COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Bruno da Silva Ribeiro

MATEMÁTICA RECREATIVA: UMA EXPERIÊNCIA BASEADA EM CLUBES

Rio de Janeiro
2018

Bruno da Silva Ribeiro

MATEMÁTICA RECREATIVA: UMA EXPERIÊNCIA BASEADA EM CLUBES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins.

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

R484 Ribeiro, Bruno da Silva.

Matemática recreativa: uma experiência baseada em clubes / Bruno da Silva Ribeiro. – Rio de Janeiro, 2018.

58 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática recreativa. 3. Jogos no ensino de matemática. 4. Clubes de Matemática. 5. Olimpíadas de Matemática. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Bruno da Silva Ribeiro

MATEMÁTICA RECREATIVA: UMA EXEPIÊNCIA BASEADA EM CLUBES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____

Dr. Sc. Daniel Felipe Neves Martins (Orientador)
PROFMAT – CP2

____

Dr. Sc. Diego de Souza Nicodemos
PROFMAT - CP2

____

Dra. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa
PROFMAT - CP2

____

Dr. Sc. Rubens André Sucupira
IME-UERJ

Rio de Janeiro
2018

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter tornado isso tudo possível e aos amigos e familiares que me acompanharam durante todo o mestrado.

Em especial agradeço à minha mãe, Belice Costa, e ao meu irmão, Rafael Costa, que me incentivaram a levar adiante os estudos mesmo quando ainda era um adolescente imaturo.

Aos amigos Bruno Menezes e Cleber Fernandes. Este, por me mostrar o que é ser um professor. Aquele, por compartilhar um pouco de sua sabedoria sobre educação.

Agradeço à minha filha, Maria Luisa, pela alegria que carrega consigo – seu sorriso me motiva a continuar em frente.

Ao Professor Daniel Martins, por ter aceitado me orientar – o que muito me envaideceu. E a todo o corpo docente do PROFMAT/PEDRO II.

Aos alunos das turmas 906 e 907 do Colégio Pedro II de São Cristóvão por terem, mesmo atarefados com os compromissos da escola, dedicado seu precioso tempo a essa iniciativa.

Finalmente, agradeço aos meus amigos da Turma Profmat / Pedro II (2016-2017), tornamo-nos uma família.

RESUMO

RIBEIRO, Bruno da Silva. **Matemática Recreativa:** uma experiência baseada em clubes. 2018. 61 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

Este trabalho discorre sobre atividades elaboradas e desenvolvidas com alunos do último ano do Ensino Fundamental utilizando Matemática Recreativa. A pesquisa versa sobre a importância do tema e os motivos que nos fizeram escrever sobre o assunto, mostrando o que é realmente a Matemática Recreativa, seus principais autores e o ganho pedagógico em sala de aula. Descrevemos a experiência cultural da Rússia e a aplicação dessa metodologia em um blog desenvolvido pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) no Brasil conhecido por Clubes. Discutimos a viabilidade e os caminhos para construção de um Clube em escolas públicas e privadas. Concluímos esta pesquisa com um estudo sobre Olimpíadas de Matemática e como a Matemática Recreativa é apresentada nas competições. As atividades propostas em classe para o aprendizado e a fixação de alguns temas importantes para os exames olímpicos também são apresentadas.

Palavras-chave: Matemática Recreativa; Clubes de Matemática; Olimpíadas.

ABSTRACT

RIBEIRO, Bruno da Silva. **Recreational Math: a club-based experience.** 2018. 61 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

This paper dissertation elaborates and developes activities with students of the last year of Elementary School using Recreational Mathematics. The research deals with the importance of the theme and the reasons that made us write about it, showing what Mathematics is really about, its main authors and describes pedagogical gains in the math classrooms. We describe the cultural experience in Russia and the application of the methodology in a blog developed by the National Institute of Pure and Applied Mathematics (IMPA) in Brazil known as Clubs. We discussed the feasibility and the ways to build a Club in public and private schools. We conclude this research with a study on Mathematical Olympiads and how Recreational Mathematics is presented in competitions. The activities proposed in class for the learning and fixation of some important subjects for the Olympic exams are also showed.

Keywords: Recreational Mathematics; Mathematics Clubs; Olympics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As reformas curriculares no ensino brasileiro propõem mudanças nos conteúdos e, consequentemente, na metodologia de ensino da Matemática. Uma das finalidades destas mudanças é a apresentação de uma Matemática mais significativa. Para Lins (2004) a produção de significado está relacionada ao que o estudante efetivamente aprende de dado conceito ou assunto abordado.

Entendemos que essa forma de ensino é benéfica para o Processo de Ensino e Aprendizagem, gerando excelentes resultados. Defendemos algumas ideias para alcançar esse objetivo, tais como:

- Abordagem Histórica da Matemática;
- Utilização de Jogos e Materiais Concretos;
- Resolução de Problemas do Cotidiano;
- Uso e Disseminação de Laboratórios de Matemática;
- Exploração de Atividades Lúdicas e Recreativas.

Acreditamos ser natural que os estudantes sintam mais prazer quando estão envolvidos em atividades que permitam a descoberta. Isto é definido como Heurística. Para isso, os alunos precisam de estímulo e desafios. Uma forma de desenvolver essas atividades é através da Matemática Recreativa.

Em várias palestras e congressos, por exemplo, os Simpósios de Formação de Professores de Matemática, notamos que muitos professores ou licenciandos em Matemática também se sentem mais atraídos por uma prática docente similar. Entretanto, a sensação de não estarem preparados e a falta de material disponível são os grandes obstáculos.

Neste trabalho, apresentamos alternativas para que o leitor possa descobrir novas fontes de pesquisas e materiais para utilização em sala de aula. Vale ressaltar que todas as atividades desenvolvidas foram pensadas e elaboradas com alunos do último ano do Ensino Fundamental (9º ano) do Colégio Pedro II em São Cristóvão. Por esse motivo, usamos uma linguagem Matemática adequada à idade dos estudantes, evitando, no primeiro momento, o uso de fórmulas e demonstrações.

No Capítulo 2, apresentamos a ideia de Matemática Recreativa construindo com o leitor a nossa própria ideia sobre o tema. Destacamos os principais autores da área e escrevemos em linhas gerais sobre o ganho pedagógico quando trabalhamos com este assunto nas aulas de Matemática.

A seguir, exibimos um exemplo de aplicação bem-sucedida da Matemática Recreativa realizado na Rússia, intitulado Círculos Matemáticos. Tal projeto, apresentado no Capítulo 3, serviu de inspiração para a elaboração de um programa semelhante nas escolas públicas e privadas do Brasil.

No Capítulo 4, um questionamento natural surge desta contextualização histórica: é possível construir nas escolas públicas os Clubes de Matemática? Podemos dar uma finalidade ao estudo da Matemática via Clubes?

Atividades propostas contidas no Capítulo 5 descrevem problemas aplicados em duas turmas de nono ano do ensino fundamental do Colégio Pedro II, Campus São Cristóvão II. São exemplos de atividades que visam aguçar a criatividade dos professores que desejam trabalhar com Clubes de Matemática em suas escolas. Neste capítulo, além de apresentarmos os problemas, discutimos suas soluções e comentamos uma destas por conter um desenvolvimento fora do convencional esperado por alunos.

Concluímos o trabalho incentivando o professor de Matemática a adotar a prática de resoluções de problemas em suas escolas, usando a ideia de Clubes e estabelecendo conexões com diversos ramos do universo desta disciplina.

2 A MATEMÁTICA RECREATIVA

Neste capítulo, apresentaremos a Matemática Recreativa. Nele abordaremos fatos históricos relacionados ao tema, o seu papel na evolução de algumas teorias importantes da Matemática, principais autores e divulgadores e os valores pedagógicos da Matemática Recreativa para o ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

2.1 Sobre a Matemática Recreativa

Segundo o professor Norte Americano Singmaster (1992, p. 57), "[...] Matemática Recreativa é a Matemática que é divertida, popular e com uso pedagógico". Isto é, entendemos como problemas (ou atividades) compreensíveis para o leigo interessado e usados como uma forma de fazer a Matemática Pura ser compreensível. Essas atividades resultam, por exemplo, de jogos, problemas, desafios, competições e de situações com que o ser humano se depara no dia a dia.

Existem diversos grupos de pesquisas que desenvolvem atividades em recreação Matemática. Seus trabalhos são divulgados em publicações especializadas e em congressos internacionais. Para Santos (2014) a Matemática Recreativa é a base da Matemática "Séria[1]", podendo ser observado, por exemplo, nos problemas populares que deram origem à Teoria das Probabilidades e à Teoria dos Grafos. No entanto, ainda segundo Santos, o importante não é tentar definir a Matemática Recreativa. As definições tendem a limitar o assunto, e a Matemática Recreativa, na sua gênese, é muito ampla no campo da Matemática. Embora possa servir de ponte para a descoberta de conceitos muito importantes, a utilidade não é a sua preocupação: engenhosidade, criatividade e beleza nas resoluções é o que importa. Há quem diga, de forma simplista, que a Matemática Recreativa é o assunto que engloba quebra cabeças e jogos matemáticos. Entretanto, a sua abrangência vai além destes exemplos vindos do senso comum.

[1]Ao longo da pesquisa percebemos que a Matemática Recreativa se ocupa mais com a divulgação de resultados e a parte lúdica da disciplina. Ela dá oportunidade à prática de diferentes pensamentos e raciocínios que são inerentes à própria Matemática como o Aritmético, o Geométrico e o Combinatório. Assim, quando adjetivamos uma Matemática por "Matemática Séria" estamos nos afinando a muitos que a definem como Matemática Pura ou a Matemática pela Matemática, isto é, a Matemática exposta através de seu modelo formalista e estruturalista. É a parte da Matemática que se preocupa com o conhecimento e o domínio da estrutura sobre a qual um assunto reside, sua formalização, na axiomatização e consequentemente na justificativa baseada na lógica aristotélica e em como os resultados são demonstráveis. O arcabouço da Análise na Reta é um bom exemplo do que chamamos aqui de Matemática Séria.

A recreação Matemática pode ser uma atividade com caráter lúdico e pedagógico, com ou sem fator de competição. A procura da solução de um problema nem sempre exige um grande conhecimento de Matemática. É nesse momento que a recreação atrai a curiosidade dos que não se interessam pela matéria e os convida à prática do raciocínio lógico-dedutivo e consequentemente ao estudo da disciplina.

2.2 O Surgimento da Matemática Recreativa

O Papiro de Rhind é um documento egípcio que data de 1650 a.C. O papiro foi adquirido por Alexander Henry Rhind, de Aberdeen (Escócia), em 1858 em Luxor, Egito. O Museu britânico incorporou-o ao seu patrimônio em 1865, permanecendo em seu acervo até os dias atuais. O Papiro é um dos mais conhecidos documentos Matemáticos da antiguidade. Nele encontramos problemas criativos e lúdicos. No Papiro, seu escriba Ahmes detalha a resolução de 85 problemas, muitos dos quais são práticos, envolvendo distribuição de pão e cálculo de áreas ou volumes. O Problema 79, extraído de SILVA (2004, p.37), chama a atenção de alguns pesquisadores, como Singmaster e Silva, da área de Matemática Recreativa. Vejamos:

Problema 79 do papiro de Rhind: *Um homem tinha sete casas, cada casa tinha sete gatos, para cada gato havia sete ratos, para cada rato havia sete espigas de trigo e cada espiga tinha sete medidas de grão. Quantas coisas (casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão) ele possuía?*

Solução. Como são 7 casas e em cada casa temos 7 gatos, então teremos $7 \times 7 = 49$ gatos. Para cada gato há 7 ratos, ou seja, $49 \times 7 = 343$ ratos. Para cada rato há 7 espigas de trigo, totalizando $343 \times 7 = 2401$ espigas. Finalmente, cada espiga possui 7 medidas de grão. Gerando $2401 \times 7 = 16807$ grãos. O problema pede o valor da soma $7 + 49 + 343 + 2401 + 16807$ resultando em 19607.

Figura 1 - Papiro de Rhind

Fonte*:* <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm202/Papiro.htm>. Acesso em: 12/01/2018

Segundo o professor Silva (2004), obviamente, este problema não retrata uma situação real, trata-se de um problema recreativo, destinado a ensinar divertindo. Este não é, sequer, a mais antiga manifestação deste gênero.

Os babilônios também propuseram problemas sem sentido no mundo real; resolviam problemas quadráticos nos quais a área de um retângulo era adicionada à diferença entre o comprimento e a largura do mesmo. Isso claramente não tinha significado prático. Por exemplo, o tablete de argila BM 13901, que se encontra no Museu Britânico, contém o seguinte problema, extraído de Roque (2012, p. 22): "*Encontrar o lado de um quadrado cuja área, somada com o lado, é igual a 0,45.*"

Ainda para Silva (2004), estas e outras curiosidades, fazem parte das Recreações Matemáticas. Elas podem parecer elementares e sem importância. Entretanto, o que dizer da Teoria das Cônicas, tão elaborada, desenvolvida pelos gregos na Antiguidade? Tratava-se de uma curiosidade, para puro prazer dos praticantes, mas, anos mais tarde, Kepler descreveu as órbitas planetárias à custa de elipses, elipses estas que estavam disponíveis desde o tempo de Apolônio. Podemos exibir muitos outros exemplos da Matemática "Séria" que começam por ser recreativas, como as construções geométricas, a Teoria dos Números e as resoluções de equações.

