COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

José Carlos Silva

LIMITES DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO VISANDO OS CONCURSOS DA EFOMM E DA ESCOLA NAVAL

Rio de Janeiro
2018

José Carlos Silva

LIMITES DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO VISANDO OS CONCURSOS DA EFOMM E DA ESCOLA NAVAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S586 Silva, José Carlos

Limites de funções reais de variável real no ensino médio: um estudo visando os concursos da EFOMM e da Escola Naval / José Carlos Silva. – Rio de Janeiro, 2017.
126 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Concursos militares. 3. Ensino médio. 4. EFOMM. 5. Escola Naval (Brasil). I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário André Dantas – CRB7 5026.

José Carlos Silva

LIMITES DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO VISANDO OS CONCURSOS DA EFOMM E DA ESCOLA NAVAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Prof[o] Dr. Daniel Felipe Neves Martins (Orientador)
PROFMAT - CPII

____
Prof[a] Dra. Patrícia Erthal de Moraes
PROFMAT - CPII

____
Prof[a] Dra. Christine Sertã Costa
PUC - Rio

Rio de Janeiro
2018

Dedico este trabalho como forma de gratidão e carinho aos meus pais de coração: Carlita Cozendey da Silva e Roberto da Silva(In memoriam), que acreditaram em mim, investiram em meus estudos, sem medir esforços, sem cobranças, sempre torcendo e demonstrando felicidades e orgulho das minhas conquistas. Seus ensinamentos foram muito relevantes para forjar toda minha vida profissional e social.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela sua constante presença, a qual contribui para que pudesse chegar, com êxito, ao final deste Mestrado.

Aos meus pais: Hilda da Conceição Silva e Welier Silva Pinheiro que foram meus primeiros mestres nos ensinamentos da arte de viver. Mesmo frequentando muito pouco uma sala de aula sempre ressaltavam a importância e a necessidade do estudo. Ensinaram-me que preciso ter sempre coragem para vencer os desafios, lutar e não esmorecer, acreditar na esperança de um futuro promissor e procurar ser sempre o melhor na minha profissão independente da minha escolha.

À minha esposa Fátima Correa Lemos Silva e minha filha Tatiana Lemos Silva por estar sempre ao meu lado me apoiando incondicionalmente e torcendo pelas minhas conquistas.

Ao PROFMAT pela iniciativa em abrir as portas de um programa de pós-graduação stricto sensu para professores de matemática.

Ao professor Daniel Felipe Neves Martins, pelo competente profissional, pelo fino trato com as pessoas e, contudo pela excelente orientação.

Aos professores do PROFMAT-CPII pelas brilhantes e fundamentais aulas.

RESUMO

SILVA, José Carlos. **Limites de funções reais de variável real no ensino médio:** um estudo visando os concursos da EFOMM e da Escola Naval. 2018. 126 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

Este trabalho mostra o alto nível intelectual, da disciplina de matemática, no assunto limite, cobrado dos alunos que terminam o ensino médio e desejam concorrer a uma vaga nos concursos das seguintes Universidades Militares: Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM) e Escola Naval. Mostra ainda a falta do Cálculo Diferencial e Integral nos currículos da educação básica, nos livros do PNLD 2018, na maioria dos livros didáticos do ensino médio e assim, as dificuldades enfrentadas pelos jovens que almejam enfrentar tais concursos. Com isso, este trabalho se apresenta como um apoio de estudo direcionado e mostra a necessidade dos candidatos que desejam sucesso nesses concursos estudar em cursos preparatórios buscando os conhecimentos necessários para suas aprovações. O alto nível intelectual de cobrança do assunto limite exigido nas provas de admissão às Universidades Militares citadas anteriormente, é demonstrado através da resolução comentada das questões das provas anteriores desses concursos no período de 2000 até 2017. Para um melhor aproveitamento deste trabalho em sala de aula são colocados dois capítulos que trazem a teoria dos assuntos funções e limites.

Palavras-chave: EFOMM; Escola Naval; Limite; Ensino Médio; concursos militares.

ABSTRACT

SILVA, José Carlos. **Limites de funções reais de variável real no ensino médio:** um estudo visando os concursos da EFOMM e da Escola Naval. 2018. 126 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

This work shows the high intellectual level, of the subject of mathematics, in the limit subject, charged of the students who finish high school and wish to apply for a vacancy in the competitions of the following Military Universities: Merchant Marine Officers Training School (EFOMM) and Naval School. It also shows the lack of Differential and Integral Calculus in basic education curricula, in the PNLD 2018 books, in most high school textbooks and thus, the difficulties faced by young people who want to face such competitions. With this, this work presents itself as a directed study support and shows the need of candidates wishing to succeed in these competitions to study in preparatory courses seeking the knowledge necessary for their approvals. The high intellectual level of collection of the limit subject required in the admission tests to the mentioned Military Universities is demonstrated through the commented resolution of the questions of the previous tests of these competitions in the period of 2000 to 2017. For a better use of this work in the classroom are placed two chapters that bring the theory of subjects functions and limits.

Keywords: EFOMM; Naval School; Boundary; High School; military competitions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EFOMM	Escola de formação de oficiais da Marinha Mercante
PNLD	Programa nacional do livro e do material didático
MEC	Ministério da educação e cultura
CIAGA	Centro de Instrução Almirante Graça Aranha
CIABA	Centro de Instrução Almirante Braz de Aguiar
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SÍMBOLOS

$=$	igual
$\in$	pertence
$\neq$	diferente
$\Leftrightarrow$	se e somente se
IN	conjunto dos números naturais
Z	conjunto dos números inteiros
R	conjunto dos números reais
R^*	conjunto dos números reais não nulos
R_+^*	conjunto dos números reais positivos
$<$	maior que
$>$	menor que
Δ	delta (discriminante)
$\cup$	união
$\cap$	interseção
$\varnothing$	conjunto vazio
$\subset$	está contido

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Trabalhando como professor do ensino fundamental e médio das Escolas Públicas há quase duas décadas pude observar que um grande número de jovens quando ingressam no ensino médio alimentam a esperança de seus aprendizados se materializarem em um bom emprego e com ótimo salário. Desejam rapidez nestas conquistas e vão à busca das aprovações nos concursos militares. Essa preferência se dá em virtude de que durante a permanência nas escolas ou universidades militares já recebem proventos e ao final de conclusão dos cursos de formação para os quais se escreveram estão empregados, com estabilidade na carreira, maior facilidade de ascensão profissional, seguro saúde, aposentadoria e com salário acima da média dos jovens em geral, no início de sua vida profissional, ou seja, por volta dos 22 anos.

Tais jovens ao realizar as provas para os diversos concursos militares, principalmente àquelas destinadas ao oficialato, encontram uma cobrança acadêmica muito elevada, ou seja, para muito além dos conteúdos aprendidos na Educação Básica.

Diante de tal dificuldade encontrada, os jovens que almejam sucesso nos concursos militares necessitam complementar seus estudos em cursos preparatórios, que visam preencher lacunas que a Escola Pública não dá conta, tendo em vista o que é atingido.

Vale lembrar que no Brasil a educação básica compreende: A Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino médio, com duração de 18 anos assim distribuídos:

Tabela 1 – Faixa etária na educação básica

Educação Infantil	**Idades**
Creche	0 a 3 anos
Pré-escolar	4 a 5 anos
Ensino Fundamental	**Idades**
1º ano	6 anos
2º ano	7 anos
3º ano	8 anos
4º ano	9 anos
5º ano	10 anos
6º ano	11 anos
7º ano	12 anos
8º ano	13 anos
9º ano	14 anos
Ensino Médio	**Idades**
1ª série	15 anos
2ª série	16 anos
3ª série	17 anos

Fonte: Autor, 2017.

O Ministério da Educação – MEC mediante Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96) define através da Base Nacional Comum Curricular - BNCC o currículo, bem como as propostas pedagógicas da educação básica das escolas públicas e privadas. Visando, entre outros objetivos, oferecer aos alunos aprendizagens essenciais para que adquiram conhecimento, competências e habilidades necessários para seguir no ensino superior e/ou dar início sua atividade profissional.

Em especial, no ensino médio e na disciplina de matemática existem algumas exigências de conhecimentos para se chegar ao ensino superior militar que vão além daqueles administrados no currículo das escolas públicas e privadas. Podemos citar como exemplo a consolidação de conceitos como proporcionalidade, taxa de variação e áreas de regiões não tradicionais que estão presentes no cálculo diferencial e integral.

Este trabalho traz como pesquisa um dos conteúdos que está presente em editais dos concursos de acesso às seguintes universidades militares: Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante – EFOMM e da Escola Naval e não é ministrado pelas escolas de ensino médio, tão pouco no nível de dificuldade que o conhecimento do assunto é cobrado nos exames dessas escolas. O conteúdo em questão deste trabalho é **limite**.

Com o objetivo de verificar como o Cálculo Diferencial e Integral é abordado nos livros de matemática em maior número de circulação e utilização pelos alunos do ensino médio, faremos uma análise dos conteúdos programáticos e do nível de conhecimentos apresentados nas coleções validadas pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD para o ano de 2018 pela Secretaria de Educação Básica do MEC, nos livros de coleções publicadas e reconhecidas pela comunidade matemática e ainda nos principais livros dos cursos de formação da EFOMM e da Escola Naval.

Após análise destes livros procuramos elaborar um material didático que atenda os requisitos necessários de estudo para um bom desempenho na prova de matemática quanto ao assunto limites de funções reais de uma variável real. Este material didático será direcionado às cobranças presentes nas provas anteriores da EFOMM e Escola Naval. Além deste trabalho ter como finalidade a preparação para estes concursos serve também àqueles, estudantes e professores do ensino médio, que desejam aprofundar-se nesse assunto e ter este texto de pesquisa como fonte de consulta.

Em seguida realizaremos as resoluções comentadas das questões que envolvem limites de funções reais abordadas nas provas anteriores destas Escolas(Universidades) Militares no período de 2000 a 2017.

Assim, o objetivo principal deste trabalho é a elaboração de um material didático sobre limites de funções reais, direcionado aos alunos do ensino médio que anseiam dar continuidade a seus estudos na Escola de Oficiais da Marinha Mercante – EFOMM e Escola Naval a fim de se profissionalizarem como militares da Marinha de Guerra ou da Marinha Mercante.

A escolha do assunto limites de funções reais dentro do Cálculo Diferencial e Integral voltado para o ensino médio se deu segundo anos de experiências como professor de cursos preparatórios que nunca encontrou material didático satisfatório para prática docente.

Desta forma, este trabalho deixa um espaço aberto para que outros mestrandos possam desenvolver trabalhos nesta mesma linha e que o complementam com os assuntos Derivadas e Integral, por exemplo.

Como objetivo secundário tem-se a intenção de fomentar a prática do ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino médio colocando-se como uma ferramenta para o professor que almeja trabalhar esta disciplina seja pela própria matemática, seja em sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento como a física.

Na elaboração do material didático os conhecimentos dos conteúdos serão introduzidos com o rigor normalmente observados nos livros tradicionais, buscando trazer o assunto à altura de conhecimentos cobrados nos concursos de admissão às Universidades Militares: EFOMM e Escola Naval, que parecem não dialogar com o que é estabelecido pelo MEC através da Base Nacional Comum Curricular – BNCC.

Dividiremos este trabalho em oito capítulos: Introdução, O cálculo diferencial e integral no ensino médio e suas relações com os exames oficiais de admissão da EFOMM e Escola Naval, O cálculo diferencial e integral nos livros didáticos, Um breve estudo de funções, Estudo de Limite e a linguagem do ensino médio, O assunto limite nas provas de matemática da EFOMM, O limite nas provas de matemática da Escola Naval e Considerações finais.

O capítulo 2, "**O cálculo diferencial e integral no ensino médio e suas relações com os exames oficiais de admissão da EFOMM e Escola Naval**" faz uma abordagem parcialmente história sobre o ensino do cálculo e integral no ensino médio brasileiro e ressalta as duas únicas instituições universitárias que exigem o tal conhecimento nos seus exames de admissão.

O capítulo 3, **"O cálculo diferencial e integral nos livros didáticos"** temos uma análise nos conteúdos dos livros aprovados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2018, nos livros publicados em coleções de conceituadas editoras e instituições matemáticas, assim como alguns livros dos cursos superiores sobre a abordagem do assunto Cálculo Diferencial e Integral.

O capítulo 4, **“Um breve estudo de funções”**, abordará de forma básica o conceito de funções; estudo das funções elementares, composição de funções, funções trigonométricas, funções inversas e operações com funções.

No capítulo 5, **“Estudo de limite e a linguagem do ensino médio”**, faremos uma explanação teórica sobre limites de funções, Propriedades dos limites de funções, Funções contínuas, Teorema da troca, Teorema do confronto, Limites infinitos, Limites no infinito, Limites fundamentais e Assíntota oblíqua.

O capítulo 6, **“O assunto limites nas provas de matemática da EFOMM”**, será, junto com o capítulo 7, a parte do trabalho de maior aplicação devido às resoluções da questões presentes nas provas da EFOMM no período de 2000 a 2017.

O capítulo 7, **“O assunto limites nas provas de matemática da Escola Naval”**, faremos as resoluções das questões presentes nas provas da Escola Naval no período de 2000 a 2017.

No capítulo 8 teremos nas “**considerações finais”** uma reflexão sintética sobre o trabalho.

2 O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO E SUAS RELAÇÕES COM OS EXAMES OFICIAIS DA EFOMM E ESCOLA NAVAL

Nesse capítulo falaremos, resumidamente, sobre a história do Cálculo Diferencial e Integral no ensino básico no Brasil desde seu aparecimento até os dias atuais e de que forma esse assunto é cobrado nos programas de admissão de duas instituições militares de ensino superior: EFOMM e Escola Naval.

2.1 O Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio

O professor Geraldo Ávila, no início da década de 90, em artigo publicado na *Revista do Professor de Matemática*, questiona sobre a situação referente ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio:

> Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por quê? Como fazer isso? (ÁVILA, 1991, p.1).

O Cálculo Diferencial e Integral já fez parte das disciplinas obrigatórias do currículo do ensino médio. Há relatos que o Colégio Pedro II, fundado no final do século XIX, tinha desde a sua fundação a disciplina Noções de Cálculo Diferencial e Integral introduzido no terceiro ano do Colegial, indo até o final da segunda metade dos anos de 1980.

No entanto, a primeira vez que o Cálculo Diferencial e Integral foi introduzido oficialmente nos programas da educação básica foi, em 1890, com a reforma Benjamin Constant – promovida pelo então Ministro e Secretário de Estado dos Negócios da Instrução Pública, Correios e Telégrafos, Benjamin Constant (BRASIL. Decreto n. 981, 1890, p. 7).

Na verdade, ao longo da história o Cálculo já foi incluído e excluído diversas vezes da educação básica. No entanto, desde sua primeira introdução oficial, em 1890, estamos passando pelo maior período de tempo desde a sua última retirada que se deu no final dos anos 50 e começo dos anos 60, no movimento chamado Matemática Moderna que entre outras finalidades era a de modernizar o ensino da matemática. Segundo Ávila (1991, p. 3): “Se até 1960 o Cálculo era ensinado na escola secundária, por que então ele não foi incluído nos programas do novo sistema que criou o 2° grau?”.

Atualmente a disciplina Cálculo Diferencial e Integral não consta no currículo da educação básica, em especial no ensino médio entendendo-se que se trata de conteúdos direcionados apenas para alunos de ensino superior.

Porém, o Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio-PCNEM (2000, p. 40-45), afirma que o programa curricular do Ensino Médio deve obedecer a uma estrutura que assegura ao aluno condições para adquirir novos conhecimentos matemáticos usando como pré-requisito os conceitos aprendidos no ensino médio. Exemplarmente do exposto acima, temos que o aluno ao ingressar no ensino superior, especialmente nas áreas de tecnologias ou ciências matemáticas e da natureza, encontra como disciplina obrigatória o Cálculo Diferencial e Integral e tem dificuldades para concluir esta disciplina, com quadro de baixo rendimento, reprovação e em muitos casos evasão do curso escolhido.

Surge assim a seguinte pergunta: **Por que não ensinar noções de Cálculo diferencial e Integral no ensino médio dentro de um contexto que contemplem o aprendizado relacionado a outros conteúdos da matemática?**

Outros obstáculos colocados para não voltar a ensinar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio são o exíguo espaço na grade curricular e a dificuldade de apresentar um assunto tão complexo de forma atraente. Segundo Ávila (1991, p. 4): "A ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados".

Além disso, dados do Ministério da Educação, sinalizam que os cursos de nível superior na área das ciências exatas vêm sofrendo, nos últimos anos, uma considerável queda de procura. O que nos leva a crer que as dificuldades com a Matemática na escola básica, afastam os alunos de escolhas por tais carreiras.

Acredita-se que uma melhor redistribuição curricular poderá auxiliar a inserção de vários conceitos vindos do Cálculo Diferencial e Integral na escola básica, como o conceito de taxa de variação, infinitésimos ou vizinhança de um ponto.

Observa-se, pelas discussões travadas por professores de cursos preparatórios, que a inclusão de conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio seria interessante pois poderiam proporcionar aos alunos uma melhor preparação e motivação para o ingresso no ensino superior. Além disso, poderia tornar mais ampla e natural a aprendizagem de vários conteúdos do próprio ensino médio, como a ampliação de conceitos ligados às funções, soma da progressão geométrica infinita, área de círculo, vértice de uma função quadrática, movimento uniformemente variado, área sob o gráfico de uma função afim, volume da esfera, entre outros.

Por outro lado, podemos acrescentar que a importância do ensino do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio se justifica também através da presença desta disciplina nos programas de alguns concursos em nível do ensino médio, como exemplos: Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante - EFOMM e ESCOLA NAVAL, escolas que preparam para carreiras militares e que nos últimos anos tem tido procura aumentada por jovens de diversas classes econômicas e sociais do país.

2.2 Sobre a EFOMM e a Escola Naval

A **Escola Naval**[1] é a mais antiga Instituição de ensino superior do País. Foi fundada em 1782, em Lisboa, Portugal, com a denominação Academia Real de Guardas-Marinhas. Veio para Brasil em 1808 em decorrência da vinda da família Real. Foi instalada no Mosteiro de São Bento e em 1938 passou para o atual endereço na Ilha de Villegagnon que fica na Avenida Almirante Silvio de Noronha, s/n - Castelo, Rio de Janeiro. É uma academia militar formadora de oficiais de carreira da Marinha do Brasil, nas modalidades de oficial de armada, de intendência ou fuzileiro naval. Tem duas formas de admissão de alunos: processo seletivo direto (PSAEN – Processo Seletivo de Admissão à Escola Naval) ou a entrada por meio do Colégio Naval(Escola de ensino médio da marinha, localizada na cidade Angra dos Reis no Rio de Janeiro).

Figura 1 – Brasão da Escola Naval

Fonte: Marinha do Brasil

Figura 2 – Foto da Escola Naval

Fonte: Marinha do Brasil

[1]Informações obtidas no site: https://www.marinha.mil.br/ensino/cgcfn/ensino/escola-naval. Acesso em 15/12/2017.

Os requisitos básicos para ingresso são: Ser brasileiro nato ou naturalizado de ambos os sexos que tenha o ensino médio completo ou em fase de conclusão e idade acima de 18 e menos de 23 anos. O seu curso de formação tem um Ciclo Escolar de quatro anos, em regime de internato, e um Ciclo Pós-Escolar de um ano, totalizando então cinco anos de formação. Após o curso de formação segue um plano de carreira que compreende os seguintes postos: Segundo-Tenente, Primeiro-Tenente, Capitão-Tenente, Capitão de Corveta, Capitão de Fragata, Capitão de Mar e Guerra, Contra-Almirante, Vice-Almirante e Almirante de Esquadra.

Figura 3 – Brasão do CIAGA

Fonte: Marinha do Brasil

A **Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante - EFOMM**[2] é uma Instituição superior onde são formados Oficiais da Marinha Mercante Brasileira em duas opções de curso: Náutica ou Máquinas. É um centro de referência, não só do Brasil, mas também para jovens cujo país de origem não tenha uma Escola de Marinha Mercante. A EFOMM atende jovens cujo país de origem possui intercâmbio com o Brasil, como Peru, Panamá, Equador, República Dominicana, entre outros. Atualmente existem dois Centros de formação: **CIAGA** - Centro de Instrução Almirante Graça Aranha - situada na Av. Brasil, 9020 - Olaria, Rio de Janeiro e o **CIABA** - Centro de Instrução Almirante Braz de Aguiar - situada na Rodovia Arthur Bernardes nº 245, Pratinha - Belém–PA. Os requisitos básicos para ingresso são: Ser brasileiro nato ou naturalizado de ambos os sexos que tenha o ensino médio completo ou em fase de conclusão e idade acima de 17 e menos de 23 anos. O curso de formação tanto de náutica

Figura 4 – Foto do CIAGA

Fonte: Marinha do Brasil

[2]Informações obtidas no site: https://www.mar.mil.br/ciaga/efomm. Acesso em 15/12/2017.

quanto de máquinas, os alunos estudam durante 3 anos em regime de internato. Após o término do curso de formação, o aluno será declarado Bacharel em Ciências Náuticas, reconhecido como curso de nível superior, passará a integrar o Quadro de Oficiais da Reserva não remunerada do Brasil no posto de 2º tenente e recebe a carta de 2º Oficial de Máquinas. Após três anos de embarque recebe carta de 1º Oficial e é possível chegar ao posto máximo de Oficial Superior de Máquinas em até seis anos. Para tal, além do tempo de embarque, é necessário que se faça cursos de especialização ministrados pelo CIAGA e CIABA.

2.3 O Cálculo Diferencial e Integral nos exames oficiais de admissão da EFOMM e Escola Naval

Vimos anteriormente que um dos requisitos para concorrer a uma vaga nos concursos na EFOMM ou Escola Naval é possuir o ensino médio completo.

Porém os conteúdos de matemática contidos nos editais de tais escolas militares encontram-se em dissonância com o que é praticado nas instituições públicas e privadas do pais, que seguem as orientações do MEC. Esta dissonância sugere um questionamento: Por que uma abordagem específica de um ou mais assuntos que seguem fora da listagem de conteúdos de um ciclo de escolaridade que antecede o próximo ciclo? Ou por que cobrar um conteúdo que não faz parte das diretrizes oficiais definidas pelo MEC?

As divisões de ensino destas duas escolas acreditam que o aluno que não possui noções de limites e derivadas vindas do ensino médio, não conseguem acompanhar os cursos de matemática contidos na grade de formação, optando assim por fazerem com que os concorrentes a uma vaga em seus cursos, já encontrem no exame de seleção, tais assuntos.

Veja abaixo como o Cálculo Diferencial e Integral é cobrado nos programas de matemáticas desses concursos:

Conteúdo relativo do Cálculo Diferencial e Integral presente no edital de 08 de maio de 2017 do concurso público de admissão à EFOMM 2018.

LIMITE

Limite de uma função
Operações com limites finitos e infinitos
Limites fundamentais
Número irracional

DERIVADAS

Aplicação de derivadas

Regras de derivação

Regra de L´Hôpital

Máximos e Mínimos

Esboço de gráfico de funções com assíntotas

INTEGRAIS

Integrais imediatas

Conteúdo relativo do Cálculo Diferencial e Integral presente no edital de 08 de maio de 2017 do concurso público de admissão à Escola Naval 2018.

