UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O desenvolvimento de habilidades do pensamento através da resolução de problemas de raciocínio lógico-matemático

Thiago Wagner Olveira dos Santos

Instituto de Matemática

Maceió, Julho de 2018

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

THIAGO WAGNER OLIVEIRA DOS SANTOS

O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES DO PENSAMENTO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

MACEIÓ
2018

THIAGO WAGNER OLIVEIRA DOS SANTOS

O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES DO PENSAMENTO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Adina Rocha dos Santos.

MACEIÓ

2018

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecário Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

S237d Santos, Thiago Wagner Oliveira dos.
O desenvolvimento de habilidades do pensamento através da resolução de problemas de raciocínio lógico-matemático / Thiago Wagner Oliveira dos Santos. – 2018.
133 f. : il.

Orientadora: Adina Rocha dos Santos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

Bibliografia: f. 132-133.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Matemática - Resolução de problemas. 3. Habilidades do pensamento. 4. Raciocínio lógico. 5. Competência. I. Título.

CDU: 372:510. 6

Folha de Aprovação

THIAGO WAGNER OLIVEIRA DOS SANTOS

O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES DO PENSAMENTO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 09 de julho de 2018.

Banca Examinadora:

Adina Rocha dos Santos

Profa. Dra. Adina Rocha dos Santos – IFAL/UFAL (Presidente)

Rinaldo V. da S. Jr

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior - UFAL

Márcio Silva Santos

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB

MACEIÓ - 2018

DEDICATÓRIA

Dedico a minha esposa Izabella, meu filho Lucas e a minha filha que está por vir Maria Fernanda.

AGRADECIMENTOS

Gratidão, esse sem dúvida é um dos sentimentos mais poderosos que já conheci. Por isso, quero fazer dessa página não apenas um ambiente de protocolos, mas para expressar o que de fato sinto neste momento: Gratidão.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pois sem Ele nada seria possível. Ele é a razão de tudo ter sentido na minha vida. Meu Deus obrigado!

Agradeço também à minha linda esposa Izabella por todo apoio, compreensão e por torcer com o coração para que essa conquista se realizasse em nossa vida. Só ela sabe o quanto foi difícil chegar até aqui e como levo a sério minha vocação.

Agradeço também aos meus pais, Maria do Socorro e Josué Balbino, por me ensinarem a caminhar na retidão, por confiarem em mim e não desistir. Mãe, pai, aqui estou eu! Obrigado! Valeu a pena!

Agradeço a meus familiares por oração e torcida, em especial minhas tias Zenilda e Lurdes por serem anjos em minha vida.

Não poderia deixar de mencionar duas pessoas que sempre estiveram presentes em minha vida. Sempre me ensinando muito e que têm uma forte responsabilidade pela minha formação humana, de caráter e personalidade. E que apesar de não está mais entre nós, sua presença ainda é muito forte em minha vida: Vó Nazaré e tia Salete.

Agradeço aos meus colegas de turma que foram fundamentais nestes dois anos de caminhada. Uma turma que ficará marcada em minha vida. Em especial aos companheiros José Carlos, Dilson, Peixoto, Thiago Lessa e Ailton. E a minha cunhada Gabriella por colaboração com o inglês.

Aos professores que participaram da jornada desse programa de mestrado: Adina Rocha, Isnaldo Isaac, Luis Guillermo, André Flores, José Carlos, Gregório Manoel, Vânio Fragoso, Viviane de Oliveira.

E para finalizar agradeço à minha orientadora, Adina Rocha, pela sua atenção, zelo e maestria para que esse trabalho saísse da melhor maneira possível. Obrigado professora!

Epígrafe

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, para toda a vida, a sua marca na mente e no carácter.

George Polya

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar à importância da resolução de problemas que estimulam a mente para o desenvolvimento das habilidades básicas do pensamento: criatividade, estratégia e habilidade visual, e consequentemente, para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Estas habilidades básicas do pensamento antecedem as técnicas de resolução e dão autonomia no processo de criação e desenvolvimento da inteligência, conduzindo o aluno para a capacidade de desenvolver suas estratégias e de aprender com eficiência as técnicas já conhecidas. Além disso, vamos tratar do conceito de competências e habilidades que norteiam o sistema educacional brasileiro, fazendo assim uma análise das competências e habilidades que são avaliadas pela Prova Brasil e de alguns problemas de acordo com essas competências e habilidades, levando em consideração as três componentes que organizam o ensino e aprendizagem da Matemática: conceituação, manipulação e aplicação. Para finalizar, deixamos para o professor um banco de problemas de raciocínio lógico-matemático, para que o mesmo possa aplicá-los em sala de aula, visando o desenvolvimento das habilidades do pensamento e habilidades/competências que norteiam o sistema educacional brasileiro. Esperamos, com esta dissertação, contribuir para a construção de um ambiente de sala de aula provocador e cheio de surpresas, tanto para o aluno quanto para o professor.

Palavra chave: Resolução de problemas, habilidades do pensamento, raciocínio lógico-matemático, habilidades e competências, estímulos e provocações.

ABSTRACT

The purpose of this work is showing the importance of solving problems that stimulates the mind to the basics abilities development of thinking: creativity, strategy and visual ability, and consequently, to the logical-mathematical reasoning. These basical abilities of thinking precede the resolution techniques and give autonomy in the process of creation and development of intelligence, leading the student to the ability to develop their strategies and to learn effectively the techniques already known. In addition, we will deal with the concept of skills and abilities that guide the Brazilian educational system, thus making an analysis of the skills and abilities that are evaluated by Prova Brasil and some problems according to these competences and abilities, taking into account the three components which organize the teaching and learning of Mathematics: conceptualization, manipulation and application. Finally, we leave to the teacher a set of problems of logical-mathematical reasoning, so that he can apply them in the classroom, aiming at the development of the thinking skills and abilities/competences that guide the Brazilian educational system. We hope, with this dissertation, to contribute to the construction of a provocative classroom environment full of surprises, both for the student and for the teacher.

Key words: Problems resolution, ability of thinking, logical-mathematical reasoning, abilities and competences, stimulation and provocations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho mostraremos a importância da resolução de problemas que estimula a mente para o desenvolvimento das habilidades básicas do pensamento: criatividade, estratégia e habilidade visual, e consequentemente, para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Estas habilidades básicas do pensamento antecedem as técnicas de resolução e dão autonomia no processo de criação e desenvolvimento da inteligência, conduzindo o aluno para a capacidade de desenvolver suas estratégias e de aprender com eficiência as técnicas já conhecidas.

Esta dissertação está estruturada em seis capítulos: Capítulo 1 – A inteligência e seu desenvolvimento; Capítulo 2 – Habilidades do Pensamento; Capítulo 3 – A arte de resolver problemas; Capítulo 4 – Problemas que estimulam o raciocínio lógico-matemático; Capítulo 5 – Problemas para o desenvolvimento de competências e habilidades; e Capítulo 6 - Problemas.

No Capítulo 1, vamos falar sobre o quarto estágio do desenvolvimento cognitivo de Piaget, e aplicaremos a este estágio, a definição de inteligência de acordo com Gardner (GARDNER, 1994): inteligência lógico-matemática e inteligência espacial.

Já, no Capítulo 2, destacaremos as habilidades básicas do pensamento, a saber: criatividade, estratégia e habilidade visual. Além disso, falaremos sobre alguns elementos, como atenção e concentração, que estão diretamente envolvidos quando falamos em resolução de problemas, o que é importante para que o professor compreenda melhor o universo da sala de aula.

É fundamental que o aluno tenha a oportunidade de desenvolver habilidades do pensamento, mas que agregada a essas habilidades, é importante o uso de técnicas já desenvolvidas para a resolução de problemas matemáticos. Assim, escrevemos o Capítulo 3, com o objetivo de transmitir ao professor, o uso de algumas técnicas apresentadas por George Polya (POLYA,1995), em seu livro: A Arte de Resolver Problemas. Neste capítulo, veremos que a resolução de um problema de matemática passa por quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto da resolução completa do problema. Veremos então cada uma das fases e como aplicá-las em alguns problemas, como também o papel do professor em cada uma dessas fases e a importância das escolhas dos problemas.

No quarto capítulo, compartilharei um pouco da minha experiência de sala de aula e a minha incansável sede de provocações através de problemas que estimulam o raciocínio lógico. Além disso, apresentaremos alguns problemas de raciocínio lógico-matemático deixando claro qual ou quais as principais habilidades do pensamento trabalhadas e mostrando algumas possíveis soluções.

No Capítulo 5, vamos tratar os conceitos de competência e de habilidade segundo Philippe Perrenoud (PERRENOUD, 1999) e identificar esses conceitos em alguns documentos oficiais, como por exemplo: (PCNs) Parâmetros Curriculares Nacionais. Vale ressaltar que o conceito de habilidade tratado neste capítulo é diferente das habilidades do pensamento apresentadas no Capítulo 2. Além disso, iremos disponibilizar alguns problemas resolvidos fazendo uma análise da competência e habilidade exigida em cada problema. Além das competências e habilidades, vamos enfatizar a importância de que cada habilidade seja desenvolvida tendo como tripé as três componentes que organizam o ensino e aprendizagem da Matemática: conceituação, manipulação e aplicação.

Por fim, o Capítulo 6 tem por objetivo deixar para o professor um banco de problemas de raciocínio lógico-matemático, para que o mesmo possa aplicá-los em sala de aula, visando o desenvolvimento das habilidades do pensamento (veja Capítulo 2) e habilidades/competências elencadas nos descritores vistos no Capítulo 5. Além disso, o professor deve orientar seus alunos na aplicação das técnicas de resolução de problemas propostas por Polya (POLYA,1995), ver Capítulo 3, para obter um bom resultado.

Finalizaremos esta dissertação fazendo algumas considerações finais. Esperamos que desta maneira, possamos contribuir para a construção de um ambiente provocador e cheio de surpresas, tanto para o aluno, quanto para o professor.

1. A INTELIGÊNCIA E SEU DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo vamos falar sobre o quarto estágio do desenvolvimento cognitivo de Piaget, definição de inteligência de acordo com Gardner, inteligência lógico-matemática, inteligência espacial.

1.1 Quarto Estágio do Desenvolvimento Cognitivo para Piaget

Para Piaget (PIAGET, 1983) o desenvolvimento cognitivo é dividido em quatro estágios, Estágio Sensório-Motor (do nascimento aos 2 anos), Estágio Pré-Operatório (dos 2 aos 7 anos), Estágio das Operações Concretas (dos 7 aos 11-12 anos) e Estágio das Operações Formais (a partir dos 12 anos). Tais estágios comprovam que os seres humanos passam por uma série de mudanças previsíveis e ordenadas, ou seja, geralmente todos os indivíduos vivenciam todos os estágios na mesma sequência, porém o início e o término de cada estágio sofre variações, dadas às diferenças individuais de natureza biológica ou do meio ambiente em que o indivíduo está inserido. Nesse trabalho vamos nos concentrar apenas no quarto estágio, a saber, estágio das operações formais.

> O estágio das Operações Formais (a partir dos 12 anos) também conhecido como o estágio das operações intelectuais abstratas, da formação da personalidade e da inserção afetiva e intelectual na sociedade dos adultos.
> É neste período, a partir aproximadamente dos doze anos em diante (adolescência), que a criança começa a pensar, a raciocinar de forma lógica, consistente e sistemática, sem apoio de suportes concretos, sendo capaz de formar operações abstratas que lhe permitem ver para além do real (SUTHERLAND, 1996, p.35).

No Estágio das Operações Formais, a criança pode considerar uma série de soluções possíveis para um problema sem ter de agir concretamente, passa a ser capaz de lidar com situações abstratas e hipotéticas. O pensamento incide cada vez mais em ideias do que em objetos. As bases do pensamento científico aparecem nesta etapa do desenvolvimento. A criança torna-se consciente do seu próprio pensamento e adquire noção espacial e temporal. Adquire capacidade para conhecer e criticar as suas regras e leis. Inhelder e Piaget (INHELDER, PIAGET, 1958) afirmaram:

> A grande novidade deste estágio é que através da diferenciação de forma e do conteúdo do objeto (isto é, o adolescente) torna-se capaz de raciocinar corretamente em relação às proposições nas quais não acredita ou, pelo menos, ainda não: isto é, as proposições que considera serem puras hipóteses. Torna-se capaz de chegar às conclusões necessárias a partir das verdades que são meramente possíveis. (SUTHERLAND, 1996, p.36)

Assim, podemos dizer que o adolescente tem capacidade de operar logicamente a partir de hipóteses, sendo essas hipóteses verdades ou não para ele, chegando a conclusões, isto é, o adolescente está apto ao estudo da lógica da argumentação.

É nesta fase que o adolescente, depois de passar pelos três estágios anteriores, atinge a sua forma final de equilíbrio de acordo com a teoria de desenvolvimento cognitivo de Piaget.

1.2 Definição de Inteligência de Acordo com Hovard Gardner

A teoria das inteligências múltiplas foi desenvolvida a partir da década de 1980 por uma equipe de investigadores da Universidade de Harvard, liderada pelo psicólogo Howard Gardner, buscando analisar e descrever melhor o conceito de inteligência.

Gardner afirmou que o conceito de inteligência, como tradicionalmente definido em psicometria (testes de QI), não era suficiente para descrever a grande variedade de habilidades cognitivas humanas. Em resumo, a teoria afirma que uma criança que aprende a multiplicar números facilmente, não é necessariamente mais inteligente do que uma outra criança que tem habilidades mais fortes em outro tipo de inteligência. A criança que leva mais tempo para dominar uma multiplicação simples, pode aprender melhor a multiplicar através de uma abordagem diferente; pode ser excelente em um campo fora da matemática; ou pode até estar a olhar e compreender o processo de multiplicação em um nível profundo. Neste último exemplo, uma compreensão mais profunda pode resultar em lentidão que parece (e pode) esconder uma inteligência matemática potencialmente maior do que a de uma criança que rapidamente memoriza a tabuada, apesar de uma compreensão menos detalhada do processo de multiplicação.

De acordo com Gardner (GARDNER, 1994), inteligência é a capacidade de resolver problemas ou de criar um produto que seja valorizado dentro de um ou mais cenários culturais.

> A teoria das inteligências múltiplas pluraliza o conceito tradicional. Uma inteligência implica na capacidade de resolver problemas ou elaborar produtos que são importantes num determinado ambiente ou comunidade cultural. A capacidade de resolver problemas permite à pessoa abordar uma situação em que um objetivo deve ser atingido e localizar a rota adequada para esse objetivo. A criação de um produto cultural é crucial nessa função, na medida em que captura e transmite o conhecimento ou expressa as opiniões ou os sentimentos da pessoa. Os problemas a serem resolvidos variam desde teorias científicas até composições musicais para campanhas políticas de sucesso. (GARDNER, 1994, p.21)

A partir das capacidades consideradas universais na espécie humana, Gardner elenca e discute, a princípio, sete inteligências, ressaltando, contudo, que,

> Exceto em indivíduos anormais, as inteligências sempre funcionam combinadas, e qualquer papel adulto sofisticado envolverá uma fusão de várias delas (GARDNER, 1994, p.22).

São elas: a Inteligência Linguística (Int.L), a Inteligência Lógico-matemática (Int.LM), a Inteligência Espacial (Int.E), a Inteligência Corporal-cinestésica (Int.CC), a Inteligência Musical (Int.M), a Inteligência Interpessoal (Int.Inter) e a Inteligência Intrapessoal (Int.Intra).

1.2.1 Inteligência Lógico-Matemática

A inteligência lógico-matemática permite que um indivíduo resolva um problema rapidamente, onde uma possível solução é encontrada antes mesmo de sua verbalização. Segundo Gardner (GARDNER, 1994, p.25), essas soluções são rapidamente formuladas pela mente e apresentam coerência antes mesmo de serem representadas materialmente.

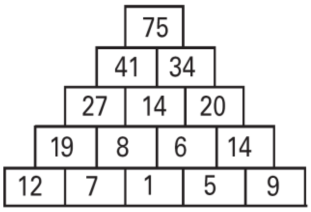
Graças a essa inteligência, o homem pode perceber padrões, fazer relações com objetos, utilizar hipóteses para formular novos conceitos, descrever fenômenos e modelos. Quando uma criança desenvolve esta inteligência, ela apresenta facilidade em cálculos mentais e pode formular exemplos práticos de seu raciocínio.

> A inteligência lógico-matemática consiste na capacidade de usar os números de forma efetiva e para raciocinar bem. Isso inclui sensibilidade a padrões e relacionamentos lógicos, afirmações e proposições, funções e outras abstrações relacionadas. Dessa forma, dentre os processos utilizados por esta inteligência estão: categorização, classificação, inferência, generalização, cálculo e testagem de hipóteses (ARMSTRONG, 2001, p.14).

Vejamos um problema que está relacionado à inteligência lógico-matemático:

Problema 1.1 (*O muro secreto do professor Peixoto*): Professor Peixoto é gamado em raciocínio lógico. Ele acredita que através da lógica seus alunos desenvolvem seus níveis de compreensão e consegue absolver as mensagens com maior clareza. Ele manda que seus alunos observe o muro abaixo e descubra o “segredo”. Você consegue?

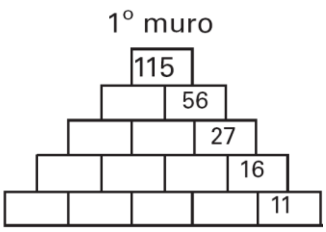
Figura 1 – Muro

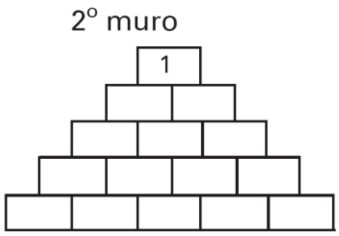


Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática

Use o “segredo”’ e escreva o número de cada quadrinho dos muros. No 2°muro é proibido colocar o número zero nos quadrinhos.

Figura 2 – 1° Muro **Figura 3** – 2° Muro





Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática

Observe que o aluno deve perceber que existe uma relação entre os quadrinhos no muro. Que neste caso cada quadrinho é igual soma de dois quadrinhos imediatamente abaixo deste.

1.2.2 A Inteligência Espacial

De acordo com Armstrong (ARMSTRONG, 2001, p.14), a inteligência espacial é responsável pela capacidade de perceber com precisão o mundo visuo-espacial (por exemplo, como um caçador, escoteiro ou guia) e de transformar essas percepções (como um arquiteto, artista, ou decorador de interiores). Por isso ela envolve sensibilidade à cor, linha, forma, configuração e espaço, e as relações existentes entre esses elementos. Desse modo, nela está incluída a capacidade de visualizar, de representar graficamente ideias visuais ou espaciais e de orientar-se apropriadamente em um espaço.

Brennand e Vasconcelos (BRENNAND, VASCONCELOS, 2005, p.31) acrescentam que essa inteligência, que se traduz na percepção dos espaços, permite que os indivíduos sejam capazes de executar modificações sobre percepções iniciais de espaço, recriando aspectos, mesmo na ausência do contato material, e por isso habilita os indivíduos a desenharem, mapearem e visualizarem objetos em várias dimensões.

Segundo Gardner (GARDNER, 1994, p.26), a inteligência espacial caracteriza a solução de problemas como o uso do sistema notacional de mapas ou, ainda, da visualização de um objeto a partir de um ângulo diferente, como por exemplo, o jogo de xadrez. Por isso, segundo o autor, quando há danos em determinadas regiões do hemisfério direito, isso pode causar prejuízos na capacidade do indivíduo de se deslocar por espaços que já tenha conhecido, de reconhecer rostos ou cenas, e de observar detalhes pequenos.

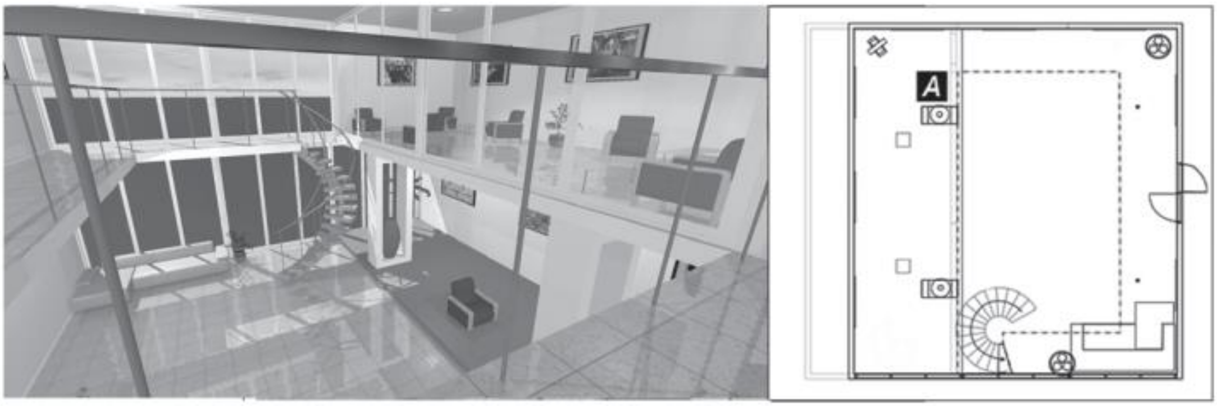
> Assim como o hemisfério esquerdo, durante o curso da evolução, foi escolhido como o local do processamento linguístico nas pessoas destras, o hemisfério direito é comprovadamente o local mais crucial do processamento espacial. (GARDNER, 1994, p. 26)

A inteligência espacial influencia diretamente no desenvolvimento do aprendizado da geometria plana e principalmente da geometria espacial.

Vejamos dois problemas que estão relacionados à inteligência espacial.

Problema 1.2 (*O que é* **A***?*): A figura mostra a fotografia da sala de estar de uma casa, parcialmente decorada, e, ao lado, sua planta, na qual está destacado um objeto, representado pela letra **A**. A sala possui dois pisos, um inferior e outro superior.

Figura 4 - Fotografia da sala de estar de uma casa



Fonte: http://www1.cesgranrio.org.br/pdf/seecrn0111/provas/11_MATEMATICA.pdf

Analisando a foto que foi tirada e os objetos que nela estão dispostos, qual o objeto que, mais provavelmente, está localizado sobre o ponto **A**?

Vejamos que o problema exige do observador uma capacidade de se projetar no espaço fazendo relação com uma projeção no plano.

Problema 1.3 (*Uma Mesa De Rivais*): Em torno de uma mesa quadrada, encontram-se quatro torcedores. Samuel, o mais novo entre eles, é são paulino. Há também um flamenguista, um cruzeirense e um vascaíno. Dilson está sentada à direita de Samuel. Vitor à direita do flamenguista. Por sua vez, Pérola, que não é cruzeirense, encontra-se sentada à frente de Dilson. Qual o clube que Dilson e Pérola torcem?

Vejamos que o problema exige do aluno uma capacidade de projetar-se no ambiente, buscando localizar-se em posições de acordo com referenciais dados.

2. HABILIDADES DO PENSAMENTO

Neste capítulo vamos dar atenção a algumas habilidades do pensamento: criatividade, estratégia e habilidade visual. Que estão intrinsicamente ligadas ao processo de resolução de problemas. Porém, antes, vamos conhecer um elemento muito importante para o desenvolvimento cognitivo: a atenção. E como a atenção está ligada a falta de interesse em sala de aula.

2.1 Atenção e Falta de Interesse

Antes de descrever algumas habilidades do pensamento, vamos conhecer um elemento importante para o desenvolvimento cognitivo: a atenção. Quantas vezes falamos ou já ouvimos de alguém a expressão: “Tenha atenção! ”, “Preste atenção! ”. Mas quem de nós realmente dá a devida atenção para o que é a atenção? De acordo com (FILHO E COSTA, 2012), em neurociência e desenvolvimento cognitivo:

> Atenção é a capacidade de selecionar e manter controle sobre a entrada de informações externas necessárias em um dado momento para a realização de um processo mental, mas também diz respeito ao controle de informações geradas internamente. Sem essa capacidade de seleção, a quantidade de informações externas e/ou internas seria enorme, a tal ponto de inviabilizar qualquer atividade mental. Embora, essa seja uma definição mais restrita, o termo “atenção” vem sendo utilizado para referir-se a uma gama enorme de processos mentais que se resumem em um foco ou a um direcionamento dado a uma informação de interesse. Ao mesmo tempo os autores ressaltam que a atenção é uma habilidade cognitiva indissociável de um conjunto mais amplo de funções denominadas executivas, que são funções mentais superiores e complexas, que capacitam o indivíduo ao desempenho de ações orientadas à metas. (FILHO E COSTA, 2012, p.47)

Regina e Maia (FILHO E COSTA, 2012) classificam atenção em três categorias: atenção sustentada, atenção seletiva e atenção dividida ou alternância.

A atenção sustentada pode ser entendida como aquela que deve ser mantida durante um longo período e direcionada a um foco. É o mesmo que concentração.

A atenção seletiva é a capacidade de direcionar a atenção para determinado foco do ambiente enquanto outros estímulos a sua volta são ignorados. É a modalidade atentiva que mais se aproxima do conceito original de atenção pelo consenso geral das pessoas do que seja “ter atenção”, se confundido com esse.

Atenção dividida ou alternância é entendida como a capacidade de atender a duas ou mais fontes de informação simultaneamente**,** ou seja, de alternar entre um estímulo e outro, com igual interesse e eficiência.

Os autores Filho e Costa (FILHO E COSTA, 2012) afirmam ainda que existe um conjunto de elementos que são fundamentais para estimular a atenção como por exemplo: o interesse e a complexidade do problema.

Devemos ser muito cuidadosos, contudo, ao atribuir a ”falta de interesse” à dificuldade atentiva do aluno, pois quando o aluno não se sente provocado, então certamente não sentirá interesse pelo problema. Desta maneira sua atenção estará comprometida.

A complexidade do problema também é fundamental na capacidade de selecionar e manter controle sobre a entrada de informações externas necessárias em um dado momento para a realização de um processo mental. Quanto mais elaborada (passos de raciocínio), mais dependente de conhecimentos previamente construídos e com maior número de relações e inferências para seu desenvolvimento, maior flexibilidade atentiva será exigida. Portanto, se o problema for muito simples o aluno não se sentirá provocado, pois sua solução é imediata. E por outro lado, se o problema for muito complexo, o aluno inicialmente se sentirá provocado, mas por falta de recursos intelectuais ele se desestimulará tirando sua atenção do problema.

Agora de posse do que foi dito acima, faremos uma breve conceitualização de algumas das habilidades básicas, que o aluno precisa para desenvolver sua autonomia de pensar e não apenas ser um propagador de informações e um reprodutor de conhecimento, mas seja capaz de ele mesmo inventar suas teorias confrontadas com as já existentes dando origem a novos conhecimentos.

