COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ronald Simões de Mattos Pinto

NOTAS SOBRE IRRACIONALIDADE

Rio de Janeiro
2018

Ronald Simões de Mattos Pinto

NOTAS SOBRE IRRACIONALIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Liliana Manuela G. C. da Costa

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

P444 Mattos Pinto, Ronald Simões de

Notas sobre irracionalidade / Ronald Simões de Mattos Pinto. – Rio de Janeiro, 2018.

79 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Liliana Manuela G. C. da Costa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números irracionais. 3. Logarítmos. 4. Equações. I. Costa, Liliana Manuela G. C. da. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Andre Dantas – CRB7 5026

Ronald Simões de Mattos Pinto

NOTAS SOBRE IRRACIONALIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Profª. Dra. Liliana Manuela G. C. da Costa (Orientadora)
Colégio Pedro II

____
Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense

____
Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II

____
Profª. Dra. Patrícia Erthal de Morais
Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2018

Agradecimento

Agradeço à professora Liliana pelo entusiasmo e conselhos durante a orientação desta dissertação. Agradeço a equipe de professores do PROFMAT.

Agradeço, por fim, a minha esposa Daiane Siqueira por toda ajuda e compreensão ao longo de dois anos de mestrado, a quem dedico este trabalho.

Resumo

MATTOS PINTO, Ronald Simões de. Notas sobre irracionalidade. 2018. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

Neste trabalho exploramos três problemas independentes que tratam de números irracionais. O primeiro se refere à questão da irracionalidade de logaritmos de números reais de base inteira. No segundo problema, estuda-se a natureza (quanto a racionalidade) das raízes reais da equação $a^x = x^a$, com $a \geq 2$ inteiro não necessariamente primo e da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$, onde $a \geq 2$ é um inteiro e f é uma função polinomial com coeficientes inteiros. O terceiro problema examina a questão da comensurabilidade entre a medida do lado e a medida de uma diagonal de um polígono regular. Em última análise, tais problemas se reduzem a decidir pela racionalidade ou irracionalidade de um número real. Duas ferramentas foram essenciais para este fim: o Teorema Fundamental da Aritmética e o critério de pesquisa de raízes racionais de funções polinomiais com coeficientes inteiros. O texto apresenta várias provas de irracionalidade em que foram oportunamente evocados diversos tópicos da matemática. Por fim, é proposta uma de atividade para alunos do Ensino Médio que visa o entendimento de demonstrações geométricas de incomensurabilidade.

Palavras chaves: Números irracionais; logaritmos; equações; polígonos regulares; incomensurabilidade.

Abstract

MATTOS PINTO, Ronald Simões de. Notas sobre irracionalidade. 2018. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

In this work we study three independent problems that deal with irrational numbers. The first concerns the question of the irrationality of logarithms of real numbers of integer bases. The second one studies the real roots of the equation $a^x = x^a$, with $a \geq 2$ integer not necessarily prime and the equation $a^{f(x)} = (f(x))^a$, where $a \geq 2$ is an integer and f is a polynomial function with integer coefficients. The third problem analyzes the question of commensurability between the measure of the side and the measure of a diagonal of a regular polygon. In last case, such problems are reduced to deciding on the rationality or irrationality of a real number. Two tools were essential for this purpose: the Fundamental Theorem of Arithmetic and the criterion for the search of rational roots of polynomial functions with integer coefficients. The text presents several proofs of irrationality in which various topics of mathematics were opportunely referred. Finally, a classroom activity is presented that aims at the understanding of geometric demonstrations of incommensurability.

Key words: Irrational numbers; logarithms; equations; regular polygons; incommensurability.

Sumário

1 Introdução

Por que escrever uma dissertação sobre números irracionais? A primeira justificativa é que não podemos simplesmente ignorar estes números. Com efeito, como vamos mostrar na Seção 2.2, todo intervalo não-degenerado de números reais possui números irracionais. Em outros termos, os números irracionais estão por toda parte. Além disso, tais números surgem desde o ensino básico, quando estudamos áreas e volumes, logaritmos ou trigonometria (Niven (1961)). Dentre os números irracionais podemos citar, por exemplo, $\sqrt{2}$, ϕ, $\cos 20^{\text{o}}$ e $\log 2$.

Esta primeira justificativa não parece ser plenamente satisfatória. É verdade que os números irracionais, como o π, surgem desde o ensino básico[1]. No entanto, dificilmente encontramos problemas, sobretudo no ensino básico, em que a irracionalidade do número π seja necessária. Por exemplo, na dedução da fórmula da área de um círculo de raio $r > 0$ não é necessário supor que o número π é irracional. Basta compreendermos que é um número real. Além disso, é sabido que poucas casas decimais de π são suficientes para se resolver qualquer problema prático de engenharia, matemática ou física (Caraça (1984)). Contudo, há diversos problemas interessantes cuja solução reside exatamente em decidir se determinado número é irracional como, por exemplo, saber se existe um triângulo equilátero no plano cartesiano cujos vértices têm todas as coordenadas inteiras (Bortolossi e Mózer (2016)). Ao supormos que tal triângulo existe, vamos concluir que o número $\sqrt{3}$ é racional. Neste caso, a irracionalidade do número $\sqrt{3}$ é de fato invocada. É conveniente notar que o enunciado do problema não faz menção aos números irracionais, o que

[1] Duas demonstrações diferentes da irracionalidade de π encontram-se nas referências Figueiredo (2002) e Marques (2013).

ajuda a torná-lo interessante.

Outra motivação é que os números irracionais podem ser utilizados para se ensinar técnicas de demonstrações em matemática, aspecto importante para alunos do primeiro período de graduação ou mesmo para alunos do Ensino Médio. Neste caso, os números irracionais não se constituem o objeto, mas sim uma ferramenta ou um meio para se atingir um dado objetivo. Em Moraes Filho (2012), cuja introdução menciona que uma das finalidades do livro é apresentar os fundamentos básicos da Lógica Matemática, encontram-se algumas demonstrações de irracionalidade, o que é importante pois não devemos esquecer que a Matemática é uma ciência lógica dedutiva. Isto é, a partir de conceitos primitivos, definições e axiomas são provados teoremas e proposições via argumentos lógicos. Além disso, nas diferentes demonstrações de irracionalidades ao longo do texto recorremos a diversos conceitos de matemática, como funções, polinômios, trigonometria, números complexos e geometria plana, dentre outros. Neste contexto os números irracionais funcionam como problemas geradores. Em outras palavras, problemas nos quais diversos tópicos de matemática são explorados.

Devemos salientar, por fim, que ao longo da história diversos matemáticos jamais se preocuparam com as possíveis aplicações de seus estudos. A Matemática possui um fim em si própria não existindo uma inquietação excessiva sobre uma possível utilidade de determinada teoria. Essa preocupação poderia nos fazer distanciar de uma das faces da Matemática que é apreciar a beleza e a pureza de certos resultados (Lima (2007)). Não obstante, a história recente da Matemática nos mostra que muitas teorias, cedo ou tarde, acabam por ter uma importante aplicação (Courant e Robbins (2000)). Os números irracionais possuem aplicações, por exemplo, na criptografia (Mikram (2018)).

No presente trabalho vamos investigar três problemas aparentemente diferentes mas que tratam de um mesmo assunto: números irracionais. O primeiro problema, abordado no Capítulo 3, examina a questão da racionalidade de logaritmos de números reais de base inteira. No Capítulo 4, vamos decidir pela racionalidade ou irracionalidade das raízes reais da equação $a^x = x^a$, onde $a \geq 2$ é um número inteiro. O outro problema, um pouco mais elaborado, e que será apresentado nos capítulos 2 e 5, se refere à comensurabilidade ou não entre o lado e uma diagonal de um polígono regular. Todos os problemas anteriores se reduzem a decidir pela racionalidade ou irracionalidade de um número real. Esta é, portanto, a diretriz que conduz o texto. Vamos estudar algumas técnicas que nos permitam estabelecer a irracionalidade de certos números reais e aplicá-las a exemplos relevantes ou interessantes.

Duas ferramentas que nos auxiliam a decidir pela irracionalidade de certos números reais se destacam ao longo do texto: o Teorema Fundamental da Aritmética e o Critério de Pesquisa de Raízes Racionais de Equações Polinomiais com Coeficientes Inteiros. Tais ferramentas, acessíveis à alunos do Ensino Médio, serão apresentadas no **Capítulo 2**, onde exibiremos diversos exemplos de números irracionais. O **Capítulo 3** contém uma aplicação do Teorema Fundamental da Aritmética na demonstração da irracionalidade de certos logaritmos de base inteira.

O exame da racionalidade das raízes reais da equação $a^x = x^a$, com $a \geq 2$ inteiro, abordado no **Capítulo 4**, generaliza o estudo das raízes da equação $p^x = x^p$, onde p é um primo ímpar, tratada por G. G. Bastos, num artigo publicado na Revista Matemática Universitária (Bastos (2003)). Tal problema surgiu, em sua forma mais simples, no artigo de Elon Lages Lima sobre as raízes da equação $2^x = x^2$ (Lima (1984)). Vamos apresentar ainda uma outra generalização da questão proposta ao investigar a natureza (quanto a racionalidade ou irracionalidade) das raízes da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$, com $a \geq 2$ inteiro (não necessariamente primo) e f é uma função polinomial com coeficientes inteiros.

Sabe-se da existência de segmentos incomensuráveis desde a antiguidade (Roque (2012)). Não se conhece ao certo, no entanto, primeiro exemplo de dois segmentos incomensuráveis. Contudo, acredita-se que os incomensuráveis tenham surgidos no estudo da diagonal do quadrado (que nos levam ao número $\sqrt{2}$) ligado à questão da duplicação do quadrado (Platão (1999)) ou das diagonais do pentágono regular, que nos levam ao número de ouro ϕ (Herz-Fischler (1998)). É natural analisar a questão da comensurabilidade entre as diagonais e o lado de outros polígonos regulares. Porém, ao contrário do quadrado e do pentágono regular, polígonos com mais de cinco lados possuem diagonais não congruentes. Devemos falar então da diagonal mais curta, segunda diagonal mais curta e assim sucessivamente. O Portal Atractor (Atractor (2018)), um portal da internet dedicado a Divulgação Matemática onde estão disponíveis diversos artigos nas áreas de Álgebra, Análise, Geometria, Topologia, dentre outros, apresenta o estudo da comensurabilidade entre o lado a diagonal mais curta e a segunda diagonal mais curta de qualquer polígono regular.

Porém, não faz menção a outras diagonais, isto é, a partir da terceira diagonal mais curta. No Capítulo 2, é apresentada uma demonstração da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado e entre o lado e a diagonal de um pentágono regular. No caso do hexágono, é mostrado que o lado e a diagonal mais curta são incomensuráveis. Já no **Capítulo 5**, são abordadas outras diagonais. De forma mais precisa, vamos investigar até a sexta diagonal mais curta de um polígono regular e indicar como se analisa o problema geral. Para isso, lançaremos mão de alguns recursos computacionais disponíveis no Portal *WolframAlpha* (Wolfram Alpha (2018)).

No **Capítulo 6** é apresentada uma atividade, para alunos do Ensino Médio, que visa o entendimento da prova geométrica da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do pentágono regular e entre o lado e a diagonal mais curta do hexágono regular.

O conjunto dos números reais será tomado como o ponto de partida no presente texto. Ou seja, vamos considerar conhecidas todas as operações e propriedades dos números reais. O leitor interessado numa construção rigorosa do conjunto dos números reais, tendo como ponto de partida o conjunto dos números racionais, através dos Cortes de Dedekind, por exemplo, poderá consultar as referências Ferreira (2010) ou Rudin (1976).

Os requisitos para acompanhar o presente trabalho, além do conhecimento dos números reais (ao menos de forma intuitiva), são conhecimentos de Aritmética, Cálculo e Números Complexos. O texto é dirigido para alunos do curso de licenciatura ou bacharelado em Matemática, professores do Ensino Fundamental e Médio e, de forma mais geral, a qualquer leitor que mantem interesse pela disciplina. As principais influências e inspiração para a elaboração deste texto foram as referências Atractor (2018), Bastos (2003) e Niven (1961).

2 Números Irracionais

Como descobrir se um determinado número real é irracional? Nosso principal objetivo neste capítulo é apresentar ferramentas e métodos que nos permitam estabelecer a irracionalidade de certos números reais. Duas se destacam: o Teorema Fundamental da Aritmética e o Critério de Pesquisa de Raízes Racionais de Equações Polinomiais com coeficientes inteiros (seções 2.3 e 2.4). Vamos também explorar a questão da comensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado, do pentágono regular e a diagonal mais curta do hexágono regular além de examinar a racionalidade das raízes da equação $2^x = x^2$. Tais problemas servirão como uma introdução às questões mais gerais que aparecerão nos Capítulos 4 e 5. Começaremos por fornecer, na Seção 2.1, uma relação entre segmentos incomensuráveis e números irracionais.

2.1 Segmentos incomensuráveis e números irracionais

Vamos denotar por $\overline{AB}$ a medida de um dado segmento de reta AB. Dizemos que dois segmentos de reta AB e CD são *comensuráveis* quando existem uma unidade de medida $u > 0$ e inteiros positivos m e n tais que

$$\overline{AB} = mu \text{ e } \overline{CD} = nu. \tag{2.1}$$

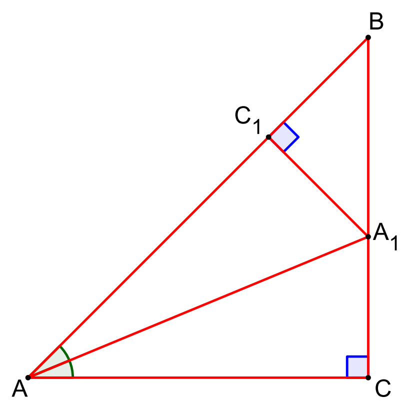
Podemos interpretar as igualdades em (2.1) da seguinte maneira: o segmento AB mede m vezes u e o segmento CD mede n vezes u. Dados dois segmentos de reta, nem sempre existe uma medida

$u > 0$, por menor que seja, de tal forma que as medidas daqueles dois segmentos sejam ambas múltiplos inteiros de u. Neste caso, os segmentos são ditos *incomensuráveis* (Niven (1961)). Com o propósito de mostrar que existem segmentos de reta que são incomensuráveis vamos provar, no teorema a seguir, que a diagonal e o lado de um quadrado ou, de forma equivalente, que a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles, são dois segmentos incomensuráveis (Roque (2012)).

Teorema 2.1. Existem segmentos de reta incomensuráveis.

Demonstração. Seja ΔABC um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa AB, conforme a figura (2.1). Vamos mostrar que os segmentos AB e BC são incomensuráveis. Para este fim,

Figura 2.1: Triângulo retângulo isósceles.



Fonte: Autor, 2018.

vamos supor o contrário. Ou seja, vamos supor que existe um número real $u > 0$ e inteiros positivos m e n tais que

$$\overline{AB} = mu \text{ e } \overline{BC} = nu. \tag{2.2}$$

Seja AA_1 a bissetriz do triângulo ΔABC relativa ao ângulo $\angle BAC$ (com $A_1 \in BC$) e A_1C_1 a altura do triângulo ΔABA_1 relativa ao lado AB. Os triângulos ACA_1 e AC_1A_1 são congruentes pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo) de congruência de triângulos. De fato, $\angle A_1AC \equiv \angle A_1AC_1$, por construção, o lado AA_1 é comum aos dois triângulos e $\angle AA_1C \equiv \angle AA_1C_1$ (pois $\measuredangle AA_1C = 90^o - \measuredangle A_1AC = 90^o - \measuredangle A_1AC_1 = \measuredangle AA_1C_1$). Assim,

$$AC \equiv AC_1. \tag{2.3}$$

Note agora que

$$\measuredangle BA_1C_1 = 180^{\text{o}} - \measuredangle C_1A_1C = 180^{\text{o}} - (180^{\text{o}} - \measuredangle C_1AC) = \measuredangle C_1AC = 45^{\text{o}} = \measuredangle A_1BC_1.$$

Logo, o triângulo ΔA_1BC_1 é isósceles de base A_1B. Desta forma:

$$A_1C \equiv BC_1. \tag{2.4}$$

Das congruências (2.3) e (2.4) juntamente com a hipótese (2.2) concluímos que:

$$\overline{BC_1} = \overline{AB} - \overline{AC_1} = \overline{AB} - \overline{AC} = mu - nu = (m-n)u = n_1u \text{ e}$$
$$\overline{A_1B} = \overline{BC} - \overline{A_1C} = \overline{BC} - \overline{BC_1} = nu - (m-n)u = (2n-m)u = m_1u,$$

onde $n_1 = m - n$ e $m_1 = 2n - m$ são dois inteiros positivos. Vamos mostrar agora que $m_1 < m$. De fato, como $\overline{BC} < \overline{AB}$ (pois em qualquer triângulo retângulo o cateto é menor do que a hipotenusa) segue de (2.2) que

$$n < m \Rightarrow 2n < 2m \Rightarrow 2n - m < 2m - m \Rightarrow m_1 < m.$$

Tomando $B_1 = B$, podemos repetir o procedimento empregado acima no triângulo $\Delta A_1B_1C_1$. Deste modo, teremos um novo triângulo $\Delta A_2B_2C_2$ tal que $\overline{A_2B_2} = (2n_1 - m_1)u = m_2u$ e $\overline{B_2C_2} = (m_1 - n_1)u = n_2u$, sendo $n_2 = m_1 - n_1$, $m_2 = 2n_1 - m_1$ e $m_2 < m_1 < m$. Como podemos continuar esse processo indefinidamente, obtemos uma sequência decrescente e infinita de inteiros positivos

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > m_4 \ldots$$

o que não pode ocorrer. O absurdo provém da hipótese de AB e BC serem comensuráveis. Logo, AB e BC são segmentos incomensuráveis. ∎

Um número real é dito *racional* quando pode ser representado na forma $\dfrac{m}{n}$ onde m e n são inteiros e n é diferente de zero (Niven (1961)). Vamos admitir conhecidas todas as propriedades e operações com números racionais. Da relação (2.1) segue que

$$\overline{AB} \cdot n = \overline{CD} \cdot m \tag{2.5}$$

Para simplificar a notação, a partir deste momento, vamos denotar também por AB a medida do segmento AB. A distinção entre o segmento e sua medida será dada pelo contexto. Da igualdade (2.5) segue que $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{m}{n}$. Portanto, o fato dos segmentos AB e CD serem comensuráveis implica que a razão $\dfrac{AB}{CD}$ de suas medidas é um número racional. Reciprocamente, dados dois segmentos AB e CD, se $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{m}{n}$ onde m e n são inteiros e $n \neq 0$, então AB e CD são comensuráveis. De fato, basta tomar $u = \dfrac{AB}{m} = \dfrac{CD}{n} > 0$. Assim, $AB = mu$ e $CD = nu$.

Um número real que não é racional é dito *irracional*. Decorre das considerações anteriores que dois segmentos de reta AB e CD são incomensuráveis se, e somente se, a razão $\dfrac{AB}{CD}$ de seus comprimentos é um número irracional. Com esta equivalência, já estamos em condições de provar que o número $\sqrt{2}$ é irracional, conforme a proposição a seguir.

Proposição 2.2. O número $\sqrt{2}$ é irracional.

