COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Denise Shizue Ribeiro Tokuyama

TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Introduzindo a circunferência trigonométrica no nono ano

Rio de Janeiro
2018

Denise Shizue Ribeiro Tokuyama

TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL
Introduzindo a circunferência trigonométrica no nono ano

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Marilis Bahr Karam Venceslau.

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

T646 Tokuyama, Denise Shizue Ribeiro

Trigonometria no ensino fundamental: introduzindo a circunferência trigonométrica no nono ano / Denise Shizue Ribeiro Tokuyama. – Rio de Janeiro, 2018.

64 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Marilis Bahr Karam Vesceslau.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Construções geométricas. 3. Trigonometria. 4. Ensino fundamental. I. Venceslau, Marilis Bahr Karam. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Andre Dantas – CRB7 5026

Denise Shizue Ribeiro Tokuyama

TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL
Introduzindo a circunferência trigonométrica no nono ano

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau (Orientador)
Colégio Pedro II

____
Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II

____
Dr. Carlos Eduardo Mathias Motta
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro
2018

Dedicado aos meus ex’s, atuais e futuros alunos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Deuslene e Nobukazu, e minha irmã Deise, por todo apoio em relação aos estudos durante toda minha vida. Sem eles, não teria chegado até aqui. Obrigada por todas as broncas e puxões de orelha, por todo amor e dedicação.

Agradeço, também, às minhas amigas do grupo “Bolinho” e aos meus amigos de trabalho, Bianca, Rosi e Oswaldo, que sempre me incentivarem a não desistir desse meu sonho.

Ao meu companheiro e amigo Cristiano, por todo apoio e compreensão. Por estar ao meu lado nos momentos de desânimo, sempre me dando forças para continuar.

Aos amigos que fiz durante o PROFMAT, principalmente ao Thiago e Álvaro. Por todas as horas de Skype discutindo questões na véspera das provas e por todas as fotos de soluções compartilhadas, mas também por todos os momentos de descontração, abraços sinceros e jogatinas.

Aos professores que acompanharam essa trajetória, por toda paciência, dedicação, amor e preocupação.

Aos meus alunos, que sem eles não seria a profissional que sou hoje.

E meu agradecimento especial à minha professora e orientadora Marilis, por ter me aceitado como sua pupila e abraçado a ideia para esse trabalho. Por toda paciência e dedicação. Por não me deixar “morrer na praia”. Por todos os sorrisos, abraços e lágrimas de orgulho.

Quem desiste nunca vence e só vence quem nunca desiste (Napoleon Hill).

RESUMO

TOKUYAMA, Denise Shizue Ribeiro. **Trigonometria no Ensino Fundamental**: introduzindo a circunferência trigonométrica no nono ano. 2018. 64 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

O ensino da Trigonometria, em geral, inicia-se no nono ano do Ensino Fundamental onde se abordam as razões trigonométricas no triângulo retângulo, sendo os demais conceitos e resultados trigonométricos abordados no Ensino Médio. Pretende-se com este trabalho mostrar que é viável antecipar para o nono ano o ensino da circunferência trigonométrica e estender os conceitos de seno, cosseno e tangente para ângulos não agudos. Assim, após adquirir esse conhecimento, será possível resolver problemas envolvendo triângulos quaisquer, entre outras aplicações. Desta forma, propõe-se construir a circunferência trigonométrica utilizando-se régua e compasso e, a partir daí, definir os conceitos de seno, cosseno e tangente. Para tal, requer-se o conhecimento e a compreensão de algumas construções geométricas necessárias para a confecção do plano cartesiano e do círculo unitário centrado na origem. Além disto, a teoria das razões trigonométricas no triângulo retângulo também será necessária na construção do conhecimento almejado. O uso de simetrias para relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano e o cálculo do seno, do cosseno e da tangente determinados por estes arcos conclui este estudo. Para encerrar, apresentar-se-á uma atividade realizada com alunos do nono ano de uma escola pública, localizada no município do Rio de Janeiro, e suas devidas conclusões.

Palavras-chave: Construções geométricas; Trigonometria; Circunferência trigonométrica; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

TOKUYAMA, Denise Shizue Ribeiro. **Trigonometria no Ensino Fundamental**: Introduzindo o ciclo trigonométrico no nono ano. 2018. 64 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

The teaching of Trigonometry, in general, begins in the ninth year of elementary school where the trigonometric ratios are approached in the triangle rectangle, and the other concepts and trigonometric results are approached in High School. This work intends to show that is practicable to anticipate for the ninth year the teaching of the trigonometric circumference and to extend the concepts of sine, cosine and tangent to non-acute angles. Thus, after acquiring this knowledge, it will be possible to solve problems involving any triangles, among other applications. In this way, it is proposed to construct the trigonometric circumference using ruler and compass and, from there, to define the concepts of sine, cosine and tangent. For this, the knowledge and the understanding of some geometric constructions necessary for the making of the cartesian plane and the unitary circle centered in the origin is required. In addition, the theory of trigonometric ratios in the triangle rectangle will also be necessary in the construction of the desired knowledge. The use of symmetries to relate measurements of trigonometric arcs with symmetrical ends in relation to one of the coordinate axes or to the origin of the Cartesian system and the calculation of the sine, cosine and tangent determined by these arcs finishes this study. To conclude, an activity will be presented with students from the ninth year of a public school, located in the city of Rio de Janeiro, and its due conclusions.

Keywords: Construction; Trigonometry; Trigonometric circumference; Elementary school.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11
2 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS 13
2.1 Ponto médio de um segmento AB 13
2.2 Reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado 15
2.3 Reta paralela a uma reta dada, que contém um ponto dado 17
3 TRIGONOMETRIA 20
3.1 Trigonometria no triângulo retângulo 20
3.1.1 Relações entre as razões trigonométricas 21
3.1.2 Razões trigonométricas dos ângulos notáveis 23
3.2 Ângulos e arcos de circunferência 26
3.2.1 Radiano 27
3.3 Circunferência trigonométrica 29
3.3.1 Simetrias 34
3.3.2 Seno e cosseno na circunferência trigonométrica 38
3.3.3 Tangente na circunferência trigonométrica 45
4 A ATIVIDADE PROPOSTA 50
4.1 Atividade realizada 50
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 62
REFERÊNCIAS 64

1 INTRODUÇÃO

A aprendizagem da Matemática nas escolas vem sendo comprometida por diversos fatores. A falta de alguns conhecimentos específicos na área, aliada ao desinteresse por parte dos alunos, faz com que o conteúdo, muitas vezes, seja ensinado de forma apenas expositiva, onde o objetivo é decorar fórmulas para realizar cálculos.

O ensino da Trigonometria, especificamente, é vista de forma rápida, com um apanhado de fórmulas e tabelas com valores sem sentido.

Analisando brevemente os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (1998), não se encontra o estudo da Trigonometria como conteúdo dos anos finais. Ela é encontrada apenas nas bases do Ensino Médio, de forma superficial, pois para os alunos que não seguirão as carreiras ditas exatas, é suficiente o estudo da Trigonometria em situações-problema que envolvam medições e construções de modelos associados a fenômenos periódicos.

Porém, por que não começar tal estudo a partir do nono ano do Ensino Fundamental? Dissolvendo esse conteúdo entre o ano final do Ensino Fundamental e as séries do Ensino Médio tendo como objetivo melhorar a compreensão e assimilação dos alunos.

A grade curricular da Prefeitura do Município do Rio de Janeiro é baseada nos Descritores – uma listagem bimestral das habilidades que os alunos devem adquirir durante o período. Neles, encontra-se o tema Trigonometria no terceiro bimestre do nono ano, sendo o estudo baseado na aplicação das razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente) no triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

Durante cada bimestre de um ano letivo, é fornecido um caderno pedagógico com os conteúdos a serem ministrados. Tais conteúdos se relacionam com as habilidades que devem ser desenvolvidas e listadas pelos Descritores. Nela, a Trigonometria é tratada friamente como uma lista de fórmulas e tabelas para serem aplicadas em exercícios com aplicação direta e algumas aplicações contextualizadas.

Qual o sentido de trabalhar tal conteúdo dessa forma? A Matemática já é tão pouca aceita pelos alunos, que demonstram dificuldades desde os anos iniciais. Por que não tentar mostrar o conteúdo de forma mais atrativa? Transmitindo o conhecimento de forma que o aluno possa participar da construção do saber, compreender as construções, associar com os conteúdos já estudados e aplicar de forma que saiba o porquê de estar fazendo de tal modo.

Este trabalho tem como objetivo introduzir a circunferência trigonométrica no ano final do Ensino Fundamental, construindo o conhecimento a partir de construções geométricas simples, de forma que, através de um conhecimento prévio de Trigonometria no triângulo retângulo, o aluno possa estender o conhecimento de seno, cosseno e tangente para os ângulos não agudos, a fim de aplicar tal conhecimento em problemas que envolvam triângulos obtusos, como por exemplo, conseguir calcular o perímetro de um terreno triangular, sabendo a medida de dois de seus lados e o ângulo formado por esses lados. Assim, pretende-se que os alunos aprendam os conceitos de seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico bem como a a calcular seus valores. O tópico sobre Funções Trigonométricas continuaria sendo lecionado apenas no Ensino Médio. Para isso, há todo um estudo teórico da Trigonometria, voltado para o ano final do Ensino Fundamental, trazendo contextos históricos, as fórmulas e como surgem os valores da tabela do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, usados em sala, tornando o ensino-aprendizagem da Trigonometria mais eficaz e significativo.

Esta dissertação é composta por, além deste capítulo introdutório, mais quatro capítulos. O segundo capítulo apresenta um estudo de algumas construções geométricas com régua e compasso que serão usadas no processo de construção do plano cartesiano e do círculo unitário centrado na origem, necessários para definir a circunferência trigonométrica.

O capítulo três inicia-se com uma introdução histórica do tema, além de um estudo da Trigonometria no triângulo retângulo. Para então, tratar da extensão do conceito de seno, de cosseno e de tangente para ângulos não agudos.

O objetivo final desta dissertação é organizar e comentar os dados obtidos através da aplicação de uma atividade para alunos do nono ano do Ensino Fundamental, que se encontra no capítulo quatro, a fim de verificar a viabilidade de adiantar tal conteúdo para esse ano. Essa atividade conta com a construção geométrica da circunferência trigonométrica usando régua e compasso, e um questionário, respondido intuitivamente pelos alunos a partir das construções realizadas e do conteúdo prévio de Trigonometria no triângulo retângulo, adquirido durante o ano letivo.

Por fim, no quinto capítulo, encontram-se as conclusões geradas pela atividade realizada e opiniões dadas pelos alunos, referente ao conteúdo lecionado.

2 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

As construções com régua e compasso apareceram por volta do século V a.C. e ajudaram de forma eficaz o desenvolvimento da Matemática grega. Os conceitos de número e razão causavam dificuldades ao serem associados a medidas de grandezas. Porém, por volta do século III a.C., as grandezas passaram a ser associadas a magnitudes, em vez de números. Logo, as grandezas começaram a ser tratadas através da Geometria, onde resolver e construir tinham o mesmo significado (WAGNER, 1993).

Antes de se falar nas construções geométricas usadas neste estudo, assumir-se-ão os conceitos primitivos de ponto e reta. Além disso, os pontos serão denotados por letras maiúsculas, e as retas, por letras minúsculas. Admitir-se-á, também, os cinco Postulados de Euclides:

I) Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos;

II) Pode-se continuar qualquer reta finita continuamente em uma reta;

III) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio;

IV) Todos os ângulos retos são iguais;

V) Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

2.1 Ponto médio de um segmento $\boldsymbol{AB}$

Sejam uma reta r e os pontos A e B, distintos, pertencentes a r. O objetivo dessa construção é determinar o ponto M pertencente à r, tal que $\overline{AM} = \overline{MB}$. Este ponto é chamado de ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

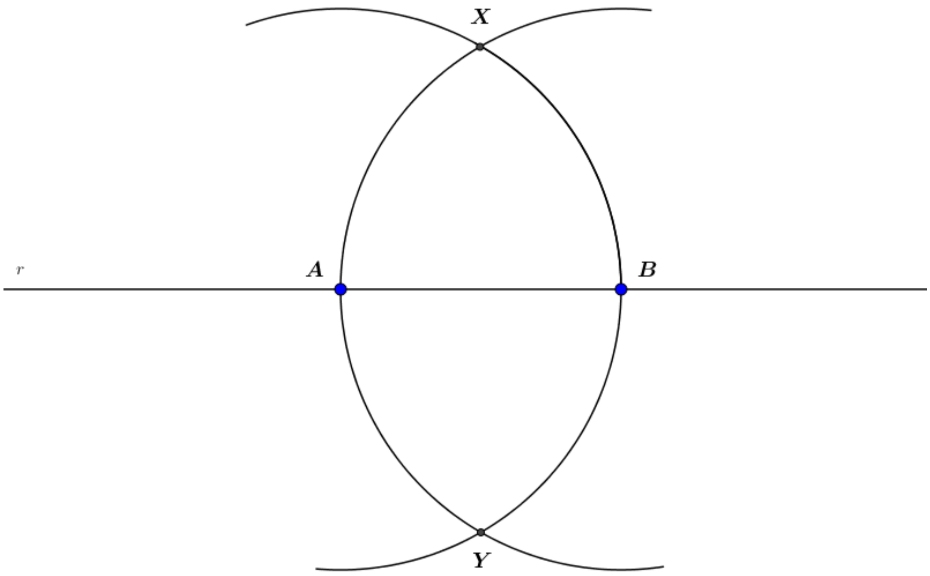
1) Construída a reta r, tomam-se dois pontos distintos A e B (Figura 1).
2) Com a ponta seca do compasso no ponto A, fixa-se uma abertura até o ponto B.

Figura 1 - Construção do ponto médio de um segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$

Fonte: A autora, 2018.

3) Traçam-se os arcos de círculos de centros A e B, de modo que haja duas interseções, que serão chamadas de pontos X e Y (Figura 2).

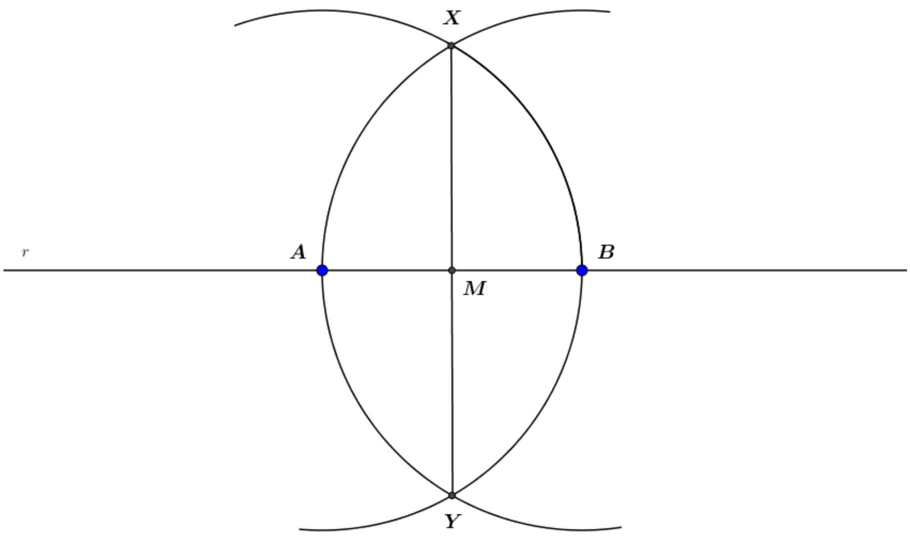
Figura 2 - Construção do ponto médio do segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$



Fonte: A autora, 2018.

4) Traçando o segmento $\overline{XY}$, tem-se que sua interseção com o segmento $\overline{AB}$ gera o ponto M desejado (Figura 3).

Figura 3 - Construção do ponto médio de um segmento AB



Fonte: A autora, 2018.

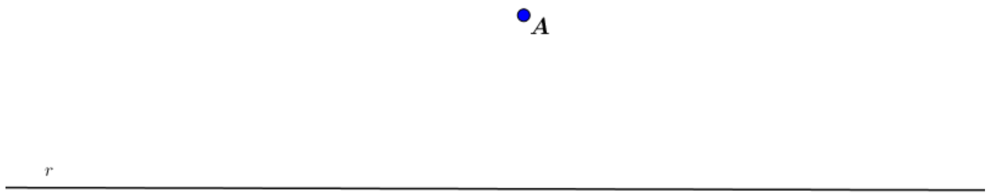
Demonstração: De fato, ao criar os pontos X e Y, tem-se que os triângulos ABX e ABY são equiláteros, com lados medindo $\overline{AB}$. Além disso, os triângulos AXM e BXM são congruentes por LAL. Logo, $\overline{AM}=\overline{MB}$ e, consequentemente, M é ponto médio de $\overline{AB}$. A conclusão é recíproca para o triângulo AYB.

2.2 Reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado

Sejam uma reta r e um ponto A não pertencente à reta. O objetivo desta construção é determinar uma reta s, perpendicular a r, de modo que A pertença a s.

1) Construir a reta r e um ponto A, qualquer, fora da reta (Figura 4).

