverse Fractals.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Samambaia de Barnsley.....	19
Figura 2 - Exemplo de fractal autoafim.....	20
Figura 3 - Contorno da costa da Grã-Bretanha.....	20
Figura 4 - Exemplo de fractal não linear.....	21
Figura 5 - Conjunto de Mandelbrot.....	21
Figura 6 - Segmento de reta dividido em $x$ partes.....	23
Figura 7 - Quadrado dividido em $x^2$ partes.....	23
Figura 8 - Cubo dividido em $x^3$ partes.....	24
Figura 9 - Fractal.....	25
Figura 10 - Construção do fractal por IFS.....	26
Figura 11 - Fractal Conjunto de Cantor.....	28
Figura 12 - Fractal Curva de Koch.....	29
Figura 13 - Estrela de Koch.....	30
Figura 14 - Fractal Triângulo de Sierpinski.....	31
Figura 15 - Fractal Tapete de Sierpinski.....	32
Figura 16 - Fractal Curva de Peano.....	33
Figura 17 - Fractal Curva de Hilbert.....	34
Figura 18 - Tetraedro de Sierpinski.....	35
Figura 19 - Esponja de Menger.....	37
Figura 20 - Duas secantes à circunferência com interseção em seu interior.....	40
Figura 21 - Duas secantes à circunferência com interseção em seu exterior.....	41
Figura 22 - Uma tangente e uma secante à circunferência.....	41
Figura 23 - Segmento de reta dividido harmonicamente.....	42
Figura 24 - Diâmetro de uma circunferência dividido harmonicamente.....	43
Figura 25 - Ângulo entre circunferências.....	44
Figura 26 - Circunferências ortogonais.....	44
Figura 27 - Circunferências contendo pontos de um segmento dividido harmonicamente.....	45
Figura 28 - Exemplos de inversões de pontos no círculo.....	47
Figura 29 - Inversão de um triângulo interno a $C_1$ .....	48
Figura 30 - Inversão de um ponto interior ao círculo.....	49
Figura 31 - Inversão de um ponto pertencente à circunferência.....	50

Figura 32 - Inversão de um ponto exterior ao círculo .....	50
Figura 33 - Inversão de uma circunferência que contenha centro de inversão.....	51
Figura 34 - Circunferência tangente ao círculo de inversão .....	52
Figura 35 - Circunferência secante ao círculo de inversão.....	52
Figura 36 - Inversão de uma circunferência externa ao círculo de inversão .....	53
Figura 37 - Inversão de uma circunferência ortogonal ao círculo de inversão.....	54
Figura 38 - Circunferências tangentes entre si e interiores disjuntos .....	56
Figura 39 - Círculo de inversão centrado no ponto de tangência entre $C_1$ e $C_2$ .....	56
Figura 40 - Resultados das inversões das circunferências $C_1$ , $C_2$ e $C_3$ .....	57
Figura 41 - Circunferências $C_5$ e $C_6$ tangentes a $C'_1$ , $C'_2$ e $C'_3$ .....	57
Figura 42 - Circunferências de Apolônio $C_8$ e $C_9$ .....	58
Figura 43 - Inversor de Peaucellier-Lipkin .....	58
Figura 44 - Máquina a vapor .....	59
Figura 45 - Conjunto limite das inversões de A .....	61
Figura 46 - Conjunto limite em quatro círculos e conjunto de Cantor .....	61
Figura 47 - Conjunto limite em cinco círculos .....	62
Figura 48 - Conjunto limite em cinco círculos .....	62
Figura 49 - Corrente de Poincarè.....	63
Figura 50 - Inversões sucessivas na corrente de Poincarè.....	64
Figura 51 - Fractal formado pelo conjunto limite de cinco círculos manualmente .....	64
Figura 52 - Fractal formado pelo conjunto limite de cinco círculos por computador .....	65
Figura 53 - Circunferências de Apolônio, $C_4$ e $C_5$ , referentes às circunferências $C_1$ , $C_2$ e $C_3$ .	66
Figura 54 - Circunferências de Apolônio, $C_2$ e $C_6$ , referentes às circunferências $C_1$ , $C_3$ e $C_5$ .	66
Figura 55 - Rede de Apolônio .....	67
Figura 56 - Gaxeta de Apolônio .....	67
Figura 57 - $C_1$ e $C_2$ disjuntos interiores a $C_3$ .....	68
Figura 58 - Circunferências $C_1$ , $C_2$ , $C_3$ e uma de suas circunferências de Apolônio .....	68
Figura 59 - Círculo de inversão $C_5$ .....	69
Figura 60 - Círculos de inversão $C_6$ , $C_7$ e $C_8$ .....	69
Figura 61 - Primeiro conjunto de inversões .....	70
Figura 62 - Segundo conjunto de inversões .....	70
Figura 63 - Circunferências tangentes $C_1$ , $C_2$ e $C_4$ .....	71
Figura 64 - Circunferência externa de Apolônio, $C_3$ , referente às circunferências $C_1$ , $C_2$ e $C_4$	71
Figura 65 - Círculo de inversão $C_5$ .....	72

Figura 66 - Círculos de inversão $C_6$ , $C_7$ e $C_8$ .....	72
Figura 67 - Primeiro conjunto de inversões .....	73
Figura 68 - Segundo conjunto de inversões .....	73
Figura 69 - Representação geométrica das moléculas na fase esméctica A.....	75
Figura 70 - Representação geométrica das camadas de um cristal líquido .....	76
Figura 71 - Simulação de formação das camadas na fase esméctica A .....	76
Figura 72 - Reflexão em espelho plano .....	83
Figura 73 - Rotação de um triângulo em torno de um ponto.....	83
Figura 74 - Translação de um triângulo.....	84
Figura 75 - Homotetia de triângulos.....	84
Figura 76 - Exemplo de empacotamento de círculos .....	85
Figura 77 - Primeiros passos de um empacotamento apolíneo .....	86

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>FRACTAIS.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Origem dos Fractais .....</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Caracterização de um fractal .....</b>	<b>18</b>
2.2.1	Autossimilaridade .....	19
2.2.2	Dimensão Fractal .....	22
2.2.3	Sistema de Funções Iteradas .....	25
<b>2.3</b>	<b>Alguns fractais clássicos .....</b>	<b>27</b>
2.3.1	Conjunto de Cantor.....	27
2.3.2	Curva de Koch .....	29
2.3.3	Triângulo de Sierpinski.....	31
2.3.4	Tapete de Sierpinski .....	32
2.3.5	Curva de Peano .....	33
2.3.6	Curva de Hilbert .....	34
2.3.7	Tetraedro de Sierpinski.....	35
2.3.8	Esponja de Menger .....	36
<b>3</b>	<b>INVERSÃO NO CÍRCULO.....</b>	<b>39</b>
<b>3.1</b>	<b>Conceitos preliminares .....</b>	<b>39</b>
3.1.1	Teorema das cordas .....	39
3.1.2	Divisão harmônica .....	42
3.1.3	Circunferências ortogonais .....	43
<b>3.2</b>	<b>Inversões no círculo .....</b>	<b>46</b>
<b>3.3</b>	<b>Algumas construções geométricas.....</b>	<b>48</b>
3.3.1	Inversão de um ponto.....	48
3.3.2	Inversão de uma circunferência que contenha o centro de inversão.....	51
3.3.3	Inversão de uma circunferência que não contenha o centro de inversão.....	52

3.3.4	Inversão de uma circunferência ortogonal ao círculo de inversão.....	54
<b>3.4</b>	<b>Exemplos de aplicações das inversões no círculo.....</b>	<b>55</b>
3.4.1	Circunferências de Apolônio .....	55
3.4.2	Inversor de Peaucellier-Lipkin .....	58
<b>4</b>	<b>FRACTAIS E INVERSÕES NO CÍRCULO.....</b>	<b>60</b>
<b>4.1</b>	<b>Conjunto Limite.....</b>	<b>60</b>
4.1.1	Conjunto limite de pontos.....	60
4.1.2	Conjunto limite de círculos de inversões.....	63
<b>4.2</b>	<b>Gaxeta de Apolônio.....</b>	<b>65</b>
4.2.1	Construção da gaxeta de Apolônio com círculos de inversões e circunferências ortogonais .....	68
4.2.2	Construção da gaxeta de Apolônio apenas com círculo de inversão.....	70
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO .....</b>	<b>74</b>
<b>5.1</b>	<b>Cristal líquido.....</b>	<b>74</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>77</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>78</b>
	<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>82</b>
	<b>APÊNDICE B .....</b>	<b>85</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A geometria de maior domínio popular, ainda hoje, é a euclidiana. Criada aproximadamente em 300 a.C., ela está presente em diversas atividades do nosso dia a dia: desde uma criança brincando com jogos geométricos, passando por um agricultor delimitando áreas, até um engenheiro criando seus projetos.

O avanço da tecnologia e a criação de computadores mais potentes possibilitaram ao matemático polonês Benoit Mandelbrot criar uma nova geometria, a geometria fractal. Sendo essa muito mais que uma ferramenta auxiliar, ela é, na verdade, uma linguagem capaz de descrever toda a natureza, desde vegetações e animais até muitos fenômenos físicos, como o rastro de um raio ou as marcas das ondas deixadas em areia.

A interdisciplinaridade entre a geometria fractal e outras áreas do conhecimento pode despertar maior interesse para o seu estudo, visto que não será apenas uma teoria restrita às paredes de uma sala de aula, mas sim um novo modo de enxergar a realidade do que acontece no mundo real.

Em geral, fractais aparecem no Ensino Médio em questões contextualizadas, onde suas propriedades geométricas são exploradas em assuntos tais como: funções, progressões geométricas, logaritmos, etc. Porém, pode-se ir mais longe. Ao invés de apenas diluir a geometria fractal em exemplos contextualizados para outros temas da Matemática, por que não incentivar o seu estudo promovendo uma atividade de pesquisa extraclasse com os alunos do Ensino Médio?

A Geometria Fractal permite conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático. Também possui muitas aplicações dentro e fora da Matemática.

Diante do exposto, a proposta deste trabalho é explorar mais este vasto universo da geometria fractal fazendo um estudo de uma classe pouco explorada de fractais, os fractais gerados por inversões no círculo.

Para desenvolver este trabalho será necessário falar também de transformações geométricas. Trataremos especificamente de uma delas: a inversão no círculo – um tipo de transformação geométrica que preserva ângulos e é uma importante ferramenta em geometria –, mas que não consta no currículo de Matemática do Ensino Médio no Brasil.

Sendo assim, este trabalho inicia-se com uma descrição histórica da geometria euclidiana e como se deu o surgimento da geometria fractal. São mostrados os exemplos

clássicos de fractais, a fim de ampliar a compreensão do assunto, e a forma de como construí-los.

Em seguida, será feito um estudo sobre as inversões no círculo. Neste estudo, tratar-se-ão dos resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Exemplos de sua aplicabilidade mostrarão a importância do assunto não apenas para a geometria fractal como também para outras disciplinas.

Por fim, um fractal gerado por inversões no círculo será analisado. Serão apresentadas algumas formas de confecção e exemplificado em que parte da natureza é possível localizá-lo, realçando, dessa forma, a importância que a presente geometria tem, não apenas como ferramenta auxiliar, mas como uma linguagem capaz de interpretar a realidade de alguns fenômenos da natureza.



## 2 FRACTAIS

Ao observar as formas da natureza em escalas cada vez menores – como a costa marítima de um país, as formas de algumas espécies de árvores, a formação dos raios, que possuem formações aleatórias – é possível encontrar propriedades matemáticas específicas, que fizeram com que o matemático Benoit Mandelbrot (1983), em 1975, as definisse por um nome até então inexistente: fractais.

Esse neologismo teve como base, no latim, o adjetivo *fractus*, que traduzido significa quebrado, particionado, fragmentado, condizendo exatamente com as características destacadas por Mandelbrot (1983), pois as estruturas observadas poderiam ser construídas a partir de inúmeras cópias de seus próprios fragmentos.

A exploração da geometria fractal diminui a crença de que a matemática é apenas a relação entre números e o ato de decorar fórmulas, pois ela na verdade vai bem além, possibilitando: reproduzir, quase que de forma fiel, tudo que é visto; quantificar distâncias; quantificar temperaturas; organizar objetos, desenvolver as artes e muitas outras conquistas além do que se poderia inicialmente imaginar (FRAME; URRY, 2016a).

Atualmente, devido ao desenvolvimento da informática, com o auxílio dos computadores e com algumas condições iniciais específicas, algoritmos recursivos conseguem gerar fractais muito semelhantes às formas encontradas na natureza e que muitas vezes são usadas para cenários em filmes, telas para quadros, entre outras produções artísticas.

### 2.1 Origem dos Fractais

Por volta de 300 a.C. com a morte de Alexandre, o Grande, rei da Macedônia, Ptolomeu I, um de seus generais, passou a comandar a parte egípcia do império grego. Em seus esforços para desenvolver Alexandria, construiu um instituto, sem precedentes em seu tempo, chamado Museu. Era lá que estavam os mais importantes matemáticos, físicos e filósofos da época. Entre esses notáveis homens, estava Euclides de Alexandria (BOYER, 1974).

Considerado o pai da geometria, esse matemático grego foi responsável por compilar “Os Elementos”, compêndio em que constava todo o conhecimento sobre geometria até o momento. Não se tem certeza se o intuito dessa obra era didático ou preservar uma herança matemática bem desenvolvida em sua época, cuja origem foi no século VI a.C. com os estudos de Tales de Mileto (ÁVILA, 2001).

Nessa obra, composta por treze livros, encontram-se os cinco postulados de Euclides que continuam sendo utilizados em todo o mundo, principalmente no que se refere ao ensino da geometria.

Ao longo dos séculos, muitos matemáticos se empenharam em provar o quinto postulado de Euclides, conhecido atualmente como Axioma das Paralelas, por não acreditarem se tratar de um postulado, mas sim de uma consequência dos quatro postulados anteriores a esse (KUBRUSLY, 2004).

Na ânsia pela obtenção desse resultado, Crilly (2017) afirma que três matemáticos se destacaram: o húngaro János Bolyai que, em 1831, concluiu e publicou ser realmente impossível obter a prova do quinto postulado com base nos outros quatro; de forma independente, o matemático russo Nikolai Lobachevsky que, em 1829, chegou à mesma conclusão; e o matemático alemão Carl Friedrich Gauss que, apesar de não publicar, já havia obtido resultados semelhantes em 1817. Com essa nova descoberta, outras ramificações da Geometria puderam ser exploradas.

A geometria euclidiana é fundamental para o estudo de áreas, volumes e formas de desenhos geométricos. Mas é incapaz de reproduzir fidedignamente os elementos da natureza, pois as formas de uma montanha, os contornos de uma nuvem, ou o curso formado por um rio não podem ser representados apenas por circunferências, cones, linhas, ou quaisquer outros elementos característicos dessa geometria (MANDELBROT, 1983).

Surgiu então a necessidade de uma nova geometria que tivesse condições de representar a complexidade e irregularidade inerentes à natureza. Esta foi criada em 1975 por Benoit Mandelbrot (1983), e ficou conhecida como geometria fractal.

Apesar de ser uma criação recente, alguns dos elementos que compõem sua base de estudo são bem anteriores ao período de sua formação. Esses tiveram início no final de século XIX, mais precisamente em 1872, com uma função descoberta pelo matemático alemão Karl Weierstrass, cuja característica era de ser contínua e não derivável em nenhum de seus pontos (ROQUE, 2012). Isso contrariava a noção de função contínua existente até então. Esse não foi o único exemplo, pois muitos outros surgiram: a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski, a Poeira de Cantor, a Curva de Peano, a Curva de Hilbert, o Conjunto de Julia, entre outros.

Objetos geométricos como estes foram considerados casos patológicos e compunham uma coleção conhecida como “galeria de monstros”. E, apesar de seus criadores Helge von Koch, Waclaw Sierpinski, Georg Cantor, Giuseppe Peano, David Hilbert e Gaston Julia não terem desenvolvido uma nova geometria com base neles, estes foram fundamentais para os estudos de Benoit Mandelbrot.

Segundo Barbosa (2005), Benoit Mandelbrot, conhecido como pai da geometria fractal, nasceu em Varsóvia, Polônia, no ano de 1924. Mudou-se com sua família para Paris, onde estudou entre os anos de 1945 e 1947 na Escola Politécnica, uma das mais antigas e conceituadas escolas de engenharia da França.

Nesta época, muitos matemáticos do mundo todo foram influenciados pelo grupo Bourbaki. O grupo era formado por jovens matemáticos, principalmente franceses. Estes desejavam a reconstrução da Matemática baseando-se em um rigor matemático excessivo, ignorando por completo a influência do apelo visual. Todavia Mandelbrot não se adequou ao método abstrato de estudar Matemática e, por isso, em 1948, prosseguiu sua vida acadêmica indo estudar Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos, tendo assim a oportunidade de trabalhar em uma das empresas mais avançadas em tecnologia na sua época, a IBM.

Com o apoio de um avançado sistema de computadores, Mandelbrot tanto solucionou problemas utilizando algumas das funções descobertas décadas antes, as conhecidas como patológicas, quanto conseguiu achar padrões inesperados em dados estatísticos totalmente imprevisíveis, tornando-se um professor reconhecido e respeitado em algumas das principais instituições de ensino superior dos Estados Unidos.

Benoit Mandelbrot foi o responsável por embasar e divulgar essa nova geometria através de seus livros: “Fractals: Form, Chance and Dimension”, publicado em 1977; e “The Fractal Geometry of Nature”, publicado em 1982.

## **2.2 Caracterização de um fractal**

Os objetos geométricos atualmente conhecidos como fractais ainda estão sendo explorados e muitas das suas características vêm sendo analisadas, desde sua criação por Mandelbrot, com o intuito de se chegar a uma definição mais precisa que possa, enfim, classificar um objeto como sendo fractal. Mandelbrot (1983), originalmente, propôs uma definição técnica em termos de dimensão. Porém existia uma variedade de objetos que não satisfaziam esta definição, mas deveriam claramente ser considerados fractais. Assim, esta definição foi abandonada (FALCONER, 2013).

De acordo com Falconer (1997, 2013) um objeto, além de ser capaz de ter uma dimensão fractal, o que será detalhado em 2.2.2, pode ser classificado como fractal quando possui todas ou a maioria das propriedades citadas abaixo:

- De tal forma irregular que métodos clássicos da geometria e da matemática não se aplicam a este objeto;

- Apesar de, às vezes, parecer complexo, é formado por um processo simples, gerado de forma iterativa ou recursiva;
- Na maioria das vezes, tem aparência semelhante a elementos encontrados na natureza;
- Estrutura fina, ou seja, uma estrutura detalhada em escalas arbitrariamente pequenas;
- Possui alguma forma de autossimilaridade que pode se manifestar como: autossimilaridade exata; autoafinidade; autossimilaridade estatística (a autossimilaridade ou a autoafinidade podem incorporar elementos randômicos) e autossimilaridade qualitativa (como em séries temporais).