LIMITE

Limites de funções

Operações com limites

Limites fundamentais

Continuidade

DERIVADAS

Definição

Interpretação geométrica e cinemática

Regras de derivação

Aplicações de derivadas

Regra de L'Hôpital

Reta tangente e reta normal ao gráfico de uma função

Concavidade de uma função

Máximos e mínimos absolutos e relativos

Esboço de gráficos

Assíntotas

INTEGRAIS

Integrais imediatas

2.4 O Cálculo Diferencial e Integral nos exames oficiais de admissão da EFOMM e Escola Naval na visão dos seus discentes

No Brasil, a EFOMM e a Escola Naval são as únicas instituições universitárias que cobram o conhecimento do Cálculo Diferencial e Integral em seus concursos de admissão de maneira não elementar.

Diante de tal fato é interessante saber a opinião de quem vive o processo de ter que estudar um conteúdo que está fora da grade curricular do seu ano de escolaridade.

Assim, foi feita uma pesquisa com dez discentes, seis da EFOMM e quatro da Escola Naval, tendo como objetivo compreender como estudam paralelamente, se a disciplina está ausente dos assuntos no ensino médio e se o nível de cobrança das questões nos exames é facilmente alcançado com a bibliografia existente para o ensino médio das escolas brasileiras..

A pesquisa foi realizada através de um questionário com 4 perguntas.

Seguem abaixo as perguntas realizadas e um breve relatório sobre as respostas dos discentes:

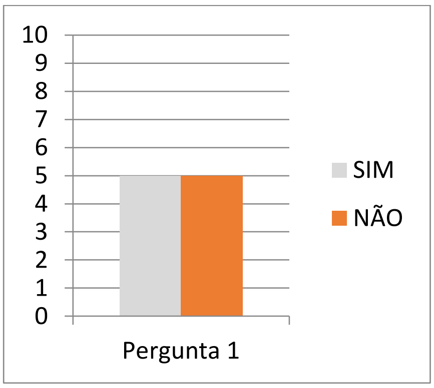
Pergunta 1

Você estudou cálculo diferencial e integral na sua escola onde concluiu o ensino médio?

Pergunta 2

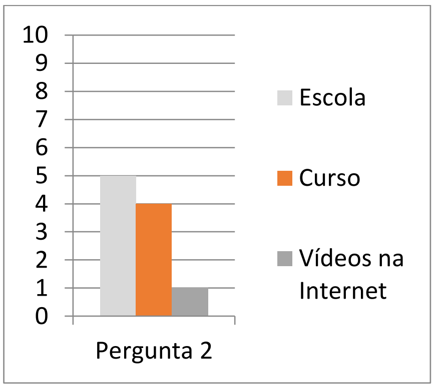
Como aprendeu o cálculo diferencial e integral ao ponto de ter bom desempenho no exame em que foi aprovado?

Gráfico 1 – Respostas da pergunta 1



Fonte: Autor, 2017

Gráfico 2 – Respostas da pergunta 2



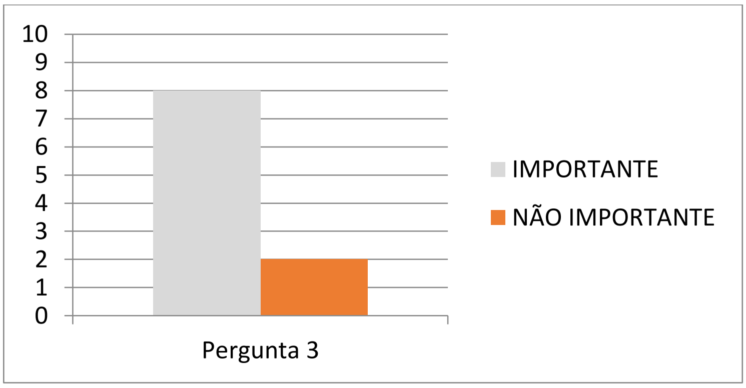
Fonte: Autor, 2017

Observa-se nas respostas das perguntas 1 e 2 que metade dos discentes responderam que haviam estudado o cálculo diferencial e integral em suas escolas de origem e todas essas escolas citadas por eles eram Colégio-Curso, ou seja, são instituições de ensino que visam também à preparação para concursos destas universidades militares. 80% da outra metade que respondeu NÃO, disse ter aprendido o Cálculo Diferencial e Integral em cursos preparatórios e os outros 20% que também respondeu NÃO disse ter estudado através de vídeos na internet. Um aluno da EFOMM que afirmou ter estudado Cálculo através de vídeos na internet disse: "as questões de cálculo presentes na prova não sabia fazer".

Pergunta 3

Na sua opinião qual é a necessidade ou objetivo da presença do cálculo diferencial e integral no exame de admissão dessa instituição?

Gráfico 3 – Respostas da pergunta 3



Fonte: Autor, 2017

Quanto à pergunta sobre a necessidade da cobrança do cálculo diferencial e integral no exame de admissão da instituição para a qual foram aprovados, 80% dos estudantes responderam que é importante, pois facilita o estudo desta disciplina durante o curso de formação dando base ao aluno para o aprendizado mais aprofundado. Já os 20% restantes afirmaram não ser importante uma vez que o Cálculo Diferencial e Integral é ensinado desde a parte mais básica até a mais avançada. Um dos alunos da EFOMM afirmou: "Na minha opinião não era pra ser importante cálculo para passar no concurso porque aprendemos tudo na EFOMM no primeiro semestre".

Pergunta 4

O estudo do cálculo diferencial e integral após o ingresso na instituição parte do princípio que todos os alunos dominam? Qual(ais) Bibliografia(s) usada(s) no curso de formação?

Quanto a essa pergunta tivemos 100% dos estudantes afirmando que as aulas de Cálculo não são uma continuidade do concurso porque somente no primeiro semestre é estudado a matéria presente no concurso e depois se desenvolve com conteúdos novos como as funções de várias variáveis, equações diferenciais, estudo das séries, funções periódicas, etc.

Quanto aos livros usados no curso de formação os alunos da EFOMM e da Escola Naval responderam ser **Cálculo**, de James Stewart e **Cálculo** de Louis Leithold(volume 1 e 2).

3 O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo será realizada uma análise sobre o cálculo diferencial e integral em alguns livros didáticos de matemática destinados para alunos do ensino médio. Analisaremos a presença ou não do cálculo diferencial e integral e em caso afirmativo faremos um estudo minucioso no assunto Limite visando verificar se a obra atende os alunos que prestarão concurso para a EFOMM e Escola Naval.

Começaremos pelos livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2018 que são destinados a alunos do ensino médio de escolas públicas federais e estaduais brasileiras.

Em seguida analisaremos outros livros de professores com conceituadas bibliografias e que abordam o cálculo diferencial e integral.

Por fim veremos como os livros adotados nos cursos de formação da EFOMM e da Escola Naval abordam o assunto e se estas obras dialogam com as obras destinadas exclusivamente a estudantes que estão cursando o último ano do ensino médio.

3.1 Obras aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD

O Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) é um programa que objetiva avaliar e distribuir, de forma regular e gratuita, obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à pratica educativa, aos alunos da rede pública da educação básica federal, estadual, municipal e distrital.

A compra e a distribuição dos materiais e livros didáticos selecionados são de competência do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE. É ainda de responsabilidade do FNDE a logística do provimento e do remanejamento dos materiais didáticos para as escolas.

Vale lembrar que os livros didáticos distribuídos são confeccionados com uma estrutura física resistente para que possam ser utilizados por três anos consecutivos, beneficiando mais de um aluno.

Os critérios na elaboração dos materiais didáticos devem seguir as orientações curriculares para o ensino médio solicitadas pelo MEC e alinhados a uma proposta pedagógica única, visando entre outros fatores a garantia na assimilação dos conhecimentos na continuidade dos estudos.

Como citado acima o ciclo dos materiais didáticos do PNLD são de 3 anos e as obras analisadas nesse trabalho foram do PNLD 2018.

Seguem na tabela a seguir as oito coleções aprovadas no PLND 2018.

Tabela 2 – Livros de matemática aprovados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2018

COLEÇÃO	EDITORA	AUTOR(ES)
CONTATO MATEMÁTICA	EDITORA FTD	Jacqueline Garcia Joamir Souza
MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO	EDITORA SARAIVA	Kátia Cristina Stocco Smole Maria Ignez de Souza Vieira Diniz
MATEMÁTICA CIÊNCIAS E APLICAÇÕES	EDITORA SARAIVA	Gelson Iezzi Osvaldo Dolce David Mauro Degenszajn Roberto Périgo Nilze Silveira de Almeida
MATEMÁTICA – PAIVA	EDITORA MODERNA	Manoel Rodrigues Paiva
CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA	Fábio Martins de Leonardo
MATEMÁTICA – CONTEXTO & APLICAÇÕES	EDITORA ÁTICA	Luiz Roberto Dante
MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA	EDITORA LEYA	Rodrigo Balestri Eduardo da Rocha Neto
QUADRANTE – MATEMÁTICA	EDITORA ÁTICA	Diogo Prestes Eduardo Rodrigues Chavante

Fonte: Autor, 2017.

Analisando os conteúdos dessas oito obras aprovadas pelo PLND 2018 nenhuma delas aborda, de maneira formal ou explícita ou específica, o assunto Cálculo Diferencial e Integral. Alguns apresentam o Cálculo Diferencial e Integral em algumas partes dos livros, de maneira sutil ou informativa, como:

- a noção intuitiva de limite no estudo de dízimas periódicas, na apresentação do número irracional e, no estudo de gráfico da função logarítmica, na soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, na área de superfície esférica e no cálculo de área do círculo.

- a noção de derivada no estudo da variação da função afim e quadrática e no Movimento Uniformemente Variado, ao interpretar a velocidade como variação do espaço num intervalo de tempo e aceleração como variação de velocidade num espaço de tempo.
- estudo intuitivo de Integral ao determinar o valor da área sob o gráfico de uma função afim.
- somente referências às noções de limite e de integral ao calcular o volume da esfera.

Em nenhuma das coleções há uma abordagem das sequências convergentes ou divergentes, limites de funções reais de variáveis reais, a apresentação de derivada como um "limite especial" e a integral como resultado de somas infinitas.

Não precisa nem levantar o questionamento sobre a ausência de cálculo que necessitam do conhecimento de técnicas para determinar limites ou derivadas. Simplesmente não há, o que para o leitor que conhece a estrutura curricular de matemática do ensino médio proposta pelo governo, não é nenhuma novidade, já que tudo que não está na Base Comum Curricular, não se encontra nos livros do PNLD.

3.2 Livros do ensino médio com Cálculo Diferencial e Integral

Como vimos no capítulo 2, o Cálculo Diferencial e Integral já esteve presente no currículo escolar básico. Mas, durante as décadas de 60 e 70 foi extinto da educação básica e não retornou oficialmente. Ainda encontramos alguns livros didáticos para o ensino médio que abordam o Cálculo Diferencial e Integral de maneira não muito formal.

Seguem abaixo, em ordem numérica (para citações futuras), alguns destes livros onde analisaremos: a forma de explanação do conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral e se o conteúdo de limite presente no livro atende aos programas da EFOMM e Escola Naval.

1) Matemática – Contexto e aplicações – Volume 3 - Luiz Roberto Dante – Editora Ática - 1999
2) Matemática Aula por Aula – Volume 3 – Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da silva – Editora FTD - 1998
3) Temas e Metas – Volume 6 – Atual Editora

4) Fundamentos da Matemática Elementar – Vol. 8 – Diversos autores - Atual Editora - 1999
5) Coleção Noções da matemática – volume 8 – Moderna Editora

Os livros didáticos numerados por 1 e 2 são publicações em três volumes, contendo outros assuntos. Já os demais 3, 4 e 5 são livros de coleções que possuem assuntos específicos por volumes, isto é, há um volume específico para o Calculo Diferencial e Integral.

O livro 1 (contexto e aplicações de Luiz Roberto Dante – Volume 3) e o livro 2 (Matemática Aula por aula – Volume 3) apresentam os conteúdos do Cálculo de forma básica, tanto na teoria quanto nos exercícios e não possuem uma linguagem formal para o assunto. Os livros trazem uma quantidade pequena de exercícios e sem dificuldades mais acentuadas. Não consta em ambos o tópico Integral. Quanto ao assunto limite, não apresentam a ideia formal, exibem poucas propriedades, há falta de alguns limites fundamentais, falta o teorema da troca, o teorema do confronto e falta falar sobre assíntotas à gráficos de funções. São materiais didáticos que não se aproximam da necessidade de um aluno que se prepara para os concursos da EFOMM e da Escola Naval.

O livro 3 (Temas e Metas) apresenta a teoria em linguagem simples e sem demonstrações. Existem muitos exercícios, sendo uma parte de fixação do conteúdo e outra que exige uma atenção especial por parte do aluno. Ainda existem muitos exercícios resolvidos e de forma detalhada. Apresenta os conteúdos limite, derivada e integral. Quanto ao assunto limite, não aborda o teorema da troca, faltam alguns limites fundamentais, não apresenta o teorema do confronto e não fala sobre assíntotas à gráficos de funções. Contudo, consiste em material didático que não se aproxima da total necessidade de um aluno que se prepara para os concursos da EFOMM e da Escola Naval. No entanto serve para ser usado como uma bibliografia complementar.

O livro 4 (Fundamentos da Matemática Elementar – volume 8) apresenta a teoria bem detalhada e numa linguagem elevada. Apresentam as demonstrações das proposições e teoremas. Quanto ao assunto limite, faltam alguns limites fundamentais do número irracional **e**, o limite fundamental do logaritmo natural e abordagem sobre as assíntotas à gráficos de funções. Foi desenvolvido visando atingir alunos que se preparam para concursos e assim atende parcialmente às expectativas de quem se candidata nos concursos da EFOMM e Escola Naval.

O livro 5 (Coleção Noções da Matemática – Volume 8), dentre os analisados, é o que apresenta o Cálculo Diferencial e Integral em quase sua totalidade. Assim, ele se destaca por ser o mais abrangente no assunto: as definições são rigorosas e claras, apresenta as demonstrações necessárias, possui muitos exercícios resolvidos e propostos, exercícios do básico até o nível avançado e o melhor de tudo é que a linguagem é conveniente a um bom entendimento mesmo para um estudo individual. Quanto ao assunto limite, faltou a abordagem sobre as assíntotas à gráficos de funções. É ideal e aconselhável aos candidatos que querem sucesso nas questões de Limite da EFOMM e Escola Naval.

3.3 Livros de Cálculo Diferencial e Integral usados no curso de formação EFOMM e Escola Naval

Através dos relatos dos 10 alunos participantes da pesquisa, vimos na seção 2.4 que os livros adotados no curso de formação da EFOMM e da Escola Naval são: **Cálculo**, de James Stewart e **Cálculo** de Louis Leithold(volume 1 e 2).

Esses livros são clássicos quando se fala de Cálculo. Enfatizam à compreensão dos conceitos, apresentam os conteúdos através de uma linguagem clara, realizam resoluções de exercícios de forma detalhada, oferecem muitos exercícios propostos com progressão cuidadosamente planejada dos conceitos básicos até problemas complexos e desafiadores.

Assim, são obras que atendem perfeitamente às expectativas dos candidatos aos concursos da EFOMM e Escola Naval.

4 UM BREVE ESTUDO DE FUNÇÕES

No intuito de elaborar um material de estudo de limites de funções reais de variável real para alunos candidatos aos concursos da EFOMM e da Escola Naval, não poderíamos deixar de apresentar este breve estudo de funções.

Este capítulo se faz necessário e é de fundamental importância nesse trabalho uma vez que se apresenta de forma direcionada à preparação dos concursos citados e com a didática inerente para as aulas de um curso preparatório e ainda com a preocupação que existem alunos que não tiveram um bom conhecimento de funções.

Essa didática diferenciada do curso preparatório se dá pelo exíguo tempo disponível na preparação dos alunos e então busca transmitir os conhecimentos apresentando todos os conceitos, de forma resumida e muito repetitiva, principalmente através de uma enorme quantidade de exercícios direcionados e assim somente formata o aluno para responder as questões nos exames dos concursos.

Dessa forma esse breve estudo de funções apresenta-se no formato citado no parágrafo acima, trazendo tudo sobre funções de forma sucinta e com a finalidade de facilitar o estudo do que abordaremos mais adiante: Limites de funções reais de variável real.

4.1 Introdução às Funções

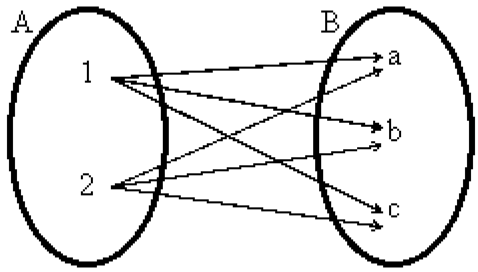
4.1.1 Par Ordenado

Chama-se **par ordenado** todo par de números reais onde a ordem em que eles são apresentados é essencial. Assim, dados dois números **a** e **b**, podemos formar com eles um **par ordenado** e indicamos por (a, b) ou (b, a) tal que (a, b) ≠ (b, a). Então, como exemplo, o par ordenado (3, 7) é diferente do par (7, 3).

4.1.2 Produto Cartesiano

Dados os conjuntos A = {1, 2} e B = {a, b, c}, vamos formar os pares ordenados que o primeiro elemento pertença ao conjunto A e o segundo elemento pertença ao conjunto B. Observe o esquema em que cada flecha representa um par:

Figura 5 – Diagrama de flechas



Fonte: Autor, 2017

Figura 6 – Formação de pares ordenados

Conjunto A	**Conjunto B**	**Par ordenado**
	a	(1, a)
1	b	(1, b)
	c	(1, c)
	a	(2, a)
2	b	(2, b)
	c	(2, c)

Fonte: Autor, 2017

O conjunto formado pelos pares ordenados na tabela é denominado PRODUTO CARTESIANO DE A POR B e o indicamos por **A x B** e lemos informalmente “A cartesiano B”. Desta forma, temos então: **A x B** = {(1, a); (1, b); (1, c); (2, a);(2, b); (2, c)}.

Se A = { } ou B = { } então **A x B** = { }.

Logo, sejam dois conjuntos A e B não vazios, o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$ é chamado de produto cartesiano entre os conjuntos A e B e assim **A x B** = {(x, y) / $x \in A$ e $y \in B$}.

4.1.3 Relação

Sejam dois conjuntos quaisquer A e B. Uma RELAÇÃO R de A em B é um subconjunto do produto cartesiano A x B.

Considere o produto cartesiano citado anteriormente **A x B** = {(1, a); (1, b); (1, c); (2, a);(2, b); (2, c)}. Alguns subconjuntos de **A x B** são:

$R_1 = \varnothing$

R_2 = A x B

R_3 = {(2, b)}

R_4 = {(1, c); (2, a);(2, c)}

R_5 = {(1, a); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)}

4.1.4 Conceito, domínio, contradomínio e imagem de uma função

Dados dois conjuntos **A** e **B**, não vazios, e **f** uma relação de **A** em **B**. Diz-se que **f** é uma de função de **A** em **B** se, e somente para todo **x** $\in$ **A** existir em correspondência um único **y** $\in$ **B** tal que (x, y) $\in$ **f**.

O conjunto **A** denomina-se **domínio de f** e pode ser indicado com a notação **D(f)**. Uma função de domínio **A**, diz-se que ela está definida em **A**.

O conjunto **B** denomina-se **contradomínio de f** e pode ser indicado com a notação **CD(f)**.

Se **x** é um elemento qualquer de **A**, então o único **y** de **B** associado a **x** é denominado **imagem de x pela função f** ou **valor da função f em x** e será indicado com a notação **f(x)**, onde se lê comumente f de x. Seguindo a definição é fácil perceber que **y = f(x)**.

O conjunto de todos os elementos de **B** que são imagem de algum elemento de **A** denomina-se **conjunto imagem de f**, e pode ser indicado por **Im(f)**.

Assim, uma função está bem definida quando são conhecidos D(f), CD(f) e a lei de correspondência y = f(x). Essa lei também é chamada de lei de formação da função. É comum, entretanto, darmos apenas a sentença aberta y = f(x) para nos referirmos a uma função f.

4.1.5 Gráfico de uma Função Real

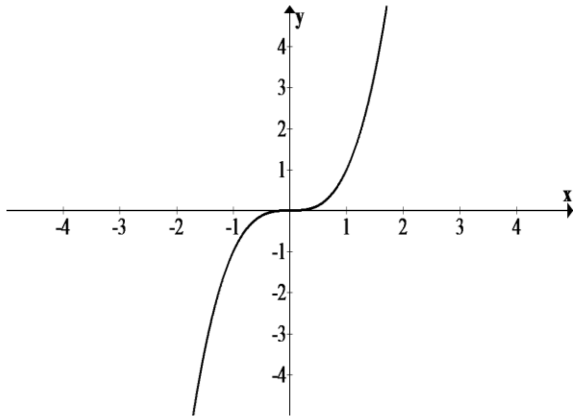
Se o domínio de uma função f é o conjunto dos números reais assim como o seu contradomínio, dizemos que esta função f é uma função real de variável real e iremos representar por f : R $\rightarrow$ R.

Por exemplo, a função **f**, de reais em reais, ou seja, f : R $\rightarrow$ R, definida por $f(x) = x^3$ é uma função real.

A imagem de qualquer elemento x do domínio real da função $f(x) = x^3$ é obtida elevando ao cubo cada elemento x. Veja a sua representação geométrica no plano cartesiano do gráfico 4.

Podemos fazer uma representação geométrica de uma função real de variável real assinalando num sistema de coordenadas cartesianas os pontos (x; y) com x pertencente ao domínio de **f** e **y** tal que y = f(x). Estes pontos formam o traço ou o **gráfico** da função f.

Gráfico 4 – função $f(x) = x^3$



Fonte: Autor, 2017

4.2 Funções sobrejetiva, injetiva e bijetiva

Uma função $f : A \to B$ é dita Sobrejetiva ou Sobrejetora se, e somente se, para todo elemento y pertencente a B, existe um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$. Ou ainda, se o conjunto imagem de f for igual a B, ou seja $Im(f) = B$.

Assim se f é uma função sobrejetiva de A em B, podemos dizer que: f é uma sobrejeção de A em B.

Como exemplo, seja a função f de A em B, com $A=\{-1, 0, 1, 2\}$ e $B=\{0, 1, 4\}$, definida por $f(x) = x^2$. Note que a função f é sobrejetiva pois, para todo elemento $y \in B$, existe o elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y = x^2$.

Uma função $f : A \to B$ é dita Injetiva ou Injetora se, e somente se::

1) Para todo x_1 e x_2 elementos de A, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2) Para todo x_1 e x_2 elementos de A, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.

Assim se f é uma função injetiva de A em B, podemos dizer que: f é uma injeção de A em B.

Como exemplo, seja a função f de A em B, com $A=\{0, 1, 2, 3\}$ e $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, definida por $f(x) = 2x + 1$. Note que a função f é injetiva pois, dois elementos distintos de A tem imagens dois elementos distintos de B.