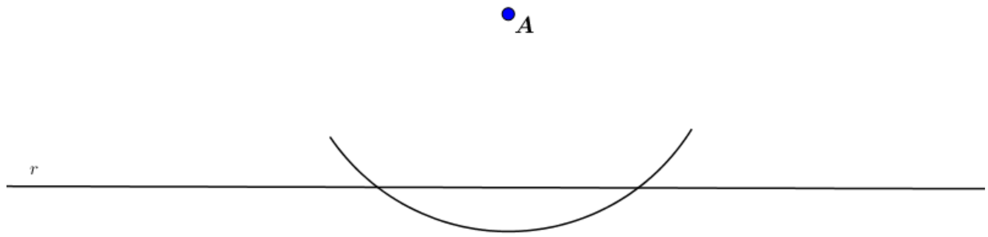
Figura 4 - Reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado



Fonte: A autora, 2018.

2) Com a ponta seca do compasso em A, fixa-se uma abertura maior que a distância do ponto A à reta r (Figura 5).

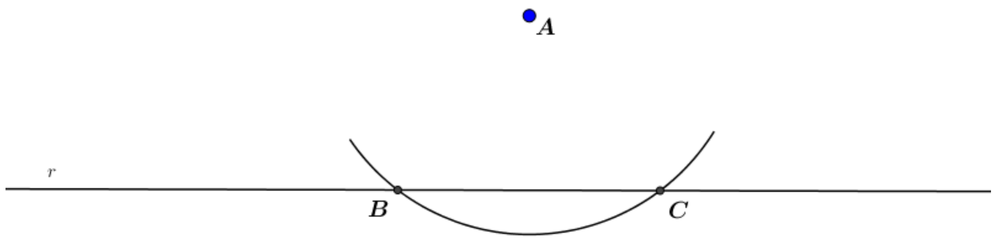
Figura 5 - Reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado



Fonte: A autora, 2018.

3) Traçar o arco de circunferência de centro A, de modo a determinar duas interseções do arco com a reta r. Denotam-se estas interseções por B e C (Figura 6).

Figura 6 - Reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado



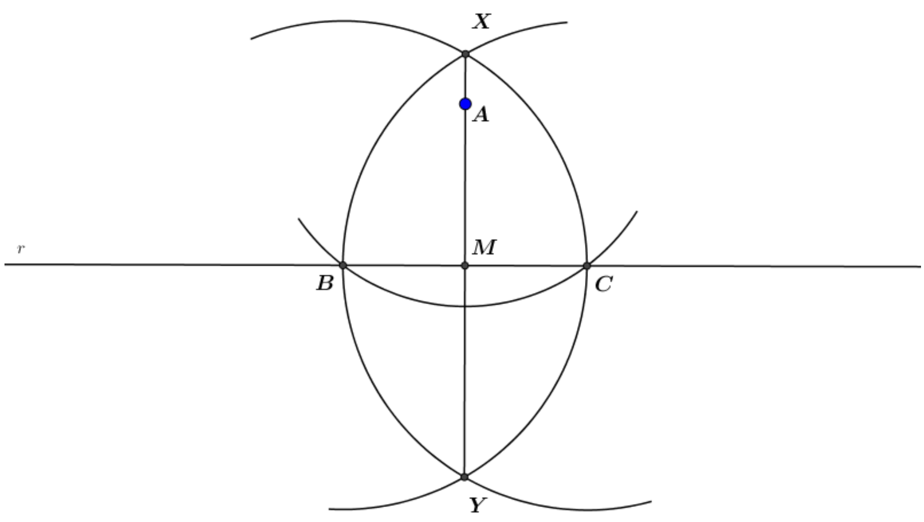
Fonte: A autora, 2018.

4) Construir o ponto médio M do segmento $\overline{BC}$ (Figura 7).

5) Traçando a reta que contém o segmento $\overline{AM}$, determina-se a reta s, perpendicular à reta r (Figura 8).

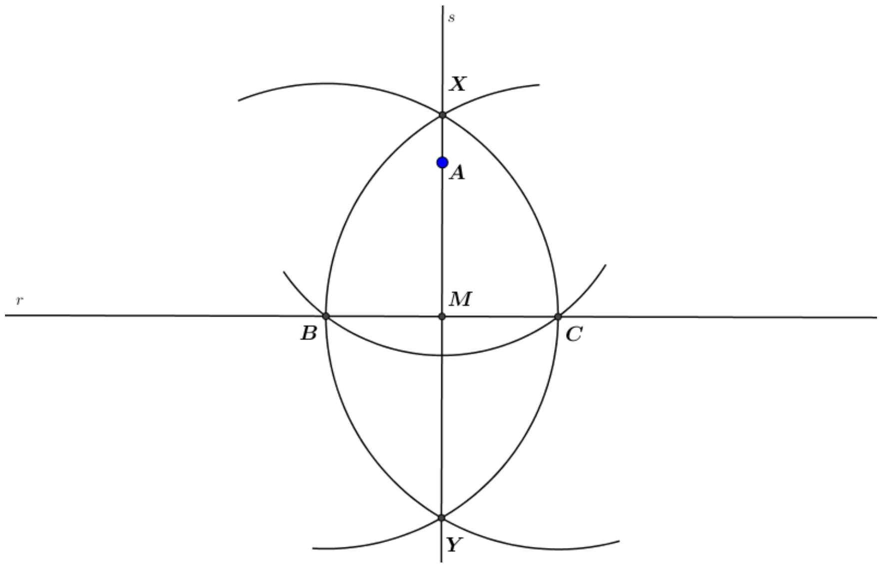
Demonstração: De fato, ao criar os pontos B e C, tem-se que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes por serem raios de uma mesma circunferência de centro A. Além disso, $\overline{BM}$=$\overline{MC}$ como já visto anteriormente. Logo, os triângulos ABM e ACM são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{AM}$ é lado comum aos triângulos. Dessa forma, $\angle BMA + \angle CMA = 180°$. Porém, como os triângulos são congruentes, seus ângulos também os são. Então $\angle BMA = \angle CMA = 90°$. Desta forma, então, a reta que contém $\overline{AM}$ é perpendicular à reta r.

Figura 7 - Reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado



Fonte: A autora, 2018.

Figura 8 - Reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado



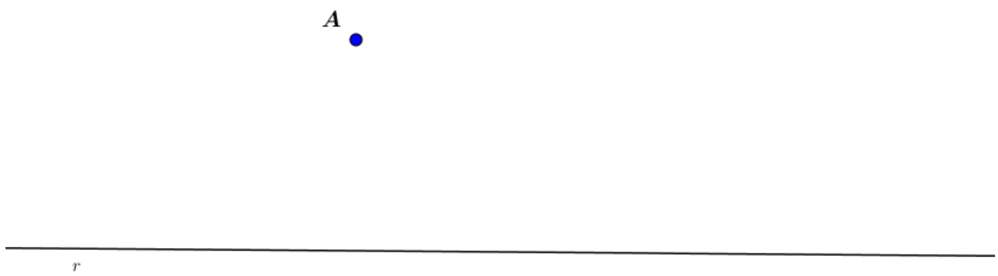
Fonte: A autora, 2018.

2.3 Reta paralela a uma reta dada, que contém um ponto dado

Seja uma reta r e um ponto A, não pertencente a r. O objetivo dessa construção é determinar uma reta s, paralela à reta r, que contenha o ponto A.

1) Construir a reta r e um ponto A, qualquer, fora da reta (Figura 9).

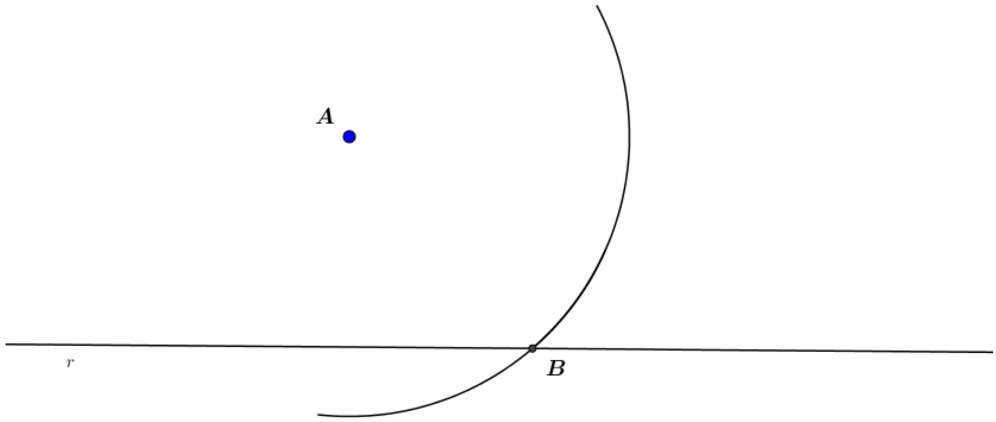
Figura 9 - Reta paralela a uma reta dada, que contém um ponto dado (Passo 1)



Fonte: A autora, 2018.

2) Com a ponta seca do compasso em A, traçar um arco de circunferência de modo a intersectar a reta r, marcando esta interseção com um ponto B (Figura 10).

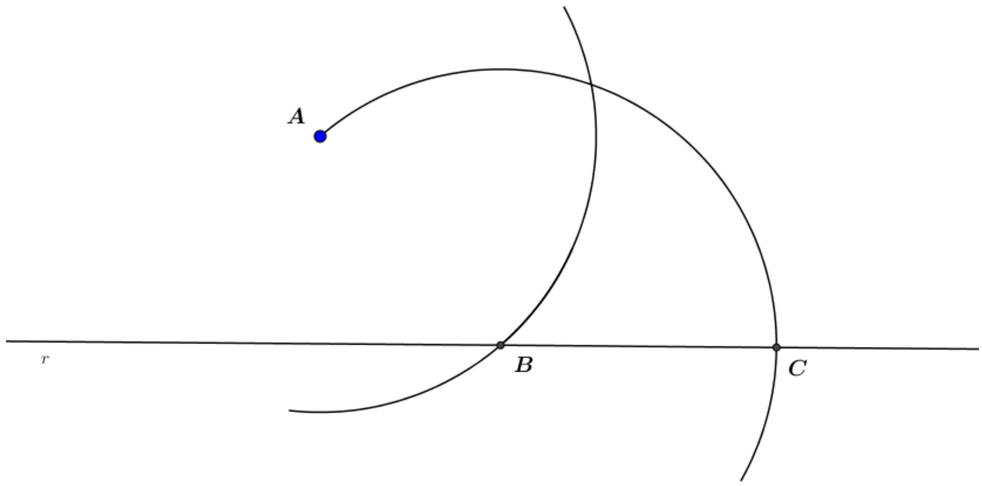
Figura 10 - Reta paralela a uma reta dada, que contém um ponto dado



Fonte: A autora, 2018.

3) Com a ponta seca do compasso em B, e com a mesma abertura AB, traçar um arco de circunferência de modo que este intersecte a reta r, marcando esta interseção com um ponto C (Figura 11).

Figura 11 - Reta paralela a uma reta dada, que contém um ponto dado

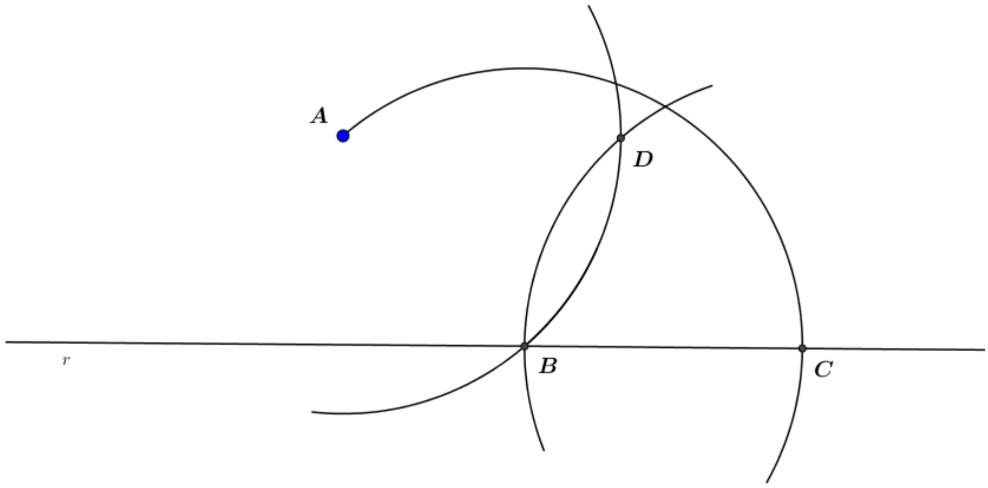


Fonte: A autora, 2018.

4) Com a ponta seca do compasso em C, e com mesma abertura $\overline{AB}$, traçar um arco de circunferência de modo que este intersecte o primeiro arco construído (Passo 2), marcar esta interseção com um ponto D (Figura 12).

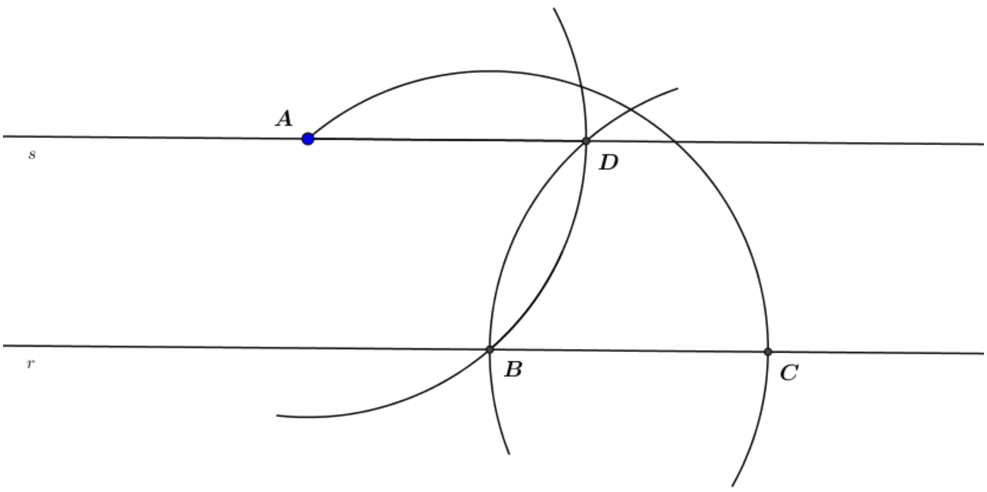
5) Traçando a reta que contém o segmento $\overline{AD}$, encontra-se a reta s, a qual é paralela à reta r (Figura 13).

Figura 12 - Reta paralela a uma reta dada, que contém um ponto dado



Fonte: A autora, 2018.

Figura 13 - Reta paralela a uma reta dada, que contém um ponto dado



Fonte: A autora, 2018.

Demonstração: De fato, ao criar os pontos B, C e D, e por terem a mesma distância $\overline{AB}$, tem-se um losango de lados com medida $\overline{AB}$. Logo, seus lados opostos são paralelos, ou seja, os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são paralelos. Tem-se, então, que a reta que contém $\overline{AD}$ é paralela à reta r.

3 TRIGONOMETRIA

A Trigonometria é um conjunto de ferramentas desenvolvido para solucionar problemas métricos da geometria, baseando-se nos ângulos para tais cálculos (NETO, 2013).

Os conceitos trigonométricos surgiram por volta dos séculos IV e V a.C., na região da antiga Babilônia e Egito. Seu desenvolvimento se deu para facilitar os estudos nos ramos da astronomia, navegação, cronologia do tempo e agricultura, e foi iniciado através de uma relação entre tamanhos de sombras e horas do dia. Na Grécia, encontram-se registros sobre estudos que relacionam ângulos de um círculo e os comprimentos de cordas que o submetem, usados para determinar o tamanho da Terra e a distância entre o Sol e a Lua (BOYER, 1974)

Os estudiosos mais influentes foram: Hiparco de Nicéia (século II a.C.), considerado o “pai da Trigonometria” - pois foi o primeiro a tabular valores do arco e da corda de uma circunferência para toda uma série de ângulos -, e Cláudio Ptolomeu (século II d.C.), autor da obra mais influente e significativa do ramo, a *Syntaxis Mathematica*, onde mais tarde foi chamada de *Almagesto* (BOYER, 1974).

O objetivo deste capítulo é estender os conceitos de seno, cosseno e tangente para ângulos não agudos. Com este intuito, inicia-se este estudo falando-se de trigonometria no triângulo retângulo. A seguir, define-se a unidade de medida radiano. Finalmente, introduz-se a circunferência trigonométrica para então se estender os conceitos almejados.

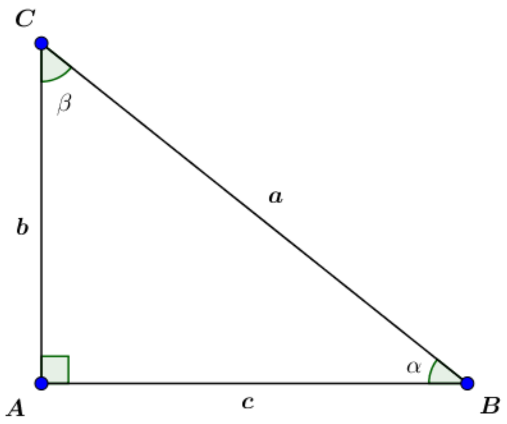
3.1 Trigonometria no triângulo retângulo

Considere um triângulo retângulo ABC, retângulo em A (Figura 14)Tem-se que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são chamados de catetos, e o segmento $\overline{BC}$, oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa.