### 2.2.1 Autossimilaridade

A noção de autossimilaridade admite muitas variações.

Um fractal autossimilar exato é feito de várias cópias similares menores dele mesmo. São estruturas que apresentam padrões gerados matematicamente, os quais podem ser criados a partir de variações de escala, rotação ou translação da figura original. A samambaia de Barnsley (Figura 1) é um exemplo de um fractal autossimilar.

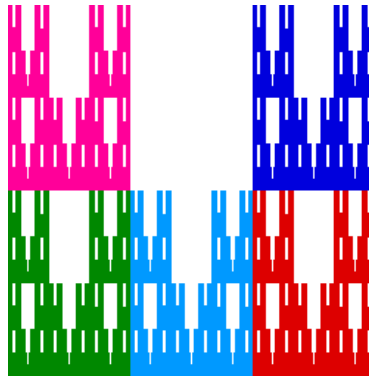
*Figura 1 - Samambaia de Barnsley*



*Fonte: Wikipedia. Disponível em:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Barnsley\\_fern](https://en.wikipedia.org/wiki/Barnsley_fern).  
Acesso em: 20 fev. 2018.*

A **autoafinidade** é uma característica dos fractais que possuem diferentes fatores de escalas em diferentes direções. A Figura 2, abaixo, apresenta um tipo de fractal autoafim. Cada cópia menor da figura original tem um fator de escala  $1/3$  na direção horizontal e de  $1/2$  na direção vertical.

*Figura 2 - Exemplo de fractal autoafim*



*Fonte: FRAME; URRY, 2016b.*

A **autossimilaridade estatística** é uma outra variação de construções autossimilares obtida através da introdução de um elemento randômico na construção de um fractal, o que frequentemente resulta em uma aparência mais natural. A autossimilaridade estatística, na modificação de cada segmento, segue o mesmo procedimento randômico em todo estágio de construção desse fractal. O contorno da costa da Grã Bretanha é um exemplo de fractal com autossimilaridade estatística (Figura 3).

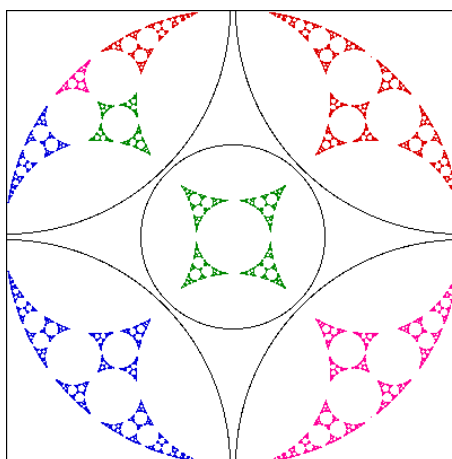
*Figura 3 - Contorno da costa da Grã-Bretanha*



*Fonte: Wikipedia. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Britain-fractal-coastline-combined.jpg>. Acesso em: 20 fev. 2018.*

Uma outra generalização de autossimilaridade foi feita para incluir transformações não lineares: o fator de escala depende da localização. Entre esses, há os chamados de fractais de inversões no círculo (em inglês, self-inversive fractal). A Figura 4 ilustra um fractal gerado por muitas iterações de um processo chamado inversão em um círculo, assunto que será tratado no próximo capítulo.

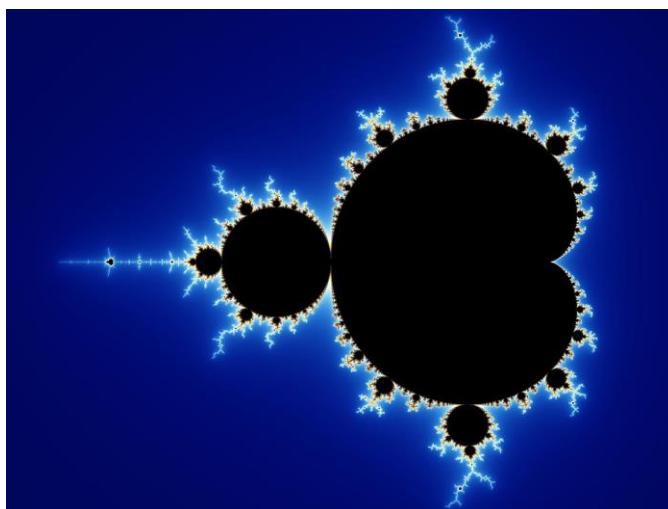
*Figura 4 - Exemplo de fractal não linear*



*Fonte: FRAME; URRY, 2016b.*

Um outro exemplo de fractal não linear é o Conjunto de Mandelbrot (Figura 5).

*Figura 5 - Conjunto de Mandelbrot*



*Fonte: Wikipedia. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set). Acesso: 20 fev. 2018.*

### 2.2.2 Dimensão Fractal

As noções primitivas da geometria escritas por Commandino (2009) são a referência para classificação de outros elementos estudados na geometria clássica, são elas:

- Ponto é uma representação geométrica sem parte alguma;
- Linha é o que tem comprimento, porém sem largura;
- Superfície plana tem largura e comprimento;
- Sólido, cujos termos são superfícies, tem largura, comprimento e profundidade.

Com base nisso, até o início do século XX, era de se esperar que qualquer objeto presente na natureza pudesse ser relacionado a essa classificação, ou seja, todos os sólidos teriam dimensão 3, pois seriam necessários três parâmetros para sua existência: largura, comprimento e profundidade. Seguindo esse mesmo raciocínio, as superfícies teriam dimensão 2, linhas teriam dimensão 1 e ponto não teria dimensão, o que seria representado por uma dimensão 0.

Contudo, algumas construções ficaram à margem dessa teoria, como é o exemplo do movimento browniano que preenche, quase completamente, o espaço, mas que do ponto de vista topológico é uma curva e deveria ter dimensão 1, ou a curva de preenchimento do plano do italiano Giuseppe Peano que por ser formada apenas por linhas deveria ter dimensão topológica 1, mas preenche por completo o plano (MANDELROT, 1983). Côrtes (2014) esclarece com maiores detalhes o conceito de dimensão topológica.

O conceito de dimensão euclidiana está relacionado ao número de eixos necessários para a descrição única de um objeto. Já a dimensão oriunda da topologia, parte da geometria criada a partir do século XX que estuda a forma do objeto, surgiu como extensão do conceito da geometria euclidiana, enquanto os matemáticos estudavam como seria possível um objeto unidimensional preencher um plano que possui dimensão 2.

Mesmo mais desenvolvida que a dimensão euclidiana, a dimensão topológica não foi suficiente para classificação dos objetos fractais. Foi necessária a criação da dimensão fractal, a qual representa o grau de ocupação desses objetos no espaço.

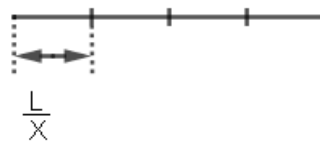
A dimensão foi a parte central dos conceitos usados por Mandelbrot (1983). Em suas pesquisas, encontrou valores fracionários ou irracionais para as dimensões dos fractais, diferentemente do que ocorria nos elementos abordados pela geometria euclidiana. Devido a essa característica específica dos fractais, ele priorizou o cálculo da dimensão de um objeto

geométrico em detrimento ao aspecto visual para classificá-lo como sendo fractal. Atualmente, conforme já mencionado anteriormente, essa caracterização de fractal foi abandonada.

Dimensões geométricas que não tenham como resultados números inteiros são incomuns para quem tem contato apenas com a geometria euclidiana. Contudo, analisando alguns exemplos comuns à própria geometria euclidiana, é possível entender como calcular o valor da dimensão de alguns fractais clássicos, usando a chamada dimensão de similaridade (SALLUM, 2005).

Ao se dividir um segmento de reta, que possui dimensão 1, de tamanho  $L$  em  $X$  partes iguais (Figura 6), cada um desses novos segmentos representará uma redução de  $B = \frac{1}{X}$  do segmento original.

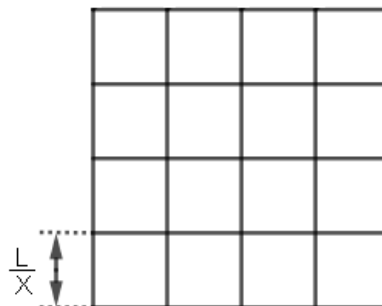
*Figura 6 - Segmento de reta dividido em  $x$  partes*



*Fonte: O autor, 2018.*

Dessa mesma forma, ao se dividir os lados de tamanho  $L$  que formam um objeto de dimensão 2 em  $X$  partes iguais (Figura 7), cada um desses  $A = X^2$  novos objetos terão seus lados reduzidos de um fator  $B = \frac{1}{X} = \frac{1}{\sqrt{A}}$  em relação aos lados do objeto original.

*Figura 7 - Quadrado dividido em  $x^2$  partes*

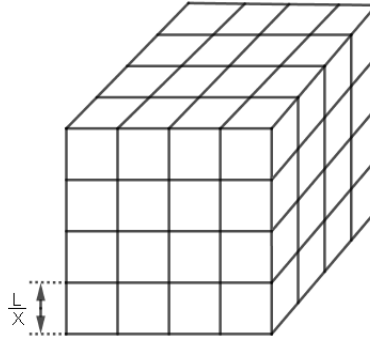


*Fonte: O autor, 2018.*



Igualmente, ao se dividir os lados de tamanho  $L$  que formam um objeto de dimensão 3 em  $X$  partes iguais, conforme a Figura 8 ilustra abaixo, cada um desses  $A = X^3$  novos objetos terão seus segmentos reduzidos de um fator  $B = \frac{1}{X} = \frac{1}{\sqrt[3]{A}}$  em relação aos lados do objeto original.

Figura 8 - Cubo dividido em  $x^3$  partes



Fonte: O autor, 2018.

Generalizando, ao se dividir os lados que formam um objeto de dimensão  $D$  em  $X$  partes iguais, de forma a obter  $A = X^D$  objetos semelhantes a esse, seus segmentos serão reduzidos por um fator  $B = \frac{1}{X} = \frac{1}{\sqrt[D]{A}}$ . Com o objetivo de calcular o valor da dimensão, após uma organização na equação, aplica-se logaritmo em ambos os termos como descrito abaixo:

$$B = \frac{1}{\sqrt[D]{A}}$$

$$\sqrt[D]{A} = \frac{1}{B}$$

$$\ln(\sqrt[D]{A}) = \ln\left(\frac{1}{B}\right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{D} \ln A = \ln\left(\frac{1}{B}\right)$$

$$D = \frac{\ln A}{\ln\left(\frac{1}{B}\right)}$$

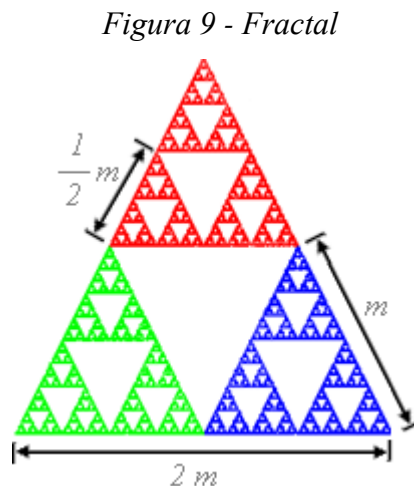
Esse cálculo pode ser empregado nos fractais que possuem autossimilaridade exata, aqueles cujas partes fragmentadas são cópias reduzidas deles mesmos.

Outros métodos mais gerais segundo Mandelbrot (1983) – como, por exemplo, a dimensão box-counting e, a mais usada pelos matemáticos, a dimensão de Hausdorff –, também são usados para calcular a dimensão de fractais com autossimilaridade exata, mas são principalmente empregados em fractais que não apresentam esta propriedade já que o método por similaridade é ineficaz para esses tipos de fractais.

### 2.2.3 Sistema de Funções Iteradas

Embora muitos fractais pareçam possuir estruturas complexas e serem cheios de detalhes intrincados, estes podem ser construídos através de regras aplicadas repetidamente – cada regra pode ser descrita como uma combinação de quatro tipos de operações: redução; reflexão, rotação e translação (APÊNDICE A) – a sequência de imagens produzidas converge para a mesma forma e cada uma das regras deve transformar a forma em uma cópia menor de si mesma. Esse processo é conhecido como Sistema de Funções Iteradas (IFS) (FRAME; URRY, 2016a).

Construir os fractais mais simples envolvem duas etapas, a primeira é identificar que esse fractal  $A$  é formado por algumas cópias menores  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$  de  $F$  e a segunda é identificar, para cada cópia menor  $F_i$ , quais seriam as transformações aplicadas ao fractal  $F$  de forma a ser transformado em cada uma das partes menores  $F_i$ . Observe a aplicação desse método no fractal da Figura 9.

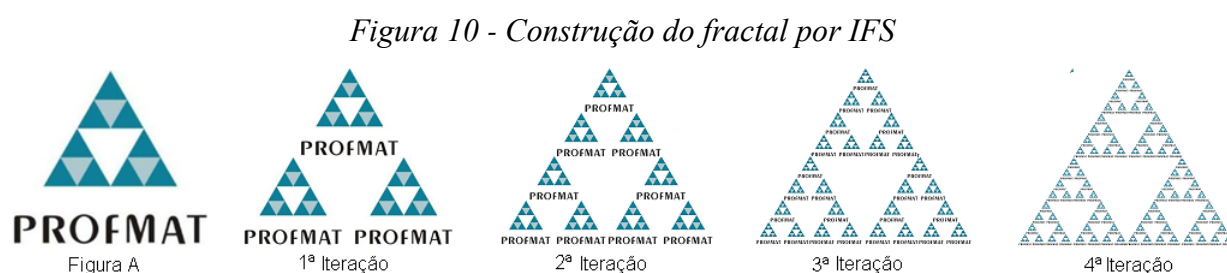


*Fonte: O autor, 2018.*

É fácil observar na Figura 9 que, se o triângulo equilátero original possuir lado  $2m$ , ele pode ser fragmentado em três triângulos de lado  $m$  (vermelho, azul e verde) semelhantes a si mesmo. Além disso, os triângulos azul e vermelho são resultados de uma contração seguida de uma translação do triângulo original. Esse mesmo resultado pode ser obtido em sucessivas etapas de divisões. Sendo assim, esse fractal pode ser formado por IFS.

Conhecidas as regras de formação de um fractal, é possível iniciar sua construção com qualquer figura, tendo sempre o mesmo resultado final. A essa figura final invariante é dado o nome de Atrator (JANOS, 2009). Para exemplificar essa construção, será utilizada a insígnia do “PROFMAT”, conforme mostra a Figura 10.

Após a escolha da figura inicial  $A$ , é formado um conjunto de cópias modificadas dessa figura através das mesmas transformações afins que geraram  $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots F_n$ . O mesmo procedimento é empregado no conjunto formado por essas cópias e assim sucessivamente. A cada um desses passos, Frame e Urry (2016a) chamam de iterações.



*Fonte: O autor, 2018.*

Estes autores afirmam que posicionando a figura original em um quadrado unitário cuja origem esteja no canto inferior esquerdo do plano cartesiano, existem seis variáveis possíveis para a formação de fractais autossimilares:

- $r$  indica variações na direção horizontal;
- $s$  indica variações na direção vertical;
- $\theta$  indica rotação de linhas horizontais sobre a origem, com ângulos positivos indicando rotações no sentido anti-horário;
- $\varphi$  indica rotação de linhas verticais sobre a origem, com ângulos positivos indicando rotações no sentido anti-horário;
- $e$  indica translação horizontal;
- $f$  indica translação vertical.

A Tabela 1 mostra os dados das variáveis das três figuras utilizadas, em cada iteração, para a construção do fractal exposto na Figura 10.

*Tabela 1 - Dados referentes às iterações na construção do fractal*

r	s	$\theta$	$\phi$	e	f
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

*Fonte: O autor, 2018.*

Sistemas de funções iteradas também podem ser utilizados para gerar fractais mediante um processo randômico, porém este assunto não será tratado neste trabalho.

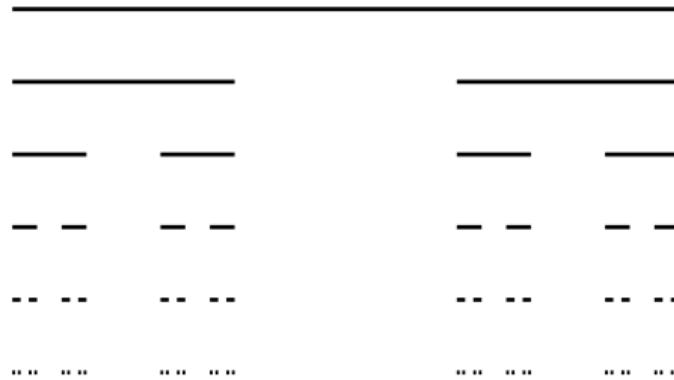
## 2.3 Alguns fractais clássicos

### 2.3.1 Conjunto de Cantor

O matemático Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em 1845, em São Petersburgo, Rússia. Aos onze anos de idade, emigrou para Frankfurt na Alemanha com seus familiares devido a problemas de saúde do seu pai. Em sua formação acadêmica teve passagens por ilustres universidades, como Göttingen, de Berlim e de Zurique. Cantor morreu em 1918 após várias internações por conta de suas depressões nervosas (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998).

A Poeira de Cantor (Cantor Dust), também conhecida como Conjunto de Cantor (Figura 11), foi publicada em 1883 pelo próprio Cantor como base do desenvolvimento da teoria dos conjuntos, um dos assuntos profundamente estudado por ele. Talvez esse seja o fractal mais antigo que se tenha conhecimento (BARBOSA, 2005).

*Figura 11 - Fractal Conjunto de Cantor*



*Fonte: O autor, 2018.*

A construção do Conjunto de Cantor ocorre da seguinte forma:

Passo 1: Obter um segmento de reta;

Passo 2: Dividi-lo em três partes iguais, eliminando a parte central;

Passo 3: Repetir, indefinidas vezes, o passo 2 nos segmentos de reta que restaram;

O Conjunto de Cantor é exatamente o resultado desse processo sucessivo e infundável de divisões.

Cálculo da dimensão:

Objetos semelhantes ao anterior após uma divisão (A): 2

Fator de redução (B):  $\frac{1}{3}$

Segundo a relação de semelhança:

$$D = \frac{\ln A}{\ln \left(\frac{1}{B}\right)}$$

Para os dados fornecidos, tem-se:

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad (2)$$

ou

$$D \cong 0,63093.$$

### 2.3.2 Curva de Koch

Niels Fabian Helge Von Koch nasceu em 1870. Aos 17 anos deu início aos estudos na universidade de Estocolmo, Suécia, até a conquista de seu doutorado, em 1892, onde trilhou uma brilhante trajetória como aluno. Nos 12 anos seguintes, Von Koch atuou como professor adjunto dessa mesma universidade, passando ainda, em 1911, a atuar como professor de matemática na Universidade de Estocolmo. Morreu jovem em 1924.