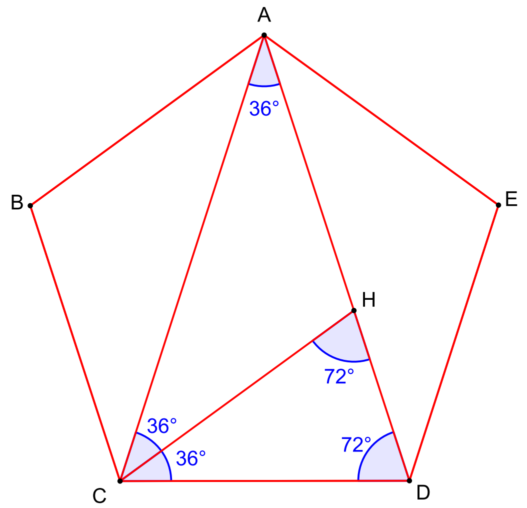
Demonstração. Considere um quadrado cujo lado e diagonal medem, respectivamente, l e d. Do Teorema de Pitágoras, segue que $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$. Ou seja, $\dfrac{d^2}{l^2} = 2 \Rightarrow \dfrac{d}{l} = \sqrt{2}$. Desta forma, a irracionalidade de $\sqrt{2}$ decorre da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado, resultado estabelecido no Teorema 2.1. ■

E o que ocorre no caso de um pentágono regular? A diagonal e o lado são dois segmentos incomensuráveis? Vamos denotar por ϕ a razão entre a medida da diagonal e a medida do lado de um pentágono regular. Este número é conhecido na literatura como *Número de Ouro* (Herz-Fischler (1998)). Provar que a diagonal e o lado de um pentágono regular são incomensuráveis é equivalente a provar que o Número de Ouro é irracional.

Proposição 2.3. O lado e a diagonal de um pentágono regular são segmentos incomensuráveis. Em outras palavras, o número ϕ é irracional.

Demonstração. Seja $ABCDE$ um pentágono regular e CH a bissetriz do ângulo $\angle ACD$, onde H está no segmento AD, conforme a figura (2.2). Como os triângulos ΔACH e ΔDHC são

Figura 2.2: Pentágono Regular.



Fonte: Autor, 2018.

isósceles de base AC e DH, respectivamente, então $AD \equiv AC$ e $AH \equiv CH \equiv CD$. Além disso, como os triângulos ΔACD e ΔCDH são semelhantes, segue que:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DH} \Leftrightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{AD - AH} \Leftrightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{AC - CD} \Leftrightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{1}{\frac{AC}{CD} - 1} \Leftrightarrow \phi = \frac{1}{\phi - 1},$$

Da última igualdade, concluímos que o número ϕ satisfaz a relação

$$\phi^2 - \phi = 1. \tag{2.6}$$

Suponha que ϕ seja racional. Desta forma, este número pode ser escrito na forma da fração irredutível $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos. Substituindo a fração $\frac{m}{n}$ na equação (2.6), e efetuando manipulações algébricas obtemos:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - \frac{m}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} - \frac{m}{n} = 1 \Leftrightarrow m^2 - mn = n^2 \Leftrightarrow m^2 - n^2 = mn.$$

Ou seja,

$$(m-n)(m+n) = mn. \tag{2.7}$$

Como a fração $\frac{m}{n}$ é irredutível então m e n não são simultaneamente pares. Assim, temos dois casos a analisar: quando m e n são simultaneamente ímpares ou quando m e n possuem paridades diferentes. Vamos mostrar que nenhum dos dois casos pode ocorrer, o que nos levará a concluir pela irracionalidade de ϕ. Com efeito, se m e n fossem simultaneamente ímpares então mn seria ímpar e $(m-n)(m+n)$ seria par. Por outro lado, se m e n tivessem paridades diferentes, então mn seria par e $(m-n)(m+n)$ seria ímpar. Ambos os casos, em virtude da igualdade (2.7), nos levam a um absurdo. Tal igualdade é consequência de se supor que ϕ é um número racional. Logo, ϕ é irracional. ■

Observação. A incomensurabilidade entre dois segmentos foi descoberta na geometria grega ainda na antiguidade (Roque (2012)). Um dos primeiros exemplos que conduziu aos incomensuráveis foi, provavelmente, o problema de se usar o lado para medir a diagonal do quadrado. Os procedimentos utilizados na demonstração do Teorema 2.1, mas com uma linguagem matemática atual, guardam semelhanças com a técnica da *antifairese*, utilizada pelos gregos à época. A descoberta de segmentos incomensuráveis é muitas vezes associada a uma crise no pensamento pitagórico. Esta suposta crise é abordada em diversos livros de Ensino Médio quando tratam dos números reais e irracionais. No entanto, conforme indicam estudos mais recentes em história da matemática, não há nenhuma evidência de crise (Roque (2012)). “As fontes mais confiáveis para o estudo do assunto não trazem nenhuma evidência de uma crise, que não teria sido senão o resultado de uma leitura pouco rigorosa de fontes menos confiáveis” (Gonçalvez e Possani (2010)). Desta forma, no nosso entender, não faz sentido insistir nesta lenda em qualquer introdução história ao estudo dos números reais e irracionais, momento em que normalmente a crise é invocada.

2.2 Exemplos de números irracionais

Nesta seção, seguindo as ideias apresentadas em Niven (1961), vamos apresentar alguns exemplos de números irracionais. Vamos também mostrar como obter uma infinidade de números irracionais a partir de um irracional conhecido e mostraremos que o conjunto dos números irracionais não é fechado em relação às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (excluindo o zero). Aqui, convém explicar o que significa um conjunto ser fechado em relação a uma determinada operação. Dizemos que um conjunto qualquer $A \neq \varnothing$ é *fechado* em relação a uma operação $*$ quando, para quaisquer dois elementos a_1 e a_2 no conjunto A o elemento $a_1 * a_2$ ainda está em A. Por exemplo, sabemos que o conjunto dos números racionais é fechado em relação as operações de adição, subtração e multiplicação. E, ao excluirmos o zero, este novo conjunto é fechado em relação à divisão. Encerraremos esta seção provando o importante fato de que todo intervalo de números reais (a,b), com $a < b$, possui números racionais e irracionais. Começaremos provando que o número $\sqrt{10}$ é irracional. Para isso, no entanto, vamos precisar do lema seguinte.

Lema 2.4. Seja a um número inteiro. Se a^2 é par, então a é par.

Demonstração. Faremos a prova da contrapositiva do enunciado acima. Para isso, suponha que a seja ímpar. Então existe um inteiro k tal que $a = 2k + 1$. Assim,

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Ou seja, a^2 é ímpar. ■

Proposição 2.5. O número $\sqrt{10}$ é irracional.

Demonstração. A prova será feita por redução ao absurdo. Suponha então que $\sqrt{10}$ seja racional. Assim, este número pode ser escrito na forma da fração irredutível $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros positivos. Ou seja, $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$. Desta forma,

$$10b^2 = a^2. \tag{2.8}$$

Como $10b^2$ é par então a^2 é par. Do Lema 2.4, segue que a é par. Portanto, existe um inteiro n tal que $a = 2n$. Substituindo a por $2n$ na equação (2.8) obtemos $10b^2 = (2n)^2 = 4n^2$. Ou seja, $5b^2 = 2n^2$. Desta forma, $5b^2$ também é par e, como 5 é ímpar, b^2 é par. Novamente do Lema 2.4, concluímos que b é par. Chegamos a conclusão de que a e b são ambos pares. Mas isso contraria a hipótese inicial de $\frac{a}{b}$ ser uma fração irredutível. Logo, $\sqrt{10}$ é irracional. ■

Observação 2.6. O método utilizado acima pode ser aplicado para provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, como abordado em diversos livros de Ensino Médio. Acreditamos que tal demonstração é acessível a um aluno do Ensino Médio. O procedimento em questão pode ser utilizado, em teoria, para provar a irracionalidade de $\sqrt[k]{n}$, quando n não é um é uma k-ésima potência, onde n e $k \geq 2$ são inteiros. No entanto, o mesmo torna-se muito trabalhoso para um n não muito "pequeno". Por exemplo, seria cansativo provar que $\sqrt{19}$ ou $\sqrt[3]{120}$ são irracionais utilizando os mesmos argumentos empregados na demonstração da Proposição 2.5. Na próxima seção veremos uma demonstração rápida e simples da irracionalidade de $\sqrt[k]{n}$, com n e $k \geq 2$ inteiros positivos, quando n não é uma k-ésima potência.

Exemplo 2.7. O número $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ é irracional.

Note que $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 2 + 2\sqrt{10} + 5$. Logo, $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$. Suponha que

$$\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = x, \tag{2.9}$$

onde x é um número racional. Elevando a igualdade (2.9) ao quadrado e efetuando manipulações algébricas obtemos:

$$7 + 2\sqrt{10} = x^2 \Rightarrow 2\sqrt{10} = x^2 - 7 \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{1}{2}(x^2 - 7).$$

Como o conjunto dos números racionais é fechado em relação às operações de adição, subtração e multiplicação, então $\frac{1}{2}(x^2 - 7)$ é racional. Ou seja, $\sqrt{10}$ é racional. No entanto, a Proposição 1.5 nos diz que $\sqrt{10}$ é irracional. Tal contradição provém da hipótese do número $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ser racional. Desta forma, $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ é irracional. ■

Observação. Na argumentação acima, utilizamos a irracionalidade de $\sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 5}$. Aplicando o mesmo raciocínio empregado na prova do Exemplo 2.7, podemos mostrar que o número $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, onde a e b são inteiros positivos, é irracional quando $\sqrt{ab}$ é irracional. Para esta finalidade, basta supor que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional e da identidade $\sqrt{ab} = \dfrac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (a + b)}{2}$ concluir que $\sqrt{ab}$ é racional (Havil (2012)). Na seção 2.4 vamos apresentar outra prova da irracionalidade de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ tirando proveito das funções polinomiais com coeficientes inteiros.

Proposição 2.8. Seja α um número irracional e $q \neq 0$ um número racional. Então:

(i) $\alpha + q$ é irracional;

(ii) αq é irracional;

(iii) $-\alpha$ é irracional;

(iv) α^{-1} é irracional.

Demonstração. Faremos a prova do item (i). A demonstração dos outros itens é análoga. Suponha que $\alpha + q$ seja um racional r. Assim, $\alpha + q = r \Rightarrow \alpha = r - q$. Como o conjunto dos racionais é fechado em relação à operação de subtração, então α é racional. Mas isso contraria a hipótese de α ser irracional. Logo, $\alpha + q$ é irracional. ■

É interessante notar que os itens (i) e (ii) da proposição anterior nos permitem produzir uma infinidade de números irracionais a partir de um irracional conhecido.

Exemplo 2.9. O número $\sqrt{5}$ é irracional. Com efeito, segue da relação 2.6 que $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Assim, $\sqrt{5} = 2\phi - 1$. Como número ϕ é irracional (pela Proposição 2.3), a irracionalidade de $\sqrt{5}$ segue dos itens (i) e (ii) da proposição anterior.

Exemplo 2.10. Pelo item (iii) da Proposição 2.8, o número $-\sqrt{2}$ é irracional. Considere então os irracionais $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$. É evidente que $\sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0$ e $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ são números racionais. Por outro lado, a Proposição 2.5 e o Exemplo 2.7 mostram que os números e $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{10}$ e $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ são irracionais.

O exemplo anterior nos diz que nada se pode afirmar sobre a soma e o produto de dois números irracionais, podendo ser um número racional ou irracional. Daí segue que o conjunto dos números irracionais não é fechado em relação às duas operações mencionadas. Vamos encerrar esta seção observando que os números irracionais estão "por toda parte" em $\mathbb{R}$, conforme o Teorema 2.12. Para isso vamos recorrer ao lema abaixo.

Lema 2.11. Qualquer que seja o número real $\varepsilon > 0$, existe um irracional $\alpha \in (0,\varepsilon)$.

Demonstração. Tome um inteiro positivo n_0 tal que $n_0 > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$. Portando, $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{n_0} < \varepsilon$. Além disso, pelo item (ii) da Proposição 2.8, o número $\dfrac{\sqrt{2}}{n_0}$ é irracional, donde segue o resultado. ■

Teorema 2.12. Todo intervalo de números reais (a,b), com $a < b$, possui um número irracional.

Demonstração. Vamos separar a prova em dois casos. Suponha, em primeiro lugar, que a é um número racional. Pelo lema anterior (tomando $\varepsilon = b - a > 0$) existe um irracional $\alpha \in (0,b-a)$. Assim, do item (i) da Proposição 1.8, $\alpha + a$ é irracional e $\alpha + a \in (0 + a,b - a + a) = (a,b)$.

Suponha agora que a é irracional. Neste caso, tome um inteiro positivo n_0 tal que

$$n_0 > \frac{1}{b-a} > 0. \tag{2.10}$$

Da equação (2.10), segue que $a < a + \dfrac{1}{n_0} < b$. Ou seja, $a + \dfrac{1}{n_0} \in (a,b)$. Além disso, novamente pelo item (i) da Proposição 2.5, o número $a + \dfrac{1}{n_0}$ é irracional. ■

Observação. Utilizando um raciocínio semelhante ao empregado na demomstração do teorema anterior, podemos mostrar que todo intervalo de números reais (a,b), com $a < b$ possui um número racional.

Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *denso* em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo (a,b) de números reais, com $a < b$, contém algum ponto de X. Ou seja, $X \cap (a,b) \neq \varnothing$ qualquer que seja o intervalo (a,b). Assim, da observação anterior e do Teorema 2.12 concluímos que o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.

2.3 Teorema Fundametal da Aritmética

Vamos mostrar, nesta seção, a relevância do Teorema Fundamental da Aritmética no estabelecimento da irracionalidade de certos números reais.

Antes, no entanto, não é demais lembrarmos algumas definições: sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Dizemos que b *divide* a quando existe um inteiro c tal que $a = bc$. Neste caso dizemos também que b é um *divisor* de a ou que a é um *múltiplo* de b. Todo inteiro positivo a diferente de 1 possui ao menos dois divisores positivos, já que 1 e a são divisores de a. Um número inteiro $p > 1$ é dito *primo* quando possui exatamente dois divisores positivos. Um inteiro maior do que 1 que não é primo é dito *composto*.

Teorema Fundamental da Aritmética.
Seja a um inteiro diferente de diferente de 1, -1 e 0. Então, existem números primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ e inteiros positivos α_1, α_2,. . .,α_r tais que

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}.$$

Além disso, esta decomposição é única.

Proposição 2.13. Seja n um inteiro positivo. Se n não é uma k-ésima potência, então $\sqrt[k]{n}$ é um número irracional. Em particular, se n não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{n}$ é irracional.

Demonstração. Suponha que n não é uma k-ésima potência. Se $\sqrt[k]{n}$ é racional, então existem inteiros positivos a e b tais que $\sqrt[k]{n} = \frac{a}{b}$. Assim,

$$nb^k = a^k. \tag{2.11}$$

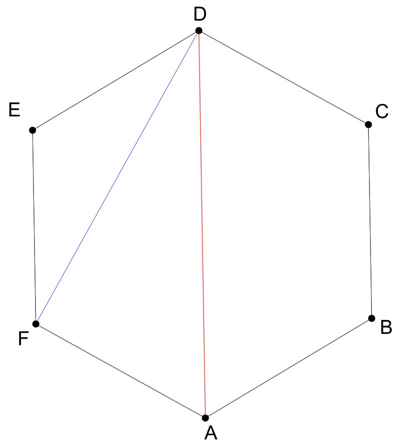
Por não ser uma k-ésima potência, a decomposição de n em primos possui um fator primo p cujo número de aparições não é um múltiplo de k. Por consequência, na decomposição de nb^k em fatores primos, o número de aparições do fator p não é também um múltiplo de k. Já na decomposição em fatores primos de a^k, o fator p aparece k vezes. Desta forma, a igualdade (2.11) contraria o fato da decomposição de um número em fatores primos ser única. Tal absurdo provém da suposição de $\sqrt[k]{n}$ ser racional. Portanto, $\sqrt[k]{n}$ é irracional. ■

Note que na demonstração acima, ao contrário da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{10}$, na Proposição 2.4, não foi necessário supor que a fração $\frac{a}{b}$ fosse irredutível. Como o número 10 não é um quadrado perfeito, pois $3^2 = 9 < 10 < 16 = 4^2$, segue da proposição anterior que $\sqrt{10}$ é um número irracional.

É evidente que se n for uma k-ésima potência, então $\sqrt[k]{n}$ será um número inteiro. Portanto, podemos reescrever a Proposição 2.13 da seguinte forma: se n é um inteiro positivo então $\sqrt[k]{n}$ é inteiro ou irracional. Isso nos fornece uma eficiente ferramenta para provar a irracionalidade de qualquer número na forma $\sqrt[k]{n}$, onde n é um inteiro positivo. Por exemplo, como $\sqrt[3]{120}$ não é um inteiro, já que $4 = \sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{120} < \sqrt[3]{125} = 5$, então $\sqrt[3]{120}$ é irracional. Decorre diretamente da proposição anterior que se p é primo, então $\sqrt{p}$ é um número irracional. Em particular o número $\sqrt{19}$, citado na Observação 2.6, é irracional.

Exemplo 2.14. Sabemos, da geometria plana, que a razão entre a medida da diagonal mais curta e a medida do lado de um hexágono regular é $\sqrt{3}$. Como 3 não é um quadrado perfeito, segue da Proposição 2.13 que $\sqrt{3}$ é irracional. Ou seja, a diagonal mais curta e o lado do hexágono regular são dois segmentos incomensuráveis. Por outro lado, a razão entre a segunda diagonal mais curta e o lado do hexágono regular é 2, o que implica que são dois segmentos comensuráveis.

Figura 2.3: Hexágono regular.



Fonte: Autor, 2018.

Vamos agora apresentar um exemplo, extraído da referência (Lima (1984)), cuja prova se dá com o auxílio do Teorema Fundamental da Aritmética.

Exemplo 2.15. A equação $2^x = x^2$ possui três raízes reais: 2, 4 e uma raiz irracional no intervalo $(-1,0)$.

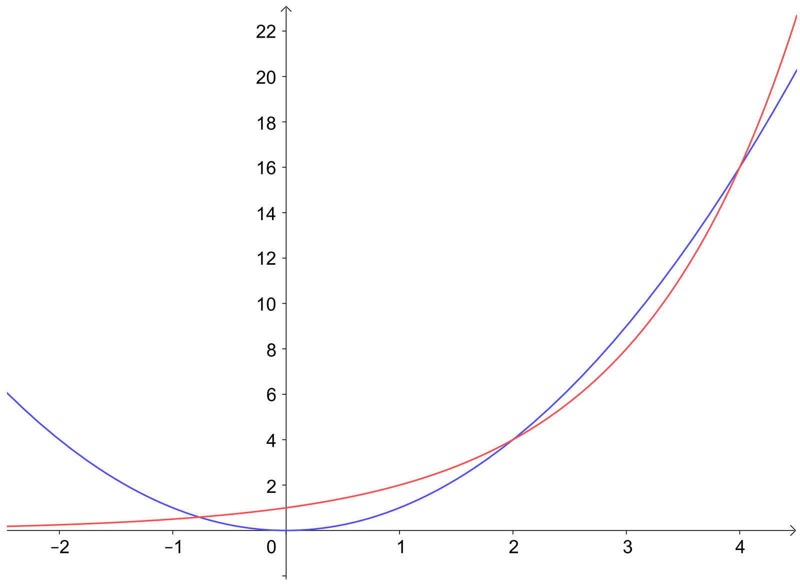
É evidente que a equação possui as raízes 2 e 4. No entanto, como se pode verificar no gráfico (2.4), a equação possui ainda uma terceira raiz negativa no intervalo $(-1,0)$. Além disso, como conhecemos o gráfico de uma função quadrática e o de uma função exponencial, fica claro que a equação não pode ter mais do que três raízes. A pergunta que segue é se esta raiz negativa é racional ou irracional. Vamos mostrar que é irracional.

Para isso suponha, por contraposição, que a equação $2^x = x^2$ possui uma raiz racional no intervalo $(-1,0)$. Portanto, existem dois inteiros positivos m e n, primos entre si, tais que $-\dfrac{m}{n}$ é uma raiz da equação. Assim, substituindo:

$$2^{-\frac{m}{n}} = \left(-\frac{m}{n}\right)^2 \Leftrightarrow 2^{-\frac{m}{n}} n^2 = m^2 \Leftrightarrow 2^{-m} n^{2n} = m^{2n} \Leftrightarrow n^{2n} = 2^m m^{2n}.$$

Da última igualdade concluímos que n é par. Como m e n são primos entre si, m é ímpar. Portanto, o número $2^m m^{2n}$, que figura no segundo membro da última igualdada, possui em sua decomposição

Figura 2.4: A equação $2^x = x^2$ possui três raízes reais.