A Trigonometria no triângulo retângulo é aplicável em seus dois ângulos agudos, porém é importante observar qual ângulo está sendo tomado como referencial dos cálculos. Observe, a seguir, como as razões se alteram dependendo do ângulo usado.

Sejam os ângulos α, no vértice B, e β, no vértice C. Chama-se de cateto oposto o lado oposto ao ângulo agudo dado. Nesse caso, $\overline{AC}$ é oposto a α, e $\overline{AB}$ é oposto a β. Chama-se de cateto adjacente o lado do triângulo que forma o ângulo agudo dado. Nesse caso, $\overline{AB}$ é adjacente a α, e $\overline{AC}$ é adjacente a β.

Figura 14 -Triângulo retângulo com hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c



Fonte: A autora, 2018.

Definem-se as razões trigonométricas no triângulo retângulo como:

Seno: razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo agudo e a hipotenusa.

$$\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \quad (1) \text{ e } \boldsymbol{sen\ \beta} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AB}{BC} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}. \quad (2)$$

Cosseno: razão entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo agudo e a hipotenusa.

$$\boldsymbol{cos\ \alpha} = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AB}{BC} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} \quad (3) \text{ e } \boldsymbol{cos\ \beta} = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{.} \quad (4)$$

Tangente: razão entre as medidas dos catetos oposto e adjacente.

$$\boldsymbol{tg\ \alpha} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{AC}{AB} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} \quad (5) \text{ e } \boldsymbol{tg\ \beta} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{AB}{AC} = \frac{\boldsymbol{c}}{.\boldsymbol{b}} \quad (6)$$

Observe que os valores do seno e cosseno dos ângulos serão sempre positivos, menores que um, pois a medida da hipotenusa é sempre maior que as medidas dos catetos.

3.1.1 Relações entre as razões trigonométricas

Sendo as razões trigonométricas geradas de um mesmo triângulo retângulo, pode-se concluir algumas relações entre elas.

Primeiramente, observando a Figura 14, é possível saber o valor das tangentes calculando as razões entre o seno e cosseno de seus respectivos ângulos.

Seja $\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{b}{a}$, então $\mathrm{b = a.sen\ \alpha}$. E, se $\boldsymbol{cos\ \alpha} = \frac{c}{a}$, então $c = a.\cos\alpha$.

Se $\boldsymbol{tg\ \alpha} = \frac{b}{c}$, então $\boldsymbol{tg\ \alpha} = \frac{a.sen\ \alpha}{a.\cos\alpha} = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$. (7)

O caso para $tg\ \beta$ é análogo.

Segundo, a partir do Teorema de Pitágoras, temos $b^2 + c^2 = a^2$, onde b e c são as medidas dos catetos e a a medida da hipotenusa do triângulo retângulo. Seguindo as seguintes operações, tem-se:

$$b^2 + c^2 = a^2, \quad (8)$$

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

e

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1.$$

Substituindo os quocientes $\frac{b}{a} = sen\ \alpha$ e $\frac{c}{a} = \cos\alpha$, tem-se:

$$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1. \quad (9)$$

Ou seja, a soma dos quadrados do seno e cosseno de um mesmo ângulo agudo sempre resulta em 1. Essa equação é conhecida como a Relação Fundamental da Trigonometria.

Por último, observando os resultados:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

e

$$\cos\beta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}.$$

Conclui-se que $sen\,\alpha = \cos\beta$. Como $\alpha + \beta = 90°$, ou seja, os ângulos são complementares, conclui-se que ***o seno de um ângulo agudo possui o mesmo quociente do cosseno do complemento desse mesmo ângulo, e vice-versa***. Em notação matemática:

$$sen\,\alpha = cos(90° - \alpha) \quad (10)$$

e

$$\cos\alpha = sen(90° - \alpha) \quad (11).$$

O caso para $\cos\alpha = \frac{c}{a}$ e $sen\,\beta = \frac{c}{a}$ é análogo.

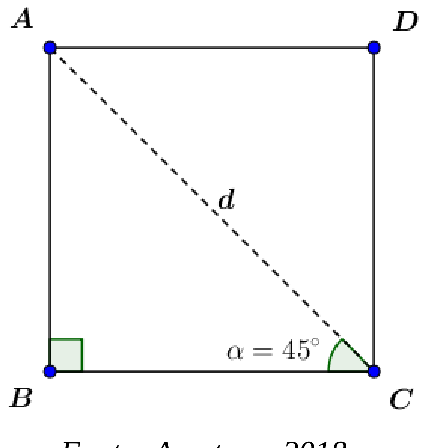
3.1.2 Razões trigonométricas dos ângulos notáveis

Os ângulos de 30°, 45° e 60° são chamados de ângulos notáveis, pois são aqueles que aparecem com maior frequência nas atividades relacionadas à Trigonometria no triângulo retângulo. Dessa forma, nesta seção, serão determinados os valores das razões trigonométricas desses ângulos.

Ângulo de 45°

Considere um quadrado de lados com medidas l, como mostra a Figura 15.

Figura 15 - Quadrado de lado de medida l.



Fonte: A autora, 2018.

Traçando a diagonal do quadrado, tem-se que sua medida, em relação ao lado l, vale $l.\sqrt{2}$, calculada usando Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelos lados do quadrado e sua diagonal, a qual se queria determinar.

Observe, na Figura 15, que o triângulo ABC formado é um triângulo retângulo e isósceles, com catetos de medida l e hipotenusa de medida $l.\sqrt{2}$, e seus ângulos agudos medem $45°$, então:

$$d^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow d^2 = 2l^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}.\sqrt{l^2} \Leftrightarrow d = l\sqrt{2}\ . (12)$$

Ainda, de acordo com essas informações, têm-se os seguintes valores para as razões trigonométricas, em relação ao ângulo de $45°$:

$$sen\ 45° = \frac{l}{l.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \frac{l}{l.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$tg\ 45° = \frac{sen\ 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{2}{\sqrt{2}} = 1.$$

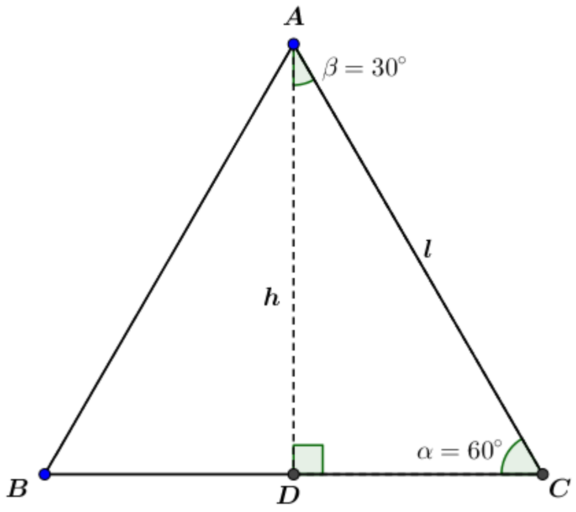
Ângulos de $30°$ e $60°$

Considere, agora, um triângulo equilátero de lados com medida l (Figura 16).

Traçando a altura do triângulo equilátero, forma-se um triângulo retângulo ABD onde os catetos são representados pela altura traçada e pela metade da base do triângulo, sendo a medida $\frac{l}{2}$, e hipotenusa de medida l. Usando, novamente, o Teorema de Pitágoras, calcula-se que a medida da altura do triângulo equilátero, em relação ao seu lado l, vale $\frac{l.\sqrt{3}}{2}$. De fato,

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{l^2}{4} = l^2 \Leftrightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{l^2}}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.\ (13)$$

Figura 16 - Triângulo equilátero com lado de medida l.



Fonte: A autora, 2018.

Observe, na Figura 16, que o triângulo retângulo ADC possui catetos de medidas $\frac{l}{2}$ e $\frac{l.\sqrt{3}}{2}$; hipotenusa de medida l; e seus ângulos agudos medem $30°$ e $60°$.

Considerando o ângulo agudo de 30°, tem-se que o cateto adjacente mede $\frac{l.\sqrt{3}}{2}$, o cateto oposto mede $\frac{l}{2}$, e hipotenusa, l. De acordo com essas informações, têm-se os seguintes valores para as razões trigonométricas, em relação ao ângulo de 30°:

$$sen\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2}.\frac{1}{l} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$tg\ 30° = \frac{sen30°}{cos30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Seja o mesmo triângulo retângulo ADC formado pela altura do triângulo equilátero. Considerando, agora, o ângulo agudo de 60°, tem-se que o cateto adjacente mede $\frac{l}{2}$, o cateto oposto mede $\frac{l.\sqrt{3}}{2}$, e hipotenusa l. De acordo com essas informações, têm-se os seguintes valores para as razões trigonométricas, em relação ao ângulo de $60°$:

$$sen\ 60° = \frac{\frac{l.\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l.\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2}.\frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

e

$$tg\ 60° = \frac{sen\ 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Recolhendo todos os valores determinados, obtém-se o seguinte quadro das razões trigonométricas dos ângulos notáveis:

Tabela 1 - Razões trigonométricas dos ângulos notáveis

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{sen\alpha}$	$\boldsymbol{cos\alpha}$	$\boldsymbol{tg\alpha}$
$\mathbf{30°}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\mathbf{45°}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\mathbf{60°}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Fonte: A autora, 2018.

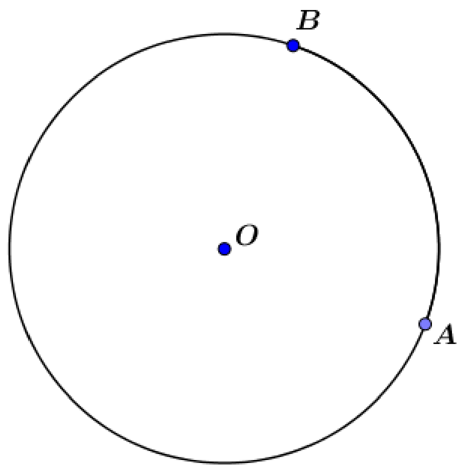
3.2 Ângulos e arcos de circunferência

É comum o uso do grau como unidade de medida de ângulo e de arco de circunferência no estudo da Geometria plana. Antes de tratarmos da circunferência trigonométrica, será introduzida outra unidade de medida de ângulo e de arco de circunferência: o radiano, cuja definição será dada a seguir.

3.2.1 Radiano

Dada uma circunferência de centro O e dois pontos pertencentes a ela, A e B, define-se como arco o pedaço da circunferência limitado por esses pontos.

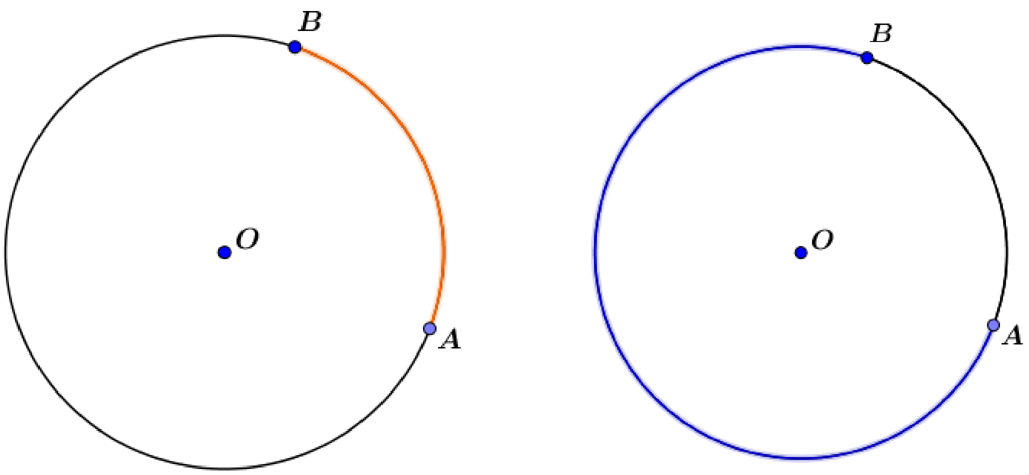
Figura 17 - Circunferência de centro O.



Fonte: A autora, 2018.

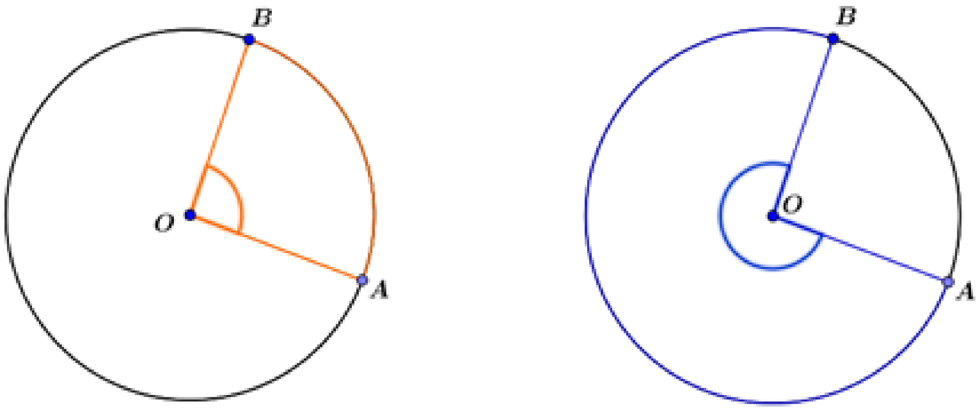
É importante observar que se consegue definir dois arcos diferentes com esses mesmos pontos. Toma-se como o percurso padrão o sentido anti-horário. Logo, têm-se os arcos $\widehat{AB}$, em laranja, e $\widehat{BA}$, em azul (Figura 18).

Figura 18 - Arco $\boldsymbol{\widehat{AB}}$, em laranja, e arco $\boldsymbol{\widehat{BA}}$, em azul, na circunferência de centro O.



Fonte: A autora, 2018.

Figura 19 - Ângulos centrais correspondentes aos seus respectivos arcos.

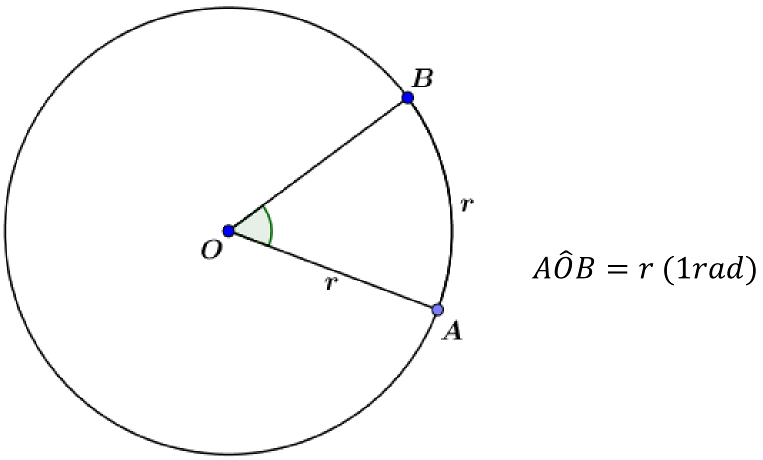


Fonte: A autora, 2018.

E ainda um arco definido na circunferência corresponde a um ângulo central, sendo suas medidas são equivalentes. A circunferência é dividida em 360 partes iguais, e cada parte é definida como um arco de 1°.

Agora será definida outra unidade de medida para o ângulo: o radiano (*rad*). O arco de um radiano é aquele cujo comprimento tem a mesma medida que o raio da circunferência que o contém.

Figura 20 - Circunferência de centro O, com arco $\boldsymbol{\widehat{AB}}$ de medida **1** *rad.*



Fonte: A autora, 2018.

Tomando uma circunferência qualquer, de raio r, seu comprimento será igual a $2\pi r$. Dividindo esse comprimento pelo seu raio, tem-se:

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Logo, a circunferência completa tem um ângulo total de $2\pi\, rad$, e o ângulo de meia-volta terá medida de $\pi\, rad$. Dessa forma, pode-se converter qualquer ângulo medido em grau para radiano, usando uma regra de três simples:

$$\hat{A}ngulo\ em\ grau\ \ |\ \ \hat{A}ngulo\ em\ radiano$$
$$180° \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \pi rad$$
$$\alpha \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \beta$$

Para medir o comprimento do arco de um ângulo $\alpha\, rad$, basta utilizar, novamente, um regra de três simples:

$$Comprimento\ do\ arco\ (u.c.)\ |\ Medida\ do\ arco\ (rad)$$
$$2\pi R \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2\pi$$
$$l \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \beta$$

Logo, $l = \beta . R.$ (14)

Assim, por exemplo, dada uma circunferência de raio $10m$ e arco de $\frac{\pi}{2}\, rad$, o comprimento do arco será:

$$l = \beta . R$$

$$l = \frac{\pi}{2} . 10$$

e, portanto,

$$l = 5 . \pi .$$

Considerando $\pi \cong 3{,}14$, obtém-se:

$$l \cong 15{,}7m.$$

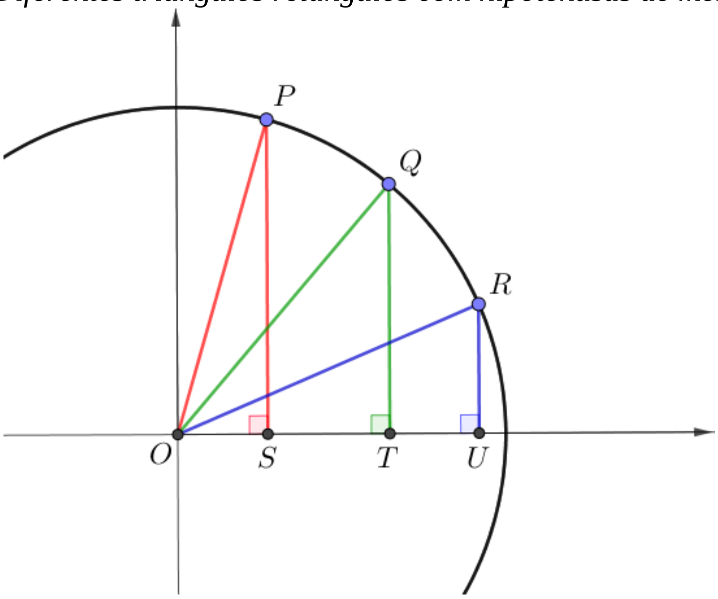
3.3 Circunferência trigonométrica

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo dependem da medida do ângulo e não do tamanho do triângulo. Devido a isso, para calcular essas razões para vários ângulos, podem-se considerar triângulos retângulos que tenham hipotenusas de mesma medida e variar a medida do ângulo agudo.

