

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

FERNANDO ELIEL DE LIMA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DE RÉGUA E
COMPASSO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Ilhéus-Bahia

2018

FERNANDO ELIEL DE LIMA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DE RÉGUA E
COMPASSO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva

Ilhéus-Bahia

2018

L732

Lima, Fernando Eliel de

Construções geométricas com o auxílio de régua e compasso do software GeoGebra / Fernando Eliel de Lima. – Ilhéus, BA: UESC, 2018.

104f. : il.

Orientador: Romenique da Rocha Silva

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Inclui referências e apêndices.

1. Geometria Plana. 2. Construções geométricas. 3. Software educacional. 4. Geometria algébrica. I. Título.

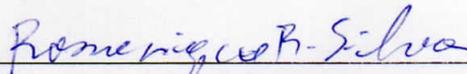
CDD 516.05

FERNANDO ELIEL DE LIMA

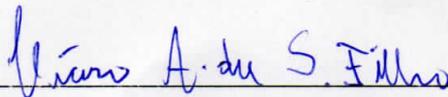
CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DE RÉGUA E
COMPASSO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Departamento de
Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade
Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de
Título de Mestre em Matemática, através do
PROFMAT - Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 11 de junho de 2018:



Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva
Orientador - UESC



Prof. Dr. Cícero Alfredo da Silva Filho
UESC



Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira
UEFS

Em nossas escolas, a matemática é ensinada e apresentada sem que nenhum esforço se faça para mostrar à juventude a história social desta disciplina, sua importância em nossa própria vida social, e o quanto dela depende a sociedade civilizada. Lancelot Hogben em Maravilhas da MATEMÁTICA, Editora Globo

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Romenique Rocha meu orientador pelo apoio e orientações técnicas para a conclusão deste trabalho.

Aos professores e técnicos que colaboraram significativamente para o êxito desta jornada, em especial o Dr. Vinícius Arakawa, que não mediu esforços em transformar a sala de coordenação num local de estudos e debates.

A Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC, pela oportunidade de conclusão do Mestrado Profissional - Profmat.

A Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, pela organização geral do curso e recursos didáticos e a CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao Dr. Maurício, coordenador do Profmat da UEFS, que em 2014 nos incentivou ao escolher esse tema para a defesa do trabalho conclusivo do mestrado.

A minha família que nos apoiou em momentos de dúvidas desde o início do curso. Em especial a minha mãe, D. Alice Maia, que sempre nos acolheu como muito amor e confiança.

Aos colegas de turma que semanalmente enfrentavam conosco longas horas de estrada.

Aos colegas professores da rede municipal de Camaçari e em especial a professora Anete Simões, Coordenadora da Diretoria Pedagógica da rede municipal, pelo apoio e sabias observações.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma proposta de sequência didática com foco em construções geométricas utilizando as ferramentas régua e compasso do software de geometria dinâmica, GeoGebra, com o objetivo de investigar alternativas metodológicas de ensino de geometria, levantar dificuldades que estudantes do ensino básico apresentam ao organizar os conteúdos e propriedades elementares dos objetos geométricos, estimular o desenvolvimento de uma aprendizagem educativa e formular argumentos matemáticos que evidencie a compreensão lógica do plano de construção de cada figura-solução. Mostrar que a inclusão de software de geometria dinâmica cria outras possibilidades de aprendizagem da matemática e conhecimentos tecnológicos, comparar metodologias e motivações na aplicação de atividades formativas. Nesta proposta de trabalho foram abordadas construções fundamentais a partir de um encadeamento lógico das construções geométricas elementares permitidas usando as ferramentas do GeoGebra, similares aos instrumentos euclidianos. Nas discussões finais apresentou-se a possibilidade de construtibilidade de pontos do plano, de polígonos regulares tanto pelo viés geométrico quanto pelo algébrico evidenciando as interfaces entre a geometria e a álgebra. Ao final aplicou-se uma avaliação qualitativa visando identificar os traços de construções de competências e habilidades e grau de satisfação dos estudantes.

Palavras-chave: Geometria plana. Geogebra. Régua e compasso. Construções geométricas. Construtibilidade.

Abstract

In this work we present a proposal for a didactic sequence focusing on geometric constructions using the ruler and compass tools of the GeoGebra, dynamic geometry software, in order to investigate methodological alternatives for geometry teaching, to raise difficulties that elementary school students present when organizing contents and elementary properties of geometric objects, stimulate the development of an educational learning and formulate mathematical arguments that evidence the logical understanding of the construction plan of each figure-solution. Show that the inclusion of dynamic geometry software creates other possibilities of learning math and technological, knowledge compare methodologies and motivations in the application of training activities. In this work proposal fundamental constructs were approached from a logical chain of elementary geometric constructions allowed using the tools of GeoGebra, similar to the Euclidean instruments. In the final discussions we presented the possibility of constructibility of points of the plane, of regular polygons both by geometric and algebraic bias evidencing the interfaces between geometry and algebra. At the end a qualitative evaluation was applied aiming to identify the traces of constructions of competences and abilities and degree of satisfaction of the students.

Keywords: Flat geometry. Geogebra. Ruler and compass. Geometric constructions. Constructability.

Lista de Figuras

1.1	Plataforma de Visualização do GeoGebra.	7
1.2	Transporte do segmento AB para a reta.	8
1.3	Transporte dos segmentos AB e CD para a reta.	9
1.4	Transporte de um segmento para o círculo.	10
1.5	Transporte do ângulo $\angle ABC$	11
1.6	Perpendicular por um ponto fora da reta dada	12
1.7	Perpendicular por um ponto pertence à reta	13
1.8	Perpendicular pela extremidade do segmento	13
1.9	Reta paralela	14
1.10	Divisão de um segmento na razão 1:1	15
1.11	Bissetriz Interna	16
1.12	Construção do ângulo de 30°	16
1.13	Quadrado inscrito no círculo	17
1.14	Construção do arco capaz	18
1.15	Construção de um círculo passando por três pontos distintos e não colineares.	19
1.16	Reta tangente por um ponto P pertencente ao círculo.	19
1.17	Retas tangentes ao círculo	20
2.1	Construção do triângulo ABC , dados: lado, ângulo, lado	22
2.2	Construção do triângulo ABC , dados: ângulo, lado, ângulo	23
2.3	Construção do triângulo ABC , dados: lado, lado, ângulo	23
2.4	Construção do triângulo ABC , dados: a , b , e c	24
2.5	Construção do triângulo ABC , dados: a , b , e h	25
2.6	Construção do triângulo ABC , dados: perímetro e lados proporcionais.	25
2.7	Construção do triângulo ABC , dados: ângulo, mediana e lado.	26
2.8	Construção do quadrado	27
2.9	Construção do retângulo	28
2.10	Construção do losango	29
2.11	Construção do trapézio isósceles	30
3.1	Segmentos construtíveis	31
3.2	Teorema de Tales	32
3.3	Quarta proporcional	33

3.4	Teorema de Pitágoras	34
3.5	Relações métricas no triângulo retângulo.	35
3.6	Números construtíveis	36
3.7	Média aritmética.	37
3.8	Construção da média geométrica.	38
4.1	Triângulos equivalentes.	40
4.2	Equivalência de triângulos.	40
4.3	Triângulo equivalente ao quadrado.	41
4.4	Lado do quadrado equivalente ao retângulo.	42
B.1	El: Transporte de segmento para a reta.	53
B.2	Gl: Transporte de segmento para a reta.	54
B.3	Th: Transporte de segmento para a reta.	54
B.4	Sl: Transporte de segmento para a reta.	54
B.5	Jo: Transporte de segmento para a reta.	55
B.6	El: Transporte de segmentos para a reta.	55
B.7	Gl: Transporte de segmentos para a reta.	56
B.8	Id: Transporte de segmentos para a reta.	56
B.9	Th: Transporte de segmentos para a reta.	56
B.10	Sl: Transporte de segmentos para a reta.	57
B.11	Ld: Transporte de segmentos para a reta.	57
B.12	Dl: Transporte de segmentos para a reta.	57
B.13	Jo: Transporte de segmentos para a reta.	58
B.14	El: Transporte de segmento para o círculo.	58
B.15	Gl: Transporte de segmento para o círculo.	59
B.16	Id: Transporte de segmento para o círculo.	59
B.17	Th: Transporte de segmento para o círculo.	59
C.1	El: Transporte de ângulo para a reta.	61
C.2	Gl: Transporte de ângulo para a reta.	62
C.3	Jd: Transporte de ângulo para a reta.	62
C.4	Id: Transporte de ângulo para a reta.	62
C.5	Th: Transporte de ângulo para a reta.	63
C.6	Sl: Transporte de ângulo para a reta.	63
C.7	Ld: Transporte de ângulo para a reta.	63
C.8	Ma: Transporte de ângulo para a reta.	64
C.9	Jo: Transporte de ângulo para a reta.	64
C.10	El: Ângulo de 30°	64
C.11	Ma: Ângulo de 30°	65
C.12	El: Divisão de 90° em três partes iguais.	65

C.13	Jd: Divisão de 90° em três partes iguais.	66
C.14	Sl: Divisão de 90° em três partes iguais.	66
C.15	Ld: Divisão de 90° em três partes iguais.	67
C.16	Ma: Divisão de 90° em três partes iguais.	67
C.17	Jo: Divisão de 90° em três partes iguais.	67
D.1	Ld: Perpendicular por um ponto pertencente à reta.	69
D.2	Ma: Perpendicular passando pelo ponto médio de um segmento.	70
D.3	Ld: Perpendicular passando pelo ponto médio de um segmento.	70
D.4	Id: Perpendicular por uma das extremidades do segmento.	71
D.5	Sl: Perpendicular por uma das extremidades do segmento.	71
D.6	Ld: Perpendicular por uma das extremidades do segmento	72
E.1	El: Inscrição do quadrado	73
F.1	El: Média aritmética	75
G.1	El: Construção do quadrado equivalente ao triângulo retângulo.	77
G.2	Jd: Construção de um quadrado equivalente ao triângulo retângulo.	78
G.3	Gl: Construção de um quadrado equivalente ao triângulo retângulo.	78

Sumário

Introdução	1
1 Construções Geométricas Fundamentais	5
1.1 Transporte de Objetos Geométricos	7
1.1.1 Segmento	8
1.1.2 Ângulo	9
1.2 Construções com Base nos Postulados de Euclides	11
1.3 Ponto, Reta e Círculo	18
2 Polígonos	21
2.1 Triângulos	21
2.2 Quadriláteros	26
3 Construções Fundamentais Associadas a Números e Fórmulas	31
3.1 Teorema de Tales	32
3.2 Teorema de Pitágoras	33
3.3 Relações Métricas num Triângulo Retângulo	34
3.4 Construções de Segmentos que Representam um Números	34
3.4.1 Média Aritmética e Média Geométrica	36
4 Áreas e Equivalências	39
5 Discussão e Considerações Finais	43
5.1 Condução do Projeto	45
5.2 Considerações Finais	48
A Construções Geométricas Realizadas no GeoGebra por Estudantes de EJA IV	51
B Construções Geométricas - Atividade $n^{\circ}1$	53
C Construções Geométricas - Atividade $n^{\circ}2$	61
D Construções Geométricas - Atividade $n^{\circ}3$	69

E	Construções Geométricas - Atividade $n^{\circ}4$	73
F	Construções Geométricas - Atividade $n^{\circ}7$	75
G	Construções Geométricas - Atividade $n^{\circ}8$	77
H	Indicador de satisfação dos estudantes	79

Introdução

Aspectos Históricos

No século V a.E.C.,¹ a ciência e matemática grega apresentavam traços bastante distintos em relação aos de outras civilizações como a egípcia e a babilônica. Neste século, conforme relatos históricos, surge as construções geométricas com régua e compasso. Segundo Boyer [4](1974, p.48), “[...] enquanto Anaxágoras esteve preso, ocupou-se com uma tentativa de quadrar o círculo. No obstante, a natureza do problema era a construção com régua e compasso”. Pela descrição do problema sugere tratar-se de uma matemática mais intelectualizada, claramente diferente da matemática voltada para os problemas comuns e pontuais.