Fonte: Autor, 2018.

em fatores primos, um número ímpar de fatores iguais a 2. Já no primeiro membro, o número n^{2n} possui um número par de fatores iguais a 2. Mas isso não pode ocorrer, em virtude da unicidade da decomposição de um número em fatores primos. A contradição veio do fato de supormos que a raiz negativa é um número racional, donde somos obrigados a concluir pela sua irracionalidade. ■

Observação 2.16. O valor da raiz irracional da equação $2^x = x^2$, cuja estimativa pode ser obtida pelo Método de Newton, é aproximadamente $-0{,}766665$ (BURDEN e FAIRES (2008)). Outro método numérico que pode ser utilizado, acessível ao aluno de Ensino Médio, é o da Bissecção. Na Seção 4.1, vamos mostrar que a equação $4^x = x^4$ possui as mesmas raízes da equação do exemplo anterior. Trataremos ainda, na Seção 4.2, do caso geral. Isto é, vamos estudar a irracionalidade das raízes da equação $a^x = x^a$, onde $a \geq 2$ é um número inteiro.

2.4 Raízes irracionais de funções polinomiais

Nesta seção, tendo por base sobretudo as referências Muniz Neto (2012) e Niven (1961), é visto como as funções polinomiais com coeficientes inteiros ajudam a estabelecer a irracionalidade de determinados números reais. Em outras palavras, veremos que, dado um número real, se conseguirmos encontrar uma função polinomial com coeficientes inteiros que o tenha como raiz, então teremos condições de descobrir se este número é, ou não, irracional. Como primeira aplicação, vamos apresentar novas demonstrações da irracionalidade de alguns números apresentados na Seção 2.2. Começaremos o nosso estudo com o Teorema 2.17 abaixo, importante resultado conhecido como o *critério de pesquisa de raízes racionais* de funções polinomiais com coeficientes inteiros. Quando não explicitarmos o domínio e o contradomínio de uma dada função polinomial, ficará subtendido que ambos são o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Teorema 2.17. Seja f a função polinomial definida por $f(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, onde os coeficientes $c_r \neq 0$ e c_j, $j = 0, \ldots, r-1$, são números inteiros. Se a função f tiver uma raiz racional $\dfrac{m}{n}$, onde m e $n \neq 0$ inteiros são primos entre si, então m divide c_0 e n divide c_n.

Para provar o teorema anterior, vamos utilizar o lema a seguir, cuja demonstração é baseada no Teorema Fundamental da Aritmética.

Lema 2.18. Sejam m, n e c números inteiros, com m e n primos entre si. Se n divide cm então n divide c. De modo geral, se n divide cm^r, onde r é um inteiro positivo, então n divide c.

Demonstração. Como n divide cm então existe um k tal que $cm = nk$. Segue do Teorema da Fatoração Única, que todos os fatores primos de n ocorrem também em cm. Além disso, se algum primo p ocorre em n elevado a um expoente α, ele também ocorrerá em cm elevado a um expoente β maior do que ou igual a α. Como n e m não têm fatores primos em comum, segue que todos os fatores primos de n estarão na fatoração de c com um expoente igual ou maior. Disto decorre que n divide c. Para provar a segunda afirmação deste lema, devemos observar que m e m^r possuem os mesmos fatores primos e, como m e n são primos entre si, segue que m^r e n são primos entre si. Agora basta aplicar a primeira parte do presente lema, com m^r no lugar de m. ■

Demonstração do Teorema 2.17. Suponha que m e n são dois números inteiros primos entre si tais que $f\left(\frac{m}{n}\right) = 0$. Deste modo,

$$c_r\left(\frac{m}{n}\right)^r + c_{r-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{r-1} + \cdots + c_1\left(\frac{m}{n}\right) + c_0 = 0.$$

Multiplicando a igualdade anterior por n^r temos:

$$c_r m^r + c_{r-1}m^{r-1}n + \cdots + c_1 m n^{r-1} + c_0 n^r = 0. \tag{2.12}$$

A equação anterior pode ser escrita como

$$c_r m^r = -n\left(c_{r-1}m^{r-1} + c_{r-2}m^{r-2}n + \cdots + c_1 m n^{r-2} + c_0 n^{r-1}\right).$$

Portando, n divide $c_r m^r$. Como os números m e n são primos entre si, segue do Lema 2.18 que n divide c_r. A expressão (2.12) pode ainda ser escrita como

$$c_0 n^r = -m\left(c_r m^{r-1} + c_{r-1}m^{r-2} + \cdots + c_1 m^{r-1}\right).$$

Assim, m divide $c_0 n^r$. Novamente pelo Lema 2.18 concluímos que m divide c_0. ■

Exemplo 2.19. A função g definida por $g(x) = 8x^3 - 6x - 1$ não possui raiz racional.

Se a função g tivesse uma raiz racional $\frac{m}{n}$, onde m e $n > 0$ são inteiros primos entre si então, pelo Teorema 2.17, teríamos que m divide 1 e n divide 8. Logo, os possíveis valores de m seriam 1 e -1 e os possíveis valores de n seriam 1, 2, 4 e 8. Combinando essas possibilidades, concluímos que as únicas possíveis soluções racionais seriam

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \text{ e } -\frac{1}{8}.$$

No entanto, nenhum dos números acima é raiz da função g, como se pode verificar efetuando os cálculos. Com efeito,

x	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$g(x)$	1	-3	-3	2	$-\frac{19}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{111}{64}$	$-\frac{17}{64}$

Portanto, a função g não possui raiz racional. ■

Corolário 2.20. Seja f a função polinomial definida por $f(x) = x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \cdots + c_1x + c_0$, onde os coeficientes $c_{r-1}, \ldots, c_1$ e c_0 são números inteiros. Se esta equação possuir um zero racional, ela será um inteiro. Além disso, este zero será um divisor de c_0.

Demonstração. Seja $\dfrac{m}{n}$ uma raiz da função polinomial f onde m e $n > 0$ são números inteiros. Pelo Teorema 2.17, n divide 1 e m divide c_0. Daí segue que $n = 1$ e $\dfrac{m}{n} = m$ divide c_0. ■

Exemplo 2.21. Vamos exibir uma nova demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ apresentado no Exemplo 2.7 da Seção 2.2. Para isso, tome

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{5}.$$

Elevando ambos os membros da equação anterior ao quadrado e efetuando manipulações algébricas, obtemos:

$$x^2 = 2 + 2\sqrt{10} + 5 \Rightarrow x^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow x^4 - 14x^2 + 49 = 40 \Rightarrow x^4 - 14x^2 + 9 = 0.$$

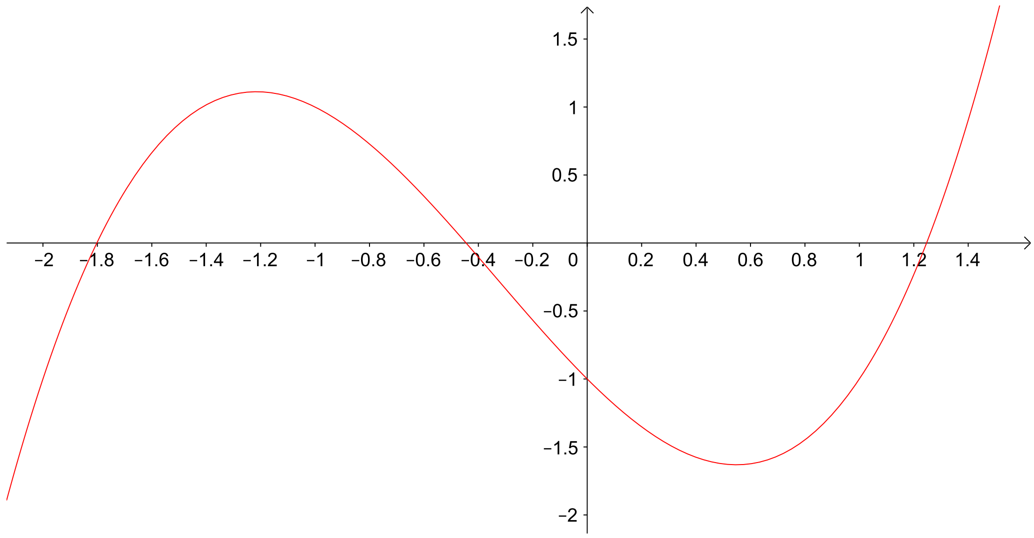
Por construção, $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ é raiz da função polinomial f definida por $f(x) = x^4 - 14x^2 + 9$. Pelo Corolário 2.20, se f tiver uma raiz racional, ela será um inteiro divisor de 9. Portanto, as possíveis raízes são os inteiros 1, -1, 3, -3, 9 e -9. O fato da função f ser par ajuda na tarefa de verificar esses possíveis candidatos. De fato, $f(-1) = f(1) = -4 \neq 0$, $f(-3) = f(3) = -36 \neq 0$ e $f(-9) = f(9) = 5436 \neq 0$. Logo as raízes da função f são números irracionais, donde segue a irracionalidade de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$. ■

A prova agora apresentada é mais trabalhosa do que a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ vista na Seção 2.2. No entanto, ao contrário da demonstração referida, aqui não foi utilizada a irracionalidade de $\sqrt{10}$. Alem disso, o argumento acima é mais geral já que permite a demonstração de irracionalidade de muitos outros números, bastando encontrar uma função definida por um polinômio de coeficientes inteiros que o tenha como raiz.

Exemplo 2.22. A função h definida por $h(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ não possui raiz racional. De fato, pelo Colorário 2.20, se h tiver uma raiz racional ela será um inteiro divisor de 1. Portanto, as únicas possíveis raízes racionais são os inteiros 1 e -1. No entanto, $h(1) = -1$ e $h(-1) = 1$. Logo h não possui raiz racional.

Outra forma de verificar que a função h não possui raiz racional, com o auxílio do software GeoGebra, é através da análise do gráfico de h. Uma função cúbica possui no máximo três raízes reais. Note pela figura (2.5) que as três raízes reais de h não são números inteiros. Logo, pelo Corolário 2.20, as raízes de h são números irracionais.

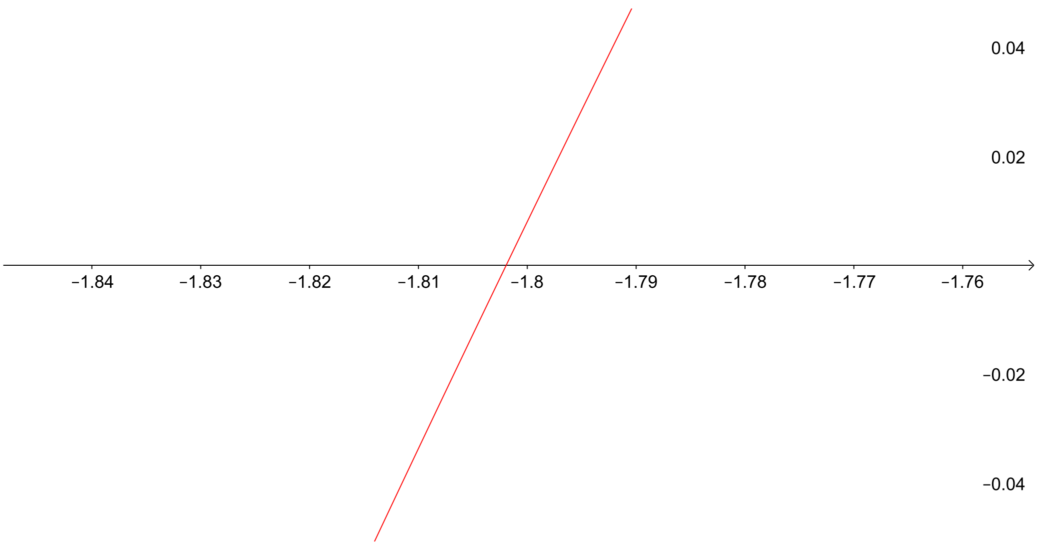
Figura 2.5: Gráfico da função h definida por $h(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$.



Fonte: Autor, 2018.

Uma análise descuidada do gráfico, e sem levar em consideração o conteúdo do Corolário 2.20, pode nos dar a falsa impressão de que o número $-1{,}8$ é uma raiz de h. Assim, seríamos levados a concluir que a função possui uma raiz racional. Ao aplicarmos, no entanto, o “zoom"próximo ao ponto de abscissa $-1{,}8$, conforme mostra a figura (2.6), vemos que a menor das raizes negativas de h está entre $-1{,}81$ e $-1{,}80$. É importante lembrar que o GeoGebra lida apenas com números racionais e, evidentemente, nunca será capaz de determinar (por meio desta abordagem) quando um real é ou não irracional.

Figura 2.6: Gráfico da função h do Exemplo 2.22 em outra janela de vizualização.



Fonte: Autor, 2018.

Exemplo 2.23. Vimos na Proposição 2.13 que $\sqrt[k]{n}$ é inteiro ou irracional. Vamos fornecer outra prova deste fato, utilizando as funções polinomiais. Com efeito, $\sqrt[k]{n}$ é raiz da função polinomial $f(x) = x^k - n$. Segue, do Colorário 2.20 que $\sqrt[k]{n}$ é inteiro ou irracional.

3 A irracionalidade de certos logaritmos

Neste capítulo, mostraremos uma aplicação do Teorema Fundamental da Aritmética ao estabelecer a irracionalidade de certos logaritmos. A importância deste fato relaciona-se com a caracterização dos números irracionais pela representação decimal infinita não-periódica. Tanto nas antigas tábuas de logaritmos como nas calculadoras eletrônicas os valores dos logaritmos são representados na forma de uma expressão decimal finita. Isto pode gerar a falsa impressão de que se tratam necessariamente de números racionais. Ao contrário de diversos textos e artigos sobre o assunto, não ficaremos restritos ao logaritmo decimal. Com efeito, mostraremos uma condição suficiente para o número $\log_b a$ ser irracional, com $a > 0$ e $b > 1$ números inteiros e também um critério que estabelece a irracionalidade de $\log_b a$ quando $b > 1$ for livre de quadrados. Mostraremos por fim, lançando mão do Teorema de Gelfond-Schneider, algumas provas da transcendência de certos logaritmos.

3.1 Logaritmos de números inteiros

Dado um número real $a > 0$, seu *logaritmo na base* $b > 0$, com $b \neq 1$, é o número real x tal que $b^x = a$. O logaritmo de a na base b será denotado por $\log_b a$. Quando $b = 10$ o logaritmo é dito *decimal* e denotaremos o $\log_{10} a$ simplesmente por $\log a$. Vamos admitir conhecidas as propriedades operatórias dos logaritmos. Ao longo deste Capítulo, exceto quando comentarmos o logaritmo natural, trataremos de logaritmos de base inteira.

Exemplo 3.1. O número $\log 2$ é irracional.

Note inicialmente que $\log 2 > \log 1 = 0$. Por contraposição, podemos supor que existem inteiros positivos m e n tais que $\log 2 = \dfrac{m}{n}$. Assim, pela definição de logaritmo,

$$2 = 10^{\frac{m}{n}}.$$

Elevando ambos os membros a potência n obtemos

$$2^n = 10^m = 2^m 5^m.$$

Segue do Teorema da Fatoração única que $m = 0$, o que contraria a nossa suposição inicial. Portanto, $\log 2$ é irracional.

O ponto crucial no argumento acima foi o fato de 2 e 10 terem fatores primos diferentes. De forma mais precisa, o fator 5 está na decomposição em primos do número 10, mas não está, evidentemente, na decomposição do número 2. Assim, podemos generalizar o argumento do exemplo anterior para investigar a irracionalidade de $\log_b a$, conforme a proposição a seguir.

Proposição 3.2. Sejam a e b inteiros positivos com $b \geq 2$. Se as decomposições (ou fatorações) em fatores primos de a ou b apresentam pelo menos um fator que não é comum, então $\log_b a$ é um número irracional.

Demonstração. Vamos supor, por contraposição, que existem dois números inteiros positivos m e n tais que $\log_b a = \dfrac{m}{n}$. Assim,

$$a = b^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow a^n = b^m.$$

Da última igualdade do Teorema Fundamental da Aritmética concluímos que os números a e b possuem exatamente os mesmos fatores primos, o que contradiz a hipótese de terem ao menos um fator primo diferente. ■

Será que se $\log_b a$ for irracional, então as decomposições em fatores primos de a e de b têm necessariamente pelo menos um fator desigual? Como

$$\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = \log 2 + 1,$$

então segue do Exemplo 3.1 que $\log 20$ é irracional. No entanto, os números $20 = 2^2 \cdot 5$ e $10 = 2 \cdot 5$ possuem os mesmos fatores primos. Logo, a recíproca da Proposição 3.2 é falsa.

Vamos mostrar agora que o número $\log_b a$, nas condições da Proposição 3.2, é transcendente. Antes, no entanto, convém lembrarmos a definição de números algébricos e de números transcendentes. Um número complexo é dito *algébrico* quando é raiz de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros. Todo número racional r é algébrico já que $r = \dfrac{m}{n}$, com m e $n \neq 0$ inteiros, é solução da equação $nx - m = 0$. Um número complexo que não é algébrico é dito *transcendente*. Existe uma infinidade (não-enumerável[1]) de números reais transcendentes (Niven (1961)). Por exemplo, os números e e π são transcendentes (Figueiredo (2002)).

Uma poderosa ferramenta que nos permite decidir pela transcendência de diversos números reais é o Teorema de Gelfond-Schneider, provado no ano de 1934 por Gelfond e independentemente por Schneider em 1935 (Figueiredo (2002)) enunciado a seguir e cuja prova pode ver-se em Marques (2013) ou Niven (1967).

Proposição 3.3. Teorema de Gelfond-Schneider. Sejam α e β números algébricos. Se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ e β não for um número real racional, então α^β é transcendente (Marques (2013)).

Sejam a e $b > 1$ inteiros positivos. Vamos supor que existe um número primo que pertence à fatoração de apenas um dos números a ou b. Da Proposição 3.2 segue que $\log_b a$ é irracional. Pelo fato de ser inteiro, o número b é algébrico. Suponha que $\log_b a$ seja também algébrico. Segue da Proposição 3.3 que $b^{\log_b a}$ é transcendente, o que não pode ocorrer pois $b^{\log_b a} = a$ e a é algébrico. Portanto, $\log_b a$ é transcendente.

Da transcendência de $\log_b a$, pode se concluir pela sua não construtibilidade com régua e

[1]Um conjunto não vazio A é *enumerável* quando existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to A$. Do contrário, o conjunto é dito *não-enumerável*. Sabe-se que o conjunto dos números algébricos, a exemplo do conjunto dos números racionais, é enumerável (FIGUEIREDO (2002)).

compasso. Com efeito, somente números algébricos de grau[2] igual a uma potência de 2 são construtíveis com os instrumentos euclidianos (Herstein (2006)).

O logaritmo natural, isto é, o logaritmo de base e ($\log_e a = \ln a$) é tão, ou mais, importante que o logaritmo decimal. Aqui, portanto, cabe a seguinte questão: $\ln 2$, por exemplo, é racional ou irracional? Para responder essa pergunta devemos lançar mão da irracionalidade[3] do número e^r quando r é um número racional não nulo. Uma prova deste fato encontra-se em Marques (2013). Suponha, por contraposição, que $\ln 2 = r$, onde r é um número racional não nulo. Daí, $2 = e^r$. Absurdo, pois e^r é irracional. Portanto, $\ln 2$ é irracional. O argumento acima pode ser estendido para $\ln q$, onde q é um número racional positivo e diferente de 1. Daí concluímos que $\ln q$ é irracional quando q é um racional diferente de 1.

3.2 Um critério para a irracionalidade de $\log_b a$

Um inteiro $b \neq 0$ é dito *livre de quadrados* ou *sem fator quadrático*, quando é um inteiro que não é divisível por nenhum quadrado perfeito.

Por exemplo, o número 18 não é livre de quadrados pois é divisível por 3^2. O mesmo ocorre com o número $24 = 2^3 \cdot 3$ que, ao ser divisível por 2^3, também é divisível por 2^2. Por outro lado, o número $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ é livre de quadrados.