Observe na Figura 21 a seguir que os vértices P, Q e R, respectivamente, pertencentes aos triângulos retângulos OPS, OQT e ORU, são pontos da mesma circunferência. As hipotenusas OP, OQ e OR têm medidas iguais ao raio da circunferência. Considerando-se a medida da hipotenusa igual a 1 unidade de comprimento, as razões seno e cosseno serão os valores das medidas do cateto oposto e do cateto adjacente, respectivamente.

De fato, na Figura 21, observe o triângulo ORU. Os catetos são representados pelos segmentos $\overline{RU}$ e $\overline{UO}$, e hipotenusa representada pelo segmento $\overline{RO}$.

Figura 21 - Diferentes triângulos retângulos com hipotenusas de mesma medida.



Fonte: Figura adaptada, PAIVA, 2015.

Calculando o seno e cosseno do ângulo $\alpha = R\hat{O}U$ nesse triângulo, tem-se:

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{\overline{RU}}}{\overline{RO}} = \frac{\overline{RU}}{1} = \overline{RU}$$

e

$$\cos\alpha = \frac{\overline{\overline{UO}}}{\overline{RO}} = \frac{\overline{UO}}{1} = \overline{UO}.$$

Consequentemente, essas ideias levaram a definir as razões trigonométricas na circunferência trigonométrica, estendendo assim os conceitos de seno, cosseno e tangente de ângulos não agudos (PAIVA, 2015).

A **Circunferência trigonométrica** é a circunferência orientada de raio uma unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.

À circunferência trigonométrica de centro O será associado um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY, cujo centro coincide com a origem desse sistema, fixando o ponto $A(1,0)$ como a origem dos arcos a serem medidos na circunferência.

Se um arco for medido no sentido anti-horário, então ao valor absoluto dessa medida será atribuído o sinal positivo $(+)$.

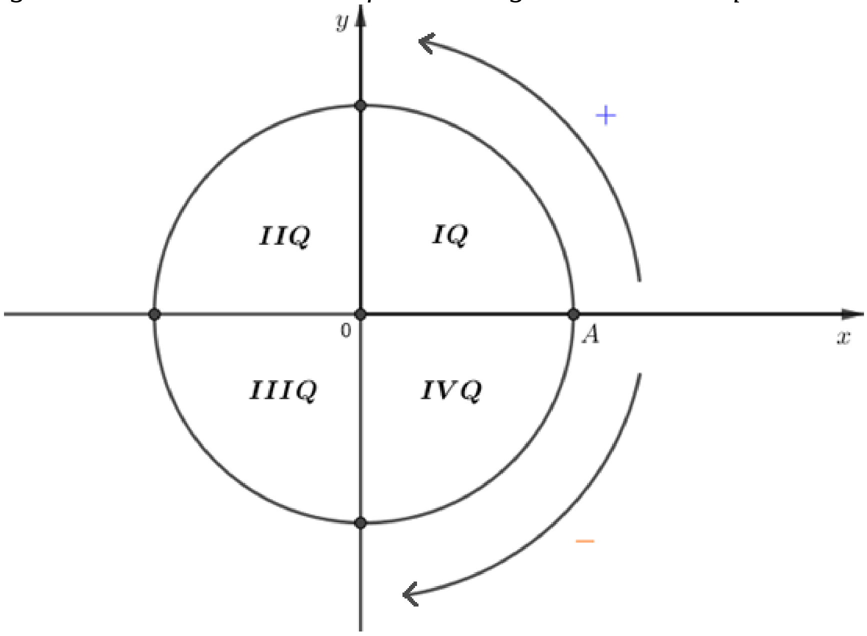
Caso este arco for medido no sentido horário, então ao valor absoluto dessa medida será atribuído o sinal negativo $(-)$.

Os eixos coordenados OX e OY dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes congruentes, chamadas de quadrantes. Esses quadrantes são numerados no sentido anti-horário, a partir do ponto A, como mostra a Figura 22.

Considere o ponto de origem dos arcos sendo A, e um ponto qualquer B, diferente de A. Associa-se uma medida em grau, ou radiano, ao ponto B, que indica o arco definido por $\widehat{AB}$.

Tome, por exemplo, um giro de $20°$, no sentido anti-horário, a partir do ponto A na circunferência trigonométrica, definindo o arco $\widehat{AB}$. Então, $20°$ é a medida associada ao ponto B.

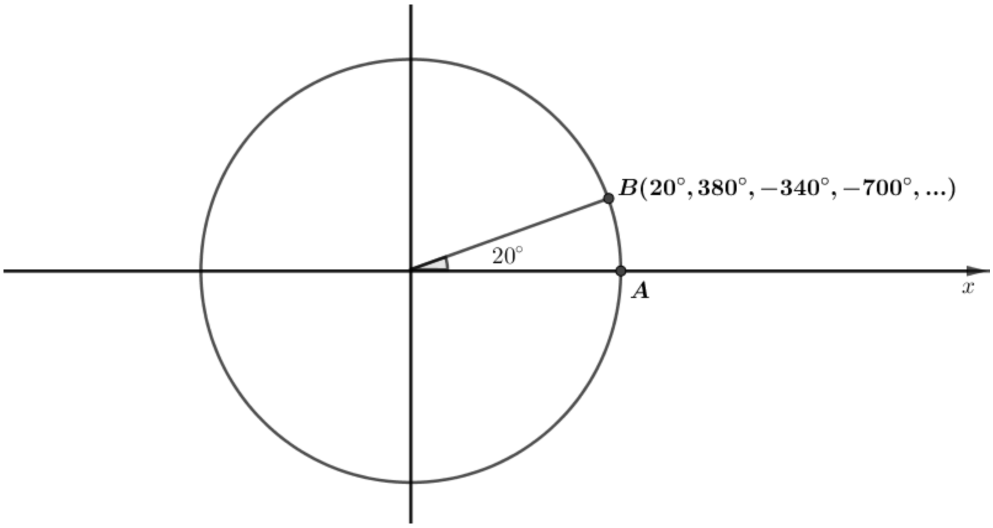
Figura 22 - Divisão da circunferência trigonométrica em quadrantes.



Fonte: A autora, 2018.

Porém, é possível associar outras medidas para esse mesmo ponto B, dependendo do sentido tomado para o arco.

Figura 23 - Alguns arcos côngruos em relação ao arco de 20°.



Fonte: A autora, 2018.

Tomando o sentido anti-horário (positivo), se girar uma volta completa a partir do ponto B, definido como $20°$, parará no mesmo ponto B, ou seja, $20° + 360° = 380°$ também é uma medida associada ao ponto B.

Se for tomado o sentido horário (negativo), o ponto B é associado à medida de $-340°$, como na Figura 23.

Dessa forma, definem-se como ***arcos côngruos*** os arcos trigonométricos que possuem a mesma extremidade.

Se α e β são medidas de arcos côngruos, indica-se $\alpha \equiv \beta$ (lê-se: "α é côngruo a β").

No exemplo anterior temos que $20° \equiv 380° \equiv -340°$.

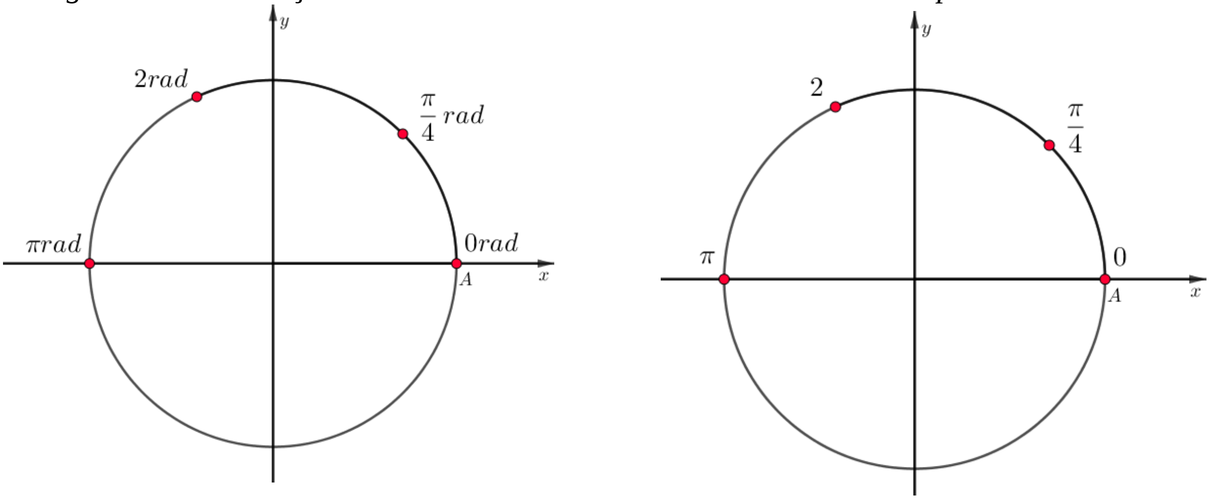
De modo geral, podem-se definir as medidas dos arcos côngruos sempre como a medida associada ao ponto adicionado de $360°$, caso o sentido seja positivo. Voltando ao exemplo acima, podem-se associar a B os valores de seus arcos côngruos usando a expressão $20° + 360°.k$ (15), onde k representa a quantidade de voltas completas dadas. Tomando os arcos com sentido negativo, tem-se que B é associado à expressão $-340° - 360°.k$. Porém, as duas expressões anteriores podem ser resumidas em uma só. Assim, todos os arcos côngruos do arco de 20º são representados pela expressão: $20° + 360°.k$ com $k \in Z$.

Agora considere a correspondência que associa cada medida em radiano ao número real que a representa. Por exemplo, associa-se à medida:

- $0\ rad$ é associado ao número real 0;
- $\frac{\pi}{4} rad$ é associado ao número real $\frac{\pi}{4}$;
- $2\ rad$ é associado ao número real 2;
- πrad é associado ao número real π .

Assim, associa-se a cada número real um ponto da circunferência trigonométrica. Esse ponto desempenhará o papel de medida do ângulo. Observe a Figura 24.

Figura 24 - Associação de medidas de arcos de medidas em radianos para números reais



Fonte: A autora, 2018.

Observe que, a cada ponto da circunferência estão associados infinitos números reais. Considere, por exemplo, as infinitas voltas que podem ser dadas nos sentidos horário e anti-horário. O ponto associado à medida $\frac{\pi}{2}\ rad$ da circunferência trigonométrica é a extremidade dos arcos de medidas:

$$\cdots, -\frac{13\pi}{2}\ rad, -\frac{9\pi}{2}\ rad, -\frac{5\pi}{2}\ rad, \frac{\pi}{2}\ rad, \frac{5\pi}{2}\ rad, \frac{9\pi}{2}\ rad, \frac{13\pi}{2}\pi\ rad, \cdots.$$

Assim, estão associados, ao ponto A, todos os infinitos números reais:

$$\cdots, -\frac{13\pi}{2}, -\frac{9\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\pi, \cdots.$$

Todos estes números reais podem ser representados por:

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in Z. \quad (16)$$

De modo geral, dado um arco de medida α, podemos representar todos os números reais associados a esse arco como:

$$x = \alpha + k \cdot 2\pi, k \in Z.$$

3.3.1 Simetrias

Mais adiante, para calcular o seno, o cosseno e a tangente de arcos trigonométricos será necessário relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano. Tal relação será feita através de simetrias.

Considere a circunferência trigonométrica e seja B, o ponto associado à medida de $20°$, conforme a Figura 25.

O primeiro tipo de simetria usada é em relação aos eixos coordenados, onde se deve traçar um segmento perpendicular aos eixos e determinar o ponto equidistante do ponto inicial (segmentos $\overline{CB}$ e $\overline{BE}$). Considerando uma circunferência com centro na origem, o ponto obtido, chamado de simétrico, será pertencente a ela, pois é possível construir dois triângulos retângulos congruentes.

O segundo tipo de simetria usada é em relação à origem do sistema cartesiano, onde se deve traçar um segmento que passa pelo ponto inicial e pela origem (segmento $\overline{BD}$). Considerando uma circunferência centrada na origem, o ponto simétrico obtido será pertencente a ela, pois a distância da origem ao ponto é o raio da própria circunferência.

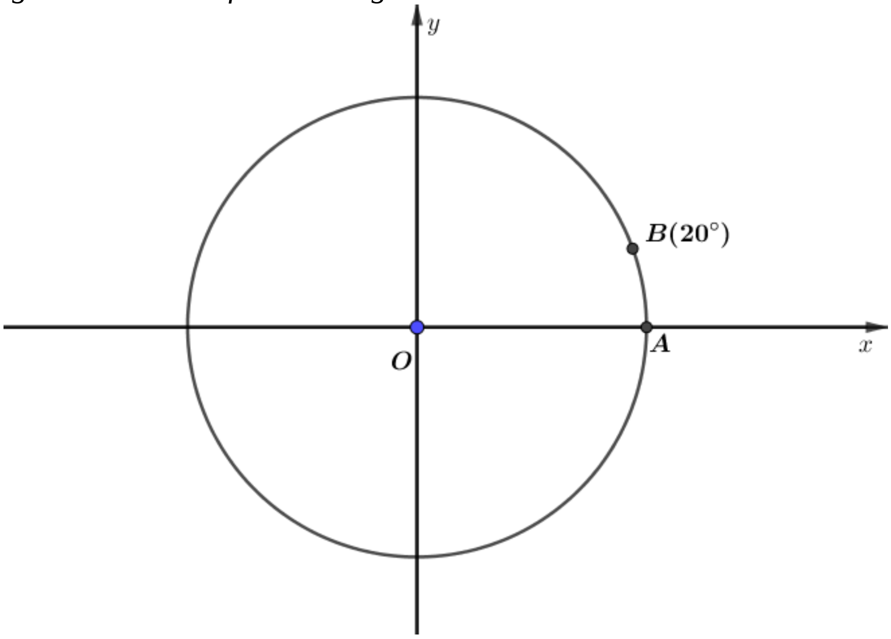
Procedendo assim, obtemos os pontos simétricos C, D, e E correspondentes, do ponto B (Figura 26).

Para associar as medidas referentes a esses pontos basta analisar que:

- Os ângulos $B\hat{O}H$ e $C\hat{O}J$ tem mesma medida, pois os triângulos BOH e COJ são congruentes. Logo, a medida associada ao ponto C é $180° - 20° = 160°$.
- Os ângulos $B\hat{O}H$ e $D\hat{O}J$ tem mesma medida, pois são opostos pelos vértices.
- Logo, a medida associada ao ponto D é $180° + 20° = 200°$.

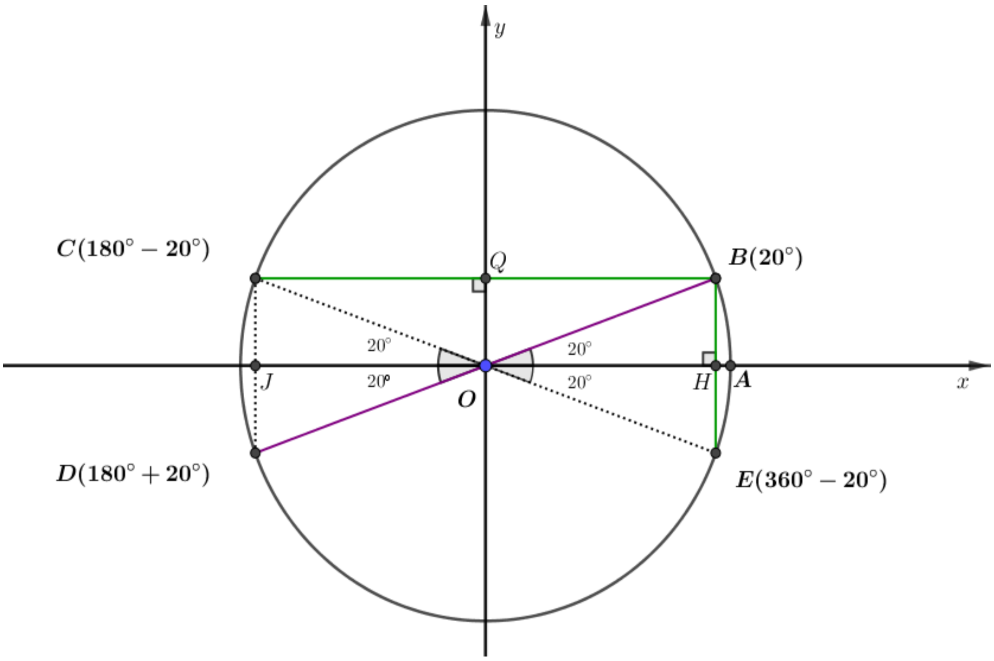
- Os ângulos $B\hat{O}H$ e $E\hat{O}H$ tem mesma medida, pois os triângulos BOH e EOH são congruentes. Logo, a medida associada ao ponto E é $360° - 20° = 340°$.