Para Singmaster (1992), a Matemática Recreativa é tão antiga quanto a própria Matemática. Os jogos de azar e os jogos de estratégias parecem ser da mesma época que a civilização humana. A matemática dos jogos de azar teve seu desenvolvimento na Idade Moderna por Fermat e Pascal na década de 1650, o que deu origem a Teoria das Probabilidades.

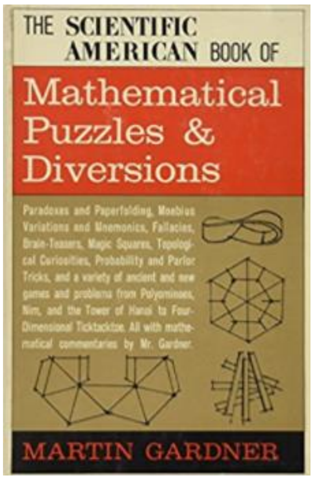
Uma das maiores motivações para a Álgebra foi a resolução de equações. Embora a Geometria tenha suas origens em práticas topográficas, os gregos a trataram como um jogo intelectual e grande parte de seus trabalhos deve ser considerado de natureza recreativa. Devido a sua longa história, a Matemática Recreativa é um ideal veículo de comunicação dos aspectos históricos e culturais de Matemática.

2.3 A Matemática Recreativa na Atualidade: Principais Autores e Divulgadores

2.3.1 Martin Gardner

O maior divulgador da Matemática Recreativa, como mostra Machiavelo (2014), foi o norte americano Martin Gardner (1914-2010). Nascido em Tulsa, Oklahoma, Gardner graduou-se bacharel em filosofia em 1936 na Universidade de Chicago. Desde criança gostava de quebra-cabeças e jogos. No início dos anos 50 mudou-se para Nova Iorque e em 1956 escreveu seu primeiro artigo na revista Scientific American sobre flexágonos[2].O artigo teve um número expressivo de leitores. Por isso, o editor sugeriu a Gardner escrever uma coluna periódica chamada Mathematical Games. Devido ao grande sucesso, foi lançado em 1959 o livro intitulado The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.

Figura 2 - The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions



Fonte:< https://www.amazon.com/Scientific-American-Mathematical-Puzzles-Diversions/dp/B0006AX7FE>.
Acesso em: 13/01/2018

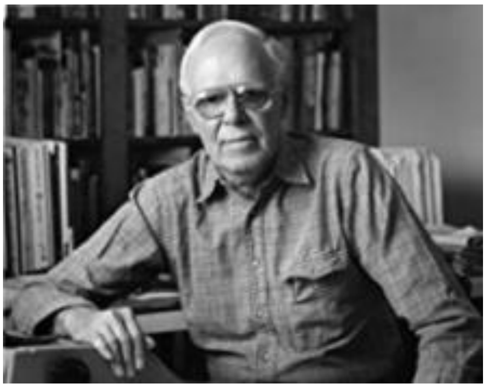
[2] São estruturas geométricas construídas com fitas de papel colorido, tesoura e fita gomada cujas dobras sucessivas resultam em polígonos. Estudados por Arthur H. Stone, tais estruturas revelam propriedades muito interessantes. Os mais conhecidos são os hexaflexágonos e os tri-hexaflexágonos

Apesar de ser apaixonado pelo assunto, Gardner nunca mais estudou Matemática depois do Ensino Médio. Segundo o professor Machiavelo (2014) a razão pelo sucesso dos seus artigos é pelo fato que a Matemática envolvida trata fundamentalmente de ideias. É claro que, na sua natureza, a Matemática tem associado a si alguns métodos. Mas o que é realmente entusiasmante e capaz de tirar o sono de uma pessoa é a complexidade de tais ideias. Para despertar interesse nas pessoas, é importante escolher contextos surpreendentes e bem-humorados. Era isso o que Gardner fazia.

Seus artigos, além de serem extremamente cuidadosos e carregados de ideias interessantes, são enquadrados de forma inteligente e variada. Por vezes, motivos aparentemente muito distintos são ligados através da Matemática e isso mostra ao leitor a enorme importância da disciplina. Muitos matemáticos confessaram ter ganho o seu gosto pela disciplina lendo os artigos de Martin Gardner na Scientific American. Richard Guy, notável matemático britânico, como mostra Machiavelo (2014), disse que “Gardner trouxe mais Matemática para milhões do que qualquer outra pessoa”.

Em 22 de maio de 2010, Martin Gardner faleceu. Desde 1993 é realizado, em Atlanta, nos Estados Unidos, um encontro de Matemática Recreativa em sua homenagem. Trata-se do Gathering for Gardner (G4G)[3]. Um encontro semelhante acontece em Portugal nos anos ímpares. A Recrational Mathematics Colloquium (RCM). O primeiro (2009) e o segundo (2011) foram realizados na Universidade de Évora. O quinto RCM foi realizado em janeiro de 2017 na Universidade de Lisboa.

Figura 3 - Martin Gardner (1914 - 2010)



Fonte: <https://www.amazon.co.uk/Martin-Gardner/e/B000AP8X8G>. Acesso em: 13/01/2018

[3]O leitor é convidado a acessar: http://www.gathering4gardner.org/ para maiores informações acerca do G4G.

Também são conhecidos como matemáticos recreacionistas: Lewis Carrol, Èdouard Lucas, Sam Lloyd, Henry E. Dudeney. Atualmente no Brasil os trabalhos de Ian Stewart e Malba Tahan são os mais divulgados.

2.3.2 Ian Stewart

Ian Stewart (1945 -) é autor de diversos livros de divulgação Matemática. Professor da Universidade de Warwick, Inglaterra, o próprio relata que, desde seus 14 anos, comprou um caderno e começou a fazer anotações sobre Matemática. Porém, não eram sobre a Matemática escolar e sim sobre tudo que ele encontrava de interessante em relação à Matemática que não era ensinada na escola, preenchendo rapidamente um segundo caderno, como consta em Stewart (2004). Ainda segundo o autor, “a Matemática não se resume ao que você aprendeu na escola. Melhor ainda: a matemática que você não aprendeu na escola é interessante. Na verdade, boa parte dela é divertida, especialmente se você não precisa fazer uma prova ou acertar cálculos”. No fim, os cadernos transformaram-se em seis. Dando origem ao livro: *Almanaque das curiosidades matemáticas*.

Stewart é conhecido mundialmente por contribuir com a popularização da Matemática. Assim como Gardner, publicou durante anos na Scientific American, em que tinha uma coluna semanal chamada Nature and New Scientist. Em uma de suas obras, Stewart diz que o seu maior objetivo é instigar a imaginação dos leitores, mostrando muito os aspectos divertidos e intrigantes dessa ciência. Sua maior felicidade residia em que, após a leitura de seus textos, as pessoas tivessem vontade de “fazer” Matemática, vivenciar a emoção da descoberta e se manter informado sobre avanços importantes. Sejam eles de dois mil anos atrás, da semana passada ou de amanhã. (Stewart, 2004).

2.3.3 Malba Tahan

Um dos maiores divulgadores da Matemática no Brasil foi o escritor e professor Júlio César de Melo Sousa (1895 – 1974). Seu trabalho era focado no ensino da Matemática de uma forma divertida e diferente, não apenas utilizando fórmulas. Em seus livros percebemos que o autor sempre propunha desafios matemáticos, aguçando a criatividade e incentivando a descoberta. Para Lima (2012), suas obras eram livros de divulgação, escritos num estilo claro, simples e agradável, com maior foco na História da Matemática e em tópicos elementares da matéria.

Figura 4 - Júlio César de Melo Sousa (1895 – 1974)

Fonte: <https://orientalistasdelinguaportuguesa.wordpress.com/julio-cesar-de-mello-e-souza/>. Acesso em: 20/01/2018.

Com o pseudônimo de Malba Tahan, Júlio escreveu a sua obra mais famosa: O Homem que Calculava. Traduzido para outros idiomas, o livro conta a história de Beremiz Samir, um jovem fictício, que resolve, com extrema habilidade, inúmeros problemas de Matemática. Segundo Lima (2012), “O Homem que Calculava” muito fez para estimular a arte de resolver problemas, aumentar o amor pela Matemática e destacar os seus aspectos nobres.

Júlio César ficou famoso pelos seus livros de recreações matemáticas e fábulas passadas no Oriente. Ao todo foram 51 livros de matemática e 69 contos. Com destaque para Matemática Divertida e Curiosa, Mil histórias sem fim, A caixa do futuro e Salim, o mágico. Lecionou no Colégio Pedro II e defendia o uso de jogos nas aulas. Por esses motivos, alguns pesquisadores dizem que ele foi o precursor da Educação Matemática no Brasil e no dia 6 de maio, dia do seu nascimento, é comemorado o dia nacional da Matemática.

2.4 Valores Pedagógicos da Matemática Recreativa

A Matemática está fortemente presente nos currículos escolares. Das disciplinas curriculares é uma das que adquirem um maior impacto social, sobretudo pelo fraco desempenho dos alunos. Com o intuito de justificar esse baixo desempenho, muitos jovens alegam que a disciplina é pouco motivadora, aborrecida e que não passa do uso de fórmulas e regras pré-estabelecidas. Acreditamos que uma maneira de mudar esse ponto de vista é através da matemática recreativa.

Segundo Singmaster (1992), a Matemática Recreativa é um tesouro de problemas que fazem a diversão em Matemática. Um problema vale mais que mil exercícios. Não há maior experiência de aprendizagem do que tentar resolver um bom problema. A Matemática Recreativa fornece muitos problemas dessa natureza e quase todos podem proporcionar ótimas reflexões e soluções. Por isso, ela também é um tesouro de problemas para investigações estudantis.

Tais problemas podem surgir da realidade, o que mostra que a Matemática está sempre nos rodeando. Basta sabermos olhar. A utilidade pedagógica da Matemática Recreativa vem da natureza da própria Matemática, que não se resume a uma aplicação de fórmulas nas atividades propostas. A Matemática é composta de ideias estruturadas que exigem raciocínio lógico no processo de ensino e aprendizagem.

3 OS CÍRCULOS RUSSOS E O CLUBE DE MATEMÁTICA

Este Capítulo tem por objetivo mostrar um aspecto cultural da Rússia no desenvolvimento da Matemática Escolar, os famosos Círculos Matemáticos. Discorreremos sobre o trabalho realizado pelos professores do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Moscou (Lomonosov). Escrevemos também, sobre os grupos de estudos americanos e europeus e, por fim, os Clubes de Matemática da OBMEP, um blog desenvolvido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), baseado na ideia dos Círculos Matemáticos que busca disseminar o estudo da disciplina pelas escolas públicas e privadas do Brasil.

3.1 Da Experiência Russa: descrevendo um estilo de trabalho

Os Círculos Matemáticos são uma tradição de mais de cem anos na Rússia. Devido ao alto número de alunos com grande habilidade em Matemática e em raciocínio lógico, professores da antiga União Soviética convidaram um grupo de jovens para realizar reuniões semanais não obrigatórias, feitas em horário extracurricular, com o intuito de resolver uma série de problemas. A ideia central dos encontros era mostrar que o estudo da Matemática podia gerar o mesmo entusiasmo que praticar um esporte em equipe, sem ser, obrigatoriamente, competitivo. Atualmente, outros países na Europa e também os Estados Unidos adotam a prática e realizam esses encontros.

Diferentemente dos grupos de estudos americanos e de outros países na Europa, os Círculos Matemáticos Russos são dirigidos por professores universitários ou por alunos de pós-graduação, e não por professores do Ensino Médio. Muitos consideram parte do seu dever profissional mostrar os motivos que os fizeram estudar ainda mais Matemática. Os professores aguçam a curiosidade dos seus alunos e convidam-nos a aprofundar seus conhecimentos na disciplina. O resultado vai além dos encontros na escola. Por isso, é comum estudantes de um mesmo círculo viajarem juntos no fim de semana para resolverem ou discutirem problemas, construindo uma relação de intimidade e cooperativismo só obtido, normalmente, em equipes esportivas. Na visão dos professores, dois pontos são de importante destaque na tradição de atividade extracurricular de matemática na Rússia:

1º) Os encontros são caracterizados por um diálogo intenso e espontâneo entre estudantes e professores, em que cada aluno, se possível, é orientado individualmente;

2º) A aprendizagem começa cedo. Em geral, equivalente ao sexto ano do Ensino Fundamental das escolas brasileiras (11 ou 12 anos).

3.1.1 Sobre os Encontros do Círculo da Matemática

Inicialmente, os estudantes recebem uma lista com alguns problemas. Os alunos podem resolvê-los em qualquer ordem. Se alguém tiver uma pergunta ou quiser discutir uma solução, simplesmente levanta a mão e o professor irá atendê-lo. Todos podem resolver os problemas oralmente, porém o ideal é que tenham algumas notas escritas. Diversas vezes, algum estudante consegue a resolução de um determinado exercício, mas, devido a sua imaturidade, não consegue escrevê-la ou até mesmo explicá-la. Nesse momento, a tarefa do professor é ajudar a traduzir suas ideias para a escrita.