Uma função $f : A \to B$ é dita Bijetiva ou Bijetora se, e somente se, para todo elemento y pertencente a B, existe um único elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

A definição acima é equivalente a: uma função f de A em B é Bijetiva se, e somente se, f é sobrejetiva e injetiva.

Assim se f é uma função bijetiva de A em B, podemos dizer que: f é uma bijeção de A em B.

Como exemplo, seja a função f de A em B, com A={–2, –1, 0, 1} e B={0, 1, 2, 3}, definida por f(x) = x + 2. Note que a função f é bijetiva pois, f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, para todo elemento y pertencente a B, existe um único elemento x pertencente a A tal que f(x) = y = x + 2.

4.3 Funções Elementares

4.3.1 Função afim

Uma função $f : R \to R$ é chamada de **afim** quando existem constantes reais ***a*** e ***b*** tais que

$$\mathbf{f(x) = ax + b}$$

para todo $x \in R$.

O gráfico de uma função afim é uma **reta**.

Para mostrar que o gráfico de uma função afim **f(x) = ax + b** é uma reta, basta mostrar que três pontos quaisquer desse gráfico são colineares. Assim sejam os pontos $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ da função afim **f(x) = ax + b** e vamos mostrar que a maior das três distâncias entre pares desses pontos é igual a soma das outras duas. Para isso, suporemos que as abscissas x_1, x_2 e x_3 são tais que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula para calcular a distância entre dois pontos nos permitem dizer que:

$$\mathbf{d(P_1, P_2)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

$$\mathbf{d(P_2, P_3)} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

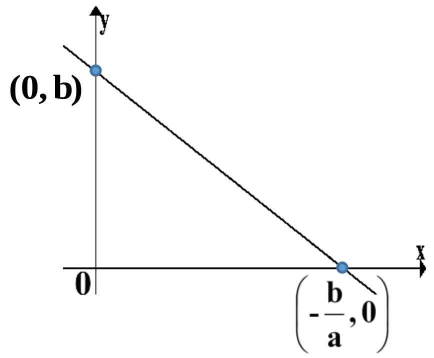
$$\mathbf{d(P_1, P_3)} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Dai segue-se que $\mathbf{d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).}$

Note que, supondo que na função afim **f(x) = ax + b** as abscissas x_1 e x_2 são tais que $x_1 < x_2$. Então se:

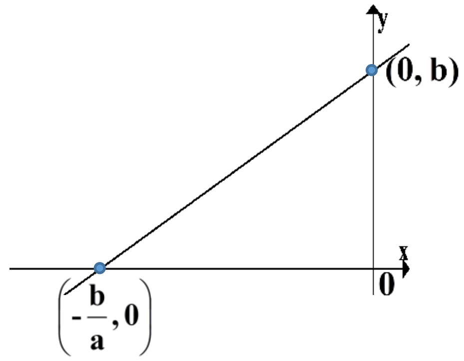
- $a > 0$, temos que $ax_1 < ax_2$ e $ax_1 + b < ax_2 + b$, dai $f(x_1) < f(x_2)$ e a função afim é denominada crescente.
- $a < 0$, temos que $ax_1 > ax_2$ e $ax_1 + b > ax_2 + b$, dai $f(x_1) > f(x_2)$ e a função afim é denominada decrescente.

Gráfico 5 – função afim com a < 0



Fonte: Autor, 2017

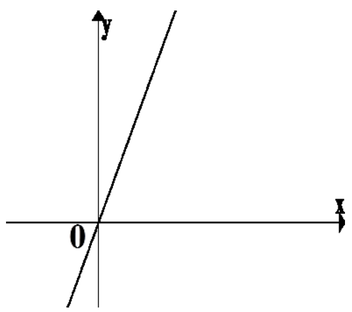
Gráfico 6 – função afim com a > 0



Fonte: Autor, 2017

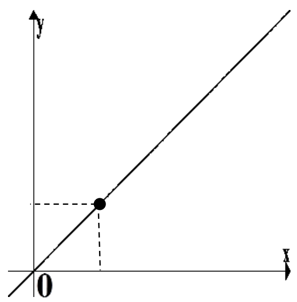
- ❖ Admitindo funções reais de variáveis reais, geometricamente a função afim que possui **b = 0** é chamada de **função linear** e a reta que a representa passa pelo ponto (0, 0).
- ❖ Quando uma função linear possui **a = 1** ela é chamada de **função identidade** e a reta que a representa passa pelo ponto (0, 0) e é bissetriz dos quadrantes ímpares. A reta será a bissetriz dos quadrantes pares se **a = –1**.
- ❖ Uma função que possui **a = 0** é chamada de **função constante**, seu gráfico passa pelo ponto (0, b). A taxa de variação das imagens é sempre igual a zero.

Gráfico 7 – um exemplo de função linear



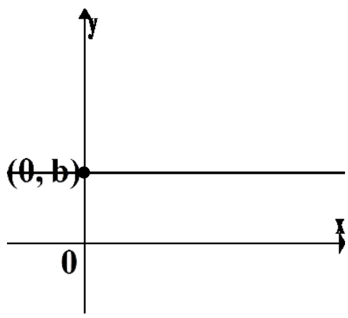
Fonte: Autor, 2017

Gráfico 8 – função identidade



Fonte: Autor, 2017

Gráfico 9 – um exemplo de função constante.



Fonte: Autor, 2017

4.3.2 Função quadrática

Uma função f : R → R é chamada de função quadrática quando existem números reais ***a, b*** e ***c***, com **a ≠ 0** tais que

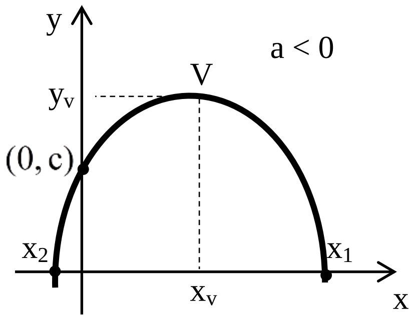
$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

para todo x ∈ R.

O gráfico de uma função quadrática é uma **parábola**, que tem a reta da equação $\mathbf{x = -\frac{b}{2a}}$ como **eixo de simetria** e o seu **vértice** no ponto $V(x_V, y_V) = V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, onde x_v é o chamado x do vértice, y_v é o chamado y do vértice e $\Delta = b^2 - 4ac$.

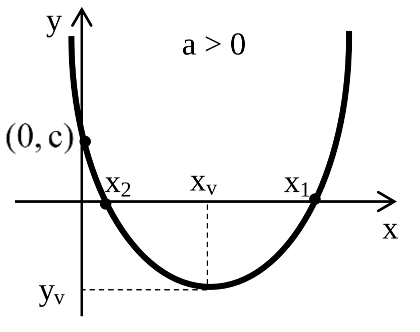
A concavidade da parábola é voltada para cima se **a > 0** ou voltada para baixo se **a < 0.** A parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto **(0, c)**. O ponto $\mathbf{V(x_o, y_o)}$ é chamado vértice da parábola.

Gráfico 10 – função quadrática com a < 0



Fonte: Autor, 2017

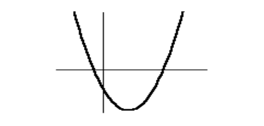
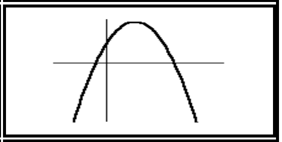
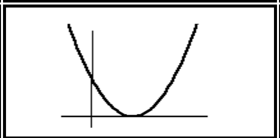
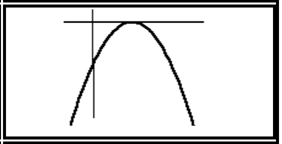
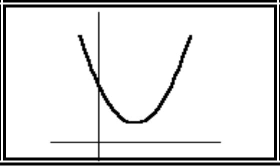
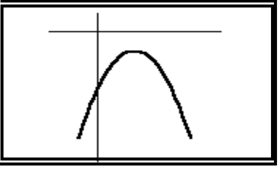
Gráfico 11 – função quadrática com a > 0



Fonte: Autor, 2017

Segue na tabela abaixo a parábola de uma função quadrática em relação ao valor de seu discriminante (Δ) e o sinal do seu termo de maior grau(a).

Tabela 3 – Parábola em função do valor de "Δ" e do sinal do coeficiente "a"

Delta (Δ)	**A parábola no plano cartesiano**	**a>0** concavidade (boca) voltada para cima	**a<0** concavidade (boca) voltada para baixo
$\Delta > 0$	Possui duas raízes reais e distintas		
$\Delta = 0$	Possui duas raízes reais e iguais		
$\Delta < 0$	Não possui raízes reais		

Fonte: Autor, 2017

4.3.3 Função modular

Uma função $f : R \rightarrow R$ é chamada de função modular quando

$$\mathbf{f(x) = |x|}$$

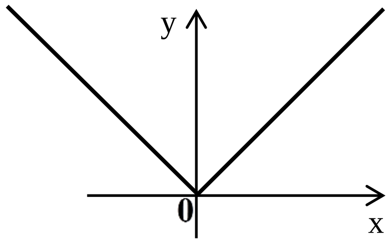
para todo $x \in R$, ou seja:

$$\mathbf{f(x) = |x|} = \begin{cases} x, \ \mathbf{para\ x \geq 0} \\ \mathbf{-x, para\ x < 0} \end{cases}$$

Observe abaixo que o gráfico de $f(x) = |x|$ consiste em duas semirretas que passam pela origem e acima do eixo x, uma delas tem inclinação 1 e a outra −1.

.

Gráfico 12 – função modular f(x) = | x |



Fonte: Autor, 2017

Note que para $f : R \rightarrow R$ tal que $f(x) = |x|$, da definição teremos sempre $Im(f) = R_{+}$.

A partir do gráfico da função modular $f(x) = |x|$ podemos traçar outros gráficos, veja:

- O gráfico da função $\mathbf{g(x) = |x| + k}$ com $k \in R$ corresponde ao gráfico da função $f(x) = |\mathbf{x}|$, transladado para cima, se quando $k > 0$ ou para baixo, se quando $k < 0$. O valor do deslocamento é o valor absoluto de k.
- O gráfico da função $\mathbf{h(x) = |x - m|}$ com $m \in R$ corresponde ao gráfico da função $f(x) = |\mathbf{x}|$, transladado para a direita (quando $m > 0$) ou para a esquerda (quando $m < 0$). O valor do deslocamento é o valor absoluto de m.
- O gráfico da função $p\mathbf{(x) = |x - m| + k}$ com m e $k \in R$ corresponde ao gráfico da função $f(x) = |\mathbf{x}|$, transladado para a direita (quando $m > 0$) ou para a esquerda (quando $m < 0$), seguido de um translado para cima (quando $k > 0$) ou para baixo quando ($k < 0$).

4.3.4 Função exponencial

Seja ***a*** um número real positivo diferente de 1. A função $f : R \rightarrow R^{+}$ é chamada de função exponencial de base a, e indicada por

$$\mathbf{f(x) = a^{x}}$$

para todo x e $y \in R$. É definida de modo a ter as seguintes propriedades fundamentais:

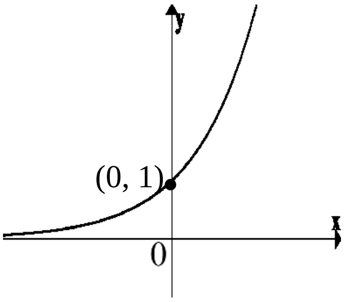
1) $a^x . a^y = a^{x + y}$
2) $a^1 = a$
3) $x < y \Rightarrow \begin{cases} a^x < a^y, \text{quando } a > 1 \\ a^y < a^x, \text{quando } 0 < a < 1 \end{cases}$

As restrições **a > 0** e **a ≠ 1** citadas são necessárias, pois:

- Se $a = 0$ e o valor de x é negativo então o valor de a^x é uma indeterminação.
- Se $a < 0$ e o valor de x é uma fração irredutível com denominador par então o valor de a^x não existe no conjunto dos números reais.
- Se $a = 1$ para todo valor de x teremos que $a^x = 1$.

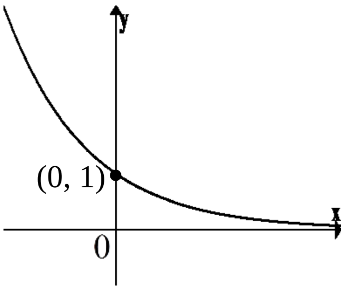
O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ aparece diante de uma das situações: $a > 1$(função crescente) ou $0 < a < 1$(função decrescente).

Gráfico 13 – função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$



Fonte: Autor, 2017

Gráfico 14 – função exponencial $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$



Fonte: Autor, 2017

Uma função pode ser chamada de "função do tipo exponencial"[3].

4.4 Função composta

Dadas duas funções $\mathbf{f : A \to B}$ e $\mathbf{g : B \to C}$, chamamos de função composta de **g** e **f** a função $\mathbf{g \circ f : A \to C}$ definida por

$$\mathbf{(g \circ f)(x) = g[f(x)]}$$

para todo $x \in A$.

Note que pode ocorrer $g \circ f = f \circ g$, mas, de um modo geral $g \circ f \neq f \circ g$, ou seja, a composição de funções é uma operação que não admite a propriedade comutativa.

Veremos a seguir um exemplo da função composta.

Dadas as funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = |x|$ com x um número real.

Assim a função composta f o g é dada por: $f \circ g\,(x) = f(g(x)) = f(|x|) = 2|x| + 1$.

E a função composta g o f é dada por: $g \circ f\,(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = |2x + 1|$.

[3] Segundo Lima(2013, p. 72): Uma função g: IR →IR é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in$ IR, onde ***a*** e ***b*** são constantes positivas.

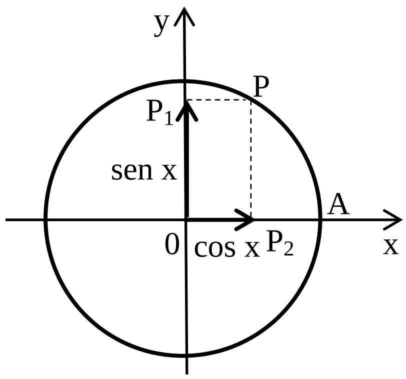
4.5 Funções trigonométricas

4.5.1 Função seno

Uma função $f : R \to R$ é chamada de função seno quando podemos associar um número real **x** a um valor real **sen x**, para todo $x \in IR$. Escrevemos **f(x) = sen x**.

Segundo Antar Neto(1985, p. 51), na figura abaixo a ordenada P_1 do ponto P(cos x, sen x) denomina-se **seno do número real x**, e a abscissa P_2 do ponto P(cos x, sen x) denomina-se **cosseno do número real x.**

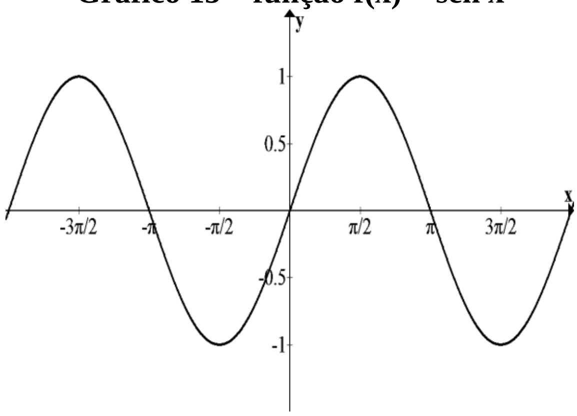
Figura 7 – Círculo trigonométrico



Fonte: Desenvolvido pelo Autor baseado em Antar Neto(1985 p. 51), 2017

O gráfico da função seno é a **senóide.**

Gráfico 15 – função f(x) = sen x



Fonte: Autor, 2017

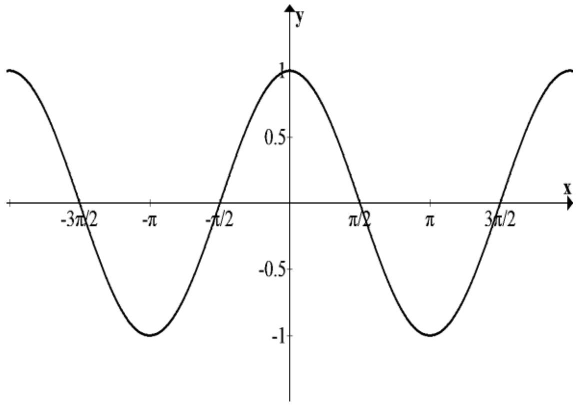
4.5.2 Função cosseno

Uma função f : R $\rightarrow$ R é chamada de função cosseno quando podemos associar um número real **x** a um valor real **cos x**, para todo x $\in$ R. Escrevemos **f(x) = cos x**.

Veja a representação do cosseno de **x** na figura 5.

O gráfico da função cosseno é a **cossenóide.**

Gráfico 16 – função F(x) = cos x



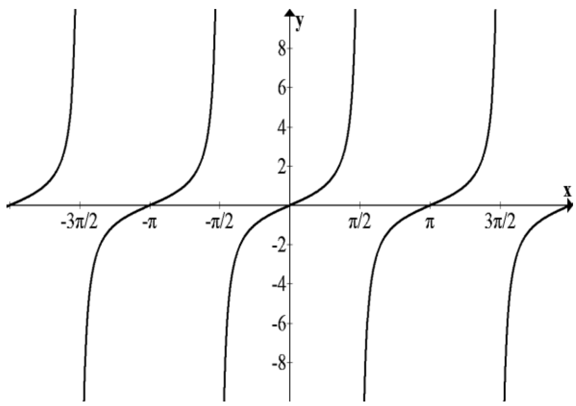
Fonte: Autor, 2017

4.5.3 Função tangente

Uma função f : R $-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\right\} \rightarrow$ R é chamada de função tangente quando podemos associar um número real **x** a um valor real **tg x**, ou seja, **f(x) = tg x** para todo x $\in$ R $-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\right\}$.

O gráfico da função tangente é a **tangentóide.**

Gráfico 17 – função f(x) = tgx



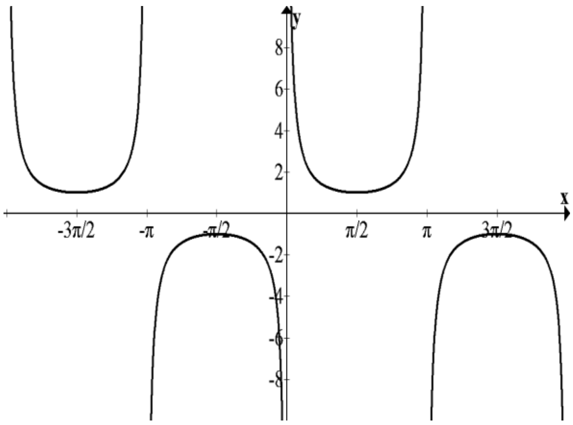
Fonte: Autor, 2017

4.5.4 Função cossecante

Uma função f : R $-$ $\{k\pi, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\} \rightarrow$ R é chamada de função cossecante quando podemos associar um número real **x** a um valor real **cossec x**, ou seja, **f(x) = cossec x** para todo x $\in$ R $-$ $\{k\pi, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\}$.

Na função cossecante temos que o conjunto imagem é Im(f) = $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Gráfico 18 – função f(x) = cossec x



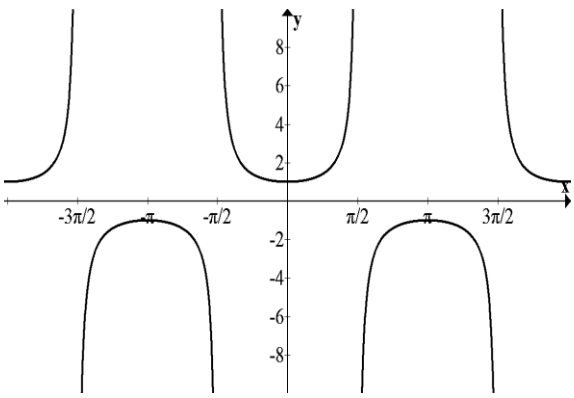
Fonte: Autor, 2017

4.5.5 Função secante

Uma função f : R $-$ $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\right\} \rightarrow$ R é chamada de função secante quando podemos associar um número real **x** a um valor real **sec x**, ou seja, **f(x) = sec x** para todo x $\in$ R $-$ $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\right\}$.

Na função secante temos que o conjunto imagem é Im(f) = $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Gráfico 19 – função f(x) = sec x



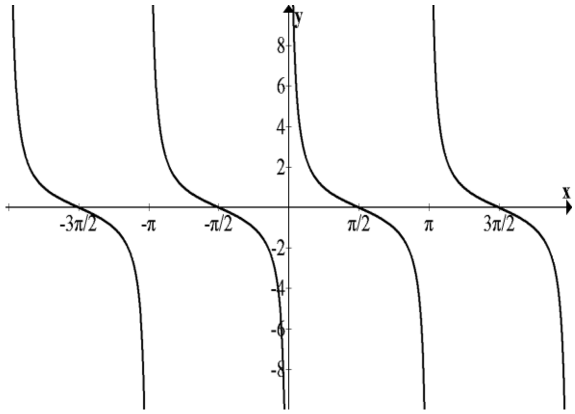
Fonte: Autor, 2017

4.5.6 Função cotangente

Uma função f : R $-$ $\{k\pi, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\} \to$ R é chamada de função cotangente quando podemos associar um número real **x** a um valor real **cotg x**, ou seja, **f(x) = cotg x** para todo x $\in$ R $-$ $\{k\pi, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\}$.

Na função cotangente temos que o conjunto imagem Im(f) é o conjunto dos números reais.

Gráfico 20 – função f(x) = cotg x



Fonte: Autor, 2017

4.5.7 Funções trigonométricas periódicas

Uma função f : R $\to$ R é dita **periódica** de período **t** se existe um número real **t** > **0** tal que f(x + t) = f(x) para todo x real. O menor valor de **t** que verifica essa condição é chamado **período** de f.

Exemplos de funções periódicas já conhecidas são as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente.

Vamos mostrar que a função seno definida para todos os valores reais é uma função periódica de período 2π, ou seja, para todo número real x e para todo número inteiro k, segue que sen(x) = sen(x+2π) = sen(x+4π) =...= sen(x+$2k\pi$).

Note que, pela fórmula do seno da soma de dois arcos, temos

$$\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x) \,.\, \cos(2k\pi) + \cos(x) \,.\, \text{sen}(2k\pi).$$

Como k é um número inteiro então $\cos(2k\pi) = 1$ e $\text{sen}(2k\pi) = 0$. Daí, segue que

$$\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x) \,.\, 1 + \cos(x) \,.0 = \text{sen}(x).$$

Portanto a função seno é periódica de período 2π.

Segue na tabela abaixo as outras funções trigonométricas periódicas e seus respectivos períodos e as demonstrações deixaremos a cargo do leitor.

Tabela 4 – Funções trigonométricas periódicas e seus respectivos períodos

FUNÇÃO	PERÍODO
Cosseno	2π
Tangente	π
Secante	2π
Cossecante	2π
Cotangente	π

Fonte: Autor, 2017

4.6 Funções inversas

Seja $f : A \to B$ uma função real.

Dizemos que uma função $g : B \to A$ é a **inversa de f** quando $g(f(x)) = x$ e $f(g(x)) = y$, para todo $x \in A$ e $y \in B$. Podemos escrever $g = f^{-1}$.