Figura 25 - Circunferência trigonométrica com arco de extremidade B.



Fonte: A autora, 2018.

Figura 26 - Pontos simétricos em relação ao arco de extremidade B.



Fonte: A autora, 2018.

De modo geral, dado um ponto B de medida α no primeiro quadrante, pode-se calcular a medida dos pontos simétricos nos demais quadrantes da seguinte forma:

$$C = 180° - \alpha \quad (17),$$

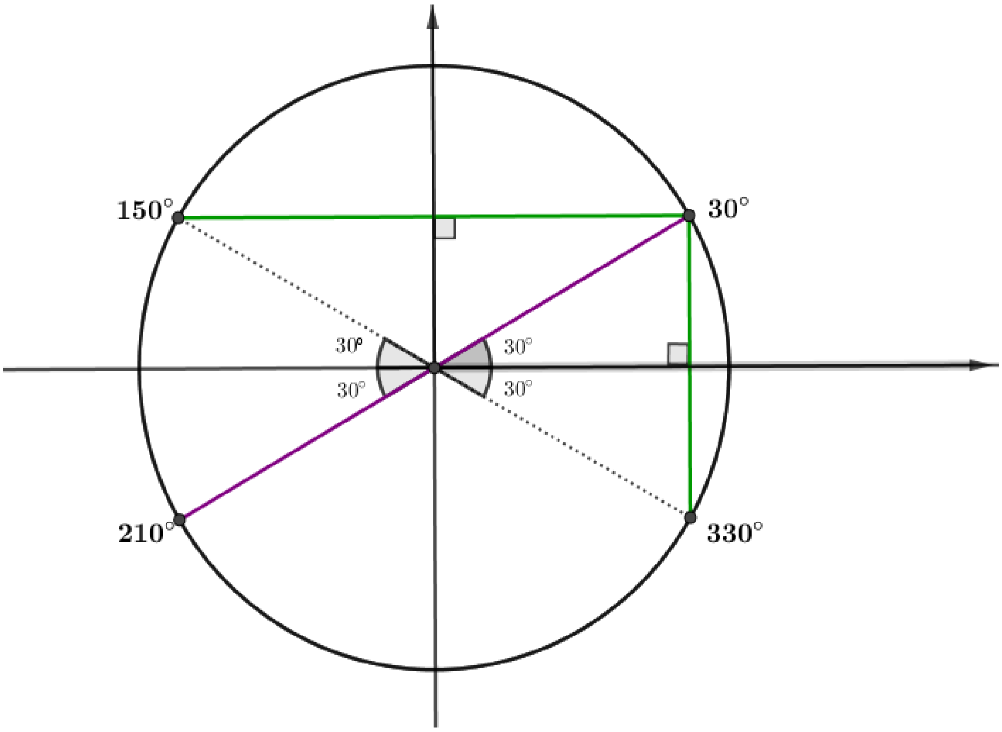
$$D = 180° + \alpha \quad (18)$$

e

$$E = 360° - \alpha\,. \quad (19)$$

A seguir, determinar-se-ão os pontos simétricos dos arcos notáveis de $30°$, $45°$ e $60°$ nos $2^{\underline{o}}$, $3^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes.

Figura 27 - Pontos simétricos em relação ao ponto de medida de 30°.



Fonte: A autora, 2018.

Considere a medida de $30°$ relacionada ao ponto B. Para determinar os pontos simétricos a B nos demais quadrantes, basta usar as expressões (17), (18) e (19), substituindo $\alpha = 30°$ (Figura 27). Dessa forma, os pontos simétricos são:

$$C = 180° - 30° = 150°,$$

$$D = 180° + 30° = 210°$$

$$E = 360° - 30° = 330°.$$

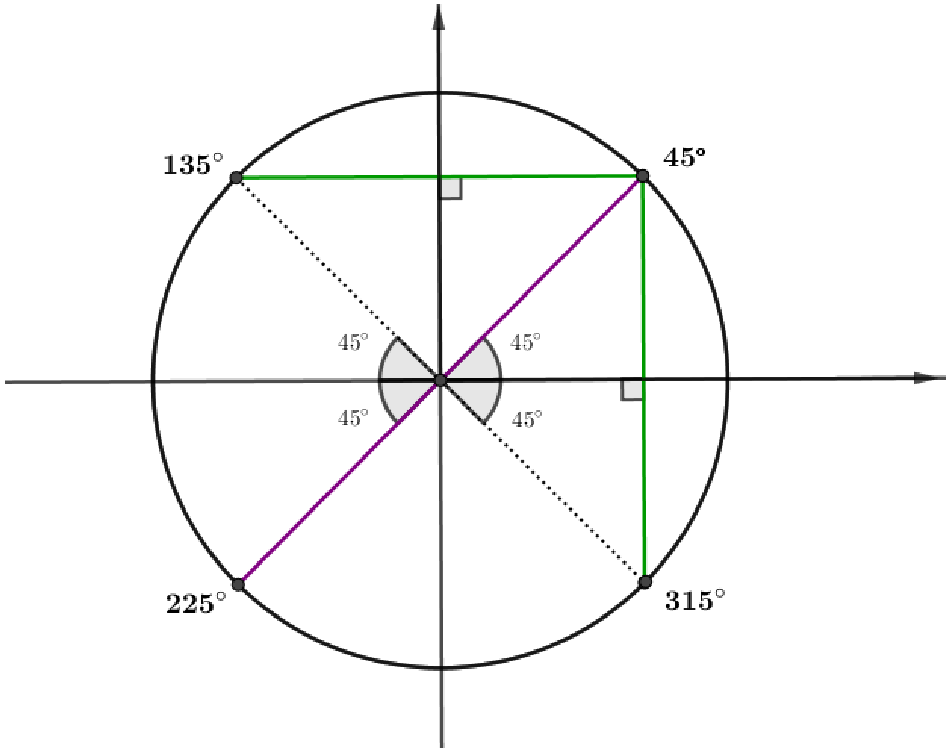
Agora, associando ao ponto F a medida de $45°$, para determinar os pontos simétricos de F nos demais quadrantes, basta usar as expressões (número das expressões), substituindo $\alpha = 45°$ (Figura 28). Dessa forma, os pontos simétricos são:

$$G = 180° - 45° = 135°,$$

$$H = 180° + 45° = 225°$$

$$I = 360° - 45° = 315°.$$

Figura 28 - Pontos simétricos em relação ao ponto de medida de 45°.



Fonte: A autora, 2018.

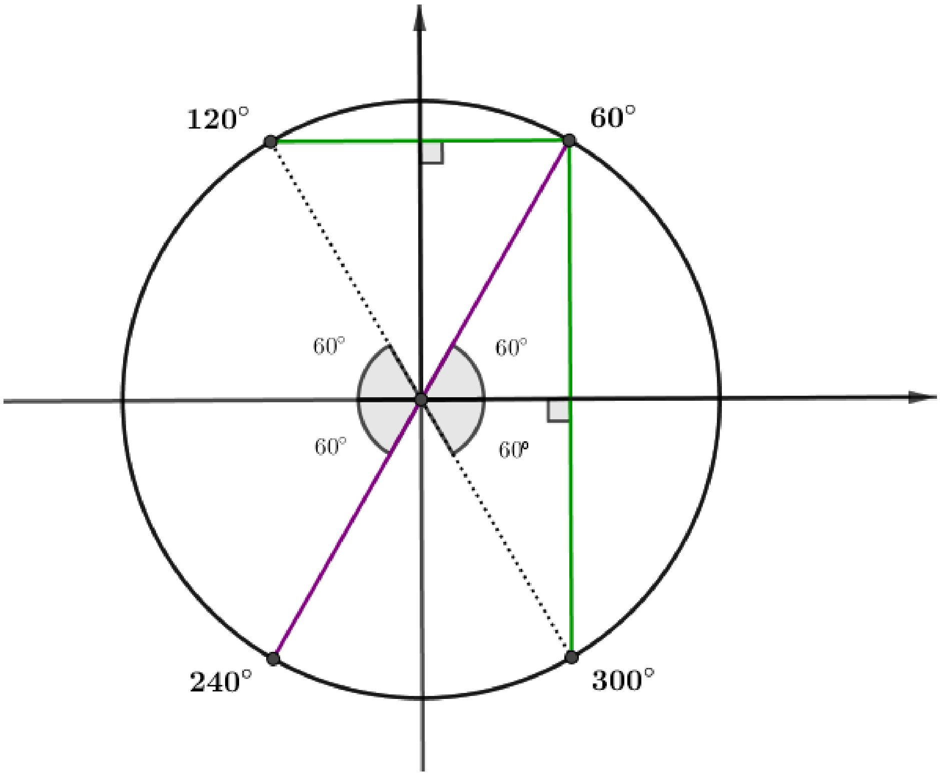
Considerando, por último, a medida de $60º$ relacionada ao ponto J, para obter os pontos simétricos a J nos demais quadrantes, basta usar as Equações (17), (18) e (19), fazendo $\alpha = 60°$ (Figura 29). Dessa forma, os pontos simétricos são:

$$K = 180° - 60° = 120°,$$

$$L = 180° + 60° = 240°$$

$$M = 360° - 60° = 300°.$$

Figura 29 - Pontos simétricos em relação ao ponto de medida de 60°.



Fonte: A autora, 2018.

3.3.2 Seno e cosseno na circunferência trigonométrica

Nesta seção, o conceito de seno e cosseno será estendido para um arco trigonométrico, partindo dos conceitos de seno e cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

Tome um arco trigonométrico $\widehat{AR}$ de medida α, sendo $0° < \alpha < 90°$, na circunferência trigonométrica (Figura 30).

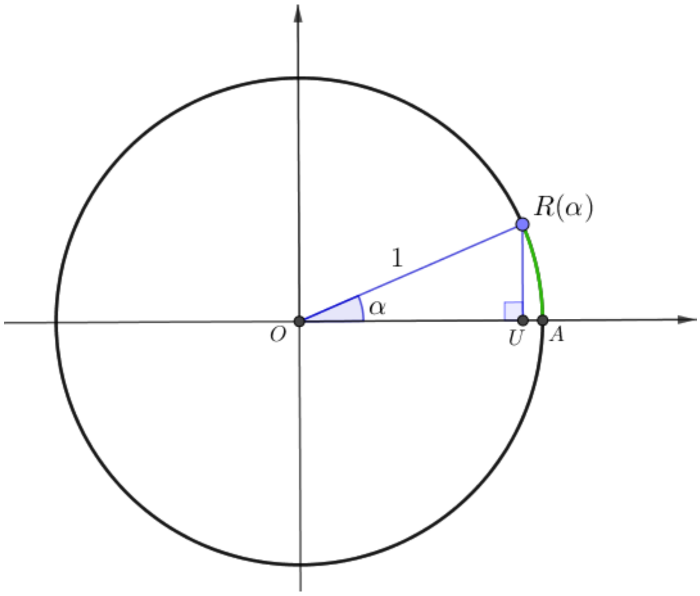
Sendo o raio da circunferência trigonométrica de medida 1 e o ângulo central $R\hat{O}A$ possui mesma medida do arco $\widehat{AR}$, em grau, segue que no triângulo retângulo ORU:

$$cos\alpha = \frac{\overline{OU}}{1} = \overline{OU}$$

e

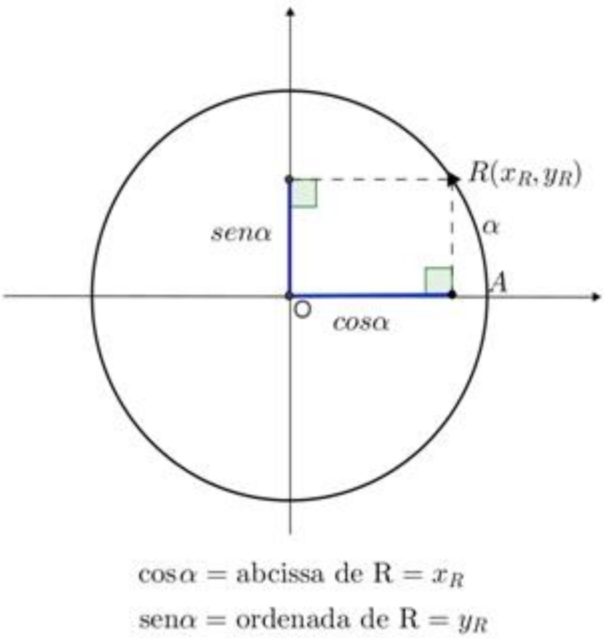
$$sen\alpha = \frac{\overline{UR}}{1} = \overline{UR}.$$

Figura 30 - Triângulo ORU inscrito no IQ da circunferência trigonométrica.



Fonte: A autora, 2018.

Figura 31 - Seno e cosseno de um arco trigonométrico



Fonte: A autora, 2018.

Assim, os valores de $sen\alpha$ e $cos\alpha$ são, respectivamente, as medidas das projeções nos eixos das abscissas e das ordenadas do ponto R. Este conceito é ampliado para qualquer arco trigonométrico.

Portanto, temos a seguinte definição:

Dado um arco trigonométrico $\widehat{AR}$ de medida α, chamam-se seno e cosseno de α a abscissa e a ordenada do ponto R, respectivamente.

Dessa forma, é comum se referir ao eixo das abscissas como o eixo dos cossenos e ao eixo das ordenadas como o eixo dos senos, quando se trata da circunferência trigonométrica.

Por essa conclusão, é possível calcular os valores do seno e cosseno dos arcos onde seu extremo coincide com os eixos coordenados. Tais arcos seriam os de $0°, 90°, 180°, 270°$ e $360°$. Para os arcos côngruos a esses, os resultados são análogos.

Sendo a circunferência trigonométrica de raio unitário, teremos os seguintes valores do seno e cosseno dos arcos citados:

Tabela 2 - Seno e cosseno dos arcos coincidentes com os eixos coordenados

α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$sen\alpha$	0	1	0	-1	0
$cos\alpha$	1	0	-1	0	1

Fonte: A autora, 2018.

Variação do sinal do seno e cosseno

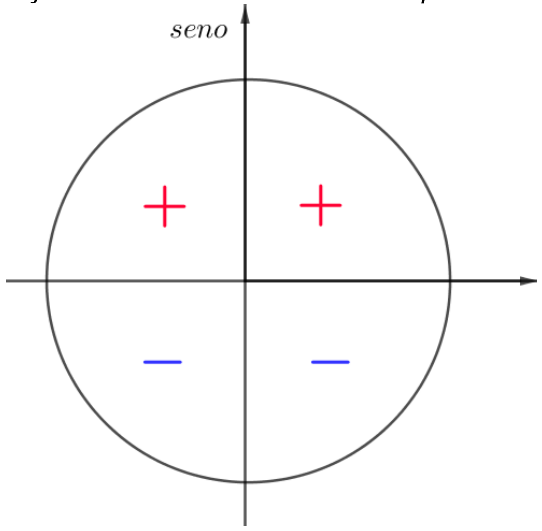
Tendo em vista que o seno de um arco trigonométrico é a ordenada do extremo desse arco e considerando os eixos ordenados do plano cartesiano, temos, a seguir, a variação do sinal dos valores para o seno (Figura 32).

Tomando, por exemplo, os arcos de extremidades *C*, *D*, *E* e *F*, conforme mostra a Figura 33, é possível observar que:

- *C* e *D* são pontos do primeiro e segundo quadrante, respectivamente, onde o valor da ordenada é positivo. Logo, os valores do seno para esses pontos são positivos.

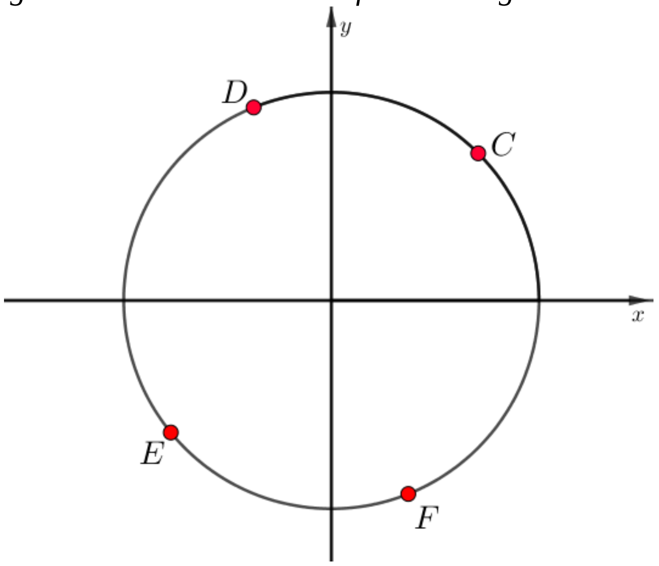
- E e F são pontos do terceiro e quarto quadrante, respectivamente, onde o valor da ordenada é negativo. Logo, os valores do seno para esses pontos são negativos.