O desenvolvimento da Matemática não ocorreu de forma linear e organizada como se apresenta nos livros didáticos. No período entre 5.000.000 a.E.C. e 3.000 a.E.C. aproximadamente, não ocorreram grandes transformações na ciência e na matemática, pois segundo Eves [7](2004), “o modo de produção dos povos das savanas era com base numa cultura de caça, pesca, colheita de grãos e raízes”, similar a de algumas tribos que ainda hoje sobrevivem embreadas nas florestas e não favorecia ao desenvolvimento científico. Entretanto através de processos de adaptação impostas pela natureza aos povos que viviam em vastas extensões territoriais em busca por alimento, surge ao fim de 3.000 a.E.C as primeiras comunidades agrícolas. Se antes os instrumentos de trabalho era um machado de pedra, e pouca utilidade da escrita, a partir de 3.000 a.E.C, os utensílios passam a ser fabricados do ferro, do bronze e o comércio a se desenvolver e conseqüentemente um alfabeto mais organizado ao molde de hoje.

Conforme Eves [7](2004, p.24), “[...] emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio, atualmente o Iraque, e ao longo do rio Amarelo na China”. Essas comunidades criam culturas próprias, a egípcia por exemplo, após longos anos de governos fechado passou a sofrer no fim do último milênio sucessivas invasões, a babilônica mais aberta também ficou expostas às invasões, enquanto à chinesa e indu, sociedades mais fechadas nas quais a ciência e a matemática começam também a se desenvolver. De acordo Eves [7], “entre 1.700 – 1.200 a.E.C. floresceu na Grécia a civilização minóica, que após sucessivas invasões de povos bárbaros surge várias cidades-Estados que entre 800 – 336 a.E.C, já apresentavam avanços

¹a.E.C. Abreviação designa “antes da Era Comum”, usada em substituição a a.C. “antes de Cristo”

intelectuais e realizações no campo da filosofia e da matemática”.

Ainda de acordo com Eves [7](2004, p.93):

A despeito da desunião política, da escassez crônica de alimentos, da superpopulação e do quase permanente estado de guerra, o Período Helênico grego 800 – 336 a.E.C., testemunhou realizações intelectuais extraordinárias. [...] se assentiu pela primeira vez ao emprego do raciocínio dedutivo em matemática o que se deve a Tales de Mileto (640 – 564 a.E.C.) e Pitágoras (586 – 500 a.E.C.).

Entretanto se reconhece as contribuições da geometria egípcia e da álgebra babilônica como a fonte para novos estágios do desenvolvimento da matemática, tal que por volta do século V a.E.C., ocorreu o surgimento das construções com régua e compasso na matemática grega, época dos pitagóricos. Pelos relatos históricos todo leva a crer que os fundamentos e motivações para o desenvolvimento da construtibilidade deve-se à civilização grega. Especular suas origens em outras civilizações tal como a egípcia ou a babilônica, civilizações mais antigas que apresentavam alto grau de desenvolvimento de seus modos de produção, é fato. Entretanto essa possibilidade pode ser arguida negativamente neste sentido, pois a despeito de serem sociedades antigas avançadas, não se tem até então registros que façam alusão a esse tipo de estudos da geometria.

Sobre outras sociedades antigas que também poderia se especular, seriam a chinesa e a indu, porém seja por questões de natureza estrutural dessas sociedades, ou pelo uso de materiais nas suas escritas, sobre os quais os registros são preservados, também não se tem informações neste sentido. Os egípcios usavam pedra e papiros, que apesar da fragilidade deste, os registros tiveram uma existência duradoura em virtude do clima seco da região da África. Os babilônios usavam tábulas de argila fresca, posteriormente secas ao sol ou cozidas. Enquanto chineses e indianos usavam material bastante perecível, como casca de árvore e bambu, mesmo nos registros históricos preservados destas sociedades não se tem informações conclusivas de que as construções com régua e compasso tenha origem nessas civilizações.

No século IV a.E.C. os filósofos gregos, especialmente Platão (428 – 347 a.E.C.), discípulo de Sócrates, tinha forte influência para os rumos da matemática, atribuindo-lhe o papel de um guia e inspirador de outros. Segundo Boyer [4] (1974, p.64):

Platão via na aritmética uma clara separação entre os aspectos teóricos e computacionais, também na geometria ele defendia a causa da matemática pura contra a visão materialista do artesão ou técnico. Plutarco, em sua **Vida de Marcelo**, fala da indignação de Platão em face do uso de aparatos mecânicos em geometria. [...] conseqüentemente, Platão pode ter sido o grande responsável pela restrição, que prevalecia nas construções geométricas gregas, às que podem ser efetuadas só com régua e compasso.

Fatos também corroborados em Eves [7](2004, p.131 e 132):

A importância de Platão na matemática não se deve a nenhuma das descobertas que fez mas, isto sim, à sua convicção entusiástica de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e que, portanto era essencial que fosse cultivado pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu Estado ideal.

As motivações e a opção neste trabalho em usar o software de geometria dinâmica, o GeoGebra, no desenvolvimento de Construções Geométricas sugeridas nos capítulos que se seguem, é o uso de um recurso tecnológico que, de forma similar, substitui os instrumentos euclidianos, na tentativa de enfrentar as dificuldades dos estudantes no aprendizado de geometria plana, no desenvolvimento do raciocínio geométrico e na formulação de argumentos matemáticos que justifiquem resultados obtidos. Embora as Construções Geométricas usando régua sem escala e compasso esteja, segundo Wagner [5] “cada vez mais ausentes dos currículos escolares”, observou-se neste trabalho possibilidades e potencialidades deste tema alinhado ao software de geometria dinâmica em auxiliar estudantes no desenvolvimento matemático de forma mais significativa e motivadora. Deu-se ênfase às construções dos objetos geométricos a partir das construções permitidas, conforme Wagner [5] (2007, p.105):

As construções **permitidas** são: traçar uma reta, conhecendo dois de seus pontos; traçar um círculo, conhecendo o seu centro e um ponto do círculo; determinar as interseções de retas ou círculos já construídos com retas ou círculos já construídos.

Não são permitidos: traçar um círculo de raio ou centro “arbitrário”; usar uma graduação previamente preparada da régua ou do compasso; tomar sobre uma reta um ponto “arbitrário”; deslizar a régua até uma certa posição, etc.

Por outro lado a opção do recursos concordou-se com Geraldo, Caetano e Mattos em [16](2012, p.114):

[...] em uma representação feita com papel e lápis apenas (sem nenhum outro instrumento), as propriedades dos objetos são indicadas apenas pela notação usada. Em geometria dinâmica, por outro lado, **a garantia de validade das propriedades e relações matemáticas do objeto representado é incorporada concretamente no próprio processo de construção da representação**. Desta forma, as próprias experiências de construir representações em geometria dinâmica já constituem, por si só, exercícios que demandam um maior nível de conhecimento matemático dos objetos.

A pesquisa espontânea com questionário estruturado, realizada em setembro de 2017 numa amostra com 20% de 116 professores dos anos finais do ensino fundamental da rede municipal de Camaçari sobre o ensino de Geometria Plana e uso de régua e compasso como recursos auxiliares, revelou-se que:

1º - Sobre o uso de régua e compasso no ensino de Geometria Plana?

- 90% consideram necessários para as demonstrações geométricas.
- 5% consideram necessários somente para o professor de artes ou de desenho geométrico.
- 5% consideram não necessários, pois os alunos não sabem usar.

2° - Se ele, professor usa a régua não graduada?

- 13% disseram sim, com frequência.
- 68% sim, eventualmente.
- 5% não usa, pois não ver utilidade numa régua sem escala.
- 14% não, pois os estudantes não sabem usar.

3° - Sobre o uso de régua e compasso no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Plana?

- 36% responderam sim, bastante frequência.
- 50% sim, eventualmente.
- 14% não, pois não ver necessidade.

4° - Ao ensinar Geometria Plana, além dos conceitos e propriedades dos objetos geométricos, dar ênfase à construtibilidade (construções geométricas com régua e compasso)?

- 75% sim, com frequência conforme o contexto e situação-problema.
- 10% sim, muito pouco, pois não acrescenta conhecimentos na construção das competências e habilidades dos estudantes.
- 10% indicam os que responderam não, pois é de responsabilidade do professor de artes.
- 5% não, pois não tenho o “domínio” deste assunto.

Pela pesquisa há um indicador positivo sobre o uso de instrumentos euclidianos e construções geométricas no ensino de geometria na rede municipal de Camaçari, entretanto ainda persiste o entendimento de que construções geométricas com régua e compasso é o desenho geométrico com outra nomenclatura.

Capítulo 1

Construções Geométricas Fundamentais

Empiricamente o educando tem uma ideia de ponto, reta e plano e conforme cita em Antonio [9] “[...], vamos assumir essas noções como **conceitos primitivos**, isto é, tais que prescindem de definições formais”. Logo o ponto, a reta e o plano euclidiano no software de geometria dinâmica, GeoGebra, serão adotados como entes primitivos, que podem ser construídos a partir das ferramentas do software.

Neste capítulo, apresentou-se construções de objetos geométricos no GeoGebra como composição simples, envolvendo conceitos e propriedades, tendo como premissas as construções geométricas fundamentais permitidas utilizando régua e compasso. Transportar segmento e ângulo, construção de reta perpendicular e paralela, a divisão de um segmento em partes iguais, bissecção de um ângulo, inscrição do quadrado, arco capaz e etc., não é um jogo em si mesmo, mas uma forma dinâmica, atraente e estimulante de aprendizagem da Geometria Plana, incentivando o estudante a desenvolver também, argumentação de validade de cada figura construída, denominada segundo Wagner [5], *figura-solução*.

De acordo com Barbosa em [8] (2012, p.1). “As figuras geométricas elementares, no plano, são os pontos e as retas. O plano é constituído de pontos e as retas são subconjuntos distinguidos de pontos do plano”. Esses objetos geométricos satisfazem aos axiomas, postulados, definições e proposições que serão citados conforme sequência de construções propostas. Segundo Barbosa [8]:

Axiomas da Incidência:

Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.

Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Dizemos que duas retas se *intersectam* quando têm um ponto em comum.

Axiomas de Ordem:

A noção de localização de pontos numa mesma reta satisfaz aos referidos axiomas de ordem.

Dados três pontos distintos de uma reta, só um deles localiza-se entre os outros dois.

Dados dois pontos distintos A e B , sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D , tal que B está entre A e D .

Uma reta r determina exatamente dois semiplanos distintos cuja intersecção é a reta r .

Axiomas sobre Medição de Segmentos:

As noções de medição de segmentos, embora não utiliza-se aqui régua com escala, também são importantes na construção de argumentos de validação de resultados.