Assim g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g.

Note que:

- f é injetiva, pois se $f(x_1) = f(x_2)$ então por definição $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Mas como $g(f(x_1)) = x_1$ e $g(f(x_2)) = x_2$ então $x_1 = x_2$, para todo x_1 e x_2 pertencentes a A.
- f é sobrejetiva, pois dado $y \in B$, por definição, existe $x \in A$ tal que $g(y) = x$. Então $f(x) = f(g(y)) = y$.

Concluímos assim que f é injetiva e sobrejetiva então é uma correspondência biunívoca entre A e B, ou seja, é o que chamamos de bijeção entre A e B. Assim podemos afirmar que: f possui inversa se, e somente se, f é uma bijeção.

Assim se f possui inversa então:

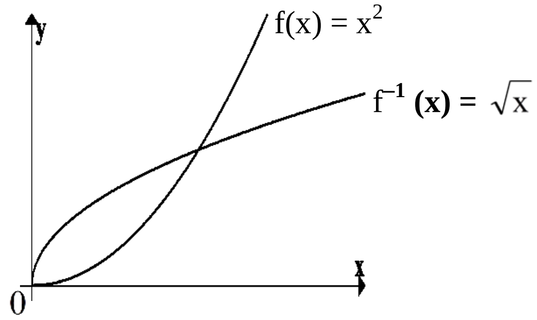
- $D(f^{-1}) = B = Im(f)$
- $Im(f^{-1}) = A = D(f)$
- $y = f(x)$ se, e somente se, $x = f^{-1}(y)$
- O gráfico de f^{-1} é simétrico do gráfico de f em relação à reta $y = x$.

Estudaremos algumas funções inversas de funções elementares e trigonométricas.

4.6.1 Função raiz quadrada

A função f : $R_+ \to R_+$ definida por $f(x) = x^2$ é invertível e sua inversa é a função $f^{-1} : R_+ \to R_+$ tal que $\mathbf{f^{-1}(x) = \sqrt{x}}$. Veja abaixo os gráficos de f e f^{-1}.

Gráfico 21 – funções $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



Fonte: Autor, 2017

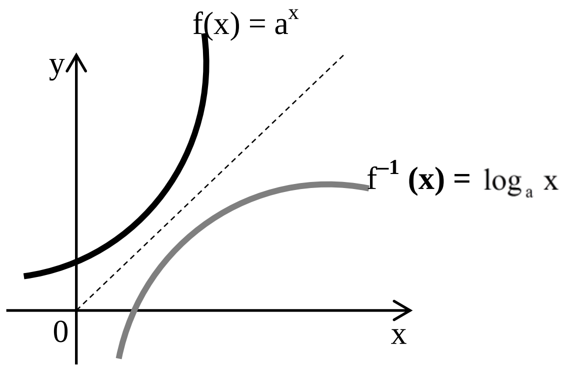
4.6.2 Função logaritmo

Definimos a função logaritmo g : $R_+ \to R$ dada por $\mathbf{g(x) = \log_a x}$, para cada $\mathbf{a > 0}$ e $\mathbf{a \neq 1}$, aquela que associa a cada $\mathbf{x \in R_+}$ o número real $\mathbf{\log_a x}$, chamado de logaritmo de x na base a.

Vimos anteriormente em 4.2.4 que para todo número real **a** onde $\mathbf{a > 0}$ e $\mathbf{a \neq 1}$, a função f : $R \to R_+$ dada por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ ou decrescente se $0 < a < 1$. Podemos observar assim que a função exponencial $f(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre R e R_+. Assim essa função f possui uma inversa e essa inversa é a **função logaritmo** $\mathbf{g = f^{-1}}$.

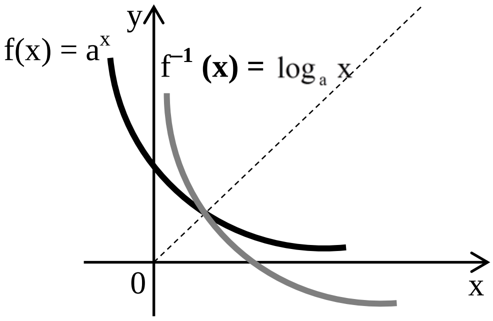
Veja abaixo o esboço dos gráficos de **f** e $\mathbf{g = f^{-1}}$ como ficam quando $a > 1$ e quando $0 < a < 1$.

Gráfico 22 – funções $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$ com $a > 1$



Fonte: Autor, 2017

Gráfico 23 – funções $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$ com $0 < a < 1$



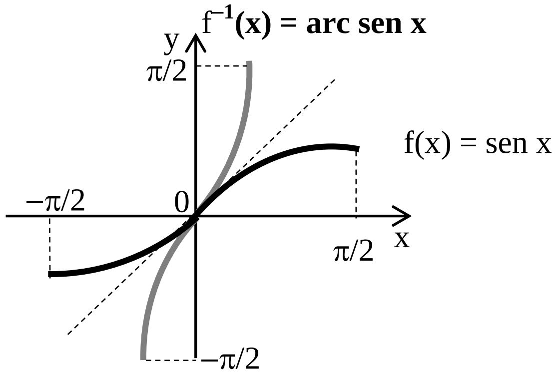
Fonte: Autor, 2017

4.6.3 Função arco seno

A função f(x) = sen x, quando restrita ao domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e ao contradomínio [–1, 1], é invertível e sua inversa é a função f^{-1}: $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por **$f^{-1}(x)$ = arc sen x**.

Veja abaixo o esboço dos gráficos de **f** e **f^{-1}** como ficam.

Gráfico 24 – funções f(x) = sen x e $f^{-1}(x)$ = arc sen x



Fonte: Autor, 2017

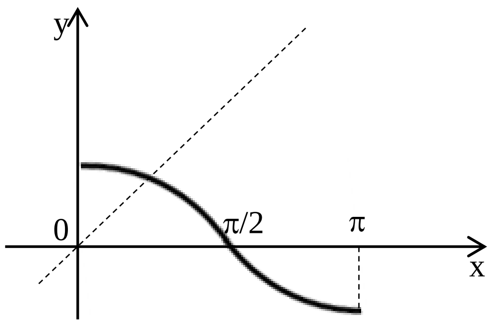
4.6.4 Função arco cosseno

A função f(x) = cos x, quando restrita ao domínio $[0, \pi]$ e ao contradomínio [–1, 1], é invertível e sua inversa é a função f^{-1}: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ definida por

$f^{-1}(x)$ = arc cos x

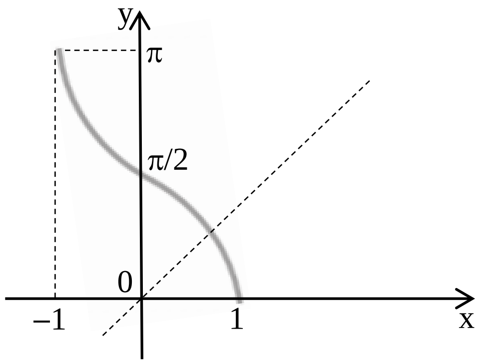
Veja abaixo o esboço dos gráficos de **f** e **f^{-1}** como ficam.

Gráfico 25 – função f(x) = cos x no intervalo [0, π]



Fonte: Autor, 2017

Gráfico 26 – função f^{-1} **(x) = arc cos x no intervalo [–1, 1]**



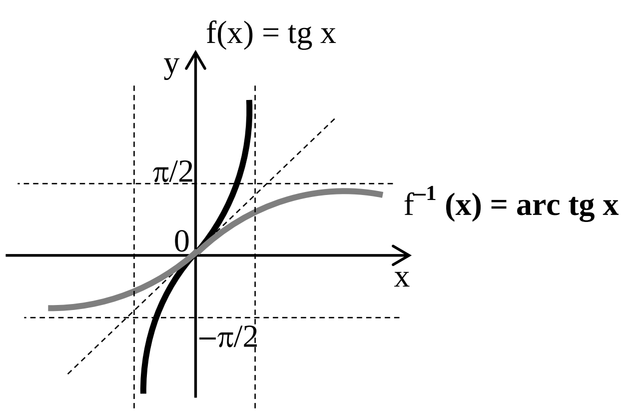
Fonte: Autor, 2017

4.6.5 Função arco tangente

A função f(x) = tg x, quando restrita ao domínio $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e ao contradomínio R, é invertível e sua inversa é a função f^{-1}: R $\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ definida por **f^{-1}(x) = arc tg x**

Veja abaixo o esboço dos gráficos de **f** e **f^{-1}** como ficam.

Gráfico 27 – funções f(x) = tg x e f^{-1} **(x) = arc tg x**



Fonte: Autor, 2017

4.7 Operações com funções

Sejam duas funções: $f : A \rightarrow R$ e $g : B \rightarrow R$, com A e B subconjuntos dos reais e $A \cap B \neq \varnothing$, definimos as seguintes operações com funções:

- Denomina-se **soma f + g** a função $\mathbf{(f + g) : A \cap B \rightarrow R}$ definida por $\mathbf{(f + g)(x) = f(x) + g(x)}$.
- Denomina-se **diferença f – g** a função $\mathbf{(f - g) : A \cap B \rightarrow R}$ definida por $\mathbf{(f - g)(x) = f(x) - g(x)}$.
- Denomina-se **multiplicação por um escalar c por f** a função $\mathbf{cf : A \rightarrow R}$ definida por $\mathbf{(cf)(x) = c \, . \, f(x)}$.
- Denomina-se **produto f . g** a função $\mathbf{(f \, . \, g) : A \cap B \rightarrow R}$ definida por $\mathbf{(f \, . \, g)(x) = f(x) \, . \, g(x)}$.
- Denomina-se **quociente** $\mathbf{\frac{f}{g}}$ a função $\mathbf{\left(\frac{f}{g}\right)}$ **:** $\{x \in A \cap B / g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $\mathbf{\left(\frac{f}{g}\right)(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

5 ESTUDO DE LIMITE E A LINGUAGEM DO ENSINO MÉDIO

Como vimos no capítulo 3, os livros didáticos de matemática destinados ao ensino médio que abordam o assunto limite, fazem essa abordagem apresentando os conteúdos de forma básica, não atendendo assim os anseios dos alunos que desejam aprofundar-se nesse assunto.

Vale salientar ainda que os exercícios oferecidos por estas obras do ensino médio são insuficientes na habilitação do aluno para resolver questões clássicas e criativas das provas das escolas militares EFOMM e Escola Naval.

Assim, neste capítulo, abordaremos o assunto limite baseado nos programas dos concursos da EFOMM e Escola Naval, ou seja, colocaremos os conteúdos necessários para atender um aluno que deseja iniciar o estudo de limite e ter um bom desenvolvimento nas resoluções das questões propostas pelos concursos citados.

Estudaremos: Limite de funções; propriedades de limites de funções; funções contínuas; teorema da troca; teorema do confronto; limites infinitos; limites no infinito; limites fundamentais; assíntotas.

5.1 Limites de funções

5.1.1 Ideia intuitiva de Limite de uma função

Como a ideia intuitiva de limite de uma função é apresentada à alunos do ensino médio nos livros didáticos?

Essa ideia intuitiva é apresentada ao aluno de forma elementar visando motivá-lo a seguir estudando. A ideia é transmitida através de:

- Quadro de sucessões numéricas
- Valores do domínio próximos de um valor fixo do domínio somente em funções elementares.
- Velocidade instantânea aproximada pela velocidade média

Veremos a ideia intuitiva de limite de uma função em três exemplos:

Exemplo 1

Seja a função $f(x) = 3x + 2$. Daremos valores para x que se aproximem de 2, pela sua direita (valores maiores que 2) e pela esquerda (valores menores que 2) e calcularemos o valor correspondente de $f(x) = y$:

Tabela 5 – Valores de x maiores que 2 e suas imagens na função f(x) = 3x + 2

x	*f(x) = 3x + 2*
2,4	9,2
2,3	8,9
2,1	8,3
2,04	8,12
2,02	8,06
2,01	8,03
2,001	8,003

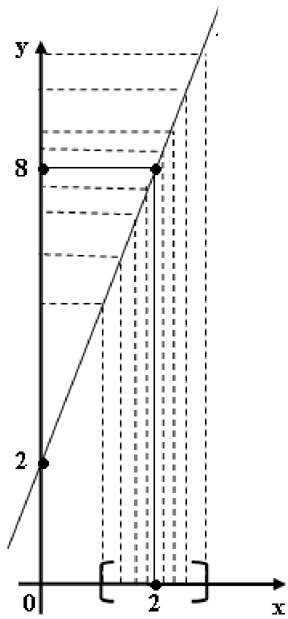
Fonte: Autor, 2017

Tabela 6 – Valores de x menores que 2 e suas imagens na função f(x) = 3x + 2

x	*f(x) = 3x + 2*
1,4	6,2
1,6	6,8
1,9	7,7
1,96	7,88
1,98	7,94
1,99	7,97
1,999	7,997

Fonte: Autor, 2017

Gráfico 28 – função f(x) = 3x + 2



Fonte: Autor, 2017

Note que, à medida que os valores de **x** se aproximam de 2(sem atingi-lo) por valores menores que 2(pela esquerda de 2) ou por valores maiores que 2(pela direita de 2), os valores de **y=f(x)** se aproximam de 8, ou seja, quando **x** tende a 2 ($x \to 2$) pela direita ou pela esquerda, **y=f(x)** tende a 8 ($y \to 8$).

Assim podemos escrever que:

- O limite de **f(x)** quando **x** tende a 2 pela esquerda é igual a 8, e indicamos por:

$$\lim_{x \to 2^-} (3x + 2) = 8$$

- O limite de **f(x)** quando **x** tende a 2 pela direita é igual a 8, e indicamos por:

$$\lim_{x \to 2^+} (3x + 2) = 8$$

Estes limites são chamados ***limites laterais*** e, como são iguais, pela direita e pela esquerda, então o limite da função **f(x) = 3x + 2** quando **x** tende a 2 pode se resumir de forma única:

$$\lim_{x \to 2} (3x + 2) = 8$$

Exemplo 2

Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.

Note que a função não é definida para **x = 3**, pois esse valor anula o denominador da fração. Assim o domínio dessa função é o conjunto $\{x \in R \mid x \neq 3\}$.

Mas, suponha que precisamos saber o que acontece com essa função quando os valores de **x** se aproximam de 3.

Segue na tabela abaixo os valores para ***x*** que se aproximem de 3, pela sua direita (valores maiores que 3) e pela esquerda (valores menores que 3) e calcularemos o valor correspondente de ***f(x) = y***:

Tabela 7 – Valores de x maiores que 2 e suas imagens na função $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

x	$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$
3,5	5,5
3,2	5,2
3,1	5,1
3,01	5,01
3,001	5,001
3,0001	5,0001

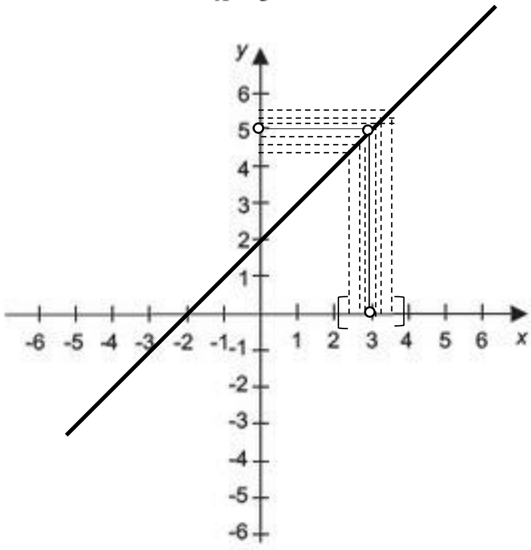
Fonte: Autor, 2017

Tabela 8 – Valores de x menores que 2 e suas imagens na função $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

x	$f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$
2,5	4,5
2,8	4,8
2,9	4,9
2,99	4,99
2,999	4,999
2,9999	4,9999

Fonte: Autor, 2017

Gráfico 29 – função $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ **na vizinhança da ordenada 5**



Fonte: Autor, 2017

Note que, à medida que os valores de **x** se aproximam de 3(sem atingi-lo) por valores menores que 3(pela esquerda de 3) ou por valores maiores que 3(pela direita de 3), os valores de **y=f(x)** se aproximam de 5, ou seja, quando **x** tende a 3 ($x\rightarrow 3$) pela direita ou pela esquerda, **y=f(x)** tende a 5 ($y\rightarrow 5$).

Assim podemos escrever que:

- O limite de **f(x)** quando **x** tende a 3 pela esquerda é igual a 5, e indicamos por:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$$

- O limite de **f(x)** quando **x** tende a 3 pela direita é igual a 5, e indicamos por:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$$

Estes limites são chamados ***limites laterais*** e, como são iguais, pela direita e pela esquerda, então o limite da função $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ quando **x** tende a 3 pode se resumir de forma única:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$$

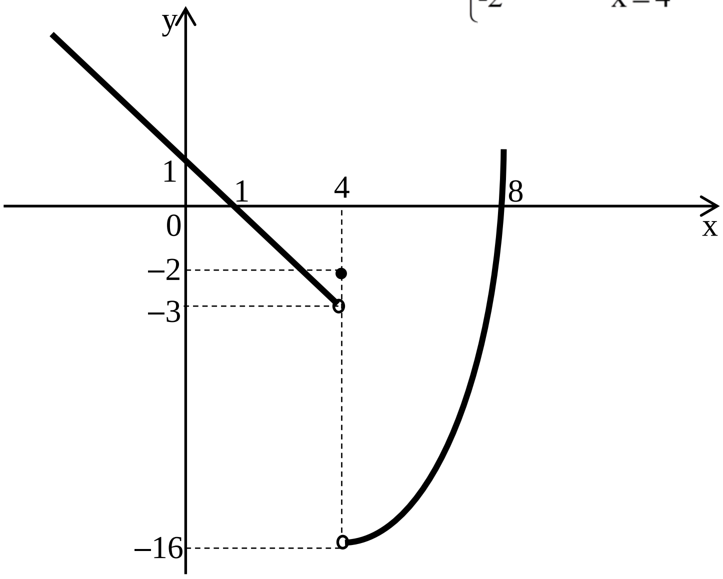
Exemplo 3

Considere a função $f(x)=\begin{cases} x^2-8x & x>4 \\ -x+1 & x<4 \\ \text{-2} & x=4 \end{cases}$.

O que acontece com essa função quando os valores de **x** se aproximam de 4?

Veja abaixo o gráfico dessa função.

Gráfico 30 – função $f(x)=\begin{cases} x^2-8x & x>4 \\ -x+1 & x<4 \\ \text{-2} & x=4 \end{cases}$



Fonte: Autor, 2017

Vê-se no gráfico que f(4) = −2. E ainda que se **x** é próximo de 4 do lado direito, então f(x) é próximo de −16, mas se **x** é próximo de 4 do lado esquerdo, então f(x) é próximo de −3.

Assim nesse exemplo nota-se que não é verdade que f(x) se aproxime de f(4) = −2 quando x se aproxima de 4. Então podemos concluir que o limite de f(x) quando x vai para 4 não existe.

5.1.2 Conceitos abstratos vindo da Análise Real no ensino médio: Vizinhança de um ponto

Existe uma **correspondência biunívoca** entre os números reais e os pontos de uma reta, ou seja, a cada ponto da reta corresponde um único número real e, reciprocamente, a cada número real corresponde um ponto de uma reta.

Seja o intervalo aberto:

$$\boldsymbol{I} = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\} \text{ ou } \boldsymbol{I} =]a, b[$$

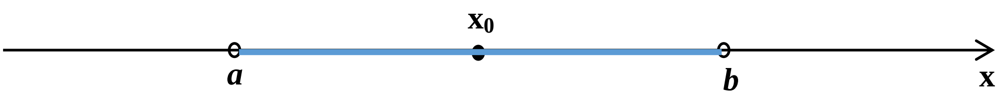
onde ***a*** e ***b*** são números reais e distintos.

Seja x_0 um úmero real.

Se $\mathbf{x_0}$ pertence a ***I***, esse intervalo é chamado de **vizinhança completa de $\mathbf{x_0}$.**

Uma **vizinhança completa de $\mathbf{x_0}$** é indicada por $V(x_0)$.

Figura 8 – Ponto $\mathbf{x_0}$ no intervalo aberto]a, b[

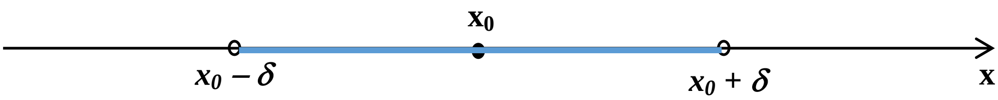


Fonte: Autor, 2017

Assim, o intervalo]a, b[é uma vizinhança completa de x_0 se e somente se $x_0 \in]a, b[$, ou seja, $a < x_0 < b$.

Chamamos de **vizinhança completa simétrica de $\mathbf{x_0}$ de raio δ**, com $\delta \in \mathbf{R}_+^*$, ao intervalo aberto $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e indica-se por $\mathbf{V(x_0,\delta)}$.

Figura 9 – Ponto $\mathbf{x_0}$ no intervalo aberto $\mathbf{]\, x_0 - \delta, x_0 + \delta\, [}$



Fonte: Autor, 2017

Chamamos de **vizinhança reduzida de $\mathbf{x_0}$** e indicamos por $\mathbf{V^*(x_0)}$, o valor da diferença entre a vizinhança completa de x_0 ($V(x_0)$) e o ponto x_0, ou seja

$$\mathbf{V^*(x_0) = V(x_0) - \{x_0\}.}$$

Assim chamamos de **vizinhança reduzida simétrica de $\mathbf{x_0}$ de raio δ** e indicamos por $\mathbf{V^*(x_0, \delta)}$ a seguinte diferença:

$$\mathbf{V^*(x_0, \delta) = V(x_0, \delta) - \{x_0\}.}$$

5.1.3 Definição formal de limite de uma função adaptada ao ensino médio

Diante da ideia intuitiva de limite de uma função e do que é vizinhança de um ponto, iremos dar uma definição de limite de maneira mais abstrata.

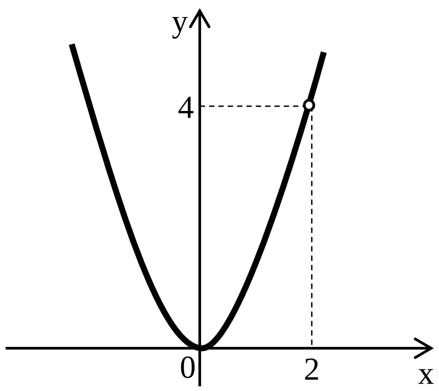
Para isso, considere o exemplo segundo Antar Neto (1985, p 71-74):

Exemplo

Considere a função f : R – 2 → R, definida por $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

Para x ≠ 2 temos que $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x-2} = \frac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2$ e assim os pontos do gráfico de ***f(x)*** são pontos de uma parábola, ou seja, o gráfico de ***f(x)*** são pontos de uma parábola com exceção daquele que tem abscissa $\mathbf{x_0 = 2}$.