Segue do Teorema da Fatoração única que se $b > 1$ é um inteiro livre de quadrados então $b = p_1 p_2 \ldots p_r$ onde p_1, p_2, . . ., p_r são primos distintos.

Abaixo seguem alguns números livres de quadrados

$$1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,34,35,37,38,39,41$$

Vamos agora estabelecer um critério que decide pela racionalidade de $\log_b a$, quando $b > 1$ é um inteiro livre de quadrados. O resultado a seguir generaliza a questão da irracionalidade do logaritmo decimal $\log a$, quando a é um inteiro, tratado em Niven (1961).

[2]Seja n um inteiro positivo. Um número é dito *algébrico de grau* n quando é raiz de uma equação polnomial de grau n e não é raiz de nenhuma equação de grau menor do que n.

[3]O resultado mais geral, conhecido como Teorema de Lindemann, afirma que e^γ é transcendente quando γ é um algébrico não nulo (Marques (2013)).

Proposição 3.4. Seja a um inteiro positivo e $b > 1$ um inteiro livre de quadrados. O número $\log_b a$ é racional se, e somente se, $a = b^\alpha$, onde α é um inteiro não negativo.

Demonstração. Primeiramente devemos observar que $\log a \geq 0$ quando a é inteiro e r é um inteiro positivo. Além disso, $\log 1 = 0$. Seja $b = p_1 p_2 \ldots p_r$, onde p_1, p_2, . . ., p_r são primos distintos. Suponha agora que existem inteiros positivos m e n tais que $\log_b a = \frac{m}{n}$. Segue da Proposição 3.2 que a e b possuem os mesmos fatores primos em suas respectivas fatorações. Portanto, os fatores primos de a são, precisamente, p_1, p_2,. . ., p_r. Assim,

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}. \tag{3.1}$$

Desta forma,

$$a = b^{\frac{m}{n}} \text{ e } p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} = (p_1 p_2 \ldots p_r)^{\frac{m}{n}}.$$

Elevando a n ambos os membros da última igualdade temos:

$$p_1^{n\alpha_1} p_2^{n\alpha_2} \ldots p_r^{n\alpha_r} = p_1^m p_2^m \ldots p_r^m$$

Segue do Teorema da Fatoração única que $m = n\alpha_1 = n\alpha_2 = \cdots = n\alpha_r$. Como $n \neq 0$ segue que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r$. Logo, da equação (3.1) concluímos que

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_1} = (p_1 p_2 \ldots p_r)^{\alpha_1} = b^{\alpha_1}.$$

A recíproca é imediata. De fato, se $a = b^\alpha$ onde α é um inteiro positivo ou zero, então $\log_b a = \log_b b^\alpha = \alpha$. ■

Em particular, como o número $10 = 2 \cdot 5$ é livre de quadrados, segue da Proposição anterior que, para a inteiro positivo, $\log a$ é racional se, e somente se, $a = 10^n$ onde n é um inteiro não negativo. Daí segue que $\log a$ é inteiro ou irracional.

Utilizando este fato podemos rapidamente determinar se um número $\log a$ é irracional, dado o inteiro $a > 0$. Por exemplo, $\log 120$ é irracional pois está estritamente entre dois inteiros consecutivos. Com efeito, $2 = \log 10^2 = \log 100 < \log 120 < \log 1000 = \log 10^3 = 3$.

Será que a Proposição 3.4 continua válida para um inteiro $b > 1$ qualquer no lugar de um inteiro livre de quadrados? A resposta é não. Por exemplo, $\log_4 8 = \dfrac{3}{2}$.

3.3 Sobre a irracionalidade de logaritmos de números reais

A questão que se pretende agora responder diz respeito à racionalidade do número $\log_b a$, com $b > 1$ inteiro e $a > 0$ real não inteiro. Por exemplo, $\log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$ é racional e $\log_2 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\log_2 3$ é irracional pela Proposição 3.2. Assim, se a não é inteiro $\log_b a$ tanto pode ser racional como irracional.

A resposta fornecida acima não esgota o assunto proposto neste parágrafo. De fato, os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são ambos irracionais algébricos. Assim, pode-se formular a seguinte pergunta: o que se pode dizer sobre a racionalidade de logaritmos (de base inteira) de números irracionais transcendentes ou de números racionais (não-inteiros)? Começaremos respondendo a questão da irracionalidade do número $\log_b t$, onde $b > 1$ é um inteiro e $t > 0$ é transcendente. Para isso vamos utilizar o corolário a seguir.

Corolário 3.5. Seja t um número transcendente e n um inteiro positivo. Então a potência t^n é um número transcendente.

Demonstração. Vamos supor que t^n é um número algébrico. Então ele é raiz da equação polinomial $c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0$, com $m > 0$ inteiro e os coeficientes $c_m \neq 0$, c_{m-1} ,. . ., c_1 e c_0 números inteiros. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= c_m(t^n)^m + c_{m-1}(t^n)^{m-1} + \cdots + c_1 t^n + c_0 \\ &= c_m t^{nm} + c_{m-1}t^{n(m-1)} + \cdots + c_1 t^n + c_0. \end{aligned}$$

Portanto, t é solução da equação polinomial $c_m x^{nm} + c_{m-1}x^{n(m-1)} + \cdots + c_1 x^n + c_0 = 0$ com coeficientes inteiros. Ou seja, t é um número algébrico. ∎

Agora já estamos em condições de provar que o número $\log_b t$ é irracional, onde $b > 1$ é um número inteiro e $t > 0$ é transcendente. Devemos supor, por contraposição, que existem inteiros m e $n > 0$ tais que $\log_b t = \frac{m}{n}$. Daí, segue que $b^{\frac{m}{n}} = t$ e, portanto,

$$b^m = t^n. \tag{3.2}$$

Como t é transcendente, segue do Corolário 3.5 que t^n é transcendente. Por outro lado, o número b^m é algébrico, pois o conjunto dos números algébricos é fechado em relação a operação de multiplicação (Figueiredo (2002)). Logo, a igualdade (3.2) não pode ocorrer. Assim, somos obrigados a concluir pela irracionalidade do número $\log_b t$.

Nesta seção tratamos de logaritmos (de base inteira) de números algébricos irracionais e de números transcendentes. Já nas seções anteriores, tratamos de logaritmos de números inteiros. Agora nos resta investigar, quanto à racionalidade ou não, dos logaritmos (de base inteira) de números racionais não-inteiros. Para isso, sejam m e $n > 1$ inteiros positivos (primos entre si) e $b > 1$ um número inteiro. Vamos supor que o número $\log_b \frac{m}{n}$ seja racional. Portanto, existem inteiros p e $q > 0$, tais que

$$\log_b \frac{m}{n} = \frac{p}{q}. \tag{3.3}$$

Vamos dividir a nossa argumentação em dois casos. Suponha, primeiramente que $p > 0$. Decorre da igualdade (3.3) que:

$$b^{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n} \Rightarrow nb^{\frac{p}{q}} = m \Rightarrow n^q b^p = m^q.$$

Segue do Teorema Fundamental da Aritmética que todo fator primo de n é também fator primo de m. No entanto, isso não pode ocorrer pois os números m e $n > 1$ são, por hipótese, primos entre si. Portanto, o número $\log_b \frac{m}{n}$ é irracional.

Suponha agora que $p < 0$. Da igualdade (3.3) temos que:

$$b^{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n} \Rightarrow nb^{\frac{p}{q}} = m \Rightarrow n^q b^p = m^q \Rightarrow n^q = m^q b^{-p} \Rightarrow n^q = m^q b^{p_1}, \text{ onde } p_1 = -p > 0.$$

Do Teorema Fundamental da Aritmética e da última igualdade acima, concluímos que todo fator primo de m é também fator primo de n. No entanto, m e n são primos entre si. Assim, concluímos que $m = 1$ e que $n^q = b^{p_1}$. Em palavras, n^q é uma p_1-ésima potência de b. Portanto, esta é a única situação em que $\log_b \dfrac{m}{n}$ é um número racional.

Por exemplo, o número $\log_4 \dfrac{1}{8} = -\dfrac{3}{2}$ é racional. Note que $8^2 = 4^{-(-3)}$. Isso completa o nosso estudo quanto a irracionalidade de um logaritmo de base inteira de um número racional não inteiro.

3.4 Resultados adicionais

Vamos apresentar, nesta seção, alguns problemas de logaritmos na base 10 cuja solução recaem no Teorema Fundamental da Aritmética ou no Teorema de Gelfond-Schneider. Começaremos com a seguinte indagação: o número $\dfrac{\log 3}{\log 2}$ é racional ou irracional? O resultado a seguir responde a questão.

Proposição 3.6. Sejam a e $b \neq 1$ inteiros positivos tais que as suas decomposições (ou fatorações) em fatores primos apresentam pelo menos um primo que não é comum. Então o número $\dfrac{\log a}{\log b}$ é irracional e transcendente.

Demonstração. Basta notar que $\dfrac{\log a}{\log b} = \log_b a$. Logo, a irracionalidade e transcendência decorrem dos resultados da Seção 3.1 ■

Sejam a e b dois números reais positivos. Dizemos que $\log a$ e $\log b$ são *linearmente independentes* sobre $\mathbb{Q}$ quando a equação $r \log a + s \log b = 0$, com r e s racionais, implica em $r = s = 0$. Do contrário, dizemos que são *linearmente dependentes* sobre $\mathbb{Q}$.

Vamos denotar por $\mathcal{A}$ o conjunto dos números reais algébricos.

Proposição 3.7. Sejam a e b números reais algébricos positivos. A independência linear de $\log a$ e $\log b$ sobre $\mathbb{Q}$ implica na independência linear sobre $\mathcal{A}$.

Demonstração. Suponha que que a, b, α e β são números algébricos tais que $\alpha \log a + \beta \log b = 0$. Daí segue que $\dfrac{\log a}{\log b} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$. Como α e β são algébricos, então $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ também é um número algébrico

(Figueiredo (2002)). Como não é transcendente, segue da Proposição 3.6 que $\dfrac{\log a}{\log b} = r$, onde r é um número racional. Portanto,

$$\log a = r \log b \Rightarrow \log a - r \log b = 0.$$

Ou seja, $\log a$ e $\log b$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{Q}$. ■

Como $\mathbb{Q}$ é um subconjunto de $\mathcal{A}$ então a independência linear de $\log a$ e $\log b$ sobre $\mathcal{A}$ implica na indepencência sobre $\mathbb{Q}$. Ou seja, a recíproca da proposição anterior é verdadeira.

Observação. A Proposição 3.8 é equivalente ao Teorema de Gelfond-Schneider, provado no ano de 1934. Ela nos diz que se $a > 0$, $b > 0$, α e β são números reais algébricos, com $\log a$ e $\log b$ linearmente independente sobre $\mathbb{Q}$, então $\alpha \log a + \beta \log b \neq 0$. No ano de 1966 o matemático inglês Alan Baker provou que este resultado continua verdadeiro para uma quantidade arbitrária de logaritmos. Essa prova lhe rendeu a Medalha Fields em 1970 (Marques (2013)).

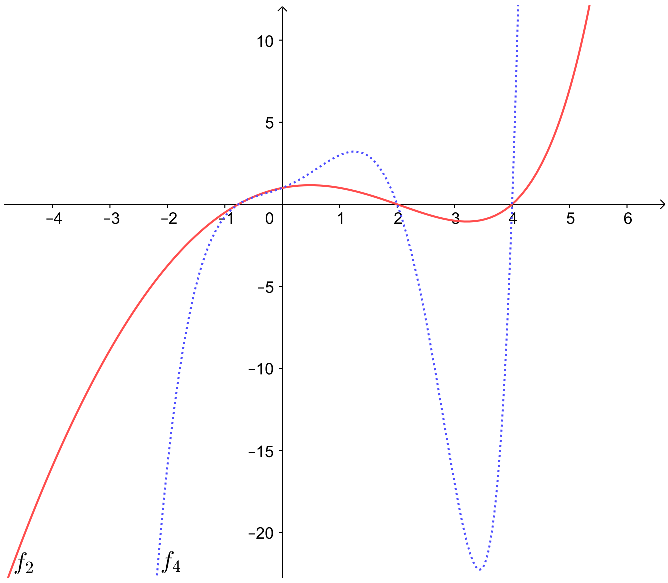
4 Sobre a irracionalidade das raízes reais da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$ onde $a \geq 2$ é inteiro e f é uma função polinomial

A existência e natureza (quanto a racionalidade) das raízes reais da equação $2^x = x^2$ foi tratada por E. L. Lima em (Lima (1984)). Esta equação, conforme vimos no Exemplo 2.16, possui três raízes reais: 2, 4 e uma raiz negativa e irracional. A equação $3^x = x^3$ é um caso particular da equação $p^x = x^p$, em que p é um primo ímpar, tratado em Bastos (2003). Tal equação possui duas raízes reais: p e uma raiz irracional entre 1 e p. Começaremos o presente capítulo mostrando que a equação $4^x = x^4$ possui exatamente as mesmas raízes da equação $2^x = x^2$. Em seguida, trataremos o caso geral da equação $a^x = x^a$, onde $a \geq 5$ é um inteiro não necessariamente primo. Este caso geral nos permitirá tratar da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$, onde $a \geq 2$ é um número inteiro e f é uma função polinomial com coeficientes inteiros. Utilizaremos conceitos de Cálculo Diferencial e de Aritmética, incluindo o Teorema Fundamental da Aritmética.

4.1 A equação $4^x = x^4$

Vamos mostrar que a equação $4^x = x^4$ possui exatamente as mesmas raízes da equação $2^x = x^2$, reduzindo o problema ao já tratado no Exemplo 2.15. Note que estudar as raízes das equações $2^x = x^2$ e $4^x = x^4$ é o mesmo que estudar as raízes das funções f_2 e f_4, definidas por $f_2(x) = 2^x - x^2$ e $f_4(x) = 4^x - x^4$, respectivamente. Os números 2 e 4 são raízes de ambas as funções. O que se passa com as raízes restantes? Recorrendo aos gráficos das funções f_2 e f_4, representados na figura (4.1), conjeturamos que ambas as funções possuem também o mesmo zero negativo. Vamos provar que, de fato, isso ocorre. Em outras palavras, vamos mostrar que o número

Figura 4.1: Os gráficos das funções f_2 e f_4 indicam que ambas possuem as mesmas raízes.



Fonte: Autor, 2018.

real $x_0 < 0$ é raiz de f_2 se, e somente se, é raiz de f_4. Com efeito,

$$\begin{aligned}
f_2(x_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{x_0} = x_0^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{x_0} = (-x_0)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x_0 \ln 2 = 2\ln(-x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(-x_0)}{x_0} = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}, \text{ pois } \ln 4 = 2\ln 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 4^{x_0} = x_0^4 \\
&\Leftrightarrow \quad f_4(x_0) = 0
\end{aligned}$$

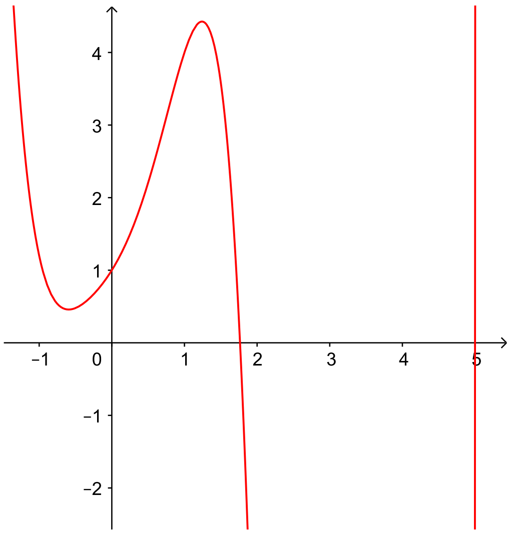
Ou seja, as funções f_2 e f_4 admitem a mesma raiz negativa.

4.2 As raízes reais da equação $a^x = x^a$, $a \geq 5$ inteiro

No Exemplo 2.15 e na seção anterior estudamos as raízes da equação $a^x = x^a$, nos casos em que $a = 2$ e $a = 4$. Vamos agora examinar as raízes reais da equação $a^x = x^a$ no caso em que $a \geq 5$ é um inteiro (primo ou não). Mudamos alguns dos argumentos utilizados no artigo Bastos (2003), de forma a dispensar a hipótese de a ser um inteiro primo. No final desta seção vamos analisar o caso em que $a = 3$.

Repare que $a^x = x^a \Leftrightarrow a^x - x^a = 0$. Desta forma, devemos estudar os zeros da função contínua $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_a(x) = a^x - x^a$. A figura (4.2) representa parte do gráfico da função f_5.

Figura 4.2: Gráfico da função f_5 definida por $f_5(x) = 5^x - x^5$.



Fonte: Autor, 2018.

Consideremos, inicialmente, o caso em que $a \geq 5$ é ímpar. Repare que f_a não possui raiz negativa pois, se $x < 0$, $f_a(x) = a^x - x^a > 0$, já que $x^a < 0$. Além disso, $f_a(0) = 1 > 0$ e f_a é contínua. Ou seja, as possíveis raízes de f_a são positivas. Recorrendo ao método de indução, prova-se a desigualdade $n^2 < 2^n$, para todo inteiro $n \geq 5$. Note que $f_a(1) = a - 1 \geq 5 - 1 = 4 > 0$ e $f_a(2) = a^2 - 2^a < 0$, pois $a \geq 5$. Como a função f_a é contínua em todos os pontos do domínio, segue do Teorema do Valor Intermediário aplicado ao intervalo $[1{,}2]$ que existe um real $c \in (1{,}2)$ tal que $f(c) = 0$. Logo, $a^c = c^a$. Como o número real $a \geq 5$ é também uma raiz de f_a, concluímos pela existência de pelo menos duas raízes positivas.

Nosso objetivo agora é provar que f_a não possui mais do que duas raízes reais. Para este propósito, repare que quando $x > 0$ então

$$a^x = x^a \Leftrightarrow x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln a}{a} = 0,$$

onde $\ln x = \log_e x$ é o logaritmo natural e $e = 2{,}718\ldots$ é o número de Euler. Portanto, estudar as raízes da equação $a^x = x^a$ quando x é positivo é equivalente a estudar os zeros da função $g_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g_a(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{\ln a}{a}$. Derivando a função g_a temos $g_a'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Observando que $1 - \ln x > 0$ quando $x < e$ e $1 - \ln x < 0$ quando $x > e$, constatamos que g é estritamente crescente no intervalo $(0,e]$ e estritamente decrescente no intervalo $[e, +\infty)$. Logo, as raízes $c \in (1,2) \subset (0,e)$ e $a \in (e, +\infty)$ são as únicas de g_a nos intervalos em questão. Portanto, f_a possui exatamente duas raízes positivas.

Sabemos que o inteiro a é uma das raízes. Vamos agora mostrar que se f_a tem uma raiz racional então esta raiz é exatamente o inteiro a. Daí decorre que a raiz $c \in (1,2)$ é um número irracional. Suponha que a fração $\dfrac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos primos entre si, seja uma raiz de f. Portanto,

$$f_a\left(\frac{m}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^a \Leftrightarrow a^m = \left(\frac{m}{n}\right)^{an} \Leftrightarrow a^m n^{an} = m^{an}.$$

Decorre da última igualdade e do Teorema Fundamental da Aritmética que todos os fatores primos de n também são fatores primos de m. Mas isso não pode ocorrer pois m e n são primos entre si. Assim, somos obrigados a concluir que n é igual a 1 e a fração $\dfrac{m}{n}$ é, na realidade, o número inteiro $\dfrac{m}{1} = m$. Logo a raiz $c \in (1,2)$ de f_a é um número irracional.