A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e somente se os pontos são coincidentes. O referido número é chamado *distância ou comprimento* do segmento determinado pelos dois pontos.

Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais.

Se um ponto C encontra-se entre A e B , então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

Duas retas distintas r e s ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto. A demonstração é notadamente óbvia, pois se a intersecção conter dois ou mais pontos as retas coincidiriam.

Segue algumas definições importantes que dão sustentação aos argumentos matemáticos deste trabalho.

O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado *segmento* AB . Os pontos A e B são denominados *extremos* ou *extremidades* do segmento. A notação AB representa um segmento de extremidades A e B e \overline{AB} o comprimento deste correspondente a determinada medida, ou se escrevermos $AB = a$, interpretar como “medida” de AB numa determinada unidade.

Congruência (símbolo \equiv): Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando eles têm a mesma medida, ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Estamos adotando aqui, ainda segundo Barbosa [8](2012) outras definições:

Existem várias figuras geométricas planas que são formadas por segmentos de retas. O triângulo, por exemplo, a mais simples formada por três pontos não pertencentes a uma mesma reta e pelos três segmentos determinados por estes três pontos. Os três pontos são chamados *vértices* do triângulo e os segmentos, *lados* do triângulo.

Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C , tais que B encontra-se entre A e C , é chamado de *semirreta* de origem A contendo o ponto B .

Dado um segmento AB e um ponto C deste segmento, tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$, o

ponto C é chamado *ponto médio* do segmento dado.

Seja A um ponto do plano e a um número real positivo. O círculo de centro A e raio a é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano, tais que $\overline{AB} = a$.

1.1 Transporte de Objetos Geométricos

O transporte de objetos geométricos no plano é uma forma simples de manipulação das ferramentas e recursos do software de geometria dinâmica, o GeoGebra, assim como a descrição destes através dos próprios processos de construção. O ponto, a reta, o segmento de reta, a semirreta e o círculo são objetos geométricos construídos com um toque da ferramenta selecionada sobre a janela de visualização. Esses objetos são construções permitidas por régua e compasso, e a partir destas, podem ser geradas outras construções fundamentais como encadeamento lógico de novos pontos de intersecções da reta com reta, de reta com círculo e de círculo com círculo já construídos.

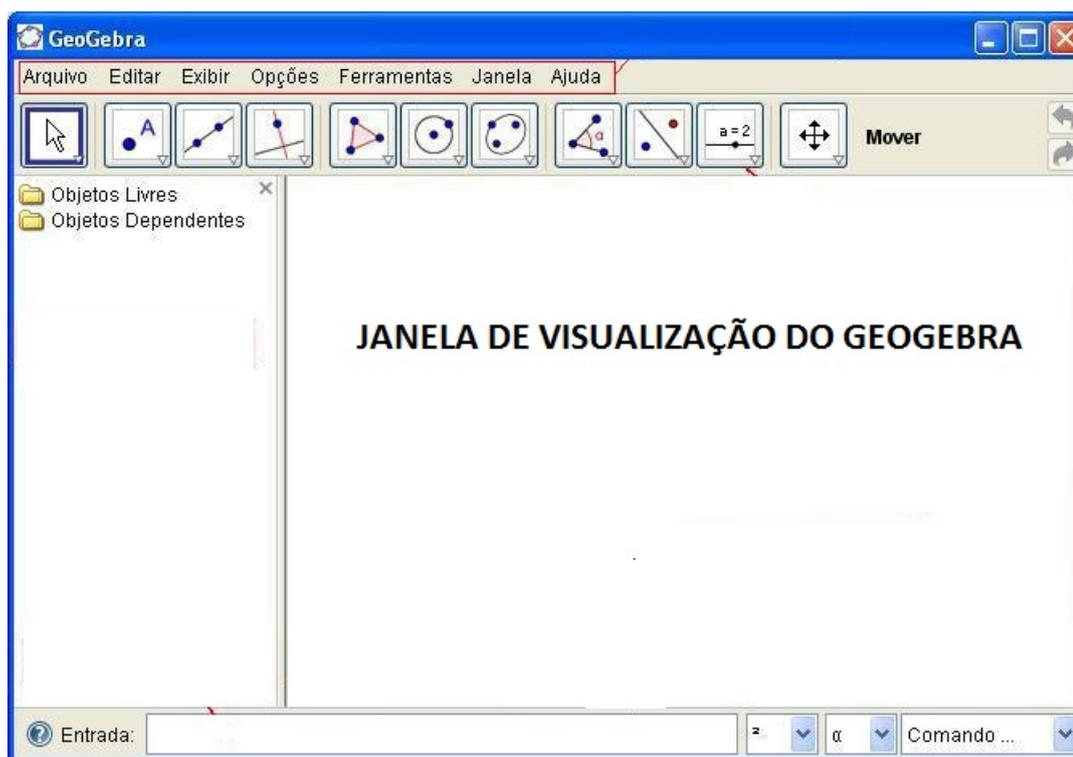


Figura 1.1: Plataforma de Visualização do GeoGebra.

Neste ambiente computacional, usou-se sistematicamente na barra de menus, a janela de arquivo e na caixa de ferramentas, as ferramentas régua e compasso em substituição aos instrumentos físicos euclidianos, cujas funcionalidades se identificam, além da zona algébrica e a zona gráfica. Neste contexto, enquanto objetos construídos com os instrumentos físicos possuem um carácter estático, realizados com as ferramentas do software

incorporam propriedade com característica dinâmica, podendo ser manipuladas no processo de construção da figura-solução, desde que não venha quebrar as regras restritivas impostas às construções geométricas usando régua sem escala e compasso. Esta característica do software possibilitou explorar outras propriedades dos objetos geométricos em construção além das funcionalidades próprias das ferramentas selecionadas.

1.1.1 Segmento

Nesta seção serão abordados, a partir das construções permitidas, outros objetos geométricos, conforme Dolce [10] (2005, p.11), “dados um segmento AB e uma semirreta de origem C , existe sobre esta semirreta um único ponto D tal que CD seja congruente a AB ”.

Exemplo 1.1 (Transporte de Segmento). Dados o segmento AB e a reta \overleftrightarrow{CD} no plano euclidiano, transportar o segmento para a reta dada.

Construção: Construa o segmento AB e a reta \overleftrightarrow{CD} no plano euclidiano do software de geometria dinâmica usando as ferramentas de mesmo nome. Selecione na barra de ferramentas do GeoGebra o compasso, com o auxílio deste, construa e transporte o círculo C_1 de raio \overline{AB} para o centro O pertencente à reta dada. Finaliza-se a construção (Figura 1.2), selecionando o ponto de interseção C do círculo com a reta. Conclusão, $\overline{OC} = \overline{AB}$.

Comentário: O raio do círculo construído C_1 é igual ao comprimento do segmento AB , logo $\overline{OC} = \overline{AB}$.

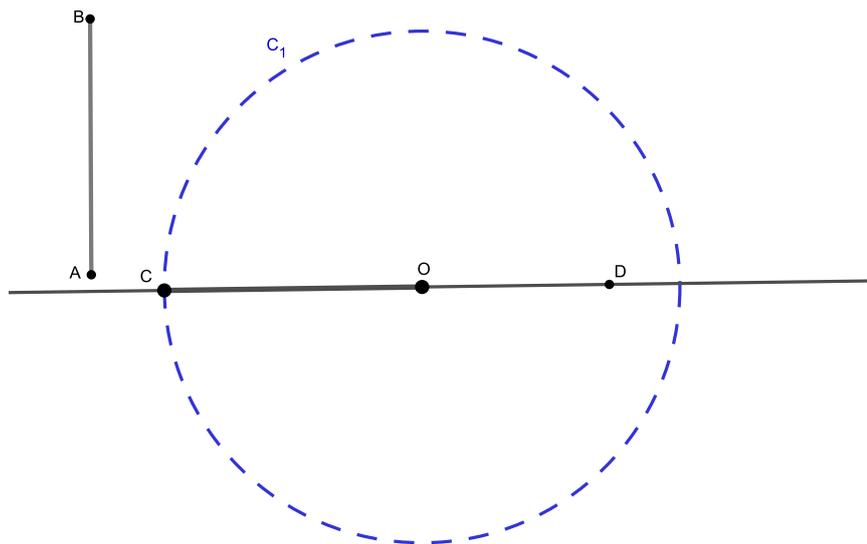


Figura 1.2: Transporte do segmento AB para a reta.

Exemplo 1.2 (Transporte de Segmentos). Dados os segmentos AB , CD e a reta s , com o auxílio da ferramenta compasso, construir os segmentos EF e GH de modo que se tenha

$$\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD} \text{ e } \overline{GH} = 2 \cdot \overline{CD}.$$

Construção: Com o auxílio das ferramentas do software e do plano de construção do Exemplo 1.1, construa a reta s , os círculos C_1 de centro F pertencente à reta dada e raio \overline{CD} , C_2 de raio \overline{AB} e centro G , intersecção da reta com C_1 , desta forma se conclui que $\overline{EG} = \overline{AB}$ e $\overline{GF} = \overline{CD}$.

Comentário: Pelos Axiomas sobre Medição de Segmentos, segue daí os resultados esperados, ou seja, $\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$ e $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{CD}$ (Figura 1.3).

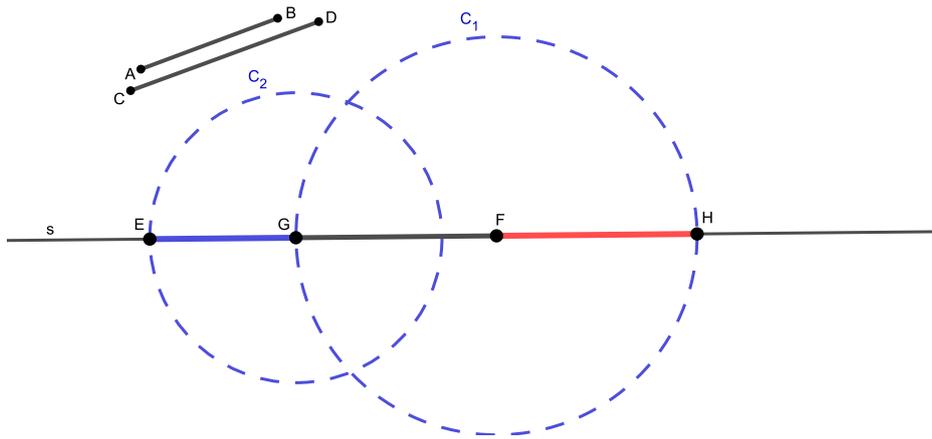


Figura 1.3: Transporte dos segmentos AB e CD para a reta.

Exemplo 1.3 (Transporte de Segmento para o Círculo). Dados um segmento de comprimento a e um círculo de raio b , transportar o segmento tal que as possíveis cordas AB tenham comprimento a .

Construção: Utilizando o compasso, traça-se o círculo C_1 de raio b e centro num ponto O qualquer do plano. Seleccionando um ponto A pertencente ao círculo C_1 , traça-se C_2 com o centro neste ponto e raio a , que intersecta C_1 em B e B' , concluindo que $\overline{AB} = \overline{AB'} = a$.

Comentário: Escolhido o ponto A a figura-solução, (Figura 1.4), tem no máximo duas cordas que, por construção, tem comprimento igual ao raio de C_2 .