A Curva de Koch (Figura 12) foi publicada em 1906, em um de seus trabalhos que tinha por objetivo descobrir outros exemplos de funções contínuas não deriváveis similares àquela exposta por Karl Weierstrass em 1872 (O'CONNOR; ROBERTSON, 2000).

*Figura 12 - Fractal Curva de Koch*



*Fonte: Figura adaptada de FALCONER, 1990.*

A construção da Curva de Koch ocorre da seguinte forma:

- Passo 1: Construir um segmento de reta;
- Passo 2: Dividir este segmento em três partes iguais;
- Passo 3: Construir um triângulo equilátero na parte central;
- Passo 4: Remover a base deste triângulo;
- Passo 5: Repetir, indefinidamente, os passos 1, 2 e 3;

Cálculo da dimensão:

Objetos semelhantes ao anterior após uma divisão (A): 4

Fator de redução (B):  $\frac{1}{3}$

Segundo a relação de semelhança:

$$D = \frac{\ln A}{\ln \left(\frac{1}{B}\right)}$$

Para os dados fornecidos, tem-se:

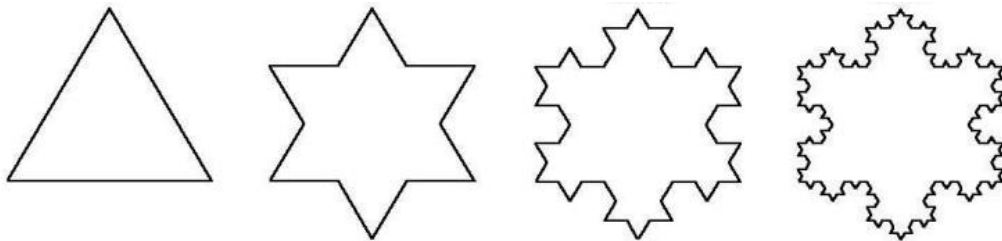
$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \quad (3)$$

ou

$$D \cong 1,2618.$$

Há outro fractal derivado da Curva de Koch conhecido como Estrela de Koch ou Floco de neve de Koch (Figura 13). Nele, ao invés de se começar a construção apenas com um segmento de reta, a figura inicial contém três segmentos dispostos de tal forma que gerem um triângulo equilátero. As transformações realizadas em cada lado são idênticas às utilizadas para formar a Curva de Koch.

*Figura 13 - Estrela de Koch*



*Fonte: Figura adaptada de JANOS, 2009.*

Cálculo da dimensão:

Objetos semelhantes ao anterior após uma divisão (A): 4

Fator de redução (B):  $\frac{1}{3}$

Segundo a relação de semelhança:

$$D = \frac{\ln A}{\ln \left(\frac{1}{B}\right)}.$$

Para os dados fornecidos, tem-se:

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \tag{4}$$

ou

$$D \cong 1,2618.$$

### 2.3.3 Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski nasceu em Varsóvia, Polônia no ano de 1882. Teve sua formação acadêmica na universidade de Varsóvia. Escreveu um total de 724 artigos e 50 livros sobre diversos temas da matemática, como por exemplo, teoria dos números, topologia e teoria dos conjuntos, entre outros. Durante a pesquisa da caracterização topológica dos conjuntos de números reais ele descobriu um fractal que leva seu próprio nome: Triângulo de Sierpinski (Figura14). Faleceu no ano de 1969 no país onde nasceu (O'CONNOR; ROBERTSON, 1997).

*Figura 14 - Fractal Triângulo de Sierpinski*



*Fonte: Figura adaptada de FALCONER, 1990.*

A construção do Triângulo de Sierpinski (Figura14) ocorre da seguinte forma:

Passo 1: Construir um triângulo equilátero;

Passo 2: Dividir os três lados nos seus pontos médios;

Passo 3: Unir os pontos médios com segmentos de reta, formando quatro triângulos idênticos. A parte interior do triângulo formado pelos pontos médios será retirada;

Passo 4: Repetir, indefinidamente, os passos 2 e 3 nos três triângulos restantes.

Cálculo da dimensão:

Objetos semelhantes ao anterior após uma divisão (A): 3

Fator de redução (B):  $\frac{1}{2}$

Segundo a relação de semelhança:

$$D = \frac{\ln A}{\ln \left(\frac{1}{B}\right)}$$

Para os dados fornecidos, tem-se:

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \quad (5)$$



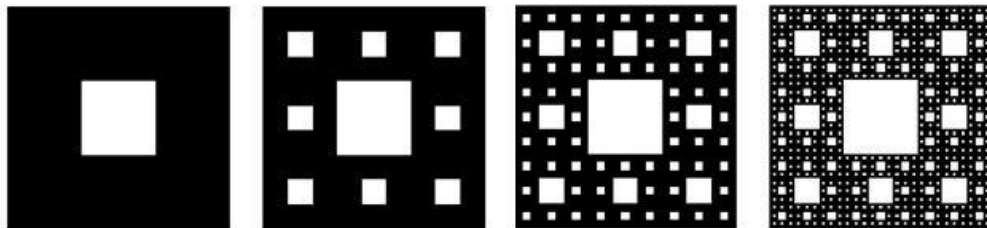
ou

$$D \cong 1,5850.$$

### 2.3.4 Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski (Figura 15) é outro fractal de Sierpinski, cuja construção assemelha-se muito ao já citado triângulo de Sierpinski. Devido à possibilidade de transmissão em uma extensa faixa de frequências e a simplicidade em sua fabricação, esse fractal é frequentemente usado em antenas para celular (FRAME; URRY, 2016a).

*Figura 15 - Fractal Tapete de Sierpinski*



*Fonte: O autor, 2018.*

Sua construção ocorre da seguinte forma:

Passo 1: Construir um quadrado;

Passo 2: Dividi-lo em nove quadrados, retirando o quadrado central;

Passo 3: Repetir, indefinidamente, o passo anterior nos oito quadrados restantes.

Cálculo da dimensão:

Objetos semelhantes ao anterior após uma divisão (A): 8

Fator de redução (B):  $\frac{1}{3}$

Segundo a relação de semelhança:

$$D = \frac{\ln A}{\ln \left(\frac{1}{B}\right)}.$$

Para os dados fornecidos, tem-se:

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \tag{6}$$

ou

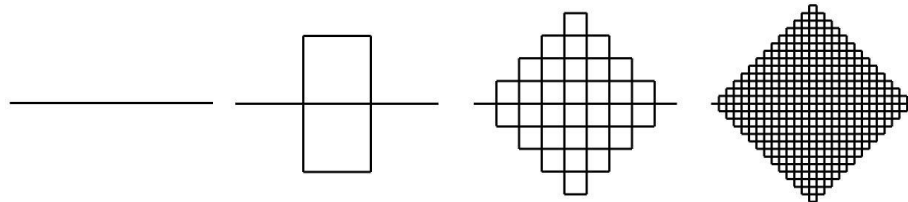
$$D \cong 1,8928.$$

### 2.3.5 Curva de Peano

Giuseppe Peano nasceu no ano de 1858 em Cuneo, uma província italiana. Era filho de agricultores, foi alfabetizado em uma escola de sua aldeia e, em 1876, matriculou-se na Universidade de Turim onde, já no ano de 1880, após sua formação, passou a lecionar. Devido a seu potencial para a Matemática, foi considerado como o mais respeitado matemático italiano da sua época. Faleceu na cidade de Turim, Itália, em 1932.

Foi no ano 1890 que Peano descobriu o primeiro exemplo de uma curva capaz de preencher completamente o espaço. Outros matemáticos posteriormente deram outros exemplos com características semelhantes a essa, gerando então as Curvas de Peano (O'CONNOR; ROBERTSON, 1997) ilustradas na Figura 16.

*Figura 16 - Fractal Curva de Peano*



*Fonte: Figura adaptada de BARBOSA, 2005.*

Sua construção ocorre da seguinte forma:

Passo 1: Construir um segmento de reta;

Passo 2: Dividir este segmento de reta em três partes iguais;

Passo 3: construir dois quadrados sobre a parte central do mesmo tamanho desta;

Passo 4: Repetir, indefinidamente, os passos 2 e 3.

Cálculo da dimensão:

Objetos semelhantes ao anterior após uma divisão (A): 9

Fator de redução (B):  $\frac{1}{3}$

Segundo a relação de semelhança:

$$D = \frac{\ln A}{\ln \left(\frac{1}{B}\right)}.$$

Para os dados fornecidos, tem-se:

$$D = \frac{\ln 9}{\ln 3} \quad (7)$$

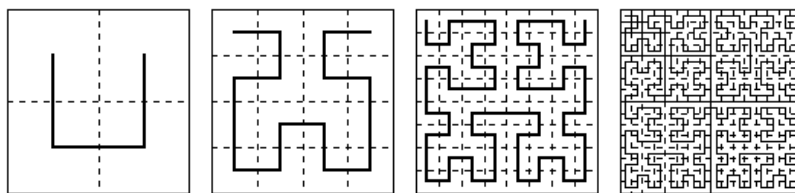
ou

$$D = 2.$$

### 2.3.6 Curva de Hilbert

David Hilbert nasceu no ano de 1862 em Wehlau, na antiga Prússia. Ele começou seus estudos aos dez anos de idade no Collegium Fridericianum, uma das melhores escolas de sua região, e obteve seu doutorado no ano de 1885. Foi um renomado matemático com destaques nas áreas de topologia, números reais, equações diferenciais e geometria. Contudo seu reconhecimento maior se deve à publicação de uma coleção de vinte e três postulados conhecidos como axiomas de Hilbert, através dos quais a geometria pode ser sintetizada em uma série de axiomas (O'CONNOR; ROBERTSON, 2014).

*Figura 17 - Fractal Curva de Hilbert*



*Fonte: Figura adaptada de BARBOSA, 2005.*

A construção da Curva de Hilbert (Figura 17) ocorre da seguinte forma:

Passo 1: Construir um quadrado;

Passo 2: Dividir esse quadrado em quatro quadrados;

Passo 3: Unir os centros dos quadrados por segmentos de retas paralelos aos lados, sem formar um polígono;

Passo 4: Repetir indefinidamente os passos 2 e 3 para cada quadrado gerado, a ligação

entre os quartetos de quadrados deve seguir a mesma orientação da ligação dos quadrados que os originaram.

Cálculo da dimensão:

Objetos semelhantes ao anterior após uma divisão (A): 4

Fator de redução (B):  $\frac{1}{2}$

Segundo a relação de semelhança:

$$D = \frac{\ln A}{\ln\left(\frac{1}{B}\right)}$$

Para os dados fornecidos, tem-se:

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 2} \quad (8)$$

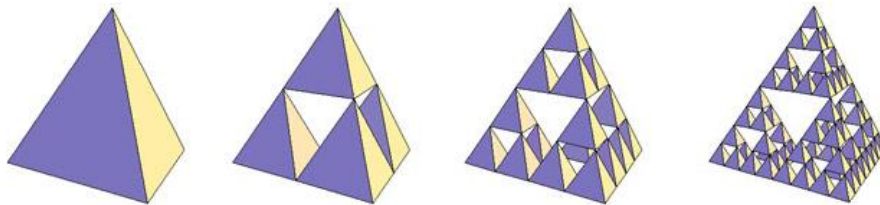
ou

$$D = 2.$$

### 2.3.7 Tetraedro de Sierpinski

O tetraedro regular ou pirâmide triangular é um poliedro formado por quatro triângulos equiláteros unidos por seis arestas e quatro vértices. A construção do tetraedro de Sierpinski (Figura 18) se assemelha muito ao já mencionado triângulo de Sierpinski, porém numa versão tridimensional.

*Figura 18 - Tetraedro de Sierpinski*



*Fonte: Modificado de: <[http://iesenriquenieto.educalab.es/image/journal/article?img\\_id=1648404&t=1512549793714](http://iesenriquenieto.educalab.es/image/journal/article?img_id=1648404&t=1512549793714)>. Acesso em: 06 mar. 2018.*

Sua construção ocorre da seguinte forma:

Passo 1: Construir um tetraedro;

Passo 2: traçar em cada face as três bases médias;

Passo 3: Remover o octaedro cujas arestas são as bases médias das faces do tetraedro;

Passo 4: Repetir indefinidamente os passos 2 e 3 nos tetraedros restantes.

Cálculo da dimensão:

Objetos semelhantes ao anterior após uma divisão (A): 4

Fator de redução (B):  $\frac{1}{2}$

Segundo a relação de semelhança:

$$D = \frac{\ln A}{\ln \left(\frac{1}{B}\right)}$$

Para os dados fornecidos, tem-se:

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 2} \quad (9)$$

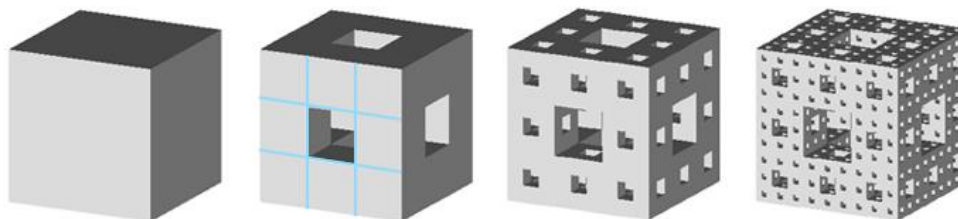
ou

$$D = 2.$$

### 2.3.8 Esponja de Menger

Karl Menger nasceu no ano de 1902 em Viena, Áustria. Iniciou, no ano de 1913, seus estudos no Döblinger Gymnasium em Viena, permanecendo lá durante sete anos. Após esse período, em 1920, iniciou o curso de física na Universidade de Viena, onde participou de algumas palestras, uma entre elas, sobre as tentativas mal sucedidas de Georg Cantor, Camille Jordan e Giuseppe Peano de tornar preciso o conceito de curva, tema que estava diretamente relacionado aos objetos patológicos. Como conclusão do seu doutorado em 1924, Menger apresentou uma tese sobre dimensionalidade dos conjuntos de pontos, na qual consta a primeira aparição da esponja de Menger (Figura 19), que pode ser considerada uma representação tridimensional do conjunto de Cantor ou do tapete de Sierpinski (O'CONNOR; ROBERTSON, 2014).

Figura 19 - Esponja de Menger



Fonte: *Fractal Dimension*. Disponível em: <http://fractalfoundation.org/OFC/OFC-10-3.html>. Acesso em: 06 mar. 2018

Sua construção ocorre da seguinte forma:

Passo 1: Construir um cubo;

Passo 2: Dividir cada face desse cubo em nove quadrados, formando assim 27 cubos menores;

Passo 3: Remover os seis cubos menores dos centros das faces e um cubo menor do interior do cubo original;

Passo 4: Repetir indefinidamente os passos 2 e 3 nos cubos restantes.

Cálculo da dimensão:

Objetos semelhantes ao anterior após uma divisão (A): 20

Fator de redução (B):  $\frac{1}{3}$

Segundo a relação de semelhança:

$$D = \frac{\ln A}{\ln \left(\frac{1}{B}\right)}$$

Para os dados fornecidos, tem-se:

$$D = \frac{\ln 20}{\ln 3} \quad (10)$$

ou

$$D \cong 2,7268.$$

Os fractais exemplificados acima, apesar de serem bem diversificados, foram construídos de maneira bem parecida, na maioria das vezes dividindo partes, removendo partes ou construindo outras partes com lados congruentes aos particionados.

Contudo há uma classe diferente de fractais que são produzidos a partir de infinitas iterações através de inversões no círculo. Entretanto, antes de tratar dessa classe, é necessário conhecer alguns resultados sobre essas inversões.

### 3 INVERSÃO NO CÍRCULO

A inversão com respeito a círculo possui características comuns a outras transformações. Com a finalidade de se obter imagens idênticas de objetos, os espelhos planos são utilizados diariamente nos mais diversos lugares por inúmeras pessoas, por isso é mais comum o estudo de inversão na reta. Frame e Urry (2016 b) e Courant (2000) afirmam que, de forma muito superficial, a inversão no círculo pode ser comparada a reflexão em um espelho curvo, pois elas representam a relação entre original e imagem por reflexo em um espelho circular.

#### 3.1 Conceitos preliminares

Conceitos básicos sobre alguns tópicos da geometria são essenciais para o entendimento do tema tratado. Abaixo, consta uma síntese de alguns resultados necessários à compreensão de inversões no círculo.

##### 3.1.1 Teorema das cordas

**Teorema 3.1** (Teorema das Cordas). Seja uma circunferência  $C_1$  e um ponto  $A$  qualquer. Sejam duas retas concorrentes no ponto  $A$  e que intersectam a circunferência  $C_1$ , nos pontos  $B, C, D, E$ . Então o produto entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{AE}$  é igual ao produto entre  $\overline{AC}$  e  $\overline{AD}$ , ou seja:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AC} \cdot \overline{AD},$$

onde  $\overline{AB}$  representar tanto o segmento de extremos nos pontos  $A$  e  $B$  quanto a sua medida.

*Demonstração:* Para demonstrar este resultado, a prova será dividida em três casos.

*1º caso:* Duas secantes à  $C_1$  com o ponto  $A$  em seu interior

Para a prova basta observar na Figura 20, que os triângulos  $ABD$  e  $ACE$  são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), pois:

- os ângulos  $\angle DAB$  e  $\angle EAC$  são opostos pelos vértices, dessa forma são congruentes;



- o ângulo  $\angle AEC$  inscrito na circunferência delimita o mesmo arco de circunferência que o ângulo  $\angle ADB$ , também inscrito na mesma circunferência, logo são congruentes.

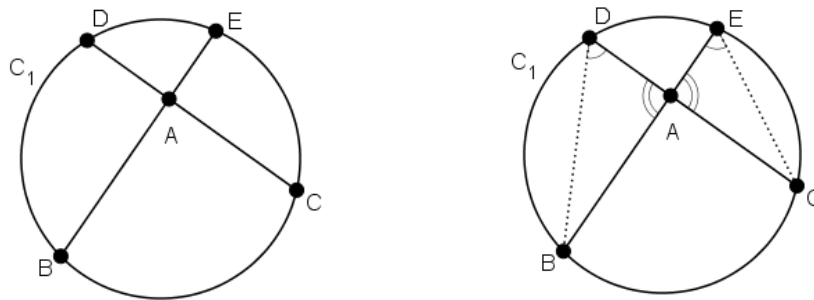
Com base nisso, pode-se afirmar que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (11)$$

ou

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AE}.$$

Figura 20 - Duas secantes à circunferência com interseção em seu interior



Fonte: O autor, 2018.

2º caso: Duas secantes à  $C_1$  e o ponto  $A$  em seu exterior

Neste caso, ao observar os triângulos  $EBA$  e  $DCA$ , na Figura 21 a seguir, nota-se que estes são semelhantes, pelo caso AA (ângulo-ângulo), pois:

- O ângulo  $\angle DAE$  é comum a ambos os triângulos.
- O ângulo  $\angle DCE$ , inscrito na circunferência, delimita o mesmo arco de circunferência que o ângulo  $\angle DBE$ , também inscrito na mesma circunferência, logo são congruentes.