Há um pequeno intervalo, para quem precisar, no meio da sessão. Antes (ou até mesmo depois) do intervalo, são discutidas as soluções do encontro anterior com a turma toda. O professor leva apenas vinte minutos para explicar as resoluções no quadro. Todo tempo restante é destinado para a resolução dos problemas pelos estudantes e para a discussão individual com o professor. Caso algum aluno termine todos os problemas iniciais é dada uma nova lista com mais problemas. No final do encontro, a lista com problemas adicionais é dada para qualquer aluno que a peça.

É normal que alguns estudantes não consigam resolver muitos problemas. Por isso, é importante que durante o encontro o professor converse com cada um para falar sobre os problemas ou simplesmente para dar uma sugestão. Caso não consiga resolver todos os problemas durante a sessão, o aluno pode resolvê-los em casa e discutir suas soluções no próximo encontro. Entretanto, não há exercícios obrigatórios para casa. A evolução de cada estudante é anotada em um diário especial, no qual os problemas solucionados são marcados com um sinal de mais. Os professores usam esses registros para medir o sucesso de cada encontro, já que eles fornecem uma indicação de quais problemas são mais difíceis e quais necessitam de uma sugestão ou indicação para os estudantes.

3.1.2 Seleção dos Problemas Russos

A prática adotada em um Círculo Matemático é diferente da utilizada em sala de aula. Durante as aulas regulares, o professor explica a teoria, mostra alguns exemplos de determinado assunto e, a seguir, resolve alguns exercícios. Os encontros de um círculo ficariam muito entediante se todos os problemas fossem de um único assunto. Além disso, um aluno que não perceba qual é o assunto "chave" não resolveria nenhum problema. Em contrapartida, se um professor começa uma sessão explicando como resolver determinado problema, como os outros são semelhantes, deixamos menos espaço para a criatividade dos alunos, visto que é só reproduzir a ideia inicial. Descrevemos um conjunto típico de problemas que pode ser utilizado em um encontro.

O primeiro exercício é muito simples. Pode ser resolvido de várias maneiras diferentes. Uma solução pode ser através de muitos cálculos, outras despertam a criatividade e proporcionam uma ideia interessante. Um bom problema desse tipo é o seguinte: O que é maior, a soma dos cinquentas primeiros números naturais ímpares ou a soma dos cinquenta primeiros números naturais pares? E de quanto seria a diferença? Outros tipos de problemas interessantes são os que possuem uma resposta intuitivamente óbvia, mas errada. Por exemplo: É possível que o produto ab seja divisível por c^2 quando nem a nem b forem divisíveis por c? A solução aparentemente seria "não". No entanto, ab pode sim ser dividido por c^2, ou até por c^{100}.

O importante é que todo conjunto de problemas tenha um assunto especial em que aproximadamente metade dos exercícios sejam destinados a ele. O ideal é que esse assunto tenha sido cobrado em pelo menos um dos problemas na lista do encontro anterior. Assim, no meio da sessão atual, quando a resolução da lista antiga for apresentada, este problema será discutido e os alunos terão um novo olhar para a lista do dia. O conjunto de problemas deve conter alguns exercícios repetitivos. A ideia central é repeti-los, mas com roupagem diferente. Por exemplo:

1. Há torneiras de água na cantina da escola. Cada uma delas pode ser aberta ou fechada. De quantas maneiras pode ter água corrente na cantina?
2. Quantas cadeias de zeros e uns é possível formar, de modo que cada cadeia contenha 10 dígitos?
3. Existem 10 maçãs crescendo em uma árvore. De quantas maneiras alguém pode colher algumas delas?

4. Depois da escola, 12 estudantes decidiram se dividir em 2 grupos, um para explorar a cidade e o outro para assistir uma aula sobre ciência da computação. De quantas maneiras eles podem se dividir?
5. A cantina da escola tem sempre os mesmos n itens diferentes. Pedro quer escolher um lanche diferente a cada dia; ele pode comer de 0 a n itens diferentes de cada vez. Por quantos dias ele consegue fazer isso?

Esses cinco problemas usam a mesma ideia fundamental. Alguns alunos resolvem os exercícios como se fossem novos, mas sempre há alunos que conseguem perceber a essência do problema e criam comparações.

Para alunos iniciantes, é essencial o uso de jogos matemáticos entre os problemas iniciais nos primeiros encontros. Os jogos ajudam a ensinar muitas ideias às crianças. Por vezes, eles criam uma estratégia errada para vencer o jogo. O ideal é que o professor jogue com esse aluno adotando a ideia do aluno e perca para ele. No momento em que o estudante fizer um movimento inadequado o professor pode sugerir o movimento correto e corrigi-lo. Dessa forma, o aluno vence o jogo, mas percebe que sua estratégia não funciona.

Toda lista de exercícios possui alguns problemas geométricos. Pode ser um problema de geometria clássica que tenha como pré-requisito apenas conhecimentos básicos, pode ser um quebra-cabeças simples ou um problema de dobraduras. A ideia central é que o aluno não fique entediado durante o encontro.

Segundo Dorichenko (2011), o objetivo do Círculo não é explorar problemas de um determinado tipo ou dominar uma coleção de fatos, mas interessar os estudantes de Matemática, mostrar que a Matemática é uma ciência linda e encantadora, ensiná-los a raciocinar e a distinguir uma solução de algo que não é solução.

Uma excelente coletânea de problemas, utilizada pelo departamento de Matemática de Moscou, pode ser encontrada no livro “A Moscow Circle: Week-by-Week Problem Sets” (Um Círculo Matemático de Moscou: Conjuntos de Problemas de Semana a Semana). Dois outros livros conhecidos em Círculos Matemáticos bastante utilizados são “Mathematical Circles” (Russian Experience) e “A Decade of the Berkeley Math Circle (The American Experience)”. Ambos os livros são organizados por tópicos, enquanto o livro adotado pelo departamento de Matemática de Moscou é por encontros.

Figura 5 - Livros de Círculos Matemáticos

Fonte: <http://www.ams.org/notices/201209/rtx120901275p.pdf>. Acesso em: 12/03/2018

3.1.3 Final de um Círculo

Ao término de um ou dois anos, os estudantes recebem um certificado de "Pequeno Cientista Matemático". Na verdade, os conhecimentos e as habilidades adquiridas valem mais que qualquer certificado. A participação em um círculo não traz nenhum benefício formal. Diversos alunos são aceitos em escolas com uma maior ênfase em Matemática e iniciam um estudo mais aprofundado da disciplina. Como a carga horária da disciplina é suficientemente grande e difícil, poucos alunos frequentam os círculos em uma escola com ênfase em Matemática.

3.2 Os Clubes de Matemática da OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) organiza diversos projetos visando a divulgação da matemática. O Clubes[4] é mais um desses projetos. Baseado no conceito dos círculos Russos, o site oferece um ambiente onde os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio podem desenvolver atividades de forma ampla e divertida. Também são desenvolvidas gincanas regionais e nacionais, debates de filmes, resolução de problemas, jogos e atividades com softwares de Geometria Dinâmica. A participação não é apenas de alunos das escolas públicas. Alunos de escolas particulares, professores e

[4] http://clubes.obmep.org.br/blog/

universitários também podem fazer parte do projeto. Além de disseminar o estudo da matemática, o Clubes tenta desmitificar as ideias preconcebidas da disciplina.

Figura 6 - Clubes de Matemática da OBMEP

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/>. Acesso em: 15/04/2018.

Todas as atividades são desenvolvidas no próprio blog e no fórum de discussões. Nesses ambientes, os participantes podem trocar experiências com estudantes de outras regiões do país, estudar alguns conteúdos que não constam na grade escolar e, é claro, desenvolver a Matemática de forma divertida, aumentando a curiosidade e o interesse pelo estudo.

Na intenção de construir uma parceria com os professores de Matemática, o blog convida os docentes a orientar vários Clubes nas escolas onde lecionam. Como o próprio nome diz, o orientador conduzirá os alunos nas atividades propostas, sanando eventuais dúvidas. Além do crescimento matemático dos estudantes, o professor poderá ter acesso a diferentes materiais didáticos para utilizar em suas aulas. Buscando um melhor acompanhamento do Clube, algumas informações são necessárias para os organizadores do blog. São elas:

1. horário e local dos encontros;
2. orientador das atividades;
3. possibilidade de reprodução de material para os participantes;
4. acessibilidade à Internet; e
5. disponibilidade para a realização de outras atividades organizadas pela OBMEP.

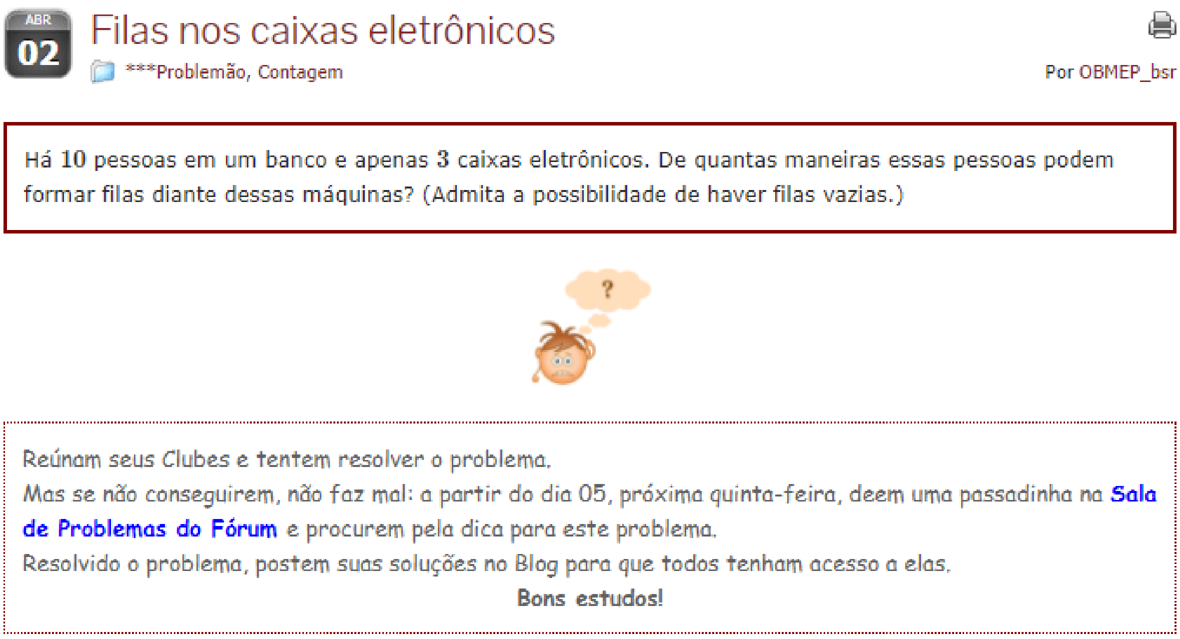
O orientador notará que no blog há atividades de caráter mais geral. Por exemplo, resolução de problemas e desafios, notícias, vídeos, indicações de livros e sites, provas de competições olímpicas entre outras. Já no fórum são desenvolvidas atividades de caráter mais específico, tais como: gincanas, discussão e resolução de problemas mais específicos, aprendizagem e utilização do GeoGebra e do LaTeX.

3.2.1 O que há no blog?

O Clubes disponibiliza para os participantes quatro salas: atividades, leitura, problemas e estudos; cada uma com sua característica específica. Todo material pode ser acessado por professores para que possam utilizá-los em suas escolas. Os que são orientadores de um clube podem acessar o Fórum para discutir essas atividades, esclarecer possíveis dúvidas e sugerir novos exercícios. Periodicamente, gincanas e concursos são propostos para os Clubes, através destas salas.

Semanalmente, o blog publica três problemas para os Clubes. Os problemas semanais são divididos em três categorias: probleminha, problema e problemão (ou desafio). Os Clubes podem acessar o Fórum restrito e participar das resoluções. Após três dias, os moderadores do site postam dicas para os problemas propostos.

Figura 7 - Problema Semanal


ABR 02
Filas nos caixas eletrônicos
***Problemão, Contagem
Por OBMEP_bsr

Há 10 pessoas em um banco e apenas 3 caixas eletrônicos. De quantas maneiras essas pessoas podem formar filas diante dessas máquinas? (Admita a possibilidade de haver filas vazias.)

Reúnam seus Clubes e tentem resolver o problema.
Mas se não conseguirem, não faz mal: a partir do dia 05, próxima quinta-feira, deem uma passadinha na **Sala de Problemas do Fórum** e procurem pela dica para este problema.
Resolvido o problema, postem suas soluções no Blog para que todos tenham acesso a elas.
Bons estudos!

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/2018/04/filas-nos-caixas-eletronicos/>. Acesso em: 15/04/2018.

A solução dos moderadores e as soluções de alguns clubes participantes são divulgadas posteriormente no blog.

Figura 8 - Soluções de um problema

Probleminha: Algarismo Final

Problema

Qual o algarismo das unidades do produto de números ímpares $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 2013$?

Solução 1

Como 5 é um dos fatores da multiplicação, temos que o produto é múltiplo de 5, logo o algarismo das unidades do produto é 0 ou 5.