1. Se $a < 2b$, há duas cordas possíveis.
2. Se $a = 2b$, há uma corda somente.
3. Caso contrário, nenhuma corda é possível.

1.1.2 Ângulo

Barbosa [8](2012, p.35), “Chamamos de *ângulo* a figura formada por duas semirretas com a mesma origem. As semirretas são chamadas de *lados do ângulo* e a origem comum, de

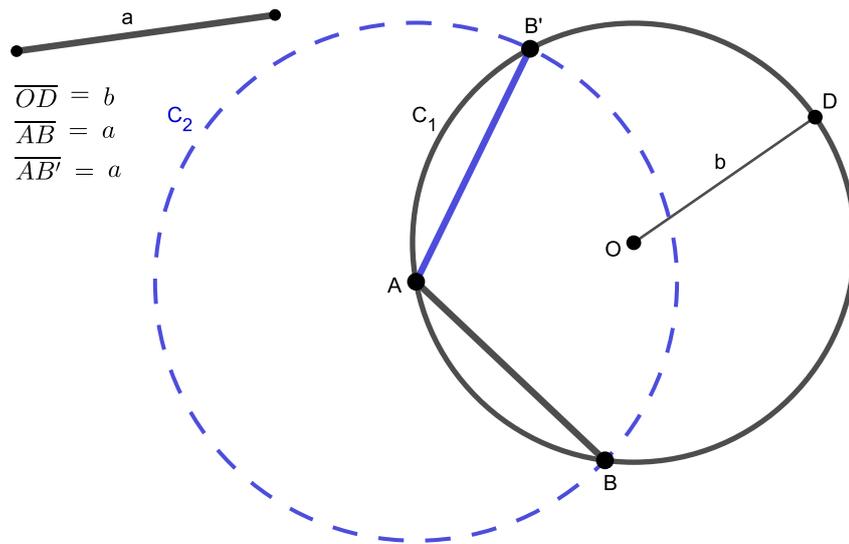


Figura 1.4: Transporte de um segmento para o círculo.

vértice do ângulo”. Se dois ângulos tem um lado comum, são consecutivos e se além disso não têm pontos internos comuns são *adjacentes*.

Observe que a ideia da medição de ângulo, semelhante aos segmentos, satisfaz aos axiomas de Medição de Ângulo e de Divisão, a seguir:

Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semirretas coincidentes.

Se uma semirreta \overrightarrow{OC} divide um ângulo $\angle(AOB)$, então $\angle(AOB) = \angle(AOC) + \angle(COB)$.

A congruência entre ângulos é uma noção primitiva análoga à congruência de segmentos, ou seja, diremos que dois ângulos $\angle(AOB)$ e $\angle(COD)$ são congruentes se eles têm a mesma medida.

Outra definição importante para a construção de argumentação nesta secção é a congruência de triângulos que será mais detalhada no Capítulo 2.

Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

A definição anterior conduz ao seguinte critério de congruência: Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

O transporte de ângulo também é uma construção fundamental que possui um plano de construção elementar básico para outras construções por régua e compasso, conforme Dolce em [10](p.23):

Dado um ângulo $\angle AOB$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano, e num dos semiplanos que $\overrightarrow{O'A'}$ permite determinar, uma única

semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $\angle A'O'B'$ congruente ao ângulo $\angle AOB$.

Exemplo 1.4 (Transporte de Ângulo). Usando o compasso, transportar o ângulo dado $\angle ABC$ para a reta s .

Construção: Dado o ângulo $\angle ABC$ e a reta s , selecione um ponto A sobre um dos lados do ângulo de vértice B e com auxílio do compasso construa o círculo C_1 . Tome um ponto D pertencente à reta dada como centro e construa C_2 tal que o raio $\overline{DE} = \overline{BA}$. Com abertura \overline{AC} e centro em E conduzir C_3 que intersecta C_2 no ponto F . Como a corda $\overline{EF} = \overline{AC}$, se conclui que os arcos por elas determinados subtendem ângulos centrais congruentes conforme a figura-solução, Figura 1.5.

Comentário: Por construção o raio de C_2 é igual ao de C_1 , e $\overline{EF} = \overline{AC}$, logo pelo critério *LLL* os triângulos EDF e ABC são congruentes. Portanto o $\angle(EDF) = \angle(ABC)$ (Figura 1.5).

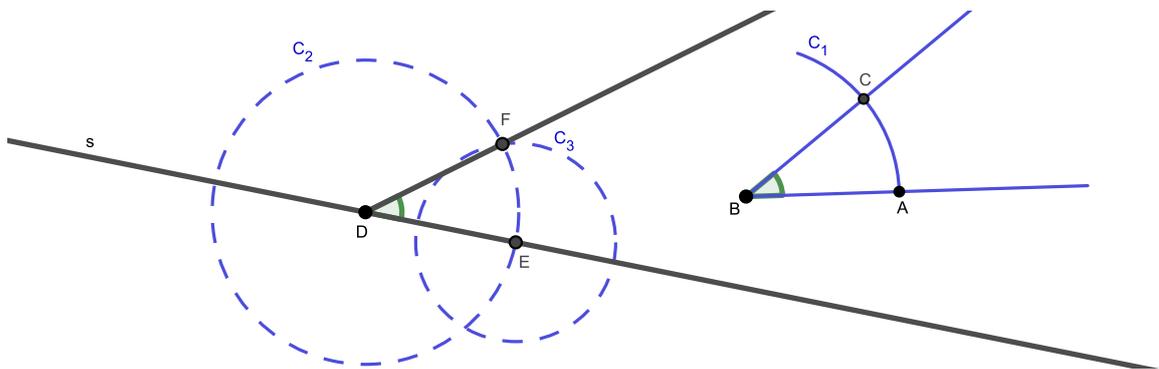


Figura 1.5: Transporte do ângulo $\angle ABC$.

1.2 Construções com Base nos Postulados de Euclides

Nessa secção são apresentadas construções geométricas usando os postulados de Euclides, e as definições abaixo irão sustentar os argumentos do plano de construção dos objetos apresentados.

Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.

Duas retas são paralelas se, e somente se, são coincidentes ou são coplanares e não têm nenhum ponto comum.

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo formado por esses mesmos lados, então os triângulos são congruentes.

Exemplo 1.5 (Construção da Reta Perpendicular). Dados uma reta r e um ponto P qualquer, traçar por este, uma reta perpendicular à reta dada.

Construção: Seja P um ponto do plano euclidiano e r a reta dada. Neste caso tem-se duas situações a considerar:

- P não pertence a reta r .
- P pertence a reta r .

• Se P não pertence à reta r , então usando o compasso com centro no ponto dado, construa o círculo C_1 de raio qualquer, tal que intersecte a reta r nos pontos G e F . Com o raio igual a \overline{GF} e centro em G e F , traça-se os círculos C_2 e C_3 que se intersectam nos pontos J e E . A reta conduzida por estes é perpendicular à reta r pelo ponto P , (Figura 1.6).

Comentário: Os triângulos JGB e BFJ são congruentes pelo critério LAL , logo os ângulos $\angle JBG$ e $\angle JBF$ são suplementares e congruentes, portanto a reta suporte por JE é perpendicular à reta r . Observe que, se a perpendicular intersecta a reta dada no ponto B tal que $\overline{GB} = \overline{BF}$, então B é ponto médio de \overline{GF} .

• Se P pertence a reta, a construção da figura-solução, (Figura 1.7), é análogo à construção da figura-solução, (Figura 1.6). Esse mesmo procedimento pode ser utilizado para obter o ponto médio de um segmento dado e também da mediatriz.

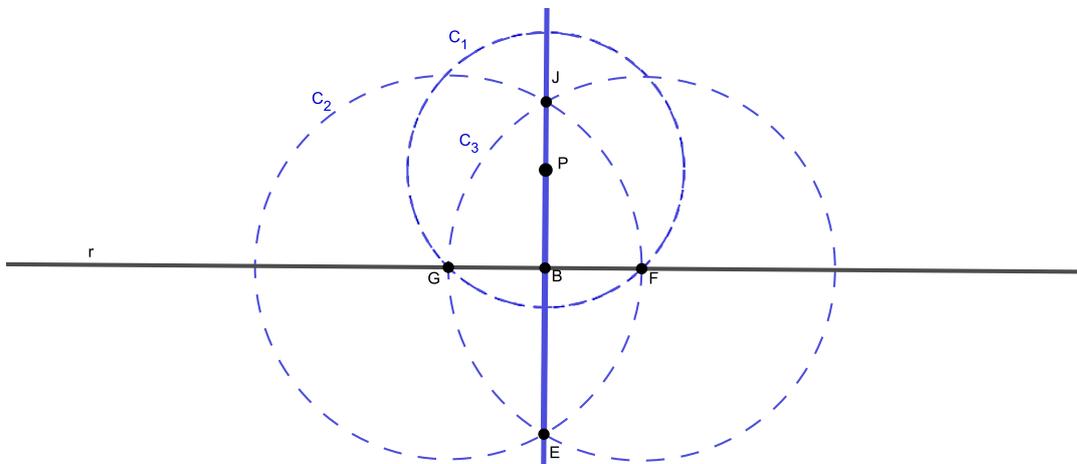


Figura 1.6: Perpendicular por um ponto fora da reta dada

Exemplo 1.6 (Construção da Perpendicular por uma das Extremidades de um Segmento). Dado um segmento \overline{AB} , construir uma perpendicular por uma de suas extremidades.

Construção: Com o centro em um ponto qualquer O , não pertence ao segmento \overline{AB} e raio \overline{OA} ou \overline{OB} , conforme a extremidade, construa o círculo C_1 tal que intersecte o segmento dado em um ponto C . Prolongando o segmento CO encontra o círculo C_1 em D . A reta \overleftrightarrow{AD} é solução do problema proposto, Figura 1.8.

Comentário: Da fato, o segmento \overline{CD} é o diâmetro do círculo C_1 e também um dos

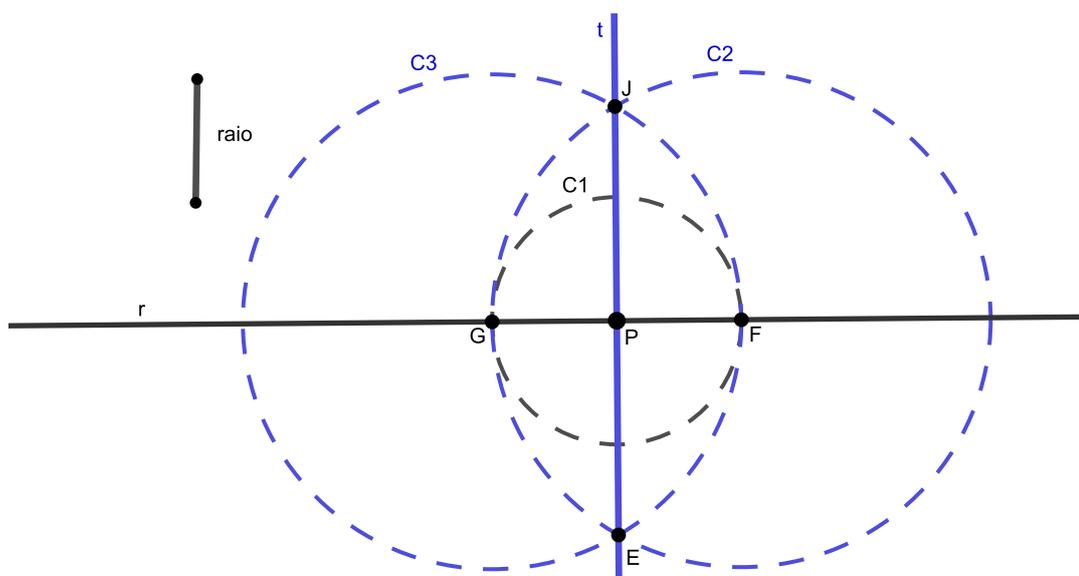


Figura 1.7: Perpendicular por um ponto pertencente à reta

lados do triângulo ACD , inscrito no semicírculo do vértice A , portanto o vértice A deste triângulo corresponde a um ângulo reto, sendo assim o ACD é um triângulo retângulo. Logo \overline{AD} é perpendicular ao segmento \overline{AB} pela extremidade A .