E no caso em que $a \geq 5$ é um inteiro par? Note que os argumentos utilizados anteriormente continuam válidos para as raízes positivas de $a^x = x^a$. Utilizamos a hipótese de a ser ímpar somente no momento de mostrar que $f_a(x) > 0$ quando $x < 0$. Devemos analisar, portanto, as raízes negativas da função f_a. Repare que $f_a(-1) = a^{-1} - (-1)^a = \dfrac{1-a}{a} < 0$ (pois $1 - a \leq -4 < 0$) e $f_a(0) = 1 > 0$. Aplicando o Teorema do Valor Intermediário no intervalo $[-1,0]$ segue que f_a admite uma raiz em $c \in (0,1)$. Esta raiz é única. Com efeito, como $f_a'(x) = a^x \ln a - ax^{a-1} > 0$, para todo $x \leq 0$ então f_a é estritamente crescente no intervalo $(-\infty,0]$ e, desta forma, admite no máximo uma raiz.

Nosso objetivo agora é mostrar que a raiz em questão é irracional. Para isso, suponha-se que existem inteiros positivos m e n primos entre si tais que a fração $-\dfrac{m}{n} \in (-1{,}0)$ seja uma raiz de f. Assim,

$$f_a\left(-\frac{m}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow a^{-\frac{m}{n}} = \left(-\frac{m}{n}\right)^a \Leftrightarrow a^{-m} = \left(\frac{m}{n}\right)^{an} \Leftrightarrow a^{-m}n^{an} = m^{an} \Leftrightarrow n^{an} = a^m m^{an}.$$

Como a é par, da última igualdade da expressão acima, concluímos que n é também par. Assim, o número m não pode ser par já que m e n são primos entre si. Suponha então que m é ímpar. Como a e n são pares, então $a = 2^k b$, onde k e b são inteiros positivos com b ímpar e $n = 2^q c$, onde q e c são inteiros positivos com c ímpar. Substituindo temos:

$$n^{an} = a^m m^{an} \Leftrightarrow (2^q c)^{2^k bn} = (2^k b)^m m^{an} \Leftrightarrow 2^{q2^k bn} c^{2^k bn} = 2^{km} b^m m^{an}.$$

Como b, c e m são números ímpares, segue que $c^{2^k bn}$ e $b^m m^{an}$ são ímpares. Com isso, utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética concluímos que $q2^k bn = km$. Por outro lado, como $m < n$ (pois $0 < \dfrac{m}{n} < 1$) obtemos a seguinte desigualdade:

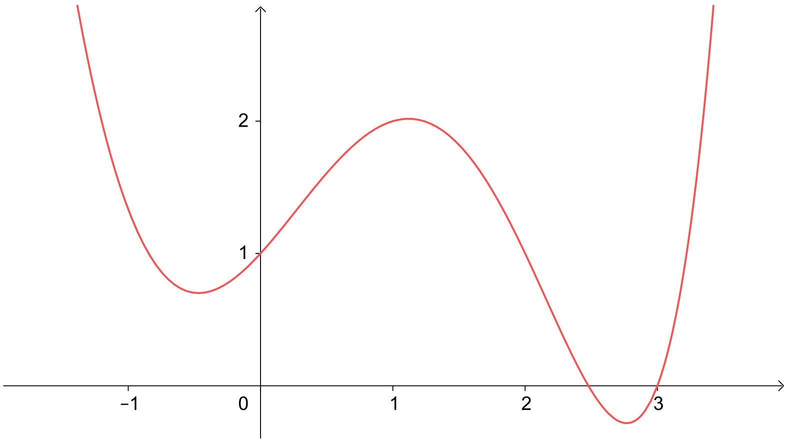
$$q2^k bn = km < kn \Rightarrow q2^k b < k,$$

o que é um absurdo, uma vez que $k \leq 2^k$ qualquer que seja o inteiro positivo k e $2^k < q2^k b$. Com isso, concluímos que a raiz $c \in (-1{,}0)$ é irracional.

E quando $a = 3$? Uma raiz é 3. O gráfico da função f_3, representado na figura 4.3, nos leva a conjecturar que f_3 possui exatamente duas raízes reais. Para mostrar a existência da outra raiz, basta notar que $f_3(2) = 3^2 - 2^3 = 1 > 0$ e $f_3\left(\dfrac{5}{2}\right) = \sqrt{243} - \dfrac{125}{8} < 0$. Logo, aplicando o Teorema do Valor Intermediário ao intervalo $\left[2,\dfrac{5}{2}\right]$ segue que existe um $\beta \in \left(2,\dfrac{5}{2}\right)$ tal que $f_3(\beta) = 0$. Procedendo de modo análogo ao feito anteriormente, concluímos que $x^3 = 3^x$ não possui outras raízes além de β e 3. (O valor da raiz irracional β, cuja estimativa pode ser obtida pelo Método de Newton, é aproximadamente $2{,}47805$).

Vamos encerrar esta seção observando que, para cada inteiro $a \geq 2$, toda raiz irracional da equação $a^x = x^a$ é um número transcendente. Convém lembramos de alguns fatos a respeito dos

Figura 4.3: Gráfico da função f_3 definida por $f_3(x) = 3^x - x^3$.



Fonte: Autor, 2018.

números reais algébricos e transcendentes. Conforme mencionado na Seção 3.1, o conjunto dos números algébricos é fechado em relação a operação de multiplicação. Isto é, se α e β são dois números algébricos então o produto $\alpha\beta$ é também um número algébrico (Figueiredo (2002)). Em particular, se α é algébrico e k é um inteiro positivo, então α^k é também algébrico.

Seja x_0 uma raiz irracional da equação $a^x = x^a$. Vamos supor que x_0 é um irracional algébrico. Então, por um lado, ${x_0}^a$ também será algébrico pois, conforme mencionado anteriormente, o produto de números algébricos é também um número algébrico. Por outro lado - decorre do Teorema de Gelfond-Schneider, enunciado na Proposição 3.1 - que o número a^{x_0} é transcendente pois a é um número algébrico e x_0 é irracional. Resulta que x_0 não é raiz da equação da equação $a^x = x^a$, o que é absurdo. Somos levados a concluir pela transcendência do número x_0. Isso nos permite constatar, em particular, que as raízes irracionais não são construtíveis com régua e compasso, já que todo número construtível é algébrico de grau igual a uma potência de 2 (Herstein (2006)).

4.3 Raízes reais da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$, com $a \geq 2$ inteiro e f função polinomial

Vamos examinar a racionalidade das raízes reais da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$, onde $a \geq 2$ é inteiro e f é uma função polinomial com coeficientes inteiros.

Seja $h : A \to B$ uma função, onde A e B são dois conjuntos não-vazios. A *imagem inversa* por h de um subconjunto $Y \subset B$ é o conjunto $h^{-1}(Y) = \{x \in A : h(x) \in Y\}$. Dado um elemento $y \in B$, vamos denotar o conjunto $h^{-1}(\{y\})$ simplesmente por $h^{-1}(y)$. Além disso, $h^{-1}(y) = \{x \in A : h(x) = y\}$.

Vamos supor inicialmente que $a \geq 5$ é um inteiro ímpar. Segue da seção anterior que existe um irracional $\beta \in (1,2)$ tal que $a^\beta = \beta^a$. Assim, todos os elementos do conjunto $f^{-1}(\beta)$, caso este seja não-vazio, são raízes da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$. Seja $x_\beta \in f^{-1}(\beta)$. Assim, $f(x_\beta) = \beta$. Como β é irracional então x_β é também irracional. (Do contrário, se x_β fosse racional então o número $f(x_\beta) = \beta$ também seria racional, pois f é uma função polinomial com coeficientes inteiros). Isso completa a análise das raízes $x_\beta \in f^{-1}(\beta)$, quanto a sua irracionalidade.

Seja $x_a \in f^{-1}(a)$. Isto é, x_a é tal que $f(x_a) = a$. Suponha que f é definida por

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

onde $n \geq 1$ é um número inteiro e os coeficientes b_n, b_{n-1}, ..., b_1 e b_0 são números inteiros. Note que $f(x_a) = b_n x_a^n + b_{n-1}x_a^{n-1} + \cdots + b_1 x_a + b_0 = a$. Daí segue que

$$b_n x_a^n + b_{n-1}x_a^{n-1} + \cdots + b_1 x_a + b_0 - a = 0.$$

Como estamos estudando a racionalidade das raízes da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$, vamos supor que $x_a = \dfrac{p}{q}$, onde p e $q \neq 0$ são números inteiros primos entre si. Decorre do Teorema 2.17 que p divide $b_0 - a$ e q divide b_n. Assim, os candidatos a raízes racionais da equação proposta ocorrem num número finito de vezes. Ou seja, podem ser testadas individualmente todos os candidatos a raízes racionais da equação proposta. Isso encerra o estudo da irracionalidade das raízes da equação proposta. O raciocínio, no caso de um inteiro qualquer $a \geq 2$ (par ou ímpar) é análogo. Os Exemplos a seguir tratam de casos particulares da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$.

Exemplo 4.1. A equação $3^{x^3+x^2-2x+2} = (x^3 + x^2 - 2x + 2)^3$ possui raízes racionais? Em caso afirmativo, quais são elas?

Considere-se a função polinomial f com coeficientes inteiros definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2$. Segue da observação no final da Seção 4.1 que existe um irracional $\beta \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$ tal que $3^\beta = \beta^3$. Seja $x_\beta \in f^{-1}(\beta)$. Assim,

$$f(x_\beta) = \beta \Leftrightarrow x_\beta^3 + x_\beta^2 - 2x_\beta + 2 = \beta. \tag{4.1}$$

Da última igualdade, concluímos que todo $x_\beta \in f^{-1}(\beta)$ é irracional. (De fato, se x_β fosse racional, então $f(x_\beta) = \beta$ seria racional).

Tome agora $x_3 \in f^{-1}(3)$. Assim:

$$f(x_3) = 3 \Leftrightarrow x_3^3 + x_3^2 - 2x_3 + 2 = 3 \Leftrightarrow x_3^3 + x_3^2 - 2x_3 - 1 = 0. \tag{4.2}$$

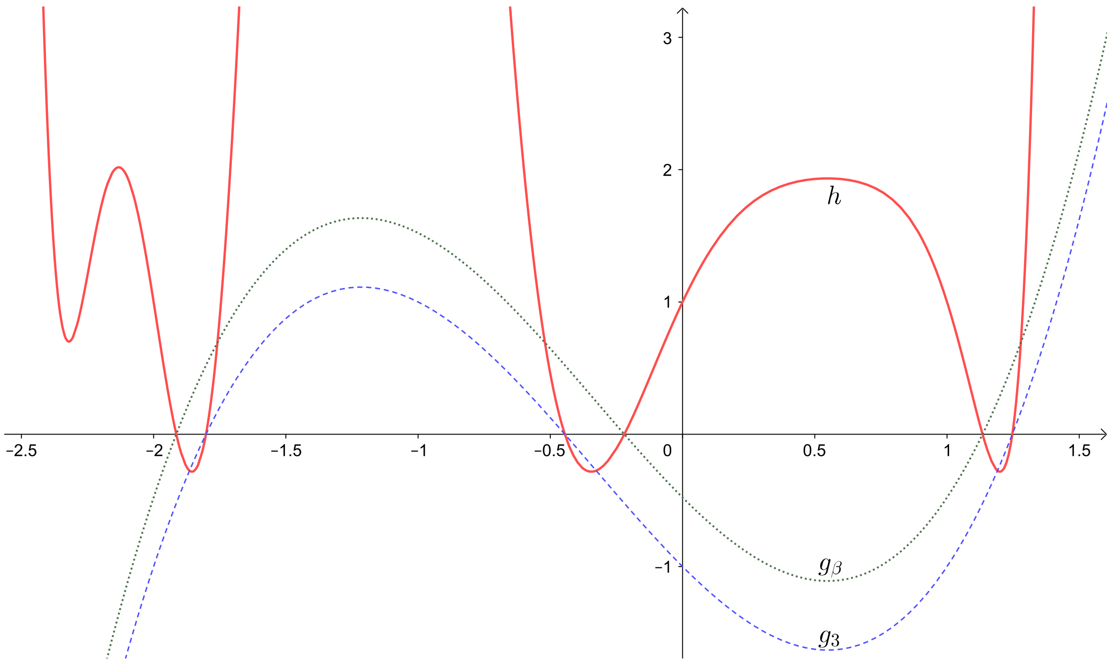
Segue da última igualdade desta equivalência e do Exemplo 2.22 que as possíveis raízes x_3 são números irracionais. Portanto, a equação $3^{x^3+x^2-2x+2} = (x^3+x^2-2x+2)^3$ não possui raiz racional. ■

Estudar as raízes da equação $3^{x^3+x^2-2x+2} = (x^3 + x^2 - 2x + 2)^3$ é o mesmo que estudar os zeros da função h definida por $h(x) = 3^{x^3+x^2-2x+2} - (x^3 + x^2 - 2x + 2)^3$. A parte do gráfico de h representado em vermelho na figura (4.4) mostra que h possui 6 raízes reais. Três delas são as raízes x_3 da função g_3 definida por $g_3(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$. As outras três são as raízes da função g_β definida por $g_\beta = x^3 + x^2 - 2x + 2 - \beta$, com $\beta \approx 2{,}47805$.

Exemplo 4.2. A equação $2^{x^3+x^2-2x+2} = (x^3 + x^2 - 2x + 2)^2$ possui raízes racionais? Em caso afirmativo, quais são elas?

Vamos proceder de forma análoga ao exemplo anterior. No entanto, vamos usar equação $2^x = x^2$ como base. Esta última equação possui exatamente três raízes reais: 2, 4 e uma raiz irracional $\beta \in (-1{,}0)$. Seja f uma função polinomial com coeficientes inteiros definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2$. Sabemos que existe um irracional $\beta \in (-1{,}0)$ tal que $2^\beta = \beta^2$.

Figura 4.4: Gráfico das funções h, g_3 e g_β.



Fonte: Autor, 2018.

Seja $x_\beta \in f^{-1}(\beta)$. Logo,

$$f(x_\beta) = \beta \Leftrightarrow x_\beta^3 + x_\beta^2 - 2x_\beta + 2 = \beta. \tag{4.3}$$

Segue da última igualdade que o número x_β é irracional.

Seja $x_2 \in f^{-1}(2)$. Assim:

$$f(x_2) = 2 \Leftrightarrow x_2^3 + x_2^2 - 2x_2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x_2^3 + x_2^2 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_2 + 2)x_2(x_2 - 1) = 0. \tag{4.4}$$

Esta última equação possui, evidentemente, três soluções: -2, 0 e 1. Obtemos aqui três números racionais.

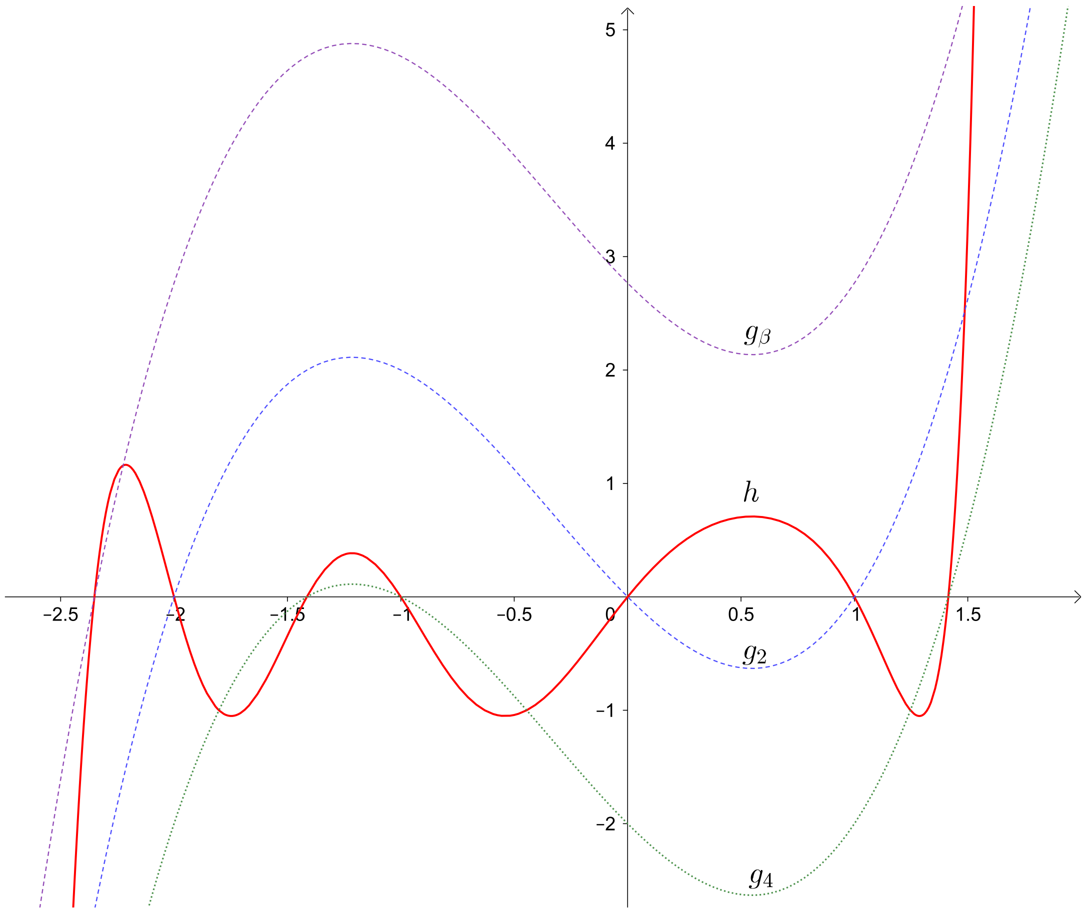
Por fim, seja $x_4 \in f^{-1}(4)$. Assim:

$$f(x_4) = 4 \Leftrightarrow x_4^3 + x_4^2 - 2x_4 + 2 = 4 \Leftrightarrow x_4^3 + x_4^2 - 2x_4 - 2 = 0. \tag{4.5}$$

Segue do Corolário 2.20 que se a equação acima tiver uma raiz racional ela será um inteiro divisor de -2. Logo, os únicos candidatos a raízes racionais são os inteiros -1, 1, -2 e 2. Ao testarmos estes candidatos, concluímos que somente o número -1 é raiz da equação acima. Logo a equação admite ainda a raiz racional -1. Daí concluímos que a equação em questão admite 4 raízes racionais: -2, -1, 0 e 1. ■

Os números representados por x_β, x_2 e x_4 são raízes das equações (4.3), (4.4) e (4.5), respectivamente. Logo, tais números são os zeros das funções polinomiais g_β, g_2 e g_4 definidas por $g_\beta(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2 - \beta$, $g_2(x) = x^3 + x^2 - 2x$ e $g_4(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$, respectivamente.

Figura 4.5: Gráfico das funções h, g_2, g_4 e g_β.



Fonte: Autor, 2018.

Estudar as raízes da equação do Exemplo 4.2 é o mesmo que estudar os zeros da função h definida por $h(x) = 2^{x^3+x^2-2x+2} - (x^3 + x^2 - 2x + 2)^2$. O gráfico da função h, traçado com o auxílio do software GeoGebra e representado por uma linha contínua (veja a Figura 4.5), nos mostra que h possui 7 raízes reais. Note pela representação do gráfico que a equação (4.3) possui somente uma raiz real que, conforme vimos acima, é um número irracional. Tal raiz encontra-se entre os números $-2{,}5$ e $2{,}0$. Já a linha tracejada representa o gráfico da função g_2. Esta função, como vimos, possui três raízes racionais (no caso inteiras): -2, 0 e 1. Por fim, o gráfico da função g_4 está representada pela linha pontilhada. A função g_4 possui três raízes reais, tendo somente o -1 como raiz racional.

5 A questão da comensurabilidade entre o lado e as diagonais de um polígono regular

Na Seção 2.1, vimos que tanto o lado e a diagonal do quadrado como o lado e a diagonal do pentágono regular são segmentos incomensuráveis. Assim, é natural investigarmos a questão da comensurabilidade entre o lado e a diagonal de polígonos regulares com mais de 5 lados. Devemos notar primeiramente que, ao contrário do quadrado e do pentágono regular, polígonos regulares com 6 ou mais lados possuem diagonais não congruentes. Desta maneira, devemos dizer *diagonal mais curta*, *segunda diagonal mais curta* e assim sucessivamente. O Portal Atractor Atractor (2018)apresenta o estudo da comensurabilidade entre o lado e diagonal mais curta e o lado e a segunda diagonal mais curta de qualquer polígono regular.