Se fosse 0, teríamos que o produto é par, ou seja, um dos dos fatores da multiplicação é par, mas isto não ocorre.

Logo **o algarismo das unidades desse produto é o número 5**.

Solução enviada pelo Clube **Os Pitagóricos**.

Solução 2

Observe que qualquer número ímpar ao ser multiplicado por 5 sempre resulta num produto cujo último algarismo é 5.

Deste modo, como todos os números da multiplicação citada são ímpares e um deles é o 5, então **o algarismos final do produto é 5**.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-algarismo-final/>. Acesso em: 15/04/18.

Através da sala de estudos, os integrantes do Clube podem encontrar materiais que os ajudam na resolução dos problemas do blog. Além de proporcionar um amadurecimento na escrita Matemática, os participantes encontrarão roteiros de estudos, pequenos artigos para complementar o assunto e conexões com outros problemas.

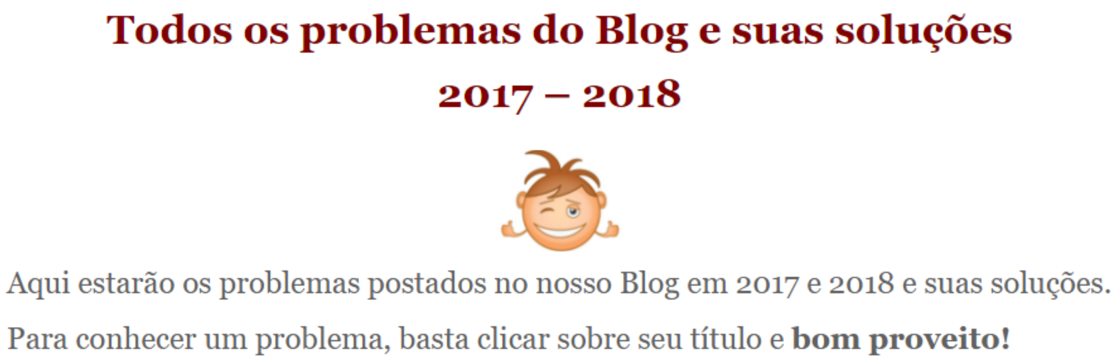
Para os mais jovens, o Clubes disponibiliza a Ludoteca. Um ambiente onde os estudantes encontram atividades lúdicas, jogos, passatempos e aplicativos. Tudo para aprender brincando e se divertindo. Além da Biblioteca, onde há biografias de grandes matemáticos, pequenos textos e curiosidades, a Videoteca é outro local para adquirir conhecimento com pequenos vídeos de Matemática. Com destaque para a série “Isto é Matemática” da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).

Figura 9 - Ludoteca do Clubes

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/jogos-e-passatempos/>. Acesso em: 15/04/18

Pudemos acompanhar a evolução do blog ao longo dos anos. Em 2017, foram mais de 200 problemas.

Figura 10 - Problemas 2017/2018



Fonte:<http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-problemas-todos-os-problemas-do-blog-2017/>. Acesso em: 15/04/18

4 A ORGANIZAÇÃO DE CLUBES NAS ESCOLAS PÚBLICAS

Este Capítulo tem por finalidade mostrar ao leitor como é possível montar um Clube de Matemática em uma escola pública. Os possíveis obstáculos podem ser superados com a criatividade das atividades propostas pelo professor organizador. Escrevemos também, sobre uma breve experiência baseada no conceito de Clubes com alguns alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Pedro II em São Cristóvão na preparação para algumas Olimpíadas de Matemática.

4.1 O Conceito de Clubes de Matemática

No Brasil, além do blog apresentado no Capítulo 3, existem diversos projetos intitulados Clubes de Matemática, cada um com suas particularidades, funcionando dentro de suas propostas e de seus objetivos, todos desenvolvendo atividades para melhorar o ensino e aprendizagem da Matemática. A maioria está diretamente associada a uma instituição de nível superior. Contudo, a criação dos primeiros Clubes de Matemática, segundo Morgado (1996), ocorreu nos Estados Unidos nas décadas de 1930 e 1940. Para o autor, tais Clubes foram criados com o intuito de serem auxiliares poderosos na propaganda da Matemática, no fortalecimento do convívio entre os interessados nesta disciplina e também por poderem contribuir para resolver algumas dificuldades na aprendizagem da Matemática.

Morgado (1996) também aponta que em Portugal, na década de 1940, a ideia americana da criação dos Clubes de Matemática ganhou força com o apoio incondicional da Sociedade Portuguesa de Matemática:

> Assim, logo na primeira reunião de estudos, realizada, [...], em junho de 1941, a Comissão Pedagógica (da Sociedade Portuguesa de Matemática) chamou a atenção para a criação de Clubes de Matemática, defendendo: ‘a difusão do gosto pelo estudo da Matemática por meios extra-escolares, tais como a criação de Clubes de Matemática.’
>
> O primeiro Secretário geral da S.P.M., António Monteiro, empenhou-se entusiasticamente na criação de Clubes de Matemática.
>
> No artigo intitulado Clubes de Matemática (*Gaz.Mat*., n(o) 11 (1942), pp. 8-12), depois de se referir à importância do papel desempenhado pelo Clubes de Matemática nos Estados Unidos, no desenvolvimento do gosto pela Matemática, António Monteiro diz o seguinte:
>
> À luz desta experiência, estamos no direito de pensar que a criação de Clubes de Matemática, na maioria das nossas escolas secundárias e superiores, é susceptível de

> determinar uma corrente vital interesse pela matemática, entre os jovens estudantes, que contribuirá de uma maneira eficaz para o ressurgimento das matemáticas portuguesas. [...] É claro que a criação desses Clubes dependerá em grande parte do interesse e espírito de iniciativa de professores e estudantes. [...] Nas escolas em que houver um grupo, muito embora pequeno, de pessoas capazes de fundar um Clube de Matemática, estou certo que elas arrastarão atrás de si a grande maioria dos estudantes interessados pela matemática, na medida em que a atividade do Clube corresponder às inspirações culturais atualmente existentes entre essas camadas. (MORGADO, 1996, p.1).

Analisando este pequeno fato histórico, entendemos que um Clube é um espaço estruturado para o desenvolvimento da Matemática, cujo principal objetivo é a criação de atividades educativas que possibilitem a discussão e a reflexão, propondo aos estudantes situações problemas, para que eles, por meio da própria atividade, se apropriem do conhecimento matemático.

Após o entendimento do objetivo geral do Clubes de Matemática, precisamos explicar como o professor (ou qualquer outra pessoa interessada em divulgar a Matemática) pode organizar um grupo como este em uma escola.

4.2 Organização de um Clube

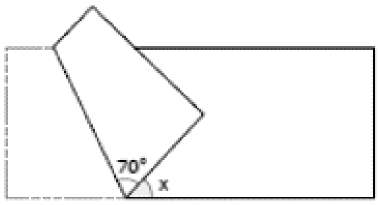
Um Clube pode ser organizado em qualquer escola, o ideal é que não haja exames de admissão para os estudantes e o único pré-requisito seja a vontade de aprender. Os encontros podem ocorrer em salas de aula ou em laboratórios de Matemática em horários não utilizados pela grade curricular ordinária da escola. Recomendamos que os encontros sejam semanais e que a duração seja de pelo menos uma hora. Entretanto, algumas atividades podem exigir mais tempo, não há problemas em dividi-las em etapas. Para algumas atividades ou resoluções de problemas é necessário que os alunos tenham um certo grau de conhecimento matemático. Por isso, sugerimos que os participantes de um mesmo clube apresentem um mesmo estágio cognitivo, que muitas vezes pode ser entendido como pertencer ao mesmo ano escolar.

Para Cedro (2004), o Clube é um espaço organizado para promover a aprendizagem dos sujeitos orientados pela ação intencional do professor. Por isso, é importante, se possível, que as atividades elaboradas e planejadas sejam discutidas e debatidas com outros professores. O importante é sempre relacionar atividades lúdicas com o saber matemático. De acordo com Moura (1996), as atividades lúdicas mostram aos alunos e aos professores que o acesso ao conhecimento pode ser prazeroso, sem ser um fardo.

Há assuntos que certamente chamam mais atenção dos alunos a participar de um Clube. O importante é que os estudantes percebam que os temas relativos às atividades realizadas no clube são diferentes daquelas realizadas em uma sala de aula regular. Os problemas não fazem parte de um conteúdo específico e o professor valoriza a diversidade das soluções. O problema a seguir é um exemplo simples que pode ser explorado em um Clube:

Problema com dobradura: *Uma folha de papel retangular foi dobrada conforme a figura. Calcule a medida do ângulo x.*

Figura 11 – Problema com dobradura



Fonte: O autor, 2018.

Acreditamos não ser necessário uma formação especial para que o docente seja orientador de um Clube. Porém, o conhecimento de determinados assuntos da Matemática é importante para que o orientador justifique as soluções dos problemas frente aos alunos. O professor deve ter como objetivo, no desenvolvimento das atividades, criar situações que possibilitem aos alunos a partilha de significados, apropriando-se de ideias matemáticas intrínsecas às atividades. Nesta perspectiva, a atividade é planejada com o intuito de promover a aprendizagem do conteúdo pelo estudante. Para tanto, as situações desencadeadoras de aprendizagem adquirem um caráter lúdico, por meio da utilização de jogos ou por situações problemas, transformando-os em recursos metodológicos.

A permanência dos alunos nos Clubes é um grande obstáculo nas escolas públicas. Como os encontros não são obrigatórios, a composição do grupo de estudantes pode sofrer muitas variações, com alguns alunos novos aparecendo todo o tempo e outros desistindo. Entretanto, o importante é que o Clube consiga ter um núcleo: um grupo de alunos que participem regularmente das aulas. Esses estudantes "contaminam" uns aos outros com seu entusiasmo, o que é excelente para atrair novos membros.

O professor precisa compreender que há alunos que não podem frequentar todos os encontros. Apesar de o trabalho regular ser um pré-requisito importante para o estudo da Matemática, no Clubes o mais importante é o interesse.

Outro ponto extremamente importante é a sequência das atividades exploradas nas aulas. Como podemos ter alunos novos em um encontro qualquer, as atividades propostas não devem ser totalmente dependentes de encontro anteriores. Isto não significa que as atividades ou os problemas sejam fáceis, pois até exercícios simples podem deixar os estudantes pensativos durante horas. Embora o Clube não trabalhe com um assunto específico, há questões que são mais técnicas e na maioria das vezes, o professor, antes de iniciar as atividades, tem a necessidade de rever parte do conteúdo do problema.

Muitos educadores e profissionais que trabalham com Educação sabem que a maioria dos gestores de escolas públicas precisa investir a pouca verba que recebem em diversos setores da escola, fato este que faz com que a organização de um laboratório de Matemática ou mesmo uma simples sala de estudos não seja uma prioridade. Uma alternativa para contornar esta situação é a confecção de objetos didáticos com materiais de baixo custo.

Como o gestor de um clube pode se orientar com relação a isto? Recomendamos a esses profissionais que pretendem orientar um Clube de Matemática dois excelentes livros para confecção de materiais geométricos.

Figura 12 - Livros sobre a confecção de materiais com baixo custo

Fonte: <http://www.eduff.uff.br/index.php/livros/>. Acesso em: 30/04/2018

Ambos os livros apresentam observações detalhadas de como confeccionar, por meio de materiais de baixo custo, os quebra-cabeças geométricos, poliedros através de dobraduras de papel, planificações, estruturas com palitos de madeira, canudos de plásticos, barbantes entre outros.

Segundo Kaleff (2003), uma das prioridades dos projetos que visam a melhoria do ensino de Matemática, em particular o de Geometria, consiste exatamente no desenvolvimento de recursos didáticos pouco dispendiosos e que atendam às necessidades da comunidade de professores.

4.3 Olimpíadas de Matemática como Fomentadores para a Criação de Clubes

Há muitas Olimpíadas de Matemática em nível nacional e internacional, sendo a mais prestigiada a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, em inglês), que é a mais antiga dentre as Olimpíadas científicas. A IMO aconteceu, pela primeira vez, no Brasil em 2017, em sua 58ª edição, no período de 12 a 23 de julho, com mais de 100 países participantes.

Entretanto, a IMO é para somente seis dos melhores estudantes do Ensino Médio (equivalente ao ensino brasileiro) de cada um dos países que tomam parte da competição. Os alunos devem resolver seis problemas em dois dias consecutivos, em uma prova de quatro horas e meia por dia. A Olimpíada Internacional de Matemática é muito importante por uma série de razões:

1. encontrar estudantes talentosos de Matemática;
2. capacitar muitos estudantes a desenvolver o pensamento matemático apropriado desde cedo;
3. consiste num grande desafio e motivação para os melhores estudantes;
4. os melhores competidores são convidados a estudar nas mais prestigiadas universidades do mundo.

Contudo, fica claro para professores de Matemática de escolas públicas que a IMO tem influência sobre uma parcela muito pequena dos seus estudantes. Isso não ocorre só no Brasil, mas em todo o resto do mundo. Entendemos que as Olimpíadas de Matemática, assim como as Olimpíadas Esportivas, deveriam atrair o maior número de participantes possível, com o intuito de mostrar-lhes que a Matemática pode ser interessante, útil e mesmo divertida.