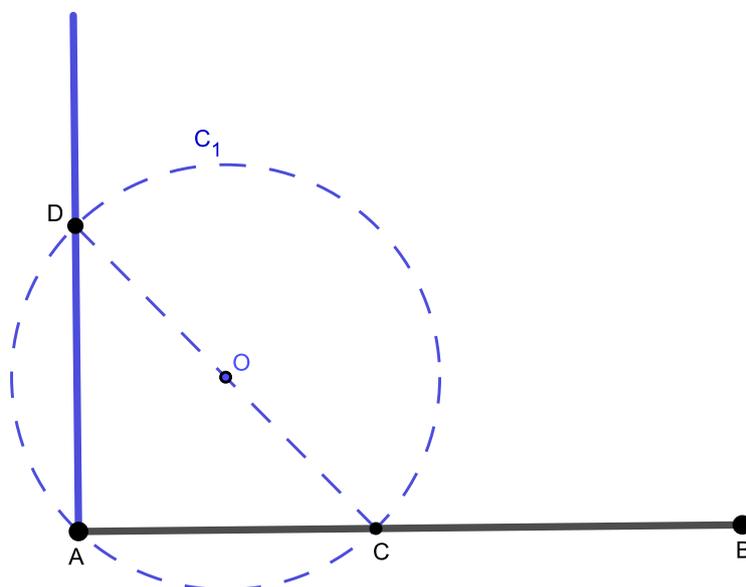


Figura 1.8: Perpendicular pela extremidade do segmento

Exemplo 1.7 (Construção de Reta Paralela). Construir uma paralela à reta r , por um ponto P não pertencente à reta dada.

Construção: Com o auxílio das ferramentas Ponto e Reta do GeoGebra, represente na janela de visualização do software a reta r e ponto P fora da reta. Com centro em P

traça-se o círculo C_1 de raio tal que, intersecte a reta dada num ponto A . Com centro A e mesmo raio, traça-se C_2 que intersecta a reta em B . Finaliza-se a construção centro em B e o mesmo raio, traçando C_3 que intersecta C_1 em C .

Comentário: A reta \overleftrightarrow{CP} é paralela à r . De fato, como os círculos construídos tem mesmo raio, $ABCP$ é um losango, logo a reta conduzida pelos pontos P e C é paralela à reta r , Figura 1.9.

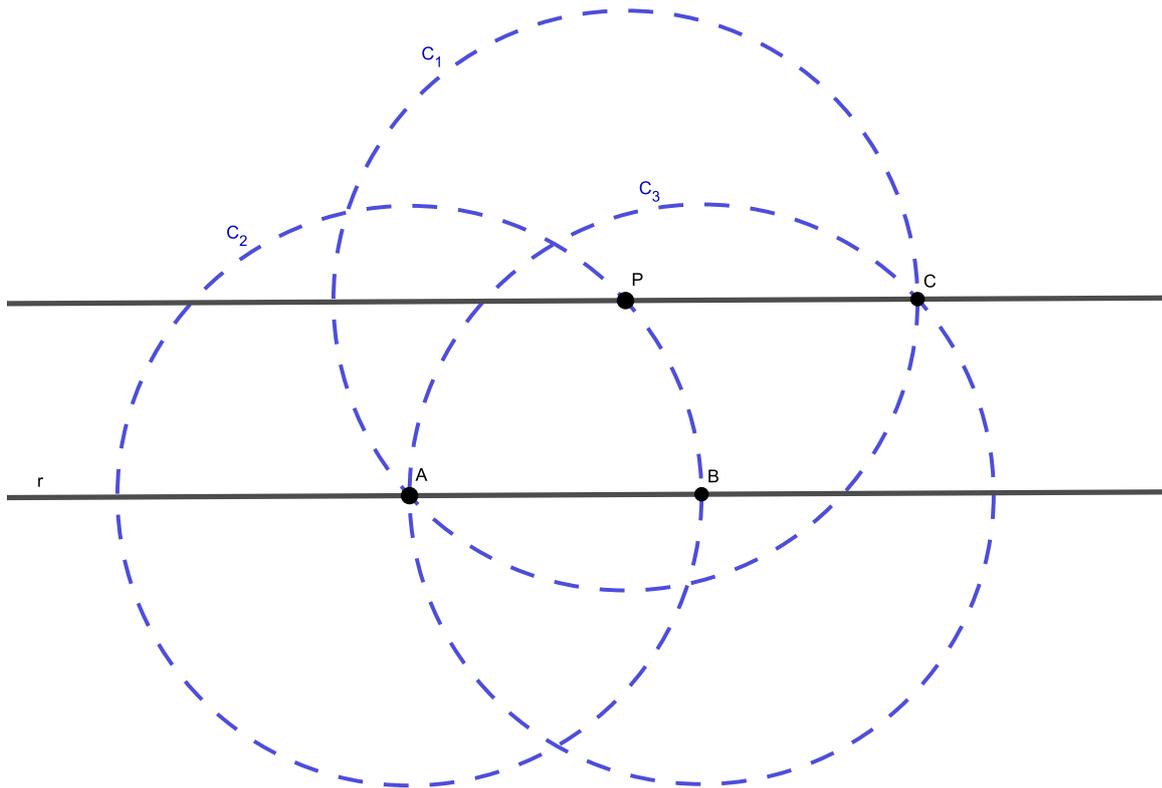


Figura 1.9: Reta paralela

Exemplo 1.8 (Divisão de um segmento em n partes iguais). Dividir um segmento \overline{AB} em 6 partes iguais.

Construção: Pela extremidade A do segmento AB traça-se uma semirreta auxiliar \overrightarrow{AY} . Usando a ferramenta compasso se constrói os segmentos AC , CD , DE , EF , FG e GH de mesmo comprimento. Pelo que foi visto no Exemplo 1.7, se constrói as retas \overleftrightarrow{BH} e \overleftrightarrow{GJ} que intersecta o segmento AB em K . Sucessivamente se obtém por F , E , D e C as retas paralelas à \overleftrightarrow{BH} , que intersectam AB em L , M , N e O , respectivamente, completando a divisão do segmento dado em 6 partes iguais (Figura 1.10).

Comentário: Como os círculos C_1 , C_2 , C_3 e C_4 foram construídos com o mesmo raio e os segmentos na semirreta \overrightarrow{AX} são de comprimentos iguais e as paralelas à reta \overleftrightarrow{HB} por cada ponto de divisão impõe também, sobre o segmento AB , uma divisão de razão 1 : 1.

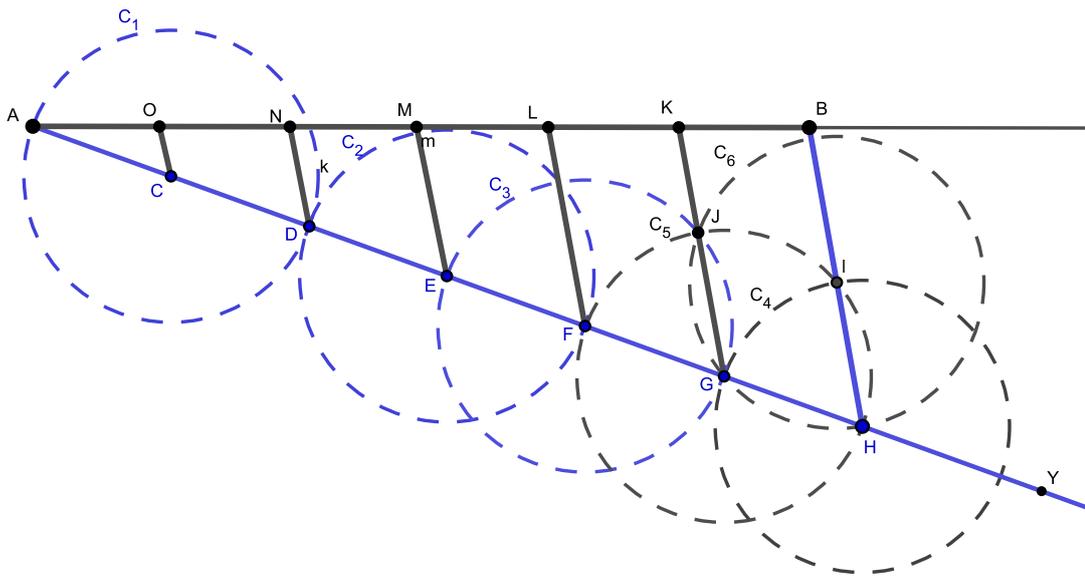


Figura 1.10: Divisão de um segmento na razão 1:1

Exemplo 1.9 (Bissecção de um Ângulo). Usando a régua e o compasso do ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra, construir a bissetriz do $\angle(BAC)$ dado.

Construção: A semirreta \overrightarrow{AG} é bissetriz do ângulo $\angle(BAC)$ se esta o divide em dois ângulos congruentes, (Figura 1.11). Tome um ponto B pertencente à semirreta \overrightarrow{AY} , e com centro em A , abertura do compasso igual a \overline{AB} , construa C_1 , determinando sobre o outro lado do ângulo o ponto C . Com centro em B e em C , raio maior que a metade do comprimento de BC traça-se os círculos C_2 e C_3 que intersectam em G , logo a semirreta \overrightarrow{AG} bissecta o ângulo dado.

Comentário: De fato, na figura-solução (Figura 1.11), os triângulos ABG e AGC são congruentes pelo critério LLL, portanto o $\angle(BAG)$ e $\angle(GAC)$ possuem a mesma "abertura". Portanto a semirreta de origem em A por G é a bissetriz do $\angle BAC$.

Exemplo 1.10 (Ângulo de 30°). Usando régua e compasso, construir um ângulo de 30° .

Construção: Construa uma semirreta \overrightarrow{AX} e a identifique como um dos lados do ângulo. Com o auxílio do compasso e tomando um ponto B entre A e X construa o círculo C_1 de centro em A e raio \overline{AB} . Com o mesmo raio e centro em B traça-se o círculo C_2 que intersecta C_1 no ponto C . De forma análoga, com centro em C e o mesmo raio \overline{AB} se constrói C_3 , que intersecta C_2 em D . A semirreta \overrightarrow{AD} bissecta o ângulo $\angle(BAC) = 60^\circ$.

Comentário: Pelo critério LLL, os triângulos ACD e ABD são congruentes. De fato, os círculos C_1 , C_2 e C_3 foram construídos sob o mesmo raio e o segmento AD é um lado comum, logo o ângulo $\angle(BAD) = \angle(DAC)$. Portanto pelo Exemplo 1.9, a semirreta \overrightarrow{AD} é a bissetriz interna do ângulo $\angle(BAC)$ conforme construção da figura-solução (Figura 1.12). De onde se conclui que o ângulo $BAD = 30^\circ$.