Gráfico 31 – função $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Antar Neto(1985, p. 71)

Pela noção intuitiva de limite temos que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, ou seja, é possível fazer ***f(x)*** ficar tão próximo de 4 quanto quisermos, bastando fazer **x** ficar suficientemente próximo de 2(note que não desejamos que **x** fique igual a 2, mas muito próximo de 2).

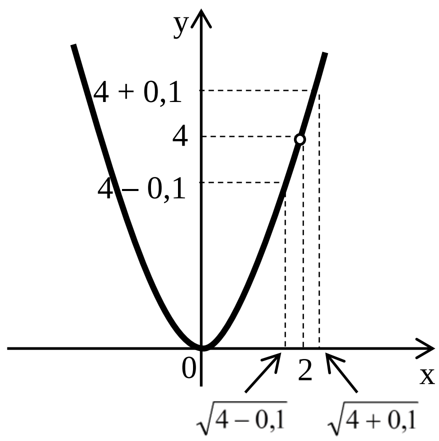
Suponha que a distância de ***f(x)*** até 4 seja menor do que 0,1, ou seja, que

$$4 - 0,1 < f(x) < 4 + 0,1$$

ou ainda, que $|f(x) - 4| < 0,1$.

Note, graficamente, que para todo ***f(x)*** na vizinhança de 4, devemos ter **x** dentro do intervalo $\sqrt{4-0{,}1} < x < \sqrt{4+0{,}1}$, com $x \neq 2$.

Gráfico 32 – função $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$ **na vizinhança da ordenada 4**



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Antar Neto(1985, p. 71)

Assim, supondo, $x \neq 2$ podemos escrever $\mathbf{f(x) = x^2}$ e assim a condição $|f(x) - 4| < 0{,}1$ pode ser escrita como $|x^2 - 4| < 0{,}1$.

Segue que $\mathbf{-\,0{,}1 < x^2 - 4 < 0{,}1}$ e ainda $\mathbf{4 - 0{,}1 < x^2 < 4 + 0{,}1.}$

Tomando-se $\sqrt{4-0{,}1} < x < \sqrt{4+0{,}1}$, com $x \neq 2$ temos que

$$\boxed{|f(x) - 4| < 0{,}1}$$

Mas, se desejarmos que a distância de ***f(x)*** até 4 seja menor que 0,001, ou seja, que $|f(x) - 4| < 0{,}001$, devemos escolher uma vizinhança de 2 com raio bem menor. Mas é claro que, por menor que seja a distância que desejarmos de f(x) até 4, será sempre possível encontrar uma conveniente vizinhança de 2 que funcione bem.

Generalizando, diremos que se tornarmos qualquer número positivo ε (por menor que seja este valor), poderemos fazer $|f(x) - 4| < \varepsilon$, pois será sempre possível escolher uma vizinhança de 2 com raio δ conveniente. Para essa vizinhança teremos que: **se** $|x-2|<\delta$ e **$x \neq 2$, então** $|f(x)-4|<\varepsilon$. Ao invés de escrever $|x-2|<\delta$ e $x \neq 2$, podemos escrever $0 < |x-2|<\delta$.

Assim vamos estabelecer formalmente a definição de limite de uma função.

Seja $f : A \to R$ uma função e seja x_0 um número real. O número x_0 pode pertencer ou não ao domínio de f, mas suporemos que existe ao menos uma vizinhança reduzida de x_0, que está inteiramente contida em A.

Dizemos que a função f tende ao limite L quando x tende a x_0 se, para qualquer número positivo ε, é possível encontrar um número positivo δ, tal que

$$\textbf{se } 0 < |x - x_0| < \delta \textbf{ , então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Assim podemos escrever o texto acima como: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, ou ainda, f(x) vai para L quando x vai para x_0.

5.1.4 Unicidade do limite

Seja $f : A \to B$ uma função para a qual existe o limite quando x tende a x_0. Prove que esse limite é único, ou seja, prove que se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Demonstração:

Faremos a demonstração com redução ao absurdo.

Por hipótese, $f : A \to B$ é uma função para a qual existe o limite quando x tende a x_0.

Segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe:

- $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_1$, tem-se que $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.
- $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_2$, tem-se que $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Suponha que $L_1 \neq L_2$ e considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ atenderemos as duas condições, ou seja, se $0 < |x - x_0| < \delta_1$, tem-se que $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Note que $|f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon$. Pela desigualdade triangular $|(f(x) - L_1) - (f(x) - L_2)| < |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$.

Dai, $|(f(x) - L_1) - (f(x) - L_2)| < 2\varepsilon$ e $|L_2 - L_2| < 2\varepsilon$.

Mas sabemos que o valor de ε pode ser escolhido arbitrariamente, desde que seja positivo. Assim escolheremos que $\varepsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2}$.

Como $|L_2 - L_1| < 2\varepsilon$ então $|L_2 - L_1| < 2.\frac{|L_2 - L_1|}{2}$, ou seja, $|L_2 - L_1| < |L_2 - L_1|$.

Portanto temos um absurdo e assim $L_2 = L_1$.

5.2 Propriedades dos limites de funções

Apresentaremos a seguir as propriedades dos limites de funções sem as demonstrações:

1) Se **f** é uma função definida por **f(x) = c** onde **c** $\in$ **R**, para todo x real, então $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

2) Se **f** é uma função definida por **f(x) = x**, para todo x real, então $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$.

Considerem as funções **f** e **g** tais que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$.

As seguintes propriedades são válidas:

3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \mathbf{L_1 + L_2}$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \mathbf{L_1 - L_2}$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} k[f(x)] = k.\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k\mathbf{L_1}$ com $k \in IR$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x).\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \mathbf{L_1.L_2}$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ com $L_2 \neq 0$

8) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^n = [L_1]^n$ com $n \in IN^*$

9) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ para n par devemos ter $L_1 \geq 0$

10) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right| = |L_1|$ com $n \in IN^*$

Todas estas propriedades são demonstradas nos livros tradicionais de cálculo ou de análise real. Não são demonstradas aqui por não serem úteis para o fim a que este material didático se propõe.

5.3 Funções contínuas

São funções em que seus gráficos não apresentam interrupções para todo o domínio da função. São muito importante para o estudo de limite.

De um modo formal podemos definir a **função contínua em um ponto** da seguinte forma:

Seja $\mathbf{f} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$ com $A \subset R$ e seja $x_0 \in A$. A função f é **contínua** em x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Podemos escrever essa definição da seguinte forma, ou seja, as condições para ser função contínua são:

- Existe $f(x_0)$ considerando que $x_0 \in A$
- Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

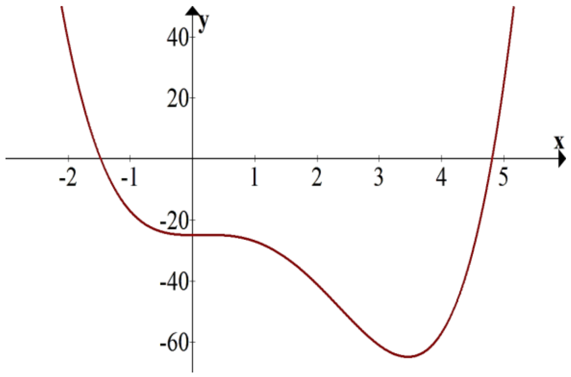
A teoria acima aborda a continuidade de uma função em um ponto, mas podemos ampliar essa definição para todo o domínio da função. Ou seja: **Uma função $\mathbf{f : A \rightarrow R}$ é contínua em um conjunto A se é contínua em todo ponto de A.**

Seguem abaixo algumas funções que são contínuas:

- Função constante
- Função identidade
- Função afim
- Função quadrática
- Função polinomial qualquer
- Função racional fracionária, para valores do domínio onde a função está definida
- Função exponencial
- Função logarítmica
- Função seno, função cosseno e função tangente.
- Função cossecante, função secante e função cotangente.

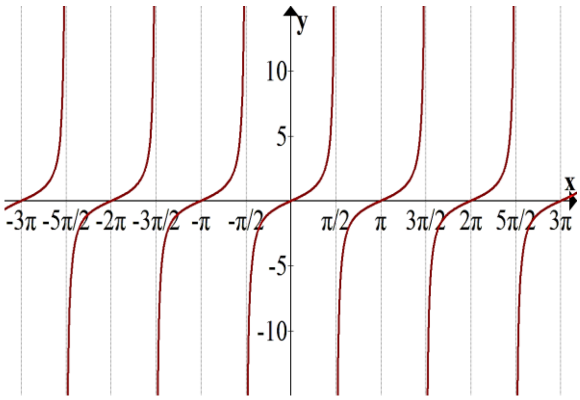
Vejam a seguir gráficos de algumas funções que são contínuas:

Gráfico 33 – função polinomial $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 25$



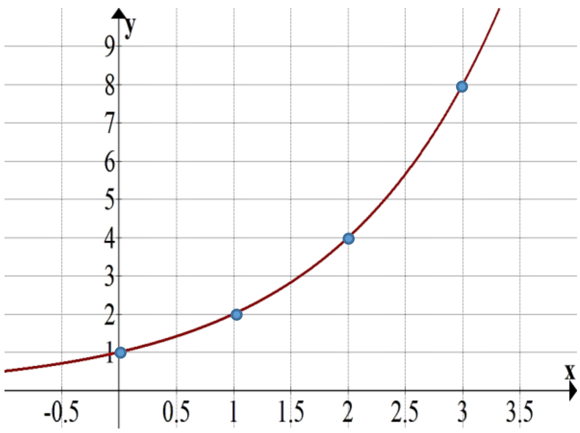
Fonte: Autor, 2017

Gráfico 34 – função trigonométrica $f(x) = \tan x$



Fonte: Autor, 2017

Gráfico 35 – função exponencial $f(x) = 2^x$



Fonte: Autor, 2017

5.3.1 Propriedades da função contínua

Se **f(x)** e **g(x)** funções contínuas no ponto **a** então também são funções contínuas no ponto **a** as funções: f(x) + g(x), f(x) − g(x), f(x) . g(x), kf(x) com k $\in$ R e $\frac{f(x)}{g(x)}$ com $g(a) \neq 0$.

Quando as funções são contínuas podemos trocar o símbolo que representa o limite com a função, ou seja:

- Como as **funções trigonométricas** são contínuas então veja o exemplo $\mathbf{\lim_{x\to x_0}[sen\, f(x)] = sen \lim_{x\to x_0} f(x).}$
- Como as **funções exponenciais** são contínuas então veja:

  1) Se f : R $\to$ R dada por f = a^x com a > 0 e a ≠ 1 é contínua em IR então $\mathbf{\lim_{x\to x_0} a^x = a^{\lim\limits_{x\to x_0} x} = a^{x_0}}$.

  2) Se $\mathbf{\lim_{x\to x_0} f(x) = L}$ então $\mathbf{\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}} = a^L$

- Como as **funções logarítmicas** são contínuas então veja:

  1) Se f : R_+^* $\to$ R dada por f = a^x com a > 0 e a ≠ 1 é contínua em IR_+^* então $\lim_{x\to x_0} \log_a^x = \log_a^{x_0}$.

  2) Se $\mathbf{\lim_{x\to x_0} f(x) = L}$ então $\mathbf{\lim_{x\to x_0} \log_a^{f(x)} = \log_a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \log_a^L}$.

- Se $\mathbf{\lim_{x\to a} g(x)} = g(a) = b$ é uma função contínua em **a** e se **f** é uma função contínua em **b**, então a **função composta fog** é contínua em **a**, ou seja, $\mathbf{\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f[g(a)] = f(b).}$

5.4 Teorema da troca

Vimos anteriormente na definição de função contínua num ponto, que se uma função é contínua no ponto x_0, temos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dai, observamos que para calcular o limite de uma função contínua em um ponto basta achar o valor numérico da função no ponto dado. Como exemplo veja que a função f(x) = 5x + 4 é contínua em x_0 = 1 então $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \mathbf{5x + 4} = f(1) = 5.1 + 4 = 9.$

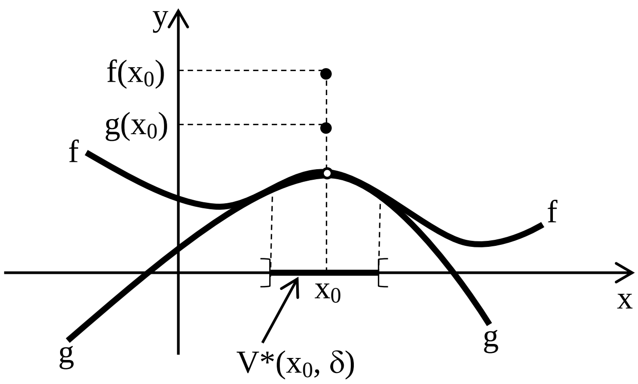
Mas, se a função não é contínua no ponto x_0? Como calcular seu limite nesse ponto?

Nesse caso o cálculo do limite não pode ser calculado de imediato, ou seja, se a função não é contínua num ponto considerado teremos que usar um potente teorema que ajuda a resolver uma grande quantidade de casos.

Segundo Antar Neto(1985, p. 95) o enunciado do Teorema da troca é: "Seja $V^*(x_0, \delta)$ uma vizinhança reduzida de x_0. Admitamos que f e g sejam funções tais que para todo $x \in V^*(x_0, \delta)$ se tenha f(x) = g(x). Sendo assim, se $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ então $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$".

Assim podemos entender melhor o teorema da troca como a troca da função **f por g**, sem que isso altere o valor do limite.

Gráfico 36 – funções f e g



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Antar Neto(1985, p. 95)

Observe no gráfico acima que não nos interessam os valores numéricos de $f(x_o)$ e $g(x_o)$ e ainda que não precisam estarem definidos.

Logicamente que o caso de maior interesse nessa troca é que a função **g** seja contínua no ponto x_0. Assim podemos dizer que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

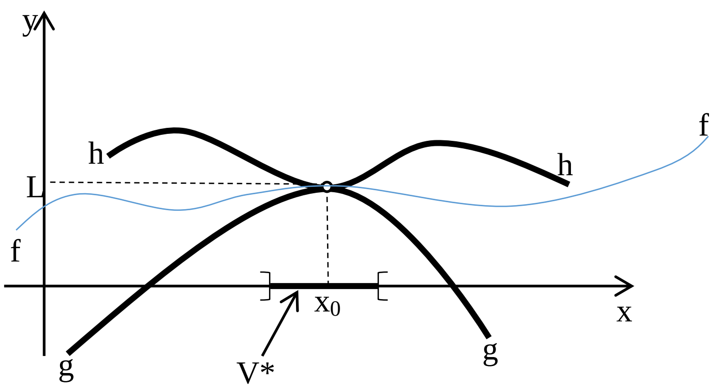
5.5 Teorema do Confronto

Esse importante teorema, também chamado por teorema do sanduíche, ajuda a determinar limite de uma função f num ponto x_0 sendo que essa função está entre duas outras funções g e h que tem o mesmo limite no ponto x_0. Assim, pelo teorema do confronto, o limite da função f no ponto x_0 é o mesmo do limite das funções g e h nesse mesmo ponto.

Enunciando formalmente o Teorema do confronto, segundo Antar Neto(1985, p. 147): "Sejam **g**, **f** e **h** funções cujos domínios contêm ao menos uma vizinhança reduzida V* de x_0.

Suponha-se que: para todo x $\in$ V* temos que g(x) $\leq$ f(x) $\leq$ h(x) e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$."

Gráfico 37 – funções f, g e h



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Antar Neto(1985, p. 95)

5.6 Limites infinitos

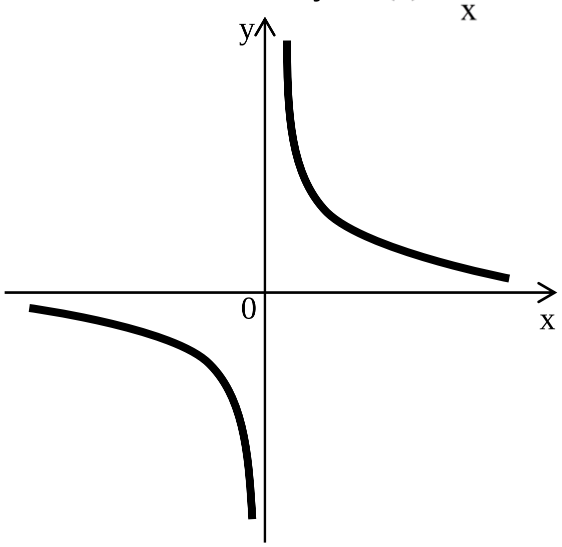
Dizer que a função f(x) tem **limite infinito** é equivalente a falar que o limite de f(x) quando x se aproxima de um número x_0 não existe e que f(x) cresce ou decresce sem limites. Representamos por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Exemplo:

Veja o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Gráfico 38 – função $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Fonte: Autor, 2017

Note que quando x se aproxima de $x_0=0$ pela direita, f(x) vai para $+\infty$ e quando x se aproxima de $x_0=0$ pela esquerda, f(x) vai para $-\infty$. Ou seja $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

O teorema a seguir é fundamental para o cálculo de limites infinitos. Segundo Iezzi(1994, p.58):

Sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ com $c \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ então:

I) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando x está próximo de a.

II) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ quando x está próximo de a.

O teorema acima é válido para $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

Segue abaixo uma tabela resumida com as propriedades dos limites infinitos:

Tabela 9 – Propriedades dos limites infinitos

Dados		conclusão
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) = +\infty$ **se** $b > 0$ $\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) = -\infty$ **se** $b < 0$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) = +\infty$ **se** $b < 0$ $\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) = -\infty$ **se** $b > 0$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$		$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$		$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$		$\lim\limits_{x\to a} \left\lvert \dfrac{1}{f(x)} \right\rvert = +\infty$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Iezzi(1994, p. 69)

As propriedades não são válidas para os casos da tabela a seguir:

Tabela 10 – Propriedades não válidas para limites infinitos

Dados		conclusão
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f - g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f - g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f + g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ (ou - }\infty)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = ?$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Iezzi(1994, p. 70)

5.6.1 Assíntota vertical

Assíntota de um gráfico de uma função é uma reta que a medida que um ponto desse gráfico se move ao longo da curva(gráfico), a distância desse ponto à reta se aproxima cada vez mais de zero.

A assíntota é denominada **vertical** quando a reta é expressa pela equação **x = k**, com $k \in IR$, se ao menos um dos limites a seguir acontece:

$$\lim_{x\to k^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to k^-} f(x) = \pm\infty$$

Como exemplo, podemos observar o gráfico 38 o qual mostra que quando $x \to 0^+$ temos $f(x) \to +\infty$, assim como quando $x \to 0^-$ temos $f(x) \to -\infty$.

5.7 Limites no infinito

Dizer que a função f(x) tem **limite no infinito** é equivalente a falar que o limite de f(x) quando x vai para o infinito vai para um número ou para o infinito. Representamos conforme tabela a seguir.

Tabela 11 – Limites no infinito

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to x-\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to x-\infty} f(x) = +\infty$

Fonte: Autor, 2017

Segue abaixo uma tabela resumida com as propriedades dos limites no infinito:

Tabela 12 – Propriedades dos limites no infinito

Dados		conclusão
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\,.\,g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\,.\,g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\,.\,g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\,.\,g)(x) = +\infty$ se $b > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\,.\,g)(x) = -\infty$ se $b < 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\,.\,g)(x) = +\infty$ se $b < 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\,.\,g)(x) = -\infty$ se $b > 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$		$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$		$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$		$\lim\limits_{x\to+\infty} \left\|\dfrac{1}{f(x)}\right\| = +\infty$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Iezzi(1994, p. 85)

As propriedades não são válidas para os casos da tabela abaixo:

Tabela 13 – Propriedades não válidas para limites no infinito

Dados		conclusão
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f-g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f-g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\,.\,g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = ?$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Iezzi(1994, p. 85)

5.7.1 Assíntota horizontal

A assíntota é denominada **horizontal** quando a reta é expressa pela equação **y = k**, com $k \in$ IR, e se ao menos um dos limites a seguir acontece:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$

Como exemplo podemos observar o gráfico 38 o qual mostra que quando $x \to +\infty$ temos $f(x) \to 0$, assim como quando $x \to -\infty$ temos $f(x) \to 0$.

5.8 Limites Fundamentais

Alguns tipos de limites podem ser usados para resolver outros limites, e assim são chamados de **limites fundamentais**. Veja na tabela a seguir:

Tabela 14 – Limites fundamentais

Limite fundamental trigonométrico	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
Limite fundamental do número irracional e	$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+k} = e \ (k \in Z)$ $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x+k}\right)^{x} = e \ (k \in Z)$ $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\lim_{x\to x_0} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \text{ se } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \text{ se } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
Limite fundamental do logaritmo natural	$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Fonte: Autor, 2017

No ensino médio não há demonstrações ou justificativas mais formais para tais propriedades citadas. Alguns autores usam argumentos geométricos para calcular, por exemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

5.9 Assíntota oblíqua

Uma **assíntota oblíqua** é uma reta cuja equação é dada por y = ax + b com a ≠ 0 e que o gráfico de uma função f(x) se aproxima dela.

Para que y = ax + b seja uma assíntota oblíqua, devemos ter: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|f(x) - ax - b|}{\sqrt{1+a^2}} = 0.$

Como o denominador é constante os limites serão nulos se: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax - b] = 0.$

Assim, vamos encontrar os valores de **"a"** e **"b"** da equação y = ax + b.

- Achando o **a**

Note que $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{[(f(x) - (ax+b)] = 0}$ e assim $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{f(x)} - \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{(ax+b) = 0.}$

Segue que $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{f(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{ax} + \lim_{x\to\pm\infty} b$ (dividindo ambos os membros por x)

Obtemos que $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{\frac{ax}{x}} + \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{\frac{b}{x}}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} a + 0\mathbf{.}$

Logo $a = \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{\frac{f(x)}{x}}$**,** ou seja, $a = \lim_{x\to+\infty} \mathbf{\frac{f(x)}{x}}$ ou $a = \lim_{x\to-\infty} \mathbf{\frac{f(x)}{x}}$

Portanto $\mathbf{a} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{\frac{f(x)}{x}}$**.**

- Achando o **b**

Note que $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{[(f(x) - (ax+b)] = 0}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{f(x)} - \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{(ax+b) = 0.}$

Segue que $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{f(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{ax} + \lim_{x\to\pm\infty} b$ e $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{f(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{ax} + b$

Logo $b = \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{f(x)} - \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{ax} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{[f(x) - ax]}$

Portanto $\mathbf{b} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{[f(x) - ax].}$

Exemplo: Analise as assíntotas da função $f(x) = x + \frac{1}{x}$

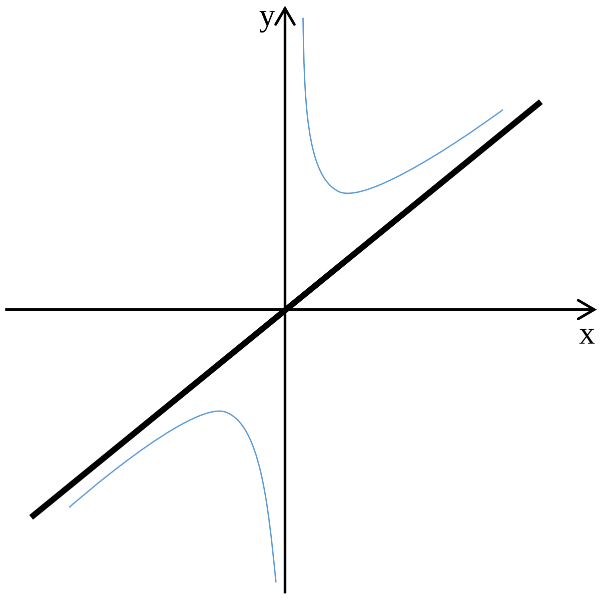
Note que $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}.$

Como $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$ então **x = 0** é **assíntota vertical**.