Nessa perspectiva, três olimpíadas chamaram nossa atenção: A Olimpíada Internacional Canguru de Matemática, a Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras (OIMSF) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). A seguir, descrevemos cada uma delas para que o leitor tenha uma ideia de como estes eventos podem incentivar na organização dos Clubes.

4.3.1 Olimpíada Internacional Canguru de Matemática

Com a finalidade de disseminar a Matemática entre os mais variados grupos de estudantes, ao fim do último século, muitos países consideraram a ideia de usar competições matemáticas. Segundo Gregor Dolinar, o atual presidente da Associação Canguru Sem Fronteiras (AKSF), em 1991, os professores André Deledicq e Jean Pierre Boudine, inspirados pela Competição Australiana de Matemática, começaram um concurso semelhante na França, denominando-o de Canguru Matemático. A prova, consistindo em sua maioria de exercícios simples e atrativos de Matemática, na forma de múltipla escolha, foi um grande sucesso. Como consequência, em 1993 foi realizada uma reunião em Paris, na qual foi proposta a vários países europeus a organização de uma prova mais abrangente denominada Canguru Europeu. A ideia foi recebida com entusiasmo e, em 1994, no Conselho Europeu em Estrasburgo, os representantes de 10 países fundaram a AKSF. Esta associação, responsável pela organização do Canguru, foi formalizada e registrada em 17 de janeiro de 1995, em Paris, sendo o professor André Deledicq o seu primeiro presidente.

Ainda segundo Gregor Dolinar, desde 1993, os representantes de todos os países membros se reúnem num encontro anual, no qual os problemas das provas do Canguru para o ano seguinte são escolhidos. Atualmente mais de 50 países fazem parte da AKSF, incluindo o Brasil. Após o encontro, os representantes dos países traduzem os problemas para suas próprias línguas, adaptando, caso necessário, os enunciados. Há países que substituem eventualmente algum problema que julgam inacessível por questões de currículo.

Estudantes de todas as idades, dos 7 aos 18 anos, podem participar do evento, em seis diferentes categorias etárias, resolvendo 24 ou 30 questões de múltipla escolha relativamente mais acessíveis em 90 minutos. Os resultados dos estudantes de diferentes países não são comparados; isto seria contrário ao espírito do Canguru. Assim, os problemas e a regras são internacionais, mas o concurso em cada país é organizado independentemente e cada país tem seus próprios vencedores. No Brasil, por exemplo, não há vencedores oficiais. Cada escola recebe os resultados de seus estudantes e não há comparação entre escolas.

4.3.2 Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras (OIMSF)

Essa é uma Olimpíada diferente das outras. A OIMSF é uma competição internacional de Matemática em equipes e interclasses para estudantes do Ensino Fundamental e Médio das escolas públicas e privadas. A Olimpíada Internacional Matemática sem Fronteiras é uma seção brasileira do evento internacional Mathématiques sans Frontiers criado e 1990 pela Académie de Strasburg, França.

A prova é feita em conjunto e cada turma pode participar com uma única equipe. O exame é dissertativo e uma das questões em todas as provas terá seu enunciado em Língua Estrangeira (Espanhol, Francês e Inglês), a ser escolhido pela classe e sua solução deverá ser apresentada no mesmo idioma estrangeiro escolhido. Os alunos podem usar anotações e livros de Matemática, dicionários, calculadora não-programável, além do material já comum na escola. É proibido consultar à internet ou qualquer pessoa fora do grupo de alunos. O principal objetivo dessa Olimpíada é o trabalho em equipe. As turmas que se destacam são premiadas com credenciamento em competições internacionais pelas quais a Rede POC – organizadora no Brasil da Olimpíada Internacional Matemática sem Fronteiras – é responsável pela seleção.

4.3.3 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Em 2005, a fim de estimular o estudo da Matemática, foi criada a Olimpíada das Escolas Públicas. A OBMEP é um projeto nacional realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Em 2017, mais de 18 milhões de alunos participaram da Olimpíada e, nesse mesmo ano, as escolas particulares foram convidadas a fazer parte do projeto.

Além de estimular o estudo da Matemática, os organizadores pretendem contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade e incentivando o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas. Para isso, além do blog Clubes de Matemática apresentado no capítulo anterior, a OBMEP oferece outros projetos em paralelo com a Olimpíada: o Portal da Matemática e o programa OBMEP na Escola:

O Portal da Matemática disponibiliza vídeoaulas com conteúdo de Matemática que cobre grande parte do currículo escolar do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.

O projeto OBMEP na Escola é voltado para os professores das escolas públicas. O programa visa estimular atividades extraclasse com o uso dos materiais da olimpíada, tais como provas e Bancos de Questões. Professores de todo o país são habilitados e preparados para desenvolver essa atividade em sua escola.

Após identificar jovens talentos, a OBMEP, através do Programa de Iniciação Científica (PIC) e do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), incentiva seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas.

O PIC é realizado por meio de uma rede nacional de professores em polos espalhados pelo país, e também no fórum virtual. Tem como objetivos despertar nos alunos o gosto pela Matemática e pela ciência em geral e motivá-los na escolha profissional por carreiras científicas e tecnológicas. Ao longo de suas edições, a OBMEP já ofereceu a mais de 47 mil alunos a oportunidade de estudar Matemática por 1 ano, com bolsa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Já o PICME oferece aos estudantes universitários que se destacaram na OBMEP a oportunidade de realizar estudos avançados em Matemática simultaneamente com sua graduação. Os participantes recebem as bolsas por meio de uma parceria com o CNPq (Iniciação Científica) e com a CAPES (Mestrado).

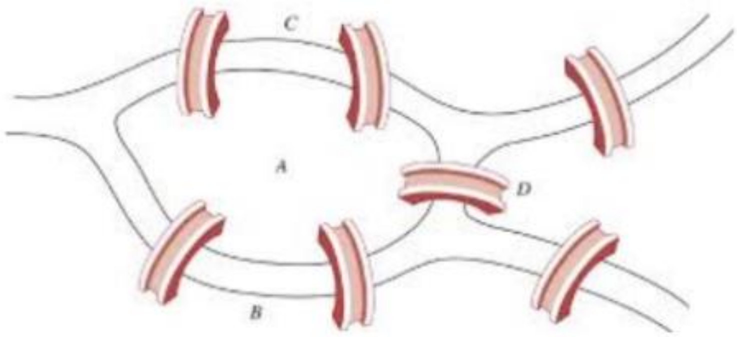
4.4 Olimpíadas: Uma experiência baseada no conceito de Clubes

Durante o ano letivo de 2017, alguns alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Pedro II em São Cristóvão mostraram um grande interesse em participar da 13ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e pediram, se possível, para que os preparassem para a prova, com aulas ou material de apoio. Apresentamos a eles outras Olimpíadas e lecionamos alguns tópicos importantes para as provas. As aulas ocorriam duas vezes na semana com duração de 90 minutos e com dois grupos distintos, um deles na parte da manhã e outro à tarde. Não houve nenhum tipo de exame de admissão e cerca de 25 alunos frequentaram as aulas.

Após a apresentação da Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras (OIMSF), realizamos algumas atividades em grupo para observarmos como os estudantes se comportavam com esse tipo de avaliação. As primeiras atividades consistiam na resolução de problemas e, depois de conseguirem atingir alguma resposta, os grupos explicavam sua solução para os demais colegas.

Essas atividades foram importantes para que o grupo de alunos conseguisse construir uma organização do trabalho em equipe, desenvolvendo cooperação mútua durante a realização das atividades. No momento de explicar suas soluções, os alunos identificaram pontos em que poderiam detalhar mais a explicação para que a compreensão do leitor ficasse mais fácil. Mostramos aos estudantes que há problemas em Matemática que não possuem solução e provar que é impossível resolvê-los também é uma solução. Um bom exemplo é o problema das Sete Pontes de Königsberg. As Sete pontes de Königsberg, é um famoso problema histórico da Matemática resolvido por Leonhard Euler em 1736, cuja solução negativa originou a teoria dos grafos. O problema consiste na possibilidade de cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas.

Figura 13 - As Sete Pontes de Konigsberg.



Fonte: <https://pt.slideshare.net/RioInfo2009/oficina-analytics-ricardo-costa>. Acesso em: 30/04/2018

Também propusemos aos alunos a resolução de problemas em uma língua estrangeira (na maioria das vezes em inglês ou espanhol), visando à preparação para a prova da OIMSF. Em sua primeira participação, o grupo de alunos alcançou um segundo lugar, conquistando a medalha de prata.

Em seguida, as atividades foram sempre baseadas nas resoluções de problemas da OBMEP. Sempre havia necessidade de revisar alguns conteúdos de modo a permitir a compreensão plena de algumas etapas na resolução dos problemas. Para que pudéssemos resolver uma maior quantidade de exercícios olímpicos, apresentados aos estudantes os seguintes conteúdos: Princípio Fundamental da Contagem, tópicos de Geometria Plana e as Progressões Aritméticas e Geométricas. Todos os conteúdos apresentados foram explanados evitando ao máximo o uso de fórmulas e sempre através de atividades lúdicas.

O resultado desses encontros culminou com duas atividades apresentadas no Festival de Matemática do Colégio Pedro II no ano de 2017 (FESTMATCP2), projeto educativo desenvolvido pelo Departamento de Matemática do próprio colégio.

Figura 14 – Cartaz do FESTMAT

Fonte: <https://www.cp2.g12.br>. Acesso em: 30/04/2018

Figura 15 - Atividades FESTMAT desenvolvida com alunos do Clubes

Fonte: O autor, 2018.

Todos os alunos que frequentaram os encontros foram premiados na OBMEP e na Olimpíada Internacional Canguru de Matemática, alguns com medalhas e outros com menção honrosa.

5 USANDO A MATEMÁTICA RECREATIVA EM UM CLUBE

Este Capítulo tem por objetivo apresentar algumas das atividades realizadas com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Pedro II, no Campus São Cristóvão II, durante a preparação para as Olimpíadas. Tais atividades serviram também como problemas geradores já que propiciaram explicações teóricas.

5.1 Utilizando Fractais no aprendizado de Progressões Geométricas

Durante o estudo de sequências numéricas, destacamos dois tipos de sequências relevantes aos problemas olímpicos: Progressões Aritméticas (P.A) e Progressões Geométricas (P.G). Após o estudo das Progressões Aritméticas, em que foi apresentado aos estudantes a escrita usual dos termos de uma sequência ($a_1, a_2, \ldots\ , a_n, \ldots$), decidimos continuar o estudo das sequências apresentando as Progressões Geométricas. O estudo foi dividido em atividades pequenas e utilizamos alguns elementos da geometria fractal.

Antes, no entanto, apresentaremos algumas noções do que são fractais. São conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada. As principais características que permitem definir um fractal são a auto similaridade e a extrema "irregularidade". Por auto similaridade, podemos entender como uma figura que mantêm a mesma forma e estrutura sob uma redução e ampliação de escalas. Já a "extrema irregularidade" está associada a rugosidade ou fragmentação (Mandelbrot (1983)).

5.1.1 Atividade 1: Construindo o cartão fractal Degraus Centrais

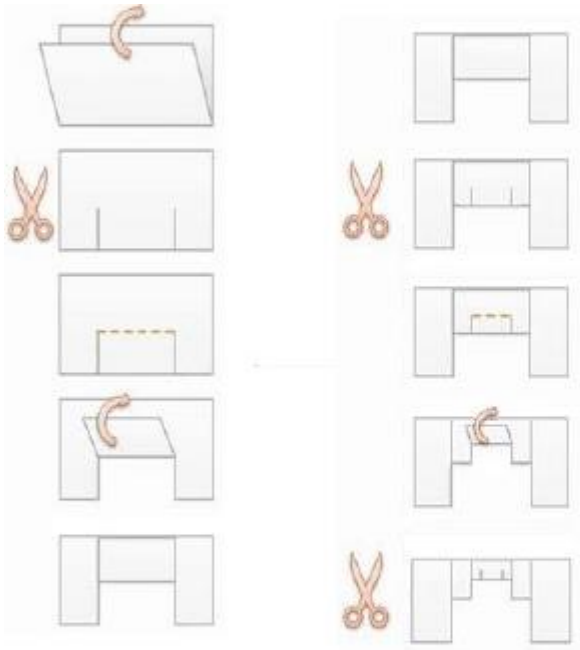
Uma breve apresentação da Geometria Fractal, sugerimos aos alunos uma construção de um dos mais interessantes fractais: o Cartão Degraus Centrais.

Figura 16 - Cartão Fractal Degraus Centrais

Fonte: Autor, 2018.

Entregamos aos alunos o material necessário (folha e tesoura) e instruções com o passo a passo da construção.

Figura 17 - Passo a Passo



Fonte: Autor, 2018.

Mediamos à atividade indo a mesa dos estudantes e ajudando-os na construção do cartão. A seguir apresentamos o termo geral da Progressão Geométrica a partir do cartão construído. Note que as conclusões advêm de uma atividade que contextualiza o estudo.