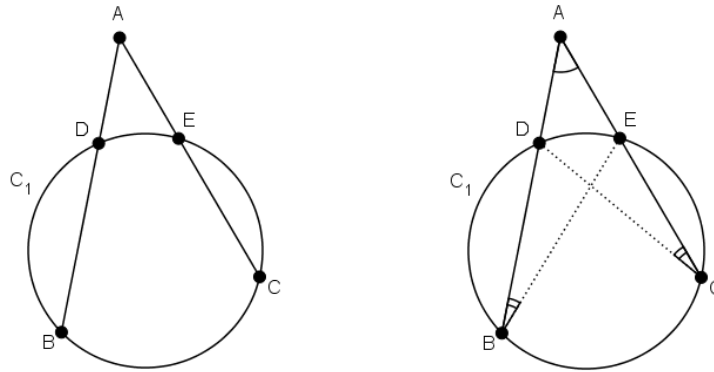
Pela relação de semelhança, é válido que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (12)$$

ou

$$\overline{AE} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AD}.$$

Figura 21 - Duas secantes à circunferência com interseção em seu exterior



Fonte: O autor, 2018.

3º caso: Uma secante e uma tangente à  $C_1$  e ponto o  $A$  em seu exterior

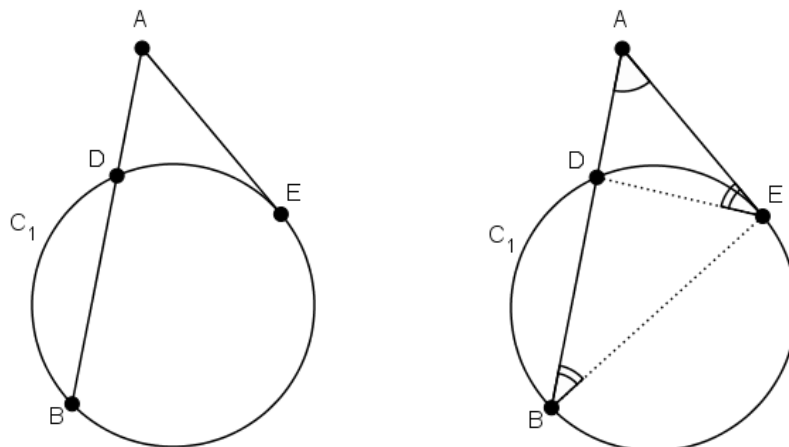
Esse caso é uma exceção do anterior, em que o ponto  $C$  é coincidente ao ponto  $E$ , dessa forma um dos segmentos torna-se tangente à circunferência.

Ao observar os triângulos  $ABE$  e  $ADE$ , na Figura 22, nota-se que os mesmos são semelhantes, pelo caso AA (ângulo-ângulo), pois:

O ângulo  $\angle BAE$  é comum a ambos os triângulos;

O ângulo  $\angle ABE$ , inscrito na circunferência, delimita o mesmo arco de circunferência que o ângulo  $\angle AED$ , ângulo de segmento na mesma circunferência. Logo, esses ângulos são congruentes.

Figura 22 - Uma tangente e uma secante à circunferência



Fonte: O autor, 2018.

Sendo assim, é correto afirmar que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \quad (13)$$

ou

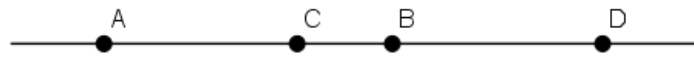
$$\overline{AE}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}.$$

### 3.1.2 Divisão harmônica

**Definição 3.1.** Considere uma reta  $r$  e os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  pertencentes a essa reta. Diz-se que existe uma divisão harmônica do segmento  $\overline{AB}$  quando esse está dividido por um ponto internamente  $C$  e outro externamente  $D$  numa mesma razão, ou seja:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}. \quad (14)$$

*Figura 23 - Segmento de reta dividido harmonicamente*

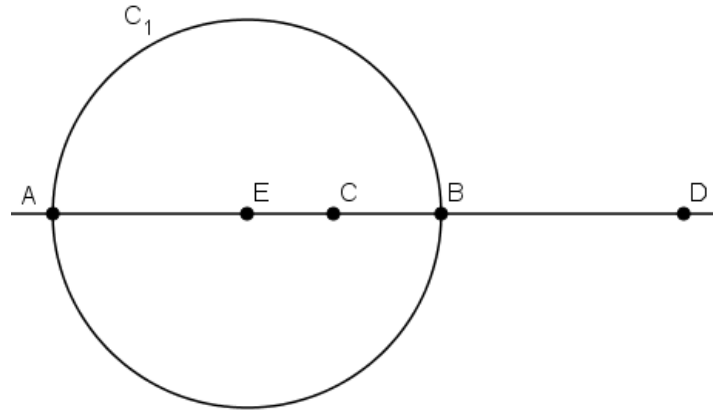


*Fonte: O autor, 2018.*

Essa análise poderia ser feita através do segmento  $\overline{CD}$  sendo dividido pelos mesmos pontos  $A$  e  $B$ , ou seja, se os pontos  $C$  e  $D$  dividem o segmento  $\overline{AB}$  harmonicamente, os pontos  $A$  e  $B$  também dividem harmonicamente o segmento  $\overline{CD}$  (OGILVY, 1969).

A análise acima foi realizada em relação a um segmento de reta  $\overline{AB}$ , entretanto se esse segmento for considerado o diâmetro de uma circunferência  $C_1$  de raio  $r$  e centro  $E$ , então essa análise poderá ser realizada em relação a um raio dessa circunferência conforme mostrado a seguir na Figura 24.

Figura 24 - Diâmetro de uma circunferência dividido harmonicamente



Fonte: O autor, 2018.

Como o segmento  $\overline{AB}$  está dividido harmonicamente pelos pontos  $C$  e  $D$ , é verdadeira a relação:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}. \quad (15)$$

Mas,

$$\overline{CA} = r + \overline{EC}, \overline{CB} = r - \overline{EC}, \overline{DA} = r + \overline{ED}, \overline{DB} = \overline{ED} - r.$$

Logo,

$$\frac{r + \overline{EC}}{r - \overline{EC}} = \frac{\overline{ED} + r}{\overline{ED} - r}$$

$$r \cdot \overline{ED} - r^2 + \overline{EC} \cdot \overline{ED} - r \cdot \overline{EC} = r \cdot \overline{ED} + r^2 - \overline{EC} \cdot \overline{ED} - r \cdot \overline{EC}$$

$$2r^2 = 2\overline{EC} \cdot \overline{ED}$$

portanto,

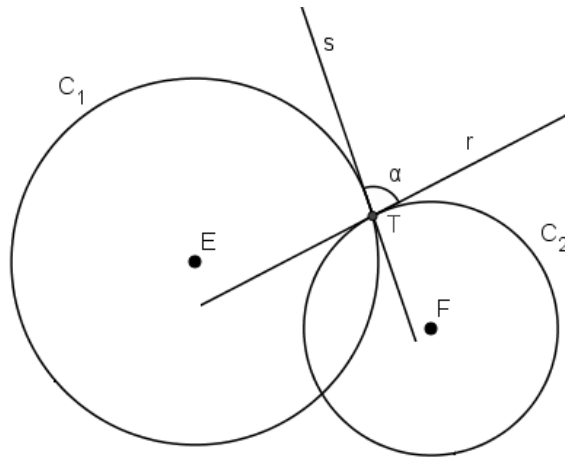
$$r^2 = \overline{EC} \cdot \overline{ED}.$$

### 3.1.3 Circunferências ortogonais

Por inúmeras razões, é importante calcular a medida de ângulos entre retas. Contudo, há também a possibilidade de determinar a medida de ângulos entre circunferências secantes, isto é, o ângulo formado pelas retas tangentes às circunferências no ponto de interseção.

Sejam duas circunferências  $C_1$ ,  $C_2$  de centros  $E$  e  $F$  respectivamente, e  $T$  um dos pontos de contato dessas circunferências. Ao traçar as retas  $r$  e  $s$ , tangentes às circunferências passando pelo ponto  $T$ , será delimitado o ângulo  $\alpha$ , em destaque na Figura 25, entre as circunferências  $C_1$  e  $C_2$ .

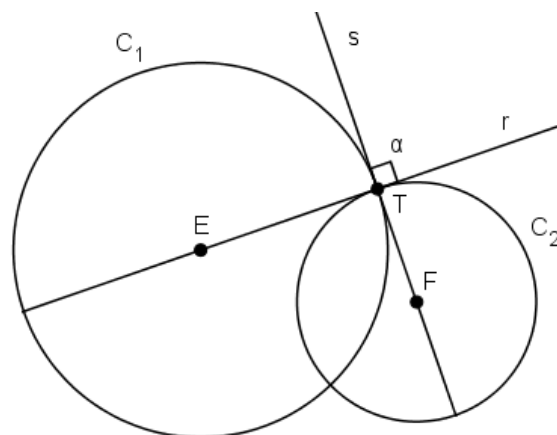
Figura 25 - Ângulo entre circunferências



Fonte: O autor, 2018.

No caso particular dessas retas tangentes coincidirem com as retas suportes dos diâmetros, elas formarão um ângulo de  $90^\circ$  entre si, então o ângulo entre essas circunferências será reto, e elas serão chamadas *circunferências ortogonais*.

Figura 26 - Circunferências ortogonais



Fonte: O autor, 2018.

Segundo Ogilvy (1969), algumas observações são obtidas ao se analisar as duas circunferências ortogonais acima:

- A ortogonalidade entre elas existe se, e somente se, nos pontos de interseção, o raio de uma for tangente à outra e vice-versa;
- Se em um ponto de interseção, o ângulo formado é o reto, no outro ponto o ângulo também será;
- A ortogonalidade entre elas existe se, e somente se, a soma dos quadrados de seus raios for igual ao quadrado da distância entre seus centros:

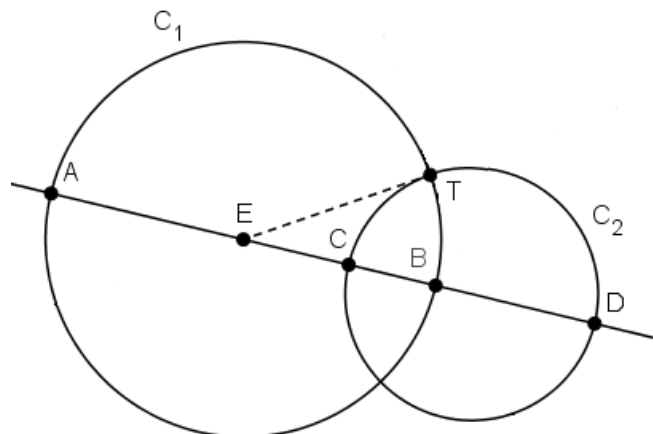
$$\overline{ET}^2 + \overline{FT}^2 = \overline{EF}^2.$$

A seguir uma propriedade relacionada ao conceito já visto sobre divisão harmônica.

**Propriedade.** Se o diâmetro de uma circunferência é dividido harmonicamente por outra circunferência, então elas são ortogonais.

*Demonstração:* Sejam duas circunferências,  $C_1$  de diâmetro  $\overline{AB}$  com centro no ponto  $E$ , e  $C_2$  passando pelos pontos  $C$  e  $D$  da reta suporte de  $\overline{AB}$ , pontos esses dispostos de tal forma que dividam harmonicamente o segmento  $\overline{AB}$  (Figura 27), como um desses pontos necessariamente deve estar entre os pontos  $A$  e  $B$  e o outro deve ser externo a esse segmento, as circunferências traçadas terão dois pontos de interseção, seja um deles o ponto  $T$ .

Figura 27 - Circunferências contendo pontos de um segmento dividido harmonicamente



Fonte: O autor, 2018.

Conforme mostrado, anteriormente, no tópico 3.1.2, há uma relação entre um raio de uma circunferência e os pontos que dividem um de seus diâmetros harmonicamente. Em  $C_1$  essa relação será  $\overline{ET}^2 = \overline{EC} \cdot \overline{ED}$ . Contudo essa é a mesma relação existente entre uma tangente e uma secante à circunferência  $C_2$  conforme visto no tópico 3.1.1. Como o segmento  $\overline{ED}$  é necessariamente secante a  $C_2$ , o segmento  $\overline{ET}$  só pode ser o segmento tangente a  $C_2$ . Por outro lado, qualquer tangente a circunferência  $C_2$  forma um ângulo de  $90^\circ$  com o raio relativo ao ponto de tangência. Sendo assim, o ângulo formado entre  $C_1$  e  $C_2$  é de  $90^\circ$ , logo são ortogonais.

### 3.2 Inversões no círculo

Segundo Eves (2011) o conhecimento de pontos relacionados inversamente já existia desde o século XVI com François Viète, mas foram novamente expostos no século XVIII com Robert Simson em sua restauração dos trabalhos perdido de Apolônio “Plane Loci”. Além desses, Simon A. J. L'Huilier forneceu alguns exemplos específicos no século XIX.

Contudo, de acordo com Boyer (1974), o conceito formal de inversão no círculo, como uma transformação de figuras, surge no ano de 1824 tendo como criador o Matemático suíço Jakob Steiner.

Outros matemáticos, de forma independente, exploraram essa transformação nos anos posteriores, como por exemplo: o belga Adolphe Quetelet em 1825, LI Magnus em 1831, J. Bellavitis em 1836, entre outros.

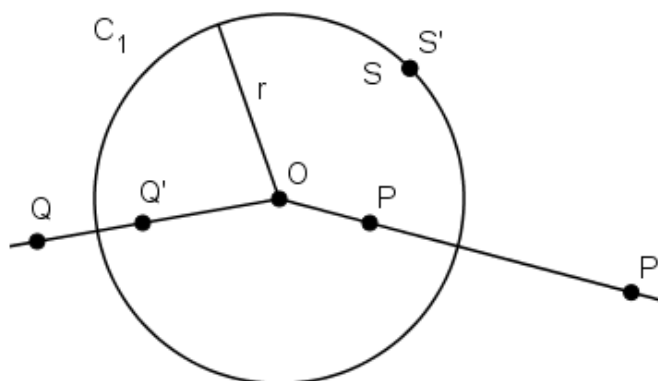
A inversão com respeito a um círculo é uma transformação que associa pontos do interior de um círculo em pontos no exterior dele, pontos do exterior desse círculo nos pontos interiores a ele, e que mantem inalterados os pontos contidos na circunferência,.

Mais especificamente, seja um círculo  $C_1$  de centro  $O$  e raio  $r$ , para todo ponto  $P$  no plano, existe um ponto  $P'$ , inverso de  $P$  sobre a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , que satisfaz a seguinte equação:

$$r^2 = \overline{OP}' \cdot \overline{OP}. \quad (16)$$

A figura 28, a seguir, ilustra exemplos de inversões de pontos no círculo: o ponto  $P$  interior a  $C_1$  é transformado no ponto  $P'$  exterior a  $C_1$ ; o ponto  $Q$  exterior a  $C_1$ , é transformado em  $Q'$ , interior a  $C_1$ ; e o ponto  $S$  que pertence a  $C_1$  é transformado no ponto  $S'$  coincidente a  $S$ .

Figura 28 - Exemplos de inversões de pontos no círculo



Fonte: O autor, 2018.

Ao analisar-se a equação (16) da inversão no círculo, apenas através de cálculos elementares, não seria possível determinar a imagem do centro do círculo de inversão. Entretanto, uma análise teórica indica o seu posicionamento, ou seja, como o raio do círculo de inversão dado é um valor fixo, à medida que a distância entre os pontos  $O$  e  $P$  diminui, a distância entre  $O$  e  $P'$  aumenta, assim sendo, quando o ponto  $P$  coincidir com o centro, o ponto  $P'$  estará localizado no infinito. Além disso, ao escolher um ponto  $P$ , a sua imagem deve estar sobre a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , então  $P'$  será único.

Feitas essas considerações iniciais, segundo Ogilvy (1969) algumas características são inerentes à inversão no círculo:

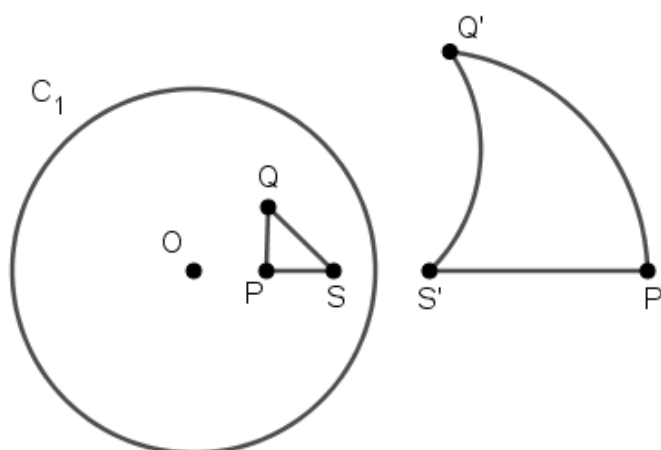
- A inversão de  $P$  altera o seu posicionamento em relação ao círculo, de interno para externo e vice-versa;
- A inversão de  $P$  sobre a circunferência gera  $P'$  coincidente a  $P$ ;
- Um número par de inversões de  $P$  não altera sua posição;
- A inversão aplicada em  $P$  e  $Q$ , dois pontos internos ao círculo, gera as imagens  $P'$  e  $Q'$  com maior distância entre si;
- A inversão aplicada em  $P$  e  $Q$ , dois pontos externos ao círculo, gera as imagens  $P'$  e  $Q'$  com menor distância entre si;
- Tangências são preservadas na inversão.

Todavia essa não é uma transformação apenas de pontos isolados. Existe a possibilidade de se querer inverter uma figura geométrica como, por exemplo, uma reta, um triângulo ou até mesmo uma circunferência. Nesses casos, diante das características da inversão no círculo, é possível afirmar que a imagem gerada não será congruente à figura original, pois, ao observar a inversão de pontos isolados, nota-se que a distância entre suas imagens não é preservada.



Entretanto, esses pontos ainda continuam unidos, ou seja, por maior que seja a distância entre as imagens, a inversão não desconecta pontos, conforme exposto no exemplo a seguir (Figura 29).

Figura 29 - Inversão de um triângulo interno a  $C_1$



Fonte: O autor, 2018.

### 3.3 Algumas construções geométricas

A seguir serão mostradas algumas construções geométricas básicas envolvendo a inversão no círculo.