No presente capítulo, vamos examinar a questão da comensurabilidade entre o lado e uma diagonal de um polígono regular qualquer. De forma mais geral (ao contrário da referência Atractor (2018)que tratou somente das duas diagonais mais curtas) vamos estudar até à sexta diagonal mais curta e indicar como se analisa o problema geral. Para isso, lançaremos mão de alguns recursos computacionais disponíveis no Portal *WolframAlpha* (Wolfram Alpha (2018)). Por fim, mostraremos que o lado e qualquer diagonal de qualquer polígono com um número primo de lados são sempre segmentos incomensuráveis. Iremos recorrer a alguns conhecimentos de Aritmética, Trigonometria, Polinômios e Números Complexos.

5.1 Razão entre uma diagonal e o lado de um polígono regular

A primeira questão com que nos deparamos consiste em saber para que valores de k faz sentido falar da k-ésima diagonal mais curta de um polígono regular de n lados, onde $n \geq 4$ e k são números inteiros não negativos. (Em alguns momentos será útil interpretarmos o lado do polígono regular como a 0-ésima diagonal mais curta). Após respondermos esta interrogação, iremos fornecer uma fórmula para a razão entre os comprimentos da k-ésima diagonal mais curta e do lado de um polígono regular de n lados e expressar tal fórmula por meio de um polinômio em $2\cos\dfrac{\pi}{n}$.

Dado um polígono regular de n lados de vértices V_1, V_2,. . .,V_n, se n for par para cada $i = 1, \ldots, \dfrac{n}{2}$ a reta $V_iV_{i+\frac{n}{2}}$ é um eixo de simetria do polígono. Assim, das $n-3$ diagonais que passam por V_i, temos uma (e apenas uma) diagonal maior, que é a $V_iV_{i+\frac{n}{2}}$, e as restantes $n-4$ diagonais são iguais duas a duas. (Veja o polígono regular de doze lados na Figura (5.1)). Há então $\dfrac{n-4}{2}+1$ diagonais diferentes. Por isso, só faz sentido falar da k-ésima diagonal mais curta quando $k \leq \dfrac{n-4}{2}+1$. Ou seja, quando

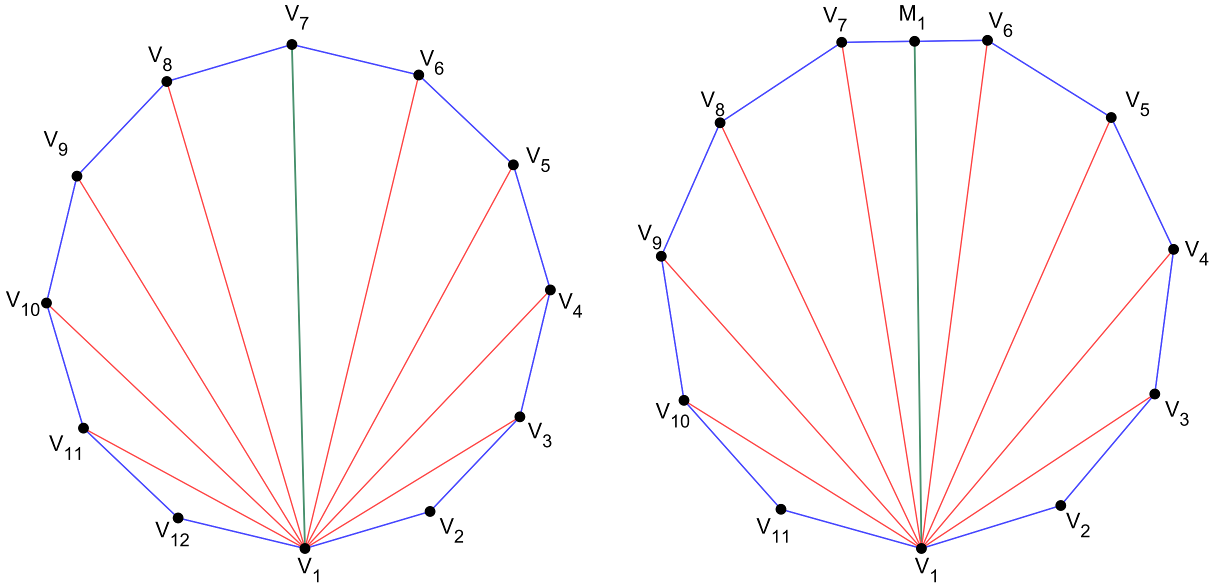
$$n \geq 2k+2. \tag{5.1}$$

Por outro lado, se n for ímpar, o eixo de simetria é a reta V_iM_i, onde M_i é o ponto médio do lado oposto a V_i (mediatriz desse lado e de todas as diagonais paralelas a esse lado) então as $n-3$ diagonais que passam por V_i são iguais duas a duas. (Veja o polígono regular de onze lados na Figura (5.1)). Neste caso existem $\dfrac{n-3}{2}$ diagonais diferentes, de forma que só faz sentido falar da k-ésima diagonal mais curta quando $k \leq \dfrac{n-3}{2}$, ou seja, quando

$$n \geq 2k+3. \tag{5.2}$$

De (5.1) e (5.2) resulta que só faz sentido falarmos da k-ésima diagonal mais curta quando $n \geq 2k+2$. Assim, no que segue, tomaremos os inteiros k e n que satisfaçam a desigualdade (5.1). Por exemplo, para tratarmos da quinta diagonal mais curta, veja a figura (5.1), o polígono deve ter ao menos $2 \cdot 10 + 2 = 12$ lados.

Figura 5.1: Só faz sentido falarmos da 5ª diagonal mais curta para polígonos com ao menos doze lados.



Fonte: Autor, 2018.

Dado um polígono regular de n lados, vamos denotar por $\lambda_{k,n}$ a razão entre a medida do comprimento da k-ésima diagonal mais curta e a medida do comprimento do seu lado, onde $n \geq 2k+2$. Esta razão, conforme visto em Atractor (2018), é dada por:

$$\lambda_{k,n} = \frac{\operatorname{sen} \frac{(k+1)\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}. \tag{5.3}$$

Repare que estudar a questão da comensurabilidade entre a k-ésima diagonal mais curta e o lado de um polígono regular de n lados se reduz a decidir pela racionalidade ou irracionalidade do número $\lambda_{k,n}$. No caso particular da diagonal mais curta temos:

$$\lambda_{1,n} = \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} = 2\cos\frac{\pi}{n}. \tag{5.4}$$

Note que $\lambda_{1,4} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, $\lambda_{1,5} = 2\cos\frac{\pi}{5} = \phi$ e $\lambda_{1,6} = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ que corresponde a razão entre a medida da diagonal mais curta e o lado de um quadrado, pentágono regular e hexágono regular, respectivamente. Nos artigos disponíveis em Atractor (2018), consta a prova de que os números $\lambda_{1,n}$, $n \geq 4$ e $\lambda_{2,n}$, $n \geq 7$ são irracionais. (O número $\lambda_{2,6} = 2$ é racional). Em palavras, a diagonal mais curta e o lado de qualquer polígono regular são sempre incomensuráveis e a segunda diagonal mais curta e o lado é comensurável somente no caso do hexágono.

Vamos definir, para qualquer x real, o *piso* ou a *parte inteira* $\lfloor x \rfloor$ como o único inteiro r tal que $r \leq x < r+1$. Ou seja, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor do que ou igual a x.

A proposição a seguir mostra que a razão $\lambda_{k,n}$, com $k \geq 0$ e $n \geq 4$ inteiros, pode ser expressa em termos de um polinômio em $2\cos\dfrac{\pi}{n}$. Este resultado nos dará a ferramenta necessária para averiguar a irracionalidade de $\lambda_{k,n}$ para $k \geq 3$.

Proposição 5.1. Seja k um inteiro não-negativo e $n \geq 4$ um inteiro. Então

$$\lambda_{k,n} = \frac{\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-j}{j} \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^{k-2j}. \tag{5.5}$$

Demonstração. A prova será feita por indução em k. Se $k = 0$ então

$$\lambda_{0,n} = \frac{\operatorname{sen}\frac{(0+1)\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} = 1 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{-j}{j} \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^{-2j}.$$

(Vamos interpretar o caso em que $k = 0$ como o lado o polígono). Se $k = 1$ então

$$\lambda_{1,n} = \frac{\operatorname{sen}\frac{(1+1)\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} = 2\cos\frac{\pi}{n} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{1-j}{j} \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^{1-2j}.$$

Tome agora $k \geq 2$ e vamos admitir que a equação (5.5) é válida para qualquer inteiro menor do que k. Note que

$$\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{n} = \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{k\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.$$

Dividindo a igualdade anterior por $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}$, obtemos:

$$\lambda_{k,n} = \frac{\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{k\pi}{n} = \lambda_{k-1,n}\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{k\pi}{n}. \tag{5.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{n} &= \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\\
&= \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{k\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{k\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right)+2\cos\frac{k\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\\
&= \operatorname{sen}\frac{(k-1)\pi}{n}+2\cos\frac{k\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Da expressão anterior, concluímos que

$$\lambda_{k,n}=\frac{\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{(k-1)\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}+2\cos\frac{k\pi}{n}=\lambda_{k-2,n}+2\cos\frac{k\pi}{n}. \tag{5.7}$$

Por fim, utilizando as equações (5.6) e (5.7), respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
\lambda_{k,n} &= 2\lambda_{k,n}-\lambda_{k,n}\\
&= 2\left[\lambda_{k-1,n}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n}\right]-\left[\lambda_{k-2,n}+2\cos\frac{k\pi}{n}\right]\\
&= 2\lambda_{k-1,n}\cos\frac{\pi}{n}-\lambda_{k-2,n}
\end{aligned}$$

A partir desse momento, com o propósito de simplificar a notação, vamos escrever x no lugar de $2\cos\frac{\pi}{n}$. Assim,

$$\lambda_{k,n}=x\lambda_{k-1,n}-\lambda_{k-2,n}.$$

Vamos supor que k é um inteiro ímpar. Portanto, $k\geq 3$. Neste caso, $\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor=\frac{k-1}{2}$ e $\left\lfloor\frac{k-2}{2}\right\rfloor=\frac{k-3}{2}$. Desta forma, usando a hipótese de indução, temos:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{k,n} &= x\lambda_{k-1,n} - \lambda_{k-2,n} \\
&= x\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-1-j}{j} x^{k-1-2j} - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-2-j}{j} x^{k-2-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \binom{k-1-j}{j} x^{k-2j} - \sum_{j=0}^{\frac{k-3}{2}} (-1)^j \binom{k-2-j}{j} x^{k-2-2j} \\
&= x^k + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \binom{k-1-j}{j} x^{k-2j} - \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{j-1} \binom{k-1-j}{j-1} x^{k-2j} \\
&= x^k + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \binom{k-1-j}{j} x^{k-2j} + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{j} \binom{k-1-j}{j-1} x^{k-2j} \\
&= x^k + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \left[\binom{k-1-j}{j} + \binom{k-1-j}{j-1} \right] x^{k-2j} \\
&= x^k + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \binom{k-j}{j} x^{k-2j}, \text{ pela Relação de Stifel.} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-j}{j} x^{k-2j}, \text{ pois } \frac{k-1}{2} = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \text{ quando } k \text{ é ímpar.}
\end{aligned}
$$

A demonstração no caso em que k é par é análoga. ■

Um dos artigos disponíveis em Atractor (2018)possui uma prova cujo conteúdo nos diz que $\lambda_{k,n}$ se expressa em termos de uma função polinomial de grau k em $2\cos\frac{\pi}{n}$ e produz uma fórmula recursiva para determinar o polinômio, qualquer que seja o inteiro $k \geq 2$. A Proposição 5.1 acima nos fornece uma fórmula explícita para $\lambda_{k,n}$ em termos de $2\cos\frac{\pi}{n}$. A principal vantagem desta fórmula explícita é que, ao contrário de uma fórmula recursiva, podemos encontrar a razão $\lambda_{k,n}$, qualquer que seja o k, sem que seja necessário calcular as razões anteriores. Por exemplo, podemos obter diretamente o polinômio $\lambda_{8,n}$, sem que seja necessário obter razões anteriores. Com efeito, substituindo k por 8 na relação (5.5) obtemos:

$$\lambda_{8,n} = \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{8-j}{j} x^{8-2j} = x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10x^2 + 1, \text{ onde } x = 2\cos\frac{\pi}{n}$$

A seguir exibimos os polinômios até grau 6, inclusive.

$$
\begin{aligned}
\lambda_{0,n} &= 1 \\
\lambda_{1,n} &= x \\
\lambda_{2,n} &= x^2 - 1 \\
\lambda_{3,n} &= x^3 - 2x \\
\lambda_{4,n} &= x^4 - 3x^2 + 1 \\
\lambda_{5,n} &= x^5 - 4x^3 + 3x \\
\lambda_{6,n} &= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1, \text{ onde } x = 2\cos\frac{\pi}{n}
\end{aligned}
$$

Os polinômios acima nos permitem investigar a questão da comensurabilidade entre a medida da k-ésima diagonal mais curta e a medida do lado de de um polígono regular, qualquer que seja o inteiro positivo k. A seguir, vamos examinar a questão da comensurabilidade até a sexta diagonal mais curta.

5.2 Terceira diagonal mais curta

Nossos esforços agora serão no sentido de mostrar que o número $\lambda_{3,n}$ é irracional, qualquer que seja o inteiro positivo $n \geq 8$. Ou seja, vamos mostrar que a terceira diagonal mais curta e o lado de qualquer polígono regular são dois segmentos incomensuráveis.

Para isso, são necessários alguns pré-requisitos. Começaremos designando por $\varphi(n)$, onde n é um inteiro positivo, o número de elementos do conjunto $\{1,2,3,\ldots,n\}$ que são primos com n. A função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ assim definida é chamada de *função fi de Euler*. Desta definição segue que $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(p) = p - 1$, quando p é um número primo. Pode se mostrar que se m e n são inteiros positivos primos entre si então $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Além disso, se p é primo e r é um inteiro positivo, então $\varphi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$ (Hefez (2006)).

Usando estes resultados, é possível calcular $\varphi(n)$, qualquer que seja o inteiro positivo n. Os cálculos, embora não sejam complicados, podem tornar-se fastidiosos. Assim, podemos usar os recursos computacionais disponíveis no Portal *WolframAlpha*, que nos permitem calcular o valor de $\varphi(n)$ para um dado inteiro positivo n e também resolver inequações do tipo $\varphi(x) \leq m$, em x, onde m é um inteiro positivo fixo. Com isso, poderemos focar diretamente nos conceitos e resultados mais relevantes, evitando contas rotineiras.

A proposição a seguir relaciona a função fi de Euler com o número $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, onde n é um inteiro positivo. A demonstração encontra-se em Atractor (2018).

Proposição 5.2. Seja n um inteiro positivo. O grau mínimo de um polinômio com coeficientes racionais, que tem $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ como raiz, é $\varphi(n)$.

Com as proposições 5.1 e 5.2 estamos em condições de examinar a questão da irracionalidade do número $\lambda_{3,n}$, onde $n \geq 8$, conforme o resultado a seguir.

Proposição 5.3. O lado e a terceira diagonal mais curta de qualquer polígono regular de n lados, onde $n \geq 8$, são sempre incomensuráveis. Em outras palavras, se $n \geq 8$ então o número $\lambda_{3,n}$ é irracional.

Para provarmos a proposição anterior, vamos utilizar o lema a seguir:

Lema 5.4. O número $\cos\dfrac{\pi}{9}$ é irracional e também um zero da função polinomial g definida por $g(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

Demonstração. Utilizaremos a identidade trigonométrica $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Em particular, quando $\alpha = \dfrac{\pi}{9}^{\text{o}}$ temos $\cos\dfrac{\pi}{3} = 4\cos^3\dfrac{\pi}{9} - 3\cos\dfrac{\pi}{9}$. Como $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, segue que

$$\frac{1}{2} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9} \Leftrightarrow 8\cos^3\frac{\pi}{9} - 6\cos\frac{\pi}{9} - 1 = 0. \tag{5.8}$$

Da expressão anterior concluímos que $\cos\dfrac{\pi}{9}$ é uma raiz da função polinomial g definida por $g(x) = 8x^3 - 6x - 1$. Porém, vimos no Exemplo 2.19 que g não possui raiz racional. Logo, $\cos\dfrac{\pi}{9}$ é irracional. ■

Demonstração da Proposição 5.3. Recordemos que o estudo da terceira diagonal mais curta só faz sentido quando o polígono regular tem, ao menos, 8 lados. Por isso a condição $n \geq 8$. Note que

$$\lambda_{3,n} = \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^3 - 2\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right). \tag{5.9}$$

Como $2\cos\frac{\pi}{n} = e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{-i\frac{\pi}{n}} = t + t^{-1}$, onde $t = e^{i\frac{\pi}{n}}$, segue da expressão (5.9) que:

$$\lambda_{3,n} = (t+t^{-1})^3 - 2(t+t^{-1}) = t^3 + 3t + 3t^{-1} + t^{-3} - 2t - 2t^{-1} = t^3 + t + t^{-1} + t^{-3}.$$

Vamos supor que $\lambda_{3,n} = r$, onde r é um número racional. Assim,

$$t^3 + t + t^{-1} + t^{-3} = r \Leftrightarrow t^6 + t^4 + t^2 + 1 = rt^3 \Leftrightarrow t^6 + t^4 - rt^3 + t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0,$$

onde f é a função polinomial definida por $f(x) = x^6 + x^4 - rx^3 + x^2 + 1$. Portanto, $t = e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{2n}}$ é raiz de uma função polinomial de grau 6 com coeficientes racionais. Segue da Proposição 5.2 que $\varphi(2n) \leq 6$. Com o auxílio do software disponível no Portal *WolframAlpha* concluímos que $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$. Como $n \geq 8$ então o único caso em que $\lambda_{3,n}$ poderá ser racional é quando $n = 9$. Em outras palavras, $\lambda_{3,n}$ racional implica em $n = 9$. No entanto, nas próximas linhas vamos mostrar que $\lambda_{3,9}$ é também irracional. Daí iremos concluir que $\lambda_{3,n}$ é irracional qualquer que seja o inteiro $n \geq 8$. Da expressão (5.9) segue que:

$$\begin{aligned}
\lambda_{3,9} &= (2\cos\frac{\pi}{9})^3 - 2(2\cos\frac{\pi}{9}) \\
&= 8\cos^3\frac{\pi}{9} - 4\cos\frac{\pi}{9} \\
&= (8\cos^3\frac{\pi}{9} - 6\cos\frac{\pi}{9} - 1) + 2\cos\frac{\pi}{9} + 1 \\
&= 2\cos\frac{\pi}{9} + 1, \text{ em virtude da equação (5.8).}
\end{aligned}$$

Como $\cos\frac{\pi}{9}$ é irracional então $2\cos\frac{\pi}{9} + 1$ também é irracional. Ou seja, $\lambda_{3,9}$ é irracional. Isso termina o nosso estudo da terceira diagonal. ■

5.3 Quarta diagonal mais curta

A análise deste caso é análoga ao caso da terceira diagonal mais curta. Devemos lembrar que só faz sentido falarmos da quarta diagonal mais curta para polígonos com pelo menos 10 lados. Note que $2\cos\dfrac{2\pi}{n} = e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{-i\frac{2\pi}{n}} = t + t^{-1}$, onde $t = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Observe agora que:

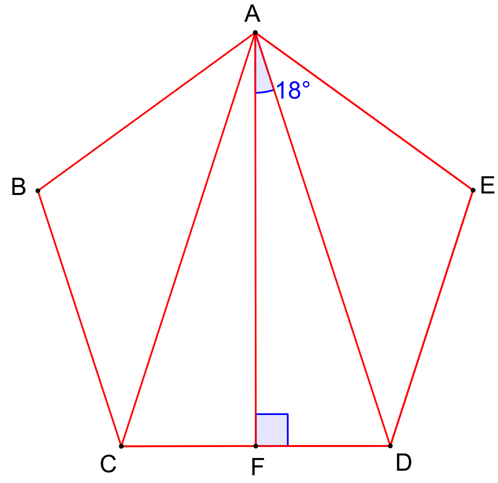
$$\begin{aligned}
\lambda_{4,n} &= \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^4 - 3\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + 1 \\
&= \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 \left[\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 - 3\right] + 1 \\
&= 4\cos^2\frac{\pi}{n}\left(4\cos^2\frac{\pi}{n} - 3\right) + 1 \\
&= \left(2\cos\frac{2\pi}{n} + 2\right)\left(2\cos\frac{2\pi}{n} - 1\right) + 1, \text{ pois } 4\cos^2\theta = 2\cos 2\theta + 2 \\
&= (t + t^{-1} + 2)(t + t^{-1} - 1) + 1 \\
&= t^2 + t + 1 + t^{-1} + t^{-2}.
\end{aligned}$$

Suponha agora que $\lambda_{4,n} = r$, onde r é um número racional. Segue da relação anterior que

$$t^2 + t + 1 + t^{-1} + t^{-2} = r \Leftrightarrow t^4 + t^3 + (1-r)t^2 + t + 1 = 0.$$

Portando, $t = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ é raiz da função polinomial f de grau 4 com coeficientes racionais definida por $f(x) = x^4 + x^3 + (1-r)x^2 + x + 1$. Segue da Proposição 5.2 que $\varphi(n) \leq 4$. Desta inequação podemos concluir que $n \in \{1,2,3,4,5,6,8,10,12\}$. Como $n \geq 10$ temos dois casos a analisar: $n = 10$ e $n = 12$. Para completar essa demonstração, vamos mostrar que $\lambda_{4,10}$ e $\lambda_{4,12}$ são ambos irracionais. Quando $n = 10$, segue da relação (5.3) que $\lambda_{4,10} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{10}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}}$. Considere o Pentágono regular $ABCDE$ e seja F o ponto médio do segmento CD, conforme a figura (5.2). Aqui vamos utilizar o grau no lugar do radiano. Como o triângulo ΔACD é isósceles de base CD então a mediana AF coincide com a altura e com a bissetriz. Assim, $\measuredangle AFD$ é reto e $\measuredangle DAF = \dfrac{1}{2}\measuredangle DAC = 18^{\circ}$. Sejam d e l, respectivamente, a medida da diagonal e do lado do Pentágono. Assim, $\operatorname{sen} 18^{\circ} = \dfrac{l/2}{d} = \dfrac{1}{2d/l} = \dfrac{1}{2\phi}$ pois $\dfrac{d}{l} = \phi$, onde ϕ é o Número de Ouro. Logo, $\lambda_{4,10} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 18^{\circ}} = 2\phi$ é um número irracional, pois ϕ é irracional. Ou seja, a razão entre a quarta diagonal mais curta e o lado de um polígono regular de 10 lados é um número irracional.

Figura 5.2: Pentágono Regular.



Fonte: Autor, 2018.

Vamos agora analisar o caso em que $n = 12$. De forma mais imediata, vamos estabelecer a irracionalidade de $\lambda_{4,12}$. Segue da relação (5.3), com graus no lugar de radianos, que:

$$\lambda_{4,12} = \frac{\operatorname{sen} 75^o}{\operatorname{sen} 15^o} = \frac{\operatorname{sen}(45^o + 30^o)}{\operatorname{sen}(45^o - 30^o)} = \frac{\operatorname{sen} 45^o \cos 30^o + \cos 45^o \operatorname{sen} 30^o}{\operatorname{sen} 45^o \cos 30^o - \cos 45^o \operatorname{sen} 30^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}}.$$

Por fim, note que

$$\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Daí segue que $\lambda_{4,12}$ é um número irracional, o que completa a prova. ■

5.4 Quinta e sexta diagonais mais curtas

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos investigar a questão da comensurabilidade entre o lado e a diagonal de um polígono regular de n lados. No caso da 5ª diagonal mais curta, o polígono regular deve ter ao menos 12 lados. Para mostrar a incomensurabilidade neste caso devemos supor, por contraposição, o que $\lambda_{5,n}$ é um número racional. Daí, seguindo o mesmo roteiro, é possível mostrar que $t = e^{i\frac{2\pi}{2n}}$ satisfaz a uma equação polinomial com coeficientes racionais de grau 10. Segue da Proposição 5.2 que $\varphi(2n) \leq 10$. Da última desigualdade concluímos que

$n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15\}$. Como $n \geq 12$ então devemos analisar os casos em que $n = 12$ e em que $n = 15$.

Segue da fórmula (5.3) que $\lambda_{5,12} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{6\pi}{12}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}}$. Utilizando os recursos computacionais disponíveis no Portal *WolframAlpha*, concluímos que $\lambda_{5,12}$ satisfaz a função polinomial f definida por $f(x) = x^4 - 16x^2 + 16$. As únicas possíveis raízes racionais da equação anterior, pelo Corolário 2.20, são os inteiros -1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8, -16 e 16. No entanto, como se pode verificar por substituição direta, nenhuma dos candidatos a raízes é, de fato, raiz. Logo, o número $\lambda_{5,12}$ é irracional.

Do mesmo modo, a razão entre a 5ª diagonal mais curta e o lado do polígono regular de 15 lados é dada pelo número $\lambda_{5,15} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{6\pi}{15}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{15}}$. A razão $\lambda_{5,15}$ satisfaz a função polinomial g definida por $g(x) = x^4 - 5x^3 + 10x - 5$. As únicas raízes racionais possíveis são os inteiros -1, 1, -5 e 5. No entanto, nenhum desses números é, de fato, raiz. O número $\lambda_{5,15}$ é, portanto, irracional. Assim, o número $\lambda_{5,n}$ é irracional, qualquer que seja o inteiro $n \geq 12$.

No caso da 6ª diagonal mais curta de um polígono regular com $n \geq 14$ lados, pode-se mostrar que $\lambda_{6,n}$ racional implica em $\varphi(n) \leq 6$. Os únicos inteiros maiores ou iguais a 14 que satisfazem a última desigualdade são os números 14 e 18. No entanto, o número $\lambda_{6,14}$ satisfaz a função polinomial h definida por $h(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 8$. É fácil verificar que esta função não possui nenhuma raiz racional. Logo, $\lambda_{6,14}$ é um número irracional. Do mesmo modo, pode-se provar que o número $\lambda_{6,18}$ satisfaz a função polinomial s definida por $s(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Esta função não possui nenhuma raiz racional. Logo, $\lambda_{6,n}$ é irracional, qualquer que seja o inteiro $n \geq 6$. ■

5.5 Números primos e incomensurabilidade

O caso geral da comensurabilidade entre a k-ésima diagonal mais curta e o lado de um polígono regular de n lados, onde $n \geq 2k + 2$ é mais complicado. Porém, o resultado abaixo avança um pouco nesta questão no caso em que n é um número primo.

Proposição 5.5. Sejam k e p inteiros positivos com $p \geq 2k + 2$. Se p é primo então $\lambda_{k,p}$ é irracional. Por outras palavras, em um polígono regular com um número primo de lados, qualquer diagonal e o lado são segmentos incomensuráveis.

Demonstração. Como vimos na Proposição 5.1, o número $\lambda_{k,n}$ pode ser escrito como um polinômio de grau k em $2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Vamos supor, por contraposição, que $\lambda_{k,p}$ seja um número racional. Daí segue que o número $t = e^{i\frac{2\pi}{2p}}$ é uma raiz de um polinômio de grau $2k$ com coeficientes racionais. Da Proposição 5.2 e da hipótese do enunciado segue que:

$$\varphi(2p) \leq 2k \leq p - 2. \tag{5.10}$$

Por outro lado, como p é um primo ímpar então:

$$\varphi(2p) = \varphi(2)\varphi(p) = p - 1 > p - 2. \tag{5.11}$$

Das equações (5.10) e (5.11), vemos que $\varphi(2p) \leq p - 2 < \varphi(2p)$. O absurdo provém de supormos que $\lambda_{k,p}$ é racional. Assim, concluímos que $\lambda_{k,p}$ é irracional quando $p \geq 2k + 2$ é um número primo. ■

5.6 Inteiros algébricos e incomensurabilidade

Um polinômio de grau r é dito *mônico* quando o seu coeficiente líder (isto é, o coeficiente do termo x^r) é 1. Um número (complexo) é dito um *inteiro algébrico* quando é raiz de um polinômio mônico com coeficientes inteiros. Segue desta definição e do Corolário 2.20 que todo inteiro algébrico (real) é inteiro ou irracional (Figueiredo (2002)). Em particular, todo número inteiro m é um inteiro algébrico pois é raiz da equação polinomial $x - m = 0$ de coeficientes inteiros. Se α e β são dois inteiros algébricos, então os números $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ e $\alpha\beta$ são também inteiros algébricos[1]. A prova deste fato encontra-se em Martinez (2010). Daí segue que se γ é um inteiro algébrico e f é uma função polinomial com coeficientes inteiros, então o número $f(\gamma)$ é também um inteiro algébrico[2].

[1] O conjunto de todos os inteiros algébricos formam um subanel de $\mathbb{C}$.

[2] A recíproca também é verdadeira. Ou seja, se f é um polinômio mônico com coeficientes inteiros e $f(\gamma)$ é um inteiro algébrico então γ também é um inteiro algébrico (Endler (2014)).

Vamos mostrar agora que o número $2\cos\dfrac{\pi}{n}$ (com n inteiro positivo) é um inteiro algébrico. Com efeito, $2\cos\dfrac{\pi}{n} = e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{-i\frac{\pi}{n}}$ e os números $e^{i\frac{\pi}{n}}$ e $e^{-i\frac{\pi}{n}}$ são inteiros algébricos pois são zeros da função polinomial f (com coeficiente líder igual a 1) definida por $f(x) = x^{2n} - 1$. Em palavras, o número $2\cos\dfrac{\pi}{n}$ é algébrico pois é a soma de dois inteiros algébricos. Segue da equação (5.5) que o número $\lambda_{k,n}$ é um inteiro algébrico pois pode ser expresso como um polinômio em $2\cos\dfrac{\pi}{n}$ com coeficientes inteiros. Em decorrência do Corolário 2.20 concluímos que a razão $\lambda_{k,n}$ é um número inteiro ou irracional. Nossa conclusão é destacada na proposição a seguir.

Proposição 5.6. Sejam $n \geq 4$ e $k \geq 1$ números inteiros. O número $\lambda_{k,n}$ é um inteiro algébrico. Ou seja, dado um polígono regular de n lados, a razão entre a medida da k-ésima diagonal mais curta e a medida do seu lado é um número inteiro ou um número irracional.

Esse resultado nos fornece um meio para decidirmos pela racionalidade ou irracionalidade de $\lambda_{k,n}$, dado um inteiro k fixo. Ao partirmos da hipótese de que $\lambda_{k,n}$ é racional, da Proposições 5.6 concluímos que $\lambda_{k,n}$ é inteiro. Por outro lado, temos que $t = e^{i\frac{2\pi}{2n}}$ é uma raiz de um polinômio de grau $2k$ com coeficientes inteiros. Da Proposição 5.2 segue que $\varphi(2n) \leq 2k$. Como esta inequação possui um número finito de soluções em n, concluímos que basta verificar que o número $\lambda_{k,n}$ não é inteiro (para cada n satisfazendo simultaneamente as inequações $n \geq 2k + 2$ e $\varphi(2n) \leq 2k$) para estabelecermos a sua irracionalidade.

Exemplo 5.7. O lado e a sétima diagonal mais curta de todo polígono regular com $n \geq 16$ são segmentos incomensuráveis.

Vamos mostrar o número $\lambda_{7,n}$ é irracional para todo $n \geq 7 \cdot 2 + 2 = 16$. Ou seja, vamos mostrar que a razão entre a medida da sétima diagonal mais curta e a medida do lado de qualquer polígono regular de $n \geq 16$ lados é um número irracional. Devemos supor, por contraposição, que o número $\lambda_{7,n}$ é racional. Daí concluímos que $t = e^{i\frac{2\pi}{2n}}$ é raiz de um polinômio de grau 14 com coeficientes racionais. Segue da Proposição 5.2 que $\varphi(2n) \leq 14$. Os únicos inteiros $n \geq 16$ que satisfazem esta última inequação, são os números 18 e 21. Com o auxílio de um computador, ou uma calculadora científica, obtemos os seguintes valores aproximados: $\lambda_{7,18} \approx 5{,}6712818$ e $\lambda_{7,21} \approx 6{,}2457031$. Como não são inteiros, segue da Proposição 5.6 que $\lambda_{7,18}$ e $\lambda_{7,21}$ são números irracionais. ■

A Tabela (5.1), construída com o auxílio dos recursos computacionais disponíveis no portal *WolframAlpha*, exibe para cada inteiro $7 \leq k \leq 16$, todos os inteiros n que satisfazem as inequações $\varphi(2n) \leq 2k \leq n-2$ simultaneamente. Para estudarmos, por exemplo, a irracionalidade do número $\lambda_{8,n}$, com $n \geq 18$, devemos consultar a Tabela (5.1). Ela nos fornece os únicos possíveis casos para os quais o número $\lambda_{8,n}$ é racional, isto é, quando $n \in \{18{,}20{,}21{,}24{,}30\}$. Para concluírmos pela irracionalidade é suficiente verificarmos que os números $\lambda_{8,18}$, $\lambda_{8,20}$, $\lambda_{8,21}$, $\lambda_{8,24}$ e $\lambda_{8,30}$ não são inteiros. A Tabela (5.2), construída com o auxílio da expressão (5.3) e de uma planilha eletrônica, fornece uma aproximação com três casas decimais para os números $\lambda_{k,n}$. A partir da sua consulta, vemos que $\lambda_{8,n}$ não é inteiro, com $n \in \{18{,}20{,}21{,}24{,}30\}$. Logo, $\lambda_{8,n}$ é irracional para todo $n \geq 18$.

Tabela 5.1: Solução das inequações $\varphi(2n) \leq 2k \leq n-2$, dado $7 \leq k \leq 16$ fixo.

k	n
7	18 e 21
8	18, 20, 21, 24 e 30
9	18, 20, 21, 24 e 30
10	22, 24, 25, 27, 30 e 33
11	24, 25, 27, 30 e 33
12	26, 27, 28, 30, 33, 35, 36, 39, 42 e 45
13	28, 30, 33, 35, 36, 39, 42 e 45
14	30, 33, 35, 36, 39, 42 e 45
15	33, 35, 36, 39, 42 e 45
16	34, 35, 36, 39 , 40, 42, 45, 48, 51 e 60

Fonte: Autor, 2018.

De modo geral, como a Tabela (5.1) não apresentou nenhum número inteiro, então podemos concluir que o inteiro algébrico $\lambda_{k,n}$ é irracional para todo inteiro n, quando $7 \leq k \leq 16$. (A análise das seis diagonais mais curtas foi feita nas seções anteriores e então concluímos que o número $\lambda_{k,n}$, com $1 \leq k \leq 16$, é racional somente no caso da segunda diagonal mais curta do hexágono regular). Note que polígonos regulares com 34 e 35 lados possuem 16 diagonais não congruentes. Assim, o problema da comensurabilidade entre o lado e a diagonal foi inteiramente respondida para polígonos regulares com até 35 lados.

Tabela 5.2: Razão $\lambda_{n,k}$ entre as medidas da k-ésima diagonal mais curta e do lado.

$n \diagdown k$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18	5,671	5,759								
20	6,080	6,314	6,392							
21	6,246	6,541	6,691							
22	6,392	6,742	6,955	7,027						
24	6,635	7,078	7,400	7,596	7,661					
25	6,737	7,219	7,588	7,837	7,963					
26	6,828	7,346	7,757	8,055	8,236	8,296				
27	6,909	7,460	7,909	8,252	8,483	8,599				
28	6,983	7,562	8,047	8,430	8,707	8,875	8,931			
30	7,109	7,740	8,285	8,740	9,099	9,358	9,514	9,567		
33	7,260	7,951	8,569	9,111	9,569	9,942	10,224	10,413	10,508	
34	7,301	8,009	8,649	9,215	9,702	10,106	10,424	10,653	10,792	10,838
35	7,340	8,063	8,722	9,310	9,824	10,258	10,610	10,876	11,055	11,145
36	7,375	8,113	8,789	9,399	9,937	10,399	10,782	11,083	11,299	11,430
39	7,466	8,241	8,963	9,626	10,228	10,763	11,228	11,620	11,937	12,176
40	7,492	8,278	9,012	9,692	10,311	10,867	11,356	11,775	12,122	12,393
42	7,538	8,343	9,102	9,809	10,462	11,056	11,589	12,056	12,456	12,787
45	7,597	8,426	9,215	9,958	10,653	11,297	11,885	12,415	12,885	13,292
48	7,645	8,495	9,308	10,081	10,812	11,495	12,130	12,713	13,241	13,713
51	7,685	8,551	9,385	10,184	10,944	11,662	12,336	12,963	13,541	14,068
60	7,772	8,675	9,554	10,407	11,231	12,025	12,785	13,511	14,200	14,849

Fonte: Autor, 2018.

6 Propostas de atividades

6.1 Provas geométricas de incomensurabilidade

Vimos no Capítulo 2 uma demonstração geométrica da incomensurabilidade entre a medida do lado e a medida da diagonal do quadrado. Na presente seção vamos propor uma atividade para a demonstração geométrica da incomensurabilidade entre a medida do lado e da diagonal do pentágono regular e também a incomensurabilidade entre a medida da diagonal mais curta e a medida do lado do hexágono regular. Tal atividade, inspirada em Atractor (2018), consiste numa série de itens encadeados. Os requisitos necessários são conhecimentos de geometria plana. Tal atividade é voltada para alunos do 1º ano do Ensino Médio, momento em que são introduzidos certos conceitos de números reais.

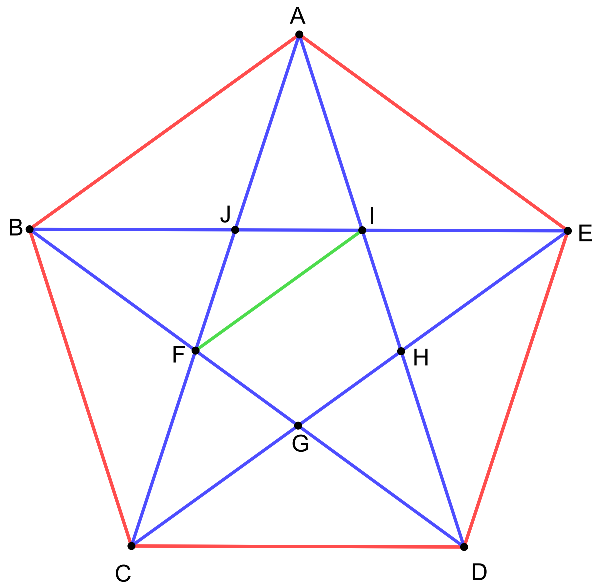
Atividade 6.1. Considere o pentágono regular $ABCDE$ e sejam F, G, H, I e J os pontos de interseção das diagonais conforme a figura 6.1. Sejam d e l, respectivamente, a medida da sua diagonal e do seu lado. Suponha que d e l são comensuráveis. Portanto, existe um número real $u > 0$ e inteiros positivos m e n tais que $d = mu$ e $l = nu$.

(a) Prove que $FGHIJ$ é um pentágono regular.

(b) Mostre que $FI \equiv BF$, $FD \equiv CD$ e $BG \equiv BC$.

(c) Denote por d_1 e l_1, respectivamente, a medida da diagonal e a medida do lado do pentágono

Figura 6.1: Pentágono regular e suas diagonais.



Fonte: Autor, 2018.

$FGHIJ$. Mostre, usando o item (b), que $d_1 = d - l$ e que $l_1 = 2l - d$.