Como $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$ então não há **assíntota horizontal**.

Como $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$ e $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\mathbf{x^2}+1}{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$ então **y = x** é **assíntota oblíqua**.

Gráfico 39 – função $f(x) = x + \frac{1}{x}$



Fonte: Autor, 2017

6 O ASSUNTO LIMITE NAS PROVAS DE MATEMÁTICA DA EFOMM

Atualmente a prova de matemática da EFOMM possui 20 questões de múltipla escolha com 5 alternativas e apresenta uma boa abrangência do programa solicitado pela banca examinadora, pois aborda quase todos os conteúdos do programa, buscando sempre questões que exigem um bom preparo dos candidatos.

6.1 Limite na prova da EFOMM

O assunto limite aparece em todos os concursos de seleção da EFOMM, a partir de 2000, com exceção o ano de 2008, como mostra a tabela abaixo que relaciona o biênio que aconteceram os concursos com as respectivas quantidades de questões sobre limites presentes nas provas.

Vale lembrar que o primeiro ano do biênio se refere ao ano que foi realizada a prova teórica e as demais etapas do concurso e o segundo ano se refere ao ingresso na EFOMM.

Tabela 15 – Quantidade de questões de limite nas provas da EFOMM de 2000 a 2017

ANO	QUANTIDADE DE QUESTÕES
2000-2001	4
2001-2002	1
2002-2003	1
2003-2004	1
2004-2005	3
2005-2006	2
2006-2007	1
2007-2008	1
2008-2009	-
2009-2010	1
2010-2011	1
2011-2012	1
2012-2013	1
2013-2014	1
2014-2015	1
2015-2016	1
2016-2017	2
2017-2018	1

Fonte: Autor, 2017

Assim, podemos observar que, limite é um assunto muito abordado nesse concurso, atingindo a marca de aproximadamente 6,67% das questões propostas no período citado na tabela acima.

6.2 Resoluções das questões sobre limite nas provas da EFOMM de 2000 a 2017.

Seguem as resoluções comentadas das questões de limite presentes nas provas da EFOMM de 2000 a 2017 e as respostas encontradas estão de acordo com os gabaritos oficiais.

1) Prova EFOMM 2000-2001

Das afirmativas abaixo:

I. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} (f.g)(x) = +\infty$

II. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} (f.g)(x) = +\infty$

III. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} (f.g)(x) = +\infty$

IV. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

São incorretas:

(A) II e IV

(B) I e IV

(C) III e IV

(D) apenas a II

(E) II e III

Resolução:

A propriedade do produto de funções abaixo ajuda a resolver os itens I, II e III.

Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = M$ então

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to+\infty} (f.g)(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x). \lim_{x\to+\infty} g(x) = L.M$$

Observação: As propriedades de limites são válidas quando substituirmos $x\to a$ por $x\to+\infty$ ou por $x\to-\infty$

As soluções corretas são:

I) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f.g)(x) = L.M = (+\infty).(+\infty) = +\infty$ **(verdadeira)**

II) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f.g)(x) = L.M = (+\infty).(-\infty) = -\infty$ **(falsa)**

III) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f.g)(x) = L.M = (-\infty).(-\infty) = +\infty$ **(verdadeira)**

IV) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$ **(falsa)**

Resposta: Letra A

2) Prova EFOMM 2000-2001

O valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$ é:

(A) e^{-3}

(B) e^{-1}

(C) e

(D) e^{2}

(E) e^{3}

Resolução:

Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$ faremos uma mudança de variável, ou seja, $\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{y}$ e assim $x=3y$. Observe que quando $x\to+\infty$ temos que $y\to+\infty$.

Segue que,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y} = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{3} = \left[\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{3} = e^{3}$$

Resposta: Letra E

3) Prova EFOMM 2000-2001

O valor de $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$ é:

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Resolução:

Vamos calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$.

Sabemos que: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Fazendo $a=\sqrt[3]{3x-5}$ e $b=1$, podemos racionalizar o denominador do limite multiplicando por $\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^2+\sqrt[3]{3x-5}+1$.

Assim, $\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}\cdot\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^2+\sqrt[3]{3x-5}+1}{\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^2+\sqrt[3]{3x-5}+1}=\dfrac{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^2+\sqrt[3]{3x-5}+1\right]}{3x-5-1}=$

$$=\frac{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^2+\sqrt[3]{3x-5}+1\right]}{3(x-2)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^2+\sqrt[3]{3x-5}+1}{3}.$$

Segue que $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^2+\sqrt[3]{3x-5}+1}{3}=\frac{1+1+1}{3}=1.$

Resposta: Letra A

4) Prova EFOMM 2000-2001

O valor de $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$ é:

(A) $\dfrac{2}{3}$

(B) $\dfrac{5}{3}$

(C) $\dfrac{3}{5}$

(D) $\dfrac{3}{2}$

(E) 2

Resolução:

Vamos calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$.

Note que em $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$, fazendo x = 1 e usando as propriedades de limite de uma função encontraremos que o limite é uma indeterminação 0/0.

Observe que x = 1 á raiz do polinômio do numerador e também é raiz do polinômio do denominador. Assim estes polinômios são divisíveis por (x − 1) e podemos fatorá-los da seguinte forma:

I) $3x^3 - 4x^2 - x + 2 = (x - 1)(3x^2 - x - 2)$

II) $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)(2x^2 - x - 1)$

Assim $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(3x^2 - x - 2)}{(x-1)(2x^2 - x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(3x^2 - x - 2)}{(2x^2 - x - 1)} = \dfrac{0}{0}$.

Assim numerador e denominador são divisíveis novamente por (x − 1) e podemos fatorá-los da seguinte forma:

I) $3x^2 - x - 2 = (x - 1)(3x + 2)$

II) $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$

Assim $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(3x^2 - x - 2)}{(2x^2 - x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(2x+1)} =$.

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(3x+2)}{(2x+1)} = \frac{3.1+2}{2.1+1} = \frac{5}{3}$$

Resposta: Letra B

5) Prova EFOMM 2001-2002

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{x}$ é:

(A) e^5

(B) 0

(C) e

(D) 1

(E) 5

Resolução:

Vamos calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{x}$.

Para calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{x}$ vamos usar o limite fundamental $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, para todo a > 0 e $a \neq 1$.

Para isso, faremos uma mudança de variável, ou seja, $5x = y$ e assim $x = \frac{y}{5}$ Observe que quando x $\to$0 temos que y $\to$+0.

Segue que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{\frac{y}{5}} = \lim_{y\to 0} 5\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right) = \lim_{y\to 0} 5.\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right) = 5.\ln e = 5.1 = 5$$

Resposta: Letra E

6) Prova EFOMM 2002-2003

Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}$ é:

(A) $-\infty$

(B) 0

(C) 1

(D) 2

(E) $+\infty$

Resolução:

Vamos calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

Vamos multiplicar o numerador e denominador por $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}$..

Assim, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}.\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-1+2x}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}} = \frac{4}{2} = 2$$

Resposta: Letra D

7) Prova EFOMM 2003-2004

Calcule $\lim_{x \to +\infty} [\log(x+1) - \log x]$:

(A) $+\infty$

(B) 0

(C) 1

(D) -1

(E) $-\infty$

Resolução:

Vamos calcular $\lim_{x \to +\infty} [\log(x+1) - \log x]$.

Note que $\log(x+1) - \log x = \log \frac{x+1}{x}$.

Assim $\lim_{x \to +\infty} [\log(x+1) - \log x] = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{x+1}{x} = \log \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = \log \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$

$$= \log \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} = \log \frac{1+0}{1} = \log 1 = 0$$

Resposta: Letra B

8) Prova EFOMM 2004-2005

O valor de $\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 1}$ é:

(A) 1

(B) ∞

(C) e

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{4}{3}$

<u>Resolução:</u>

Vamos calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 1}$.

Note que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \dfrac{0}{0}$. Assim numerador e denominador são divisíveis por (x − 1) e podemos fatorá-los da seguinte forma:

I) $3x^3 - 5x^2 + x + 1 = (x - 1)(3x^2 - 2x - 1)$

II) $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)(2x^2 - x - 1)$

Assim $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(3x^2 - 2x - 1)}{(x-1)(2x^2 - x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(3x^2 - 2x - 1)}{(2x^2 - x - 1)} = \dfrac{0}{0}$.

Assim numerador e denominador são divisíveis novamente por (x − 1) e podemos fatorá-los da seguinte forma:

I) $3x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(3x + 1)$

II) $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$

Assim $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(3x^2 - 2x - 1)}{(2x^2 - x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(2x+1)} =$.

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(3x+1)}{(2x+1)} = \frac{3.1+1}{2.1+1} = \frac{4}{3}$$

Resposta: Letra E

9) Prova EFOMM 2004-2005

Determine $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{x - 1}$.

(A) $\dfrac{1}{6}$

(B) $\dfrac{1}{3}$

(C) $\dfrac{1}{2}$

(D) 1

(E) e

Resolução:

Vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1}$.

Sabemos que: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Fazendo $a = \sqrt[3]{2x+6}$ e $b = 2$, podemos racionalizar o denominador do limite multiplicando por $\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4$.

Assim, $\dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1} \cdot \dfrac{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4}{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4} = \dfrac{2x+6-8}{(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4\right]} =$

$$= \frac{2(x-1)}{(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4\right]} =$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4}.$$

Segue que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4} = \dfrac{2}{4+4+4} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

Resposta: Letra A

10) Prova EFOMM 2004-2005

Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}$:

(A) $-\infty$

(B) $+\infty$

(C) $\sqrt{3}$

(D) 0

(E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Resolução:

Vamos calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}$.

Note que $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}$.

Segue que $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-3}{x^3+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^6}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{+\infty+0}{1+0}=+\infty.$

Assim $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{+\infty}$.

Como $0<\frac{1}{\sqrt{3}}<1$, então $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{+\infty}$ vai para zero.

Portanto $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}=0$.

Resposta: Letra D

11) Prova EFOMM 2005-2006

O valor do limite $\lim_{x\to 2}\frac{\left(1/x\right)-\left(1/2\right)}{x^2-4}$:

(A) $-1/8$

(B) $-1/16$

(C) 0

(D) $1/16$

(E) $1/8$

Resolução:

Vamos calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)}{x^2-4}$.

Note que $\lim_{x\to 2} \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{\frac{2-x}{2x}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{-(-2+x)}{2x}.\dfrac{1}{(x-2)(x+2)} =$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x(x+2)} = \frac{-1}{2.2(2+2)} = -\frac{1}{16}$$

Resposta: Letra B

12) Prova EFOMM 2005-2006

O valor do limite $\lim_{x\to 1} \left\{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right\}$ é:

(A) $-\frac{1}{4}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) 0

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{2}$

Resolução:

Vamos calcular $\lim_{x\to 1} \left\{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right\}$.

Note que $\lim_{x\to 1} \left\{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right\} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}.\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$.

Resposta: Letra E

13) Prova EFOMM 2006-2007

O valor do limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^5 2x}{4x^5}$ é:

(A) 1

(B) 3

(C) 4

(D) 6

(E) 8

Resolução:

O valor do limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^5 2x}{4x^5}$ é:

Note que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^5 2x}{4x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{\text{sen } 2x}{x}\right)^5 = \dfrac{1}{4}.\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{sen } 2x}{x}\right)^5 = \dfrac{1}{4}.\lim\limits_{x\to 0}\left(2.\dfrac{\text{sen } 2x}{2x}\right)^5 =$

$$= \frac{1}{4}.2^5.\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 2x}{2x}\right)^5.$$

Usando o limite trigonométrico fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$ em $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x}$, fazendo $2x = y$,

temos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\text{sen } y}{y} = 1.$

Assim $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^5 2x}{4x^5} = \dfrac{1}{4}.2^5.\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } 2x}{2x}\right)^5 = \dfrac{1}{4}.2^5.1 = 8$

Resposta: Letra E

14) Prova EFOMM 2007-2008

Analise as afirmativas abaixo

I. $\lim\limits_{a\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}\right) = \dfrac{1}{2}$

II. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[x]{\dfrac{k+x}{k-x}}\right) = e^{\frac{2}{k}}$

III. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = 1$

Assinale a alternativa correta:

(A) apenas a afirmativa III é falsa

(B) apenas a afirmativa II é verdadeira

(C) as afirmativas I e III são verdadeiras

(D) as afirmativas II e III são falsas

(E) as afirmativas I e II são falsas

Resolução:

I) Verdadeira.

Vamos calcular $\lim\limits_{a \to 1} \left(\dfrac{\sqrt{a} - 1}{a - 1} \right)$.

Note que $\lim\limits_{a \to 1} \left(\dfrac{\sqrt{a} - 1}{a - 1} \right) = \lim\limits_{a \to 1} \dfrac{\sqrt{a} - 1}{a - 1} . \dfrac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 1} = \lim\limits_{a \to 1} \dfrac{a - 1}{(a-1)(\sqrt{a} + 1)} = \lim\limits_{a \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{a} + 1} = \dfrac{1}{2}$.

II) Verdadeira.

Vamos calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt[x]{\dfrac{k + x}{k - x}} \right)$.

Note que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt[x]{\dfrac{k + x}{k - x}} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{k + x}{k - x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{2x}{k - x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Usaremos a propriedade fundamental $\lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Para calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{2x}{k - x} \right)^{\frac{1}{x}}$ faremos uma mudança de variável, ou seja, $\dfrac{2x}{k - x} = y$ e assim $x = \dfrac{ky}{2 + y}$. Observe que quando $x \to 0$ temos que $y \to 0$.

Segue que $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{2x}{k - x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{2+y}{ky}} = \lim\limits_{y \to 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^{\frac{2+y}{k}} = e^{\frac{2}{k}}$

III) Falsa.

Vamos calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\tan 2x}{x-\dfrac{\pi}{2}}\right)$.

Note que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\tan 2x}{x-\dfrac{\pi}{2}}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2\tan 2x}{2x-\pi}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2\dfrac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}{2x-\pi}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2\operatorname{sen}2x}{2x-\pi}.\dfrac{1}{\cos 2x}\right)=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\operatorname{sen}\mathbf{2x}}{2x-\pi}\right).\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\mathbf{\cos 2x}}\right)$$

Assim calculando os limites acima separados temos que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos 2x}\right)=\dfrac{1}{-1}=-1.$

Para calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2\operatorname{sen}2x}{2x-\pi}\right)$ vamos fazer a substituição $2x-\pi=t$ observando que quando $x\to\dfrac{\pi}{2}$ então $t\to 0$.

Segue que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2\operatorname{sen}2x}{2x-\pi}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{2\operatorname{sen}(t+\pi)}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{2(\operatorname{sen}t.\cos\pi+\operatorname{sen}\pi.\cos t)}{t}\right)=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2.\operatorname{sen}t.(-1)}{t}=-2.\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t}{t}=-2$$

Logo $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\tan 2x}{x-\dfrac{\pi}{2}}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2\operatorname{sen}2x}{2x-\pi}\right).\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos 2x}\right)=(-2).(-1)=2$.

Resposta: Letra A

15) Prova EFOMM 2009-2010

Seja f uma função de domínio D(f) = R – {a}. Sabe-se que o limite de f(x), quando **x** tende a **a**, é L e escreve-se $\lim_{x\to a} f(x)=L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x)-L| < \varepsilon$.
Nessas condições, analise as afirmativas abaixo:

I. Seja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{se } x\neq 1\\ 3 & \text{se } x=1\end{cases}$, logo $\lim_{x\to 1} f(x)=0$.

II. Na função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ 3 - x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$, tem-se $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3$.

III. Sejam f e g funções quaisquer, pode-se afirmar que $\lim\limits_{x \to a} (f.g)^n (x) = (L.M)^n$, $n \in IN^*$ se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$.

Assinale a opção correta:

(A) apenas a afirmativa I é verdadeira

(B) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras

(C) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras

(D) apenas a afirmativa III é verdadeira

(E) as afirmativas I, II e III são verdadeiras

Resolução:

I) Falsa.

Note que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x - 2) = -1.$

II) Falsa.

Note que $\lim\limits_{x \to 1^+} 3 - x = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 4 = -3.$

Assim $\lim\limits_{x \to 1^+} 3 - x = 2 \neq \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 4 = -3$ e portanto não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

III) Verdadeira

Note que $\lim\limits_{x \to a} (f.g)^n (x) = \left[\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) \right]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x) . \lim\limits_{x \to a} g(x) \right]^n = (L.M)^n$

Resposta: Letra D

16) Prova EFOMM 2010-2011

Analise a função a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3p - 5, & x = 2 \end{cases}$$

Para que a função acima seja contínua no ponto x = 2, qual deve ser o valor de p?

(A) $1/3$

(B) 1

(C) 3

(D) −1

(E) −3

Resolução:

Vamos calcular $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Note que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} x + 2 = 4.$

Como f é contínua no ponto x = 2 então $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2) = 4.$

Segue que f(2) = 3p − 5 e assim 4 = 3p − 5 e portanto p = 3.

Resposta: Letra C

17) Prova EFOMM 2011-2012

O valor do $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} \right)$ é:

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

(B) $\sqrt{a}$

(C) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

(D) $2\sqrt{a}$

(E) 0

Resolução:

Vamos calcular $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} \right)$.

Note que $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{a}} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{a}\right)} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Resposta: Letra C

18) Prova EFOMM 2012-2013

O valor do $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + x} \right)$ é:

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Resolução:

Vamos calcular $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + x} \right)$.

Note que $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x+1-1}{x(x+1)} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{x(x+1)} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$.

Resposta: Letra D

19) Prova EFOMM 2013-2014

A única alternativa **INCORRETA** é:

(A) $\lim_{x \to 2} \left(3x^2 - 5x + 2\right) = 4$

(B) $\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3} \right) = \frac{4}{7}$

(C) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-x+2}{3x-2}\right)^2=4$

(D) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}\right)=2$

(E) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2+4x+3}}=-2$

Resolução:

(A) Correta

A função f(x) = $3x^2 - 5x + 2$ é polinomial do 2º grau e assim é contínua em todos os reais, então $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ e assim $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(3x^2-5x+2) = f(2) = 3(2)^2 - 5.2 + 2 = 4$

(B) Correta

Como a função $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{4x-3}$ é contínua em x = −1, então

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+2x-3}{4x-3}\right) = f(-1) = \frac{(-1)^2-2.(-1)-3}{4(-1)-3} = \frac{4}{7}$$

(C) Incorreta

Como a função $f(x)=\dfrac{2x^2-x+2}{3x-2}$ é contínua em x = 1, então

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-x+2}{3x-2}\right) = f(1) = \frac{2(1)^2-1+2}{3(1)-2} = 9 \neq 4$$

(D) Correta

Note que $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-2x}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+2)}{x}\right) = \frac{2+2}{2} = 2$

(E) Correta

Como a função $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2+4x+3}}$ é contínua em x = −2, então

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -1}\sqrt[3]{\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2+4x+3}} = f(-2) = \sqrt[3]{\frac{(-2)^3+2(-2)^2-3(-2)+2}{(-2)^2+4(-2)+3}} = -2$$

Resposta: Letra C

20) Prova EFOMM 2014-2015

Sabendo-se que $a = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ pode-se afirmar que o ângulo θ, em radianos, tal que tg θ = ln a – 1, pode ser:

(A) $-\frac{\pi}{4}$

(B) $-\frac{\pi}{42}$

(C) $\frac{3\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

(E) $\frac{\pi}{2}$

Resolução:

Vamos calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Nesse caso devemos usar o limite fundamental: $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Note que $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.

Assim $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$.

Para calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$ faremos uma mudança de variável, ou seja, $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{y}$ e assim $x = 2y+1$. Observe que quando $x \to +\infty$ temos que $y \to +\infty$.

Segue que $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x \lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y+1} =$

$= \lim_{y \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2 . \lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right) == e^2.1 = e^2$. Então a = e^2.

Logo tg θ = ln a – 1 = ln e^2 -1 = 2 – 1 = 1. Portanto θ = 45^0 = $\frac{\pi}{4}$.

Resposta: Letra D

21) Prova EFOMM 2015-2016

O valor de $\underset{t\to 0}{\mathrm{Lim}} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}$ é:

(A) 1

(B) $\dfrac{1}{4}$

(C) $\dfrac{1}{3}$

(D) $\dfrac{1}{2}$

(E) 2

Resolução:

Vamos calcular $\underset{t\to 0}{\mathrm{Lim}} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}$.

Note que $\underset{t\to 0}{\mathrm{Lim}} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t} = \underset{t\to 0}{\mathrm{Lim}} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t} \cdot \dfrac{\left(2+\sqrt{4-t}\right)}{\left(2+\sqrt{4-t}\right)} = \underset{t\to 0}{\mathrm{Lim}} \dfrac{4-4+t}{t\left(2+\sqrt{4-t}\right)} =$

$$= \underset{t\to 0}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{2+\sqrt{4-t}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Resposta: Letra B

22) Prova EFOMM 2016-2017

Sobre a função $f(x) = \dfrac{1+x}{x^2}$, analise as afirmativas:

I) $f(x)$ é contínua em todo $x \in R$

II) $\underset{x\to -\infty}{\lim} f(x) = \underset{x\to +\infty}{\lim} f(x)$

III) $\underset{x\to 0}{\lim} f(x) = +\infty$

Então pode-se dizer que:

(A) todas as afirmativas são verdadeiras

(B) todas as afirmativas são falsas

(C) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras

(D) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras

(E) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras

Resolução:

I) Falsa.

Para x = 0 a função f(x) não é contínua pois f(0) não está definida.

II) Verdadeira.

Note que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1+x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} + \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 + 0 = 0$

III) Verdadeira.

Note que em $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x}{x^2}$ quando $x \to 0$, tem-se $1 + x \to 1$ e $x^2 \to 0$. Note ainda que $x^2 > 0$.

Assim quando x está próximo de zero temos $\frac{1+x}{x^2} > 0$. Logo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x}{x^2} = +\infty$.

Resposta: Letra E

23) Prova EFOMM 2016-2017

Para que a função $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^3 - 10x^2}{x-2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$ seja contínua, para todo valor de **x**, qual será o valor de **k**?

(A) 2

(B) 10

(C) 20

(D) 40

(E) 50

Resolução:

Para que f seja contínua devemos ter $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = k$.

Assim $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{5x^3 - 10x^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{5x^2(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} 5x^2 = 20$.

Como $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 20$ e $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = k$, então k = 20.

Resposta: Letra C

24) Prova EFOMM 2017-2018

Os valores de **A**, sabendo-se que a função abaixo é contínua para todos os valores de **x**, será

$$f(x) = \begin{cases} A^2x - A, & x \geq 3 \\ 4, & x < 3 \end{cases}$$

(A) 1 ou $-\frac{1}{2}$

(B) 1 ou −2

(C) 2 ou 4

(D) 2 ou $\frac{3}{4}$

(E) −1 ou $\frac{4}{3}$

Resolução:

Note que o único ponto de descontinuidade da função é x = 3, assim é necessário e suficiente que: $f(3) = lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = 4$.