#### 3.3.1 Inversão de um ponto

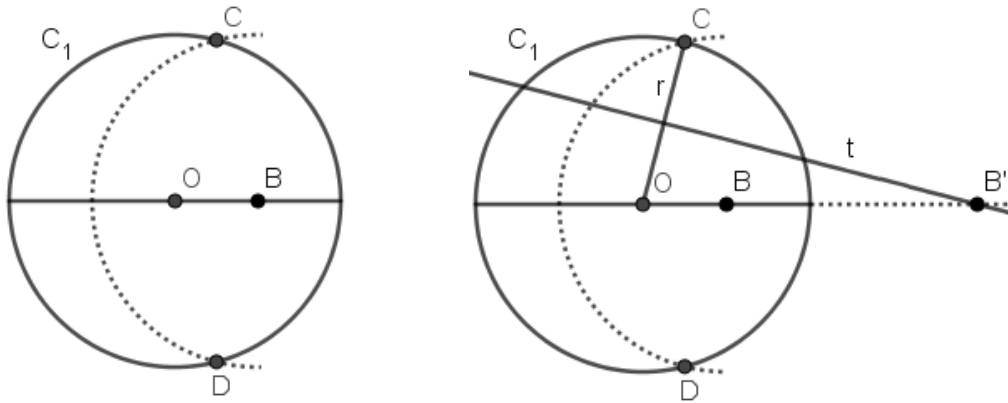
São três as possibilidades para a localização de um ponto em relação a um círculo de inversão: em seu interior, em seu exterior ou pertencente à circunferência, gerando respectivamente inversões em seu exterior, em seu interior e na própria circunferência.

*Demonstração:* A prova será feita para cada um dos casos a seguir.

*1º caso:* Ponto  $B$  interior ao círculo de inversão.

Seja  $B$  o ponto a ser invertido. Traça-se uma circunferência com centro em  $B$  e com mesmo raio  $r$  do círculo  $C_1$ , gerando dois pontos como interseções, denominados  $C$  e  $D$  (Figura 30).

Figura 30 - Inversão de um ponto interior ao círculo



Fonte: O autor, 2018.

Em seguida, traça-se a mediatriz,  $t$ , do segmento  $\overline{OC}$ .

O ponto  $B'$ , interseção entre a mediatriz de  $\overline{OC}$  e o prolongamento de  $\overline{OB}$ , é o inverso geométrico do ponto  $B$  em relação ao círculo  $C_1$ .

Os triângulos isósceles  $BCO$  e  $B'CO$  têm o ângulo  $\angle COB$  em comum, então eles são semelhantes pelo caso AA. Logo, segue a seguinte relação:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \quad (17)$$

ou

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}.$$

Como  $\overline{OC}$  é o raio do círculo  $C_1$ , tem-se que:

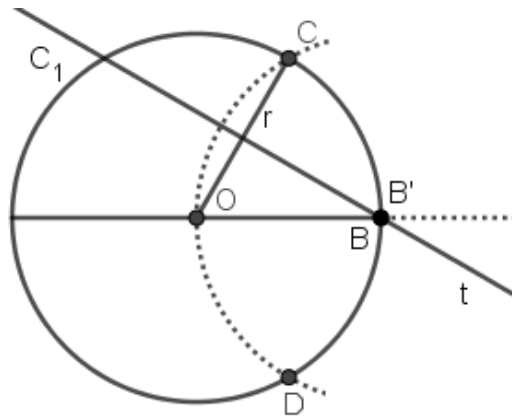
$$r^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}.$$

2º caso: Ponto  $B$  pertencente ao círculo de inversão.

Este é um caso especial do exemplo anterior, em que a distância do ponto  $B$  ao ponto  $C$  será a mesma distância do ponto  $B$  ao ponto  $O$  (Figura 31), pois ambos são raios da circunferência

pontilhada, logo  $B$  pertence à mediatriz do segmento  $\overline{OC}$  e também ao próprio segmento  $\overline{OB}$ . Mas, no caso anterior, foi mostrado que essa interseção é o inverso geométrico do ponto  $B$  em relação à  $C_1$ . Logo, quando  $B$  pertencer ao círculo,  $B$  e  $B'$  serão coincidentes

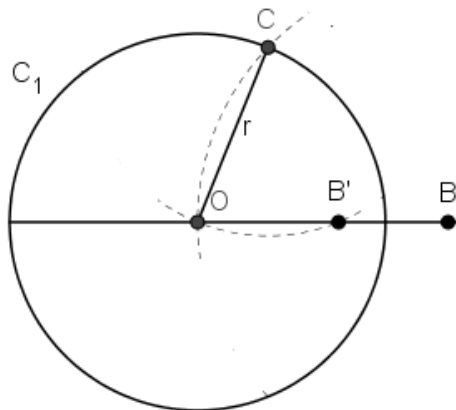
Figura 31 - Inversão de um ponto pertencente à circunferência



Fonte: O autor, 2018.

3º caso: Ponto  $B$  exterior ao círculo de inversão:

Figura 32 - Inversão de um ponto exterior ao círculo



Fonte: O autor, 2018.

Ao traçar a circunferência com centro em  $B$ , exterior a  $C_1$  e de raio  $\overline{OB}$ , determina-se o ponto  $C$ , interseção entre essa circunferência e  $C_1$ , conforme mostra a Figura 32.

Traça-se então uma terceira circunferência, cujo raio é o mesmo do círculo  $C_1$ , centrado em  $C$ . Esta passará pelos pontos  $O$  e  $B'$  quando intersectar o segmento  $\overline{OB}$ .

O ponto  $B'$  é o inverso do ponto  $B$  em relação ao círculo  $C_1$ , pois, como o triângulo isósceles  $BCO$  é semelhante ao triângulo isósceles  $B'CO$ , pelo caso AA, segue a seguinte relação:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \quad (18)$$

ou

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}.$$

Como  $\overline{OC}$  é o raio do círculo  $C_1$ , tem-se que:

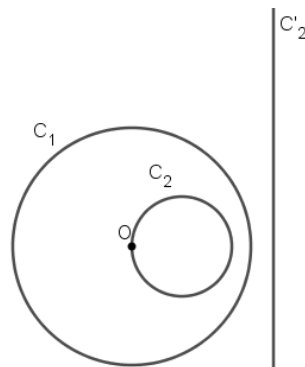
$$r^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}.$$

### 3.3.2 Inversão de uma circunferência que contenha o centro de inversão

Uma circunferência, que passa pelo centro do círculo de inversão, será transformada em uma reta que não passa por esse centro e é perpendicular à reta suporte do segmento que une os centros dessa circunferência e do círculo. Ogilvy (1969) analisa minuciosamente cada um dos casos das inversões de circunferências que contêm o centro do círculo de inversão.

#### 3.3.2.1 Circunferência interior ao círculo de inversão

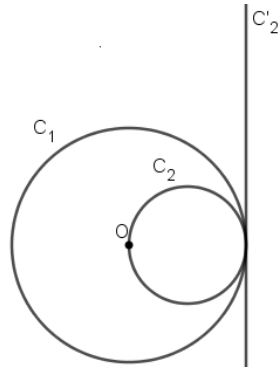
*Figura 33 - Inversão de uma circunferência que contenha centro de inversão*



*Fonte: O autor, 2018.*

### 3.3.2.2 Circunferência tangente ao círculo de inversão

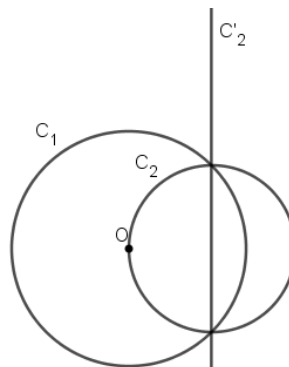
*Figura 34 - Circunferência tangente ao círculo de inversão*



*Fonte: O autor, 2018.*

### 3.3.2.3 Circunferência secante ao círculo de inversão

*Figura 35 - Circunferência secante ao círculo de inversão*



*Fonte: O autor, 2018.*

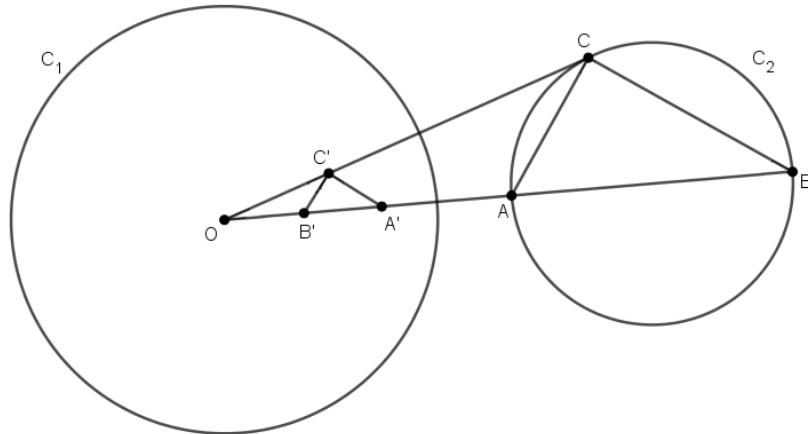
### 3.3.3 Inversão de uma circunferência que não contenha o centro de inversão

Uma circunferência que não passa pelo centro de inversão gerará imagens que não passarão pelo centro de inversão. Será feita a demonstração para o caso em que uma circunferência é externa ao círculo de inversão, mas de forma semelhante se procede para uma circunferência interna ou secante.

*Demonstração:* Desenha-se um círculo de inversão  $C_1$  de raio  $r$ , e uma circunferência  $C_2$  de diâmetro  $\overline{AB}$  fora do círculo de inversão (Figura 36).

Ao se tomar um ponto  $C$  qualquer de  $C_2$  e fazendo as inversões dos pontos  $A$ ,  $B$ , e  $C$  em  $C_1$ , obtêm-se as imagens  $A'$ ,  $B'$ , e  $C'$ .

Figura 36 - Inversão de uma circunferência externa ao círculo de inversão



Fonte: O autor, 2018.

Pela propriedade de inversão no círculo, obtêm-se às seguintes relações:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2, \quad (19)$$

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = r^2 \quad (20)$$

e

$$\overline{OC} \cdot \overline{OC'} = r^2. \quad (21)$$

Igualando as equações (20) e (21) tem-se que:

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} \quad (22)$$

ou

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}}.$$

Mas essa equação mostra que dois lados dos triângulos  $BOC$  e  $B'OC'$  são proporcionais. Além disso, esses triângulos possuem o ângulo  $\angle B'OC'$  em comum, logo são semelhantes, pelo caso LAL. Com isso, todos os seus ângulos são semelhantes. Em particular:

$$\angle OBC = \angle OC'B'. \quad (23)$$

Analogamente, conclui-se que os triângulos  $AOC$  e  $A'OC'$  também são semelhantes. Em particular:

$$\angle OAC = \angle OC'A'. \quad (24)$$

Mas o ângulo  $\angle OAC$  é ângulo externo do triângulo  $ACB$ , e representa então a soma dos dois ângulos internos não adjacentes, ou seja,  $\angle OAC = \angle OBC + \angle ACB$ .

Como o ângulo  $\angle OC'A'$  é a soma dos ângulos  $\angle OC'B'$  e  $\angle B'C'A'$ , e equação (24) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\angle OBC + \angle ACB = \angle OC'B' + \angle B'C'A'. \quad (25)$$

Substituindo na equação (25) o resultado encontrado na equação (23) temos:

$$\angle OBC + \angle ACB = \angle OCB + \angle B'C'A'. \quad (26)$$

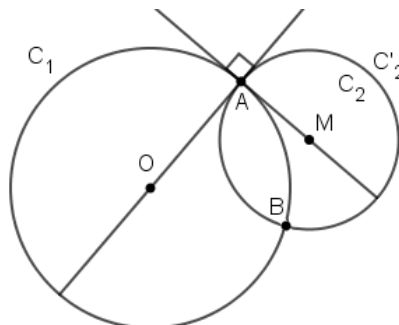
Então,

$$\angle ACB = \angle B'C'A'.$$

Como o ângulo  $\angle ACB$  é um ângulo reto por estar inscrito em uma semicircunferência, o ponto  $C'$  também descreve uma semicircunferência de diâmetro  $\overline{A'B'}$ .

### 3.3.4 Inversão de uma circunferência ortogonal ao círculo de inversão

*Figura 37 - Inversão de uma circunferência ortogonal ao círculo de inversão*



*Fonte: O autor, 2018.*

*Demonstração:* Seja  $C_1$  um círculo de inversão e  $C_2$  uma circunferência ortogonal a  $C_1$  nos pontos  $A$  e  $B$  (Figura 37). Como os pontos  $A$  e  $B$ , pertencentes a  $C_2$ , também pertencem ao círculo de inversão, suas imagens permanecerão inalteradas. Logo  $A$  e  $B$  também pertencem a  $C'_2$ .

Pela definição de circunferência ortogonal, o segmento  $\overline{OA}$  é perpendicular tanto a  $\overline{AM}$  no ponto  $A$  quanto a  $\overline{BM}$  no ponto  $B$ , sendo a interseção de  $\overline{AM}$  e  $\overline{BM}$  o ponto  $M$ .

Como a inversão preserva tangências, os segmentos  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  permanecerão sendo tangentes a  $C'_2$  nos pontos  $A$  e  $B$  respectivamente. Mas, os segmentos perpendiculares  $\overline{AM}$  e  $\overline{BM}$  aos segmentos  $\overline{AO}$  e  $\overline{OB}$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, são raios de  $C'_2$  e se encontram no ponto  $M$  conforme visto anteriormente, logo  $C_2$  e  $C'_2$  também são concêntricas. Como são concêntricas e possuem o mesmo raio  $\overline{AM}$ , significa que permanecem inalteradas após a inversão.

### 3.4 Exemplos de aplicações das inversões no círculo

#### 3.4.1 Circunferências de Apolônio

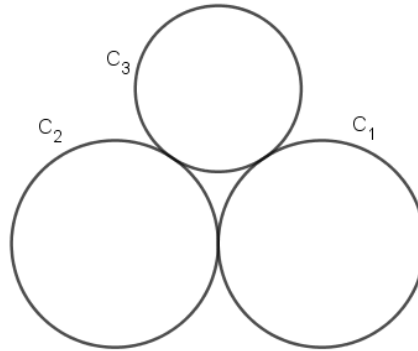
Nos escritos de Apolônio, havia alguns problemas que envolviam a descoberta de circunferências tangentes a três objetos dados, dentre: pontos, retas e circunferências. Um caso, particular entre esses problemas, era o de encontrar todas as circunferências tangentes a três circunferências tangentes exteriores mutuamente. As duas soluções para esse problema foram encontradas por François Viète, e foram denominadas circunferências de Apolônio (ASTE; WEAIRE, 2000).

A representação desse caso especial será feita através da utilização da inversão no círculo seguindo os seguintes passos:

Passo 1: Trace três circunferências,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , tangentes exteriores mutuamente, conforme Figura 38.



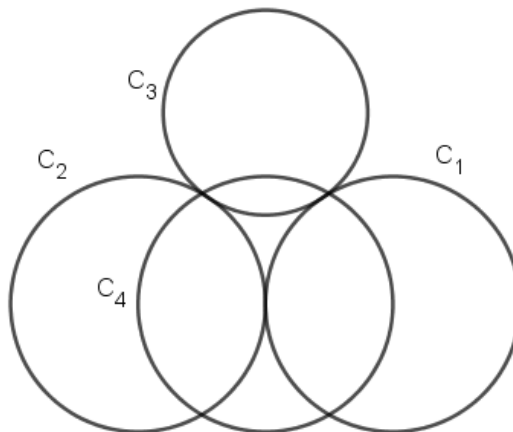
*Figura 38 - Circunferências tangentes entre si e interiores disjuntas*



*Fonte: O autor, 2018.*

Passo 2: Trace um círculo de inversão,  $C_4$ , centrado em um dos pontos de tangência das três circunferências, como mostra a Figura 39.

*Figura 39 - Círculo de inversão centrado no ponto de tangência entre  $C_1$  e  $C_2$*



*Fonte: O autor, 2018.*

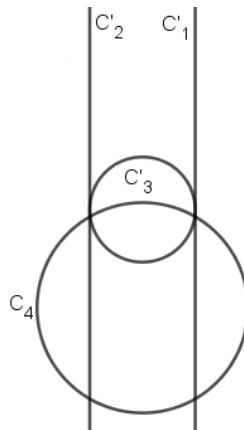
Passo 3: Aplicar a inversão em  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  por  $C_4$ , o resultado será duas retas paralelas,  $C'_1$  e  $C'_2$ , além de uma circunferência,  $C'_3$ , tangenciando essas retas.

Como as circunferências  $C_1$  e  $C_2$  passam pelo centro de inversão, conforme 3.3.2.3, suas imagens,  $C'_1$  e  $C'_2$ , serão duas retas secantes ao círculo de inversão.

Como  $C_3$ , nesse caso, certamente não contém o centro de inversão, sua imagem,  $C'_3$ , será uma circunferência, conforme 3.3.3.

Como a inversão no círculo preserva tangências,  $C'_1$ ,  $C'_2$  e  $C'_3$  serão tangentes (Figura 40).

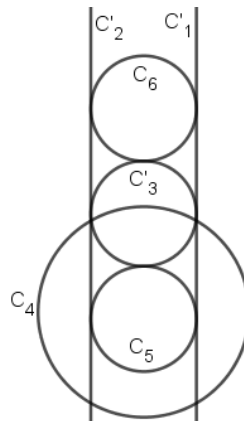
Figura 40 - Resultados das inversões das circunferências  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$



Fonte: O autor, 2018.

Passo 5: Construa duas outras circunferências,  $C_5$  e  $C_6$ , tangenciando  $C'_1$ ,  $C'_2$  e  $C'_3$ .

Figura 41 - Circunferências  $C_5$  e  $C_6$  tangentes a  $C'_1$ ,  $C'_2$  e  $C'_3$



Fonte: O autor, 2018.

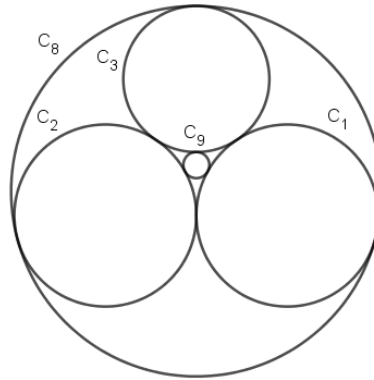
Passo 6: Por fim, aplicar a inversão em  $C'_3$ ,  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C'_1$  e  $C'_2$  por  $C_4$ , gerando as respectivas circunferências  $C_3$ ,  $C_8$ ,  $C_9$ ,  $C_1$  e  $C_2$ . Após a exclusão do círculo de inversão,  $C_4$ , restarão as circunferências originais,  $C_1$ ,  $C_2$ , e  $C_3$ , e as circunferências de Apolônio,  $C_8$  e  $C_9$  (Figura 42).

Como  $C_5$  está completamente no interior do círculo de inversão, sua imagem,  $C_8$ , estará completamente no exterior do círculo de inversão, conforme 3.3.3.