(d) Conclua, com o auxílio do item (c), pela existência de dois inteiros positivos m_1 e n_1 tais que $d_1 = m_1 u$ e $l_1 = n_1 u$, onde $m > m_1$.

(e) A partir do item (d) obtenha uma sequência estritamente decrescente de inteiros positivos e conclua pela incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do pentágono regular.

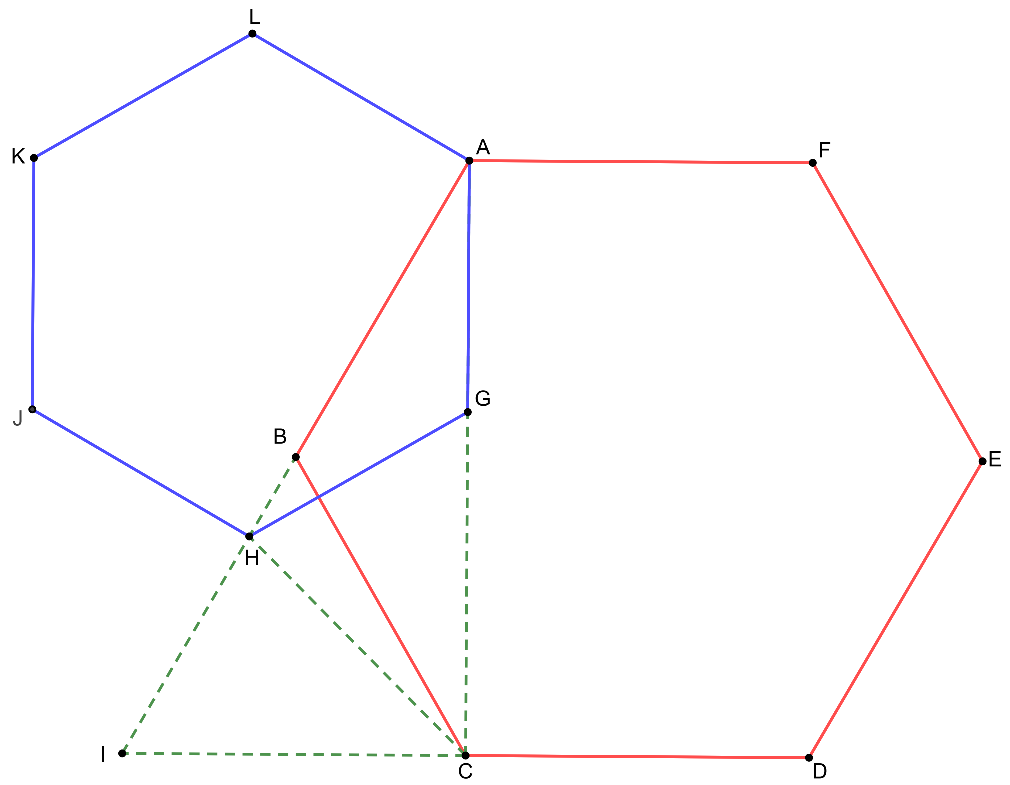
Atividade 6.2. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular e denote por d e l, respectivamente, a medida da sua diagonal mais curta e do seu lado. Suponha que existem inteiros positivos m e n e um número real $u > 0$ tais que $d = mu$ e $l = nu$.

(a) Denote por G o ponto do segmento AC tal que $CB \equiv CG$ e I o ponto de interseção das retas AB e CD. Marque o ponto H, interseção do segmento AI com a bissetriz do ângulo $\angle ACI$, conforme a figura (6.2). Mostre que $AG = HG$ e $AGH = 120^{\circ}$.

(b) Considere o hexágono regular $AGHJKL$ e denote por d_1 e l_1, respectivamente, a medida da sua segunda diagonal mais curta e a medida do seu lado. Mostre que $l_1 = d - l$ e que $d_1 = 3l - d$.

(c) Mostre, utilizando o item anterior, que existem inteiros positivos m_1 e n_1 tais que $l_1 = n_1 u$ e $d_1 = m_1 u$, onde $n_1 < n$. (Dica: suponha que $n_1 \geq n$ e obtenha uma contradição).

Figura 6.2: Incomensurabilidade entre a diagonal mais curta e o lado do hexágono regular.



Fonte: Autor, 2018.

(d) Conclua pela incomensurabilidade entre a medida da diagonal mais curta e do lado do hexágono regular.

Um fato interessante, cuja prova se encontra em Atractor (2018) ou Barbeau (1983), é a inexistência de demonstrações geométricas de incomensurabilidade entre o lado e a diagonal mais curta para outros polígonos regulares. As atividades acima, juntamente com a prova geométrica da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado, exibida na Seção 2.1, esgotam as possíveis demonstrações geométricas para a diagonal mais curta.

Para a segunda diagonal mais curta, existe prova geométrica de incomensurabilidade somente para o octógono regular, decágono regular e dodecágono regular. Tais demonstrações geométricas podem ser vistas em Atractor (2018). Além disso, para a segunda diagonal mais curta prova-se (veja Atractor (2018)) que não existem outras demonstrações geométricas de incomensurabilidade.

6.2 Solução das atividades propostas

Solução da atividade 6.1

(a) Um polígono é regular quando todos os seus lados e todos os seus ângulos internos são congruentes. Como os triângulos ΔABE, ΔBCA, ΔCDB, ΔDEC e ΔEAD são congruentes (pelo caso LAL de congruência) e isósceles, então os ângulos $\angle ABE$, $\angle BCA$, $\angle CDB$, $\angle DEC$ e $\angle EAD$ são congruentes. Daí segue (pelo caso ALA de congruência) que os triângulos ΔABJ, ΔBCF, ΔCDG, ΔDEH e ΔEAI são congruentes. Além disso, note que

$$\measuredangle JAI = 108^{\circ} - (\measuredangle BAC + \measuredangle EAD) = 108^{\circ} - 2\measuredangle BAC = 108^{\circ} - 2 \cdot 36 = 36^{\circ}.$$

De forma análoga, temos que $\measuredangle JAI = \measuredangle FBJ = \measuredangle GCF = \measuredangle HDG = \measuredangle IEH = 36^{\circ}$. Logo, os triângulos ΔAJI, ΔBFJ, ΔCGF, ΔDHG e ΔEIH são congruentes pelo caso LAL. Assim, os lados do pentágono $FGHIJ$ são congruentes. Por fim, os ângulos $\angle IJF$, $\angle JFG$, $\angle FGH$, $\angle GHI$ e $\angle HIJ$ são congruentes pois são ângulos opostos pelo vértice aos ângulos congruentes $\angle AJB$, $\angle BFC$, $\angle CGD$, $\angle DHE$ e $\angle EIA$, respectivamente. Portanto, o pentágono $FGHIJ$ é regular.

(b) Os triângulos ΔABC e ΔIJF são semelhantes pois AC e FI são as diagonais dos pentágonos regulares $ABCDE$ e $FGHIJ$. Portanto, $\measuredangle FIJ = \measuredangle CAB = 36^{\circ}$. Como $\measuredangle FBJ = 36^{\circ}$, segue que o triângulo ΔBIF é isósceles de base BI. Portanto, $FI \equiv BF$. Além disso, como $\measuredangle DCF = 72^{\circ}$ e $\measuredangle CDF = 36^{\circ}$ segue que o ângulo $\angle CFD$ mede $180^{\circ} - (72+36) = 72^{\circ}$. Portanto, o triângulo ΔCFD é isósceles de base CF, donde concluímos que $FD \equiv CD$. A demonstração de $BG \equiv BC$ é análoga.

(c) Repare que,

$$d_1 = FI = BF = BD - FD = BD - CD = d - l \text{ e}$$
$$l_1 = FG = BG - BF = BC - FI = l - (d - l) = 2l - d.$$

(d) Como $d = mu$ e $l = nu$ segue que $d_1 = d - l = mu - nu = (m - n)u = m_1u$ e $l_1 = 2l - d = 2nu - mu = (2n - m)u = n_1u$, onde $m_1 = m - n$ e $n_1 = 2n - m$ são dois inteiros positivos e $m_1 < m$.

(e) Utilizando a mesma construção no pentágono $FGHIJ$ vamos obter um novo pentágono regular de diagonal $l_2 = m_2u$, onde $m_2 < m_1 < m$. Como o processo pode ser continuado indefinidamente, podemos obter uma sequência estritamente decrescente de inteiros positivos, o que é absurdo. Assim, somos levados a concluir pela incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do hexágono regular.

Solução da Atividade 6.2.

(a) O triângulo ΔBCI é equilátero pois $\measuredangle IBC = \measuredangle BIC = 60^{\text{o}}$ pois são os ângulos externos do hexágono regular $ABCDEF$. Logo, os triângulos ΔCIH e ΔCGH são congruentes pelo caso LAL. Com efeito, $CI \equiv CG$, $\measuredangle ICH = \measuredangle GCH$ e CH é comum aos dois triângulos. Daí segue que $CI \equiv CB \equiv CG$. Além disso, $\measuredangle CGH = 60^{\text{o}}$. Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero $GHIJ$ é 360^{o} segue que

$$\measuredangle GHI = 360^{\text{o}} - (2\measuredangle CGH + \measuredangle GCI) = 360^{\text{o}} - (2 \cdot 60^{\text{o}} + 90^{\text{o}}) = 150^{\text{o}}.$$

Logo, $\measuredangle AHG = 30^{\text{o}}$ (pois $\angle AHG$ é suplementar ao ângulo $\angle GHI$) e o triângulo ΔAHG é isósceles de base AH. Portanto, $AG \equiv HG$ e $\measuredangle AGH = 120^{\text{o}}$.

(b) Observe que

$$\begin{gathered} l_1 = AG = AC - CG = AC - BC = d - l \text{ e} \\ d_1 = AH = AI - HI = AB + BI - HG = AB + BC - AG = l + l - (d - l) = 3l - d. \end{gathered}$$

(c) Como $l = nu$ e $d = mu$ então, do item anterior segue que $l_1 = mu - nu = (m - n)u = m_1u$ e $d_1 = 3nu - mu = (3n - m)u = n_1$, onde $m_1 = m - n$ e $n_1 = 3n - m$. Agora nos resta mostrar que $n_1 < n$. De fato,

$$n_1 \geq n \Rightarrow m - n \geq n \Rightarrow m \geq 2n \Rightarrow mu \geq 2nu \Rightarrow d \geq 2l \Rightarrow d \geq l + l,$$

o que contraria a desigualdade triangular.

(d) Solução análoga ao item (e) da Atividade 6.1. Basta notar que podemos repetir a mesma construção no hexágono $AGHJKL$.

7 Conclusão

Como estabelecer a irracionalidade de um dado número real? O presente texto procura responder esta questão. No entanto, apresentamos somente exemplos que podem ser respondidos utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética ou o Critério de Pesquisa de Raízes Racionais de uma função polinomial com coeficientes inteiros. Optamos por utilizar somente essas duas técnicas pois acreditamos que ambas são acessíveis a alunos do Ensino Médio.

Apesar desta restrição, vimos uma grande variedade de números reais cuja irracionalidade pode ser examinada. É evidente que existem números reais, como o e ou o π, que necessitam de outras técnicas para decidir pela sua irracionalidade (Marques (2013)). Nem sempre é uma tarefa fácil estabelecer a irracionalidade de certo número real. Trata-se de uma área de grande interesse para a pesquisa em matemática. Por exemplo, ainda não se sabe se os números

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!+1} = 1{,}52606\ldots, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} = 0{,}91596\ldots \text{ e } \lim_{n\to\infty} \left. \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0{,}57721\ldots$$

são racionais ou irracionais (Havil (2012)).

Na Introdução deste trabalho expomos algumas justificativas para o estudo dos números irracionais. Tais números surgem diversas vezes no Ensino Médio (Niven (1961)) e é possível propor diversos problemas interessantes cuja solução recaem em decidir pela irracionalidade de determinado número real (Bortolossi e Mózer (2016)). Neste momento somos levados a estudar e utilizar diversas ferramentas matemáticas. Utilizamos, nesta dissertação, o Teorema Fundamental da Aritmética, funções polinomiais, funções reais, a Função fi de Euler, números complexos, indução finita e diversos resultados de geometria euclidiana plana. Ou seja, o assunto *números irracionais* funciona como um tema gerador, isto é, um tema no qual vários tópicos da matemática são explorados.

O Capítulo 1 teve como principal objetivo apresentar o assunto e fornecer demonstrações clássicas de irracionalidade (como a do número $\sqrt{10}$) além de dirimir possíveis mal entendidos, como a questão sobre a racionalidade ou irracionalidade da soma ou do produto de dois números irracionais. Foram apresentadas versões simplificadas dos problemas mais gerais abordados nos capítulos 3 e 4 e exibimos as duas ferramentas essenciais, para a dissertação, ao exame da irracionalidade de certos números reais: o Teorema Fundamental da Aritmética e o Critério de Pesquisa de Raízes Racionais de funções polinomiais com coeficientes inteiros. O último capítulo exibiu uma proposta de atividade para alunos da primeira série do Ensino Médio, quando começam a estudar números reais e possui um bom entendimento de geometria euclidiana plana.

Os três capítulos intermediários (3, 4 e 5) foram propostos temas sobre números irracionais. No Capítulo 3 examinamos a irracionalidade de certos logaritmos. Diversos textos tratam de logaritmos de base 10, como podemos ver em Marques (2013) ou Niven (1961). Estudamos outras bases inteiras além da base decimal e, em particular, uma base que é um inteiro livre de quadrados. A ideia surgiu no exame mais detalhado dos argumentos utilizados na prova de irracionalidade de logaritmos de base 10. Afinal, o número $10 = 2 \cdot 5$ é um produto de dois números primos distintos e, desta forma, livre de quadrados. Abordamos ainda a questão da racionalidade de logaritmos de números reais de base inteira.

Na fase preliminar da elaboração deste trabalho, quando é feito um levantamento bibliográfico sobre o tema, nos deparamos com o interessante artigo sobre a irracionalidade das raízes da equação $p^x = x^p$, com p primo ímpar (Bastos (2003)). A questão sobre a irracionalidade das raízes reais de $p^x = x^p$, quando o inteiro p não é necessariamente primo, surge quase que automaticamente. Para elucidar esta interrogação, recorremos a argumentos diferentes dos que foram utilizados em Bastos (2003). O Teorema Fundamental da Aritmética se mostrou, novamente, crucial. Foi útil também interpretar a raiz real de uma dada equação como o zero de uma função real. Neste caso, ao tratarmos deste problema, fez-se necessário recorrer a funções reais e um pouco de Cálculo

Diferencial. Examinamos mais uma generalização do problema proposto. De forma mais precisa, estudamos a racionalidade das raízes reais da equação $a^{f(x)} = (f(x))^a$ com $a \geq 2$ inteiro e f uma função polinomial com coeficientes inteiros.

Outro problema interessante diz respeito a questão da comensurabilidade entre a uma diagonal e o lado de um polígono regular. Podemos interpretar o antigo problema da incomensurabilidade da medida do lado e a medida da diagonal do quadrado como um caso particular. O problema geral, como vimos no Capítulo 5, se reduz a decidir pela racionalidade ou irracionalidade do número $\lambda_{k,n} = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{(k+1)\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$ que denota a razão entre a medida da k-ésima diagonal mais curta e do lado de um polígono regular de $n \geq 4$ lados, onde $n \geq 2k + 2$. Este tema nos propiciou uma incursão a diversos tópicos da matemática como funções polinomiais, geometria plana, números complexos e a função fi de Euler. Ao contrário dos artigos disponíveis em Atractor (2018)que estudou a diagonal mais curta e a segunda diagonal mais curta, examinamos (com o auxílio dos recursos computacionais disponíveis no Portal *WolframAlpha*) outras diagonais, além de fornecer o procedimento para se analisar o caso geral. Por fim, foi possível decidir pela irracionalidade do número $\lambda_{k,p}$, quando p é um número primo.

A questão sobre a irracionalidade das raízes reais da equação $a^x = x^a$, com $a \geq 2$ inteiro (não necessariamente primo) foi inteiramente respondida. Ao contrário, o problema da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado não foi plenamente respondida. De fato, a seguinte pergunta pode ser formulada: para quais valores de $k \geq 1$ e $n \geq 4$ o número $\lambda_{k,n}$ é inteiro? Esta questão pode ser investigada em estudos futuros.

Acreditamos que as motivações elencadas na introdução que nos levaram a estudar os números irracionais foram plenamente atendidas. De fato, os cinco capítulos apresentaram diversas técnicas de demonstrações. Além disso, problemas interessantes desencadearam a utilização de diversos tópicos da matemática nos capítulos 3, 4 e 5. E, para além das motivações apresentadas, conseguimos generalizar e apresentar novos resultados a partir de resultados disponíveis em artigos que trataram de números irracionais. Um fato interessante é como apenas dois teoremas (Critério de Pesquisa de Raízes Racionais e o Teorema Fundamental da Aritmética) são capazes de auxiliar em tantos problemas sobre irracionalidade. Nossa contribuição, portanto, além da organização proposta sobre o assunto, reside nas generalizações de resultados apesentados nos artigos contidos em Atractor (2018)e Bastos (2003).

O tema Números Irracionais é certamente um dos mais difíceis de serem tratados no Ensino Médio. Por esta razão, é fundamental que o professor tenha compreensão mais aprofundada do objeto de estudo. Assim, acreditamos ser relevante este trabalho que pretende dirimir dúvidas e ampliar o interesse pelo assunto.

Referências Bibliográficas

ATRACTOR. Disponível em: <http://www.atractor.pt/mat/incomensurabilidade>. Acesso em: 10 mar 2018.

BARBEAU, E.J. Incommensurability proofs: a pattern that peters out. *Mathematics Magazine*, v. 56, n. 2. Washington D.C., 1983.

BASTOS, G. G. Os Zeros Reais da Equação $p^x = x^p$, p Primo. *Revista Matemática Universitária* n. 34. Rio de janeiro, 2003.

BORTOLOSSI, Humberto José; MÓZER, Graziele Souza. *Para que servem os números irracionais? Além das fórmulas de perímetro, áreas e volumes*. Rio de janeiro: IMPA, 2016.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. *Análise numérica*. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundameitais da Matemáticaa*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

COURANT, R; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* 4 ed. Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

ENDLER, Otto. *Teoria dos Números Algébricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

FERREIRA, Jamil. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

MORAES FILHO, Daniel Cordeiro. *Um convite à matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Números Irracionais e Transcendentes*. Rio de janeiro: SBM, 2002.

GONÇALVEZ, C.H.B.; POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga. *Revista Matemática Universitária*. n. 47. Rio de Janeiro, 2010.

HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

HERZ-FISCHLER, Roger. *A Mathematical History of the Golden Number*. New York: Dover Publication, 1998.

HAVIL, Julian. *The Irrationals: A Story of the Numbers You Can't Count On*. New Jersey: Princeton University Press, 2012.

HERSTEIN, I. N. *Topics in Algebra*. 2. ed. Wiley India Pvt. Limited, 2006.

LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino.* Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2007.

LIMA, Elon Lages. Quais são as raízes da equação $x^2 = 2^x$? *Revista do Professor de Matemática.* n. 3. Rio de Janeiro, 1984.

MARQUES, Diego. *Teoria dos números transcendentes*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MARTINEZ, F. B. et al. *Teoria dos Números: Um passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro*. IMPA, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

MIKRAM, Jilali. et al. An Encryption Algorithm Based on the Decimal Expansion of Irrationals. n. 70. *Applied Mathematical Sciences*. Disponível em: <http://www.m-hikari.com/ams/ams-2012/ams-69-72-2012/hamriAMS69-72-2012.pdf>. Acesso em: 21 abr 2018.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NIVEN, Ivan. *Irrational numbers.* Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1967.

NIVEN, Ivan. *Numbers: Rational and Irrational.* Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1961.

PLATÃO. *Diálogos I: Mênon, Banquete, Fedro*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1999.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUDIN, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1976.

WOLFRAM ALPHA. Disponível em: <http://www.wolframalpha.com>. Acesso em: 05 fev 2018.