Figura 32 - Variação do sinal do seno na circunferência trigonométrica.



Fonte: A autora, 2018.

Figura 33 - Pontos na circunferência trigonométrica.



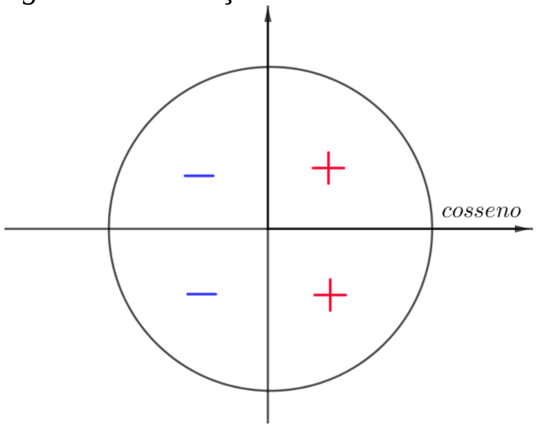
Fonte: A autora, 2018.

A mesma observação é válida para o cosseno de um arco trigonométrico, porém sendo a abscissa do extremo desse arco. Dessa forma, também há uma variação do sinal dos valores para o cosseno (Figura 34).

Tomando, por exemplo, os mesmos arcos de extremidades *C*, *D*, *E* e *F*, conforme mostra a Figura 32, é possível observar que:

- *C* e *F* são pontos do primeiro e quarto quadrante, respectivamente, onde o valor da abscissa é positivo. Logo, os valores do cosseno para esses pontos são positivos.
- *D* e *E* são pontos do segundo e terceiro quadrante, respectivamente, onde o valor da abscissa é negativo. Logo, os valores do cosseno para esses pontos são negativos.

Figura 34 - Variação de sinal do cosseno.



Fonte: A autora, 2018.

Redução ao primeiro quadrante

Na seção 3.1.2, deduziu-se, a partir do triângulo retângulo, a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis.

Tendo que a medida do arco e a do ângulo central que determina esse arco, na circunferência trigonométrica, são iguais e considerando os ângulos notáveis de $30°$, $45°$ e $60°$, como medidas dos arcos trigonométricos, os valores da tabela trigonométrica serão os mesmos.

A partir dos pontos simétricos calculados na seção 3.3.1.1, pode-se associá-los aos valores do seno e cosseno do primeiro quadrante, respeitando a variação de seus sinais.

Sendo o arco de medida 30° e seus arcos simétricos de $150°, 210°$ e $330°$ nos demais quadrantes, os valores do seno e cosseno dos arcos citados serão os mesmos, porém respeitando a variação de sinal dos eixos. Dessa forma, a tabela trigonométrica para o arco de $30°$ e seus simétricos, na circunferência trigonométrica, será:

Tabela 3 - Seno e cosseno dos arcos simétricos ao arco de 30º

α	$30°(IQ)$	$150°(IIQ)$	$210°(IIIQ)$	$330°(IVQ)$
$seno\ \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$cosseno\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Fonte: A autora, 2018.

O mesmo ocorrerá para os arcos de $45°$ e $60°$, e seus respectivos arcos simétricos.

Tabela 4 - Seno e cosseno dos arcos simétricos ao arco de 45º

α	$45°(IQ)$	$135°(IIQ)$	$225°(IIIQ)$	$315°(IVQ)$
$seno\ \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$cosseno\ \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Fonte: A autora, 2018.

Tabela 5 - Seno e cosseno dos arcos simétricos ao arco de 60º

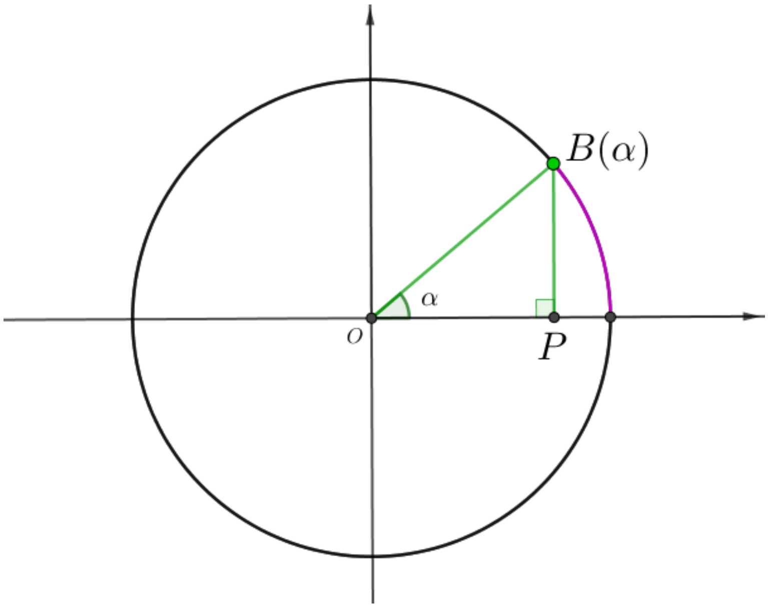
α	$60°(IQ)$	$120°(IIQ)$	$240°(IIIQ)$	$300°(IVQ)$
$seno\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cosseno\ \alpha$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: A autora, 2018.

Relação fundamental da Trigonometria

Seja α a medida de um arco trigonométrico com extremidade B, no primeiro quadrante.

Figura 35: Arco trigonométrico de medida $\boldsymbol{\alpha}$*.*



Fonte: A autora, 2018.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BOP, tem-se:

$$\overline{PB}^2 + \overline{PO}^2 = \overline{BO}^2. \quad (20)$$

Porém, já se sabe que:

$$\overline{PB} = sen\alpha, \ \overline{PO} = cos\alpha, \overline{BO} = 1(raio).$$

Logo, substituindo em (20), temos:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1. \quad (21)$$

Chamada de Relação fundamental da Trigonometria. É importante ressaltar que a relação fundamental é válida para qualquer valor de α.

Observe que, manipulando a Equação (21), obtém-se:

$$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha \quad (22)$$

e

$$cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha. \quad (23).$$

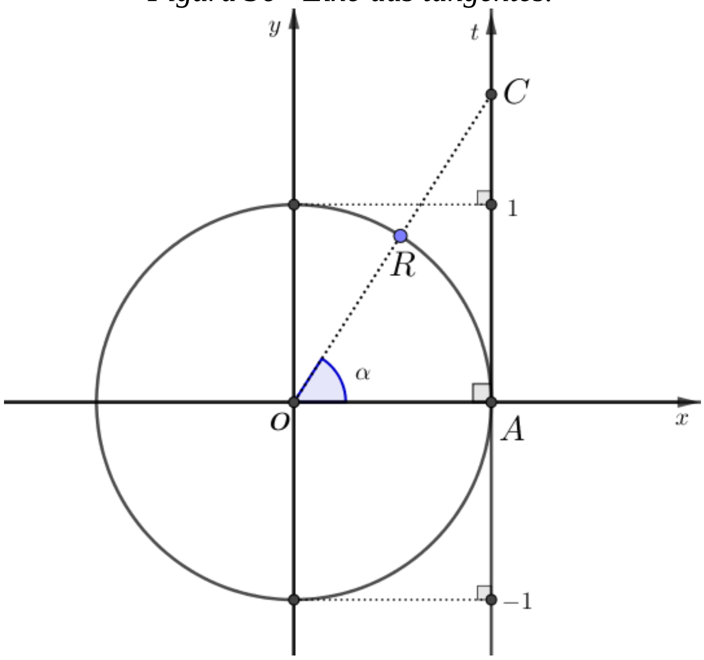
3.3.3 Tangente na circunferência trigonométrica

Para estender o conceito de tangente para um arco trigonométrico, partir-se-á do conceito de tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo.

Para compreender a extensão desse conceito, tome um arco trigonométrico $\widehat{AR}$ de medida α, sendo $0° < \alpha < 90°$, e o eixo t de origem A, com mesma direção e orientação que o eixo OY (Figura 36).

Para determinar a tangente do arco $\widehat{AR}$, traça-se a reta OR até sua intersecção C com o eixo t.

Figura 36 - Eixo das tangentes.



Fonte: A autora, 2018.

No triângulo retângulo AOC, tem-se:

$$tg\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{1} = AC.$$

Logo, a tangente de α é representada pelo segmento formado no eixo real t, chamado de eixo das tangentes.

De forma geral, dado um arco trigonométrico $\widehat{AR}$ de medida α, com R não pertencendo ao eixo das ordenadas, chama-se de tangente de α a ordenada do ponto C, sendo a intersecção da reta $\overline{OR}$ com o eixo das tangentes.

É importante ressaltar que o ponto R não pode coincidir com o eixo das ordenadas, pois o prolongamento do raio no próprio eixo não intercepta a reta t. Neste caso, diz-se que não existe tangente para os arcos de $90°$ e $270°$.

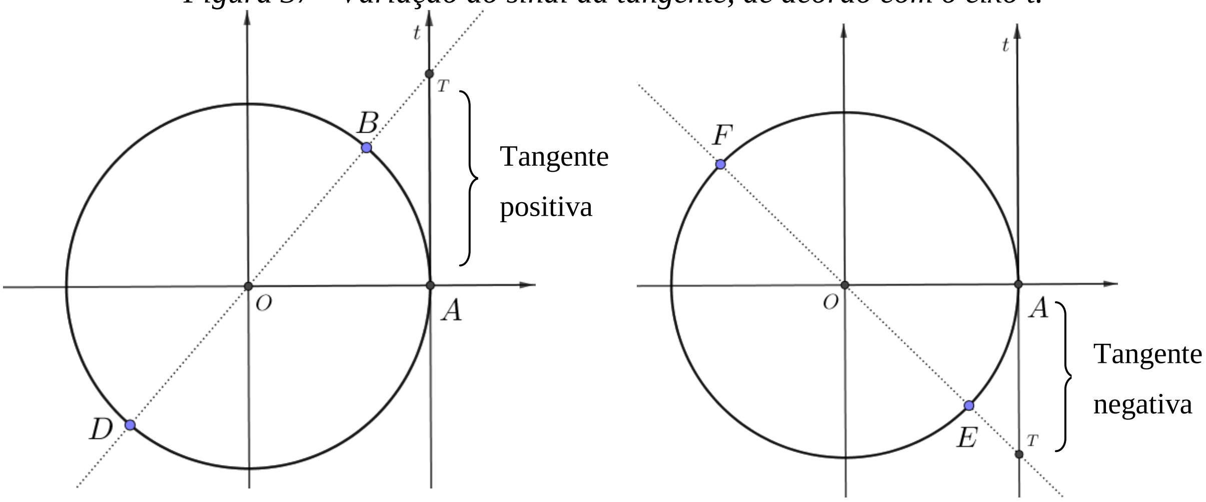
Nos casos para o ponto R coincidir com o eixo das abscissas, R deverá coincidir com o ponto A, origem do eixo das tangentes, logo os arcos de $0°$ e $180°$, e seus respectivos arcos côngruos, terão o valor da tangente nulo.

Variação do sinal da tangente

Caso o arco trigonométrico possua extremidade no primeiro ou terceiro quadrante, o prolongamento do raio que passa por essas extremidades intersectará o eixo das tangentes em um ponto de ordenada positiva.

Caso o arco trigonométrico possuía extremidade no segundo ou quarto quadrante, o prolongamento do raio que passa por essas extremidades intersectará o eixo das tangentes em um ponto de ordenada negativa.

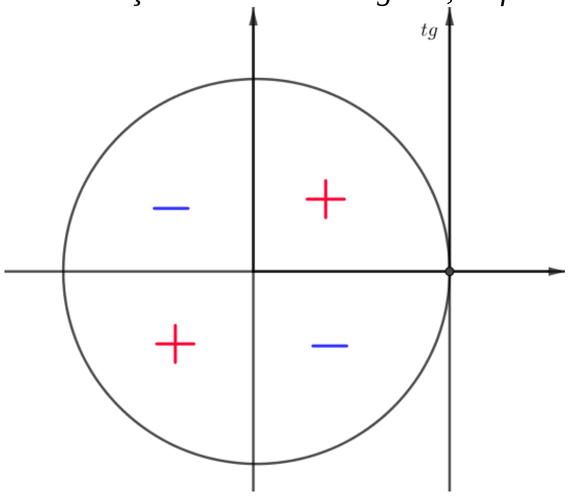
Figura 37 - Variação do sinal da tangente, de acordo com o eixo t.



Fonte: A autora, 2018.

Dessa forma, a variação de sinal da tangente é representada como mostra a Figura 38.

Figura 38 - Variação do sinal da tangente, de forma geral.



Fonte: A autora, 2018.

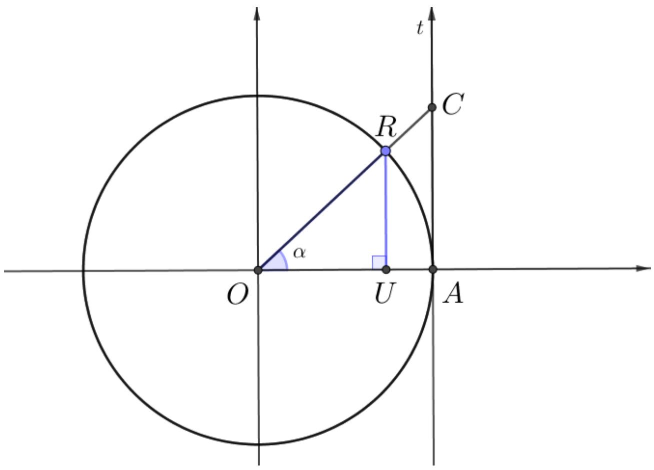
A tangente como razão do seno pelo cosseno

Prolongando o segmento $\overline{RO}$, de forma que intersecte a reta t, encontra-se o ponto C. Observe que na Figura 39, os triângulos OCA e ORU são semelhantes.

Sabendo que $cos\alpha = \overline{UO}$ e $sen\alpha = \overline{RU}$, e que $\overline{AO}$ é o raio da circunferência, observe:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{RU}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{UO}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CA}}{sen\ \alpha} = \frac{1}{cos\ \alpha} \Leftrightarrow \overline{CA} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \Leftrightarrow \overline{CA} = tg\ \alpha$$

Figura 39 - Representação da tangente na circunferência trigonométrica.



Fonte: A autora, 2018.

Redução ao primeiro quadrante

Como a medida de um arco trigonométrico é a mesma do ângulo central correspondente, temos que a tangente de um arco trigonométrico é a mesma que a tangente do ângulo central correspondente. Consequentemente, a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis também será válida para os valores da tangente.

Dessa forma, conhecido o valor da tangente de um arco trigonométrico no primeiro quadrante, pode-se calcular a tangente correspondente desse arco nos demais quadrantes, respeitando a variação de sinal, visto anteriormente.

A partir dos pontos simétricos calculados na seção 3.3.1.1, pode-se associá-los ao valor da tangente no primeiro quadrante, respeitando a variação de seus sinais.

Sendo o arco de medida $30°$ e seus arcos simétricos de $150°, 210°$ e $330°$ nos demais quadrantes, o valor da tangente dos arcos citados serão os mesmos, porém respeitando a variação de sinal dos eixos. Dessa forma, a tabela trigonométrica para o arco de $30°$ e seus simétricos, na circunferência trigonométrica, será:

Tabela 6 - Tangente do arco de 30º e seus simétricos

α	$30°(IQ)$	$150°(IIQ)$	$210°(IIIQ)$	$330°(IVQ)$
$tangente\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fonte: A autora, 2018.

Analogamente, o mesmo ocorrerá para os arcos de $45°$ e $60°$, e, respectivamente, para aqueles arcos cujas extremidades são pontos simétricos destes.

Tabela 7 - Tangente do arco de 45º e seus simétricos

α	$45°(IQ)$	$135°(IIQ)$	$225°(IIIQ)$	$315°(IVQ)$
$tangente\ \alpha$	1	-1	1	-1

Fonte: A autora, 2018.

Tabela 8 - Tangente do arco de 60º e seus simétricos

α	$60°(IQ)$	$120°(IIQ)$	$240°(IIIQ)$	$300°(IVQ)$
$tangente\ \alpha$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

Fonte: A autora, 2018.

4 A ATIVIDADE PROPOSTA

Este capítulo consiste em descrever uma atividade destinada aos alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

Os objetivos desta são introduzir o conceito da circunferência trigonométrica e estudar o seno, o cosseno e a tangente de arcos de até uma volta completa, a fim de facilitar os estudos futuros envolvendo a Trigonometria no Ensino Médio,

A atividade proposta teve o seu início aplicado em uma turma de alunos de uma escola pública, localizada no município do Rio de Janeiro. Ela será descrita por etapas, de forma a esclarecer melhor o processo realizado e qual habilidade o aluno deverá adquirir nela.

O restante da atividade está como uma proposta, pois, pelo fechamento do ano letivo, não houve tempo hábil para sua aplicação.

É importante ressaltar que, para a realização dessa atividade, os alunos já deverão ter o conhecimento da Trigonometria no triângulo retângulo, pois é a partir dele que os alunos deverão responder ao questionário.

4.1 Atividade realizada

A atividade a seguir tem como objetivo a construção da circunferência trigonométrica utilizando régua, compasso, transferidor e a aplicação dos conceitos de simetria em relação às extremidades finais dos arcos notáveis no primeiro quadrante.