Como  $C_6$  está completamente no exterior do círculo de inversão, sua imagem,  $C_9$ , estará completamente no interior do círculo de inversão, conforme 3.3.3.

Além disso,  $C_8$  e  $C_9$  serão tangentes a  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , pois a inversão preserva tangências.

Figura 42 - Circunferências de Apolônio  $C_8$  e  $C_9$



Fonte: O autor, 2018.

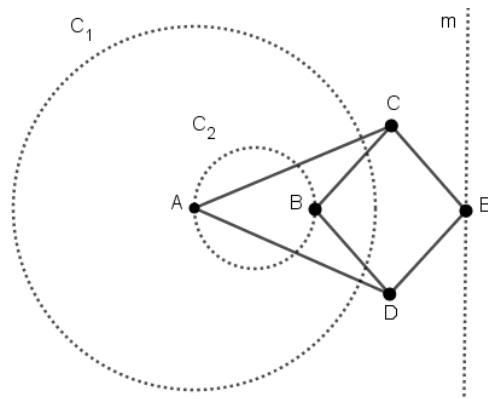
### 3.4.2 Inversor de Peaucellier-Lipkin

Capaz de converter um movimento de rotação em um movimento retilíneo, o Inversor de Peaucellier-Lipkin (Figura 43) foi criado, de forma independente, por Charles Nicolas Peaucellier em 1864 e por Yom Tov Lipman Lipkin no ano de 1873, e por essa razão é conhecido pelo nome de ambos os criadores (OGILVY, 1969).

O princípio usado por eles para a confecção desse inversor é a inversão de uma circunferência que contenha o centro de inversão, e, com isso, o resultado de sua inversão é uma reta.

O mecanismo do inversor é composto por seis hastes, de tal forma que duas,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AD}$ , possuam tamanho  $r$ , as outras quatro,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{B'C}$ ,  $\overline{B'D}$ , tenham tamanho  $s$ , e todas elas estejam interligadas de forma articuladas nos pontos A, B, B', C, D.

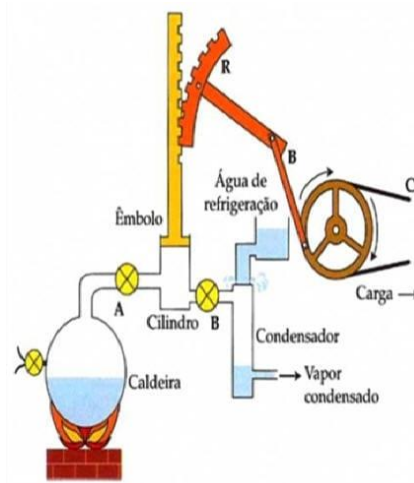
Figura 43 - Inversor de Peaucellier-Lipkin



Fonte: O autor, 2018.

A circunferência  $C_2$  contém o centro do círculo de inversão  $C_1$ . Ao variar a posição de  $B'$  sobre a reta  $m$ , o ponto  $B$  percorre a circunferência  $C_2$  transformando um movimento retilíneo em um movimento circular e vice-versa. Esse é um dos princípios utilizados na revolução das máquinas a vapor. Algumas são construídas com um sistema de caldeiras preenchidas com água que, ao serem aquecidas, geram vapor d'água impulsionando um êmbolo num movimento retilíneo que, através de um conjunto de hastes, gera um movimento circular, conforme ilustrado na Figura 44.

*Figura 44 - Máquina a vapor*



*Fonte: Oficina da net. Disponível em: <https://www.oficinadanet.com.br/post/14633-como-funciona-a-energia-a-vapor>. Acesso em: 25 fev. 2018*

## 4 FRACTAIS E INVERSÕES NO CÍRCULO

No presente capítulo será exposto um modelo de fractal diferente dos clássicos apresentados anteriormente, pois todos os fractais clássicos apresentados possuem uma característica comum, a autossimilaridade exata. Contudo essa não é uma característica intrínseca a todos os fractais. Existem também os fractais chamados autoinversíveis (em inglês: self-inverse), formados através da inversão no círculo que são um dos tipos de fractais não lineares.

Os estudos sobre os fractais autoinversíveis não se limitam apenas à geometria, mas segundo Mandelbrot (1983) alguns exemplos estão presentes na biologia, como é o caso de alguns insetos, cefalópodes e também na física com os exemplos dos cristais líquidos.

Dentre os inúmeros fractais autoinversíveis existentes, será dado destaque a um, a Gaxeta de Apolônio, pois é o exemplo de fractal autoinversível, mais simples (MANDELBROT, 1983).

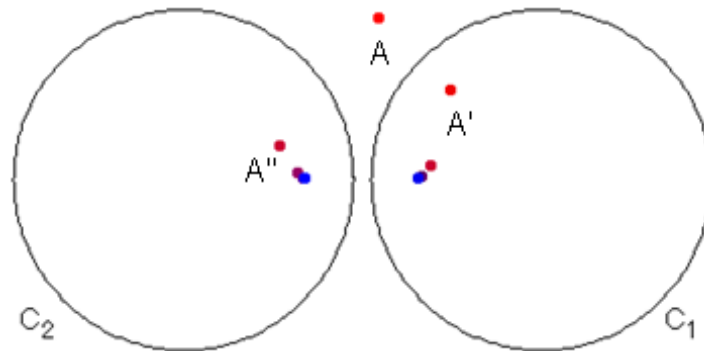
### 4.1 Conjunto Limite

Uma das formas de construção de um fractal é através do conjunto limite das inversões nos círculos. Ou seja, existindo dois ou mais círculos de inversão, após inverter, indefinidamente, pontos nesses círculos ou os próprios círculos em si mesmos, o que se obtém é um conjunto para o qual novas inversões geram imagens sobre o próprio conjunto, esse conjunto é chamado de conjunto limite (AUDIN; CHÈRITAT, 2009).

#### 4.1.1 Conjunto limite de pontos

Os mais diversos fractais podem ser gerados através das inversões de um ponto qualquer em dois ou mais círculos posicionados de maneira convenientes. Observe na Figura 45 a geração do conjunto limite para inversões do ponto A nos círculos disjuntos  $C_1$  e  $C_2$ . Frame e Urry (2016b) afirmam que, independentemente de onde esteja localizado o ponto inicial A, o conjunto limite de suas inversões será sempre o mesmo. Na Figura 45, esse conjunto limite está representado pelos pontos em azul.

Figura 45 - Conjunto limite das inversões de  $A$

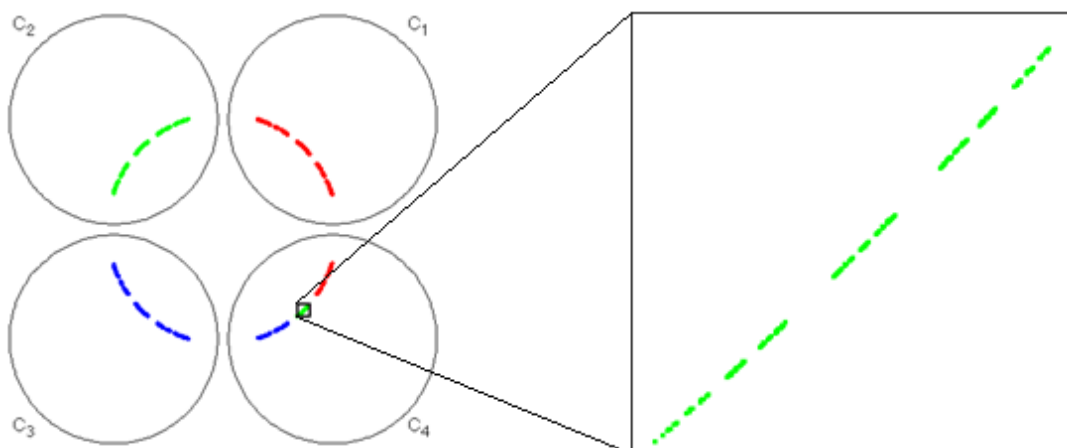


Fonte: Figura adaptada de FRAME; URRY, 2016b.

Estendendo a representação do conjunto limite de pontos para quatro círculos de inversão, conforme Figura 46, é possível notar a formação de uma estrutura mais complexa que aquela apresentada anteriormente. Essa formação está destacada com cores diversas para cada círculo de inversão  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  a fim de se realçar sua construção, por exemplo, como se observa no círculo  $C_4$ , cujos pontos são exatamente as inversões daqueles pertencentes aos círculos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .

Todavia, essa construção ainda não pode ser considerada com um objeto fractal, apesar de partes de sua estrutura conterem características fractais, como o Conjunto de Cantor encontrado em  $C_4$ .

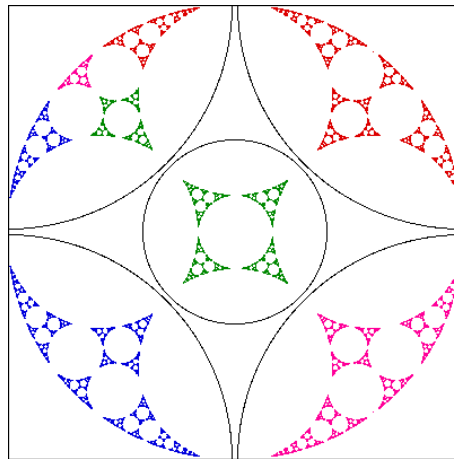
Figura 46 - Conjunto limite em quatro círculos e conjunto de Cantor



Fonte: Figura adaptada de FRAME; URRY, 2016b.

Acrescentando-se um quinto círculo centralizado entre os quatro da Figura 47, o conjunto limite gerado é bem mais complexo. Note que os círculos não são tangentes entre si, quando esses círculos se tangenciam formam o fractal conhecido como Gaxeta de Apolônio.

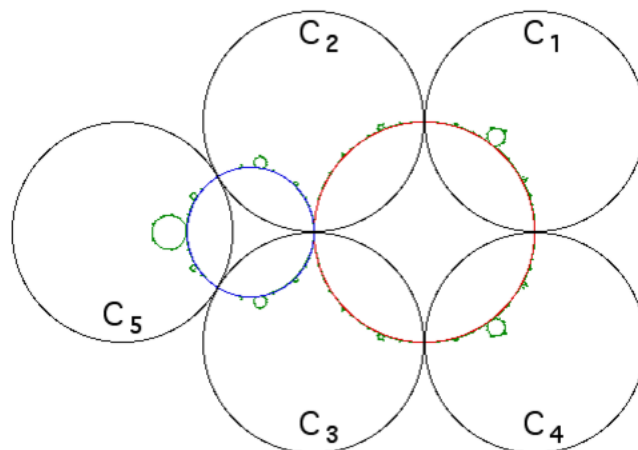
*Figura 47 - Conjunto limite em cinco círculos*



*Fonte: FRAME; URRY, 2016b.*

O quinto círculo poderia ter sido posicionado numa região diferente da mostrada na Figura 48, por exemplo, tangenciado apenas dois dos círculos e não os quatro, gerando uma figura bem similar ao conhecido fractal: Conjunto de Mandelbrot.

*Figura 48 - Conjunto limite em cinco círculos*



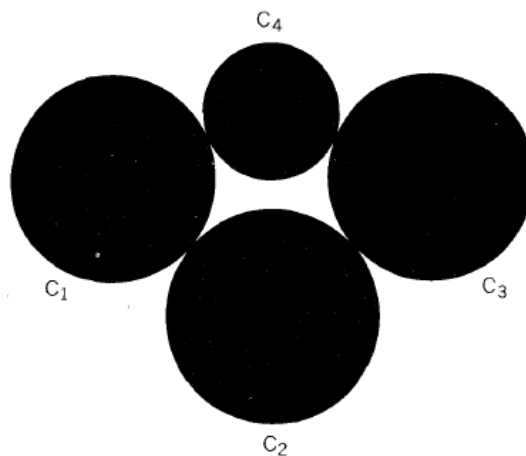
*Fonte: FRAME; URRY, 2016b.*

#### 4.1.2 Conjunto limite de círculos de inversões

Não são apenas as inversões de pontos que geram conjuntos limites. Círculos de inversão podem ser ajustados em uma configuração especial de forma a produzirem conjuntos limite de suas próprias inversões, gerando assim fractais mais complexos do que os formados por empacotamentos apolíneos (APÊNDICE B), que serão vistos mais adiante.

Como por exemplo, os círculos de inversão podem ser posicionados de forma a tangenciarem uns aos outros, ou seja,  $C_n$  é tangente a  $C_{n-1}$  e  $C_{n+1}$ , formando assim uma “corrente” de círculos tangentes denominada por Mandelbrot (1983): corrente de Poincarè, conforme ilustrado na Figura 49.

*Figura 49 - Corrente de Poincarè*

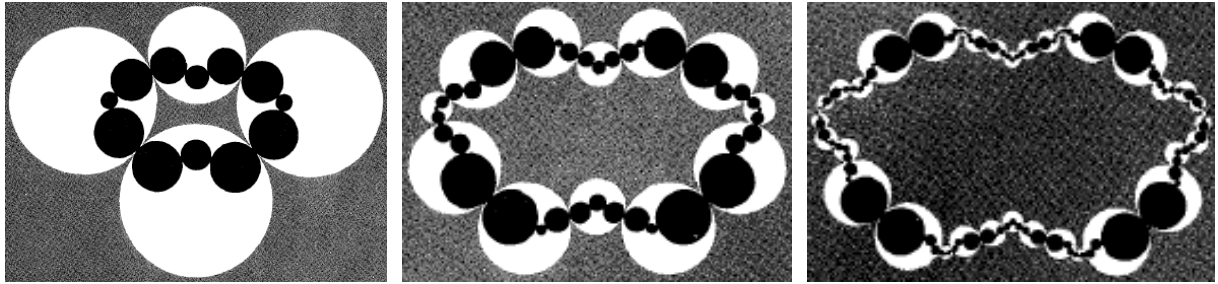


*Fonte: Figura adaptada de MANDELBROT, 1983.*

Os passos para a construção do fractal são definidos por inversões dessas circunferências em cada  $C_n$  construído, e assim sucessivamente nos demais gerados. A cada novo passo, a cadeia de círculos torna-se composta por um maior número de círculos com raios cada vez menores. A repetição desses passos indefinidamente gera o conjunto limite desses círculos (Figura 50).



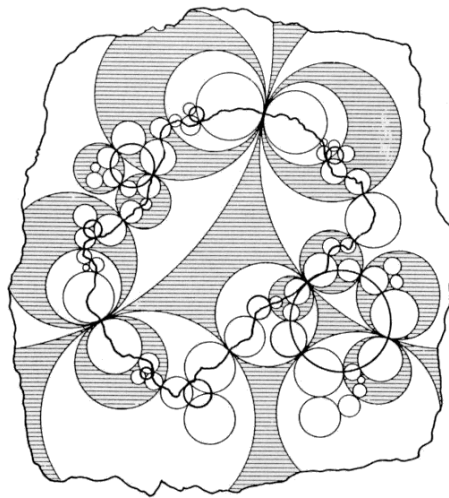
*Figura 50 - Inversões sucessivas na corrente de Poincaré*



*Fonte: Figura adaptada de MANDELBROT, 1983.*

Xie (1993) menciona que um dos primeiros fractais construídos com inversão no círculo, porém com cinco círculos de inversão, foi descoberto por Poincaré e Klein em 1897 (Figura 51). O conjunto limite encontrado e que define o fractal é a linha disforme que cruza todas as circunferências originais.

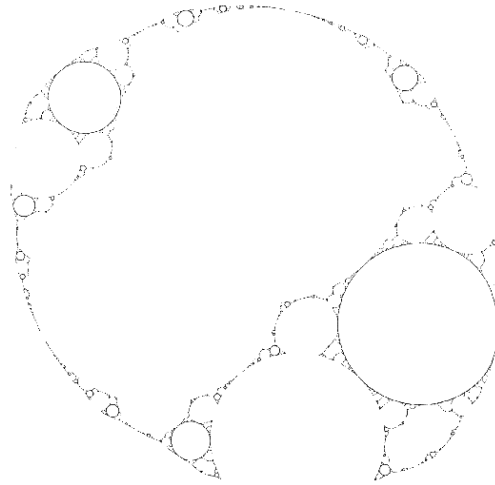
*Figura 51 - Fractal formado pelo conjunto limite de cinco círculos manualmente*



*Fonte: FRAME; URRY, 2016b.*

Com auxílio de algoritmos em computadores, Mandelbrot redesenhou o mesmo fractal (Figura 52) com maior precisão 85 anos após o primeiro ser feito (MANDELBROT, 1983).

*Figura 52 - Fractal formado pelo conjunto limite de cinco círculos por computador*



*Fonte: FRAME; URRY, 2016b.*

## 4.2 Gaxeta de Apolônio

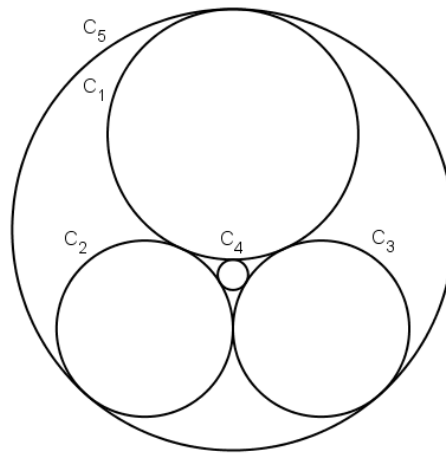
Apolônio de Perga ou de Pérgamo nasceu por volta de 262 a.C. em Perge, uma antiga cidade grega, vindo a falecer por volta de 190 a.C. em Alexandria no Egito. Ele foi um célebre geômetra, astrônomo e considerado o maior geômetra da antiguidade.

Apesar de muitos dos seus escritos estarem desaparecidos, “As cônicas”, uma coleção de sete livros que apresentam novos termos matemáticos como parábola, elipse e hipérbole foram preservadas.

Suas pesquisas e descobertas também contribuíram com um exemplo para a geometria fractal, a Gaxeta de Apolônio (Figura 56), fractal gerado através de um empacotamento apolíneo de círculos (APÊNDICE B), conforme descrito abaixo.

Sejam três circunferências quaisquer,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , tangentes exteriores mutuamente, existem duas outras,  $C_4$  e  $C_5$ , conhecidas como circunferências de Apolônio (Figura 53) que possuem a propriedade de serem tangentes a essas três circunferências, conforme descrito em 3.4.

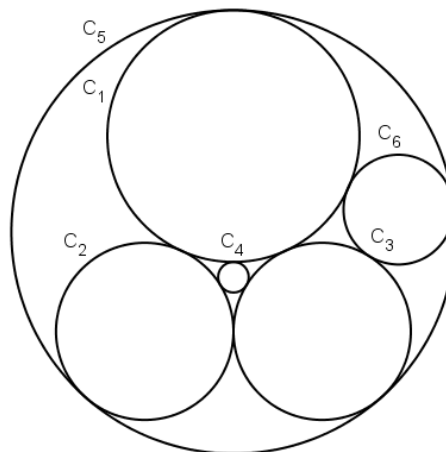
*Figura 53 - Circunferências de Apolônio,  $C_4$  e  $C_5$ , referentes às circunferências  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$*



*Fonte: O autor, 2018.*

Observe na Figura 54, abaixo, que para as circunferências tangentes  $C_1$ ,  $C_3$  e  $C_5$  também existem as circunferências de Apolônio,  $C_2$  e  $C_6$ . Com a criação da circunferência  $C_6$ , totalizaram oito triângulos circulares criados internamente à circunferência de maior raio, para os quais há a possibilidade da criação de novas circunferências de Apolônio.