2.2 Criatividade

A criatividade é assunto de reflexão de alguns cientistas e escritores como Vygotsky, Dostoievski, Damásio, Leo Szilard e Jonas Salk . Em sua obra "*Criação e imaginação*", Vygotsky (VIGOTSKI, 1985) afirma que é a atividade criadora que faz do homem um ser que se volta para o futuro, erigindo e modificando o seu presente. Para esse psicólogo e educador, a criação é a condição necessária da existência e tudo que ultrapassa os limites da rotina deve sua origem ao processo de criação do homem e que a obra de arte reúne emoções contraditórias, provoca um sentimento estético, tornando-se uma técnica social do sentimento.

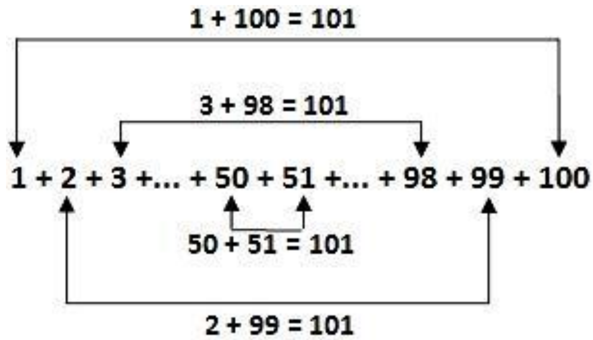
Existem várias definições diferentes para **c**riatividade. Para Ghiselin (GHISELIN 1952), "é o processo de mudança, de desenvolvimento, de evolução na organização da vida subjetiva". Segundo Flieger (FLIEGER 1978), "manipulamos símbolos ou objetos externos para produzir um evento incomum para nós ou para nosso meio".

O que percebemos é que a criatividade é uma habilidade desenvolvida a partir da nossa curiosidade, ou seja, quando nos colocamos em situações investigativas e de testes, entramos num processo de criação e inovação. Por isso, é importante que as crianças não sejam programadas para fazer atividades preestabelecidas somente, mas que também sejam colocadas em situação de investigações em que elas possam se sentir importantes. É claro que nosso sistema de ensino preestabelece algumas competências a serem trabalhadas. Mas é importante que o aluno seja visto em sua totalidade, pois sua capacidade criadora quando colocada em processo de desenvolvimento trará impactos tanto em sua vida, quanto em toda sociedade.

> Nenhuma invenção ou descoberta científica pode emergir antes que aconteçam as condições materiais e psicológicas necessárias para seu surgimento. A criação é um processo de herança histórica em que cada forma que sucede é determinada pelas anteriores. (VIGOTSKI, 1985, p. 42).

Uma das histórias mais fascinantes é a envolvendo progressões, do matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado o maior matemático do século XIX e um dos maiores de todos os tempos, juntamente com Arquimedes e Isaac Newton. Aos 10 anos, Gauss frequentou uma escola local, na qual o professor era tido como muito exigente. Certo dia, com a intenção de manter a turma em silêncio, pediu aos alunos que somassem os números naturais de 1 a 100 $(1+2+3+4+...+99+100)$ e, assim que terminassem, colocassem a solução sobre sua mesa. Quase em pouco tempo, Gauss colocou sobre a mesa do professor a resposta encontrada. Ele olhou para o menino com pouco caso, enquanto os demais alunos trabalhavam arduamente. Quando conferiu os resultados, o professor verificou que a única resposta correta era a de Gauss, 5.050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Gauss havia feito o cálculo mentalmente, observando que a soma do primeiro e do último termo $(1+100)$, do segundo e do penúltimo termo $(2+99)$, do terceiro e do antepenúltimo $(2+99)$, e assim por diante era sempre 101, ou seja:

Figura 5 – Soma dos termos equidistantes



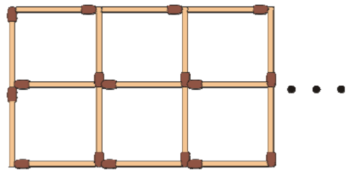
Fonte: elaborada pelo autor

O que podemos perceber neste contexto vivido por Gauss é a situação que Gauss foi colocado e o ambiente que o professor de Gauss proporcionou para que assim os alunos colocassem em atividade suas habilidades. E ainda que com sua genialidade, será que seria percebido o exímio potencial de Gauss sem proporcionar momentos como esse? E ao ouvir essa incrível história Gauss, quem nunca parou para pensar: quanta criatividade desse menino!

Vejamos um problema que busca e avalia o desenvolvimento desta habilidade.

Problema 2.1 (*Quadrados de palitos*): Isnard está construindo uma sequência de quadrados com palitos de fósforos conforme figura abaixo.

Figura 6 - Sequência de quadrados com palitos



Fonte: elaborada pelo autor

Quantos palitos de fósforos são necessários para Isnard construir 200 quadrados? Observe que o problema exige uma mente criativa para solucioná-lo, assim o aluno se coloca numa postura investigativa, de curiosidade.

2.3 Estratégia

Estratégia, segundo Mintzberg (MINTZBERG, 1994) trata-se da forma de pensar no futuro, integrada no processo decisório, com base em um procedimento formalizado e articulador de resultados.

A palavra vem do grego antigo stratègós (de *stratos*, "exército", e *ago*, "liderança" ou "comando", tendo significado inicialmente "a arte do general") e designava o comandante militar, à época de democracia ateniense. O idioma grego apresenta diversas variações, como *strategicós*, ou próprio do general chefe; *stratégema*, ou estratagema, ardil de guerra; *stratiá*, ou expedição militar; *stráutema*, ou exército em campanha; *stratégion*, ou tenda do general, dentre outras.

Como ter sucesso? Como está à frente de um desafio? Considera-se que apenas fazer o que outros fazem, mas com maior eficácia operacional, não é propriamente ter uma estratégia. Está implícito no conceito que, para ter uma estratégia, precisamos atuar de forma diferente, com inteligência e planejamento.

O pensamento estratégico possibilita o preparo para sempre estar à frente de seus desafios. Para isso você precisa se envolver com a tarefa que se apresenta e com o que virá a seguir, enxergar, de forma clara, como as duas coisas se encaixam em seus planos. Além de focado na tarefa, você deve ser guiado pelo objetivo final.

É fundamental estar atento no objetivo durante o desempenho de suas tarefas. Vejamos um problema que busca e avalia o desenvolvimento desta habilidade.

Problema 2.2 (*Quantas viagens?*): Dois casais estão passeando num bosque, quando encontram um lago profundo e perigoso, e descobrem que a única ponte para atravessar o lago está quebrada. Ao lado da ponte está um barco e ao lado do barco uma placa onde está escrito: é obrigatório o uso do barco para atravessar o lago. Peso máximo 100 kg. Os homens Edcarlos e Gerlan pesam em torno 100 kg cada; suas esposas Geometrina e Algebriana, pesam 50 kg cada. Como conseguir que todos atravessem o lago sem sobrecarregar o barco? Quantas viagens no mínimo serão necessárias?

Observe que o problema exige alguma estratégia para que o barco possa ir e voltar de uma margem para outra.

2.4 Habilidade Visual

Todos nós sabemos que somos prisioneiro de nossos olhos, pois nos vemos muitas vezes sendo enganados por aquilo que nossos olhos nos mostram. Isso porque omitimos informações que a imagem nos transmite ou colocamos informações que não estão na imagem.

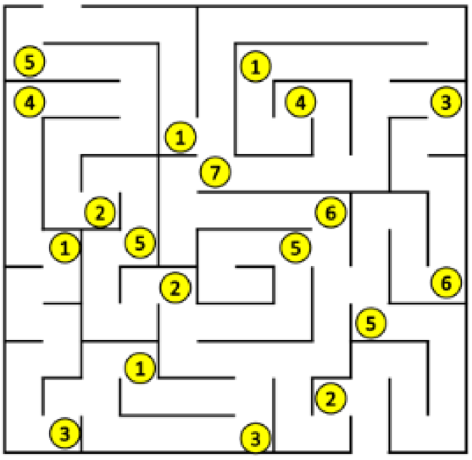
Habilidade visual nos ajuda a ter noção de espaço e ver as coisas com uma dinâmica maior. Tirando-nos de um mundo estático e sem vida. Bons empreendedores têm essa habilidade: habilidade de ver as oportunidades onde existe, avaliar e mover coisas projetando-se no futuro de novas criações.

De acordo com Maia e Thompson (MAIA E THOMPSON, 2012), no livro neurociência e desenvolvimento cognitivo, o lobo occipital percebe e interpreta as sensações visuais (sequencialização visual; percepção visual; decodificação visual; percepção de figura de fundo; posicionamento e relação visual). Pelo menos metade do seu cérebro está envolvida com a função da visão. As informações visuais, que são absorvidas pelos olhos, são processadas no córtex occipital (ou visual), localizado na parte anterior do cérebro, e transmitida para outras regiões cerebrais para serem analisadas.

Vejamos um problema que busca e avalia o desenvolvimento desta habilidade:

Problema 2.3 (*Abda ganha um prêmio na escola*): Ainda cheio de lembranças felizes de suas aventuras na casa do interior, Abda inventa o labirinto abaixo para seu dever de casa de matemática. Estas são as instruções que ela fornece: “Ache o caminho no topo até o final do labirinto, sem passar duas vezes no mesmo lugar, e coletando números que, juntos, somem exatamente 20”.

Figura 7 - Labirinto



Fonte: elaborada pelo autor

O aluno estará colocando a habilidade visual em exercício. O problema pode parecer simples, mas muitas vezes o aluno não consegue observar as informações em uma figura, seja de maneira local ou de maneira global.

3. A ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS

Temos que é fundamental que o aluno tenha a oportunidade de desenvolver habilidades do pensamento, mas que agregada a essas habilidades, é importante o uso de técnicas já desenvolvidas para a resolução de problemas matemáticos. Assim, escrevemos este capítulo. Com o objetivo de transmitir ao professor, o uso de algumas técnicas apresentadas por George Polya em seu livro, *A Arte de Resolver Problemas.*

Neste capítulo, veremos que a resolução de um problema de matemática passa por quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto da resolução completa do problema. Contudo, de acordo com Polya, pode ocorrer que um estudante tenha uma ideia muito boa e chegue à solução do problema sem precisar passar por essas fases, o que é muito bom, pois mostra a capacidade que o estudante tem de raciocinar. Mas se assim não acontecer? Ou seja, o estudante começa a fazer vários cálculos e traça figuras sem antes compreender o problema. Qual o papel do professor?

> É geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano. Muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudante verificar cada passo. Muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de reconsiderar a solução completa. (POLYA, 1995, p.4)

Veremos então cada uma das fases e como aplicá-las em alguns problemas, como também o papel do professor em cada uma dessas fases e a importância das escolhas dos problemas.

3.1 Compreensão do Problema

A compreensão do problema consiste na primeira fase para a resolução de um problema. O que se espera de um estudante que responde a uma pergunta que não foi compreendida? Pior ainda! O que se espera de um estudante ao resolver um problema no qual ele não está interessado? Essas são perguntas fundamentais para que se estabeleça um contrato didático[1].

---

[1] Contrato didático: segundo Brousseau (BROUSSEAU 1986), chama-se um conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor.

O aluno precisa compreender o desafio e, além disso, ele deve estar envolvido em resolvê-lo, ou seja, interessado no problema. Assim, o aluno assume uma postura ativa, se sentindo parte do problema, isto é, se colocando no papel da pessoa que deve realizar a ação, isso por que ele se sente provocado.

Compreensão, diferente de interpretação, é nada mais que a capacidade de tomar as informações que estão no texto sem sair do texto. Por isso, é importante num problema que o aluno tenha a capacidade de destacar com clareza as informações chamadas de hipóteses e o que o problema está pedindo. O estudante deve considerar as partes principais de um problema e observá-lo sob vários pontos de vista. Se houver alguma figura que esteja relacionada ao problema o estudante deve traçá-la e nela considerar as informações dadas e o que está se querendo encontrar, utilizando uma notação clara. Mas quando o aluno demonstra dificuldade de compreensão do problema? Neste momento a ação do professor é fundamental.

O papel do professor no auxílio ao estudante é extremamente fundamental, pois o professor deve conduzi-lo na compreensão do problema. O professor deve ter cuidado para não tomar o trabalho do aluno para si, e sim levá-lo a pensar a partir de dicas que podem vir por meio de novas perguntas provocadoras ou afirmativas que levem o aluno a pensar nas informações do problema. É importante que o aluno passe pelo processo do esforço mental, e mesmo que o aluno não avance na resolução do problema, é importante que o professor intervenha afim de preservar a autoestima e motivação do aluno.

> Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (POLYA, 1995)

Assim vemos o professor como mediador, com perguntas provocadoras, que leva o aluno a pensar no problema por outros ângulos e também ter a capacidade de a partir de afirmações, levar o aluno a perceber informações no texto, para isso é importante que o professor conheça bem o problema e tente levar o aluno a viver o problema, levando o estudante a variar continuamente o seu ponto de vista e mudando de posição em vários momentos. Assim o papel do professor é evitar que o estudante responda a uma pergunta que não foi compreendida ou trabalhar em vão, isto é, para um fim não desejável.

3.2 Estabelecimento de Um Plano

A terceira fase para a resolução de um problema consiste no estabelecimento de um plano. O principal momento na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Mas, quando sabemos que de fato temos um plano e não apenas uma tentativa frustrante?

Um plano é reconhecido, quando conhecemos de maneira geral o que vamos utilizar, seja por cálculo, por figura ou por comparação, para obter o que desejamos.

Quando compreendido o problema começa-se a busca pelo estabelecimento da ideia de um plano, o que pode não ser um momento tão simples assim, momento esse pode ocorrer de várias maneiras, podendo ser imediatamente, mas também gradualmente, por meio de tentativas aleatórias até que se perceba algum aspecto funcional no problema e assim se estabeleça um plano.

O papel do professor por meio de perguntas ou afirmações provocadoras, leva o aluno a pensar no problema por outros pontos de vista. É importante que o professor se lembre de sua experiência com o problema. Quais as dificuldades encontradas, quais as informações facilmente percebidas, e o que o problema exigiu do professor para a solução: experiências passadas? Conhecimento sobre determinado assunto contemplado no problema? Conhecer algum problema que tem relação com o problema proposto? Para alguns problemas é essencial o conhecimento prévio de determinados assuntos.

> Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, sem dar nas vistas. O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa na sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante. (POLYA, 1995)

Outra estratégia muito boa é a de reformular o problema, reduzindo o problema em casos menores seria uma das maneiras de conduzi-lo ou tornar a situação concreta em sala, utilizando objetos que os ajudem a pensar de maneira dinâmica e não estática. Assim o professor vai conduzir-lhe discretamente a uma ideia luminosa.

3.3 Execução do Plano

Após ter traçado o plano que é um momento bem difícil, pois precisamos de conhecimentos anteriores, bons hábitos mentais e concentração no objetivo, é chegada a hora de executar o plano, o que ficará bem mais fácil; paciência e disposição para trabalhar com cautela observando cada passo do roteiro traçado no plano é o que mais se precisa.

O plano nos leva a um esquema geral. Cada ação deve ser realizada para que estejamos convictos do que está se fazendo e de que nenhum erro ficará oculto.

Verifica-se que o aluno realmente concebeu um plano, quando ele não se esqueceu do seu plano enquanto caminha na execução. O que ocorre quando ele recebe a ideia de fora, na maioria das vezes do professor. Mas, se ele mesmo concebe o plano mesmo que com ajuda do professor, mas a ideia final é do estudante, então o estudante se apropria da ideia que de fato foi sua e executa o plano com autonomia.

É importante que o professor insista na verificação de cada passo e que deixe claro, a diferença entre verificar e demonstrar. Vale as seguintes perguntas: É possível perceber claramente que o passo está certo? Ou mostre que cada passo está certo?

3.4 Retrospecto

É importante que o estudante tenha um momento para exposição do que ele fez, sendo esse um momento de confronto com as ideais de outros, o que trará a todos um interessante ambiente de aprendizagem.

Este momento traz para o aluno um compromisso de retrospecto da resolução do problema, pois para expor, ele tem que está convicto do que fez. Para isso, ele terá de fazer um retrospecto de sua resolução e assim irá vivenciar uma fase muito importante e instrutiva do trabalho da resolução do problema. Fazendo esse retrospecto, reconsiderando e reexaminando o resultado final, e mais ainda, analisando o caminho que foi tomado, o tipo de raciocínio que foi aplicado para chegar a este resultado, ele poderá enfim consolidar esse conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas.

No retrospecto do problema é importante que o professor compreenda e transmita aos seus alunos que o problema não se esgota, mas que sempre pode ser mais bem explorado quando visto por outros ângulos, assim aperfeiçoando a capacidade do aluno em resolver problema. O professor pode reelaborar o problema aumentando a dificuldade, ou pedir para que o próprio aluno faça isso. É interessante também que o aluno aprenda com aquele problema a elaborar outros. Cabe ao professor provocá-lo.

A escolha do problema também é extremamente relevante, pois o nível do problema e sua proposta são fatores que influenciam no interesse do aluno. Um problema muito fácil não é provocador. Um problema muito difícil e sem uma proposta interessante pode levar o estudante a desistir. Então o problema deve ser desafiador e de acordo com o nível cognitivo dos estudantes e desafiador. Um problema bem escolhido, com o tempo certo para a sua execução, é fundamental para o desenvolvimento de habilidades do pensamento matemático e, consequentemente, estimula o raciocínio lógico e faz das aulas de matemática um ambiente de investigação e construção da autonomia.

3.5 Aplicação: Resolução de um Problema

Vejamos a resolução de problema de raciocínio lógico como exemplo de aplicação destas 4 fases. E um diálogo entre professor e aluno na tentativa de compreender melhor como acontece estas fases.

Problema 3.1 (*Quantas viagens?)*: Dois casais estão passeando num bosque, quando encontram um lago profundo e perigoso, e descobrem que a única ponte para atravessar o lago está quebrada. Ao lado da ponte está um barco e ao lado do barco uma placa onde está escrito: é obrigatório o uso do barco para atravessar o lago. Peso máximo 100 kg. Os homens Edcarlos e Gerlan pesam em torno 100 kg cada; suas esposas Geometrina e Algebriana, pesam 50 kg cada. Como conseguir que todos atravessem o lago sem sobrecarregar o barco? Quantas viagens no mínimo serão necessárias?

Compreensão do Problema 3.1

Afirmações:...*é obrigatório o uso do barco para atravessar o lago. Peso máximo 100 kg. Os homens Edcarlos e Gerlan pesam em torno 100 kg cada; suas esposas Geometrina e Algebriana, pesam 50 kg cada.*

Nesta parte do texto o aluno precisa compreender que temos quatro pesos. Dois de 100 kg e dois de 50 kg, para atravessar um lago em um barco que só suporta 100 kg por vez.

O que queremos: Como conseguir que todos atravessem o lago sem sobrecarregar o barco? Quantas viagens no mínimo serão necessárias?

Papel do professor: Quando é percebido que o estudante não conseguiu dá os primeiros passos no problema, ai entra o professor como mediador. Se colocando a ouvir a leitura do aluno e levá-lo destacar as informações importantes. Vejamos o diálogo.

> **Aluno:** Professor, não compreendi o problema!
> **Professor:** Leia o problema.
> **Aluno:** Dois casais estão passeando num bosque, quando encontram um lago profundo e perigoso, e descobrem que a única ponte para atravessar o lago está quebrada...(o professor interrompe)
> **Professor:** Qual informação importante tem nesta parte do texto?
> **Aluno:** Existem quatro pessoas para atravessar um lago e a única ponte para atravessar o lago está quebrada.
> **Professor:** Por que é importante?
> **Aluno:** Isso significa que não podemos usá-la.
> Neste momento é importante que o professor aproveite o ensejo e insira novos vocábulos para o aluno, se necessário. Por exemplo, pelo que aluno falou anteriormente o professor pode mostrar que essas informações são chamadas restrições que o problema impõe.
> **Professor:** Continue a leitura.
> **Aluno:** ...ao lado da ponte está um barco e ao lado do barco uma placa onde está escrito: é obrigatório o uso do barco para atravessar o lago. Peso máximo 100 kg.
> **Professor:** O que tem de importante nesta parte?
> **Aluno:** Temos um barco para atravessar o lago, mas que suporta apenas 100 kg por viagem.
> **Professor:** Continue a leitura.
> **Aluno: ...**os homens Edcarlos e Gerlan pesam em torno 100 kg cada; suas esposas Geometrina e Algebriana, pesam 50 kg cada.
> **Professor:** O que tem de importante nesta parte?
> **Aluno:** Quatro pessoas. Dois homens e duas mulheres. Cada homem pesa 100 kg e cada mulher pesa 50kg.
> **Professor:** Continue a leitura.
> **Aluno:** Como conseguir que todos atravessem o lago sem sobrecarregar o barco? Quantas viagens no mínimo serão necessárias?
> **Professor:** O que o problema quer?
> **Aluno:** Atravessar todos para o outro lado do lago sem sobrecarregar o barco.
> **Professor:** Faça uma figura para descrever a situação.

Estabelecimento de um Plano para o Problema 3.1

Considerando que quando os deixamos, os alunos haviam acabado de compreender o problema e de se interessado por ele. Espera-se agora uma ideia, alguma iniciativa. Se o professor atentamente perceber que não há iniciativa, então retoma o diálogo com o aluno fazendo novas perguntas ou as mesmas perguntas com modificações. O silêncio é um grande aliado neste momento, pois é a partir dele que o professor vai perceber o envolvimento da turma, mas se esse silêncio ocorrer quando a turma for indagada, então o professor vai refazendo suas perguntas baseando-se em situações anteriores, ou pode reformular o problema e refazer as mesmas perguntas. Voltemos ao problema da travessia para aplicar esta fase.

Vejamos o diálogo:

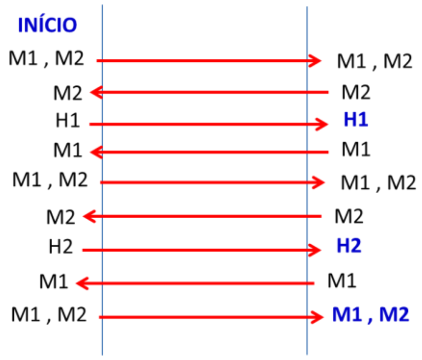
> **Professor:** Conhece algum problema que tenha relação com esse?
> **Aluno:** Não! Como é possível se o barco só leva 100 kg?
> É muito comum o aluno colocar informações que não existam no texto ou retire informações que existem. Veja que na pergunta do aluno ele coloca o conectivo *só*, porém o texto nos diz *no máximo.* Esse é um problema de compreensão. Cabe ao professor chamar a atenção do aluno sempre que possível, não mostrando diretamente que ele está errado, mas pedindo a ele que leia novamente e verifique a veracidade de sua afirmativa e qual a diferença entre o que o texto diz e o que o estudante diz?
> *Se depois de alguma tentativa a turma não perceber, então o professor reformula o problema.*
> **Professor:** Se o problema fosse com três pessoas. Uma de 100 kg e as outras duas de 50 kg cada?
> Essa pergunta do professor sugere ao aluno reduzir o problema a uma situação mais fácil, transformando-o em um problema correlato, o que ele poderá tomar o raciocínio a situação original.
> **Aluno:** Percebi que a ideia está em trabalhar com as mulheres.
> **Professor:** Qual o plano?
> **Aluno:** Passo primeiro as duas mulheres.
> Depois da ideia o estudante começa a execução do plano, chegando a 3ª fase.

Execução do Plano para o Problema 3.1

O estudante conseguiu finalmente ter a ideia de um plano. Ele percebe que os pesos que leva ele a resolução do problema são os dois pesos de 50 kg. Desta maneira ele pode demonstrar alguma dificuldade para expor a resolução. Então o professor pode sugerir uma figura como esquema.

O seguinte esquema foi proposto por um aluno. E ele usou M1 e M2 como notação para as mulheres. E H1 e H2 para os homens. As linhas na vertical são as margens do lago e as linhas com setas na horizontal indicam as travessias.

Figura 8 - Esquema



Fonte: elaborada pelo autor

Pela figura temos que primeiro atravessamos as duas mulheres para a outra margem. Uma delas fica e a outra volta. Passa então um dos homens para a margem desejada. A mulher que tinha ficado agora volta e tudo recomeça até que se passe o segundo homem. Teremos então no mínimo 9 viagens para que ocorra a travessias de todos, respeitando o limite do barco.

Retrospecto do Problema 3.1

Nesta fase, cabe ao professor colocar o aluno numa situação de exposição da solução. Assim, o aluno revisará a solução do problema observando se foram utilizadas todas as hipóteses. Além disso, o professor pode fazer as seguintes perguntas: É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? Com essas perguntas o professor torna para o aluno a ideia de que o problema pode sempre ser um pouco mais explorado.

4. PROBLEMAS QUE ESTIMULAM O RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

“É lógico! ”, “Seja criativo! ”, “ Use suas estratégias! ” ,“ Olhe bem!” ,“ Pense bem!”. Quantas vezes já ouvimos essas expressões ou já utilizamos em sala de aula; ou até mesmo no dia a dia, falando sobre política ou futebol? Sempre que dizemos “É lógico! ”, estamos concluindo que algum raciocínio apresenta coerência sendo, muitas vezes, evidente. É comum usarmos tal expressão diante de um fato real ou de uma ideia que podemos defender facilmente.

Neste capítulo, compartilharei um pouco da minha experiência de sala de aula e a minha incansável sede de provocações através de problemas que estimulam o raciocínio lógico. Além disso, apresentaremos alguns problemas de raciocínio lógico--matemático deixando claro qual ou quais as principais habilidades do pensamento trabalhadas e mostrando algumas possíveis soluções.

Ser criativo, rápido, estratégico e lógico. Quem de nós não quer desenvolver e adquirir essas habilidades ou desejamos que nossos alunos desenvolvam? Sem falar o quanto é bom quando recebemos deles uma solução criativa para algum problema proposto.

É preciso estar sempre nos preparando para momentos em que a vida nos pede criatividade como, por exemplo, quando um gerente de um setor de um supermercado tem a missão de organizar o setor de maneira que os produtos daquele setor estejam em locais que influenciem os consumidores à levá-lo. Se observarmos até mesmo para um bom arquiteto se destacar, coloca-se em cheque sua criatividade.

Muitas pessoas subestimam os seus poderes criativos. Em alguns casos, percebemos que isso ocorre porque essas pessoas nunca tentaram realmente ser criativas ou foram bloqueadas quando tentaram ser. Essas pessoas acreditam que ser criativo e ser recompensados por essa habilidade é mérito para “os outros”.

Pensar com estratégia nos leva a tomar decisões com segurança e a ter convicção de nossas ações e assim após essas ações podemos avaliar se a estratégia usada foi a melhor ou não.

Resolver problemas sempre foi uma atividade intrinsicamente ligada a qualquer animal e de maneira especial a humanidade que dependendo do problema, quanto mais desafiador, o problema pode levar o homem a um processo de descoberta e criação.