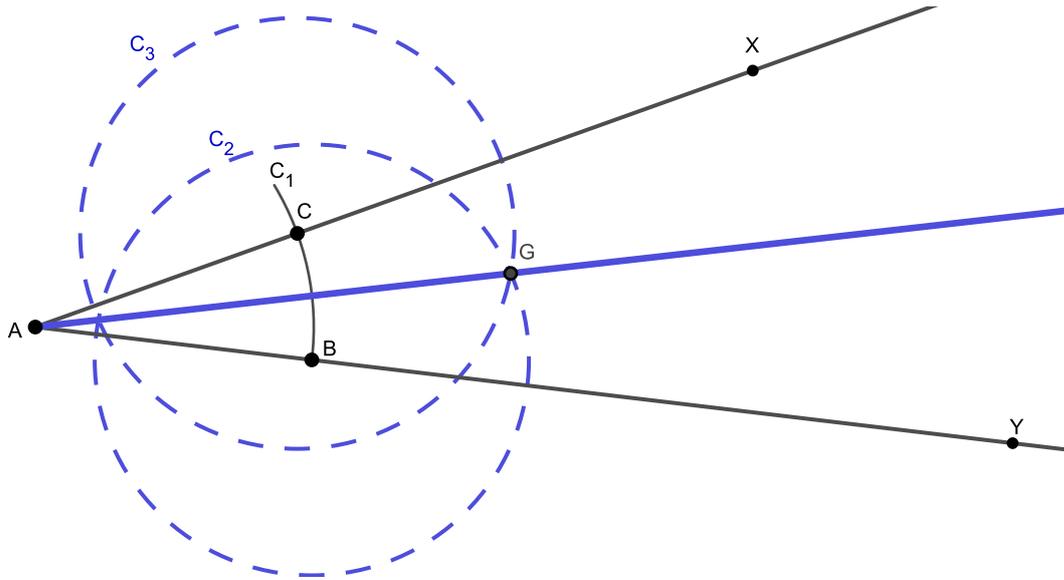
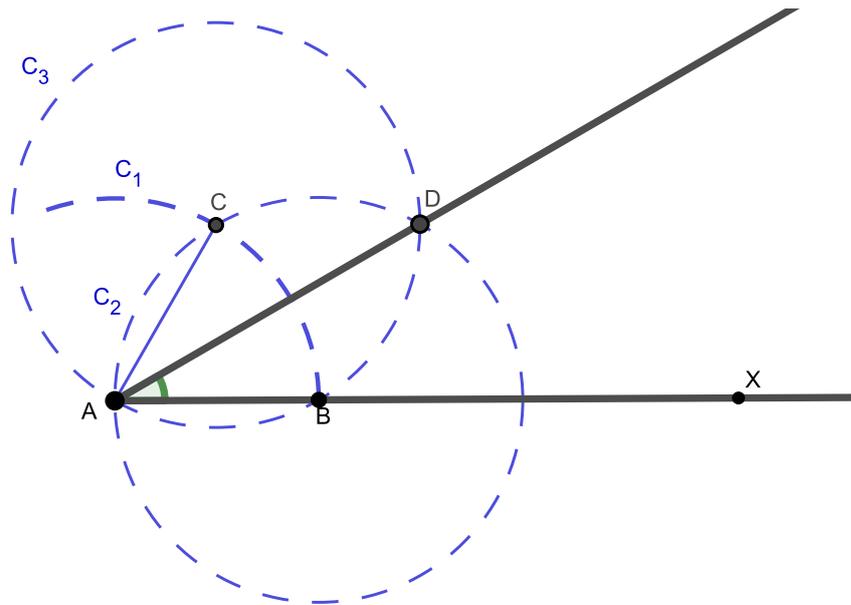


Figura 1.11: Bissetriz Interna

Figura 1.12: Construção do ângulo de 30°

Exemplo 1.11 (Inscrição de um Quadrado). Inscrever com régua e compasso um quadrado num círculo de raio dado.

Construção: Com o auxílio do compasso construa o círculo de raio dado. Por um ponto A qualquer pertencente ao círculo construa um diâmetro \overline{AC} e um outro \overline{BD} perpendicular ao anterior, tal que os pontos A, B, C e D dividem o círculo em quatro arcos de mesma medida, os quais são vértices do quadrado inscrito ao círculo (Figura 1.13).

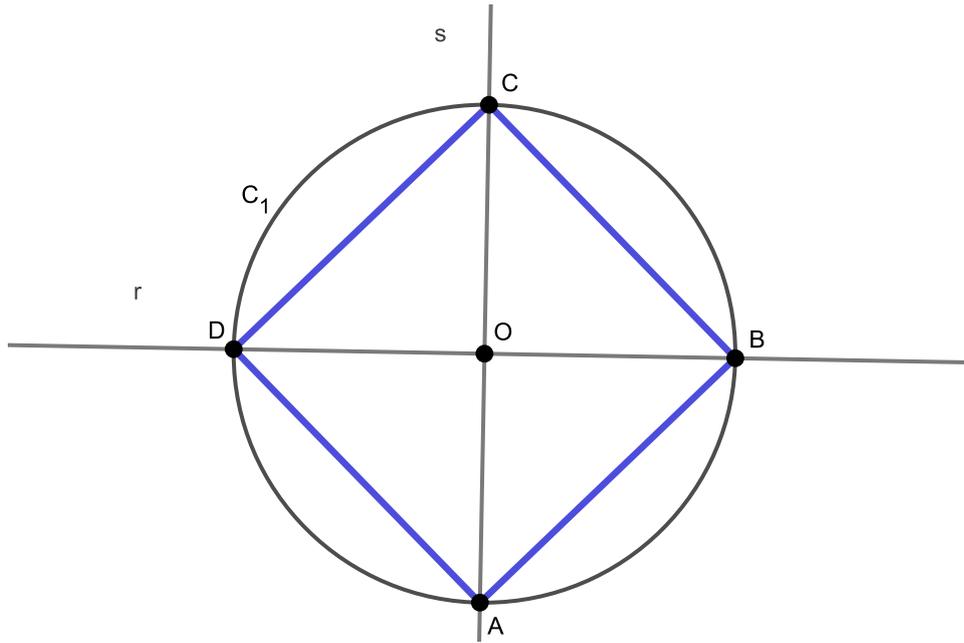


Figura 1.13: Quadrado inscrito no círculo

Exemplo 1.12 (Arco Capaz). Um conjunto de pontos do plano que gozam de uma determinada **propriedade** será denominado *lugar geométrico*.

O lugar geométrico dos pontos do plano tal que são capazes de “enxergar” um determinado segmento sob um ângulo constante (conhecido), denominaremos *arco capaz*.

Dado um segmento AB e o ângulo $\sphericalangle \beta$, construir com régua e compasso do ambiente de geometria dinâmica o arco capaz de β sobre o segmento dado.

Construção: Recorrendo à construção de Transporte de Ângulo no Exemplo 1.4, transporte para uma das extremidades do segmento AB (extremidade A), o ângulo β tal que o ângulo $\widehat{J\hat{A}H} = \beta$. Trace a reta perpendicular a \overline{AB} pelo ponto médio M (a mediatriz), e pela extremidade A uma perpendicular à semi-reta AX , lado do ângulo transportado. A intersecção desta com a mediatriz determina o ponto O , centro do arco capaz de acordo com a figura-solução (Figura 1.14).

Comentário: Restringindo aos pontos de um dos semiplanos que a reta \overleftrightarrow{AB} determina, sendo AB o segmento dado e α um ângulo tal que $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, os pontos V do plano tais que $\widehat{AVB} = \alpha$ é a reunião de dois arcos de círculo simétricos em relação à reta \overleftrightarrow{AB} com os pontos A e B em comum, tais arcos são os *arcos capazes* do ângulo α em relação ao segmento AB .

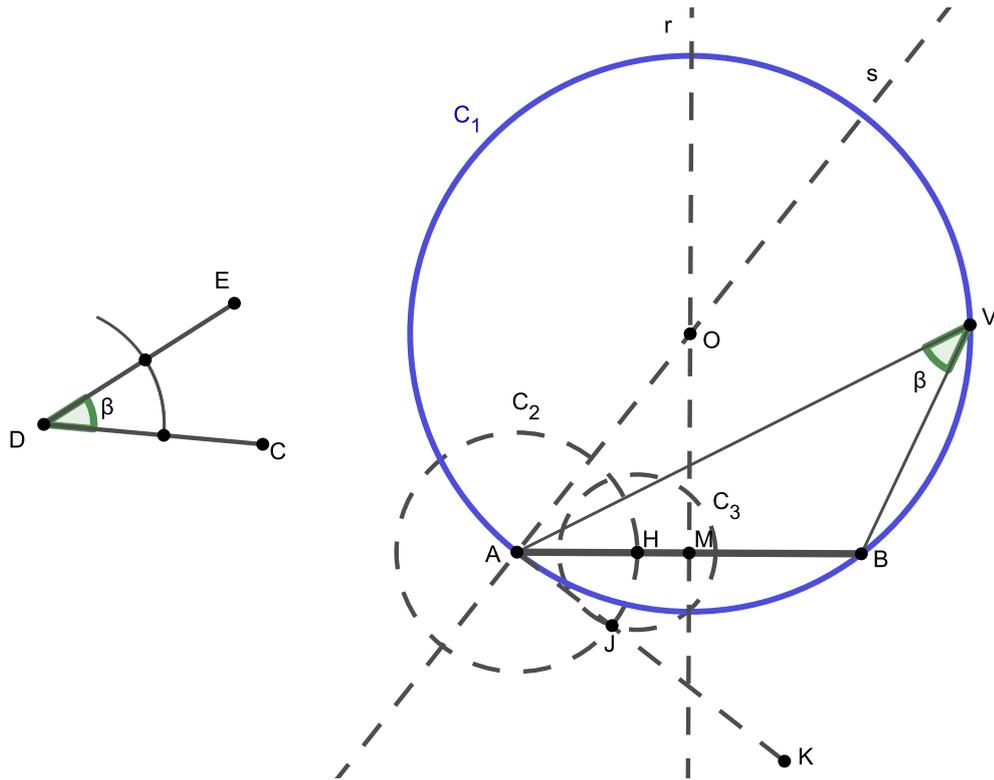


Figura 1.14: Construção do arco capaz

1.3 Ponto, Reta e Círculo

Nesta secção estudaremos outras construções geométricas envolvendo ponto, reta e círculo. Afirmamos que podemos traçar um círculo, dados o centro e o raio.

- Se uma reta é tangente a um círculo, então o intersecta em um único ponto.
- Toda reta perpendicular a um raio pela sua extremidade no círculo é tangente ao círculo.
- Toda tangente a um círculo é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Exemplo 1.13 (Círculo). Construir uma circunferência passando por três pontos dados A , B e C , não pertencentes a mesma reta.

Construção: Ligando os pontos A e B pelo segmento AB e os pontos C e D pelo segmento CD , depois usando o plano de construção no Exemplo 1.5, traça-se a mediatriz de cada segmento que se intersectam em O , centro do círculo pedido.

Comentário: As mediatrizes construídas intersectam em O , portanto equidistante das extremidades A , B e C . Segue que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ igual ao raio do círculo da figura-solução, (Figura 1.15).