5.1.2 Atividade 2: Termo Geral da Progressão Geométrica

Pedimos aos alunos que anotassem a quantidade de degraus que foram construídos de acordo com os números de cortes no papel.

$$1° \text{ corte} \rightarrow 1 \text{ degrau}$$

$$2° \text{ corte} \rightarrow 2 \text{ degraus}$$

$$3° \text{ corte} \rightarrow 4 \text{ degraus}$$

$$4° \text{ corte} \rightarrow 8 \text{ degraus}$$

Recomendamos que fosse utilizado a escrita apresentada em sequências numéricas, onde os índices representam a quantidade de cortes e o valor do termo a quantidade de degraus que o corte acrescentou.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 4$$
$$a_4 = 8$$

Todos os integrantes da sala de estudos perceberam que o próximo corte (próximo termo) seria $a_5 = 16$ e o seguinte $a_6 = 32$. Contudo, pela limitação dos objetos utilizados fica impossível a construção. Nesse momento, definimos o que é uma Progressão Geométrica.

Progressão Geométrica *é toda sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante. Essa constante é chamada de razão da progressão.*

Assim, quando perguntados qual seria, por exemplo, o décimo termo, facilmente, compreenderam que podemos escrever $a_{10} = 2 \cdot a_9$. Mas, para descobrir o a_9 deveríamos encontrar o a_8 e assim sucessivamente. Da mesma forma como Gauss (matemático, físico e astrônomo alemão) teve uma ideia brilhante para o cálculo da soma dos termos de uma Progressão Aritmética (P.A) mostramos uma técnica para calcular o a_{10}.

$$\begin{gathered} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \cdot a_1 \\ a_3 = 2 \cdot a_2 \\ \vdots \\ a_9 = 2 \cdot a_8 \\ a_{10} = 2 \cdot a_9 \end{gathered}$$

Multiplicando as equações, encontramos:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_9 \cdot a_{10} = 1 \cdot 2 \cdot a_1 \cdot 2 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot a_8 \cdot 2 \cdot a_9$$

Simplificando os termos semelhantes:

$$a_{10} = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 2}_{9\ fatores} = 2^9$$

Em seguida, pedimos para que encontrassem o valor dos termos a_{14} e a_{20}. Todos estavam convictos que haviam descoberto uma fórmula para os termos dessa sequência: $a_n = 2^{n-1}$. Dissemos que estavam corretos, entretanto precisávamos provar esse fato. O que acabamos de fazer era uma conjectura. Para provar esse fato, basta seguirmos com o mesmo procedimento anterior

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2 \cdot a_1$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2}$$
$$a_n = 2 \cdot a_{n-1}$$

Multiplicando as equações, encontramos:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = 1 \cdot 2 \cdot a_1 \cdot 2 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot a_{n-2} \cdot 2 \cdot a_{n-1}$$

Simplificando os termos semelhantes:

$$a_n = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots 2 \cdot 2}_{n-1\, fatores} = 2^{n-1}$$

Encerramos essa atividade praticando esse método com mais três exemplos de Progressões Geométricas.

A próxima atividade consiste em calcular a quantidade de degraus que há no fractal quando é efetuado o quinto corte. Para isso, pedimos para que os alunos calculem a seguinte soma: $1 + 2 + 4 + 8 + 16$. Após chamar a atenção para o fato de que as parcelas formam uma P.G., dissemos a eles que há outra forma para efetuar a adição.

5.1.3 Atividade 3: Soma de Termos Consecutivos em Progressão Geométrica

Seja S a soma:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$$

O método consiste em duas etapas:

1ª) Multiplicar todas as parcelas pela razão. Dessa forma, todas as parcelas do nosso exemplo serão dobradas. Obviamente, a soma também ficará dobrada:

$$2 \cdot S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$

2ª) Calcular a diferença $2 \cdot S - S$:

$$2 \cdot S - S = (2 + 4 + 8 + 16 + 32) - (1 + 2 + 4 + 8 + 16)$$

$$S = 31$$

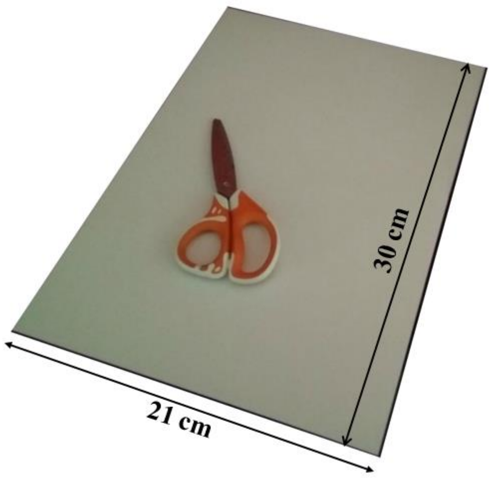
Em seguida, pedimos para que eles, sozinhos, utilizassem esse o método para calcular a soma: $2 + 6 + 18 + 54 + 162$. Todos, sem exceção, perceberam que se tratava de uma progressão geométrica de razão 3 e encontraram o valor 242. Praticamos esse procedimento mais duas vezes e, por fim os alunos concluíram que o resultado obtido na soma dos termos da Progressão Geométrica é:

$$\text{Soma} = \frac{(\text{último termo} \times \text{razão}) - (\text{primeiro termo})}{\text{razão} - 1}$$

Ressaltamos que esse denominador não apareceu no primeiro exercício porque vale 1. Obviamente que o resultado final é de extrema importância, pois evita uma perda de tempo no momento de efetuarmos as contas. Entretanto, o objetivo não é simplesmente descobrirmos uma fórmula para usarmos nos exercícios. O maior ganho é fazer com que os alunos entendam como é possível calcular essa soma utilizando técnicas algébricas.

Antes de iniciar a próxima atividade, informamos aos alunos que a folha utilizada na construção do cartão fractal era 21 cm por 30 cm.

Figura 18 - Medidas da Folha A4

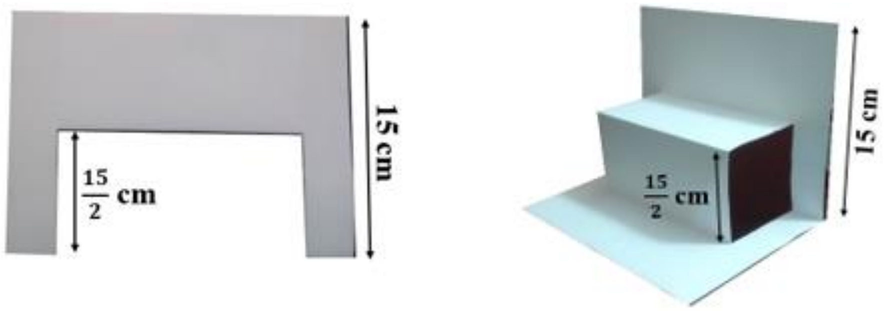


Fonte: O autor, 2018.

5.1.4 Atividade 4: Limite da Soma de Termos Consecutivos em Progressão Geométrica

Nessa atividade pedimos aos alunos que medissem a altura de um degrau de cada corte e depois calculassem a soma dessas alturas. Voltamos ao início da construção do cartão para o cálculo das alturas. Facilmente eles notaram que ao dobrarmos a folha ao meio seu comprimento passou a ser 15 cm e, como o primeiro corte ao ser dobrado foi até a outra extremidade da folha, a altura do primeiro degrau era de $7{,}5 = \frac{15}{2}$ cm.

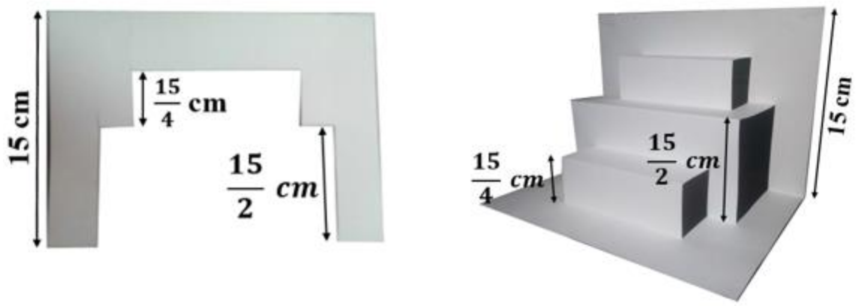
Figura 19 - Altura do primeiro Degrau



Fonte: Autor, 2018.

Seguimos essa mesma ideia para calcular a altura do próximo degrau.

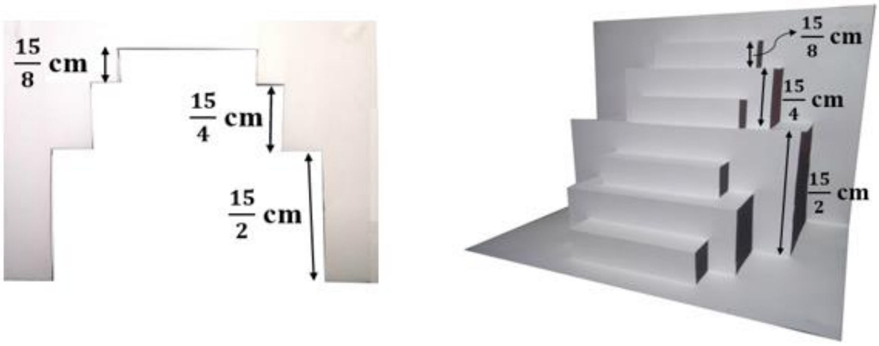
Figura 20 - Altura do segundo Degrau



Fonte: O autor, 2018.

Ao terminarmos o terceiro procedimento os alunos perceberam que as alturas estavam em Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Figura 21 - Altura do terceiro Degrau



Fonte: Autor, 2018.

O que estávamos querendo calcular era a soma: $\frac{15}{2}+\frac{15}{4}+\frac{15}{8}+\frac{15}{16}+\cdots$. Conduzimos a explanação para que os estudantes entendessem que, ao analisarmos o cartão ainda dobrado, essa soma vai aumentando a cada degrau adicionado, chegando cada vez mais próximo de 15. Estamos calculando o limite dessa soma.

Para isso, utilizaremos o mesmo método de somas finitas. Tal método pode ser empregado se sabermos de antemão que se trata de uma série convergente. Chamemos a soma de S:

$$S=\frac{15}{2}+\frac{15}{4}+\frac{15}{8}+\frac{15}{16}+\cdots$$

Multiplicar todas as parcelas pela razão. Dessa forma, todas as parcelas passam a valer a metade. Obviamente, a soma também ficará igual à metade de S.

$$\frac{S}{2}=\frac{15}{4}+\frac{15}{8}+\frac{15}{16}+\frac{15}{32}+\cdots$$

Calcular a diferença $S-\frac{S}{2}$

$$S-\frac{S}{2}=\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{4}+\frac{15}{8}+\frac{15}{16}+\cdots\right)-\left(\frac{15}{4}+\frac{15}{8}+\frac{15}{16}+\frac{15}{32}+\cdots\right)$$

$$\frac{S}{2}=\frac{15}{2}$$

$$S=15$$

Encerrado esse cálculo, pedimos para que usassem o método anterior para calcular o limite da seguinte soma:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

Ao utilizar o mecanismo o resultado encontrado foi -1. A seguinte pergunta foi feita aos alunos: “Como é que vocês somam uma infinidade de números positivos e encontram um resultado negativo? ”

Em seguida, explicamos de maneira mais adequada para os estudantes que:

1º) O método só funciona quando a soma converge;

2º) A soma só converge quando a razão está entre -1 e 1.

As demonstrações das afirmações acima encontram-se em livros de Análise. Para encerrar, resolvemos alguns problemas de “limite da soma de termos em P.G.”.

Todas essas atividades (construção do cartão, termo geral, soma dos termos e limite da soma) foram repetidas com o Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

Figura 22 - Cartão fractal Triângulo de Sierpinski construído com os alunos em sala

Fonte: O autor, 2018.

5.2 Utilizando a Torre de Hanói no Aprendizado de Recorrências

Durante uma aula de correções de provas anteriores da OBMEP, nos deparamos com um problema do qual a maioria dos alunos não compreendeu bem a solução divulgada no site da Olimpíada. Decidimos apresentar alguns tópicos novos para que os estudantes conseguissem entender a solução do problema. O assunto abordado foi recorrências em sequências numéricas e o que dificultou a compreensão da solução foi, possivelmente, a pouca ênfase ao raciocínio recursivo. A ideia é desenvolver conceitos de recorrência que vão além das Progressões

Aritméticas e Geométricas, potência ou fatorial. O trabalho desenvolvido não teve o objetivo de resolver recorrências, o pensamento recursivo foi o foco das atividades.

5.2.1 Atividade 5: Resolvendo a Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um dos mais famosos "quebra-cabeça" da Matemática. Consiste em uma base contendo três torres, em uma das quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O número de discos pode variar.