> O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve, pelos seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. (POLYA, 1995)

Quando comecei a lecionar em turmas de Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano, senti por muitas vezes grande desconforto, pois não sabia como estimular os alunos para aprendizagem da Matemática já que era percebido que habilidades básicas como a criatividade, estratégia e habilidade visual ainda não tinham sido desenvolvidas e, mais ainda, como a Matemática era vista por eles. Os alunos viam a Matemática como uma matéria que só tinha números, e com o tempo suas vidas se tornariam mais complicadas, isso por que os números ficavam mais complicados. Mas algo que me deixava extremamente impressionado era como eles se envolviam quando eu apresentava a eles algum desafio de lógica. Como por exemplo, (TAHAN, 2010): Colocar 10 soldados em 5 filas, tendo cada fila 4 soldados.

Nesse momento, causava em sala, por vez, um grande e positivo desconforto e em outro momento um grande silêncio, pois os alunos se colocavam em um ambiente investigativo e de verdade se sentiam desafiados. Eram momentos únicos e eu, ao longo daquele processo, percebia que meu papel de condutor era extremamente importante; pois nesse ambiente revelava-se a criatividade de alguns e a falta de criatividade de outros. Os alunos que sabiam desenvolver algumas estratégias e os que ficavam estáticos diante do problema, mesmo se sentindo desafiados. Os alunos que tinham desenvolvido a habilidade visual e os que não tinham visão ampla do problema. E a cada pergunta que eles me faziam acerca do desafio proposto, eu respondia com outra pergunta, que intencionalmente os levaria a pensar de uma maneira dinâmica no problema e que os conduzisse a resposta do questionamento feito a mim.

O fato é que a cada experiência ficava mais clara a grande diferença entre os alunos que tinham mais desenvoltura: alguns alunos tinham desenvolvido algumas habilidades, mais que outros; como criatividade, estratégia, habilidade visual e lógica que em muitos casos não tinham sido desenvolvidas ou tinham sido desenvolvidas com limitações por falta de estímulos.

Vejamos a situação que muitas vezes eu coloquei em sala para que eles percebessem a importância de se envolverem com essas atividades:

Considere dois casais, ambos em situação socioeconômica equiparáveis. Supondo que cada casal teve um filho e que as crianças foram diagnosticadas em condições normais de aprendizagem. O casal A, sempre que possível, insere entre os brinquedos dado ao filho jogos de quebra-cabeça, de memória e outros; enquanto o casal B assim não o faz. E então pergunto aos alunos: Qual das crianças mais se desenvolverá mentalmente? Naturalmente eles me respondiam o filho do casal A.

Sendo assim, conduzia-os a perceberem que a dificuldade em aprender matemática está ligada ao desenvolvimento dessas habilidades. Assim como um músculo para se desenvolver precisa de estímulos físicos, o pensamento precisa de estímulos mentais e eles se sentiam desafiados e sensíveis a receber esses estímulos.

> A resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LIMA,1999)

O fruto desse trabalho foi uma linda maratona que chamávamos de Maratona do Raciocínio Lógico, no qual os alunos se colocavam em uma disputa entre grupos e individualmente, através da resolução de problemas de raciocínio lógico-matemático.

A Maratona do Raciocínio Lógico foi um projeto desenvolvido em turmas do e Ensino Fundamental 2. Seu objetivo foi mostrar que o cotidiano em sala de aula precisa de problemas que estimulem as diversas áreas do cérebro desde aquela que é responsável pelo desenvolvimento da escrita, àquela que é responsável pelo desenvolvimento das formas e espaços, mas principalmente pela área do cérebro responsável pelo desenvolvimento da inteligência lógico-matemático. O projeto era realizado ao longo de um semestre e tinha como culminância dois momentos que ocorriam em dois dias: no primeiro dia a resolução de uma bateria de problemas e no segundo dia disputas em grupo e individuais através de atividades e jogos como, por exemplo: xadrez, resta um, quebra-cabeça com 2000 e 3000 peças e etc...

Os problemas, atividades e jogos proposto visam desenvolver algumas habilidades do pensamento: criatividade, estratégia. Através desses estímulos, quebrar as barreiras existentes no processo de transposição didática[2] no processo ensino-aprendizagem da matemática.

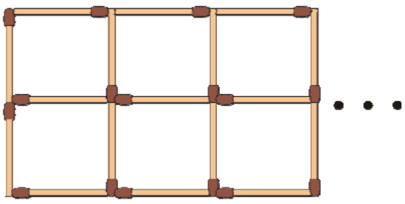
4.1 Resolução de Problemas de Raciocínio Lógico

Vejamos agora alguns problemas de raciocínio lógico, organizados de acordo com as habilidades do pensamento: criatividade, estratégia e habilidade visual, que foram trabalhados na maratona mencionada. Nos problemas vamos expor algumas possíveis soluções, onde algumas dessas soluções forma propostas pelos alunos.

É importante ressaltar que o professor pode estimular em sala de aula aplicação das quatro fases apresentadas por Polya, vista no Capitulo 3, para solucionar os problemas de raciocínio lógico-matemático propostos abaixo.

Problema 4.1 (*Quadrados de palitos*): Isnard é um garoto muito curioso e está construindo uma sequência de quadrados com palitos de fósforos conforme figura abaixo.

Figura 9 - Sequência de quadrados com palitos



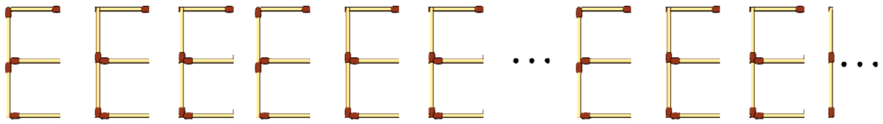
Fonte: elaborada pelo autor

Quantos palitos de fósforos são necessários para Vitor construir 200 quadrados? (*Habilidades do pensamento trabalhadas: Criatividade*)

Resolução: O problema pode ser visto de várias maneiras: em uma delas o aluno observa como se fosse várias letras "E", como na figura abaixo:

[2] Segundo Chevallard (1991) um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.

Figura 10 – Sequência de palitos formando E

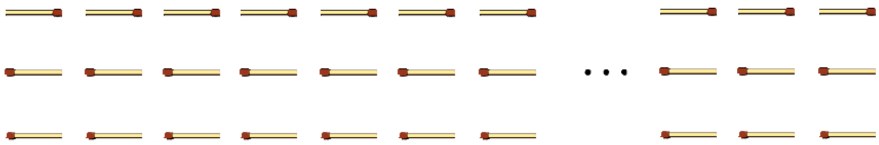


Fonte: elaborada pelo autor

Ele observa que cada letra “E” contém 5 palitos e 2 quadrados quando essas letras se fecham, mas a última letra “E” ficará aberta, para resolver isso ele fecha com dois palitos. Como havia 200 quadrados, ele observou que existem 100 quadrados em cima e 100 em baixo, ou seja, 100 letras “E”. Portanto bastaria multiplicar 100x5 = 500 e acrescentar os dois últimos 500 + 2 = 502. ■

Outra Resolução: Outra solução dada foi contar apenas os palitos na horizontal e depois contar os palitos na vertical. Como havia 200 quadrados ele observou que existem 100 quadrados em cima e 100 em baixo e sendo assim cada fila horizontal possuía 100 palitos.

Figura 11- Palitos na horizontal



Fonte: elaborada pelo autor

Como eram três filas então ele multiplicou por 3, tendo assim 300 palitos na horizontal. Em seguida ele contou 101 filas na vertical.

Figura 12 - Palitos na vertical

Fonte: elaborada pelo autor

E como eram duas filas na vertical, ele multiplicou por 2, tendo assim 202 palitos. Juntando os palitos na vertical com os da horizontal 300 + 202 = 502.

Caso os alunos não avancem no problema o professor deve sugerir aos alunos que eles repartam a figura ou que diminuam o problema para um problema menor. Por exemplo, com 20 quadrados no lugar de 200 e assim desenvolvam um plano para obter a resolução. ■

Problema 4.2 (*Sem partir um pão*): Ailton um padeiro Alagoano, está pedalando sua bicicleta pelas ruas de sua bela cidade, cantarolando e levando um cesto de baguetes que acabaram de sair do forno. Rubia (uma de suas melhores clientes) o para e compra metade de seus pães, mais a metade de um pão. Depois Professor Cleverton o para e faz o mesmo compra metade do que ele carrega, mais uma metade. Finalmente, um garotinho, Jhef, faz a mesma coisa: metade dos pães mais a metade de um pão. Ailton está muito feliz, pois conseguiu vender todos os pães e não precisou quebrar nenhum deles ao meio. Você consegue descobrir como isso foi possível, e quantos pães ele tinha antes de começar a vender? (*Habilidades do pensamento trabalhadas: Criatividade e estratégia*)

Resolução: A resposta são 7 pães. Se pensarmos inicialmente em um número par de pães, logo percebe-se que quebraremos os pães. Por exemplo, se pensarmos em 4 pães. Mas, se pensarmos em um número ímpar de pães, então começaremos a ver a possibilidadede de dá certo. Por exemplo, se ele supõe 3 pães, então ele vai tomar a metade de três, mais meio pão, ou seja, dois pães. Logo, nessa primeira operação ele não precisa partir alguns dos pães. Agora, ele pecebe que para continuar dever ter um número maior de pães, até que ele chega a 7 pães e resolve o problema. Sendo essa, solução única. ■

A priore para os alunos parace algo impossível, mas aproveitando a oportunidade, o professor deve sugerir aos alunos a pensarem em números pares e ímpares. Evite motivar a resolução algebrisando, mas levar eles sempre a investigar alguns casos e assim eles irão entrar na descoberta.

Algumas perguntas que o professor pode fazer: essa quantidade pode ser par? Essa quantidade pode ser ímpar? Deixar o aluno pensando, mas não só pensando, incentive-o a colocar no papel.

Problema 4.3 (*Você Está Ligado?*)**:** De mudança para sua nova casa, você descobre três interruptores no andar de baixo. Um deles acende a luz da garagem, e os outros dois não acendem coisa alguma. Se você não consegue ver a luz acendendo de onde está, então como descobrir qual é o interruptor que funciona, indo à garagem apenas uma vez? (*Criatividade e estratégia*)

Figura 13 - Interruptores

Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: Vai até o local onde se encontra os três interruptores e liga o primeiro interruptor, dando um tempo de alguns minutos com ele ligado, para que a luz possa esquentar. Após isso, desliga o primeiro interruptor, ligando o segundo e vai na garagem. Agora vem o "xeque mate": Se a luz estiver acesa, isto significa que a resposta é o segundo interruptor. Mas se não estiver acesa? Então verifica-se a temperatura da luz: se estiver aquecida, significa que é o primeiro interruptor. Foi para isso que deixamos o primeiro interruptor ligado por alguns minutos. Agora, se a lâmpada não estiver aquecida, então conclui-se que a resposta é o terceiro interruptor. ■

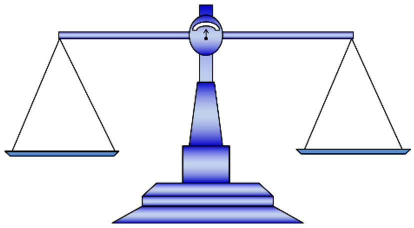
O problema exige que o aluno vá além. Que pense em todas as possibilidades. Que não fique apenas na luz, pois ao ligar o interruptor quais os efeitos físicos podem ocorrer? Não é um problema trivial, mas, que mesmo os que não conseguem resolver, ficam maravilhados ao ver a solução e se sentem motivados em continuar resolvendo problemas. Portanto, se o aluno não avançar no problema, o professor pode pedir para o aluno pensar na temperatura da luz.

Problema 4.4 (*Qual a moeda falsa?*): São dadas quatro moedas aparentemente iguais, das quais três são verdadeiras e por isso têm o mesmo peso; uma é falsa e por isso tem peso diferente. Não se sabe se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as demais. Mostre que é possível determinar a moeda diferente empregando somente duas pesagens em uma balança de pratos.

Observação: Neste tipo de balança podemos comparar os pesos colocados nos dois pratos, ou seja, a balança pode ficar equilibrada ou pender para o lado mais pesado.

(*Habilidades do pensamento trabalhadas: Criatividade)*

Figura 14 - Balança de dois pratos



Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: Inicialmente, coloca-se uma moeda em cada prato da balança. Se equilibrou a balança, então as duas moedas são verdadeiras e a moeda falsa está entre as duas que ficaram de fora. Pegamos então uma das moedas que ficaram fora para comparar com uma das verdadeiras, retirando uma das verdadeiras de um dos pratos e colocando uma das moedas que ficou fora. Se equilibrar significa que a falsa é a que ficou fora e se não equilibrar significa que a falsa é a moeda colocada no lugar da verdadeira. Agora, se de início quando colocamos uma moeda em cada prato não houver o equilibriu, então temos que as duas moedas de fora são verdadeiras e assim basta tomar qualquer uma delas e colocar no lugar de uma das moedas que está no prato. Se equilibrar, a falsa foi a moeda retirada. Caso contrário, a falsa é a moeda que permaneceu. Observe que em qualquer caso usamos apenas duas pesagem. Essa solução é única. ■

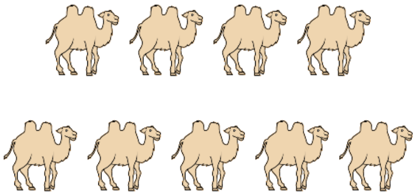
Se o aluno não avançar no problema o professor deve levá-lo a pensar a partir de questionamentos.

> **Professor:** O que acontece se você colocar duas moedas em cada prato?
> **Aluno:** Um prato vai subir e o outro vai descer.
> **Professor:** E assim o que podemos concluir?
> **Aluno:** nada. Pois não sabemos se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada.
> **Professor:** Então qual a outra possibilidade?
> **Aluno:** Colocar uma moeda em cada prato.
> Depois de concebida a ideia do plano, o estudante começa a execução do plano, chegando a 3ª fase.

Caso o professor sinta, que mesmo com os questionamentos o aluno não consegue avançar na solução, então o professor deve reduzir o problema a três moedas, e refazer os questionamentos.

Problema 4.5 (*Como é possível?*): Dois matemáticos estavam em uma caravana, quando um deles chamado *Zé Carlos* propôs um desafio ao companheiro de viagem *Thiago*: tenho 9 camelos, como coloca-los em 8 filas com 3 camelos em cada fila? (Habilidades do pensamento trabalhadas: Visual e criatividade)

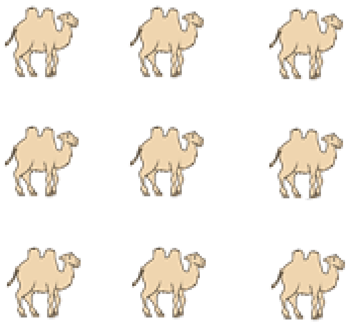
Figura 15 - 9 Camelos



Fonte: Desenhos Animados e Bonitos

Resolução: A figura desejada é o quadrado. Leve em consideração as suas diagonais.

Figura 16 - 8 Filas com 3 camelos em cada fila



■

Fonte: elaborada pelo autor

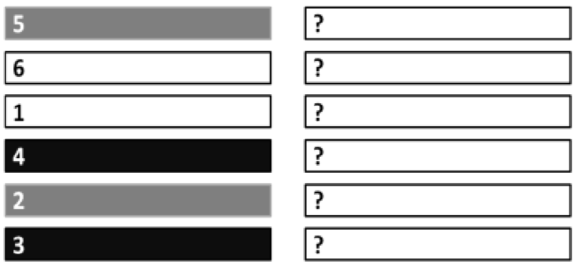
Esse problema mexe com a mente dos alunos, pois para eles parece impossível. Isso porque o problema realmente não é fácil e exige sem dúvida muita criatividade.

Em problemas como esse, é importante criar um problema correlato. Aqui vai uma dica: primeiro faça uma reflexão com relação ao modelo tradicional de fila. Peça para eles pensarem em figuras geométricas simples. Não se aprece! Se for o caso, deixe-o pensar por alguns dias. Foi assim que muitos teoremas foram demonstrados. Lembre-se: O mais importante é fazer o aluno pensar e deixar o aluno pensando. Não duvide da capacidade dos alunos! Eles nos surpreendem! Não espere que todos deêm a resposta, mas aqueles que conseguirem irão gozar do prazer da descoberta.

Problema *4.6* (*Pilhas de números*): Wagner, o contador aposentado e pintor amador de aquarelas, criou outro jogo de lógica numérica para seus netos João e Nicolas. Ele adicionou números a duas caixas brancas, duas cinzas e duas pretas que sobraram do seu material de artes. Ele ordenou os números nas caixas abaixo e depois pediu que os meninos respondessem à seguinte pergunta: “As caixas foram desordenadas e, depois, ordenadas de outra forma. Elas seguem o mesmo padrão anterior, mas em uma ordem diferente. Vocês podem descobrir as novas posições das caixas a partir das três dicas abaixo? ” Nicolas e João precisam de sua ajuda para resolver o problema.

- Apenas uma das caixas não foi mexida.
- As duas caixas de baixo somam 6, enquanto as quatro caixas do meio somam 10.
- As duas caixas pretas estão juntas.

Figura 17 - Duas caixas brancas, duas cinzas e duas pretas

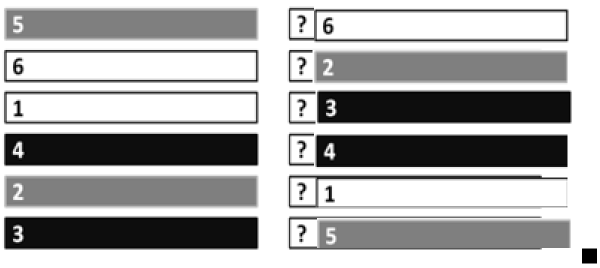


Fonte: elaborada pelo autor

(Habilidade do pensamento trabalhada: Visual)

Resolução:

Figura 18 – Novas posições das caixas



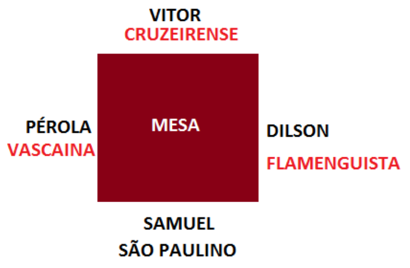
Fonte: elaborada pelo autor

É importante obeservar se os alunos compreenderam bem o problema e orientá-los de como esquematizar suas respostas.

Problema 4.7 (*Uma Mesa De Rivais*): Em torno de uma mesa quadrada, encontram-se quatro torcedores. Samuel, o mais novo entre eles, é são paulino. Há também um flamenguista, um cruzeirense e um vascaíno. Dilson está sentada à direita de Samuel. Vitor à direita do flamenguista. Por sua vez, Pérola, que não é cruzeirense, encontra-se sentada à frente de Dilson. Qual o clube que Dilson e Pérola torcem? **(***Habilidades do pensamento trabalhadas: Visual)*

Resolução:

Figura 19 – Novas posições das caixas

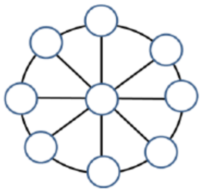
Primeiro: colocamos Samuel na mesa.	**Segundo:** Dilson a direira de samuel.
	
Terceiro: Pérola a frente de Dilson.	**Quarto:** Vitor no lugar que restou e consequentemente Dilson é flamanguista, Vitor é cruzeirense e Pérola é vascaina.
	

Fonte: elaborada pelo autor

Esse é um problema em que o aluno deve se projetar no ambiente em que ocorre o enredo. É importante que o professor observe se o aluno está trabalhando com uma figura. Caso o aluno não esteja, o professor deve pedir que faça a figura.

Problema 4.8 (*Um círculo curioso):* No padrão de círculos abaixo, coloque números de 1 a 9 de modo que a soma dos três círculos ligados verticalmente, horizontalmente ou diagonalmente seja igual a 15. (*Habilidade trabalhada: Criatividade e estratégia*)

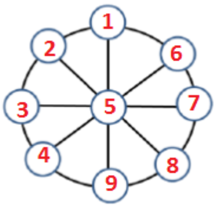
Figura 20 - Círculos



Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: Vejamos que após listar os números de 1 a 9, fica fácil encontrar a relação dos termos equidistantes e o termo central da lista, isto é, a soma dos termos equidistantes com o termos central é sempre igual 15, isto é, 1+ 9 + 5 = 2 + 8 + 5 = 3 + 7 + 5 = 4 + 6 + 5 = 15. Assim, nada mais natural que colocarmos o termo central da lista no cículo central da figura. Vejamos a resolução na figura:

Figura 21 – Soma dos três círculos ligados verticalmente, horizontalmente ou diagonalmente seja igual a 15



■

Fonte: elaborada pelo autor

Nesse problema a criatividade está em trabalhar com o círculo do centro, já que ele ocupa uma posição de destaque. O professor pode incentivar o aluno a listar os números de 1 a 9 em linha e pedir para o aluno abservar o círculo central.

Problema 4.9 (*Qual cor?*): Em uma festa de formatura, três irmãs – Adriana, Isabelle e Jeane – foram com vestidos de cores diferentes. Uma vestia cinza, a outra vestia branco e a terceira, preto. Ao chegar à festa, o recepcionista perguntou quem era cada uma delas.

A de cinza respondeu: “Adriana é a que está de branco”.

A de branco falou: “eu sou Isabelle. ”

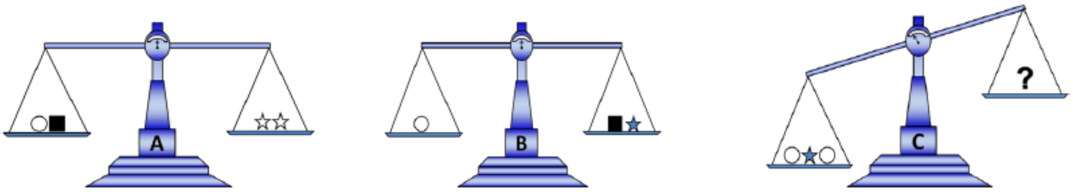
E a de preto disse: ”Jeane é a que está de branco”.
A recepcionista confusa com o que foi dito por cada uma, perguntou a um amigo conhecido das irmãs que estava chegando no exato momento como ela descobriria. Então esse amigo disse que Adriana sempre diz a verdade, que Isabelle às vezes diz a verdade, e que Jeane nunca diz a verdade. Sendo assim qual a cor do vestido de Adriana, Isabelle e Jeane respectivamente? *(Habilidade trabalhada: Estratégia)*

Resolução: Como Adriana fala sempre a verdade, então ela não pode vestir branco, pois veja que a de branco falou: “Eu sou Isabelle. ” Adriana também não está de cinza, pois veja que a de cinza respondeu: “Adriana é a que está de branco”. Concluímos que Adriana está de preto. E a de preto disse: ”Jeane é a que está de branco”. O que é verdade, pois essa é Adriana. Por fim Isabelle está de cinza. ■

Espera-se do aluno que estrategicamente começe a analisar pela hipótese mais consistente, neste caso a Adriana fala sempre a verdade. Caso o aluno não tenha habilidade com esse tipo de problema, o professor deve intervir perguntando ao aluno: Qual a única certeza dada no problema? E assim explicar ao aluno que essa é a hipótese do problema. É importante que o professor sempre esteja inserindo no aluno um vocabulário usual em matemática, como por exemplo: hipótese, tese, restrições e etc,...

Problema 4.10 (*Isac no laboratório de física*): Isac está de volta ao laboratório de física brincando com pesos em forma de esferas, quadrados e estrelas, em três balanças diferentes. Desta vez ele faz um desafio para a seu amigo Claudio. Ele pergunta: “as balanças A e B estão perfeitamente equilibradas, mas quantos quadrados serão necessários para equilibrar a balança C? ” Você consegue ajudar Claudio? (*Habilidade trabalhada: Visual e estratégia*)

Figura 22 - Três balanças diferentes



Fonte: elaborada pelo autor

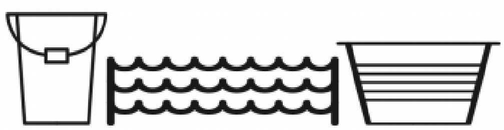
Resolução: Por atribuição de valores, começando pela balança B, poderíamos dizer que a esfera vale 5, o quadrado vale 2 e a estrela vale 3. Logo pela balança A, temos que o quadrado vale 1 e assim indo para a balança C, temos que no prato que tem duas esferas e uma estrela já tem 8 em peso. Portanto, como cada quadrado vale 1 de peso, então para equilibrar, precisamos colocar no outro prato 8 quadrados. ■

Outra Resolução: Pela relação entre as figuras, se começarmos pela balança B, já que uma esfera pesa o mesmo que um quadrado mais uma estrela, transferindo essa informação para a balança A, concluímos que 1 estrela vale 2 quadrados. Retornando a balança B, temos que cada esfera vale 3 quadrados. Portanto, podemos a partir dessas relações ir para a balança C e colocar no prato vazio 8 quadrados. ■

É importante motivar o aluno na ação de transferir informações de uma balança para outra. Caso o aluno não avance o professor pode criar um problema correlato, com apenas duas balanças e dois objetos diferentes.

Problema 4.11 (*Balde ou bacia?):* Dois recipientes, um balde e uma bacia, possuem 3 e 5 litros de volume, respectivamente. Retirando água de um lago, como podemos deixar a bacia com exatamente 4 litros de água usando somente esses dois recipientes?

Figura 23 - Um balde e uma bacia



Fonte: OBMEP 2018

Resolução: Enchemos o balde e despejamos na bacia duas vezes, como o balde comporta 3 litros, dois baldes serão 6 litros e como a bacia comporta 5 litros, ainda restará 1 litro no balde. Agora só faltam 3 litros. Secamos a bacia e colocamos o litro que focou no balde. Em seguida enchemos o balde e colocamos na bacia, ficando assim com 4 litros como queriamos. ■

5. PROBLEMAS PARA O DESENVOLVIMENTO DE COMPETÊNCIAS E HABILIDADES

Neste capítulo vamos tratar os conceitos de competência e de habilidade segundo Philippe Perrenoud (PERRENOUD, 1999) e identificar esses conceitos em alguns documentos oficiais. Vale ressaltar que o conceito de habilidade tratado neste capítulo é diferente das habilidades do pensamento apresentadas no Capítulo 2.

Além disso, iremos disponibilizar alguns problemas resolvidos fazendo uma análise da competência e habilidade exigida em cada problema. Para isso, tomaremos como principal referência Avaliação Nacional do Rendimento Escolar – Anresc (Prova Brasil), que é aplicada a cada 2 anos nas escolas da rede pública de ensino com mais de 20 estudantes matriculados por série, e avalia as habilidades e competências que aqui vamos conceituar. A Prova Brasil evidencia os resultados de cada unidade escolar da rede pública de ensino, com os objetivos de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino, redução de desigualdades e democratização da gestão do ensino público buscando o desenvolvimento de uma cultura avaliativa que estimule o controle social sobre os processos e resultados do ensino.