Exemplo 1.14 (Tangente ao Círculo). Construir uma tangente ao círculo dado C_1 , pelo ponto de tangência P .

Construção: Ligue por um segmento o centro O ao ponto P que pertence a C_1 . Com

Exemplo 1.15 (Tangentes ao Círculo). Construir tangentes a um círculo C dada, passando por um ponto exterior P .

Construção: Ligue o centro O do círculo ao ponto P pelo segmento OP . Com auxílio do compasso e raio igual a \overline{OP} traça-se os círculos C_1 e C_2 de centros P e O , nesta ordem, que se intersectam nos pontos A e B . Traçe o segmento AB que intersecta OP em F , e com centro em F e raio igual a \overline{OF} o círculo C_3 que intersecta o círculo dado nos pontos P_1 e P_2 , os quais são os pontos das tangentes ao círculo C . Note que cada tangente é perpendicular ao raio, no ponto de tangencia.

Comentário: Pelo Exemplo 1.6 da Secção 1.2 e o plano de construção da figura-solução (Figura 1.17), se conclui que os triângulos OP_1P e OPP_2 são retângulos, retos nesta ordem em P_1 e P_2 , pois estão inscritos num semicírculo. Logo as retas por PP_1 e PP_2 são as tangentes procuradas.

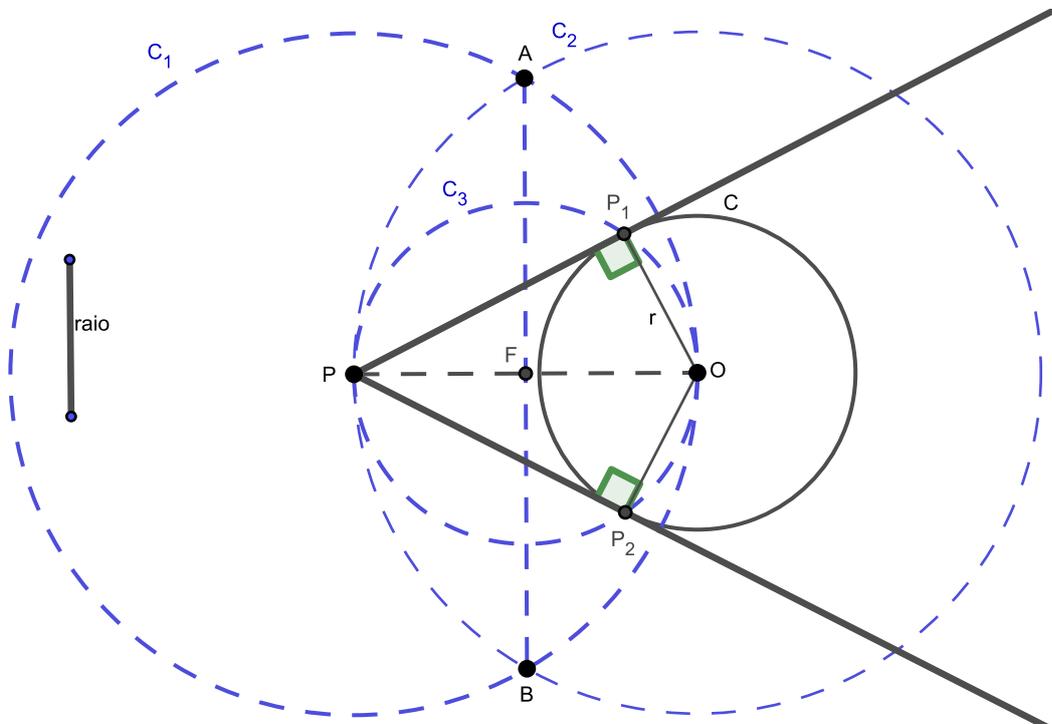


Figura 1.17: Retas tangentes ao círculo

Capítulo 2

Polígonos

Este capítulo propõe a construção de alguns objetos geométricos fundamentais para formação em geometria na educação básica que envolve triângulos e quadriláteros. Na Secção 2.1 sobre triângulos, focou-se especialmente às construções sobre os critérios de congruência de triângulos, alguns citados preliminarmente no Capítulo 1 e outros que também serão abordados aqui de forma criteriosa, e na Secção 2.2 sobre quadriláteros foram elaboradas construções desses polígonos que compõem os conteúdos conceituais de geometria no ensino fundamental.

2.1 Triângulos

Diremos que se três pontos não pertencentes a uma mesma reta, chamados *não colineares*, formam um triângulo, e A , B e C são os tais pontos, então o triângulo possui vértices A , B e C . Os segmentos AB , BC e AC são os *lados*, cujo comprimento indicaremos por $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

Exemplo 2.1. Construir um triângulo dados os lados c, a e o ângulo α formado pelos lados com essas medidas.

Construção: Por dois pontos distintos do plano B e X , construa uma semirreta auxiliar \overrightarrow{BX} e usando o plano de construção do Exemplo 1.4 transporte o $\angle(JKL) = \alpha$ para o ponto B de origem da semirreta, através dos círculos C_1 de centro B e raio \overline{KJ} que intersecta a semirreta em M e C_2 de centro M e raio \overline{JL} que intersecta C_1 em N . Finalize a construção construindo os círculos C_3 com centro em B e raio de comprimento a que intersecta o lado do ângulo em C e C_4 também com centro em B e raio igual a c que intersecta a semirreta \overrightarrow{BX} .

Comentário: Observa-se que embora a construção tenha iniciado pelo transporte do ângulo, poderia iniciar por um dos lados a ou c , que sob essas condições a figura-solução (Figura 2.1) é única, caracterizando o critério de congruência LAL (lado, ângulo, lado).

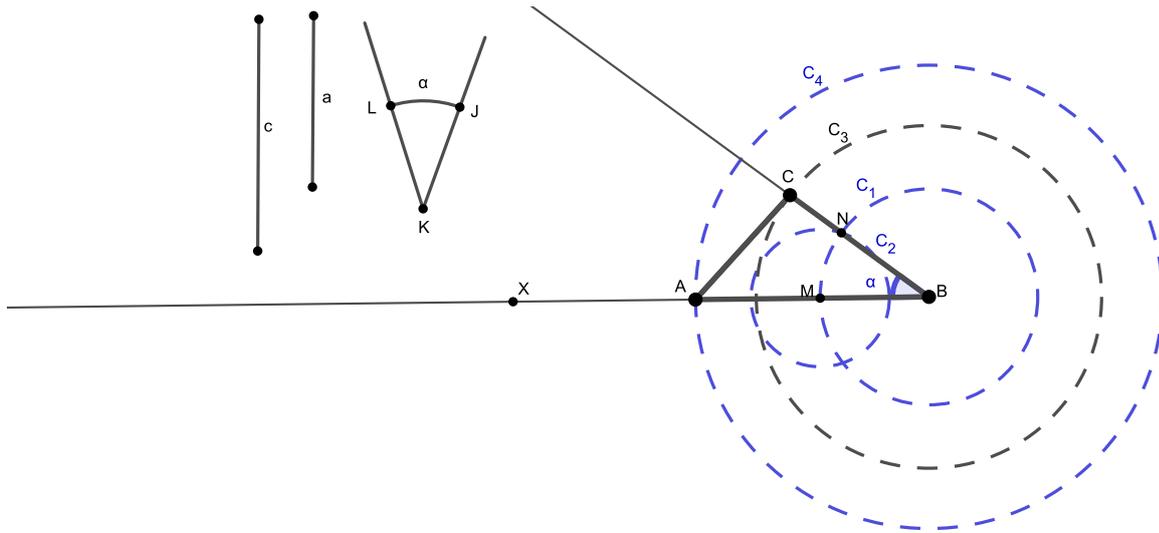


Figura 2.1: Construção do triângulo ABC , dados: lado, ângulo, lado

Exemplo 2.2. Construir o triângulo ABC , dados o ângulo $\widehat{\angle A} = \theta$ e $\widehat{\angle B} = \beta$ e o lado $\overline{AB} = c$.

Construção: Tome dois pontos distintos do plano B e X e construa uma semirreta auxiliar \overrightarrow{BX} . Pelo Exemplo 1.1 transporte para a semirreta \overrightarrow{BX} , através do círculo C_1 de centro B , o segmento de medida c tal que $\overline{AB} = c$ e pela Subsecção 1.1.2 transporte os ângulos θ e β para a mesma semirreta tais que, o ângulo $A = \theta$ e o ângulo $B = \beta$.

Comentário: Naturalmente o vértice C do triângulo é a intersecção dos lados não comuns dos ângulos dados. Observa-se também que o resultado da figura-solução independe de ordem no plano de construção, logo a Figura 2.2 é única, caracterizando o critério geral de congruência de triângulos ALA (ângulo, lado, ângulo).

Exemplo 2.3. Construir o triângulo ABC , dados os lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e o ângulo $\widehat{\angle A} = \theta$.

Construção: Tomando dois pontos distintos A e X no plano e construa uma semirreta auxiliar \overrightarrow{AX} . Pelo Exemplo 1.1 transporte o segmento de comprimento c para a semirreta através do C_1 com o centro em A tal que $AB = c$, e conforme o Exemplo 1.4 transporte o $\angle(LPQ) = \theta$ para o ponto A , origem da semirreta, através dos círculos C_2 de centro A e raio \overline{PQ} , que intersecta a semirreta em E e C_3 de centro E e raio \overline{LQ} que intersecta C_2 em J , logo a semirreta de origem em A traçada por J é o outro lado do ângulo transportado. Com centro em B e raio a , traça-se o círculo C_4 que intersecta a semirreta \overrightarrow{AY} nos pontos C e D .

Comentário: A figura-solução (Figura 2.3), apresenta dois triângulos ABC e ABD igualmente compatíveis com os dados do problemas. Isto evidencia três situações possíveis:

1. Se $a > c$ haverá um único triângulo satisfazendo a figura-solução.
2. Se $a = c \cdot \sin \theta$ o resultado final será triângulo ABC , reto em C e único.

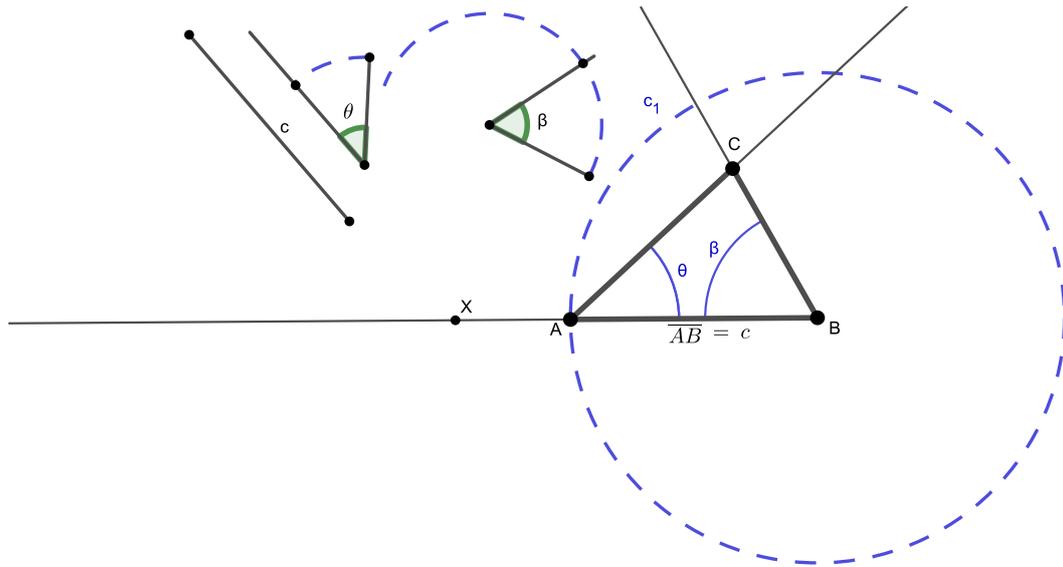


Figura 2.2: Construção do triângulo ABC , dados: ângulo, lado, ângulo

3. Se $a < c \cdot \text{sen } \theta$ não haverá triângulo solução.
4. Se $c \cdot \text{sen } \theta < a < c$ haverá dois resultados possíveis conforme a Figura 2.3.