Segue que, $A^2.3 - A = 4 \Leftrightarrow 3A^2 - A - 4 = 0$, resolvendo a equação do 2º grau obtemos:

$A = -1$ ou $A = \frac{4}{3}$

Resposta: E

7 O ASSUNTO LIMITE NAS PROVAS DE MATEMÁTICA DA ESCOLA NAVAL

Atualmente a prova de matemática da Escola Naval possui 20 questões de múltipla escolha com 5 alternativas e costuma abordar todos os assuntos do programa. Trata de vários assuntos que se relacionam numa mesma questão e apresenta um grau de dificuldade superior às da EFOMM.

7.1 Limite na prova da Escola Naval

O assunto limite foi explorado em todas as provas de matemática dos concursos de seleção da Escola Naval no período de 2000 a 2017, seja abordando somente limite ou em conjuntos com outros assuntos.

A tabela abaixo relaciona o biênio que aconteceram os concursos com as respectivas quantidades de questões sobre limites presentes nas provas.

Vale lembrar que o primeiro ano do biênio se refere ao ano que foi realizada a prova teórica e as demais etapas do concurso e o segundo ano se refere ao ingresso na Escola Naval.

Tabela 16 – Quantidade de questões de limite nas provas da Escola Naval de 2000 a 2017

ANO	QUANTIDADE DE QUESTÕES
2000-2001	1
*2001-2002	2
*2002-2003	2
*2003-2004	2
2004-2005	1
*2005-2006	1
2006-2007	1
*2007-2008	1
*2008-2009	1
*2009-2010	1
**2010-2011	2
2011-2012	1
2012-2013	1
2013-2014	2
**2014-2015	4
2015-2016	2
*2016-2017	3
*2017-2018	3

Fonte: Autor, 2017

* Existe uma questão que envolve derivada e/ou integral e não será resolvida

** Existem duas questões que envolvem derivada e/ou integral e não serão resolvidas

Assim, podemos observar que limite é um assunto muito cobrado, atingindo a marca de aproximadamente 8,6% das questões propostas no período citado na tabela acima.

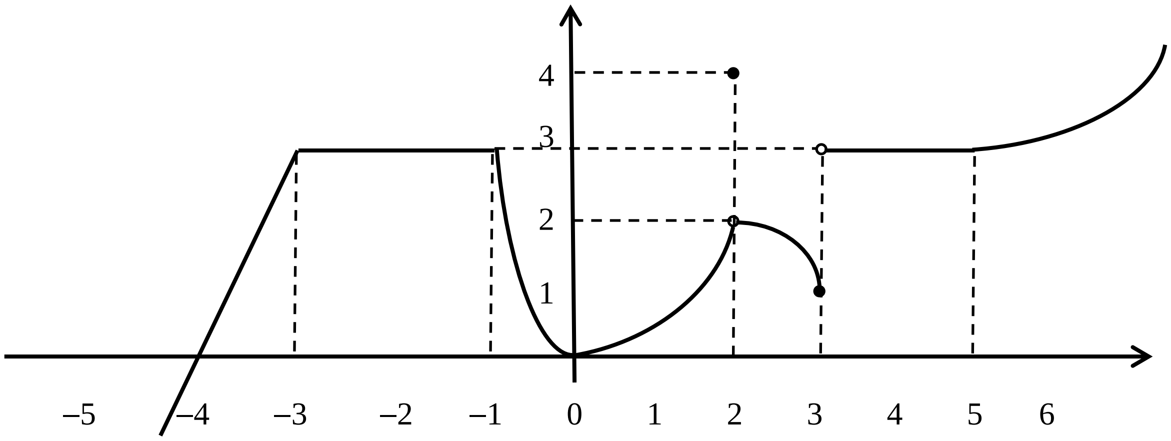
7.2 Resoluções das questões sobre limite nas provas da Escola Naval de 2000 a 2017.

Seguem as resoluções das questões de limite presentes nas provas da Escola Naval de 2000 a 2017. As respostas encontradas nas resoluções estão de acordo com os gabaritos oficiais.

Não aparecem nas resoluções abaixo as questões que envolvem limite com o conhecimento de derivada e/ou integral, ou seja, não foram resolvidas as questões assinaladas na tabela da página anterior com as marcações (*) e (**).

1) Prova Escola Naval 2000-2001

Seja y = f(x) uma função real cujo gráfico está representado abaixo. Nas proposições abaixo, coloque **C** na coluna à direita quando a proposição for **certa** e **E** quando for **errada**:



I)	f(x) é positiva e contínua $\forall\, x \in [-4, 5]$	( )
II)	$f(0) = f(-4) = 0$ e $f(2) = 2$	( )
III)	$f'(4) > 0$ e $f'(x) = 3 \;\; \forall\, x \in [3, 5]$	( )
IV)	f(x) é crescente $\forall\, x \in\,]-\infty, -3[\, \cup\,]0, 2[\, \cup\,]5, \infty[$	( )
V)	$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$	( )

Lendo a coluna da direita de cima para baixo encontramos:

A) EEECC

B) ECECE

C) EEECE

D) CCEEE

E) CCCCE

Resolução:

Vamos analisar cada afirmativa:

I) Errada. Para x = −4 a função é nula.

II) Errada. f(2) = 4.

III) Errada. f´(4) não está definida, pois há uma descontinuidade na função neste ponto.

IV) Correta. Uma função é crescente se, e somente se, temos que $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

V) Correta. Basta aplicar a definição de limite.

Resposta: Letra A

2) Prova Escola Naval 2001-2002

Qual o valor do $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot g\, x)^{\frac{1}{\ln x}}$?

A) e

B) $\dfrac{1}{e}$

C) 0

D) −1

Resolução:

Seja $\lim\limits_{x\to 0} (\cot g\, x)^{\frac{1}{\ln x}} = y$. Atribuindo ln nos dois membros obtemos $\lim\limits_{x\to 0} \ln (\cot g\, x)^{\frac{1}{\ln x}} = \ln y$.

Assim $\ln y = \lim\limits_{x\to 0} \ln (\cot g\, x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln x} \ln (\cot g\, x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (\cot g\, x)}{\ln x} = \dfrac{\infty}{\infty}$.

Usando a regra de L´Hôpital obtemos:

$$\ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (\cot g\, x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cot g\, x}.\left(-\cos\sec^2 x\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cot g\, x}.x.\left(-\cos\sec^2 x\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cot g\, x}.x.\left(-\cos\sec^2 x\right) = -\lim_{x\to 0} x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x}.\frac{1}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}.\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = -1.$$ Daí $\ln y = 1$ e $e^{-1} = y$.

Portanto $\lim\limits_{x\to 0} (\cot g\, x)^{\frac{1}{\ln x}} = y = \dfrac{1}{e}$.

Resposta: Letra B

3) Prova Escola Naval 2002-2003

Se $\lim_{x\to 0} (\text{cotg } x)^{\frac{1}{\ln x}} = p$, então:

(A) $0 \le p < \frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2} < p < 1$

(D) $1 < p < 2$

(E) $2 < p < 3$

Resolução:

Seja $\lim_{x\to 0} (\text{cotg } x)^{\frac{1}{\ln x}} = p$. Atribuindo ln nos dois membros obtemos $\lim_{x\to 0} \ln (\text{cotg } x)^{\frac{1}{\ln x}} = \ln p$.

Assim $\ln p = \lim_{x\to 0} \ln (\text{cotg } x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} \ln (\text{cotg } x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (\text{cotg } x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$.

Usando a regra de L´Hôpital obtemos:

$$\ln p = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (\text{cotg } x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\text{cotg } x}.\left(-\cos\sec^2 x\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\text{cotg } x}.x.\left(-\cos\sec^2 x\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\text{cotg } x}.x.\left(-\cos\sec^2 x\right) = -\lim_{x\to 0} x\frac{\text{sen } x}{\cos x}.\frac{1}{\text{sen}^2 x} = -\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x}.\frac{1}{\text{sen } x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen } x}.\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = -1.$$ Daí $\ln p = 1$ e $e^{-1} = p$.

Logo $\lim_{x\to 0} (\text{cotg } x)^{\frac{1}{\ln x}} = p = \frac{1}{e}$. Mas como $e \cong 2,7$ então $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$.

Resposta: Letra B

4) Prova Escola Naval 2003-2004

O $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)} - \frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)} \right)$ é igual a:

(A) 0

(B) $\frac{1}{16}$

(C) $\frac{1}{12}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

Resolução:

Vamos calcular o $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\left(1-\sqrt{5}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$.

Seja $\sqrt[6]{x}=y.$ Assim $\sqrt[3]{x}=y^2$ e $\sqrt{x}=y^3$.

Segue que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right).=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\left(1-y^3\right)}-\frac{1}{3\left(1-y^2\right)}\right)=$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2(1-y)\left(1++y+y^2\right)}-\frac{1}{3(1-y)(1+y)}\right).=\lim_{x\to 1}\frac{3(1+y)-2\left(1+y+y^2\right)}{6(1-y)(1+y)\left(1+y+y^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3+3y-2-2y-2y^2}{6(1-y)(1+y)\left(1+y+y^2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1+y-2y^2}{6(1-y)(1+y)\left(1+y+y^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-y)(1+2y)}{6(1-y)(1+y)\left(1+y+y^2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1+2y^2)}{6(1+y)\left(1+y+y^2\right)}=\frac{1+2}{6.2.3}=\frac{1}{12}$$

Resposta: Letra C

5) Prova Escola Naval 2004-2005

O valor do $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$ é igual a:

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $-\frac{1}{3}$

(D) $-\frac{3}{2}$

(E) $-\frac{4}{3}$

Resolução:

Vamos calcular o $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$.

Seja $S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$. (I)

Multiplicando ambos os membros por 3 obtemos $3S=3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-2}}$. (II)

Segue que $(I)+(II)=4S=3+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$. Dai, $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$.

Logo $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right).=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)=$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4}+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}.\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$

Note que $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}=0$.

Então $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4}+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}.\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.0=\frac{3}{4}$

Resposta: Letra B

6) Prova Escola Naval 2006-2007

O valor do $\lim_{x\to1^+}[(\ln x).\ln(x-1)]$ é:

(A) $+\infty$

(B) e

(C)1

(D) 0

(E) -1

Resolução:

Vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(\ln x).\ln(x-1)\right]$.

Note que $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(\ln x).\ln(x-1)\right]= \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}$.

Usando a Regra de L\`Hôpital em $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}$ obtemos:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{(\ln x)^2}\cdot\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x.(\ln x)^2}{1-x}$$

Usando a Regra de L\`Hôpital em $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x.(\ln x)^2}{1-x}$ obtemos:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x.(\ln x)^2}{1-x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1.(\ln x)^2+x.2.\ln x.\dfrac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1^+}\left[-(\ln x)^2-2\ln x\right]=0$$

Resposta: Letra D

7) Prova Escola Naval 2011-2012

Calculando-se $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{cotg}\, x)^{\text{sen}\, x}$ obtém-se:

(A) ∞

(B) 0

(C) e

(D) -1

(E) 1

Resolução:

Vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{cotg}\, x)^{\text{sen}\, x}$.

Seja $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{cotg}\, x)^{\text{sen}\, x}=y$. Atribuindo ln nos dois membros obtemos $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(\text{cotg}\, x)^{\text{sen}\, x}=\ln y$.

Assim $\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(\text{cotg}\, x)^{\text{sen}\, x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\text{sen}\, x.\ln(\text{cotg}\, x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\text{cotg}\, x)}{\text{cossec}\, x}=\dfrac{\infty}{\infty}$.

Usando a regra de L´Hôpital obtemos:

$$\ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\text{cotg}\, x} \ln(-\text{cossec}^2\, x)}{-\text{cossec}\, x\,.\,\text{cotg}\, x} = \lim_{x\to 0^+} \text{tg}^2 x.\text{cos}\sec x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x} = 0$$

Dai, $\ln y = 0$ e $e^0 = y$ então $y = 1$.

Resposta: Letra E

8) Prova Escola Naval 2012-2013

Os números reais a, b, c, d, f, g, h constituem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Se $e^{\det A} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}}$, onde A é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$ e $h = \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$, então o valor de

(b – 2g) vale:

(A) $-\frac{1}{3}$

(B) $-\frac{21}{16}$

(C) $-\frac{49}{48}$

(D) $\frac{15}{16}$

(E) $\frac{31}{48}$

Resolução:

1) Vamos calcular $\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}}$.

Para calcular $\text{Lim}_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}}$ faremos uma mudança de variável, ou seja, $\frac{2}{y} = \frac{1}{t}$ e assim $y = 2t$. Observe que quando $y \to +\infty$ temos que $t \to +\infty$.

Segue que,

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{2t}{9}} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{2}{9}} = \left[\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{2}{9}} = e^{\frac{2}{9}}$$

2) Achando $\det A$.

Temos $e^{\det A} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}}$ e $\lim_{y\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}} = e^{\frac{2}{9}}$

Segue que $e^{\det A} = e^{\frac{2}{9}}$ e assim $\det A = \dfrac{2}{9}$

3) Calculando $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$.

Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta então $\det A = \det A^t = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{pmatrix}$.

Como A^t é uma matriz de Vandermonde então $\det A = \det A^t = (b-a)(d-a)(d-b)$.

Assim $\det A = (b-a)(d-a)(d-b) = \dfrac{2}{9}$.

4) Calculando os termos **b** e **g** da progressão aritmética de termos a, b, c, d, f, g, h, nessa ordem.

Supondo que r seja a razão dessa progressão aritmética então b = a + r, d = a + 3r e h = a + 6r.

Assim $(b-a)(d-a)(d-b) = (a+r-a)(a+3r-a)(a+3r-a-r) = r.3r.2r = \dfrac{2}{9}$.

Segue que $6r^3 = \dfrac{2}{9}$, logo $r = \dfrac{1}{3}$

Como $h = \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \dfrac{1}{4^3} + \dfrac{1}{4^4} + \dfrac{1}{4^5} + \dots$ é uma soma de uma progressão geométrica infinita de razão $\dfrac{1}{4}$ então $h = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{64}.\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{48}$.

Como h é o sétimo termo da progressão aritmética (a, b, c, d, f, g, h) cuja razão é $\frac{1}{3}$ então segue que h = a + 6r e assim $\frac{1}{48} = a + 6.\frac{1}{3}$. Dai, a = $-\frac{95}{48}$.

Logo b = a + r = $-\frac{95}{48} + \frac{1}{3} = -\frac{79}{48}$ e g = a + 5r = $-\frac{95}{48} + 5.\frac{1}{3} = -\frac{15}{48}$.

Portanto (b – 2g) = $-\frac{79}{48} - 2\left(-\frac{15}{48}\right) = -\frac{79}{48} + \frac{30}{48} = -\frac{49}{48}$

Resposta: Letra C

9) Prova Escola Naval 2013-2014

O limite $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen } 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \text{sen } x}$ é igual a:

(A) $\sqrt{2}$

(B) $-\sqrt{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(E) 0

Resolução:

Vamos calcular $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen } 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \text{sen } x}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen } 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \text{sen } x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\text{sen } x.\cos x - \left(2\cos^2 x - 1\right) - 1}{\cos x - \text{sen } x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\text{sen } x.\cos x - 2\cos^2 x + 1 - 1}{\cos x - \text{sen } x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-2\cos x\left(\cos x - \text{sen } x\right)}{\cos x - \text{sen } x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(-2\cos x\right) = -2.\cos\frac{\pi}{4} = -2.\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Resposta: Letra B

10) Prova Escola Naval 2013-2014

Sabendo que a função real $f(x)=\begin{cases} 1+e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{x^2+x-a}{x+2} & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$ é contínua em x = 0, x $\in$ R, qual o valor de $\frac{a}{b}$, onde $b=\frac{f^2(0)}{4}$?

(A) 8

(B) 2

(C)1

(D) $-\frac{1}{4}$

(E) -8

Resolução:

Se a função f é contínua em x = 0 então $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, ou melhor, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$.

1) Vamos calcular $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)$, e note que quando x se aproxima de zero pela esquerda, $\frac{1}{x}$ vai para $-\infty$ e assim $e^{\frac{1}{x}}$ vai para zero. Então $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)=1+0=1$

2) Vamos calcular $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+x-a}{x+2}\right)=-\frac{a}{2}$. Note que $f(0)=\frac{0^2+0-a}{0+2}=-\frac{a}{2}$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ então, $1=-\frac{a}{2}$ e $a=-2$.

Segue que $b=\frac{1^2}{4}=\frac{1}{4}$.

Portanto $\frac{a}{b}=\frac{-2}{\frac{1}{4}}=-8$.

Resposta: Letra E

11) Prova Escola Naval 2014-2015

O valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\text{sen } x}-\sqrt{1-\text{sen } x}}{2x}$ é:

(A) $-\infty$

(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) 0

(D) 1

(E) 2

Resolução:

Vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\text{sen } x}-\sqrt{1-\text{sen } x}}{2x}$.

Vamos multiplicar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\text{sen } x}-\sqrt{1-\text{sen } x}}{2x}$ por $\dfrac{\sqrt{1+\text{sen } x}+\sqrt{1-\text{sen } x}}{\sqrt{1+\text{sen } x}+\sqrt{1-\text{sen } x}}$.

Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\text{sen } x}-\sqrt{1-\text{sen } x}}{2x}.\frac{\sqrt{1+\text{sen } x}+\sqrt{1-\text{sen } x}}{\sqrt{1+\text{sen } x}+\sqrt{1-\text{sen } x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\text{sen } x-(1-\text{sen } x)}{2x\sqrt{1+\text{sen } x}+\sqrt{1-\text{sen } x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\text{sen } x-1+\text{sen } x}{2x\sqrt{1+\text{sen } x}+\sqrt{1-\text{sen } x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\text{sen } x}{2x\sqrt{1+\text{sen } x}+\sqrt{1-\text{sen } x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}.\frac{1}{\sqrt{1+\text{sen } x}+\sqrt{1-\text{sen } x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}.\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\text{sen } x}+\sqrt{1-\text{sen } x}} = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Resposta: Letra B

12) Prova Escola Naval 2014-2015

Sabendo que <u>a</u> é uma constante real e que $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = e$ então o valor da constante <u>a</u> é:

(A) $\dfrac{4}{3}$

(B) $\dfrac{3}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{3}{4}$

Resolução:

Vamos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$.

Nesse caso devemos usar o limite fundamental: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Simplificando a fração $\dfrac{x+a}{x-a}$ por x obtemos $\dfrac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}$.

Assim $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}.\right)^x = \left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}.\right)^x = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}.$

Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ faremos uma mudança de variável, ou seja, $\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{y}$ e assim $x = ay.$ Observe que quando $x \to +\infty$ temos que $y \to +\infty$.

Segue que,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay} = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a = \left[\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a = e^a$$

Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x$ faremos uma mudança de variável, ou seja, $-\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{y}$ e assim $x = -ay.$ Observe que quando $x \to +\infty$ temos que $y \to -\infty$.

Segue que,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-ay} = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{-a} = \left[\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{-a} = e^{-a}$$

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x} = \dfrac{e^a}{e^{-a}} = e^{2a}$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = e$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{2a}$ então $e^{2a} = e^1$.

Portanto $2a = 1$ e $a = \dfrac{1}{2}$

Resposta: Letra C

13) Prova Escola Naval 2015-2016

Calculando $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{tg\,x - x}{x - sen\,x} + \dfrac{x - sen\,x}{tg^3 x}\right\}$ encontra-se:

(A) $\dfrac{7}{3}$

(B) $\dfrac{13}{6}$

(C) $\dfrac{5}{2}$

(D) $\dfrac{13}{3}$

(E) $\dfrac{7}{6}$

Resolução:

Seja $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{tg\,x - x}{x - sen\,x} + \dfrac{x - sen\,x}{tg^3 x}\right\} =$ K. Pela propriedade de soma de limite temos que

$K = \lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{tg\,x - x}{x - sen\,x} + \dfrac{x - sen\,x}{tg^3 x}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tg\,x - x}{x - sen\,x}\right) + \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x - sen\,x}{tg^3 x}\right).$

Seja $K_1 = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tg\,x - x}{x - sen\,x}\right)$ e $K_2 = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x - sen\,x}{tg^3 x}\right)$. Vamos calcular K_1 e K_2 separadamente.

Note que K_1 e K_2 são da forma $\dfrac{0}{0}$ e assim podemos aplicar a regra de L´Hôpital.

Segue que $K_1 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{tg}\,x - x}{x - \text{sen}\,x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sec x\,.\sec x\,.\,\text{tg}\,x}{\text{sen}\,x}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(2\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}.\frac{1}{\text{sen}\,x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\cos^3 x}\right) = \frac{2}{1^3} = 2.$$

Segue que $K_2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\text{-sen}\,x}{\text{tg}^3 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1\text{-}\mathbf{cos}\,\,x}{3\text{tg}^2 x.\ \mathbf{sec}^2\,x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1\text{-}\mathbf{cos}\,\,x}{3\text{tg}^2 x.\ (1+\text{tg}^2 x)}\right) =$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\mathbf{cos}\,x}{\text{tg}^2\mathbf{x}+\mathbf{tg}^4 x}\right) = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,\mathbf{x}}{2\text{tg}\,\mathbf{x}\,.\,\mathbf{sec}^2\,\mathbf{x} + 4\mathbf{tg}^3 x\,.\,\mathbf{sec}^2 x}\right) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,\mathbf{x}\,.\,\mathbf{cos}^2 x}{\text{tg}\,\mathbf{x}(\mathbf{1}+\mathbf{2tg}^2 x)}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,\mathbf{x}\,.\,\mathbf{cos}^2 x}{\frac{\mathbf{sen\,x}}{\mathbf{cos\,x}}(\mathbf{1}+\mathbf{2tg}^2 x)}\right) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathbf{cos}^3 x}{\mathbf{1}+\mathbf{2tg}^2 x}\right) = \frac{1}{6}\mathbf{.}\frac{1^3}{1+2.0^2} = \frac{1}{6}\mathbf{.}$$

Logo, $K = K_1 + K_2 = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$

Resposta: Letra B

14) Prova Escola Naval 2015-2016

No limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1-2ax)}{x^2}$, o valor de <u>a</u> pode ser determinado para que tal limite exista.

Nesse caso, o valor do limite é:

(A) $-\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $-\frac{1}{8}$

(E) 0

Resolução:

Vamos calcular o valor de <u>a</u> para que exista $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1-2ax)}{x^2}$, calculando esse limite.

Começaremos por multiplicar numerador e denominador do $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1-2ax)}{x^2}$, por $\sqrt{1+x}+(1-2ax)$.

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1-2ax)}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+(1-2ax)}{\sqrt{1+x}+(1-2ax)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-2ax)^2}{x^2\left[\sqrt{1+x}+(1-2ax)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-4ax+4a^2x^2)}{x^2[\sqrt{1+x}+(1-2ax)]}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+4ax-4a^2x^2}{x^2[\sqrt{1+x}+(1-2ax)]}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4ax-4a^2x^2}{x^2[\sqrt{1+x}+(1-2ax)]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+4a)-4a^2x^2}{x^2[\sqrt{1+x}+(1-2ax)]}$$

Note que se (1 + 4a) for zero o limite existe. Assim se 1 + 4a = 0 devemos ter $a=-\frac{1}{4}$.