As construções poderiam ser realizadas através de softwares de geometria dinâmica, porém dependeria da escola possuir um laboratório de informática disponível para o uso dos alunos. Além disso, a escolha do uso de instrumentos manuais foi devido ao envolvimento maior dos alunos com a atividade, onde ao final, eles pudessem ter suas próprias construções com suas próprias características e individualidades, diferentemente do uso de softwares, onde todos teriam a mesma imagem, obtidas através de comandos.

O objetivo é estudar as razões trigonométricas de ângulos de até uma volta completa.

Por fim, há um questionário que foi respondido, intuitivamente, pelos alunos, considerando todo conteúdo de Trigonometria no triângulo retângulo aprendido durante o ano.

Essa atividade, ao todo, foi realizada durante quatro tempos de aula, onde cada uma tem duração de 50 minutos.

A seguir, a descrição por etapas desta atividade, com seus devidos objetivos.

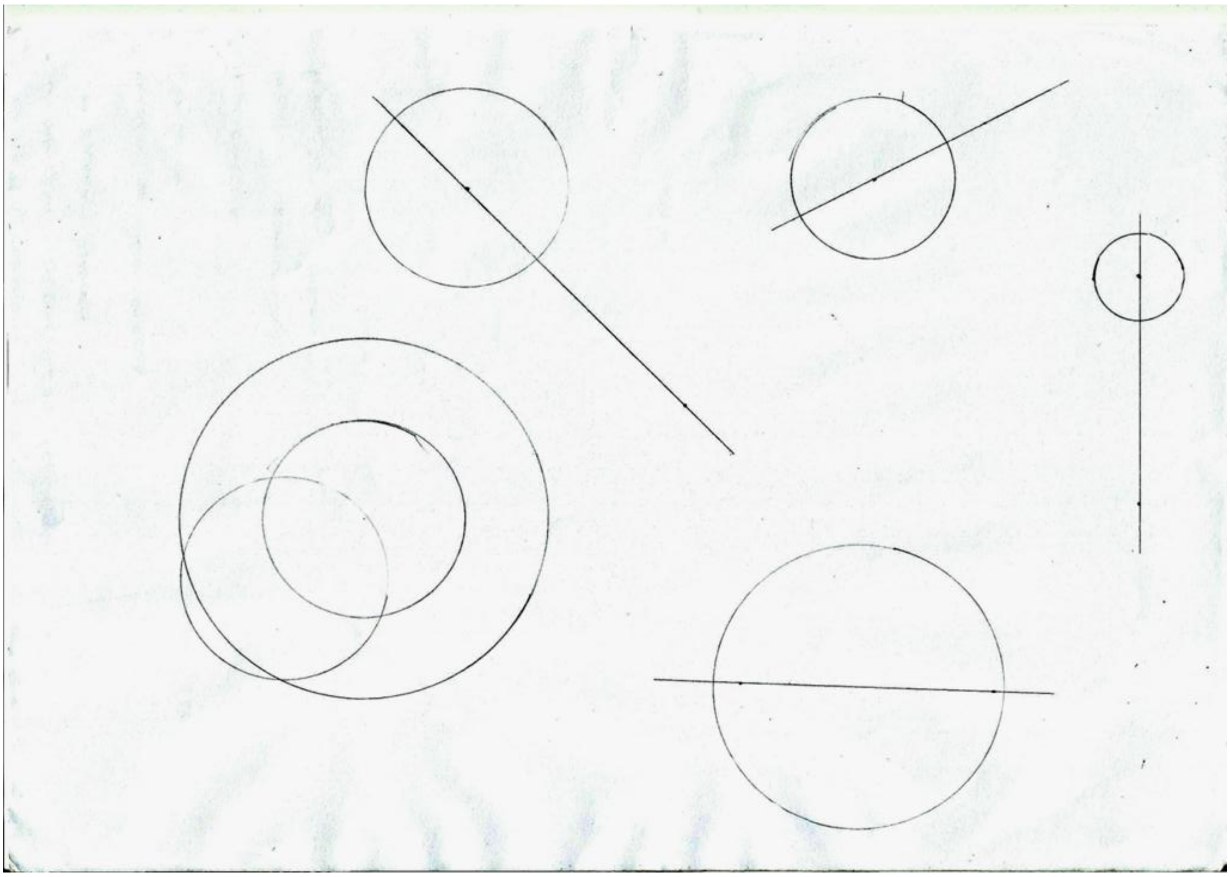
Etapa 1:

Ao apresentar a proposta da atividade ao grupo de alunos, notou-se a falta de experiência em manipular os instrumentos necessários para a realização da mesma. Então, para a primeira etapa, os alunos foram deixados à vontade para manipular de forma arbitrária os instrumentos, principalmente o compasso, o qual alguns nunca tinham manuseado.

Os alunos trabalharam as habilidades em construir retas a partir de dois pontos e circunferências de diversos raios a partir de um ponto central.

Caso os alunos já tenham a familiarização com esses instrumentos, pode-se passar para a etapa seguinte da atividade.

Figura 40: Construções geométricas livres.



Fonte: Elaborado pelos alunos do 9º ano, 2016.

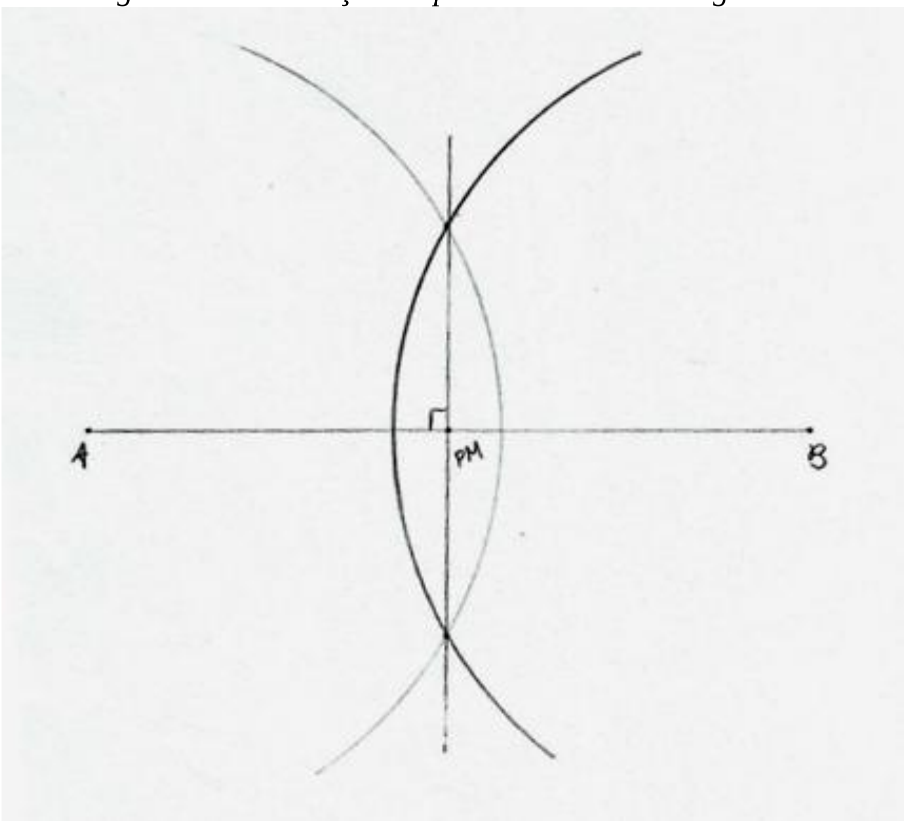
Objetivo: Fazer com que o aluno tenha habilidades suficientes para poder realizar as construções geométricas seguintes.

Etapa 2:

Depois de familiarizados com os instrumentos, mostrou-se aos alunos algumas construções que seriam necessárias para que pudessem realizar a atividade.

A primeira delas foi a construção do ponto médio, dado um segmento AB. Todos realizaram facilmente esta construção, tanto que a repetiram rapidamente (Figura 41).

Figura 41: Construção do ponto médio de um segmento.

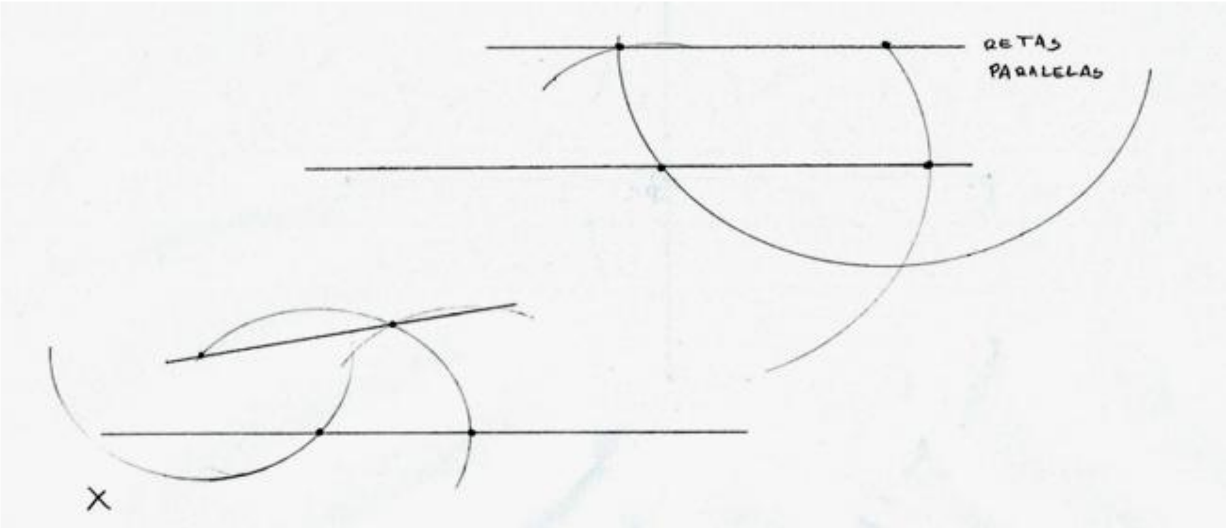


Fonte: Elaborado pelos alunos do 9º ano, 2016.

A segunda construção é de uma reta paralela à outra inicial, passando por um ponto dado. Os alunos apresentaram bastante dificuldade na realização desta, pois não conseguiam associar a transposição do raio da circunferência inicial para achar o outro ponto para construir a reta paralela. Foi necessário repetir três vezes a construção para que todos conseguissem realizá-la (Figura 42).

Por último, os alunos construíram uma reta perpendicular à outra inicial passando por um ponto dado. Essa construção também ocorreu de certa forma tranquila, pois em certo momento, associou-se a construção do ponto médio, o qual foi realizado facilmente (Figura 43).

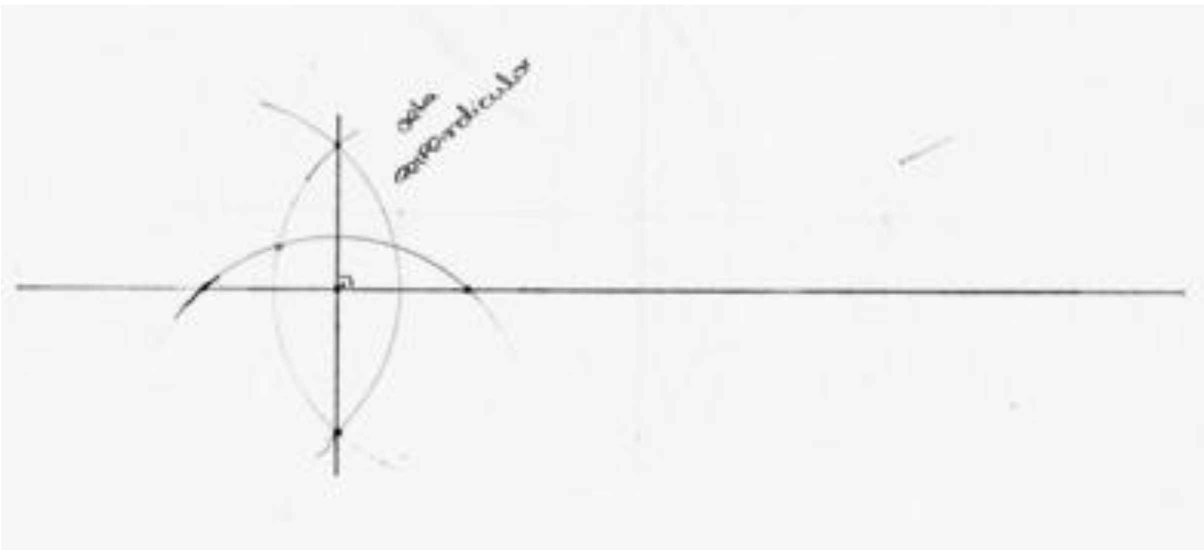
Figura 42 – Construção de uma reta paralela à outra, dado um ponto



Fonte: A autora, 2018.

Objetivo: Fazer com que os alunos saibam as construções básicas com régua e compasso a fim de construir a circunferência trigonométrica e de obter pontos simétricos à extremidade final de um arco trigonométrico dado em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano.

Figura 43: Construção de uma reta perpendicular a outra, dado um ponto.



Fonte: Elaborado pelos alunos do 9º ano, 2016.

Etapa 3:

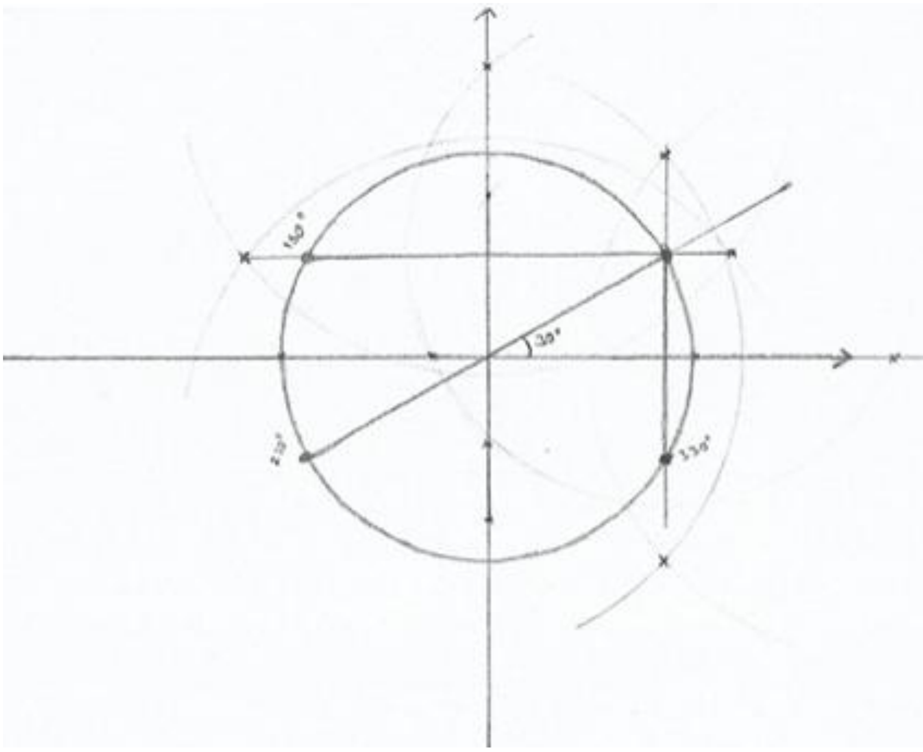
A terceira etapa baseia-se na construção da circunferência trigonométrica. Optou-se construir uma circunferência para cada arco notável, pois como os alunos ainda não estavam totalmente confiantes em relação às construções, os desenhos ficariam mais "limpos" para a etapa seguinte.

Inicialmente, os alunos deveriam construir o plano cartesiano. Uns optaram por usar a construção de ponto médio de um segmento e os outros usaram a construção de uma reta perpendicular à outra passando por um ponto dado.

A partir do plano cartesiano XOY construído, usando o compasso, os alunos esboçaram uma circunferência de raio unitário com centro na origem do plano.

Com a ajuda do transferidor, marcaram o arco de $30°$, em relação ao eixo $OX,$ no primeiro quadrante do plano.

Figura 44: Construção dos arcos simétricos ao arco de 30º, utilizando régua, compasso e transferidor.



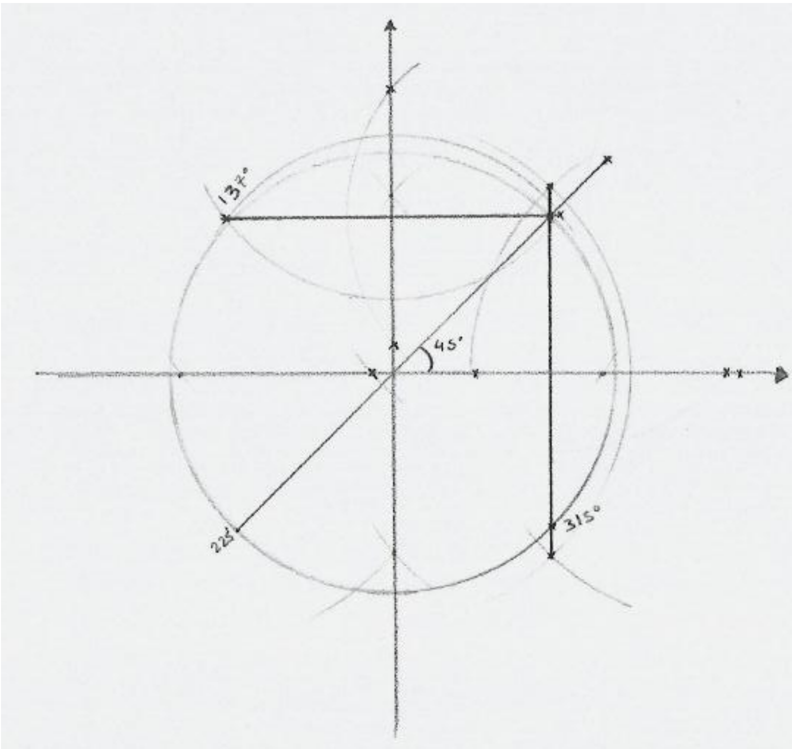
Fonte: Elaborado pelos alunos do 9º ano, 2016.