Porém, além das competências e habilidades, vamos enfatizar a importância de que cada habilidade seja desenvolvida tendo como tripé as três componentes que organizam o ensino e aprendizagem da Matemática: conceituação, manipulação e aplicação.

> Uma educação por competências começa a ser construída quando a escola assume que conteúdos disciplinares devem fazer, antes de tudo, sentido para os alunos. Isto consiste em criar situações-problema que tenham relações diretas com as práticas sociais, vivenciadas pelo aluno. (ZABALZA, 2002)

Os resultados da Prova Brasil não devem ser usados para comparar escolas que recebem alunos muito diferentes. Esse tipo de comparação não é um uso adequado dos resultados.

5.1 Documentos Oficiais que Amparam o Ensino por Competência e Habilidade

As Diretrizes Curriculares Nacionais e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999), enfatizam a necessidade de centrar o ensino e aprendizagem no desenvolvimento de competências e habilidades por parte do aluno, em lugar de centrá-lo no conteúdo conceitual apenas.

Seguem alguns fragmentos dos (PCNs, BRASIL, 1999) que comprovam nossos argumentos:

> Os objetivos propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais concretizam as intenções educativas em termos de capacidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos ao longo da escolaridade. A decisão de definir os objetivos educacionais em termos de capacidades é crucial nesta proposta, pois as capacidades, uma vez desenvolvidas, podem se expressar numa variedade de comportamentos. (PCNs, BRASIL, 1999).

De acordo com os PCNs (PCNs, BRASIL, 1999), o papel do professor nesse processo, é crucial, pois a ele cabe apresentar os conteúdos e atividades de aprendizagem de forma que os alunos compreendam a importância teórico e prática do que se aprende, isto é, uma aprendizagem significativa, e assim desenvolvam expectativas positivas em relação à aprendizagem e sintam-se motivados para o trabalho escolar.

> O projeto educacional expresso nos Parâmetros Curriculares Nacionais demanda uma reflexão sobre a seleção de conteúdos, como também exige uma ressignificação, em que a noção de conteúdo escolar se amplia para além de fatos e conceitos, passando a incluir procedimentos, valores, normas e atitudes. Os procedimentos expressam um saber fazer, que envolve tomar decisões e realizar uma série de ações, de forma ordenada e não aleatória, para atingir uma meta. (PCNs, BRASIL, 1999).

Cabe, ainda, referenciar a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9394/96 BRASIL (1996), que em seu artigo 32, inciso I, relata: “o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo”. Seguindo a leitura da Lei o inciso III acrescenta: “o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores”.

5.2 Competências

Segundo o dicionário da língua portuguesa, o termo competência é a “capacidade decorrente de profundo conhecimento que alguém tem sobre um assunto”[3]. Poderíamos então dizer que competência é a capacidade de usar nossas inteligências, nossos pensamentos, memórias e outros recursos mentais para realizar com eficiência uma tarefa desejada. A competência é a operacionalização da inteligência, e a forma concreta e prática de colocá-la em ação. Quando trabalhamos com as diferentes inteligências humanas, podemos ativar diferentes competências.

Para vários autores, muitas definições são dadas ao termo competência, tais como faculdade de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos (saberes, capacidades, informações, etc.) para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações, entre elas resolver problemas.

> Se acreditamos que a formação de competências não é evidente e que depende em parte da escolaridade básica, resta decidir quais ela deveria desenvolver prioritariamente. Ninguém pretende que todo saber deve ser aprendido na escola. Uma boa parte dos saberes humanos é adquirida por outras vias. Por que seria diferente com as competências? Dizer que cabe a escola desenvolver competências não significa confiar-lhe o monopólio disso. (PERRENOUD, 1999)

Para Perrenoud (PERRENOUD, 1999), as competências referem-se ao domínio prático de um tipo de tarefas e de situações, ou seja, capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiando-se em conhecimentos, mas sem se limitar a eles. Trabalhar com competências não é virar as costas aos conteúdos e sim mudar o foco. Ao invés de memorização de conteúdos, é importante que esses conteúdos tenham significado na vida do aluno, assim a memorização dará lugar ao aprender, pois o aluno desenvolve a competência de identificar quais as ferramentas que ele pode usar em situações diferentes.

As competências elementares evocadas não deixam de ter relação com os programas escolares e com os saberes disciplinares, ao contrário, elas exigem noções e conhecimentos matemáticos. Assim os documentos oficiais do Ministério de Educação e Cultura sinalizam algumas dessas competências elementares:

---

[3] Disponível em: <http://www.dicionariodoaurelio.com/Competencia.html>. Acesso em: 10 abril. 2018.

> Dominar leitura/escrita e outras linguagens; Fazer cálculos e resolver problemas; Analisar, sintetizar e interpretar dados, fatos situações; Compreender o seu entorno social e atuar sobre ele; Reconhecer criticamente os meios de comunicação; Localizar, acessar e usar melhor a informação acumulada; Planejar, trabalhar e decidir em grupo (BRASIL, 2005).

Supõem um domínio da língua e das operações; apelam para uma forma de cultura geral que também se adquire na escola. Mesmo quando a escolaridade não é organizada para desenvolver tais competências, ela permite a apropriação de alguns dos conhecimentos necessários.

Percebemos que há uma parte das competências que se desenvolve fora da escola e apela para saberes escolares, portanto, não há contradição entre os programas escolares e as competências.

> Competência é o conjunto de conhecimentos, qualidades, capacidades e aptidões que habilitam para a discussão, a consulta, a decisão de tudo o que concerne a um ofício, supondo conhecimentos teóricos fundamentados, acompanhados das qualidades e da capacidade que permitem executar as decisões sugeridas. (TANGUY, 1997).

Ser competente diz respeito ao saber fazer, ou melhor, aplicar, utilizar determinado recurso. Assim as competências são requeridas na vida cotidiana, no fazer diário, nas práticas associacionistas, que nos levam a um saber fazer, saber agir, saber conviver. Nos documentos oficiais do ENEM, vimos mais uma denominação para o termo competência:

> Modalidades estruturais da inteligência, ou melhor, ações e operações que utilizamos para estabelecer relações com e entre os objetos, situações, fenômenos e pessoas que desejamos conhecer. As habilidades decorrem das competências adquiridas e referem-se ao plano imediato do "saber fazer", através das ações e operações as habilidades aperfeiçoam-se e articulam-se, possibilitando nova organização das competências (BRASIL, 2000, p.8).

Esse saber fazer já nos diz respeito à aplicabilidade e à contextualização dos afazeres, à mobilização de coisas, isto é, um aluno capaz de utilizar seus recursos de forma ativa, sabendo elencar meios para solucionar problemas. É interessante destacar que uma competência leva à utilização de várias habilidades, e as habilidades articulam-se em uma nova competência. Seria então um ciclo, quanto mais competente, mais habilidade estaria utilizando e a cada nova habilidade adquirida, mais uma competência seria elencada. Também temos que as “competências” antecedem as “habilidades”, ou seja, é preciso que o sujeito construa competências para conseguir resolver problemas mais elaborados, com uma maior dependência de conhecimentos previamente construídos.

5.3 Habilidades

No que diz respeito à habilidade, vimos sua definição no dicionário como: qualidade de hábil; capacidade, destreza; agilidade[4]. Poderíamos, então, dizer que a habilidade diz respeito a uma capacidade adquirida, ou seja, saber fazer alguma coisa. As habilidades devem ser desenvolvidas na busca de uma competência.

Sobre o termo habilidades Antunes, (ANTUNES, 2001, p.18) define como: “Filha específica da competência”. Não há como diferenciar de forma precisa os termos competência e habilidade, pois em determinadas situações ou, isoladamente, uma habilidade pode ser uma competência a ser desenvolvida.

De acordo com Brasil (BRASIL, 2005, p. 58), competência é uma habilidade de ordem geral, enquanto a habilidade é uma competência de ordem particular, específica, por exemplo: Uma competência seria a resolução de problemas; enquanto as habilidades seriam saber utilizar recursos para resolver determinados problemas. A competência seria constituída de várias habilidades. Mas uma habilidade não pertence à determinada competência, uma vez que a mesma habilidade pode contribuir para competências diferentes. Resumindo, as habilidades devem ser desenvolvidas na busca de competências.

A matriz de habilidades e competências da Prova Brasil (BRASIL, 2008, p.18) define que, habilidades referem-se ao plano objetivo e prático do saber fazer e decorrem, diretamente, das competências adquiridas que se transformam em habilidades.

Diante deste novo contexto, não podemos olhar mais a educação como meramente repetição. Mas como um processo de inserção e atuação do aluno na sociedade, onde os problemas são os mais diversos e exige dele capacidade de pensar com criatividade, utilizando as competências desenvolvidas na escola.

---

[4] Disponível em: <http://www.dicionariodoaurelio.com/Habilidade.html>. Acesso em: 10 jul. 2013.

5.4 Matriz de Referência que Norteia o Ensino de Matemática no Ensino Fundamental

Segundo o Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE, BRASIL, 2011), a matriz de referência que norteia o ensino de Matemática no Ensino Fundamental está estruturada sobre o foco: Resolução de Problemas. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

Antes de analisar as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas e avaliadas em Matemática no Ensino Fundamental e resolver alguns problemas da Prova Brasil e OBMEP, faz-se conveniente falarmos sobre as três componentes que organizam o ensino e aprendizagem da Matemática: conceituação, manipulação e aplicação.

5.5 Conceituação, Manipulação e Aplicação

O pesquisador e professor Elon Lages Lima (LIMA,1999) conceitua três componentes fundamentais para o ensino e aprendizagem em Matemática: conceituação, manipulação e aplicação. Essas três componentes devem ser pensadas como um tripé que organizam o ensino e aprendizagem de Matemática. Sendo cada uma delas com importância única, e que no conjunto, as três devem ser bem equilibradas, pois não existe alguma com mais importância. Vejamos o que Lima afirma sobre cada uma dessas três componentes.

5.5.1 Conceituação

Conceituação é a componente que trata das definições em sua essência, ou seja, parte da elaboração das definições matemáticas formais até a própria reformulação de ideias sob diferentes formas e termos.

> A conceituação compreende a formulação de definições, o enunciado de proposições, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, bem como a interpretação e a reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos. É importante destacar que a conceituação precisa é indispensável para o êxito das aplicações. (LIMA, 1999)

Compreender bem o conceito para assim dá um significado do que se ensina ou aprende é fundamental, pois assim os próximos componentes ganham clareza e importância.

Um bom exemplo desse componente se dá quanto ao estudo de áreas. Na maioria das vezes os alunos estão calculando áreas, ou seja, fazendo uso de fórmulas e manipulando sem nem ter a real consciência do que de fato estão fazendo, ou seja, mergulham num mecanismo sem significado. O aluno não sabe nem o que é área em sua essência e quando o conceito de área lhes foi apresentado, em pouco tempo, na maioria dos casos quase que imediatamente, já começa a manipular e aplicar. E quando se deparam com uma aplicação mais conceitual, param no problema.

É extremamente importante que o aluno resolva vários problemas conceituais!

5.5.2 Manipulação

De acordo com Lages (LIMA,1999), a manipulação, de caráter essencialmente (mas não exclusivamente) algébrico, está pra o ensino e o aprendizado de Matemática, assim como a prática de exercícios e escalas musicais está para a Música. A habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes.

> A presença da manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral (e até mesmo para muitos professores e alunos), é como se a matemática se resumisse a ela. Isso tem bastante a ver com o fato de que o manuseio eficiente de expressões numéricas e símbolos algébricos impõe a formação de hábitos mentais de atenção, ordem e exatidão, porém não exige criatividade, imaginação ou capacidade de raciocinar abstratamente. (LIMA, 1999, p. 4)

Assim, manipular está associado à atividade de manusear. Mas é importante que o estudante tenha total consciência das ferramentas que está manuseando, pois assim ele terá total capacidade de manipulá-la em qualquer situação que seja acionada essa necessidade.

Um bom exemplo desse componente se dá no estudo de frações. Na maioria das vezes, o estudante segue uma manipulação seguindo um conjunto de regras operatórias, mas sem de fato entender o que está operando. Isso porque o estudante não tem claro o que significa trabalhar com frações, ou seja, qual conceito de frações. Outro exemplo muito bom, e que ocorre de maneira desagradável nas aulas de matemática é o ensino de produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença. O aluno não sabe o significa desses produtos, são obrigados a manipular e não conseguem aplicá-los.

5.5.3 Aplicação

De acordo com Lages (LIMA,1999), a aplicação é o emprego de noções e teorias da Matemática em situações que vão de problemas triviais do dia a dia a questões mais sutis provenientes de outras áreas, quer científicas, quer tecnológicas. Ela é a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário.

> As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. (LIMA,1999)

Portanto, aplicar é nada mais que usufruir de um conjunto de competências e habilidades desenvolvidas e apoiadas nas componentes conceituação e manipulação completando o tripé que organiza o ensino e aprendizagem da Matemática.

5.6 Problemas por Habilidade

As matrizes de Matemática estão estruturadas por anos e séries avaliadas. Para cada um deles são definidos os descritores que indicam uma determinada habilidade que deve ser desenvolvida nessa fase de ensino. Os descritores não contemplam todos os objetivos de ensino, mas apenas aqueles considerados mais relevantes e possíveis de serem mensurados em uma prova para, com isso, obter informações que forneçam uma visão real do ensino. Esses descritores são agrupados por temas que relacionam um conjunto de objetivos educacionais.

Os temas são: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações/Álgebra e Funções e Tratamento da Informação.

A Prova Brasil avalia o ensino e aprendizagem nas escolas públicas segundo o desenvolvimento das habilidades destacadas nos descritores que serão elencados.

Iremos destacar cada tema e suas habilidades, o que se pretende desenvolver, um problema resolvido como exemplo, o papel do professor e uma breve análise crítica ao descritor quando conveniente.

Antes, porém, iremos disponibilizar um quadro para uma visão geral desses descritores/habilidades.

5.6.1 Espaço e Forma

Este tema é fundamental para o aluno desenvolver um tipo especial de pensamento que lhe permitirá compreender, descrever e representar o mundo em que vive. A exploração deste campo do conhecimento permite o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, possibilitando a descoberta de conceitos matemáticos de modo experimental. Este tema também é importante para que os alunos estabeleçam conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Isso pode ser explorado a partir de objetos como obras de arte, artesanato, obras da arquitetura, elementos da natureza, etc.

Vejamos o quadro para uma visão geral das habilidades desenvolvidas neste tema de acordo com (BRASIL, 2008):

Tabela 01 – Descritores Espaço e Forma

Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.	D1
Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com as suas planificações.	D2
Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.	D3
Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.	D4
Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.	D5
Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos.	D6
Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram.	D7
Resolver problema utilizando propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares).	D8
Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.	D9
Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.	D10
Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.	D11

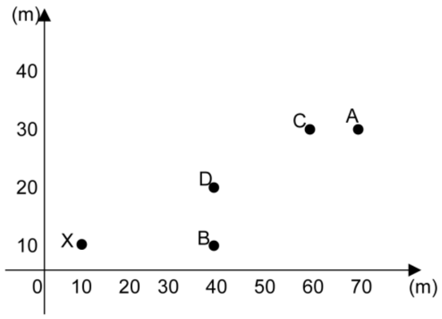
Fonte: Matriz Prova Brasil

Vejamos agora cada descritor, ou seja, cada habilidade que este tema (Espaço e Forma) tem como objetivo desenvolver. E em cada, um problema resolvido como exemplo, o papel do professor e uma breve análise crítica a este descritor quando conveniente.

Descritor 1: Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno localizar-se ou movimentar-se a partir de um ponto referencial em mapas, croquis ou outras representações gráficas, utilizando um comando ou uma combinação de comandos: esquerda, direita, giro, acima, abaixo, na frente, atrás, etc. Como vimos no Capitulo 1, o que estamos desenvolvendo aqui é a Inteligência Espacial.

Problema 5.1 (*O trajeto de João*): A figura abaixo ilustra as localizações de alguns pontos no plano. João sai do ponto X, anda 20m para a direita, 30m para cima, 40m para a direita e 10m para baixo.

Figura 24 - Localizações de alguns pontos no plano

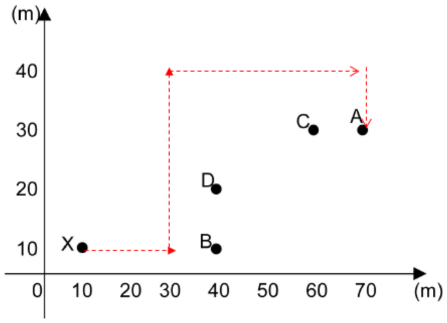


Fonte: Matriz Prova Brasil

Em que ponto ao final do trajeto João estará?

Resolução: A linha pontilhada mostra exatamente o caminho que João deve seguir até o destino.

Figura 25 - Localizações de alguns pontos no plano



■

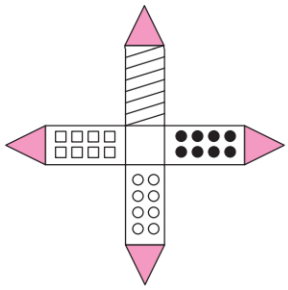
Fonte: elaborada pelo autor

Devem ser incentivadas atividades práticas em sala de aula que permitam explorar as noções de localização e movimentação de objetos no plano. O próprio plano do piso da sala de aula pode servir como plano cartesiano em exercícios nos quais os alunos se movimentam de um ponto a outro. Pode-se também expor mapas e croquis na parede para que os alunos experimentem a localização de pontos e movimentação de objetos. O professor deve também estimular os alunos a construírem mapas e outras representações gráficas, localizando pontos e traçando rotas a partir de comandos de posicionamento.

Descritor 2: Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com as suas planificações. Neste descritor pretende-se o desenvolvimento da habilidade visual, o reconhecimento das propriedades comuns e as diferenças nas planificações de sólidos geométricos quanto a arestas, faces e vértices. O aluno deve ser capaz de planificar um sólido dado e de reconhecer qual é o sólido que pode ser construído a partir de uma planificação dada.

Problema 5.2 (OBMEP2017)**:** Em um dos lados de uma folha de papel grosso, Pedro desenhou a figura abaixo. Depois, recortou-a e montou uma torre em miniatura.

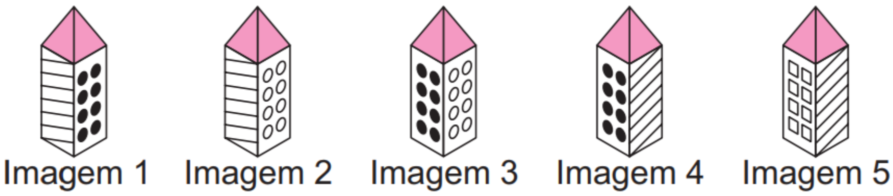
Figura 26 - Pedro desenhou



Fonte: OBMEP 2017

Das cinco imagens abaixo, quais podem representar a torre montada por Pedro?

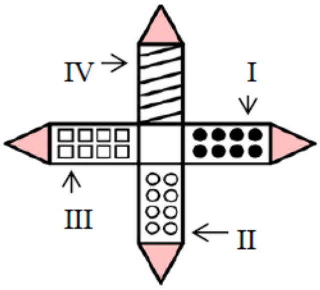
Figura 27 - Cinco imagens



Fonte: OBMEP 2017

Resolução: Se numerarmos com I, II, III e IV as faces da figura na ordem em que elas serão coladas na montagem, como na figura, podemos verificar se, em cada imagem, as faces visíveis estão representadas adequadamente.

Figura 28 - numerarmos com I, II, III e IV as faces da figura



Fonte: OBMEP 2017

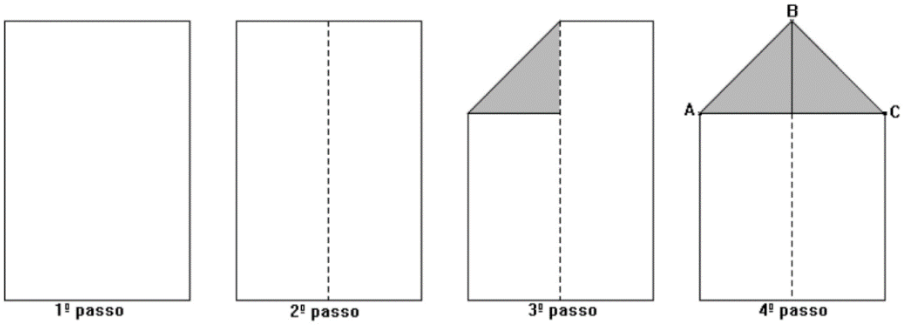
Na Imagem 1, temos coladas corretamente as faces I e IV; na Imagem 2, aparecem coladas as faces II e IV, o que é incorreto, pois elas são opostas; a Imagem 3 nos apresenta corretamente coladas as faces I e II, o que está correto; na Imagem 4, temos coladas as faces I e IV, mas a posição das faces está incorreta (é importante aqui observar a inclinação dos segmentos de reta da face IV); finalmente, na Imagem 5, temos corretamente coladas as faces III e IV. Portanto, somente as imagens 1, 3 e 5 podem representar a torre em miniatura montada por Pedro. ■

Cabe ao professor estimular o reconhecimento das propriedades comuns e as diferenças nas planificações de sólidos geométricos quanto a arestas, faces e vértices. O aluno deve ser capaz de planificar um sólido dado e de reconhecer qual é o sólido que pode ser construído a partir de uma planificação dada.

Descritor 3: Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos. Neste descritor pretende-se desenvolve a habilidade de o aluno reconhecer as propriedades de triângulos e aplicá-las utilizando-se da comparação. Pode-se, por exemplo, propor problemas contextualizados nos quais são conhecidos dois ângulos de um triângulo e é solicitada a medida do terceiro, ou problemas cuja resolução requeira o conhecimento das propriedades dos triângulos equiláteros, isósceles ou retângulos.

Problema 5.3 Para fazer um aviãozinho, Felipe tomou uma folha retangular de papel e observou os passos indicados nas figuras a seguir.

Figura 29 - Aviãozinho



Fonte: Matriz Prova Brasil

Quanto aos lados como podemos classificar o triângulo ABC?

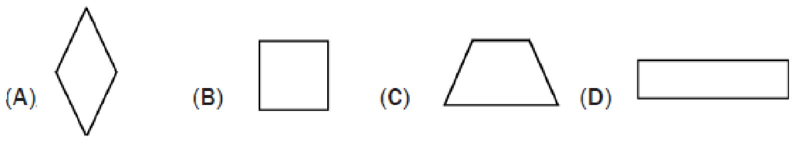
Resolução: O triângulo ABC é isóscele, isso porque a linha tracejada obtida no 2º passo é a mediatriz do lado AC, e portando como sai de B, também é mediana assim *AB = BC.* Esse é um problema conceitual e de aplicação, com pouca manipulação. ■

É importante que o professor proponha atividades dirigidas para serem executadas em grupo nas quais os alunos construam vários tipos de triângulos, façam medidas e discutam suas propriedades. As conclusões devem ser discutidas com todos e as propriedades constatadas devem ser sistematizadas e enfatizadas pelo professor.

Descritor 4: Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno reconhecer, pelas propriedades comuns ou específicas, os quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado.

Problema 5.4: Alguns quadriláteros estão representados nas figuras abaixo. Qual dos quadriláteros possui apenas um par de lados paralelos?

Figura 29 - Quadriláteros



Fonte: Matriz Prova Brasil

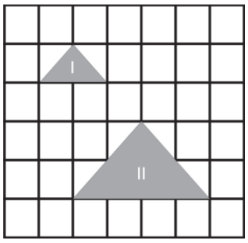
Resolução: O trapézio letra (C). ■ Essa é uma questão puramente conceitual.

Devem ser enfatizados o conceito de paralelismo e a definição de paralelogramo como quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos. Assim, retângulos, quadrados e losangos são paralelogramos. São importantes atividades de construção dos quadriláteros a partir de suas propriedades e manipulação de peças (jogos, quebra-cabeças) com as formas dos quadriláteros.

Descritor 5: Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno reconhecer, a partir da ampliação ou redução de uma figura, quais foram as alterações em seus lados, seu perímetro e sua área. Os itens elaborados para este descritor devem utilizar malhas quadriculadas.

Problema 5.5: Na ilustração abaixo, a figura II foi obtida a partir da figura I.

Figura 30 - Ilustração

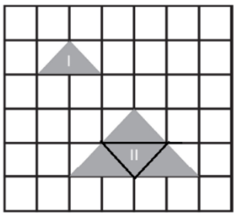


Fonte: Matriz Prova Brasil

O que poderíamos concluir comparando o perímetro e a área da figura II, em relação ao da figura I?

Resolução: Olhando para os lados temos que foram dobrados. Portanto, o perímetro também dobrou. Enquanto a área quadruplicou. Questão conceitual. Tomando como unidade de áreas o quadrado. Na figura I, áreas é igual a 1, enquanto a figura II, tem áreas igual a 4. ■

Figura 31 - Resolução



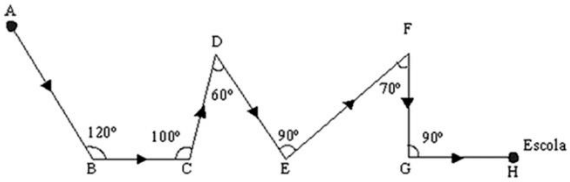
Fonte: Matriz Prova Brasil

O professor deve realizar várias atividades em sala de aula com ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas. Em seguida, os lados devem ser medidos e feitos os cálculos de perímetro e área e estabelecidas as relações entre eles.

Descritor 6: Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno reconhecer ângulos obtidos pela mudança de direção em uma trajetória retilínea ou giro de um segmento. O aluno deve também distinguir ângulos retos de ângulos não retos.

Problema 5.6: Para chegar à escola, Carlos realiza algumas mudanças de direção como mostra a figura a seguir.

Figura 32 - Mudanças de direção



Fonte: Prova Brasil 2011

Em quais vértices há mudanças de direção que formam ângulos retos?

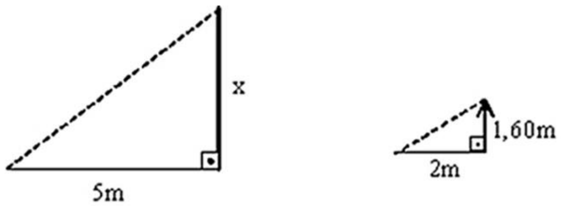
Resolução: O problema é puramente conceitual, pois basta saber o conceito de ângulo reto, ou seja, ângulos cuja medida é igual a 90°. Portanto a resposta são os vértices E e G. ■

Cabe ao professor desenvolver atividades em que o ângulo de 360º é dividido em dois (rasos), e estes em dois, novamente divididos em dois. Os ângulos obtidos, que medem 90º, são chamados de retos. Deve-se também solicitar aos alunos, além da a construção de ângulos retos, rasos, agudos e obtusos, a identificação em edificações e outros ambientes.

Descritor 7: Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno verificar a semelhança de figuras planas, reconhecendo a manutenção ou a alteração nas medidas dos elementos das figuras (lados, ângulos, alturas, etc).