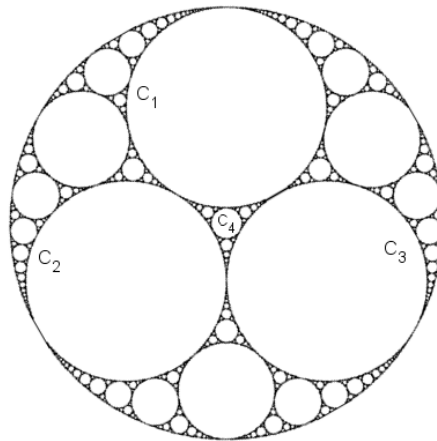
*Figura 54 - Circunferências de Apolônio,  $C_2$  e  $C_6$ , referentes às circunferências  $C_1$ ,  $C_3$  e  $C_5$*



*Fonte: O autor, 2018.*

A repetição indefinida desse processo de desenhar circunferências tangentes a outras três dará origem à Rede de Apolônio (Figura 55).

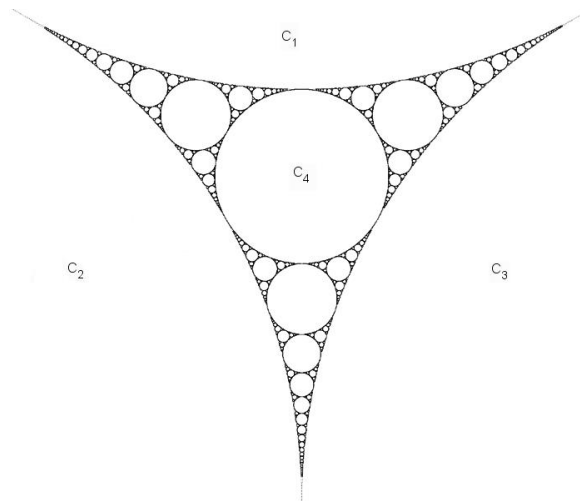
*Figura 55 - Rede de Apolônio*



*Fonte: Figura adaptada de BOURKE, 2003.*

Nesse empacotamento de círculos, encontram-se os fractais conhecidos como Gaxeta de Apolônio (Figura 56). Por exemplo, entre os pontos de tangência das circunferências  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .

*Figura 56 - Gaxeta de Apolônio*



*Fonte: Figura adaptada de BOURKE, 2003.*

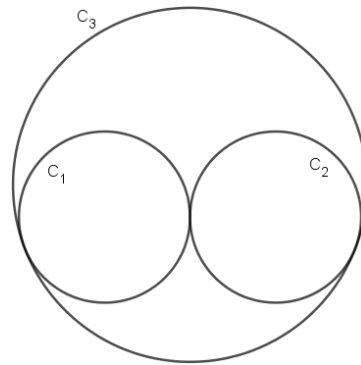
As gaxetas de Apolônio não são todas formadas por triângulos circulares semelhantes, por isso não se pode afirmar que uma gaxeta seja formada por várias partes menores semelhantes a si mesma. Assim, a utilização da dimensão de similaridade para o cálculo de sua dimensão torna-se ineficaz, sendo necessária a aplicação da dimensão de Hausdorff. Segundo Boyd (1973b, apud MANDELROT, 1983) sua dimensão é aproximadamente 1,3058.

#### 4.2.1 Construção da gaxeta de Apolônio com círculos de inversões e circunferências ortogonais

De forma a facilitar o entendimento, iniciar-se-á com um caso específico, em que será necessária a criação de uma Circunferência de Apolônio interna. No outro caso, seria necessária a construção de uma Circunferência de Apolônio externa e então os demais passos seriam semelhantes.

Tome três circunferências,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  (Figura 57), tangentes mutuamente, de forma que  $C_1$  tenha seu interior disjunto de  $C_2$ , e ambas sejam internas a  $C_3$ ;

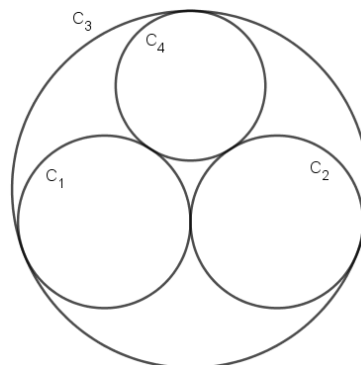
*Figura 57 -  $C_1$  e  $C_2$  disjuntos interiores a  $C_3$*



*Fonte: O autor, 2018.*

Trace  $C_4$  (Figura 58), circunferência de Apolônio interna referente às circunferências  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ;

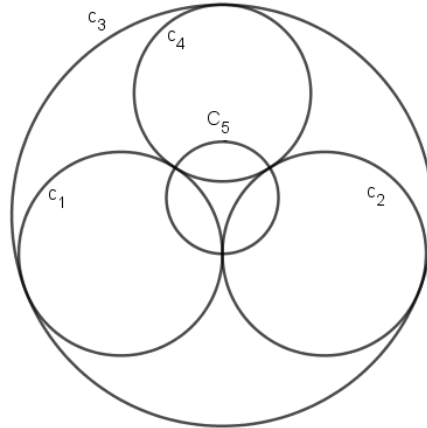
*Figura 58 - Circunferências  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e uma de suas circunferências de Apolônio*



*Fonte: O autor, 2018.*

Trace  $C_5$  (Figura 59), círculo de inversão, pelos pontos de tangência entre as circunferências  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_4$ .

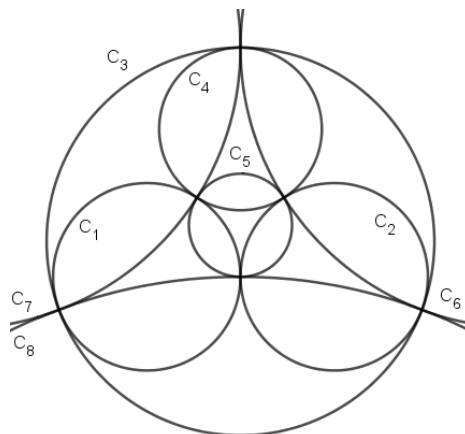
*Figura 59 - Círculo de inversão  $C_5$*



*Fonte: O autor, 2018.*

Trace os círculos  $C_6$ ,  $C_7$  e  $C_8$ , (Figura 60), pelos pontos de tangências das circunferências  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ ;  $C_1$ ,  $C_3$  e  $C_4$ ; e  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  respectivamente.

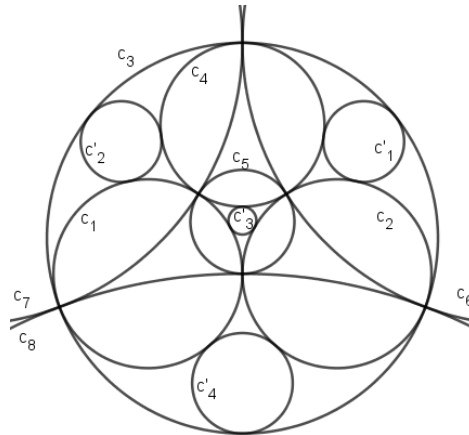
*Figura 60 - Círculos de inversão  $C_6$ ,  $C_7$  e  $C_8$*



*Fonte: O autor, 2018.*

Inverta as circunferências  $C_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_4$  por  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_7$  e  $C_8$ , gerando  $C'_3$ ,  $C'_1$ ,  $C'_2$  e  $C'_4$  respectivamente., conforme ilustrado na Figura 61.

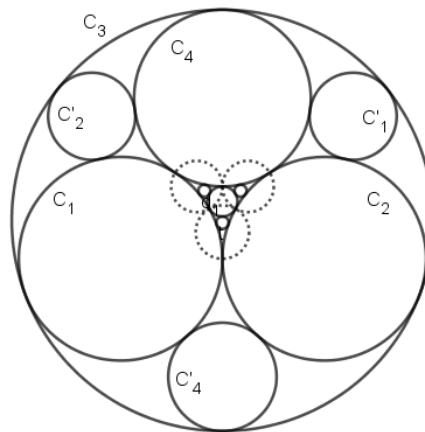
Figura 61 - Primeiro conjunto de inversões



Fonte: O autor, 2018.

A sequência de construção é uma repetição contínua dos passos anteriores, isto é, ao construir um círculo de inversão passando por três circunferências tangentes, é feita uma inversão de sua circunferência de Apolônio. Devido à limitação de espaço, apenas mais um passo será mostrado. Os círculos de inversão estão tracejados e as inversões de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_4$  estão em seus interiores (Figura 62).

Figura 62 - Segundo conjunto de inversões



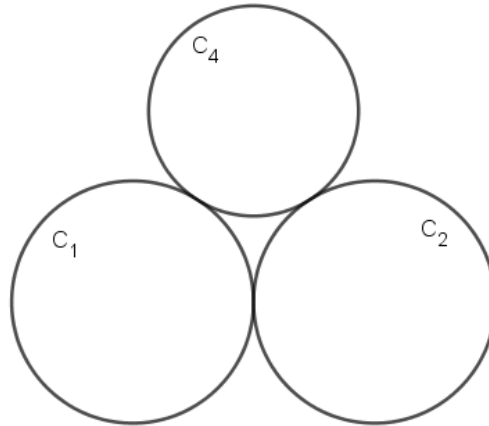
Fonte: O autor, 2018.

#### 4.2.2 Construção da gaxeta de Apolônio apenas com círculo de inversão

Das duas possibilidades para o início da construção, nos passos iniciais dessa, será feito a circunferência de Apolônio externo.

Tome três circunferências,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_4$ , tangentes mutuamente (Figura 63), de forma que seus interiores sejam disjuntos;

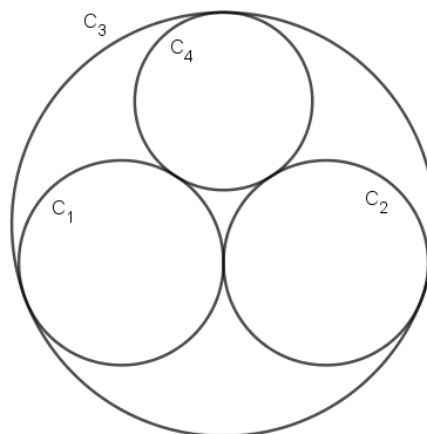
*Figura 63 - Circunferências tangentes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_4$*



*Fonte: O autor, 2018.*

Trace  $C_3$  (Figura 64), circunferência de Apolônio externa às três circunferências;

*Figura 64 - Circunferência externa de Apolônio,  $C_3$ , referente às circunferências  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_4$*

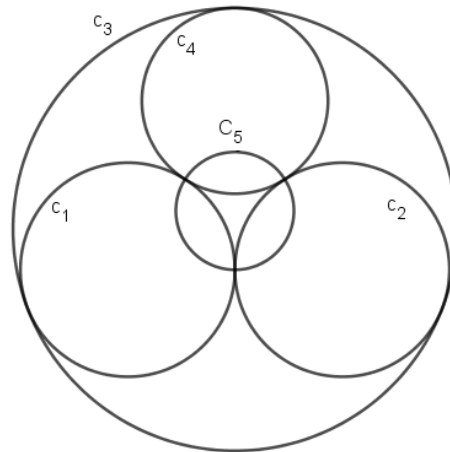


*Fonte: O autor, 2018.*

Trace  $C_5$  (Figura 65), círculo de inversão, pelos pontos de tangência entre as circunferências  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_4$ ;



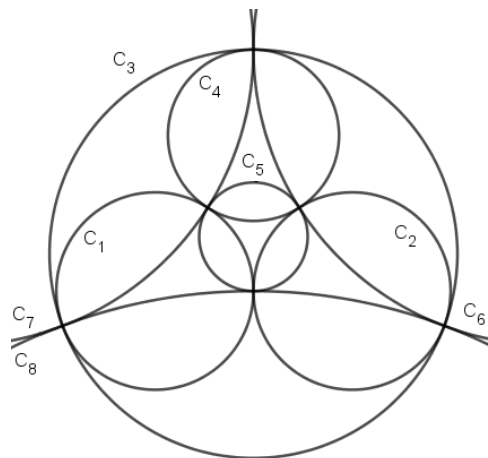
*Figura 65 - Círculo de inversão  $C_5$*



*Fonte: O autor, 2018.*

Trace os círculos de inversão  $C_6$ ,  $C_7$  e  $C_8$  (Figura 66) pelos pontos de tangências das circunferências  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ ;  $C_1$ ,  $C_3$  e  $C_4$ ; e  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  respectivamente;

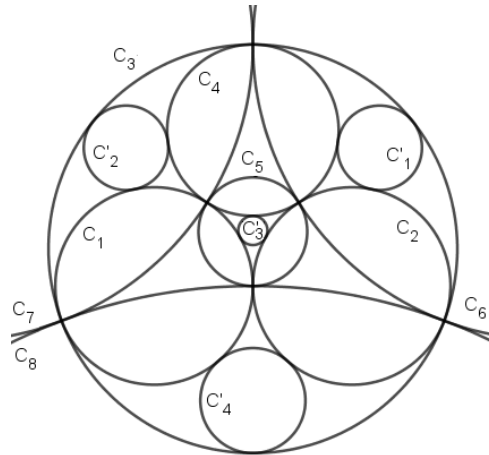
*Figura 66 - Círculos de inversão  $C_6$ ,  $C_7$  e  $C_8$*



*Fonte: O autor, 2018.*

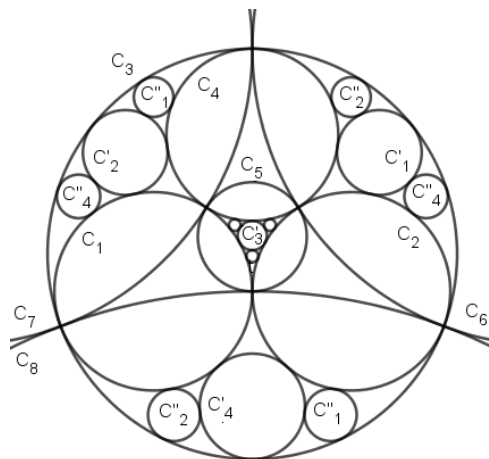
Após as construções desses círculos de inversão, basta, a cada passo, realizar todas as inversões possíveis. Abaixo serão representados os dois próximos passos (Figuras 67 e 68).

*Figura 67 - Primeiro conjunto de inversões*



*Fonte: O autor, 2018.*

*Figura 68 - Segundo conjunto de inversões*



*Fonte: O autor, 2018.*

## 5 APLICAÇÃO

### 5.1 Cristal líquido

As substâncias, em sua maioria, apresentam três estados físicos bem definidos dependendo da temperatura a que estejam submetidas: sólido, líquido e gasoso. A água, por exemplo, na pressão de uma atmosfera, possui ponto de fusão, sólido para líquido, a 0 °C e de ebulição, líquido para vapor, a 100°C. Contudo algumas substâncias na natureza não se comportam assim, pois entre os pontos de fusão e de ebulição passam por estados intermediários que possuem tanto características cristalinas de um sólido quanto características de fluidez de um líquido, e são conhecidas como Cristais Líquidos.

Substâncias com essas características estão espalhadas pela natureza. Muitas proteínas, membranas celulares, algumas argilas e o vírus do mosaico do tabaco, por exemplo, são cristais líquidos. Estas substâncias são amplamente utilizadas na manufatura de telas e painéis de diversos dispositivos eletrônicos, tais como computadores, aparelhos de televisão, calculadoras eletrônicas e telefones celulares (MEYER, 2009).

O fisiologista austríaco Friedrich Reinitzer, ao estudar as propriedades físico-químicas de vários derivados do colesterol em 1888, descobriu que um deles não derretia como os demais e apresentava, aparentemente, dois pontos de fusão. No primeiro estágio este derivado possuía aparência líquida, porém opaca, enquanto ao ser mais aquecido passava para um estágio de liquidez transparente.

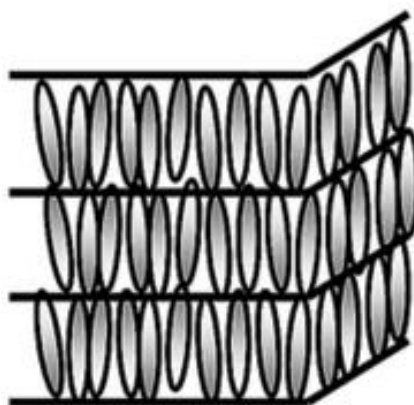
Intrigado com a descoberta, Friedrich Reinitzer, juntamente com o físico alemão Otto Lehmann, descobriram que o primeiro estado líquido do derivado analisado tinha um tipo único de ordem, o que é uma característica dos sólidos, enquanto o segundo estado apresentava desordenamento molecular característico do estado líquido comumente conhecido.

Entre os tipos de moléculas que formam diferentes cristais líquidos, as que possuem a forma de pequenas hastes são relevantes para o estudo dos fractais. Entre as diversas fases que essas moléculas podem ser organizadas, a fase esméctica A é a que pode apresentar padrões fractais em sua estrutura (MANDELBROT, 1983).

Na fase esméctica A, as moléculas do cristal líquido estão organizadas em camadas (Figura 69). Cada camada tem a espessura determinada pelo comprimento das hastes formadas por estas moléculas, as quais se dispõem paralelamente umas às outras. As lâminas que formam uma camada podem deslizar livremente umas sobre as outras e as moléculas entre as lâminas

possuem fluidez semelhante à de um líquido. Pode-se dizer que estamos tratando com um "líquido bidimensional".