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+4a)-4a^2x^2}{x^2[\sqrt{1+x}+(1-2ax)]}=\lim_{x\to 0}\frac{0-4\left(-\frac{1}{4}\right)^2x^2}{x^2\left[\sqrt{1+x}+\left(1-2\left(-\frac{1}{4}\right)x\right)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{1+x}+1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{8}$$

Resposta: Letra D

15) Prova Escola Naval 2016-2017

Sendo $k=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$, então ln(2k) + log 5 é igual a:

(A) $\left(1-\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2+9$

(B) $\left(1+\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2+7$

(C) $\left(1-\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2-9$

(D) $\left(1+\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2+9$

(E) $\left(1+\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2-7$

Resolução:

Vamos calcular $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

Nesse caso devemos usar o limite fundamental: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Ou seja, vamos reescrever $\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} = 1+\frac{1}{h}$.

Assim teremos que $\frac{1}{h} = \frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} - 1 = \frac{x^2+5x+4-x^2+3x-7}{x^2-3x+7} = \frac{8x-3}{x^2-3x+7}$.

Segue que $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x$.

Observe que quando $x \to +\infty$ temos que $\frac{8x-3}{x^2-3x+7}$ vai para $\frac{8x}{x^2} = \frac{8}{x}$, uma vez que (–3) do numerador e (–3x + 7) do denominador não interfere no resultado.

Assim $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^x$

Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^x$ faremos uma mudança de variável, ou seja, $\frac{8}{x} = \frac{1}{y}$ e assim $x = 8y$. Observe que quando $x \to +\infty$ temos que $y \to +\infty$.

Segue que,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{8y} = \left[\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^8 = e^8$$

Portanto $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^x = e^8$

Vamos calcular agora **ln(2k) + log 5**.

ln(2k) + log 5 = $\ln(2e^8) + \log 5 = \ln 2 + \ln e^8 + \log\frac{10}{2} = \ln 2 + 8 + \log 10 - \log 2 =$

$= \ln 2 + 8 + 1 - \log 2 = \ln 2 + 9 - \log 2$.

Efetuando a mudança para a base "e" de log 2 teremos: $\log 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10}$

Portanto,

ln(2k) + log 5 = ln 2 + 9– $\log 2$ = ln 2 + 9– $\dfrac{\ln 2}{\ln 10}$ = $\mathbf{\ln 2\left(1 - \dfrac{1}{\ln 10}\right)} + 9$

Resposta: Letra A

16) Prova Escola Naval 2016-2017

Considere ***a*** o menor arco no sentido trigonométrico positivo, para o qual a função real ***f***, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{tg}\, x\sqrt{1+\cos x}}{\mathrm{sen}\, 2x}, & \mathrm{se}\ x \neq 0 \\ \cos a, & \mathrm{se}\ x = 0 \end{cases}$$

seja contínua em x = 0. Sendo assim, pode-se dizer que ***a*** vale?

(A) $\dfrac{3\pi}{4}$

(B) $\dfrac{\pi}{12}$

(C) $\dfrac{5\pi}{4}$

(D) $\dfrac{\pi}{8}$

(E) $\dfrac{\pi}{4}$

Resolução:

Para que a função ***f*** seja contínua em x = 0 devemos ter $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \cos a$

Assim $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x\sqrt{1+\cos x}}{\mathrm{sen}\, 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\sqrt{1+\cos x}}{2\,\mathrm{sen}\, x \,.\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\sqrt{1+\cos x}.\dfrac{1}{2\,\mathrm{sen}\, x\,.\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{2\cos^2 x} =$

$= \dfrac{\sqrt{1+\cos 0}}{2\cos^2 0} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Segue que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \cos a$ e $\cos a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo como ***a*** o menor arco no sentido trigonométrico positivo então **a = 45⁰** = $\frac{\pi}{4}$

Resposta: Letra E

17) Prova Escola Naval 2017-2018

Sejam ***g*** e ***f*** funções reais, determine a área da região limitada pelo eixo y, por $g(x) = -|x-3|+4$ e pela assíntota de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ e assinale a opção correta.

(A) $\frac{13}{4}$

(B) $\frac{40}{9}$

(C) 7

(D) $\frac{81}{16}$

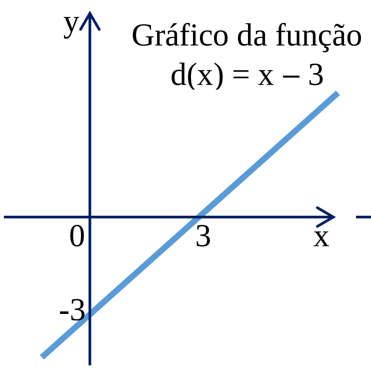
(E) 9

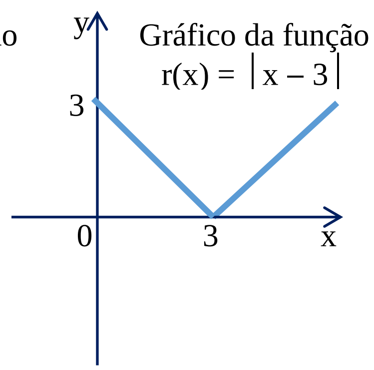
Resolução:

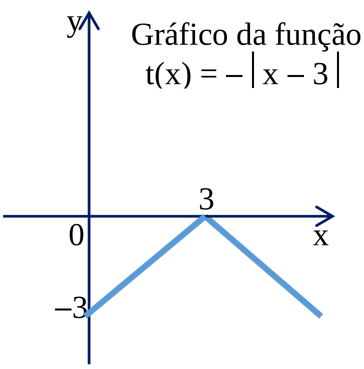
Considere A_H a área solicitada e limitada por:

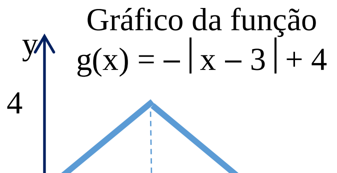
- Eixo y
- Gráfico da função $g(x) = -|x-3|+4$
- Assíntota da função $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

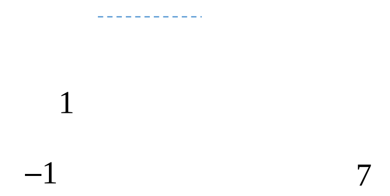
1) Vamos encontrar o gráfico da função ***g***:











2) Vamos encontrar a assíntota da função ***f***:

A função $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ não admite assíntota horizontal, ou seja:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

A função $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ não admite assíntota vertical, ou seja:

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \sqrt[3]{a^3 - a^2} \in IR$ e $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \sqrt[3]{a^3 - a^2} \in IR$, para todo $a \in IR$.

Então a assíntota de ***f*** é oblíqua, ou seja, é uma reta da equação **y = ax + b** onde m≠0(do contrário seria assíntota horizontal).

Vamos então calcular **a** e **b**.

- Achando o **a**

  Como $\mathbf{a} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}$ então

  $$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

- Achando o **b**

  Como $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - \lim\limits_{x \to \pm\infty} ax = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$ então

  $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x)$, fazendo $k = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ e $p = x$.

  Assim $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (k - p) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{k^3 - p^3}{k^2 + kp + p^2}$,

  Dai $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{k^3 - p^3}{k^2 + kp + p^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3 - x^2 - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3 - x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} =$

  $$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^2}{\left(x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 + x^2\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + 1} = -\frac{1}{3}$$

Dai, conclui-se que a assíntota é $y = x - \frac{1}{3}$.

3) Vamos encontrar a base maior, a base menor e a altura do trapézio ABCD:

A área a ser calculada é do trapézio ABCD onde AD é a base menor, BC a base maior e a altura do trapézio é a distância entre as retas y = x + 1 e y = x − 1/3, então:

⇒Base menor (AD) é a distância do ponto A=(3, 4) ao ponto D=(0, 1), assim

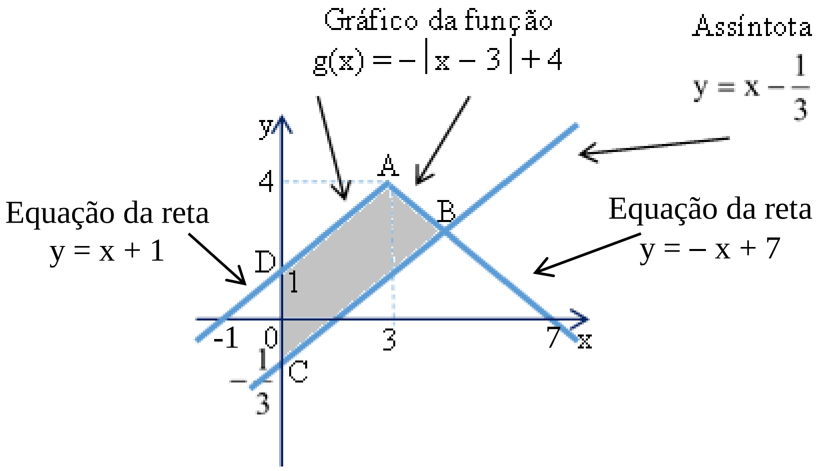
$$AD = \sqrt{(3-0)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

⇒ Base maior (BC) é a distância do ponto B=(11/3, 10/3) ao ponto C=(0, −1/3), assim

$$BC = \sqrt{(11/3)^2 + (11/3)^2} = \frac{11\sqrt{2}}{3}.$$

⇒ A altura h é a distância entre as retas r: −x + y − 1 = 0 e s: −x + y + 1/3 = 0. Seja o ponto $P=(x_0, y_0)=(1, 2)$ da reta r e a=−1, b=1 e c=1/3 na reta s. Dai,

$$d_{Ps} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



4) Vamos achar a área S do trapézio ABCD:

$$\text{Dai, } S = \frac{\left(\frac{11\sqrt{2}}{3} + 3\sqrt{2}\right)\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\left(\frac{20\sqrt{2}}{3}\right)\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\frac{80}{9}}{2} = \frac{40}{9}.$$

Resposta: Letra B

18) Prova Escola Naval 2017-2018

Se $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{9}}{x}$, $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x^2-2| - |x-2|}{x}$ e $C = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^9 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{(x-1)^3}\right)$,

então o valor de $A^{3B} - C$ é igual a:

(A) $\dfrac{8}{3^4}$

(B) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3^4}} - \dfrac{1}{3}$

(C) $\dfrac{64}{3^8}$

(D) $\dfrac{64}{3^8} - 1$

(E) $\dfrac{8}{3^4} - \dfrac{1}{3}$

Resolução:

1) Calculando o valor de A

Note que: $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$. Fazendo $a = \sqrt[3]{(x+3)^2}$ e $b = \sqrt[3]{9}$, teremos que

$$a - b = \sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{9} = \frac{\left(\sqrt[3]{(x+3)^2}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{9}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{(x+3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{(x+3)^2}\right)\left(\sqrt[3]{9}\right) + \left(\sqrt[3]{9}\right)^2} = \frac{(x+3)^2 - 9}{\sqrt[3]{(x+3)^4} + \sqrt[3]{9(x+3)^2} + \sqrt[3]{9^2}} =$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 9 - 9}{\sqrt[3]{(x+3)^4} + \sqrt[3]{9(x+3)^2} + \sqrt[3]{9^2}} = \frac{x^2 + 6x}{\sqrt[3]{(x+3)^4} + \sqrt[3]{9(x+3)^2} + \sqrt[3]{9^2}}.$$

$$\text{Segue que } A = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{9}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2 + 6x}{\sqrt[3]{(x+3)^4} + \sqrt[3]{9(x+3)^2} + \sqrt[3]{9^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x+6)}{x\left(\sqrt[3]{(x+3)^4} + \sqrt[3]{9(x+3)^2} + \sqrt[3]{9^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+6}{\sqrt[3]{(x+3)^4} + \sqrt[3]{9(x+3)^2} + \sqrt[3]{9^2}} =,$$

$$= \frac{6}{\sqrt[3]{3^4} + \sqrt[3]{3^4} + \sqrt[3]{3^4}} = \frac{6}{3\sqrt[3]{3^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{9}.$$

2) Calculando o valor de B

Seja $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x^2-2| - |x-2|}{x}$

Note que como x tende a zero então nas vizinhanças de zero temos:

- $x^2 - 2$ é negativo, ou seja, $x^2 - 2 < 0$ e assim $|x^2 - 2| = -x^2 + 2$
- $x - 2$ é negativo, ou seja, $x - 2 < 0$ e assim $|x - 2| = -x + 2$

Assim,

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{|x^2 - 2| - |x-2|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + 2 - (-x+2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + 2 + x - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(-x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} -x + 1 = 1$$

3) Calculando o valor de C

Seja $C = \lim_{x\to 1} (x-1)^9 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)$.

Note que: $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{(x-1)^3} \leq 1$.

Multiplicando a inequação acima por $(x - 1)^9$ obtemos $-\left|(x-1)^9\right| \leq (x-1)^9 \frac{1}{(x-1)^3} \leq \left|(x-1)^9\right|$.

Pelo Teorema do confronto temos: $\lim_{x\to 1} -\left|(x-1)^9\right| \leq \lim_{x\to 1} (x-1)^9 \frac{1}{(x-1)^3} \leq \lim_{x\to 1} \left|(x-1)^9\right|^9$.

Segue que $0 \leq \lim_{x\to 1} (x-1)^9 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right) \leq 0$.

Então $C = \lim_{x\to 1} (x-1)^9 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right) = 0$.

3) Calculando o valor de $A^{3B} - C$

Vimos que: $A = \frac{2\sqrt[3]{9}}{9}$, $B = 1$ e $C = 0$.

Então $A^{3B} - C = \left(\frac{2\sqrt[3]{9}}{9}\right)^3 - 0 = \frac{8.\sqrt[3]{3^6}}{3^6} = \frac{8.3^2}{3^6} = \frac{8}{3^4}$

Resposta: Letra A

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos que podemos argumentar sobre a necessidade de aplicação do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio, entre outras justificativas apresentadas, a cobrança nos concursos das escolas públicas e militares: EFOMM e Escola Naval.

Sabemos que esta argumentação não é a principal, porém é o viés que norteou esta pesquisa.

Concluímos que não há material didático sobre Cálculo Diferencial e Integral, direcionado para o ensino médio que dê conta em preparar alunos para resolverem questões que envolvem limites de funções reais que aparecem nas provas de matemática dos concursos citados.

Na maioria dos cursos preparatórios, livros de cálculo, usados nos primeiros semestres de cursos universitários são amplamente consultados por professores e alunos.

Ficou claro que os alunos que realizam exames para as escolas militares citadas na pesquisa não adquirem maturidade matemática para a total compreensão do tópico que apresentamos. Na maioria dos casos, os alunos são adestrados a resolver as questões. Macetes e técnicas são apresentados ao longo do curso de preparação de modo que o aluno decora qual técnica algébrica será usada para cada tipo de limite apresentado.

Este material fruto de um questionamento pessoal, sobre o engessamento de décadas dos concursos militares serve de apoio a alunos de ensino médio que prestarão tais concursos.

Esta pesquisa abre caminhos para que outros colegas interessados no assunto possam completá-la, como por exemplo, analisando as questões que envolvem derivações e integrações nas mesmas instituições. Acreditamos ser de grande valia para o público que se envolve nesses concursos públicos militares.

REFERÊNCIAS

ANTAR NETO, Aref et al. **Introdução à análise matemática**. São Paulo: Ed. Moderna, 1985.

ÁVILA, Geraldo. O ensino do cálculo no segundo grau. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n. 18, p. 1-9, 1991.

______.**Cálculo 1**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1981.

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática aula por aula**. São Paulo: Ed. FTD, 1998.

______. **Matemática aula por aula**: resolução de todos os exercícios. São Paulo: Ed. FTD, 1998.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática**: volume 3. 2. ed. São Paulo: Ed. Moderna, 1996.

BRASIL. Decreto n. 981, de 8 de novembro de 1890. Aprova o regulamento da instrução primaria e secundaria do Districto Federal. **Diário Oficial da União**, Rio de Janeiro, 1890. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislação/ListaPublicações.action?id=65346>. Acesso em: 15 dez. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio**: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

______. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996. Brasília: MEC, 2000.

CONCORDIO REIS, Cláudia Ferreira; CASTRO BARBOSA, Augusto Cesar de. Uma proposta para o ensino de cálculo diferencial no ensino médio. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL DE EDUCÇAÃO, CIDADANIA E EXCLUSÃO: DIDÁTICA E AVALIAÇÃO, 2015, Rio de Janeiro. **Anais**...

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto e aplicações**. São Paulo: Ed. Ática, 1999.

______. **Matemática – volume único**. São Paulo: Ed. Ática, 2009.

LIMA, Elon Lages. Números e funções reais. **PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da matemática elementar 1**: conjuntos e funções. São Paulo: Atual, 1994.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos da matemática elementar 8**: limites, derivadas e noções de integral. São Paulo: Atual, 1994.

IEZZI, Gelson. et al. **Tópicos de matemática**. São Paulo: Atual, 1980. v. 3.

LEITHOLD, Louis. **Cálculo com geometria analítica**. v. 1, 5. ed. São Paulo: Ed. Harbra, 1994.

PELICANO, O Jornal da EFOMM. Disponível em: <http://www.projetomemoria.org/2009/01/conheca-a-carreira-do-oficial-de-maquinas/>. Acesso em: 24 out. 2017.

STEWART, James. **Calculo**. v.1, 5. ed. São Paulo: Ed. Pioneira, 2005.

APÊNDICE A – PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Meu nome é José Carlos Silva. Sou professor da rede Estadual do Rio de Janeiro (Matrícula 09283078) e da Rede Municipal de Nova Iguaçu (Matrícula 7097801). Estou em fase de conclusão do PROFMAT – Mestrado profissional em Matemática, realizado na PROPGPEC do Colégio Pedro II – Unidade de São Cristóvão. Nessa fase estou escrevendo meu TCC – Término de Conclusão de Curso com o seguinte assunto:

“Limites de funções reais de variável real no ensino médio: Um estudo visando os concursos da EFOMM e Escola Naval”

Tendo como objetivo enriquecer este trabalho com a visão dos discentes desta conceituada instituição, solicito respeitosamente respostas às perguntas abaixo:

Nome: ____

☐ EFOMM ☐ Escola Naval

1) Você estudou cálculo diferencial e integral na sua escola onde concluiu o ensino médio?

☐ SIM. Nome da Escola: ________________________________ ☐ NÃO

2) Responda somente se a sua resposta anterior foi NÃO.

Como aprendeu o cálculo diferencial e integral para seu bom desempenho no exame em que foi aprovado?

3) Na sua opinião qual é a necessidade ou objetivo da presença do cálculo diferencial e integral no exame de admissão dessa instituição?

4) O estudo do cálculo diferencial e integral após o ingresso na instituição parte do princípio que todos os alunos dominam? Quais bibliografia(s) usada(s) no curso de formação?

Meus contatos: Tel. / Whatsapp(21) 997181195 / Email: jcsavro@gmail.com

APÊNDICE B – REGRA DE L´HÔPITAL

Alguns limites de quocientes de funções não podem ser determinados apenas com o conhecimento do limite de cada função.

Ao tentarmos calcular um limite do tipo $\lim\limits_{x \to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$ às vezes ocorre que $\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} \mathbf{f(x)} = \lim\limits_{x \to \mathbf{a}} \mathbf{g(x)} = 0$, e assim o $\lim\limits_{x \to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$ é uma **forma de indeterminação do tipo** $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$**.**

Assim, se $\lim\limits_{x \to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ não há como dizer o valor de $\lim\limits_{x \to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$, somente sabendo-se que $\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} \mathbf{f(x)} = \lim\limits_{x \to \mathbf{a}} \mathbf{g(x)} = 0$. O $\lim\limits_{x \to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$ pode ser um valor real ou pode não existir.

Há outras formas indeterminadas além de $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$.

$$0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty \quad \text{e} \quad \infty^0$$

Vimos no capítulo 5 que nesse caso, era necessário aplicarmos alguns artifícios para calcular o limite.

Apresentaremos a seguir um teorema, conhecido pelo nome de **regra de L´Hôpital** que é um método para solução de formas indeterminadas $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ e $\frac{\infty}{\infty}$**.** As outras formas indeterminadas podem ser transformadas em indeterminações do tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ por meio de transformações algébricas simples.

Teorema (Regra de L´Hôpital)

"Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto a $\in$ I. Se $\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} \mathbf{f(x)} = 0$,, $\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} \mathbf{g(x)} = 0$, $\mathbf{g´(x)} \neq 0$ para x $\in$ I$-\{a\}$ e $\lim\limits_{x \to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$ existe ou é $\pm\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\mathbf{f´(x)}}{\mathbf{g´(x)}}$".

O mesmo vale se ***a*** for substituído por $\mathbf{a^+}$, $\mathbf{a^-}$, **+ ∞** e **–∞**, ou seja, o mesmo vale para limites laterais e limites no infinito. No caso de limites no infinito o intervalo I deve ser do tipo (b, ∞) para x$\to\infty$ e do tipo ($-\infty$, b) para x$\to-\infty$.

APÊNDICE C – QUESTÕES DE LIMITES DAS PROVAS DA ESCOLA NAVAL RESOLVIDAS POR REGRA DE L´HÔPITAL

As questões de limites das provas da Escola Naval que apresentamos a seguir fogem completamente à compreensão do aluno do curso preparatório quanto à resolução com as técnicas e propriedades de limites, mesmo aquele visto como excelente.

No gabarito oficial destas questões, não há soluções por artifícios puramente algébricos.

Através de contato realizado com professores de cursos preparatórios, todos apresentam as soluções via **regra de L´Hôpital**.

No capítulo 7 são apresentadas as resoluções dessas questões utilizando a regra de L´Hôpital.

2) Prova Escola Naval 2001-2002

Qual o valor do $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$?

A) e

B) $\frac{1}{e}$

C) 0

D) -1

3) Prova Escola Naval 2002-2003

Se $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = p$, então:

(A) $0 \le p < \frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2} < p < 1$

(D) $1 < p < 2$

(E) $2 < p < 3$

6) Prova Escola Naval 2006-2007

O valor do $\lim_{x\to1^+}\left[(\ln x).\ln(x-1)\right]$ é:

(A) $+\infty$

(B) e

(C) 1

(D) 0

(E) -1

7) Prova Escola Naval 2011-2012

Calculando-se $\lim_{x\to0^+}(\text{cotg}\,x)^{\text{sen}\,x}$ obtém-se:

(A) ∞

(B) 0

(C) e

(D) -1

(E) 1

13) Prova Escola Naval 2015-2016

Calculando $\text{Lim}_{x\to0}\left\{\dfrac{\text{tg}\,x - x}{x - \text{sen}\,x}+\dfrac{x-\text{sen}\,x}{\text{tg}^3 x}\right\}$ encontra-se:

(A) $\dfrac{7}{3}$

(B) $\dfrac{13}{6}$

(C) $\dfrac{5}{2}$

(D) $\dfrac{13}{3}$

(E) $\dfrac{7}{6}$