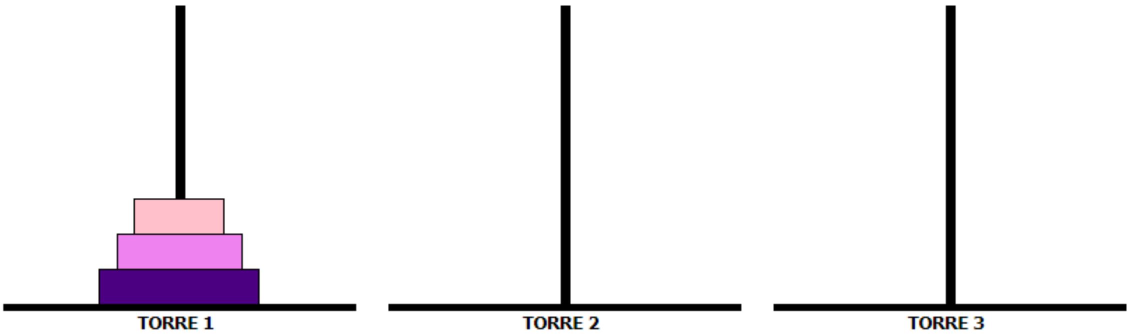
O problema consiste em passar todos os discos de uma torre para outra qualquer, obedecendo duas regras:

1ª) Mover apenas um disco por vez;

2ª) Um disco com diâmetro maior nunca pode ficar sobre um disco com diâmetro menor.

O vencedor do jogo é o que consegue resolver o problema com a menor quantidade de movimentos possível.

Figura 23 - Torre de Hanói com 3 discos



Fonte: Autor, 2018.

Pedimos aos alunos que resolvessem a Torre de Hanói com 1 e com 2 discos e anotassem a quantidade de movimentos. Se possível, que escrevessem com a notação feita através das sequências numéricas, onde os índices representavam a quantidade de discos e o valor do termo a quantidade de movimentos.

Sem dificuldades eles escreveram:

$$1 \text{ disco} \rightarrow 1 \text{ movimento}$$

$$2 \text{ discos} \rightarrow 3 \text{ movimentos}$$

Usando a escrita ensinada em sequências:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

Nesse momento, deixamos eles manipularem a Torre tentando resolver o jogo com 3 discos. A intenção era que eles chegassem a um consenso de qual era a quantidade mínima de movimentos. Obviamente, eles sabiam que seria um número maior que 3. Depois de um certo tempo os alunos responderam: 7 movimentos. Dissemos que estavam corretos e que a nossa sequência estava:

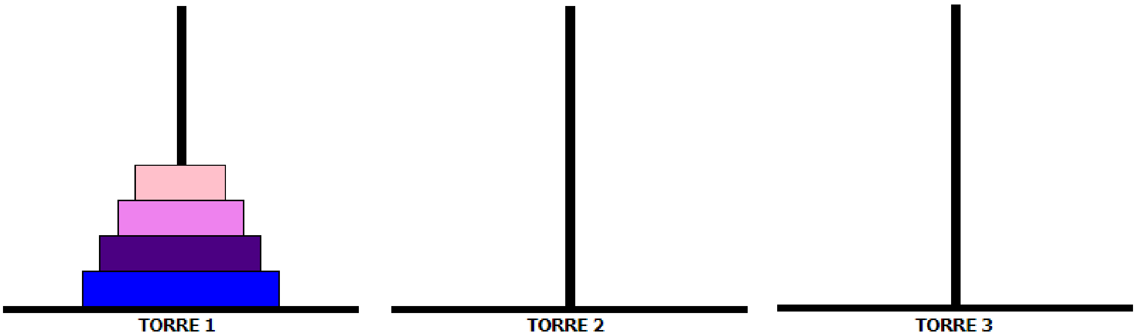
$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 7$$

O próximo passo era resolver o jogo com 4 discos.

Figura 24 - Torre de Hanói com 4 discos



Fonte: Autor, 2018.

O interessante foi perceber que os alunos criaram várias estratégias e conjecturas na tentativa de encontrar a resolução e que sozinhos perceberam que algumas não estavam certas. Depois de um certo tempo, alguns alunos encontram 15 como resposta, mas não tinham certeza. Resolvemos o problema com eles e mostramos a solução do problema com 15 movimentos, deixando nossa sequência da seguinte maneira:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 7$$

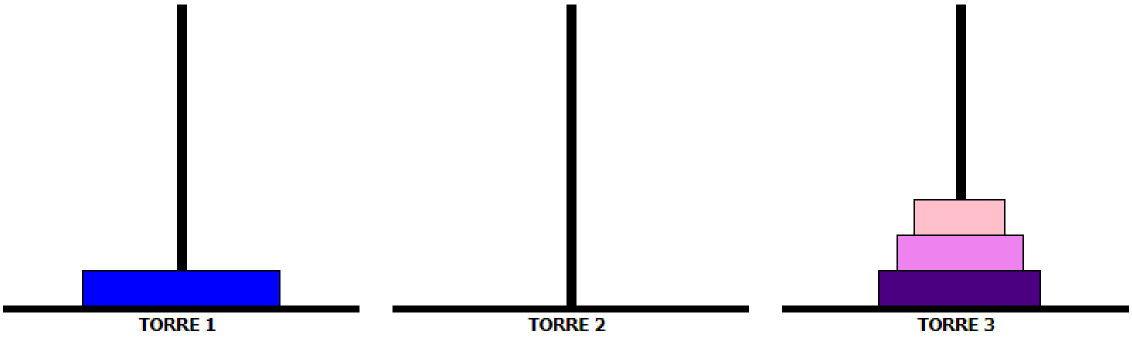
$$a_4 = 15$$

Ao ser proposto o jogo com 5 discos, um aluno disse que a resposta eram 31 movimentos. Perguntado porque esse número, ele disse que a sequência construída tinha um padrão de construção que o levou a concluir o 31. Mais uma vez, afirmamos que o aluno estava correto, mas que isso deveria ser provado.

Voltamos ao momento em que as Torres estavam com 4 discos. Mostramos a eles que para resolver esse problema, sem perceber, eles passaram por 3 etapas:

1ª) Deslocar os 3 discos menores para outra Torre;

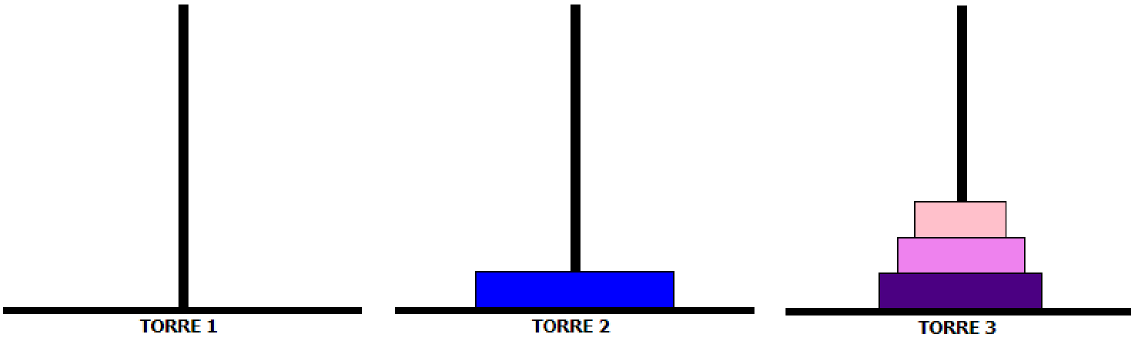
Figura 25 - Resolvendo a Torre de Hanói



Fonte: O autor, 2018.

2ª) Mover o disco maior;

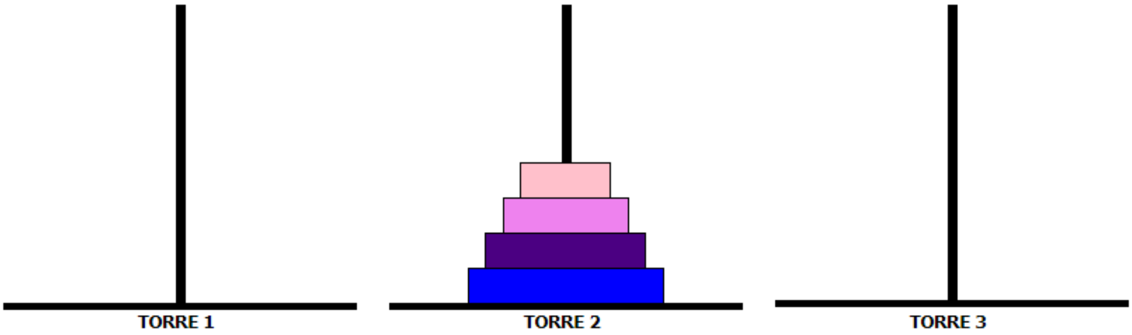
Figura 26 - Resolvendo a Torre de Hanói



Fonte: O autor, 2018.

3ª) Mover os 3 discos menores para a Torre onde está o disco maior;

Figura 27 - Resolvendo a Torre de Hanói



Fonte: O autor, 2018.

Eles conseguiram entender que para resolver o problema com 4 discos, primeiro resolvemos para 3 discos, realizamos mais um movimento e depois resolvemos, novamente, o problema para 3 discos. Ou seja,

$$a_4 = a_3 + 1 + a_3 \Longrightarrow a_4 = 2a_3 + 1.$$

E que podemos usar essa ideia para generalizar o problema:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

Dissemos aos estudantes que essa era uma fórmula de recorrência. Tal fórmula fica bem definida quando conhecemos um termo qualquer. Por comodidade, geralmente, usamos o primeiro termo:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

De fato, eles perceberam que já estavam usando as fórmulas de recorrência durante o estudo das Progressões Aritméticas e Geométricas. Entretanto, nesse estudo eles deveriam construir a recorrência para depois utilizá-la.

Na resolução da Torre de Hanói, encontramos uma Recorrência de Primeira Ordem.

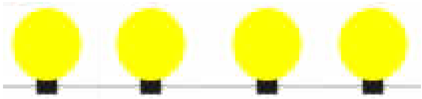
Recorrência de Primeira Ordem *é toda recorrência que expressa o termo* a_n *em função de* a_{n-1}.

5.2.2 Atividade 6: Resolvendo Problemas por Recorrências

Após a resolução da Torre de Hanói, propusemos aos alunos resolver outros problemas que possuíam soluções via recorrências. O primeiro problema foi o seguinte:

Problema 1: *Em uma bancada há 4 lâmpadas, cada uma pode estar ligada ou desligada. Quantas são as configurações possíveis de tal maneira que não haja lâmpadas adjacentes ligadas?*

Figura 28 - Bancada com 4 lâmpadas



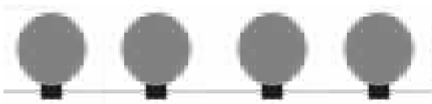
Fonte: O autor, 2018.

Este problema pode ser resolvido escrevendo todas as soluções possíveis. E foi o que pedimos aos alunos. Quando um problema parenta ter valores numéricos pequenos, uma boa inciativa é descrever algumas soluções.

Solução: Vamos separar os problemas em casos.

1º) Nenhuma lâmpada acessa: 1 solução

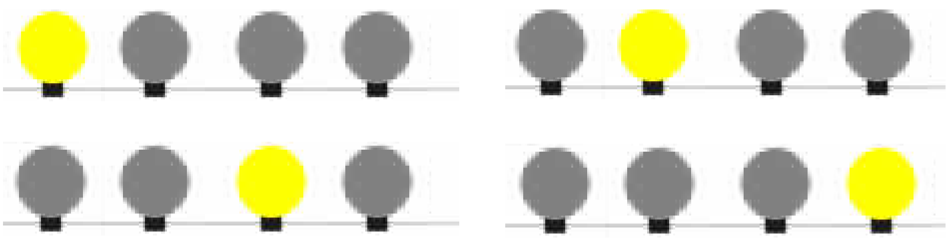
Figura 29 - Todas lâmpadas apagadas



Fonte: O autor, 2018.

2º) Apenas uma lâmpada acessa: 4 soluções

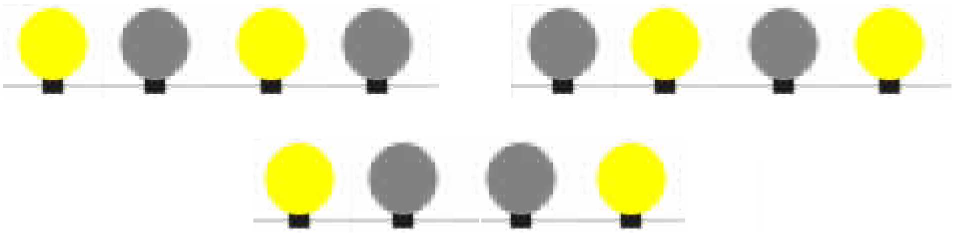
Figura 30 - Apenas uma lâmpada acessa



Fonte: O autor, 2018.

3º) Duas lâmpadas acessas: 3 soluções

Figura 31 - Duas lâmpadas acessas



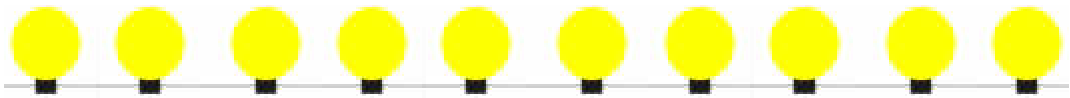
Fonte: O autor, 2018.

Totalizando 8 soluções.

Um problema razoavelmente simples no qual todos conseguirem chegar à solução sem maiores dificuldades. Modificamos o enunciado do problema (trocando de 4 para 10 lâmpadas) e pedimos para que os alunos tentassem resolver o novo problema.