A partir do ponto inicial marcado na circunferência, indicando a extremidade final do arco de medida $30°$, os alunos deveriam obter os outros pontos na circunferência, e em cada quadrante, que fossem simétricos à extremidade final desse arco de medida $30°$ em relação aos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano.

Eles tinham duas opções para realizar a simetria em relação aos eixos: usar a construção de retas paralelas em relação aos eixos passando por um ponto dado, ou usar a construção de reta perpendicular aos eixos passando por um ponto.

Pela facilidade das construções iniciais, os alunos escolheram trabalhar com retas perpendiculares. Logo, para localizarem o ponto na circunferência, situado no segundo quadrante, construíram uma perpendicular ao eixo OY, passando pelo ponto referente à extremidade final do arco de medida $30°$, determinando sua interseção com a circunferência. E para localizarem o ponto situado no quarto quadrante, construíram a perpendicular ao eixo OX, que passa pelo primeiro ponto, determinando sua interseção com a circunferência trigonométrica.

Figura 45: Construção dos arcos simétricos ao arco de 45º, utilizando régua, compasso e transferidor.

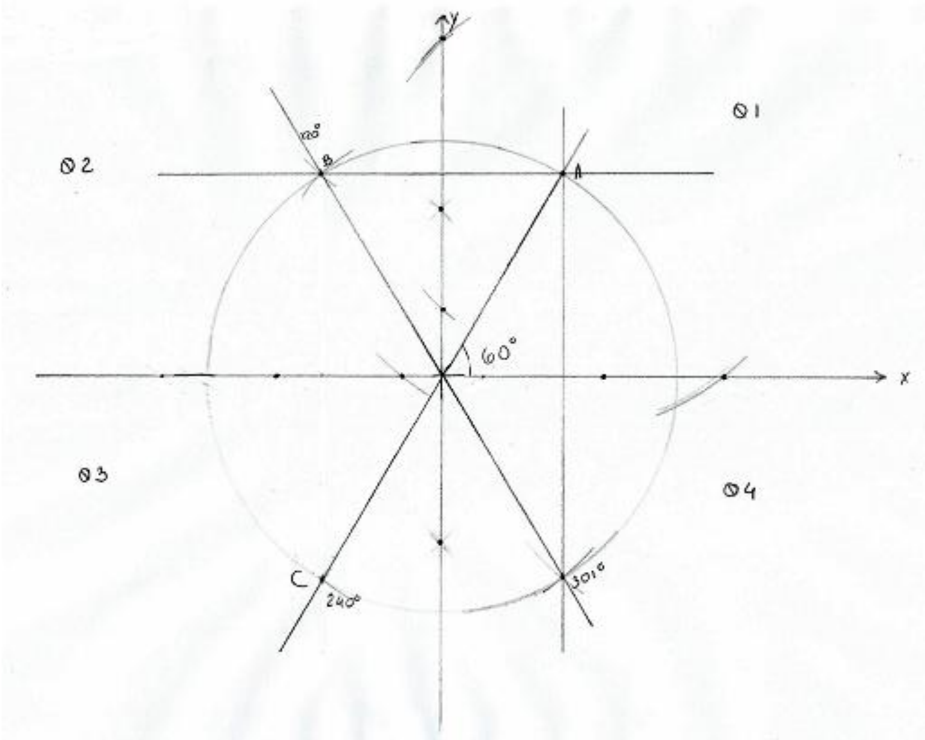


Fonte: Elaborado pelos alunos do 9º ano, 2016.

Para localizarem o ponto situado no terceiro quadrante, usaram a simetria em relação à origem. Como já haviam marcado a extremidade final do arco de $30°$, então construíram a reta que continha esse ponto e a origem, determinando a interseção da reta e da circunferência (Figura 44).

Esse mesmo processo se repetiu para os ângulos de 45° (Figura 45) e 60° (Figura 46).

Figura 46: Construção dos arcos simétricos ao arco de 60º, utilizando régua, compasso e transferidor.



Fonte: Elaborado pelos alunos do 9º ano, 2016.

Depois de todas as construções realizadas, pediu-se aos alunos que medissem todos os ângulos encontrados referentes aos pontos nos 2º, 3º e 4º quadrantes, tomando como 0° a intersecção da circunferência com o semieixo positivo OX e sentido anti-horário.

Objetivo: Fazer com que o aluno use as construções geométricas para construir a circunferência trigonométrica e aplicar as simetrias em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano. Essas construções serão importantes para a etapa seguinte, onde os alunos aplicarão os conceitos geométricos e o conhecimento trigonométrico para responder a um questionário.

Etapa 4:

A etapa seguinte da atividade foi composta por um questionário sobre as construções realizadas, de modo que fizesse os alunos refletirem para respondê-lo.

As respostas foram dadas a partir das construções realizadas na etapa anterior e do conhecimento que os alunos já tinham de Trigonometria no triângulo retângulo. Não houve intervenção ou manipulação na discussão entre os alunos. Apenas a conclusão final que foi dada de modo a organizar os pensamentos dos alunos.

A primeira questão era:

"1) Reflita e responda as questões abaixo, a partir da atividade realizada:

a) Quais as medidas dos arcos no $2^{\underline{o}}, 3^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes correspondentes ao arco de medida $30°$?

b) Quais as medidas dos arcos no $2^{\underline{o}}, 3^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes correspondentes ao arco de medida $45°$?

c) Quais as medidas dos arcos no $2^{\underline{o}}, 3^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes correspondentes ao arco de medida $60°$?"

Ao esboçar figuras, é comum aparecerem erros ocasionados por imprecisões no uso dos instrumentos empregados. Os alunos logo perceberam que as medidas obtidas dos arcos em cada item não eram exatamente as medidas esperadas. Porém concluíram – tomando como base a circunferência e os arcos correspondentes ao arco de medida $30°$– que as medidas dos arcos pretendidos nos outros quadrantes deveriam "se afastar" $30°$ em relação ao eixo OX, tanto "para cima quanto para baixo". Como, no eixo OX, encontram-se as extremidades finais dos arcos de medida $0°, 180°$ e $360°$, as medidas dos outros arcos seriam $150°, 210°$ e $330°$. O mesmo raciocínio foi usado para os itens (b) e (c), de modo a obterem as medidas de arcos $135°, 225°$ e $315°$ e as medidas de arcos $120°, 240°$ e $300°$, respectivamente.

Objetivo: Fazer com que o aluno compreenda que dois pontos P e P' distintos são simétricos em relação a um ponto Q significa que P e P' são extremidades de um segmento, sendo o ponto Q seu ponto médio. E também que, dois pontos P e P' distintos são simétricos em relação a uma reta r significa que estes pontos pertencem a uma mesma reta s, perpendicular a r, e que estão a uma mesma distância de r. Nesta atividade, as retas consideradas são os eixos OX e OY e o ponto é a origem do sistema cartesiano. Notar, também, que uma reta perpendicular a um eixo é sempre paralela à outra reta também perpendicular ao mesmo eixo, ou seja, que a reta esboçada perpendicularmente ao eixo OY é paralela ao eixo OX, e dessa forma todos os seus pontos são equidistantes. Logo, em uma circunferência, se um ponto pertencente à paralela que está situada a $30°$ do eixo OX, outro ponto da mesma reta também estará situado a $30°$ do eixo OX. O mesmo ocorre com a reta perpendicular ao eixo OX.

Segunda questão:

“2) Considerando a circunferência trigonométrica e os eixos coordenados OX e OY, responda:

a) A qual eixo podemos nos referir como o eixo dos cossenos?
b) A qual eixo podemos nos referir como o eixo dos senos?
c) Qual o sinal do seno e do cosseno de arcos trigonométricos que estão em cada um dos quatro quadrantes?”

Tomando como base o estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, a aluna V imaginou um triângulo retângulo dentro da circunferência unitária e associou os catetos oposto e adjacente aos eixos coordenados: “Como o ângulo tá encostado no X (se referindo ao eixo OX), então esse lado aqui é o adjacente (referindo-se ao sentido da abertura do ângulo e o triângulo retângulo formado) e o outro é oposto. Se o cosseno usa CA (referindo-se ao cateto adjacente) e no seno usa CO (referindo-se ao cateto oposto), então acho que o cosseno é o X e o seno é o Y”.

O aluno G ainda completou: “Se o raio é 1, então a hipotenusa desse triângulo vale 1 também. E dividir por 1 dá o número mesmo”. A aluna B questionou a operação, pois não entendeu de qual divisão o aluno B estava falando, e então ele respondeu: “Ué, o seno é CO sobre H e cosseno é CA sobre H. Se H é 1, aí vai ficar CO sobre 1 e CA sobre 1, que dá eles mesmos”.

Para o item c, a resposta foi imediata, pois o estudo do plano cartesiano vem sendo desde o 7º ano (mesmo que o aluno não tenha estudado nos anos anteriores, ele estudou no 9º ano ao construir gráficos de Função de 1º grau, estudado no 2º bimestre do ano letivo). Associando a resposta dada pelos alunos V e G para os itens (a) e (b), não havia dúvidas para a resposta deste item: “Se o cosseno é x e o seno é y, então a coordenada vai ser sempre o valor do cosseno primeiro e depois do seno, e no 1º quadrante fica (+,+), no 2º quadrante fica (-, +), no 3º fica (-,-) e no 4º, (+,-)”, disse a aluna E.

Objetivo: Fazer com que os alunos associem os pontos na circunferência trigonométrica com as respectivas coordenadas no plano cartesiano, sabendo distinguir que o cosseno e o seno de um arco trigonométrico de medida α são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto. Além disso, fazer com que o aluno perceba que o cosseno (ou o seno) de um arco de medida α do 2º, 3º ou 4º quadrantes tem o mesmo valor absoluto que o cosseno (ou o seno) de um arco correspondente no 1º quadrante e é atribuído a esse valor um sinal (+ ou −), de acordo com o quadrante em que está o arco de medida α.

A terceira e última questão, pedia para completarem três tabelas com os valores do seno e cosseno de cada arco determinado.

Relembrando as respostas dadas nas questões 1 e 2, a aluna B perguntou “Os ângulos que achamos na número 1 vão ter o mesmo valor do seno e cosseno do ângulo inicial?”. “Mais ou menos, né! Tem que ver os sinais!”, respondeu o aluno G.

Figura 47: Solução dada pelos alunos, referente ao exercício 3.

	Seno	Cosseno
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
150°	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
210°	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
330°	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$

	Seno	Cosseno
45°	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
195°	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
210°	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
290°	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$

	Seno	Cosseno
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
301°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

c) Q1 = (+, +)
Q2 = (−, +)
Q3 = (−, −)
Q4 = (+, −)

Fonte: Elaborado pelos alunos do 9º ano, 2016.

Dessa forma, os alunos completaram as tabelas do seno e cosseno dos arcos, baseando-se na tabela do seno e cosseno dos ângulos notáveis (estudada no $3^{\underline{o}}$ bimestre do ano letivo). De acordo com o arco dado inicialmente ($30°, 45°$ ou $60°$), ajustaram com valores das medidas de arcos obtidos na questão 1 e consideraram os sinais das coordenadas de cada quadrante, usando a questão 2.

Objetivo: Enfatizar que as definições de seno e cosseno de arcos trigonométricos são extensões das definições de seno e cosseno de um ângulo agudo no triângulo retângulo. Associar os valores absolutos do seno e cosseno dos arcos notáveis para os seus respectivos arcos correspondentes nos $2^{\underline{o}}, 3^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes , sabendo distinguir os sinais dos mesmos de acordo com o quadrante no qual o arco está localizado.

Segue, abaixo, uma proposta de continuação ao questionário feito com alunos. Infelizmente, não foi possível aplicar as próximas questões pelo fechamento do ano letivo e saída dos alunos para as férias escolares.

Em cada questão constará seu objetivo para ser realizada.

Questão 4:

Utilizando as simetrias adequadas, já vistas anteriormente na determinação dos pontos simétricos dos arcos notáveis, diga quais os pontos simétricos, nos 2º, 3º e 4º quadrantes, dos arcos associados às medidas dadas abaixo:

a) 15°
b) 50°
c) 75°

Objetivo: Aplicar as simetrias sem necessidade de esboçar a circunferência, associando a medida do arco inicial com os pontos simétricos a ele. Por exemplo, se o arco inicial mede $15°$, então seus pontos simétricos estarão deslocados $15°$ dos arcos de $180°$, em ambos os sentidos: anti-horário e horário, e $360°$ no sentido horário.

Questão 5:

Considere a circunferência trigonométrica e sendo os valores do seno e cosseno de um arco associados ao eixo das ordenadas e ao eixo das abscissas, respectivamente, que observações você consegue fazer em relação à variação dos valores do seno e cosseno?

Objetivo: Espera-se do aluno que ele consiga observar que quanto maior o valor de uma das razões trigonométricas, seno ou cosseno, menor será a outra, pois os valores são gerados de um triângulo retângulo de hipotenusa fixa igual a 1. A partir dessa observação, o aluno pode associar essa relação do seno (sendo o valor da ordenada y), cosseno (sendo o valor da abscissa x) e hipotenusa de valor 1, fixa, com o Teorema de Pitágoras de um triângulo retângulo qualquer. Dessa forma, o aluno pode pensar na equação $x^2 + y^2 = 1$, sendo o mesmo que $cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$, que nada mais é que a Relação Fundamental da Trigonometria.

Questão 6:

Dado um arco α na circunferência trigonométrica, onde $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Calcule o valor de $sen\,\alpha$.

Objetivo: Aplicação direta da Relação Fundamental da Trigonometria. Porém, como não é explicitado a qual quadrante pertence o arco, o aluno deverá estar atento que há duas opções de resposta.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar de demonstrarem algumas dificuldades durante as construções geométricas, os alunos mostraram uma reação positiva à atividade proposta, pois puderam construir, associar e concluir sobre o conhecimento a ser adquirido, a partir de conhecimentos prévios.

Mesmo apresentando pouca destreza com os instrumentos, os alunos se mostraram dispostos a realizar as tarefas, e a cada construção, ou erro cometido, eles se empenharam mais para chegarem ao objetivo final. O uso do compasso foi bastante elogiado, pois alguns declararam nunca terem usado em sua vida acadêmica até o momento, o que fez com que o trabalho ficasse mais atrativo.

Declararam, também, que ficou bem mais fácil compreender e responder os possíveis questionamentos sobre a matéria, pois não foi algo “jogado” no quadro branco. Como participaram da construção do conhecimento, disseram que “as coisas faziam sentido” e que os valores encontrados e relacionados não “apareceram do nada”.

De certo modo, mesmo não possuindo tempo hábil para aplicar toda a atividade (as três questões finais não foram respondidas pelos alunos), foi perceptível o envolvimento dos alunos na construção do conhecimento, principalmente daqueles que dizem não gostar de Matemática.

A participação deles, desde a construção geométrica, que foi a parte que mais prendeu a atenção de todos por ser algo novo, fez com que a atenção não fosse dispersa com o passar do tempo.

O questionário, apesar de ser bem teórico e dependesse bastante das aulas sobre Trigonometria e Plano Cartesiano, foi a etapa realizada com mais rapidez e a que houve mais troca de informações entre eles, o que para mim, foi o ápice da atividade, pois não interferi nos questionamentos e conclusões dos alunos, sendo a construção do conhecimento partindo dos alunos o maior objetivo da atividade proposta.

Apesar de que nem todos os alunos conseguiram acompanhar, principalmente por conta das construções, via-se a atenção deles diante das perguntas e das respostas dos colegas.

Considero, enfim, o experimento com resultado positivo, pois no ano seguinte, 2017, à aplicação da atividade, obtive retorno de alguns alunos que seguiram para o Ensino Médio, relatando que foi um conteúdo muito mais tranquilo de ser estudado naquele ano, enquanto muitos colegas de classe não conseguiam acompanhar, ou por não terem estudado o conteúdo básico de Trigonometria no 9º ano, ou pelas aulas serem muito corridas pela programação dada no Ensino Médio.

Embora este trabalho tenha sido aplicado a um pequeno grupo de alunos, espera-se que esta proposta possa ser incorporada de fato no nono ano do Ensino Fundamental tendo em vista os resultados positivos obtidos com esses alunos.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio (PCNEM)**. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/ SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 2 dez. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental**. Matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 2 dez. 2017.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria, Números Complexos**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** volume único. 3 ed. São Paulo: Atual, 2005.

KENNEDY, Edward. S. **História da Trigonometria**. 7 reimpressão. São Paulo: Atual, 1992.

LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio** – volume 1. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva:** volume 2. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2015.

RIO DE JANEIRO. Secretaria Municipal de Educação. **Descritores -** 3º bimestre. Rio de Janeiro, 2017.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 1995.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática** – volume 1. 4 ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.