Problema 5.7: No pátio de uma escola, a professora de Matemática pediu que Júlio, que mede 1,60m de altura, se colocasse em pé, próximo de uma estaca vertical. Em seguida, a professora pediu a seus alunos que medissem a sombra de Júlio e a da estaca. Os alunos encontraram as medidas de 2m e 5m, respectivamente, conforme ilustram as figuras abaixo.

Figura 33 - Sombra de Júlio e a da estaca



Fonte: Matriz Prova Brasil

Qual a medida da altura da estaca media?

Resolução: O problema é uma aplicação do conceito de semelhança de triângulos. Portanto, o aluno que tem esse conceito claro em sua mente, e, além disso, tem habilidade com o conceito de proporcionalidade, resolve o problema rapidamente. Observando a relação entre as bases, tem-se que a base maior 2,5 da menor (o dobro mais meio da menor). Portanto, $x = 2 \cdot 1{,}60 + 0{,}80 = 4$. Essa é uma solução que valoriza os conceitos e expressa uma manipulação mental. ■

Devem ser claramente diferenciados os conceitos entre semelhança e congruência de polígonos, especialmente de triângulos. Diversas atividades devem ser propostas, com ampliações ou reduções de figuras. Os alunos devem medir os elementos das figuras obtidas (lados, ângulos, alturas) e compará-los com os correspondentes da figura de origem. Essa prática norteará as conclusões sobre a manutenção das medidas dos ângulos e as razões de semelhança entre as figuras. Além disso, o professor deve sempre conectar os conceitos, neste caso o conceito de proporcionalidade deve estar inteiramente conectado ao conceito de semelhança. O professor assim deve trabalhar problemas em que se perceba rapidamente a proporcionalidade entre os elementos, para encontrar o elemento desconhecido.

Descritor 8: Resolver problemas utilizando propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares). Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno aplicar as diversas propriedades dos polígonos convexos na resolução de problemas. As propriedades apresentadas não são exaustivas, mas ilustrativas.

Problema 5.8: Qual o número de lados do polígono regular que possui a medida do ângulo central igual a 40°?

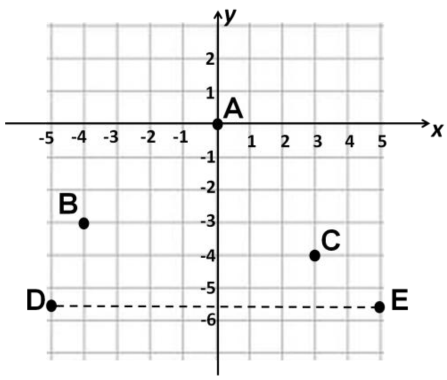
Resolução: É uma aplicação que exige conceituação e manipulação dos conceitos de ângulo central e regularidade de polígonos. Primeiro, o aluno deve saber o conceito de ângulo central de um polígono. E assim, para fechar a figura ele deve dá um giro de 360°. Portanto, como cada lado estará de frente para um ângulo de 40°. Temos 360° dividido por 40°, ou seja, o polígono tem nove lados. ■

Deve ser incentivada atividades, principalmente estudos dirigidos, nas quais os alunos devem medir e somar os ângulos internos, externos e centrais de polígonos, contar o número de diagonais e outras propriedades relevantes nos polígonos convexos.

Descritor 9: Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno localizar pontos em sistema cartesiano ou, a partir de pontos no sistema, identificar suas coordenadas.

Problema 5.9: Um agente secreto precisa escapar de uma de suas investidas no trigésimo andar de um prédio. Ele pretende fazer isso por meio de uma corda pendurada num helicóptero que sobrevoa o prédio a alguns metros de onde ele está. O objetivo do agente é pendurar-se na extremidade inferior da corda, balançar-se como um pêndulo até o topo do prédio vizinho, por onde ele poderá escapar. A figura a seguir ilustra as posições dos elementos envolvidos nessa missão. O ponto A representa a posição do helicóptero, o ponto B a posição inicial do agente, o ponto C o topo do prédio vizinho (por onde ele pretende escapar) e a linha tracejada DE representa o nível do chão. Considerando que o helicóptero não irá se mover e que a corda é inextensível, ao saltar de B, agarrado à extremidade inferior da corda.

Figura 34 - Posições dos elementos envolvidos nessa missão



Fonte: Matriz Prova Brasil

Quais as coordenadas em ordem alfabética dos pontos A, B e C na figura?

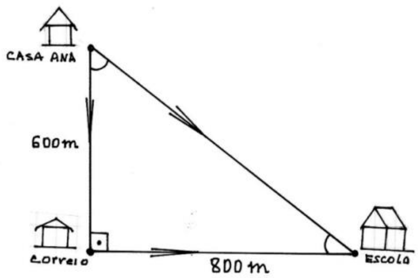
Resolução: O problema é puramente conceitual. Basta que o aluno saiba ordenar os pares de números, isto é, (x,y). Portanto, as coordenadas são A(0,0), B(-4,-3) e C(3,-4). ■

Cabe ao professor enfatizar a ordem e o significado dos valores negativos e positivos das coordenadas cartesianas de um ponto. Sugere-se a montagem de um grande plano cartesiano no quadro ou na parede, no qual os alunos localizariam ou marcariam pontos.

Descritor 10: Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno resolver problemas utilizando as relações métricas nos triângulos retângulos, em especial, o Teorema de Pitágoras.

Problema 5.10: Hélio e Ana partiram da casa dela com destino à escola. Ele foi direto de casa para a escola e ela passou pelo correio e depois seguiu para a escola, como mostra a figura ao lado.

Figura 35 - Destino à escola



Fonte: Matriz Prova Brasil

De acordo com os dados apresentados, a distância percorrida por Ana foi maior que a percorrida por Hélio em quantos metros?

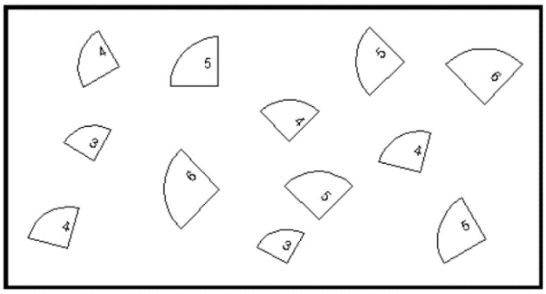
A partir deste descritor por conveniência deixaremos a resolução a cargo do leitor.

Esse descritor aborda um dos assuntos de maior aplicação no cotidiano dos alunos. Existe uma infinidade de problemas que devem ser trazidos para resolução em sala de aula. O professor pode estimular seus alunos a resolver questões bem práticas como: calcular a distância de um ponto no solo até o topo de um poste de iluminação; calcular a medida da diagonal do piso da sala de aula; calcular o tamanho mínimo de uma escada usada para atingir o telhado de um prédio.

Descritor 11: Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno identificar os elementos principais do círculo e da circunferência e aplicar suas propriedades.

Problema 5.11: Na figura abaixo, há um conjunto de setores circulares, cujos ângulos centrais são de 90º. Cada setor está com a medida do seu raio indicada.

Figura 36 - Conjunto de setores circulares



Fonte: Matriz Prova Brasil

Agrupando-se, convenientemente, esses setores, quantos círculos são obtidos?

Cabe ao professor propor atividades nas quais os alunos trabalhem com os conceitos de raio, diâmetro, corda, setor circular, ângulo central e ângulo inscrito e suas relações. O professor deve incentivar seus alunos a fazerem medições para chegar a algumas propriedades da circunferência.

5.6.2 Grandezas e Medidas

Neste tema, são avaliadas habilidades relacionadas à resolução de problemas envolvendo cálculo de perímetro e de área de figuras planas, noções de volume e o uso de relações entre diferentes unidades de medida. São assuntos vividos no cotidiano dos alunos em suas diferentes aplicações. Vejamos o quadro para uma visão geral das habilidades desenvolvidas neste descritor:

Tabela 02 – Descritores Grandezas e Medidas

Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas	D12
Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas	D13
Resolver problema envolvendo noções de volume	D14
Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.	D15

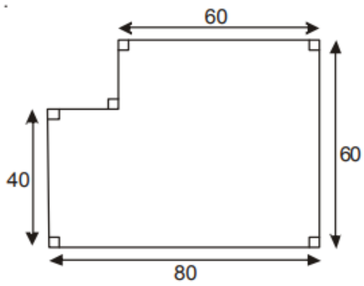
Fonte: Matriz Prova Brasil

Vejamos agora cada descritor, ou seja, cada habilidade que este tema tem como objetivo desenvolver. E em cada, um problema como exemplo, que neste tema não apresentaremos as soluções.

Descritor 12: Resolver problemas envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno calcular o perímetro de uma figura plana cujo contorno é uma única linha poligonal fechada.

Problema 5.12 (OBMEP 2005**):** Daniela quer cercar o terreno representado pela figura.

Figura 37 - O terreno



Fonte: OBMEP 2005

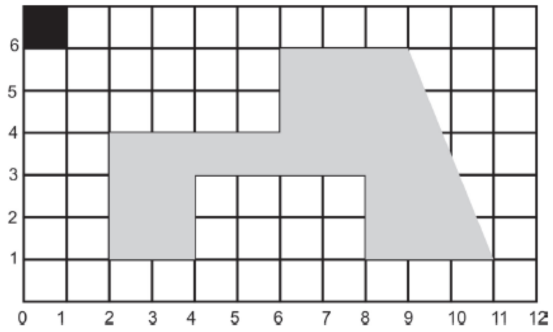
Nessa figura dois lados consecutivos são sempre perpendiculares e as medidas de alguns lados estão indicadas em metros. Quantos metros de cerca Daniela terá que comprar?

O desenvolvimento dessa habilidade é fundamental na construção da competência de medir. O professor deve utilizar vivências do cotidiano do aluno para desenvolvê-la. Atividades práticas, como calcular o perímetro da sala de aula, da quadra de esportes ou de polígonos com outras formas, devem ser executadas.

Descritor 13: Resolver problemas envolvendo o cálculo de área de figuras planas. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno resolver problemas envolvendo o cálculo da área de figuras planas. Trata-se de uma habilidade muito solicitada no dia-a-dia: cálculo da área de um terreno, do piso de uma casa, da parede de um cômodo.

Problema 5.13: Na ilustração ao lado, o quadrado sombreado representa uma unidade de área.

Figura 38 - Quadrado sombreado



Fonte: Matriz Prova Brasil

Qual a área da figura desenhada?

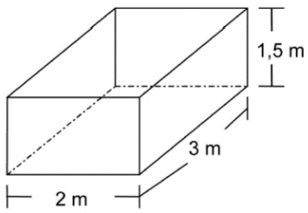
Cabe ao professor valer-se de exemplos concretos como o piso e as paredes da sala de aula para fixar o cálculo de área de retângulos e mostrar que a área de um triângulo é obtida como metade da área de um retângulo (dividindo este por uma de suas diagonais). Outros polígonos podem ser desmembrados em retângulos e triângulos para o cálculo de sua área. Para o cálculo de áreas de setores circulares, esses devem ser apresentados como frações do círculo.

O descritor descreve como objetivo desenvolver a habilidade de o aluno resolver problemas envolvendo o cálculo da área de figuras planas, ou seja, enfatiza a aplicação, mas ele não enfatiza a importância da conceituação e não existe um descritor com esse objetivo. É extremamente importante que antes de calcular o estudante saiba bem o conceito de área. E o conceito de área sem dúvida merece destaque.

Descritor 14: Resolver problemas envolvendo noções de volume. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno calcular o volume ou a capacidade de sólidos geométricos simples (paralelepípedos e cilindros, principalmente).

Problema 5.14: Uma caixa d’água, com a forma de um paralelepípedo, mede 2 m de comprimento por 3 m de largura e 1,5 m de altura. A figura abaixo ilustra essa caixa.

Figura 39 - Caixa d’água



Fonte: Matriz Prova Brasil

Qual o volume da caixa d’água, em m^3?

Cabe ao professor mostrar que para sólidos, tais como paralelepípedos reto-retângulos e cilindros, o cálculo do volume sempre é obtido pelo produto da área da base pela altura. A partir daí, deduzir as fórmulas das áreas. Como aprofundamento, fazer o mesmo com prismas de bases triangulares ou hexagonais.

O descritor descreve como objetivo desenvolver a habilidade de o aluno calcular o volume ou a capacidade de sólidos geométricos simples, ou seja, enfatiza a aplicação, mas ele não enfatiza a importância da conceituação e não existe um descritor com esse objetivo. É extremamente importante que antes de calcular o estudante saiba bem o conceito de volume. E o conceito de volume, assim como o de área, sem dúvida merece destaque.

Descritor 15: Resolver problema utilizando relações entre diferentes unidades de medida. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno resolver problemas com transformações de unidades de comprimento (m, cm, mm e km), área (m^2, km^2 e ha), volume e capacidade (m^3, cm^3, mm^3, l e ml).

Problema 5.15: Diana mediu com uma régua o comprimento de um lápis e encontrou 17,5 cm. Se medida em mm qual medida teríamos?

É importante que os alunos entendam por que nas transformações para múltiplos, há uma multiplicação e, para submúltiplos, há divisão. Isso pode ser feito com a manipulação de fichas, representando as unidades básicas de medidas (quantas fichas de 1cm cabem em uma de 1m?). Posteriormente, é interessante que o aluno use as “escadinhas” com as unidades para facilitar a contagem de quantos “degraus” serão galgados para cima (múltiplos) ou para baixo (submúltiplos) e efetuar com segurança as operações de multiplicação ou divisão por 10 (ou suas potências).

5.6.3 Números e Operações / Álgebra e Funções

O tratamento com números e suas operações é indispensável no dia a dia dos alunos. Os números, presentes em diversos campos da sociedade, além de utilizados em cálculos e na representação de medidas, também se prestam para a localização, ordenação e identificação de objetos, pessoas e eventos. Os descritores deste tema enfocam os números com suas operações, noções de álgebra e funções. Vejamos o quadro para uma visão geral das habilidades desenvolvidas neste descritor de acordo com (BRASIL, 2008):

Tabela 03 – Descritores Números e Operações

Identificar a localização de números inteiros na reta numérica	D16
Identificar a localização de números racionais na reta numérica	D17
Efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (adição, sub-tração, multiplicação, divisão, potenciação)	D18
Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)	D19
Resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)	D20
Reconhecer as diferentes representações de um número racional	D21
Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados	D22
Identificar frações equivalentes	D23
Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de “ordens” como décimos, centésimos e milésimos	D24
Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)	D25
Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)	D26
Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais	D27
Resolver problema que envolva porcentagem	D28
Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas	D29
Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica	D30
Resolver problema que envolva equação do 2.º grau	D31
Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões)	D32
Identificar uma equação ou inequação do 1.º grau que expressa um pro-blema	D33

Identificar um sistema de equações do 1.º grau que expressa um problema	D34
Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1.º grau	D35

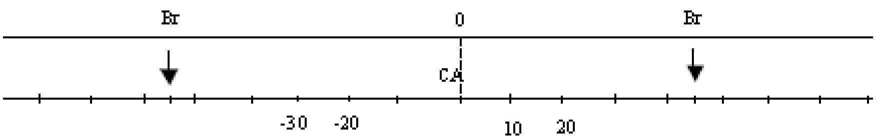
Fonte: Matriz Prova Brasil

Vejamos agora cada descritor, ou seja, cada habilidade que este tema tem como objetivo desenvolver. E em cada, um problema como exemplo, que neste tema não apresentaremos as soluções.

Descritor 16: Identificar a localização de números inteiros na reta numérica**.** Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno localizar números positivos, negativos e o zero na reta representativa dos números inteiros. Para isso, o aluno deve dominar a comparação entre inteiros, ou seja, colocá-los em ordem crescente ou decrescente.

Problema 5.16: Imagine que o alojamento das equipes de vôlei masculino e feminino, nas Olimpíadas, esteja em uma mesma avenida. Como pessoas do mesmo sexo não podem ficar juntas, elas foram separadas à esquerda e à direita do Centro de Apoio (CA), que está localizado no meio da avenida, e que está representado pelo zero, conforme a figura abaixo. Os meninos ficam à esquerda e a localização deles é representada pelo sinal – e as meninas ficam à direita, com localização representada pelo sinal +.

Figura 40 - Alojamento das equipes



Fonte: Matriz Prova Brasil

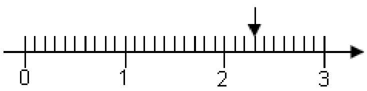
Qual é a localização das equipes do Brasil de vôlei masculino e feminino, respectivamente, na avenida olímpica?

Cabe ao professor propor após o entendimento por parte dos alunos do significado de número negativo, recorrendo-se a situações práticas (estar devendo figurinhas, temperaturas abaixo de zero, subsolos em edifícios etc), é importante a construção física de retas numéricas em tiras de papel. As atividades práticas de localização de pontos nas retas construídas ajudarão muito no desenvolvimento da habilidade.

Descritor 17: Identificar a localização de números racionais na reta numérica. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno localizar números racionais na reta representativa do conjunto Q, reconhecendo que entre dois números racionais existem infinitos outros racionais.

Problema 5.17: As balanças podem ser utilizadas para medir a massa dos alimentos nos supermercados. A reta numérica na figura seguinte representa os valores, em quilograma, de uma balança.

Figura 41 - Reta numérica



Fonte: Matriz Prova Brasil

A partir da figura, qual a massa que a seta indica, em quilogramas?

Com a construção da reta numerada e a solicitação, por parte do professor, para que os alunos localizem, sucessivamente, números racionais entre dois racionais dados, estes alunos devem concluir que, entre dois racionais, há infinitos outros números racionais. As atividades práticas de localização de pontos nas retas construídas ajudarão muito no desenvolvimento da habilidade.

Descritor 18: Efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno efetuar as cinco operações com números inteiros.

Problema 5.18: A professora solicitou a um aluno que resolvesse a seguinte expressão:

$$N = (-3)^2 - 3^2$$

Qual o valor de *N*?

Cabe ao professor propor muitas atividades com números inteiros, inicialmente apenas com uma operação e posteriormente mesclando as cinco operações básicas.

Descritor 19: Resolver problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). Neste descritor pretende-se desenvolver: A habilidade de o aluno resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números naturais.

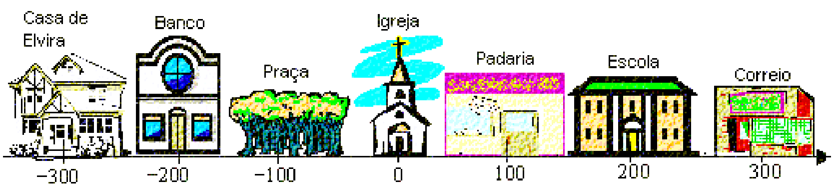
Problema 5.19: (OBMEP2005) Marina, ao comprar uma blusa de R$ 17,00, enganou-se e deu ao vendedor uma nota de R$ 10,00 e outra de R$ 50,00. O vendedor, distraído, deu o troco como se Marina lhe tivesse dado duas notas de R$ 10,00. Qual foi o prejuízo de Marina?

O professor deve trazer para a sala de aula diversas situações-problema em que possam ser explorados os diferentes significados das operações. É interessante incentivar os alunos a buscarem problemas práticos para a resolução em sala de aula.

Descritor 20: Resolver problema com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). Neste descritor pretende-se desenvolver: A habilidade de o aluno resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números inteiros.

Problema 5.20: O esquema a seguir representa a rua onde Elvira mora.

Figura 41 - Rua onde Elvira mora



Fonte: Matriz Prova Brasil

A) Certo dia Elvira saiu de casa e fez o seguinte trajeto: foi até o correio mandar uma carta para sua amiga e em seguida foi assistir à missa. Comeu um lanche na padaria após à missa, foi ao banco pagar uma conta e foi buscar sua filha na escola, pararam na praça para tomar um sorvete foram para casa. Quantos metros Elvira andou nesse percurso?

B) Saindo da casa de Elvira, faça o seguinte trajeto sobre a reta numérica: 400 m para a direita, 300 m para a esquerda, 500 m para a direita, 300 m para a esquerda e 100 m para a esquerda. Em que local você parou da reta?

Trazer para a sala de aula atividades lúdicas com números inteiros. Explorar com jogos a ideia da reta numerada do conjunto dos inteiros, com a contagem de casas entre dois inteiros. Os jogos nos quais os participantes "ficam devendo" também ajudam na compreensão do conceito de número negativo.

Descritor 21: Reconhecer diferentes representações de um número racional. Neste descritor pretende-se desenvolver: A habilidade de o aluno identificar números racionais nas suas diversas representações: fracionária, decimal ou percentual.

Problema 5.21: No Brasil, ¾ da população vive na zona urbana. Quais as outras formas que podemos representar esta fração?

O professor deve propor atividades nas quais, a partir de números racionais na forma fracionária, efetua-se a divisão do numerador pelo denominador, obtendo-se o correspondente decimal. Este decimal, por sua vez, quando multiplicado por 100, representa a forma percentual do número racional.

O descritor não destaca a importância de dá uma interpretação geométrica aos números racionais.

Descritor 22: Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados. Neste descritor pretende-se desenvolver**:** A habilidade de o aluno reconhecer frações em diversas representações como, por exemplo, partes de um inteiro, relação entre conjuntos, razão entre medidas etc.

Problema 5.22: Dos 11 jogadores de um time de futebol, apenas 5 têm menos de 25 anos de idade. Qual a fração de jogadores desse time, com menos de 25 anos de idade?

Diversas atividades nas quais, inicialmente, os alunos devem representar frações utilizando materiais concretos (recortando em cartolina, isopor etc.) e, posteriormente, escrever as frações correspondentes às situações-problema propostas.

O descritor não destaca a importância de conceituar bem frações, mostrando ao aluno que existe uma relação inseparável, entre o todo e suas partes, destacando a parte não pedida e sempre dando uma interpretação geométrica a essa relação. Assim, o estudante terá uma leitura mais clara e inteligível de frações e uma capacidade maior de resolver problemas.

Descritor 23: Identificar frações equivalentes. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno reconhecer que uma fração pode também ser representada por um conjunto infinito de outras frações equivalentes a ela.

Problema 5.23: Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou 6/8 do caminho; Pedro andou 9/12; Ana, 3/8 e Maria, 4/6. Quais os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho?

Inúmeras atividades podem ser realizadas em sala de aula para desenvolver a habilidade. Novamente, é importante partir de materiais concretos verificando-se as equivalências entre fichas, peças de cartolina, etc. Em seguida, deve ser exercitada a representação de frações equivalentes, por meio da simplificação de numeradores e denominadores.

O descritor não enfatiza a importância de equivalência para operações entre frações, ou seja, quando o aluno desenvolve a habilidade de obter frações equivalentes ele também introduz a capacidade de soma e subtrair frações. E assim resolver problemas, já que este é o principal objetivo.

Descritor 24: Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de “ordens” como décimos, centésimos e milésimos. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno decompor um número decimal reconhecendo suas ordens pelo princípio do sistema de numeração decimal.

Problema 5.24: Como podemos decompor o número decimal 2,401?

Inúmeras atividades podem ser realizadas em sala de aula para bem desenvolver a habilidade.

O descritor não dá exemplo de atividades que podem ser realizadas pelo professor em sala de aula.

Descritor 25: Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno efetuar cálculos de expressões com diferentes representações dos números racionais e envolvendo as operações básicas do conjunto dos racionais.

Problema 5.25: A professora de matemática propôs como exercício a expressão

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right).$$

Os alunos que resolveram corretamente a expressão encontraram que resultado?

Este é um dos assuntos de maior dificuldade de assimilação pelos alunos. Para que os alunos operem adequadamente com frações e com números decimais, é fundamental que tenham compreendido bem o significado dos números racionais. Deve-se dedicar muito tempo para as atividades com operações entre racionais, na forma de frações, decimais ou mesclando-se as duas formas.

Descritor 26: Resolver problemas com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números racionais.

Problema 5.26: Uma horta comunitária será criada em uma área de 5100m^2. Para o cultivo de hortaliças, serão destinados 2/3 desta área. Quantos metros quadrados serão utilizados neste cultivo?

Muitas atividades com o exercício simples de cálculo de frações de um número natural e a resolução de problemas envolvendo as quatro operações básicas com racionais. As situações-problema devem ser provocadas em sala de aula abordando o contexto do aluno.

O descritor não destaca a importância de explorar o problema o máximo possível. Temos que no problema pode ser a fração corresponde a área que não será explorada para o plantio de hortaliças e o quanto vale essa fração em área. Quando se trabalha com fração é importante explorar toda a relação entre as partes e o todo. Assim, o estudante vai desenvolvendo uma visão macro do problema, o que o ajudará a resolver outros problemas mais elaborados. Trabalhar bem os problemas mais conceituais é importante para que o estudante desenvolva habilidades e seja capaz de resolver problemas mais elaborados.

Descritor 27: Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno resolver expressões com radicais não exatos, resolvendo os radicais com aproximações, como no caso dos números irracionais.

Problema 5.27: Foi proposta para um aluno a seguinte expressão: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Estime um resultado aproximado da expressão.

Após o domínio pelos alunos da extração de raízes quadradas de quadrados perfeitos, o professor deve incentivar os alunos a estimar os valores de radicais simples como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$. Uma grande quantidade de exercícios com expressões envolvendo esses radicais deve ser proposta e comentada.

Por que o aluno deve saber aproximação de raízes? Qual o conceito de raiz? O descritor só destaca a manipulação. É importante que o aluno saiba conceituar, manipular e aplicar. Qual o significado de raiz quadrada? A interdisciplinaridade entre as áreas da Matemática é fundamental, pois assim podemos dar mais significado o que se propõe. Neste descritor poderia enfatizar a relação da raiz quadrada com o lado do quadrado, ou seja, uma interpretação geométrica para um problema algébrico.

Descritor 28: Resolver problemas que envolva porcentagem. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno resolver problemas contextualiza-dos (descontos ou reajustes em compras, taxas, porcentagem de uma amostra em uma população etc.) que envolvam porcentagens.

Problema 5.28: Em uma cidade em que as passagens de ônibus custam R$ 1,20, saiu em um jornal a seguinte manchete:

"**NOVO PREFEITO REAJUSTA O PREÇO DAS PASSAGENS DE ÔNIBUS EM 25% NO PRÓXIMO MÊ**S"

Qual será o novo valor das passagens?

Este assunto deve ser exaustivamente trabalhado em sala de aula. São inúmeros os problemas oriundos do contexto do aluno que podem ser explorados em sala de aula: porcentagem de alunos, porcentagem de questões de prova, porcentagem de reajuste salarial, porcentagem de aprovação de determinado candidato, etc.

O descritor vai direto nas aplicações. Assim, não fala sobre a conceituação e manipulação. A maioria dos estudantes tem dificuldade com problemas mais elaborados ou até mesmo com problemas simples, devido à falta de clareza na conceituação de porcentagem. É fundamental que o aluno antes de qualquer coisa entenda o significado de porcentagem a partir de uma referência, convenientemente o 100%. E assim, dê significado a outras porcentagens como: 50%, 25%, 12,5%, 10% e 5%, e tomando essas como referências chegar a qualquer outra a partir das combinações. Também é importante que o aluno seja capaz representar porcentagem em fração e decimal.