***Problema 2**: Em uma bancada há 10 lâmpadas, cada uma pode estar ligada ou desligada. Quantas são as configurações possíveis de tal maneira que não haja lâmpadas adjacentes ligadas?*

Figura 32 - Bancada com 10 lâmpadas



Fonte: O autor, 2018.

Pedimos aos alunos que, antes de resolver o problema, construíssem uma sequência onde os índices representassem a quantidade de lâmpadas e os termos o número de soluções com a restrição do enunciado. Assim, já tínhamos $a_4 = 8$ e pedimos que encontrassem os valores a_3, a_2 e a_1.

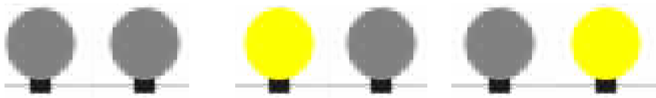
Para encontrar a_1, devemos imaginar uma bancada com apenas uma lâmpada. Seguindo a restrição do enunciado, essa lâmpada pode estar acessa ou apagada. Portanto, teríamos duas soluções.

$$a_1 = 2$$

Para o a_2, a bancada tem 2 lâmpadas e teremos 3 soluções. Com isso,

$$a_2 = 3.$$

Figura 33 - Soluções para 2 lâmpadas

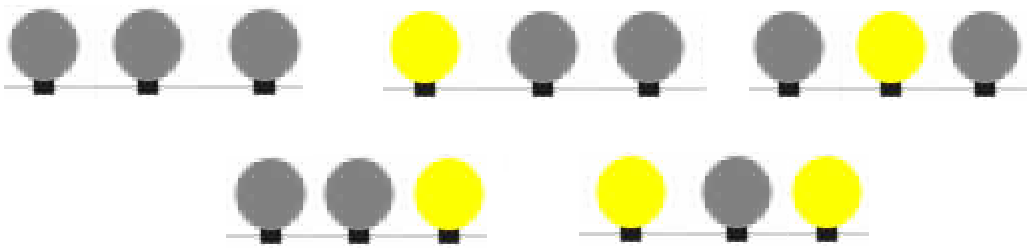


Fonte: O autor, 2018.

Para encontrarmos o valor de a_3, teríamos 3 lâmpadas e 5 soluções. Portanto,

$$a_3 = 5.$$

Figura 34 - Soluções para 3 lâmpadas



Fonte: O autor, 2018.

Ficando com a seguinte sequência:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3$$
$$a_3 = 5$$
$$a_4 = 8$$

Uma parcela dos alunos percebeu qual era a regra de construção dessa sequência e que já haviam visto em outro momento. Mais uma vez, o que estávamos criando ainda era uma conjectura. Precisávamos provar que a regra era válida para todos os termos da sequência.

Pedimos que eles voltassem a bancada com 10 lâmpadas e que dividissem o problema em duas partes:

1ª) A primeira lâmpada está acessa;

2ª) A primeira lâmpada está apagada.

Portanto:

$$a_{10} = \text{solução com a 1ª acessa} + \text{solução com a 1ª apagada}$$

Pela restrição imposta no enunciado, se a primeira lâmpada estiver acessa, obrigatoriamente a segunda deve ficar apagada. Daí, concluímos que o problema passa a ser um novo problema, com a mesma restrição do anterior, com 8 lâmpadas. Da mesma maneira, se a primeira estiver apagada, o problema passou a ser um novo problema com 9 lâmpadas.

$$a_{10} = a_8 + a_9$$

Podemos generalizar essa solução para n lâmpadas e mostrar que essa recorrência vale para todos os termos da sequência.

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

Assim, teremos:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3$$
$$a_3 = 5$$
$$a_4 = 8$$
$$a_5 = 13$$
$$a_6 = 21$$
$$a_7 = 34$$
$$a_8 = 55$$
$$a_9 = 89$$
$$a_{10} = 144$$

Explicamos aos alunos que perceberam uma certa familiaridade com essa sequência que ela é muito parecida com a famosa sequência de Fibonacci. Por isso, eles desconfiaram de já terem visto a mesma em um outro momento.

Na resolução desse problema encontramos uma Recorrência de Segunda Ordem.

Recorrência de Segunda Ordem *é toda recorrência que expressa o termo* a_n *em função de* a_{n-1} *e* a_{n-2}

Todas essas atividades tinham a finalidade de possibilitar aos alunos uma maior compreensão na resolução de um problema da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas

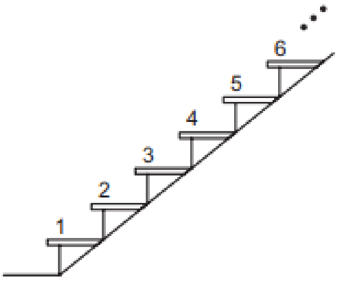
Públicas. Esse problema foi proposto para alunos do nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e nível 3 (Ensino Médio) na prova da segunda fase de 2014.

5.2.3 Atividade 7: Resolvendo o problema da OBMEP

Quadro 1 – OBMEP 2014

Problema:

Fábio gosta de brincar em escadas, subindo ou descendo seus degraus da seguinte maneira:



• começa no degrau de número 1;

• a cada movimento ele sobe ou desce um ou dois degraus e, ao subir ou descer dois degraus, não pisa no degrau intermediário;

• pisa em todos os degraus exatamente uma vez.

Por exemplo, em uma escada com três degraus ele pode brincar de duas maneiras diferentes: 1-2-3, 1-3-2; com quatro degraus ele pode brincar de quatro maneiras diferentes: 1-2-3-4, 1-2-4-3, 1-3-2-4 e 1-3-4-2.

(a) Fábio pode brincar de seis maneiras diferentes em uma escada com cinco degraus. Escreva essas seis maneiras.

(b) Explique por que sempre é possível terminar a brincadeira no degrau de número 2 em qualquer escada com dois ou mais degraus.

(c) Há 31 e 68 maneiras diferentes de se brincar em escadas com nove e onze degraus, respectivamente. De quantas maneiras diferentes Fábio pode brincar em uma escada com doze degraus?

Fonte: OBMEP, 2014.

Como a maioria dos problemas da OBMEP, os primeiros itens são, na nossa opinião, razoavelmente simples e, em geral, sugerem soluções particulares para os itens futuros.

Resolução do item a:

1-2-3-4-5, 1-2-3-5-4, 1-2-4-3-5, 1-2-4-5-3, 1-3-2-4-5, 1-3-5- 4-2

Resolução do item b:

Basta ele subir pelos degraus ímpares até o mais alto dos ímpares e em seguida ir para o mais alto dos pares e descer pelos degraus pares.

Os estudantes, após as aulas de recorrências, já montaram uma sequência com os degraus e o número de soluções.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_3 = 2$$
$$a_4 = 4$$
$$a_5 = 6$$

Explicamos aos alunos que a construção dessa sequência, por recorrência, não era tão simples e que o enunciado nos "dava" uma dica para uma possível resposta. Nele, foi pedido o valor de a_{12} e nos foram informados os valores dos elementos $a_{11} = 68$ e $a_9 = 31$.

Resolução do item c:

Do mesmo modo como resolvemos o problema das lâmpadas, vamos dividir o problema em dois casos:

1º) Fábio fez os movimentos 1-2

Nesse caso, o problema passou de doze para onze degraus. Pelo enunciado, $a_{11} = 68$.

2º) Fábio fez os movimentos 1-3

Nesse caso, temos duas opções:

- Fábio pode subir os degraus ímpares e voltar pelos pares, parando no degrau 2. Dando uma possível solução. (Esse foi o objetivo do item b.)
- Fábio pode fazer 1-3-2-4, tornando o problema para nove degraus. Pelo enunciado, $a_9 = 31$.

Portanto, $a_{12} = a_9 + a_{11} + 1 \Longrightarrow a_{12} = 100$. Podemos generalizar e encontrar a recorrência da sequência: $\boldsymbol{a_n = a_{n-3} + a_{n-1} + 1.}$

Mais importante que obter à resposta do problema, foi a construção do pensamento recursivo. As atividades de recorrência ocorreram no contra turno da manhã. No mesmo dia, durante uma aula regular de resolução de problemas com equações do segundo grau, um exercício no livro texto chamou a atenção dos alunos.

Em uma festa todos os convidados se cumprimentam com um aperto de mãos. Se houve 45 apertos de mãos, quantas pessoas estavam na festa?

Duas alunas fizeram a seguinte pergunta: "Professor, posso resolver por recorrência? ". Perguntadas como seria a solução, elas escrevem a sequência numérica abaixo:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 3$$

$$a_4 = 6$$

$$a_5 = 10$$

$$a_6 = 15$$

$$a_7 = 21$$

$$a_8 = 28$$

$$a_9 = 36$$

$$a_{10} = 45$$

Obviamente, os índices representam a quantidade de pessoas e o valor do termo a quantidade de apertos de mãos. Quando perguntadas qual era a recorrência da sequência elas responderam: "É um pouco parecido com o problema das diagonais dos polígonos. Toda vez que acrescentamos uma pessoa, ela apertará a mão de todos que já estavam e, em seguida, temos que somar os apertos já existentes.". Por isso, elas concluíram que $a_{10} = a_9 + 9$. É interessante notar aqui que a solução proposta pela aluna é inusitada no sentido de utilizar um raciocínio recursivo no lugar da solução combinatória normalmente apresentada por muitos professores de Matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como finalidade apresentar parte do trabalho desenvolvido com alunos do último ano do Ensino Fundamental. Durante o desenvolvimento dos assuntos, foi evitado, sempre que possível, apresentação de fórmulas sem uma devida justificativa ou explicação. Isso porque, quanto no exercício do magistério, estamos convictos que uma linguagem demasiadamente rebuscada dificulta a compreensão e consequentemente, afasta o estudante da Matemática. Além disso, as fórmulas prontas podem afastar as criatividades das soluções.

Dificilmente, após serem apresentados à Matemática, os estudantes permanecem indiferentes a ela. Pelo contrário, dois sentimentos opostos são desenvolvidos: paixão, por parte de uma minoria, e aversão, por parte da maioria.

Muitas aversões poderiam ser evitadas se, antes de ensinar determinado conteúdo, os professores dedicassem alguns minutos do seu tempo para relatar aos jovens estudantes como começou o estudo desse assunto. A Matemática não pode ser apresentada de forma fria, sem uma ligação com a realidade histórica e humana vivida anos atrás. É necessário mostrar aos alunos que o desenvolvimento das Ciências Exatas tornou possível os avanços tecnológicos no mundo de hoje.

Estamos convictos que a Matemática deve ser ensinada de maneira recreativa, lúdica e com o uso de materiais concretos. Para que se torne uma fonte de prazer intelectual e conquiste cada vez mais alunos. Acreditamos também, que os conteúdos devem ser transmitidos de forma mais natural, deixando a descoberta dos resultados para os alunos e o professor atuando como um simples mediador das atividades.

REFERÊNCIAS

CEDRO, W. L. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino:** O Clube de Matemática**.** 2004. 91 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

COSTA, Olandino da. **A Matemática Recreativa no Ensino Básico.** 2014. 98 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Escola de Ciências, Universidade do Minho, Portugal, 2014.

DORICHENKO, Sergey. **Círculo Matemático Moscou:** Problemas Semana-a-Semana. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

FOMIN, Dmitri. **Círculos Matemáticos:** A Experiência Russa. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

FRENKEL, Edward. **Amor e Matemática:** o coração da realidade escondida**.** 2. ed. Rio de Janeiro: Casa da Palavra, 2014.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas.** 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

KALEFF, Ana Maria M. R. **Vendo e Entendendo Poliedros:** Do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. 2. ed. Niterói: EdUFF, 2003.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LINS, Romulo Campos. **Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática.** In Pesquisa em Educação Matemática. BICUDI, M. A. V. (ed.) São Paulo, EDUNESP, 2004.

MACHIAVELO, António, et al. **Cinco Tributos a Martin Gardner**. Boletim da SPM, Portugal n. 71, p. 97-111, 2014.

MANDELBROT, b. **The fractal geometry of nature**. Nova York: W. H. freeman, 1983.

MORGADO, J. Para a História da Sociedade Portuguesa de Matemática. In: NONIUS. **Arquivo Electrónico de Matemática.** 1996. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/hspm/X0022 capIII5.html>. Acesso em: 28 mar 2018.

MOURA, M. O. **A atividade de ensino como unidade formadora**. Bolema, São Paulo, n.12, p. 29-43, 1996.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**.** 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Carlos Pereira, et al. **Cinco Tributos a Martin Gardner**. Boletim da SPM, Portugal n. 71, p. 97-111, 2014.

SÁ, Ilydio Pereira de. **A Magia da Matemática**: Atividades Investigativas, Curiosidades e História da Matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2010.

SILVA, Jorge Nuno. **Matemática Recreativa**. O Primeiro de Janeiro, Portugal, n.10, 2004.

SINGMASTER, David. **The unreasonable utility of recreation mathematics**. London: UCL Press**,** 1992.

STEWART, Ian. **Almanaque das Curiosidades Matemáticas.** 2. ed. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2009.

TAHAN, Malba. **O Homem Que Calculava.** 45. ed. Rio de Janeiro: Record, 1997.