*Figura 69 - Representação geométrica das moléculas na fase esmética A*



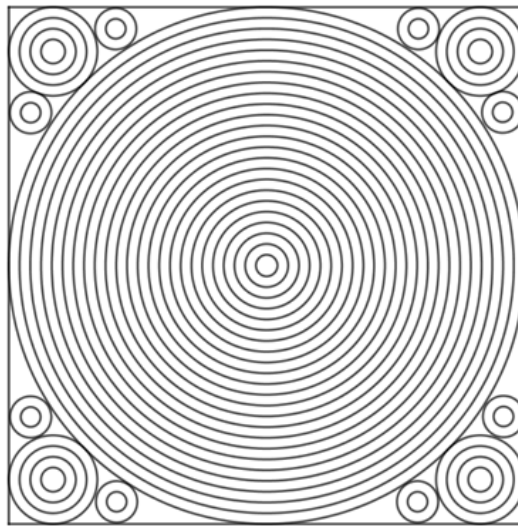
*Fonte: Figura adaptada de Royal Society of Chemistry.  
Disponível em: [http://pubs.rsc.org/services/images/RSCpubs.ePlatform.Service.FreeContent.ImageService.svc/ImageService/Articleimage/2015/SM/c4sm02505a/c4sm02505a-f1\\_high-res.gif](http://pubs.rsc.org/services/images/RSCpubs.ePlatform.Service.FreeContent.ImageService.svc/ImageService/Articleimage/2015/SM/c4sm02505a/c4sm02505a-f1_high-res.gif). Acesso em: 10 Jan. 2018.*

Cada lâmina pode ser analisada como uma superfície com espessura finita que assume a forma planar em sua configuração mais simples, mas que também pode ser encurvada e "colada" para formar superfícies mais complexas, tais como cilindros, esferas, toros, etc. As forças intermoleculares dentro de cada lâmina resistem ao encurvamento, exigindo maior energia quanto maior a curvatura. Assim, a forma mais simples, planar, é também a de menor energia. Se considerarmos um cilindro entre duas superfícies dadas, quanto maior o seu raio (menor curvatura) menos energia será necessária para formá-lo.

Consideremos agora duas placas quadradas paralelas à uma certa distância. Se quisermos utilizar uma camada de cristal líquido para formar um cilindro que se apoie ortogonalmente entre estas placas e que tenha curvatura pequena (baixa energia), basta inscrever as bases (circunferências) dentro de cada quadrado. Se agora quisermos continuar incluindo cilindros entre as placas, estes terão que estar dentro dos cilindros já incluídos ou nos espaços entre estes e a borda das placas. As circunferências bases dos cilindros irão se encaixar

em uma configuração similar à da gaxeta de Apolônio, conforme representado abaixo na Figura 70.

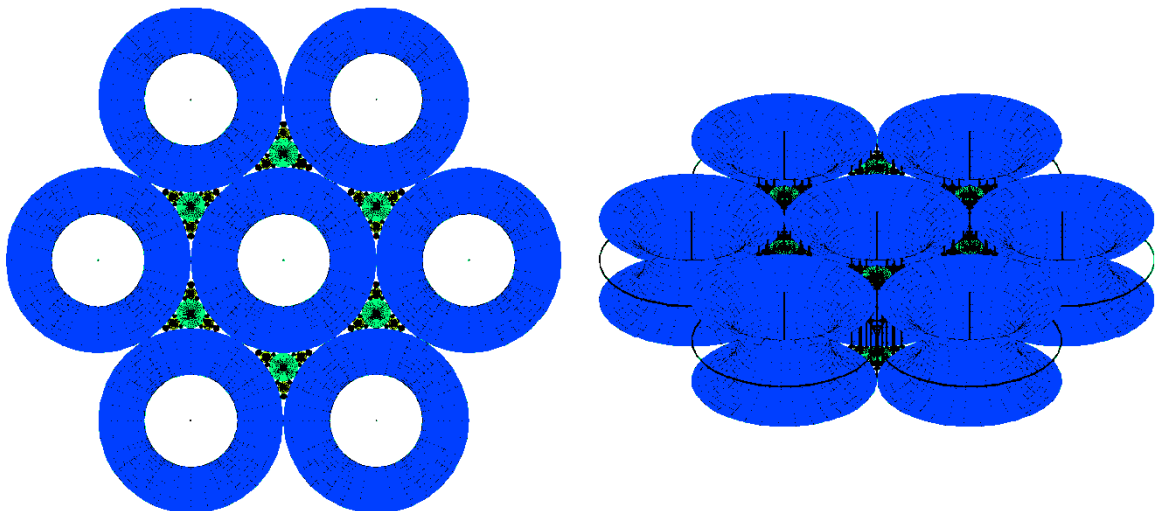
*Figura 70 - Representação geométrica das camadas de um cristal líquido*



*Fonte: O autor, 2018.*

Outras configurações mais complexas do que a apresentada acima, tais como as “focal conic”, Figura 71, também se formam naturalmente, mas estas não serão abordadas por não contribuírem diretamente com o tema deste trabalho.

*Figura 71 - Simulação de formação das camadas na fase esmética A*



*Fonte: Figura adaptada de MEYER, 2009.*

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou um aprofundamento teórico em relação à teoria dos fractais, apresentando alguns fractais clássicos e abordando algumas de suas características. Em particular, tratou-se da classe dos fractais não lineares gerados por inversões nos círculos, além de uma entre as diversas aplicações desses fractais no mundo real. Além disso, para alcançar o objetivo deste estudo, falou-se também em inversões no círculo, e algumas de suas propriedades.

Procurou-se abordar os assuntos de maneira tal que os conhecimentos prévios exigidos para a compreensão das definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos fossem os que constam dos conteúdos da Matemática do Ensino Médio. Com isso, almejou-se mostrar que muitos tópicos da Matemática podem ser trabalhados para a promoção da Matemática como ciência, e ao mesmo tempo, estimular o aluno a se interessar por tópicos mais complexos, desde que adaptados adequadamente para o Ensino Médio.

Espera-se que este estudo possa incentivar os professores a explorar outros assuntos, não somente os que constam no currículo de Matemática do Ensino Médio, pelo que possam estimular os alunos a buscarem novos conhecimentos e tecnologias necessárias para o seu desenvolvimento tanto no âmbito acadêmico quanto no profissional. Quanto aos alunos, espera-se que adquiram o hábito de continuar a estudar e o levem para a vida.

## REFERÊNCIAS

ASTE, Tomaso; WEAIRE, Denis, **The Pursuit of Perfect Packing**. IOP Publishing. Dublin: 2000.

AUDIN, Michèle; CHÉRITAT, Arnaud. **Um ensemble-limite**. 2009. Disponível em: <<http://images.math.cnrs.fr/Un-ensemble-limite.html?lang=fr>>. Acesso em: 15 fev. 2018.

ÁVILA, Geraldo. Euclides, Geometria e Fundamentos. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n.45, p.1-9, 2001.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2005.

BASTOS, Rita. Notas sobre o Ensino da Geometria: Transformações Geométricas. **Revista Educação e matemática**. n.94, set/out 2007. Disponível em: <<http://www.apm.pt/portal/index.php?id=82232&rid=82223>>. Acesso em: 24 abr 2018.

BOURKE, Paul. **Apollony Fractal**. 2003. Disponível em: <<http://paulbourke.net/fractals/apollony/>>. Acesso em: 15 jan 2018.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza f. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher: Ed da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999.

CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometria Não-Euclidianas. **Revista Matemática Universitária**. Rio de Janeiro, n. 2, dez. 1987. Disponível em: <[http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n06/n06\\_Artigo02.pdf](http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n06/n06_Artigo02.pdf)>. Acesso em: 18 out. 2017.

CHEN, Li M.. **Digital and Discrete Geometry: Theory and Algorithms**. Washington: Springer. 2014.

COMMANDINO, Frederico. **Euclides - Elementos de Geometria**. São Paulo: Edições Cultura. 1944.

CÔRTEZ, Ivana Resende da Costa. **Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática**. Rio de Janeiro. 67 f. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <[http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/TCC\\_IVANA.pdf](http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/TCC_IVANA.pdf)>. Acesso em: 15 jan. 2018.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda. 2000.

COXETER, Harold Scott MacDonald. **Introduction to Geometry**. 2.ed. Toronto: Wiley. 1969.

COXETER, Harold Scott MacDonald; Greitzer Samuel. L.. **Geometry Revisited**. Washington: The Mathematical Association of America. 1967.

CRILLY, Tony. **50 ideias de matemática que você precisa conhecer**. 1.ed. São Paulo: Planeta do Brasil. 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp. 2011.

FALCONER, Kenneth. **Fractals: A very Short Introduction**. Oxford: Oxford University Press. 2013.

FALCONER, Kenneth. **Fractal Geometry: mathematical foundations and applications**. England: Wiley. 1990.

FALCONER, Kenneth. **Techniques of Fractal Geometry**. New York: Wiley. 1997.

FALCONER, Kenneth. **The geometry of fractal sets**. 1Ed. New York: Cambridge University Press. 1986.

FRAME, Michael; URRY, Amelia. **Fractal Worlds: Grown, Built, and Imagined**. New Haven and London: Yale university Press. 2016a.

FRAME, Michael; URRY, Amelia. **Circle Inversion Fractals: Inversion Limit sets**. 2016b. Disponível em: <[http://users.math.yale.edu/public\\_html/People/frame/Fractals/](http://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/)>. Acesso em: 10 fev. 2018

JANOS, Michel. **Matemática e Natureza**. 1.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.



KUBRUSLY, Ricardo. **Geometrias não Euclidianas**. Disponível em <<http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/gne.html>>. 2004. Acesso em: 07 set. 2017.

MANDELBROT, Benoit. **La geometria fractal de la naturaleza**. Tradução Josep Llosa. 1.ed. Portugal: Tusquetes. 1997.

MANDELBROT, Benoit. **Objectos Fractais**. Tradução Carlos Fiolhais. 2.ed. Lisboa: Gradiva. 1998.

MANDELBROT, Benoit. **The fractal geometry of nature**. 3.ed. New York: W. H. Freeman and Company. 1983.

MEYER, Claire et al. **Focal Conic Stacking in Smectic A Liquid Crystals: Smectic Flower and Apollonius Tiling**. 2009. Disponível em: <<http://www.mdpi.com/journal/materials>> Acesso em: 22 jan. 2018.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F.. **APOLLONIUS OF PERGA**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apollonius.html>>. 1999 Acesso em: 30 dez. 2017.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F.. **DAVID HILBERT**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert.html>>. 2014. Acesso em: 25 jul. 2017.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F.. **GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR**. Disponível em: <<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Cantor.html>>. 1998. Acesso em: 18 out. 2017.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F.. **GIUSEPPE PEANO**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Peano.html>>. 1997. Acesso em: 26 jul. 2017.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F.. **KARL MENGER**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menger.html>>. 2014. Acesso em: 05 mar. 2018.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F.. **NIELS FABIAN HELGE VON KOCH**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Koch.html>>. 2000. Acesso em: 20 jul. 2017.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F.. **WACLAW SIERPINSKI**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sierpinski.html>>. 1997. Acesso em: 20 jul. 2017.

OGILVY, Charles Stanley. **Excursions in Geometry**. New York: Oxford University Press.1969.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do Ensino da Geometria no Brasil**: Causas e Conseqüências. In: Zetetiké, n.1. Unicamp. 1993.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1.ed. Rio de Janeiro: Zahar. 2012.

SALLUM, Élvia Mureb. Fractais no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: n. 57. 2005.

STEPHENSON, Kenneth. **Introduction to circle packing**: the theory of discrete analytic functions. New York: Cambridge University Press. 2005.

XIE, Heping. **Fractals in Rock Mechanics**. 1. ed. Netherlands: A. a. Balkema. 1993.

## APÊNDICE A

### 1 Transformação geométrica

As transformações geométricas são funções bijetivas. Isto é, seja  $\alpha$  um plano. Uma transformação geométrica nesse plano associa a cada ponto  $P$  do plano  $\alpha$  um ponto  $P'$  do próprio plano  $\alpha$ , isto é, uma função  $T(P) = P'$ , sendo  $P'$  a imagem do ponto  $P$  por  $T$ , e  $P$  o antecedente do ponto  $P'$  (COURANT, 2000).

Segundo Bastos (2007), há inúmeras transformações geométricas que são acessíveis aos alunos de Ensino Fundamental e Médio por meio de experiências do cotidiano, como por exemplo, a sombra de uma figura plana formada pela luz do sol ou por uma fonte de iluminação pontual.

Ao incentivar os alunos a terem contato com essa diversidade de transformações, o professor é capaz de fazê-los observarem que mesmo em meio à diversidade de transformações, há elementos comuns entre elas, e isso faz com que, tal como em outras áreas da Matemática, essa parte da geometria seja mais interessante do que se tem conhecimento (BASTOS, 2007).

Entretanto, dentre o grupo de transformações geométricas há duas que são mais usuais no estudo da geometria euclidiana: as isometrias e as homotetias. Relembra-las será importante, pois dará subsídios para que as propriedades da inversão no círculo sejam melhores compreendidas.

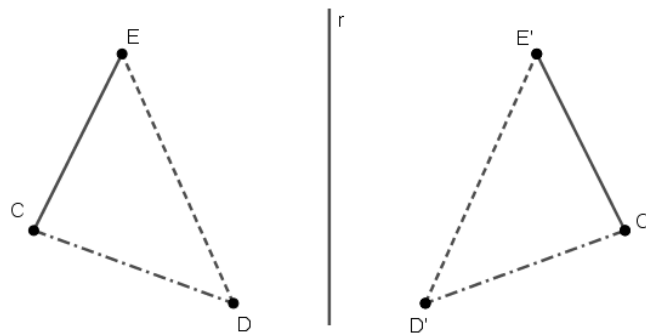
#### 1.1 Isometria

A isometria, apesar de, em grande parte das vezes, mudar a posição da figura no plano, preserva a distância entre os pontos da figura e seus ângulos. Essa transformação gera figuras congruentes as originais. Os exemplos clássicos dessa transformação são a Reflexão, a Rotação e a Translação.

- Reflexão

A reflexão em torno de uma reta  $r$ , chamada eixo de simetria, é uma transformação pela qual os pontos de  $r$  são invariantes e os demais pontos  $P$  do plano são transformados em pontos  $P'$ , tais que o segmento  $\overline{PP'}$  possui o eixo de simetria  $r$  como bissetriz.

Figura 72 - Reflexão em espelho plano

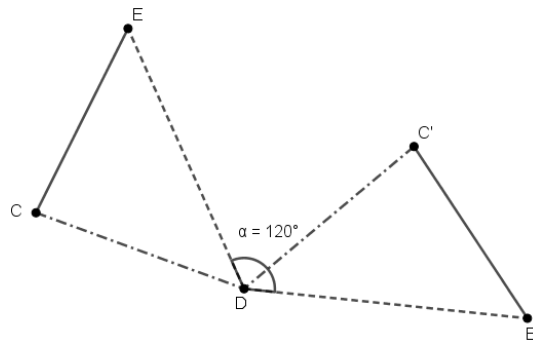


Fonte: O autor, 2018.

- Rotação

Nessa transformação, a figura gira em torno de um ponto fixo. Esse ângulo é denominado ângulo de rotação e o ponto fixo, pertencente ou não à figura, é chamado centro de rotação. As distâncias entre todos os pontos do objeto e o centro de rotação permanecem constantes, conforme a Figura 73.

Figura 73 - Rotação de um triângulo em torno de um ponto

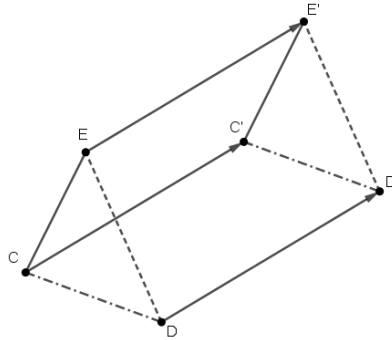


Fonte: O autor, 2018.

- Translação

Essa transformação faz com que haja uma mudança na posição da figura, sendo caracterizada por duas condições específicas: a direção e a distância (Figura 74).

*Figura 74 - Translação de um triângulo*

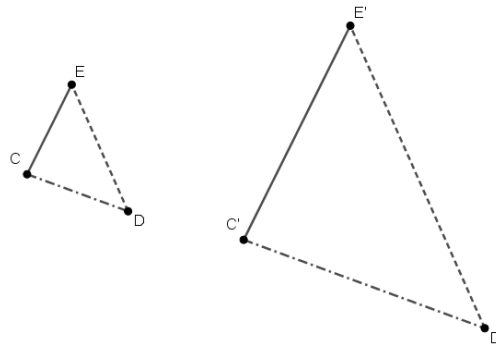


*Fonte: O autor, 2018.*

## 1.2 Homotetia

Preserva os ângulos da figura, contudo a distância entre seus pontos não permanece a mesma, gerando então figuras semelhantes, com a mesma forma que a original, porém ampliadas ou reduzidas como na Figura 75.

*Figura 75 - Homotetia de triângulos*



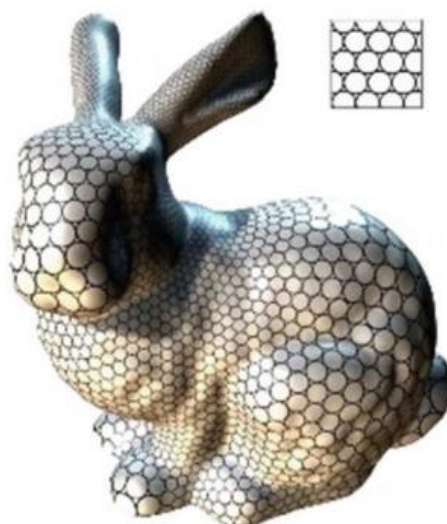
*Fonte: O autor, 2018.*

## APÊNDICE B

### 1 Empacotamento de círculos

O empacotamento de círculo é a técnica usada para cobrir uma determinada superfície usando círculos, os raios desses círculos podem ser iguais ou variar de tamanho. Esses círculos precisam estar dispostos de tal forma que sejam tangentes, mas não se sobreponham (CHEN, 2014).

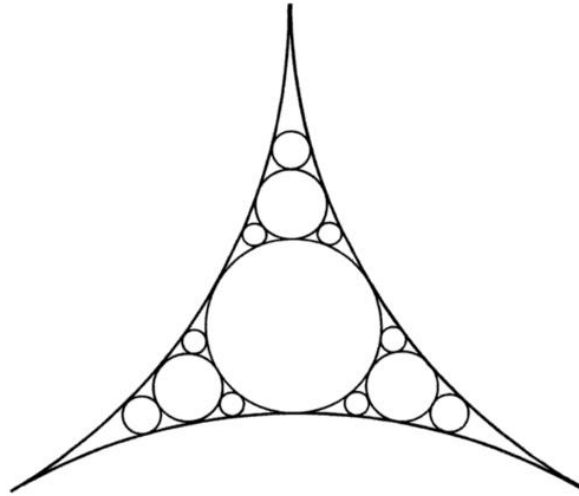
*Figura 76 - Exemplo de empacotamento de círculos*



*Fonte: CHEN, 2014.*

Um caso particular do empacotamento de círculos é o empacotamento apolíneo, cuja característica é preencher um triângulo curvilíneo com o círculo de maior raio de forma iterada. A seguir, na Figura 77, é possível notar que o triângulo curvilíneo formado pelos círculos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  foi preenchido pelo círculo  $C_4$ . Após a geração desse último, três novos triângulos curvilíneos foram formados, para os quais novos círculos de maior raio serão criados e assim continuamente (STEPHENSON, 2005).

*Figura 77 - Primeiros passos de um empacotamento apolíneo*



*Fonte: O autor, 2018.*