Descritor 29: Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno resolver problemas com grandezas direta ou inversamente proporcionais. Em geral, são usadas regras de três simples na resolução dos problemas.

Problema 5.29: Trabalhando 10 horas por dia, um pedreiro constrói uma casa em 120 dias. Em quantos dias ele construirá a mesma casa, se trabalhar 8 horas por dia?

A montagem da regra de três simples é rapidamente assimilada pelos alunos. A ênfase deve ser dada no reconhecimento de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Diversos exemplos do cotidiano dos alunos devem ser explorados para verificar se as duas grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

É importante que o aluno tenha conhecimento do método de redução a unidade. E, além disso, enfatiza que quando comparamos duas grandezas, outra, ou outras grandezas são fixadas, ou seja, mantidas constantes. Exemplo: Na relação velocidade e tempo, a distância deve ser fixada. Na relação base e altura de um retângulo, a área deve ser fixada.

Descritor 30: Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. Neste descritor pretende-se desenvolver: Dada uma expressão algébrica, envolvendo as várias operações, avalia-se a habilidade de o aluno substituir as variáveis da expressão por números inteiros e calcular seu valor numérico.

Problema 5.30: Qual o valor da expressão $x^2 - 3x + 10$, para, $x = -2$?

Atividades frequentes com números inteiros, explorando as cinco operações. O aluno deve ser instigado a compreender os significados das operações em vez de memorizar regras. Deve ser também enfatizado o cuidado na substituição das variáveis por números inteiros, principalmente negativos.

Qual o significado tem para o aluno calcular o valor numérico de uma expressão algébrica? Da maneira com que o descritor é colocado, a única intensão é a de desenvolver a capacidade de manipular. Mas, como bem sabemos esse componente quando se desenvolve isoladamente, não se tem uma aprendizagem eficiente. O professor pode desenvolver essa habilidade a partir da construção algébrica de áreas, perímetros, volumes e etc...

Descritor 31: Resolver problemas que envolva equação do 2.º grau. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno equacionar os dados de um problema, resolver a equação do 2º grau obtida e, quando for o caso, criticar as raízes obtidas, chegando ao resultado do problema.

Problema 5.31: Uma galeria vai organizar um concurso de pintura e faz as seguintes exigências:

1º) A área de cada quadro deve ser 600 cm²;

2º) Os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.

Figura 42 - Quadro

Fonte: Matriz Prova Brasil

Qual deve ser a altura dos quadros?

As atividades em sala de aula para facilitar essa habilidade devem iniciar-se com representações simples de sentenças matemáticas que expressam uma situação do contexto e, gradativamente, evoluir para a construção de equações do 2º grau.

O descritor não fala em completar quadrados. Sabemos, porém, que a resolução de equações do 2º grau ganha um significado expressivo e uma dinâmica a parir do momento que o aluno consegue interpretar geometricamente o que foi proposto. Primeiro, o aluno pode resolver problemas com equações do tipo $ax^2 = c$ e em seguida reduzir qualquer uma equação a outra desse tipo.

Descritor 32: Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões). Este descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno reconhecer a regularidade ocorrida em uma sequência e representá-la por meio de uma expressão algébrica.

Problema 5.32: As variáveis n e p assumem valores conforme mostra a figura abaixo.

Figura 43 - Valores

n	5	6	7	8	9	10
p	8	10	12	14	16	18

Fonte: Prova Brasil 2011

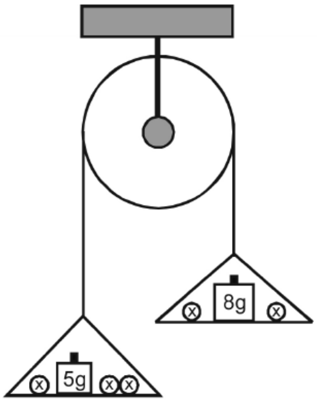
Qual a expressão que relaciona p e n?

Essa habilidade, que requer essencialmente raciocínio, pode ser desenvolvida com atividades, inicialmente simples, nas quais se trabalha com o dobro de um número, o triplo, o consecutivo, até chegar a relações mais complexas. O desenvolvimento do raciocínio para itens desse tipo requer a resolução de um grande número de exemplos.

Descritor 33: Identificar uma equação ou inequação do 1.º grau que expressa um problema. Neste descritor pretende-se desenvolver: A habilidade de o aluno exprimir, com uma equação ou inequação do 1º grau, situações apresentadas em problemas contextualizados.

Problema 5.33: A figura abaixo mostra uma roldana, na qual em cada um dos pratos há um peso de valor conhecido e esferas de peso x.

Figura 44 - Roldana



Fonte: Matriz Prova Brasil

Qual a expressão matemática que relaciona os pesos nos pratos da roldana?

As atividades propostas devem se pautar por situações semelhantes à proposta neste item, mostrando-se dois pratos de uma balança e sua relação como sentença matemática de igualdade (pratos em equilíbrio) ou desigualdade (um prato mais pesado que outro). Inicia-se com expressões simples (x, x+1, 2x), aumentando-se, gradativamente, a complexidade.

Descritor 34: Identificar um sistema de equações do 1.º grau que expressa um problema. Neste descritor pretende-se desenvolver: A habilidade de o aluno, dado um problema, identificar e expressar equações do 1º grau, construindo um sistema de equações.

Problema 5.34: Na 7ª série, há 44 alunos entre meninos e meninas. A diferença entre o número de meninos e o de meninas é 10. Qual é o sistema de equações do 1º grau que melhor representa essa situação?

O que ocorre mais usualmente em sala de aula é o incentivo na resolução de sistemas do 1º grau, ou seja, sua operacionalização. O professor deve encorajar seus alunos a construir as equações a partir de problemas propostos. Sugerimos a realização de atividades em grupo nas quais um aluno propõe uma situação-problema e outro responde com o respectivo sistema de equações.

Descritor 35: Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau. Neste descritor pretende-se desenvolver: A habilidade de o aluno reconhecer um gráfico cartesiano que representa um sistema do primeiro grau ou o sistema que corresponde ao gráfico dado.

Problema 5.35: Um sistema de equações do 1º grau foi dado por

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Qual é o gráfico que representa o sistema?

O professor deve mostrar que a solução de um sistema do primeiro grau pode ser expressa por um par ordenado e esse par representa um ponto no sistema cartesiano. O ponto corresponde à interseção de duas retas que são as representações gráficas das equações do sistema proposto.

5.6.4 Tratamento da Informação

O tratamento da informação é introduzido por meio de atividades ligadas diretamente à vida do aluno. A organização de uma lista ou tabela e a construção de gráficos, com informações sobre um assunto, estimulam os alunos a observar e estabelecer comparações sobre o assunto tratado. Favorecem, também, a articulação entre conceitos e fatos e ajudam no desenvolvimento de sua capacidade de estimar, formular opiniões e tomar decisão. Vejamos o quadro para uma visão geral das habilidades desenvolvidas neste descritor de acordo com (BRASIL, 2008):

Tabela 4 - Descritores Tratamento da Informação

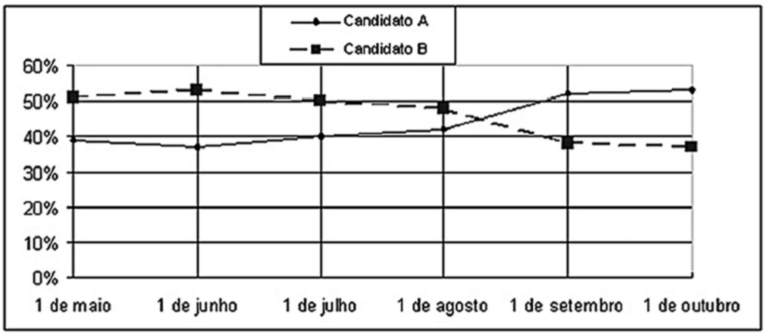
Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos	D36
Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa	D37

Vejamos agora cada descritor, ou seja, cada habilidade que este tema tem como objetivo desenvolver. E em cada, um problema como exemplo, que neste tema não apresentaremos as soluções.

Descritor 36: Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno analisar tabelas ou gráficos, extrair informações neles contidas e, a partir destas, resolver problemas.

Problema 5.36: O gráfico abaixo mostra a evolução da preferência dos eleitores pelos candidatos A e B.

Gráfico 1 - evolução da preferência dos eleitores



Fonte: Matriz Prova Brasil

Em que mês o candidato A alcançou, na preferência dos eleitores, o candidato B?

Esse é um assunto de grande relevância para o entendimento dos fatos nos dias de hoje. É fundamental que o professor trabalhe com gráficos e tabelas em sala de aula. Há exemplos em profusão na mídia e os alunos devem ser fortemente motivados a pesquisar e discutir em sala de aula gráficos e tabelas obtidos em jornais, revistas, televisão e Internet. Esse tipo de atividade é riquíssimo para desenvolver a habilidade pretendida e para bem situar o aluno nos acontecimentos e problemas da atualidade.

Descritor 37: Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno relacionar informações contidas em gráficos a uma tabela ou, dado um gráfico, reconhecer a tabela de dados que corresponde a ele.

Problema 6.37: A tabela a seguir apresenta o consumo de água, em m³, em uma escola durante cinco meses.

Tabela 5 - Consumo de água

Período (2006)	Consumo (m³)
agosto	1200
setembro	975
outubro	1100
novembro	850
dezembro	725

Fonte: Matriz Prova Brasil

Represente os dados em um gráfico de barra.

Como sugerido para o descritor anterior, uma enorme gama de exemplos pode ser trabalhada em sala de aula. Após a interpretação das informações apresentadas em tabelas ou gráficos, propõe-se a representação dessas informações em outra forma de visualização: de tabela para gráfico ou vice-versa.

6. PROBLEMAS

Quantas vezes falamos ou já ouvimos alguém falar: “esses meninos não sabem pensar!” ou “esses alunos de hoje não querem pensar!” ou ainda “esses alunos de hoje tem preguiça de pensar”? Realmente, essas frases têm um grande fundo de verdade, mas não podemos negar que nossos alunos quase não têm sido provocados, desde a idade infantil. Precisamos parar para pensar também: Quais são os estímulos que nossos alunos recebem desde a educação infantil para que o pensamento esteja em exercício?

Se você já foi para uma academia, entenderá claramente o que estou falando, mas se não, faça essa experiência. Desta forma verá que seus músculos se sentem desestimulados a realização das tarefas impostas. E então pergunto: seus músculos são preguiçosos ou estão preguiçosos? Como exigir dos músculos algo que ele nunca fez? Assim é a mente. Precisa de estímulos. Precisa ser exercitada!

Em seu livro *A Arte de Resolver Problemas,* Polya afirma que para conceber um bom plano é preciso de bons hábitos mentais.

> Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo, mais uma coisa: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é do que mais se precisa. (POLYA, 94, p.8)

Este capítulo tem como objetivo deixar para o professor um banco de problemas de raciocínio lógico-matemático, para que o mesmo possa aplicá-los em sala de aula, visando o desenvolvimento das habilidades do pensamento (veja Capítulo 3) e habilidades/competências elencadas nos descritores vistos no Capítulo 6. Além disso, o professor deve orientar seus alunos na aplicação das técnicas de resolução de problemas propostas por Polya, ver Capítulo 4 para obter um bom resultado.

> Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LAGES,1999)

É observado e vale destacar como os problemas de raciocínio lógico-matemático estão presentes nas Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Publicas (OBMEP).

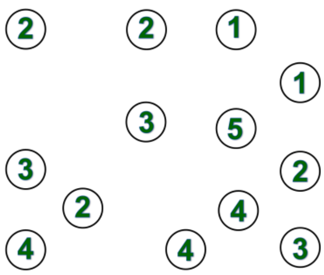
Esperamos que desta maneira possamos contribuir para a construção de um ambiente instigante, provocador e cheio de surpresas, tanto para o aluno, quanto para o professor.

6.1 Problemas: Habilidades do Pensamento

Problema 6.1 (*Botões*)***:*** Uma professora de matemática experimentou sua máquina de costura nova aplicando um padrão de botões em uma blusa. Inspirada nesta atividade, sua mente ativa criou o problema abaixo para dividir com sua classe no dia seguinte: cada círculo que contém um número é um botão, e o número mostra quantas linhas estão conectadas ao botão; o objetivo é ligar todos os botões adicionando uma serie de linhas entre eles.

- Nenhuma linha pode cruzar a outra ou passar por cima e por baixo de um botão, e não pode haver mais do que duas linhas entre qualquer par de botões.
- As linhas podem ser costuradas apenas na direção horizontal ou vertical e, quando complementadas, haverá um padrão continuo ligando todos os botões.

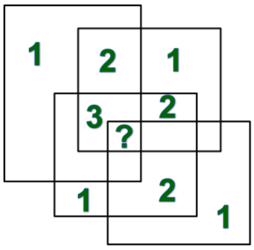
Figura 45 - Botões



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.2 (*Descubra o Número*): Este diagrama foi construído de acordo com uma lógica bem determinada. Qual número deve substituir o ponto de interrogação?

Figura 46 - Diagrama



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.3 (*Com Gelo***):** Um aluno criou este teste de sequência lógica enquanto tirava os cubos de gelo das forminhas para coloca-los no copo. Seis cubos de A à F forma arrumados no mesmo padrão, mas em posições diferentes. Você consegue descobrir qual é a nova arrumação dos jogos, de acordo com as regras?

- Todos os cubos mudaram de lugar.
- O cubo F está tocando apenas duas vogais.
- O cubo B está tocando apenas os dois cubos roxos

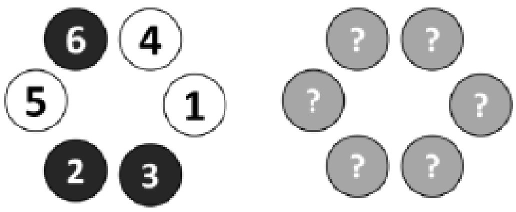
Figura 47 - Sequência lógica

Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.4 (*Colorindo com Números***):** Quando Coke se apresentou depois de trabalhar por 30 anos como contador, ele começou a pintar com aquarelas. A paleta de cores que ele começou a usar em seu novo hobby o inspirou a criar um diagrama de um jogo de lógica numérica (abaixo) para os seus netos João e Nicolas. Os meninos precisavam de ajuda para desenvolver uma capacidade típica do cérebro esquerdo, e Coke lhes disse: observem com atenção e tentem pensar logicamente. Os círculos na paleta esquerda foram reordenados e colocados na paleta direita. Eles seguem o mesmo padrão, mas estão em uma ordem diferente. Você pode descobrir suas novas posições na paleta a partir das dicas dadas?

- Todos os círculos pretos estão à direita.
- Os dois círculos de baixo somam 7.
- Os dois círculos de cima somam 4.

Figura 48 - Aquarelas



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.5 (*O código da Arca do Tesouro):* Simão precisa descobrir um número que é o código da Arca do Tesouro que está escondido na tabela.

Figura 49 - Arca do Tesouro

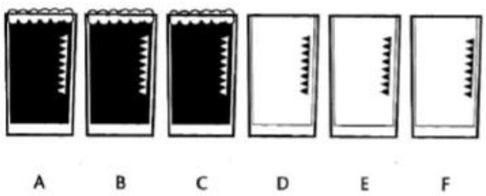
5	9	4	9	4	1
6	3	7	3	4	8
8	2	4	2	5	5
7	4	5	7	5	2
2	7	6	1	2	8
5	2	3	6	7	1

Fonte: elaborada pelo autor

Para descobrir o código ele tem que formar grupos de 3 algarismos que estão em casas sucessivas, na horizontal ou na vertical, cuja soma é 14. Retirados esses grupos, o código é a soma dos úmeros que não aparecem nesses grupos. Qual é esse código?

Problema 6.6 (*Alinhando***):** Dois velhos amigos, Magalhães e Vieira, sempre acham um jogo onde quer que estejam. Um belo dia vieira desafiou Magalhães a alterar a sequência de seis copos, três cheios e três vazios, alinhados à frente deles conforme mostra a figura.
“Tocando em apenas um copo, você consegue arrumar estes seis copos de forma que eles alternem um copo cheio, um vazio, e assim por diante?” perguntou Vieira. Você consegue ajudar Magalhães a manter sua reputação de solucionador de jogos que é páreo para Vieira?

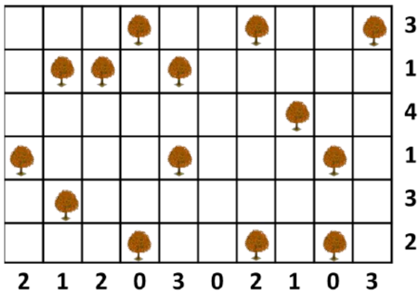
Figura 50 - Sequência de seis copos



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.7 (*Academia do general Janailson***):** Os cadetes da academia do general Janailson não conseguiram manter o dormitório limpo e, como castigo tiveram que correr às seis da manhã e depois resolver um teste de pensamento tático. Como no desafio anterior o general lhes deu um mapa do acampamento marcado com árvores e mandou-os adicionar barracas com regras especificas. Cada barraca deve estar imediatamente acima, abaixo ou ao lado de uma árvore. Nenhuma barraca pode ser colocada em quadrados adjacentes (mesmo que diagonalmente). Os números no final de cada fileira ou coluna indicam quantas barracas cada fileira ou cada coluna deve ter. Faça uma tentativa de montar esse acampamento e veja como você se sairia se fosse cadete do general Janailson.

Figura 51 - Acampamento marcado com árvores



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.8 (*O Desafio de Clevinho***):** O professor de matemática Clevinho, do IFAL, para testar a criatividade de seus alunos, propôs o seguinte desafio: Os edifícios A e B da figura não possuem janelas em suas laterais e têm o mesmo número de janelas na parte de trás. O edifício A tem mais janelas na frente do que atrás; já o edifício B tem mais janelas atrás do que na frente. Qual é o número total de janelas nos dois edifícios?

Figura 52 - Os edifícios A e B

Fonte: OBMEP 2018

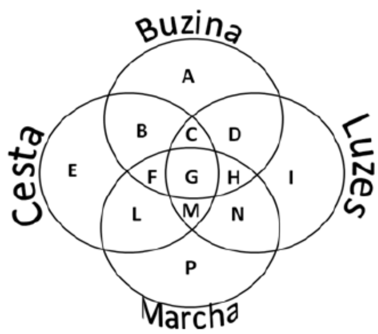
Problema 6.9 (*Triângulo ao quadrado***):** Weligton é um ótimo aluno em matemática, que gosta muito de seu trabalho como jornaleiro, e adora conhecer pessoas. Algumas vezes quando as coisas estão devagar ele se distraí arrumando algumas moedas em seu balcão. Aqui ele colocou nove moedas em um triangulo. Qual o número mínimo de moedas ele precisa mover a fim de transformar o triângulo em quadrado?

Figura 53 - Moedas em um triangulo

Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.10 (*Bicicletas Com Buzinas, Cestas, Luzes E Marchas)*: O Sr. Guilhermo desenhou um diagrama de Venn para seus alunos. Ele pergunta: “Quem consegue ser o primeiro a descobrir quais áreas deste diagrama representam: **1.** Bicicletas com buzinas e cestas que não têm luzes, nem marchas; **2.** Bicicletas com luzes que não têm buzinas, nem cestas nem marchas; **3.** Bicicletas com buzinas e luzes, mas sem cestas nem marchas? ” **4.** Depois, ele pergunta: “Minha bicicleta tem uma buzina, marchas e luzes, mas nenhuma cesta. Qual a sequência dos respectivos lugares das bicicletas citadas? ”

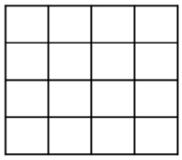
Figura 54 - Diagrama de Venn



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.11 (*Quadrados Escondidos*): Um quadrado é um quadrilátero regular, ou seja, uma figura geométrica com quatro lados de mesmo comprimento e quatro ângulos retos (de 90º). Todo quadrado é também um retângulo e um losango. Observe a figura seguinte

Figura 55 - Quadrados Escondidos



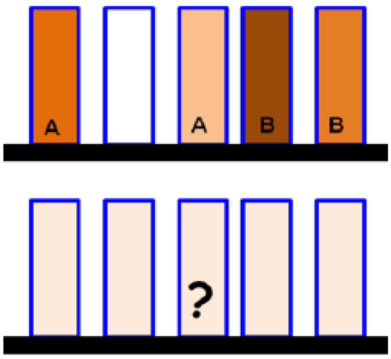
Fonte: elaborada pelo autor

Qual o número máximo de quadrados distintos que podem ser vistos nessa figura?

Problema 6.12 (*Prateleira Lógica***):** Depois de passar horas estudando filosofia, um estudante universitário criou este jogo de sequências lógicas inspirado na biblioteca da universidade. Os livros na estante da figura abaixo foram reorganizados no mesmo padrão, mas em posição diferente. Você consegue descobrir qual é a nova arrumação dos livros de acordo com as regras a seguir?

- Todos os livros foram mexidos.
- O livro branco está entre os dois livros A
- Os dois livros B ainda estão juntos.
- Os dois livros laranja - escuros estão juntos.

Figura 56 - Prateleira Lógica

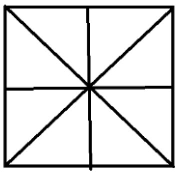


Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.13 (*Travessia Perigosa***):** Três homens precisam atravessar um rio. O barco só pode levar 150 quilos de cada vez. Os homens pesam 50, 75 e 120 quilos. Como atravessar os homens sem afundar o barco? Determine uma estratégia para resolver esse problema, satisfazendo suas condições.

Problema 6.14 (*Triângulo pra dar e vender***):** Quantos triângulos existem na figura abaixo?

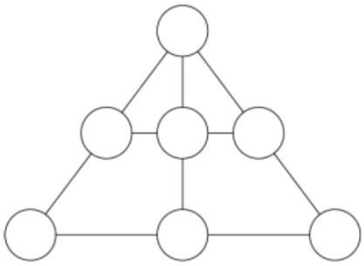
Figura 57 - Triângulos



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.15 (*O segredo do círculo***):** Numere os círculos de 1 a 7 no diagrama, de modo que a soma dos três números em cada linha seja sempre a mesma. Qual é o número que deverá ser escrito no círculo mais alto?

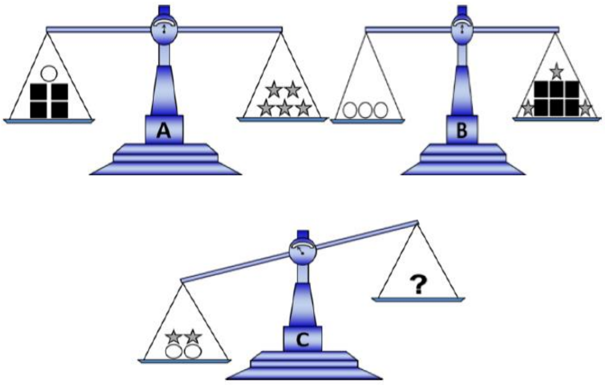
Figura 58 - Os círculos de 1 a 7



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.16 (*Adina no Laboratório de Física***):** Adina está de volta ao laboratório de física, brincando com pesos em forma de esferas, quadrados e estrelas, em três balanças diferentes. Desta vez, ela faz um desafio para sua amiga Jéssica. E pergunta: “As balanças A e B estão perfeitamente equilibradas, mas quantos quadrados serão necessários para equilibrar a balança C?” Você consegue ajudar Jéssica?

Figura 59 - Quantos quadrados



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.17 (*Palavra Decodificada*): Os desafios do professor Coke vão além das quatro paredes da sala de aula, no intervalo o professor propôs a seus alunos dizendo: Aquele que conseguisse decodificar e achar a palavra secreta iria ganhar um lanche. Em relação a um código de cinco letras, sabe-se que:

- TREVO e GLERO não têm letras em comum com ele;
- PRELO tem uma letra em comum, que está na posição correta;
- PARVO, CONTO e SENAL têm cada um, duas letras comuns com o código, uma que se encontra na mesma posição, a outra não;
- MUNCA tem com ele três letras comuns, que se encontram na mesma posição;
- TIROL tem uma letra em comum, que está na posição correta.

Qual o código a que se refere o professor Coke?

Problema 6.18 (*Somando***)**: Carlos arrumou os apoios para copos no balcão do bar Sunset e pediu a um dos entregadores de bebidas, que estava por perto, que criasse uma operação matemática usando os quatros símbolos (+ , - , : , x) entre os números mostrados. Da mesma forma que antes, Carlos diz: “os símbolos matemáticos podem estar em qualquer ordem, e um deles foi usado duas vezes”. Você consegue ajudar o entregador?

Figura 60 - Somando

9		2		11		13		6		3

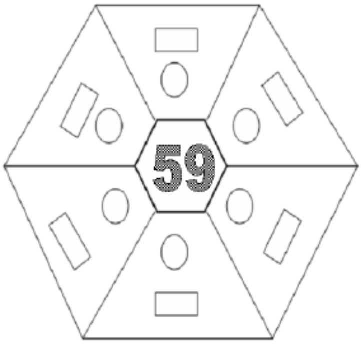
=	45

Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.19 (*Os números especiais)*: Completar com os números: 14, 17, 21, 22, 24, 28, 31, 35, 37, 38, 42, 45, observando que:

- Os números em cada trapézio somam 59.
- Os números que estão nos círculos somam 202.

Figura 61 - Números especiais



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.20 (*Operações secretas 01***):** Considere que os símbolos ▲ e @, que aparecem no quadro seguinte, substituem as operações que devem ser efetuadas em cada linha a fim de obter-se o resultado correspondente, que se encontra na coluna da extrema direita.

Figura 62 - Quadros

36	▲	4	@	5	=	14
48	▲	6	@	9	=	17
54	▲	9	@	7	=	?

Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.21 (*Operações secretas 02***):** No quadro seguinte, os símbolos e substituem as operações que devem ser efetuadas em cada linha a fim de obter-se o correspondente resultado que se encontra na coluna da extrema direita.

Figura 63 - Os símbolos

18	♥	2	♣	5	=	4
44	♥	4	♣	6	=	5
65	♥	5	♣	4	=	?

Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.22 (*Operações secretas 03***):** Joe ama passa temo de raciocínio lógico e hoje tem nas mãos um desafio dado por Ben que diz o seguinte: “Os símbolos © e ® na tabela abaixo representam uma operação matemática”. Que operações são essas e qual o número deve ser colocado no lugar de x?

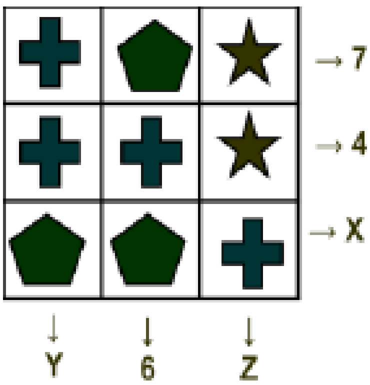
Figura 64 - Operações

3	©	4	®	6	=	87
7	©	2	®	1	=	50
4	©	4	®	x	=	250

Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.23 (*Qual é a soma?*): O professor Thiago Wagner com objetivo de desenvolver habilidades do raciocínio construiu um quadrado dividido em três linhas e três colunas e desafio seu alunos dizendo: “A figura indica três símbolos, dispostos em um quadrado de 3 linhas e 3 colunas, sendo que cada símbolo representa um número inteiro. Ao lado das linhas e colunas do quadrado, são indicadas as somas dos correspondentes números de cada linha ou coluna, algumas delas representadas pelas letras X, Y e Z. Nas condições dadas. Qual o valor de X + Y + Z ?

Figura 65 - Qual é a soma?



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.24 (*Qual é a conta***):** Quatro casais abastados passam a noite inteira conversando na mesa de um restaurante na beira do lago. Então, o garçom responsável tem tempo de sobra e decide criar um jogo numérico abaixo. Cada uma das oito partes da mesa, A-H, contém um número diferente entre 1 e 20. Veja se você consegue descobrir cada número a partir das informações dadas.

01. C menos F = A.

02. B ao quadrado = D

03. B + G + F = C

04. H menos (A e G) = E

05. D = F vezes E

06. F ao quadrado = B

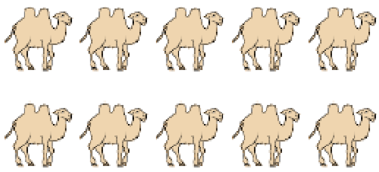
07. G é um oitavo do total de D mais E.

Figura 66 - Jogo numérico

Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.25 (*O desafio dos camelos***):** Dois matemáticos estavam em uma caravana, quando um deles chamado ***Khalil*** propôs um desafio ao companheiro de viagem Kamal: tenho 10 camelos, como coloca-los em cinco filas com 4 canelos em cada fila?

Figura 67 - 10 Camelos



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.26 (*Soldados em formação***):** Um grupo de soldados estava treinando para uma parada militar. Ao organizá-los para o desfile, o tenente observou que:

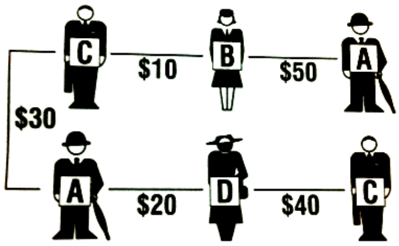
- Organizando-os em filas contendo 2 soldados, sobrava uma fila com apenas um soldado.
- Organizando-os em filas contendo 3 soldados, sobrava uma fila com apenas um soldado.
- Organizando-os em filas contendo 4 soldados, sobrava uma fila com apenas um soldado.

- Quando ele organizou os soldados em filas contendo 5 soldados, todas as filas foram preenchidas.

Se o número de soldados deste grupo é maior que trinta e menor que cem, qual o número de soldados deste grupo?

Problema 6.27 (*Dois pagantes):* O senhor André (A) deve R$ 50,00 à senhora Bete (B), enquanto que a senhora Debora (D) deve ao senhor Carlos (C) R$ 40,00 e assim por diante para as outras transações, como mostra a figura baixo. Como essas cinco dívidas podem ser quitadas através de dois pagamentos simples?

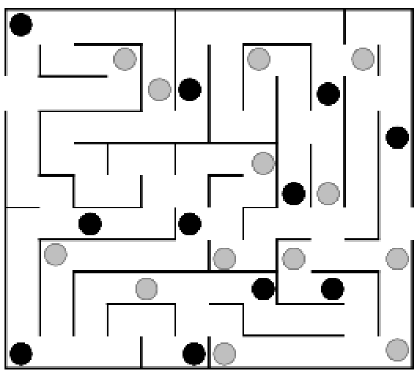
Figura 68 - Dois pagantes



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.28 (*Para frente para trás*): Você tem como descobrir o caminho que vai desde a entrada na parte de cima, à esquerda do labirinto, até chegar à saída na parte debaixo, à direita, passando apenas pelas bolas pretas, e então voltar, passando apenas pelas bolas cinza?

Figura 69 - Para frente para trás



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.29 (OBMEP2005): Regina, Paulo e Iracema tentam adivinhar quantas bolas estão dentro de uma caixa fechada. Eles já sabem que este número é maior que 100 e menor que 140. Eles fazem as seguintes afirmações:

- Regina: Na caixa há mais de 100 bolas e menos de 120 bolas.
- Paulo: Na caixa há mais de 105 bolas e menos de 130 bolas.
- Iracema: Na caixa há mais de 120 bolas e menos de 140 bolas.

Sabe-se que apenas uma dessas afirmações é correta. Quantos são os possíveis valores para o número de bolas dentro da caixa?

Problema 6.30 (OBMEP2006): Rosa preencheu com os algarismos 1, 2, 3 e 4 as oito casas que estão sem algarismo na tabela, de modo que em nenhuma linha e em nenhuma coluna aparecessem dois algarismos iguais. Qual a soma dos números que Rosa colocou nas casas marcadas com bolinhas pretas?

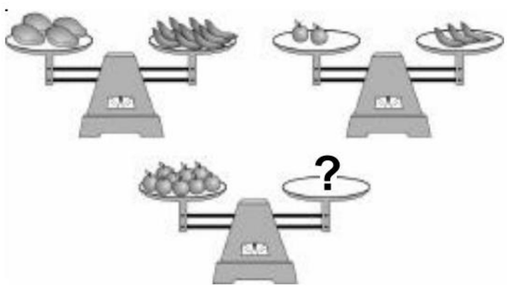
Figura 70 - Algarismo na tabela

•	2		1
1	•	2	
2		•	3
	4	1	•

Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.31(OBMEP2005): Usando uma balança de dois pratos, verificamos que 4 abacates pesam o mesmo que 9 bananas e que 3 bananas pesam o mesmo que 2 laranjas. Se colocarmos 9 laranjas num prato da balança, quantos abacates deveremos colocar no outro prato, para equilibrar a balança?

Figura 71 - Quantos abacates

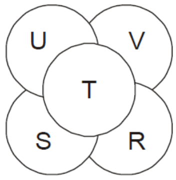


Fonte: OBMEP2005

Problema 6.32 (OBMEP 2005): Rosa e Maria começam a subir uma escada de 100 degraus no mesmo instante. Rosa sobe 10 degraus a cada 15 segundos e Maria sobe 10 degraus a cada 20 segundos. Quando uma delas chegar ao último degrau, quanto tempo faltará para a outra completar a subida?

Problema 6.33 (OBMEP 2006): Cinco discos de papelão foram colocados um a um sobre uma mesa, conforme mostra a figura.

Figura 72 - Discos de papelão

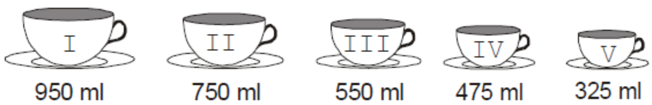


Fonte: OBMEP 2006

Em que ordem os discos foram colocados na mesa?

Problema 6.34 (OBMEP 2006): Cada uma das 5 xícaras da figura está cheia só com café, só com leite ou só com suco. No total, a quantidade de café é o dobro da de suco. Nenhuma das bebidas está em mais de 2 xícaras diferentes. Quais as xícaras que contêm leite?

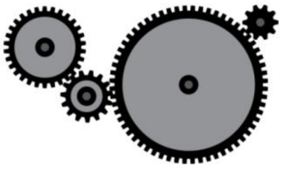
Figura 73 - 5 Xícaras



Fonte: OBMEP 2006

Problema 6.35: O desenho representa quatro engrenagens acopladas. A primeira tem 30 dentes, a segunda tem 15, a terceira tem 60 e a última tem 10 dentes. Se a primeira engrenagem der uma volta, quantas voltas dará a última?

Figura 74 - Engrenagens acopladas



Fonte: OBMEP 2006

Problema 6.36 (OBMEP 2008): Ari, Bruna e Carlos almoçam juntos todos os dias e cada um deles pede água ou suco.

• Se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água.

• Se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco.

• Se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água.

• Apenas um deles sempre pede a mesma bebida.

Quem pede sempre a mesma bebida e que bebida é essa?

Figura 75 - Ari, Bruna e Carlos

Fonte: OBMEP 2008

Problema 6.37 (OBMEP 2009): Arnaldo, Beto, Celina e Dalila formam dois casais. Os quatro têm idades diferentes. Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. O esposo de Celina é a pessoa mais velha. Colocando em ordem crescente das idades como podemos organizar essas pessoas?

Problema 6.38 (OBMEP 2009): Ana deve a Beto 1 real, Carlos deve a Ana 1 real, Dora deve a Beto 2 reais, Beto deve a Emília 3 reais, Carlos deve a Emília 2 reais, Emília deve a Dora 1 real, Carlos deve a Beto 2 reais, Dora deve a Carlos 1 real e Ana deve a Dora 3 reais. Cada um deles recebeu de seus pais 10 reais para pagar suas dívidas. Depois que forem efetuados todos os pagamentos, quem vai ficar com mais dinheiro?

Problema 6.39 (OBMEP 2009): Um torneio de futebol com 57 times será disputado com as seguintes regras:

- Nenhum jogo pode terminar empatado.
- O time que perder duas partidas será eliminado.
- O torneio termina quando sobrar apenas um time, que será o campeão.

Se o time campeão perder uma vez, quantas partidas serão disputadas no torneio?

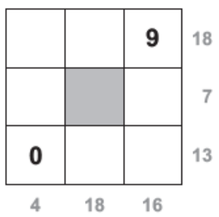
Figura 76 - Futebol

Fonte: OBMEP 2009

Problema 6.40 (OBMEP 2010): Uma fila tem 21 pessoas, incluindo Samuel e Elisa. Há 9 pessoas atrás de Samuel e 6 na frente de Elisa. Quantas pessoas há entre Samuel e Elisa?

Problema 6.41 (OBMEP 2010): O quadriculado deve ser completado usando, em cada casa, um dos números inteiros de 1 a 8, de modo que não haja repetição. A soma dos números de cada linha e cada coluna deve ser como indicado fora do quadriculado; por exemplo, a soma dos números da última coluna deve ser 16.

Figura 77 - Quadriculado

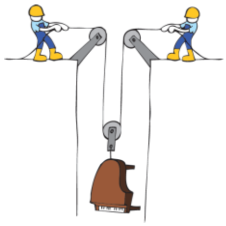


Fonte: OBMEP 2010

Qual é o número que vai aparecer na casa sombreada?

Problema 6.42 (OBMEP 2011): A figura mostra dois homens erguendo um piano com uma corda. Se um dos homens puxar 15 m de corda e o outro puxar 25 m, quantos metros o piano vai subir?

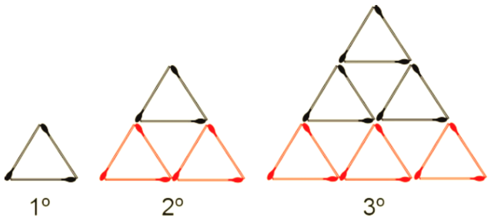
Figura 78 - Homens erguendo um piano



Fonte: OBMEP 2011

Problema 6.43 (OBMEP 2012): Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Quantos palitos ela vai usar para construir o quinto triângulo da sequência?

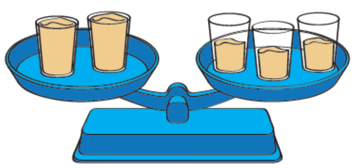
Figura 79 - Triângulos com palitos de fósforo



Fonte: OBMEP 2012

Problema 6.44 (OBMEP 2012): A balança da figura está equilibrada. Os copos são idênticos e contêm, ao todo, 1400 gramas de farinha. Os copos do prato da esquerda estão completamente cheios e os copos do prato da direita estão cheios até metade de sua capacidade. Qual é o peso, em gramas, de um copo vazio?

Figura 80 - Balança equilibrada



Fonte: OBMEP 2012

Problema 6.45 (OBMEP 2012): Amanda, Bianca e Carolina são amigas e têm idades diferentes. Sabe-se que, das sentenças a seguir, exatamente uma é verdadeira.

I. Amanda e Carolina são mais jovens que Bianca.

II. Amanda é mais velha que Bianca.

III. Amanda é mais velha que Bianca e Carolina.

IV. Amanda não é nem a mais nova nem a mais velha das amigas.

Qual das alternativas mostra o nome das três amigas em ordem crescente de idade?

Problema 6.46 (OBMEP 2012): Numa festa, na casa de Cláudia, havia crianças somente na cozinha, na sala e na varanda. Em certo momento, várias crianças começaram a correr ao mesmo tempo: 7 crianças correram da varanda para a cozinha, 5 crianças correram da cozinha para a sala, e 4 crianças correram da sala para a varanda. Ao final dessa correria, a quantidade de crianças na sala era igual à quantidade de crianças na varanda e também igual à quantidade de crianças na cozinha. Quantas crianças, no mínimo, havia na casa de Cláudia?

Problema 6.47 (OBMEP 2013): Um grupo de meninos está sentado em volta de uma mesa retangular. Dois meninos estão sentados à frente de Abelardo, no lado oposto da mesa. Um menino está sentado à frente de Beto, quatro à frente de Carlos e cinco à frente de Daniel. Quantos meninos estão sentados à mesa?

Problema 6.48 (OBMEP 2013): Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos:

“De quem são os celulares que tocaram? ”

Guto disse: “O meu não tocou”,

Carlos disse: “O meu tocou” e

Bernardo disse: “O de Guto não tocou”.

Figura 81 - Aula

Fonte: OBMEP 2013

Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

Problema 6.49 (OBMEP 2018): Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações:

• Emília: Não fui eu.

• Luísa: Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.

• Marília: Não foi a Rafaela nem a Vitória.

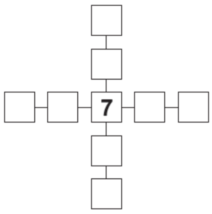
Rafaela: Não foi a Luísa.

• Vitória: Luísa não está dizendo a verdade.

Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho?

Problema 6.50 (OBMEP 2014): Na figura, o número 7 ocupa a casa central. É possível colocar os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, um em cada uma das casas restantes, de modo que a soma dos números na horizontal seja igual à soma dos números na vertical. Qual é essa soma?

Figura 82 - 7 Ocupa a casa central



Fonte: OBMEP 2014

Problema 6.51 (OBMEP 2014): Cinco meninas não estão totalmente de acordo sobre a data da prova de Matemática.

• Andrea diz que será em agosto, dia 16, segunda-feira;

• Daniela diz que será em agosto, dia 16, terça-feira;

• Fernanda diz que será em setembro, dia 17, terça-feira;

• Patrícia diz que será em agosto, dia 17, segunda-feira;

• Tatiane diz que será em setembro, dia 17, segunda-feira.

Somente uma está certa, e as outras acertaram pelo menos uma das informações: o mês, o dia do mês ou o dia da semana. Quem está certa?

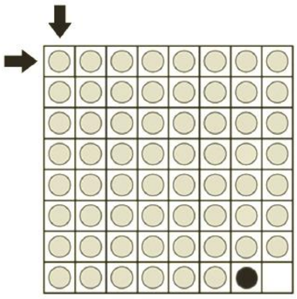
Problema 6.52 (OBMEP 2015): Observe as engrenagens na figura. Quantas voltas a engrenagem com 12 dentes deve dar para que a engrenagem com 9 dentes dê 200 voltas?

Figura 83 - Engrenagens

Fonte: OBMEP 2015

Problema 6.53 (OBMEP 2015): Joãozinho tem um tabuleiro como o da figura, no qual há uma casa vazia, uma casa com uma peça preta e as demais casas com peças cinzentas. Em cada movimento, somente as peças que estão acima, abaixo, à direita ou à esquerda da casa vazia podem se movimentar, com uma delas ocupando a casa vazia. Qual é o número mínimo de movimentos necessários para Joãozinho levar a peça preta até a casa do canto superior esquerdo, indicadas pelas Setas ?

Figura 84 - Tabuleiro



Fonte: OBMEP 2015

Problema 6.54 (OBMEP 2015): Daniel e mais quatro amigos, todos nascidos em estados diferentes, reuniram-se em torno de uma mesa redonda. O paranaense sentou-se tendo como vizinhos o goiano e o mineiro. Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano. O goiano sentou-se tendo como vizinhos Edson e Adão. Bruno sentou-se tendo como vizinhos o tocantinense e o mineiro. Quem é o mineiro?

Figura 85 - Daniel e mais quatro amigos

Fonte: OBMEP 2015

Problema 6.55 (OBMEP 2016): Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria. Ela perguntou:

– Que dia da semana é hoje?

– Hoje é quinta, disse João.

– É sexta, respondeu Maria.

Depois perguntou:

– Que dia da semana será amanhã?

– Segunda, falou João.

– Amanhã será domingo, disse Maria.

Finalmente ela perguntou:

– Que dia da semana foi ontem?

– Terça, respondeu João.

– Quarta, disse Maria.

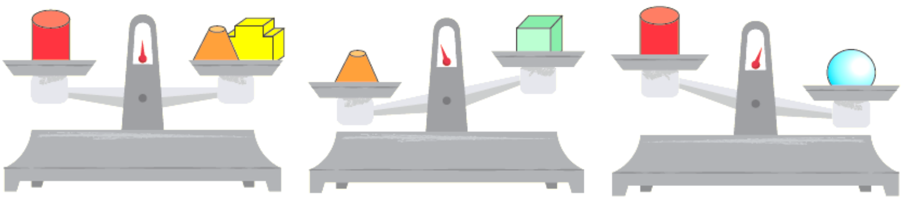
Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

Figura 86 – João, Mae e Maria

Fonte: OBMEP 2016

Problema 6.56 (OBMEP 2017): Nas balanças da figura, objetos iguais têm pesos iguais. Qual dos objetos é o mais pesado?

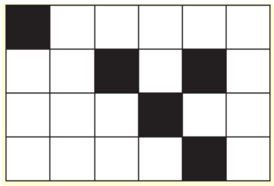
Figura 87 - Balanças



Fonte: OBMEP 2017

Problema 6.57 (OBMEP 2017): Na figura, quantos quadradinhos brancos ainda devem ser pintados de preto para que o número total de quadradinhos pretos passe a ser o dobro do número de quadradinhos brancos?

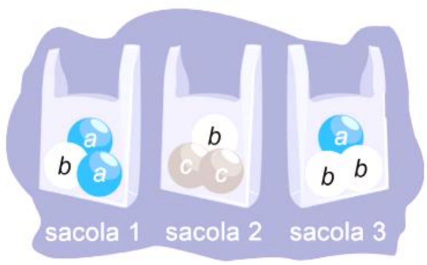
Figura 88 - Quadradinhos brancos



Fonte: OBMEP 2017

Problema 6.58 (OBMEP 2017): Dentro de três sacolas idênticas foram colocados objetos de pesos a, b, e c, como na figura. Com isso, o peso da sacola 1 ficou menor que o peso da sacola 2, que por sua vez ficou menor que o peso da sacola 3. Qual das desigualdades abaixo é verdadeira?

Figura 89 - Três sacolas idênticas



Fonte: OBMEP 2017

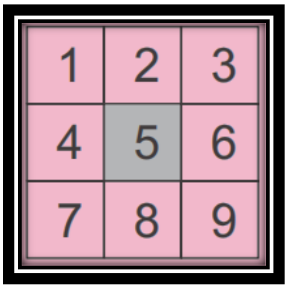
Problema 6.59 (OBMEP 2017): Nas balanças há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?

Figura 90 - Última balança

Fonte: OBMEP 2017

Problema 6.60 (OBMEP 2017): Paula numerou todas as casas do tabuleiro quadrado abaixo, da esquerda para a direita e de cima para baixo, começando com o número 1. A casa central recebeu o número 5. Se ela fizer o mesmo com outro tabuleiro quadrado com 49 casas, qual número será escrito em sua casa central?

Figura 91 - Casas do tabuleiro



Fonte: OBMEP 2017

Vamos agora disponibilizar alguns problemas elencados de acordo com as habilidades, segundo SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), como sugestões para serem explorados em sala de aula.

Alguns desses problemas forma retirados das provas da OBMEP, nível 1 e nível 2, aplicadas entre os anos de 2005 e 2017.

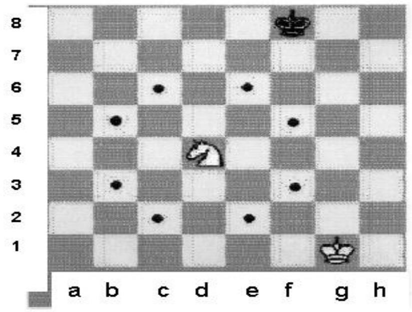
6.2 Problemas: Competências e Habilidades

6.2.1 Espaços e formas

Descritor 1: Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.

Problema 6.61: Num tabuleiro de xadrez, jogamos com varias pecas que se movimentam de maneiras diferentes. O cavalo se move para qualquer casa que possa alcançar com movimento na forma de "L", de três casas. Na posição da figura, os pontos marcados representam as casas que o cavalo pode alcançar, estando na casa d4.

Figura 92 - tabuleiro de xadrez



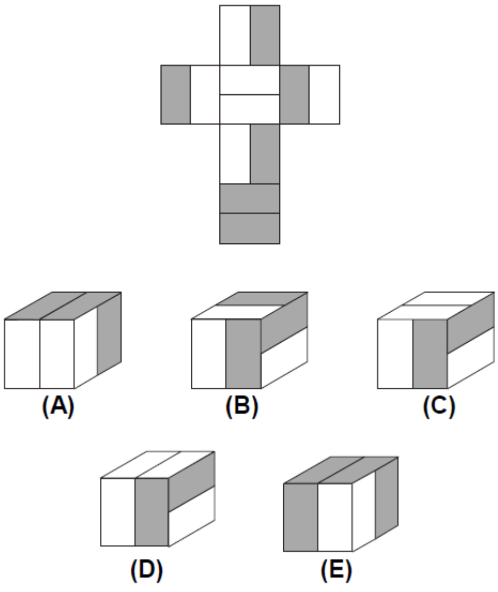
Fonte: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/8_matematica.pdf

Partindo da casa f5 e fazendo uma única jogada, dentre as casas dispostas no tabuleiro quais as casas que o cavalo poderá alcançar?

Descritor 2: Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com as suas planificações.

Problema 6.62: (OBMEP 2006): Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura ao lado. Qual das figuras abaixo representa o cubo construído por Guilherme?

Figura 93 - Montar um cubo

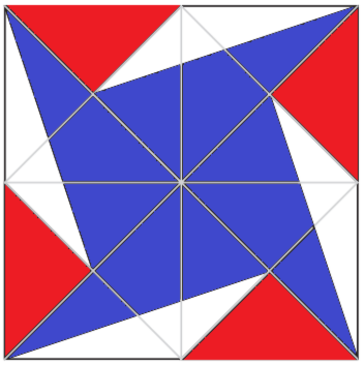


Fonte: OBMEP 2006

Descritor 3: Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.

Problema 6.63: (OBMEP ADAPTADA): A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. Quanto aos lados podemos como podemos classificar os triângulos em vermelho? Quanto aos ângulos podemos como podemos classificar os triângulos em azul?

Figura 94 - Quadrado com suas diagonais

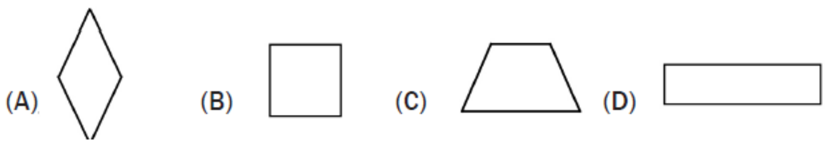


Fonte: elaborada pelo autor

Descritor 4: Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.

Problema 6.64: Alguns quadriláteros estão representados nas figuras abaixo. Qual dos quadriláteros possui lados iguais?

Figura 95 - Quadriláteros

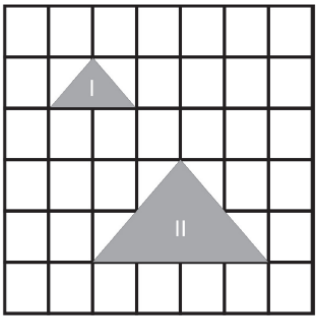


Fonte: Matriz Prova Brasil

Descritor 5: Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

Problema 6.65: Na ilustração abaixo, a figura II foi obtida a partir da figura I.

Figura 96 - Quadriculados



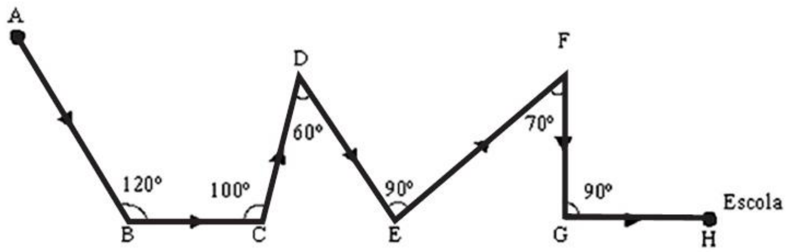
Fonte: Prova Brasil

Em quanto deveríamos ampliar o lado da figura II para que a área fique oito vezes maior?

Descritor 6: Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos.

Problema 6.66: Para chegar à escola, Carlos realiza algumas mudanças de direção como mostra a figura a seguir.

Figura 97 - Mudanças de direção



Fonte: Matriz Prova Brasil

As mudanças de direção que formam ângulos não retos estão representadas em quais vértices?

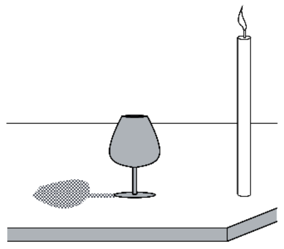
Descritor 7: Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram.

Problema 6.67: O Realismo foi um movimento em que o artista procurava retratar, com rigor fotográfico, objetos da vida real, obedecendo rigorosamente a efeitos de textura, cor e luz em suas pinturas. Suponha que um desses pintores, em seu ateliê, disponha sobre uma mesa um cálice de estanho e uma vela acesa.

Dados:

- Distância do centro do cálice ao centro da vela: 20 cm;
- Altura da vela, contando com a chama: 32 cm;
- Altura do cálice de estanho: 12 cm.

Figura 98 - Fonte luminosa



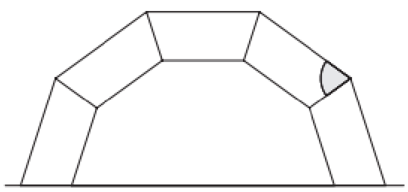
Fonte: VUNESP 2011

Ao tornar o ambiente desprovido de qualquer outra fonte luminosa. Qual o comprimento da sombra do cálice, em cm?

Descritor 8: Resolver problema utilizando propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares)

Problema 6.68: (OBMEP): A figura é formada por 5 trapézios isósceles iguais. Qual é a medida do ângulo indicado?

Figura 99 - 5 Trapézios isósceles iguais



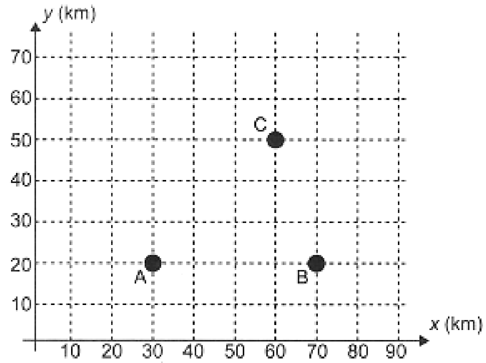
Fonte: OBMEP

Descritor 9: Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.

Problema 6.69: Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve a conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia.

Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal as antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:

Figura 100 - Localizações das antenas



Fonte: ENEM 2013

A torre deve estar situada em um local equidistante das Três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de quais coordenadas?

Descritor 10: Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

Problema 6.70 (OBMEP2008): Numa folha quadrada de papel de 30 cm de lado, branca de um lado e cinza do outro, marcou-se um quadrado ABCD em linhas pontilhadas, como na figura 1. A folha foi dobrada ao longo das linhas pontilhadas e o resultado está mostrado na figura 2, onde a parte cinza é um quadrado de área 144 cm^2. Qual é o comprimento do segmento PA?

Figura 101 - Quadrada de papel

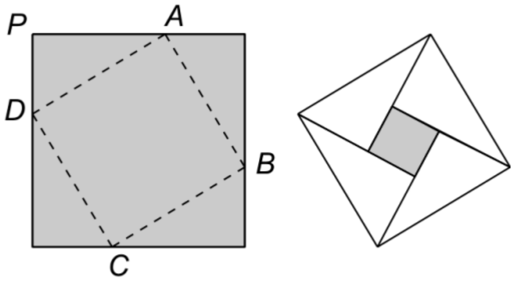


Figura 1 **Figura 2**

Fonte: OBMEP2008

Descritor 11: Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

Problema 6.71: Três amigas, Letícia, Giselle e Beatriz, compraram uma pizza cada uma. Elas fizeram os seguintes cortes destacados nas figuras a seguir.

Figura 102 - Pizza

Fonte: S.A.S (Sistema Ari de Sá)

Qual o nome dado a cada parte em destaque nos círculos?

6.2 Grandezas e Medidas

Descritor 12: Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

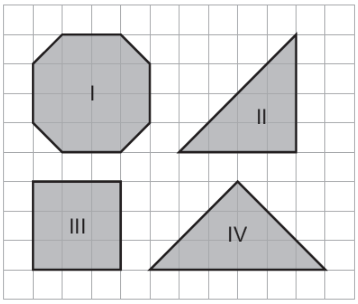
Problema 6.72 (OBMEP2011): Márcia cortou uma tira retangular de 2 cm de largura de cada um dos quatro lados de uma folha de papel medindo 12 cm por 20 cm. Qual é o perímetro do pedaço de papel que sobrou?

Figura 103 - Tira retangular

Fonte: OBMEP2011

Problema 6.73 (OBMEP2015): Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?

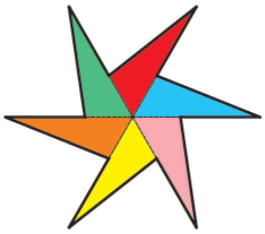
Figura 104 - Polígonos desenhados



Fonte: OBMEP2015

Problema 6.74 (OBMEP2016): A figura foi construída com triângulos de lados 3 cm, 7 cm e 8 cm. Qual é o perímetro da figura?

Figura 105 - Triângulos

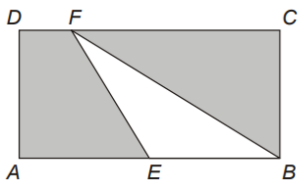


Fonte: OBMEP2016

Descritor 13: Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

Problema 6.75 (OBMEP Nível 2, 2006): No retângulo da figura temos AB = 6 cm e BC = 4 cm. O ponto E é o ponto médio do lado AB. Qual é a área da parte sombreada?

Figura106 - Parte sombreada

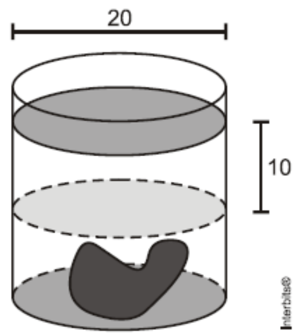


Fonte: OBMEP2006

Descritor 14: Resolver problema envolvendo noções de volume.

Problema 6.76: Arquimedes, para achar o volume de um objeto de forma irregular, mergulhou-o num tanque cilíndrico circular reto contendo água. O nível da água subiu 10 cm sem transbordar. Se o diâmetro do tanque é 20 cm, então qual o volume do objeto?

Figura 107 - Objeto de forma irregular

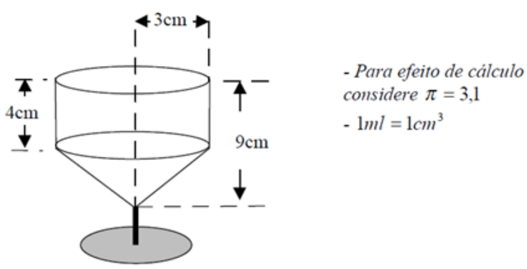


Fonte: SAS (Sistema Ari de Sá)

Descritor 15: Resolver problema utilizando relações entre diferentes unidades de medida.

Problema 6.77: Um cerimonial foi contratado para fazer uma festa. Por experiência, o dono do cerimonial sabe que entre as pessoas que irão a essa festa, 100 são potenciais consumidores de vinho e tomam em média 3 taças, no formato e medidas da figura abaixo. Sabendo que cada garrafa contém 790,5 *ml* de vinho, qual o número mínimo de garrafas que o comerciante deverá manter em estoque para atender aos convidados da festa?

Figura 108 - Taça



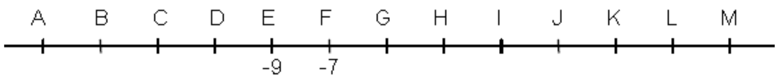
Fonte: ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)

6.3 Números e Operações / Álgebra e Funções.

Descritor 16: Identificar a localização de números inteiros na reta numérica.

Problema 6.78: A figura a seguir é uma representação da localização das principais cidades ao longo de uma estrada, onde está indicada por letras à posição dessas cidades e por números as temperaturas registradas em °C.

Figura 109 - Localização das principais cidades

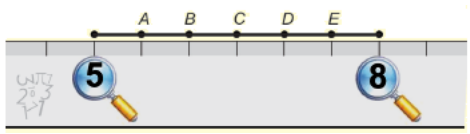


Fonte: Matriz Prova Brasil

Com base na figura e mantendo-se a variação de temperatura entre as cidades, onde está localizado o ponto correspondente a 0°C?

Problema 6.79 (OBMEP2016): José dividiu um segmento de reta em seis partes iguais. Ele observou que os pontos das extremidades do segmento correspondem às marcas de 5 cm e 8 cm de sua régua. Qual dos pontos corresponde à marca de 6 cm da régua?

Figura 110 - Segmento de reta



Fonte: OBMEP 2016

Descritor 17: Identificar a localização de números racionais na reta numérica.

Problema 6.80: Em uma aula de Matemática, o professor apresentou aos alunos uma reta numérica como a da figura a seguir.

Figura 111 - Reta numérica

Fonte: Matriz Prova Brasil

O professor marcou o número 11/ 4 nessa reta. Esse número foi marcado entre que pontos da reta numérica?

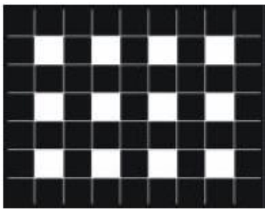
Descritor 18: Efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

Problema 6.81: Uma professora propôs a resolução da expressão $30-8^2:(-2)^5+(-54):(-1-2)^3-10^2$ para sua turma. Qual o valor da expressão?

Descritor 19: Resolver problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)

Problema 6.82 (OBMEP2005): O piso de uma cozinha foi revestido de ladrilhos brancos e pretos, conforme a figura. Cada ladrilho branco custou R$ 2,00 e cada ladrilho preto custou R$ 3,00. Quanto foi gasto na compra dos ladrilhos?

Figura 112 - Ladrilhos brancos e pretos



Fonte: OBMEP2005

Descritor 20: Resolver problema com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)

Problema 6.83: Cíntia conduzia um carrinho de brinquedo por controle remoto em linha reta. Ela anotou em uma tabela os metros que o carrinho andava cada vez que ela acionava o controle. Escreveu valores positivos para as idas e negativos para as vindas.

Figura 113 - Tabela os metros que o carrinho andava

Vez	Metros
Primeira	+17
Segunda	- 8
Terceira	+13
Quarta	+4
Quinta	- 22
Sexta	+7

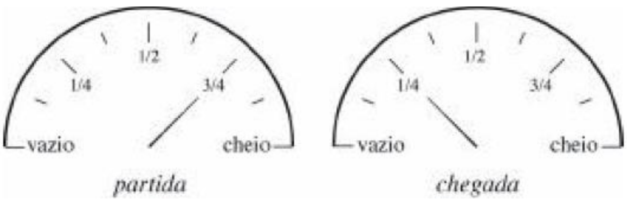
Fonte: Prova Brasil

Após Cíntia acionar o controle pela sexta vez, qual a distância entre ela e o carrinho?

Descritor 21: Reconhecer diferentes representações de um número racional.

Problema 6.84: As figuras mostram o medidor de gasolina do carro no momento de partida e no momento de chegada de uma viagem feita por João. Qual porcentagem em litros de gasolina João gastou nesta viagem?

Figura 114 - O medidor de gasolina

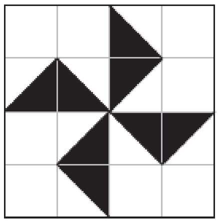


Fonte: OBMEP2010

Descritor 22: Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

Problema 6.85 (OBMEP2010): A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A região em preto corresponde a que fração do quadrado?

Figura 115 - Região em preto



Fonte: OBMEP2010

Descritor 23: Identificar frações equivalentes.

Problema 6.86: João comeu ½ de uma barra de chocolate. Maria comeu ¾ de outra barra idêntica a que João comeu. José comeu 50% de outra barra idêntica a que Maria comeu. Júlio comeu 2/4 de outra barra idêntica a que José comeu. Assim quais entre os citados acima comeu a mesma quantia? Faça uma representação geométrica para cada caso.

Descritor 24: Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de "ordens" como décimos, centésimos e milésimos.

Problema 6.87: Como podemos decompor o número decimal 2,451?

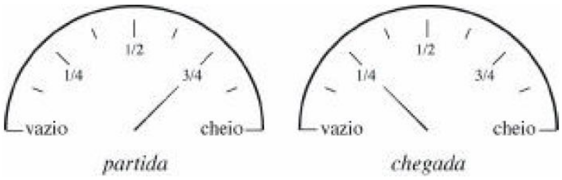
Descritor 25: Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

Problema 6.88: Um cidadão comprou uma cartela de comprimidos por R$ 28,80, onde cada comprimido custava R$ 0,50. Quantos comprimidos tinham na cartela?

Descritor 26: Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)

Problema 6.89: A capacidade do tanque de gasolina do carro de João é de 50 litros. As figuras mostram o medidor de gasolina do carro no momento de partida e no momento de chegada de uma viagem feita por João. Quantos litros de gasolina João gastou nesta viagem?

Figura 116 - Medidor de gasolina do carro



Fonte: OBMEP2010

Descritor 27: Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

Problema 6.90: Foi proposta para um aluno a seguinte expressão: $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Estime um resultado aproximado da expressão.

Descritor 28: Resolver problema que envolva porcentagem.

Problema 6.91: Se ao comprar um produto recebi um desconto no preço de 50%, qual a porcentagem de aumento que ele deverá receber para que uma pessoa compre pelo preço inicial?

Problema 6.92: Se um produto recebe um aumento no preço de 100% qual a porcentagem de desconto que ele deverá receber para que uma pessoa compre pelo preço inicial?

Problema 6.93: No último ano, devido às condições climáticas da região sudeste do país, o preço do tomate sofreu três aumentos de 20%. Qual o aumento total que esses aumentos consecutivos no ano produziram?

Descritor 29: Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

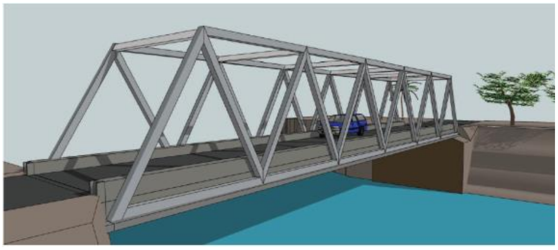
Problema 6.94: Uma editora de jornal tem 7 profissionais responsáveis pela produção de 35.000 exemplares todos os dias. Após a ocorrência de mortes devido à gripe suína, a procura por informações a respeito dessa gripe aumentou bastante, e o jornal teve que aumentar sua produção para 65.000 por dia. O número de contratações cresce proporcionalmente em relação ao aumento no número de exemplares produzidos. Qual o número de novos funcionários que a editora teve que contratar?

Problema 6.95: Em um acampamento para escoteiros, 50 escoteiros têm alimentos para 70 dias. Se mais 90 escoteiros chegarem ao acampamento, então, quantos dias a alimentação durará?

Descritor 30: Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.

Problema 6.96: Pontes de treliças são formadas por estruturas de barras, geralmente em forma triangular, com o objetivo de melhor suportar cargas concentradas.

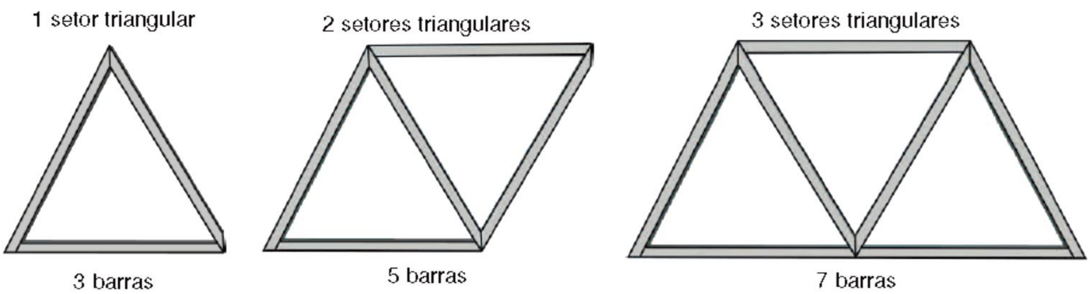
Figura 117 - Pontes de treliças



Fonte: http://www.cops.uel.br/vestibular/2011/provas/P10.pdf

Nas figuras a seguir, há uma sequência com 1, 2 e 3 setores triangulares com as respectivas quantidades de barras de mesmo comprimento.

Figura 118 - Setores triangulares



Fonte: http://www.cops.uel.br/vestibular/2011/provas/P10.pdf

Observando nas figuras que o número de barras é depende do número de setores triangulares. Sabendo que $N = 2s + 1$, onde *s* é o números de setores triangulares. Qual é o número *N* de barras para 83 setores triangulares?

Descritor 31: Resolver problema que envolva equação do 2.º grau.

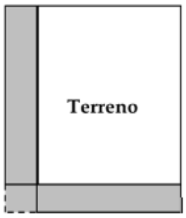
Problema 6.97: Paulo descobriu que o campo de futebol de seu colégio tem área de 384m^2 *e* perímetro de 80m. Como Paulo poderia encontrar as dimensões dessa quadra?

Figura 119 - Campo de futebol

Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.98: Elvis e Cleverton são mestres de obra e estão com um desafio em suas mãos: devem fazer uma caçada na frente de um terreno que tem 20m de largura por 30m de comprimento. Foi entregue a eles um número de lajotas para revestir essa calçada que equivalem a 600m^2. Qual deve ser a largura da calçada? (A área escura representa à calçada)

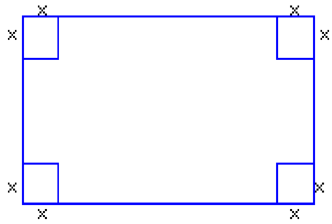
Figura 120 - Um terreno



Fonte: elaborada pelo autor

Problema 6.99: Deseja-se construir uma caixa sem tampa a partir de uma folha retangular de cartolina que mede 30 cm de largura e 60 cm de comprimento. Dos quatro cantos da folha são cortados quatro quadrados iguais, cujo lado mede x cm de comprimento, conforme figura abaixo. De acordo com esse enunciado.

Figura 121 - Caixa sem tampa



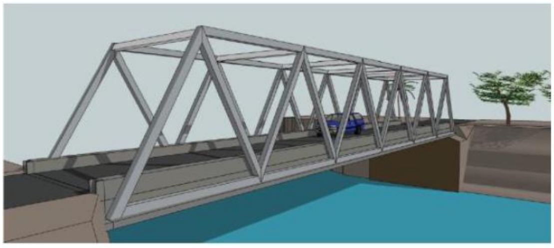
Fonte: elaborada pelo autor

Qual o valor de **x** para que a área da caixa assim construída, após o corte dos quatro cantos, seja igual a 2200 cm^2?

Descritor 32: Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).

Problema 6.100: Pontes de treliças são formadas por estruturas de barras, geralmente em forma triangular, com o objetivo de melhor suportar cargas concentradas.

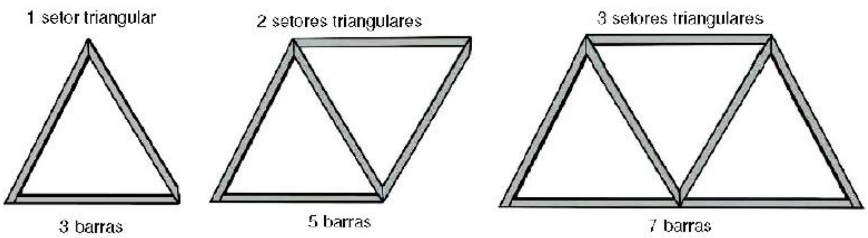
Figura 122 - Pontes de treliças



Fonte: http://www.cops.uel.br/vestibular/2011/provas/P10.pdf

Nas figuras a seguir, há uma sequência com 1, 2 e 3 setores triangulares com as respectivas quantidades de barras de mesmo comprimento.

Figura 123 - Setores triangulares



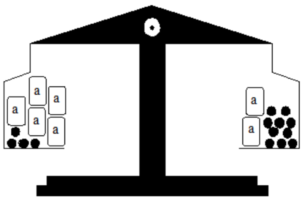
Fonte: http://www.cops.uel.br/vestibular/2011/provas/P10.pdf

Observando nas figuras que o número de barras é função do número de setores triangulares, qual é o número N de barras para n setores triangulares?

Descritor 33: Identificar uma equação ou inequação do 1º grau que expressa um problema.

Problema 6.101: Na balança a seguir temos pesadas bolas de chumbo, todas iguais, e leves saquinhos de plástico, todos com a mesma quantidade de bolinhas, iguais às que estão fora dos mesmos. Quantas bolinhas há em cada saquinho?

Figura 124 - Bolas de chumbo



Fonte: OBM

Descritor 34: Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema.

Problema 6.102: Para a reinauguração do teatro pretende-se cobrar R$ 15,00 por adulto e R$ 8,00 por criança na apresentação de um espetáculo. Se o teatro esgotar os ingressos, administração arrecadará R$ 1. 201,00. Qual a capacidade de acomodação para criança e adultos, respectivamente, se o teatro possuísse 95 poltronas?

Descritor 35: Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau.

Problema 7.1032: Um sistema de equações do 1º grau foi dado por

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

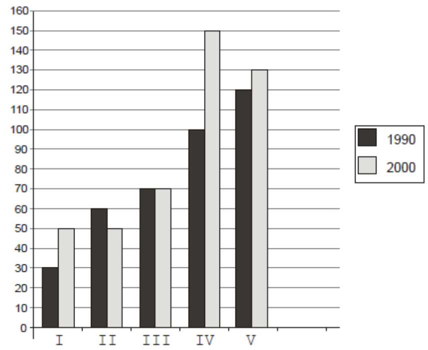
Qual é o gráfico que representa o sistema?

Tema IV: Tratamento da Informação.

Descritor 36: Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

Problema 6.104 (OBMEP 2006): No gráfico estão representadas as populações das cidades I, II, III, IV e V em 1990 e 2000, em milhares de habitantes. Por exemplo, em 1990 a população da cidade II era de 60 000 habitantes e em 2000 a cidade IV tinha 150 000 habitantes.

Gráfico 1 - Populações das cidades I, II, III, IV e V em 1990 e 2000



Fonte: OBMEP 2006

Qual cidade teve o maior aumento percentual de população de 1990 a 2000?

Descritor 37: Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

Problema 6.105: Os 1641 alunos de uma escola devem ser distribuídos em salas de aula para a prova da OBMEP. As capacidades das salas disponíveis e suas respectivas quantidades estão informadas na tabela abaixo:

Tabela 6 - Salas disponíveis e suas respectivas quantidades

Capacidade máxima de cada sala	Quantidade de salas disponíveis
30 alunos	30
40 alunos	12
50 alunos	7
55 alunos	4

Fonte: OBMEP 2017

Construa um gráfico de coluna para representar a tabela.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi realizado com o objetivo de mostrar a importância da resolução de problemas que estimulam as habilidades básicas do pensamento: Criatividade, estratégia e habilidade visual, e assim consequentemente o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Tornando a sala de aula um ambiente provocador, onde o aluno se sinta desafiado. Assim, respondemos a algumas perguntas pertinentes quando adentramos no universo da resolução de problemas: O que é a inteligência e qual sua relação com a atividade de resolver problemas? O que é inteligência lógico-matemática? O que é inteligência espacial? Em que fase de nossas vidas o raciocínio lógico-matemático se evidencia? O que é criatividade, estratégia e habilidade visual? O que é atenção e sua relação com a falta de interesse em sala de aula?

Ainda, apresentamos a importância do uso das técnicas de resolução de problemas de Matemática apresentadas por George Polya em seu livro *A arte de Resolver Problemas* e aplicamos essas técnicas na resolução de problemas de lógica-matemática, enfatizando a importância do uso dessas técnicas para sistematização do pensamento.

Para finalizar fizemos uma análise das competências e habilidades que norteiam o ensino e aprendizagem da Matemática em todo território brasileiro e avaliadas na Prova Brasil, enfatizando a importância de que as habilidades avaliadas sejam desenvolvidas fazendo uso das três componentes que organizam o ensino e aprendizagem em Matemática: Conceituação, manipulação e aplicação. Deixando a disposição em todo texto um banco de problemas resolvidos e não resolvidos com algumas análises.

Vemos que em sala de aula existe uma grande dificuldade dos alunos em pensarem quando desafiados a resolução de alguns problemas, principalmente quando o problema é mais elaborado e exige mais raciocínio lógico-matemático. Assim, depois do que foi apresentado neste trabalho podemos concluir que é importante que o aluno, principalmente nos dias atuais com a grande quantidade de informações em fácil acesso pelo advento da internet, seja capaz de pensar, questionar e elaborar suas conclusões, sendo assim um ser crítico e sentindo-se parte da sociedade em que vive, como um protagonista.

Referências

ANTUNES, C. **Como desenvolver competências em sala de aula**. Ed. Vozes. Petrópolis, 2001.

ARMSTRONG, T. **Inteligências Múltiplas na sala de au**la. 2ª ed., Trad. Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

BRENNAND, E. G. G. e VASCONCELOS, G. C. **O Conceito de potencial múltiplo da inteligência de Howard Gardner para pensar dispositivos pedagógicos multimidiáticos**. Ciências & Cognição; Ano 02, Vol. 05, 2005, p.19-35. Disponível em <www.cienciasecognicao.org>.

BRASIL, **Prova Brasil**. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro 03.pdf>. Acesso em: 02, junho de 2018.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC, vol 3, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03/pdf> . Acesso em: 09 de jun. 2018.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br /ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 20 de abril.2018.

BRASIL (2000). **Documento Básico – ENEM**. Brasília: Imprensa Oficial.

CHARLES, P.C. **Coleção Como Pensar- Coquetel**. Ediouro,2009.

CHARLES, P. C. **Como Pensar Com Estratégia - Livro 3**. Ediouro, 2009.

CHARLES, P. C. **Como Pensar com Criatividade - Volume 1.** Ediouro,2009.

FILHO, H. S. M. **Neurociência e Desenvolvimento Cognitivo**. Rio de Janeiro: Wak Editora, 1. ed. 2011.

FILHO, H. S. M ; COSTA, R. C. C. M e THOMPSON, R. **Neurociência e desenvolvimento cognitivo**. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2. ed. 2011.

FREITAS, A. C. S. **Jogo e desenvolvimento da criança: Sua relevância na prática**. 2012. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) - Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias Instituto de Educação, Lisboa, 2012.

GARDNER, Howard. Estruturas da Mente: A Teoria das Inteligências Múltiplas. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

HOLANDA, A. B. Disponível em: <http://www.dicionariodoaurelio.com/Competencia.html>. Acesso em: 20 de abril.2018.

IMPA. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 01, junho de 2018.

IMPAR. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2018.pdf>. Acesso em: 18, junho de 2018.

LIMA, E. L. **O Ensino Médio da Matemática**. Revista Gazeta de Matemática, Rio de Janeiro 2003, n° 144 p. 44-45, Janeiro 2003.

LIMA, E. L. **Conceituação, manipulação e aplicação**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro 1999, n° 41 p.01- 02. Disponível: < http://rpm.org. br/cdrpm/41/1.htm >. Acesso em: 14 de julho de 2018.

MORESCO, M. C; MARCHIORI, M.; GOUVEA, D. M. R. Pensamento Estratégico e Planejamento Estratégico: Possíveis Inter-Relações. **Revista Gestão e Planejamento**, Salvador, v. 15, n. 1, p. 63-79, jan./abr. 2014.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, 2006.

PERRENOUD, P. **Construir competências desde a escola**; trad. Bruno Charles Magne. – Porto Alegre: Artmed, 1999.

ROPÉ, F; TANGUY, L. **Saberes e competências: o uso de tais noções na escola e na empresa**. São Paulo: Papirus, 1997.

SILVA, B. A.. Contrato didático. In: MACHADO, S. D. A. (org). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3ed. São Paulo: Educ, 2012. (Série Trilhas).

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. Rio de Janeiro, 300 p. 79° ed. Record, 2010.

VIGOTSKI, L. S. **Imaginação e criação na infância: ensaio psicológico**. Apresentação e comentários de Ana Luiza Smolka. Tradução de Zoia Prestes. São Paulo: Ática, 1985.

ZABALZA, M. Como educar em valores na escola. **Pátio: revista pedagógica**, ano 4 nº 13, Maio/Jun., p. 21-25, 2000.