A inexistência de um triângulo solução, ou mais que um, depende do comprimento do segmento a , tendo o lado $\overline{BC} = a$. Portanto se conclui que o critério LLA (lado, lado, ângulo) não é um critério geral de congruência de triângulos.

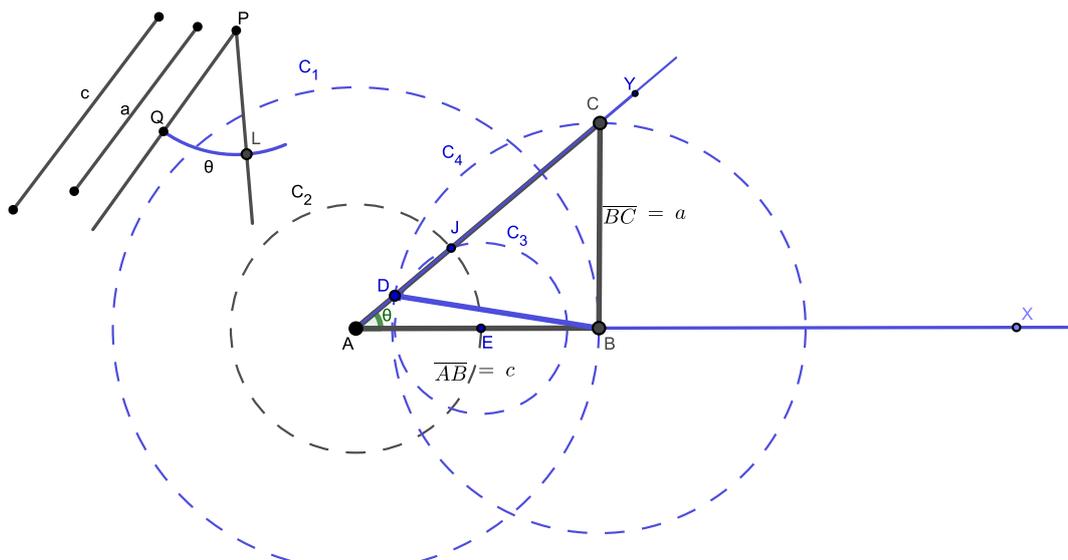


Figura 2.3: Construção do triângulo ABC , dados: lado, lado, ângulo

Exemplo 2.4. Construir o triângulo ABC , dados os lados a , b e c .

Construção: O plano de construção do triângulo, dados os lados, é bastante simples.

Tome uma semirreta auxiliar \overrightarrow{AX} e transporte para esta, um dos segmentos dados que representa o comprimento do lado do triângulo, por exemplo o lado c . Com centro em A e raio igual b construa o círculo C_2 , e pra finalizar, com centro em B e raio igual a a traça-se C_3 que intersecta C_2 em dois pontos distintos, selecionando um desses como o vértice C a figura-solução estará concluída, (Figura 2.4).

Comentário: Observa-se que ao começar a construção por um dos lados, seja a ou b o resultado final não alteraria, o que caracteriza o critério geral de congruência LLL (lado, lado, lado).

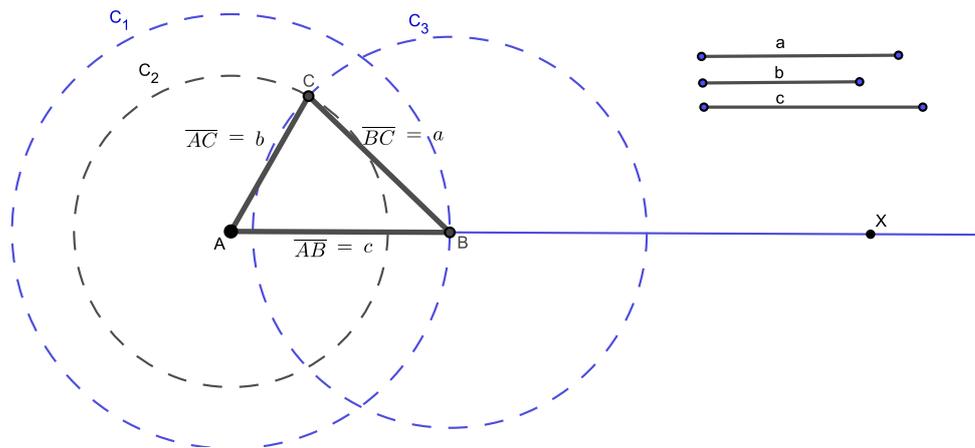


Figura 2.4: Construção do triângulo ABC , dados: $a, b, e c$

Exemplo 2.5. Construir o triângulo ABC , dados os comprimentos a e b dos respectivos lados BC e AC , e a altura h relativa ao lado BC .

Construção: No Exemplo 1.1 vimos como transportar um segmento para a reta e no Exemplo 1.6, a construção de uma reta perpendicular por uma das extremidade do segmento dado. Transporte o segmento de comprimento a para a reta suporte r tal que $BC = a$ e por uma das extremidades de BC , a extremidade B por exemplo, trace a perpendicular por essa extremidade. Sobre a perpendicular traçada assinale o ponto G tal que $BG = h$, através do círculo C_1 de centro em B e raio igual a $h = h_1$. Usando o plano de construção do Exemplo 1.7 na Secção 1.2, conduzir por G a reta s paralela à r . Com o centro em C e raio igual a b traça-se o círculo C_3 que intersecta a reta s nos pontos A e A' que representam o terceiro vértice do triângulo pedido.

Comentário: A figura-solução (Figura 2.5) apresenta dois resultados possíveis, os triângulos ABC e $A'BC$ conforme os dados do problema.

Exemplo 2.6. Construir o triângulo ABC de perímetro igual ao comprimento do segmento dado DE , e os seus lados proporcionais aos segmentos de comprimentos f, g e h , respectivamente.

Construção: Pela extremidade D do segmento dado, escreve-se uma semirreta auxiliar

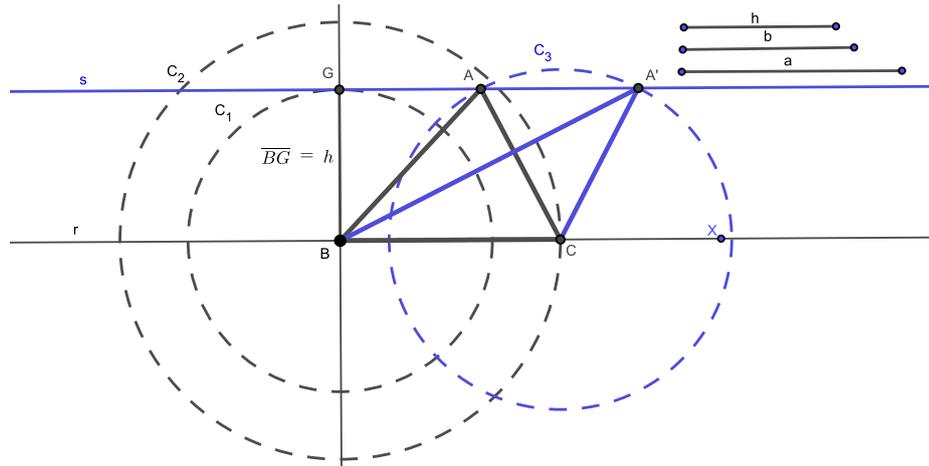


Figura 2.5: Construção do triângulo ABC , dados: a , b , e h

\overrightarrow{DX} , e sobre esta, transporta-se os segmentos de comprimento f , g e h , determinando nesta ordem os segmentos \overline{DJ} , \overline{JK} e \overline{KL} na semirreta \overrightarrow{DX} . Ligando a última extremidade L à E , conforme o Exemplo 1.8 na Secção 1.2, e pelos pontos K e J , traça-se segmentos paralelos ao segmento LE , determinando a posição sobre o segmento DE os vértices B e C da figura-solução. Ainda com o auxílio do compasso e centro em B e raio \overline{BD} , centro em C e raio \overline{CE} , traça-se os círculos C_4 e C_5 que intersectam-se em A , obtendo o terceiro vértices do triângulo da figura-solução (Figura 2.6). Pelas condições iniciais de construção, observa-se que a figura-solução (Figura 2.6) é única e com os lados proporcionais aos segmentos dados.

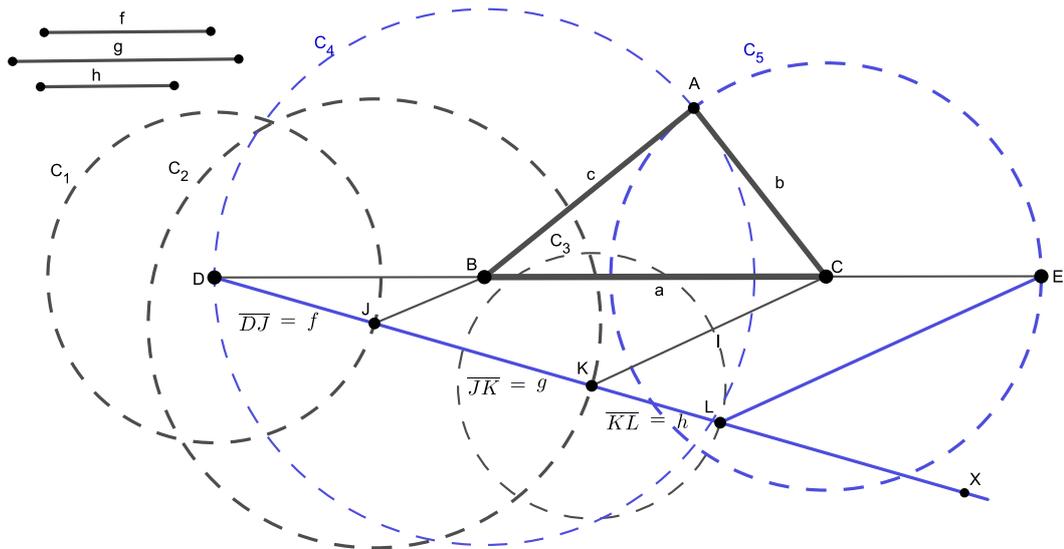


Figura 2.6: Construção do triângulo ABC , dados: perímetro e lados proporcionais.

Exemplo 2.7 (Desafio). Construir o triângulo ABC conhecendo o ângulo $\widehat{\angle A} = \alpha$, a

mediana m relativa ao lado AC e o comprimento a do lado BC .

Construção: Pelo Exemplo 1.1, transporte o segmento de comprimento a para a semirreta \overrightarrow{BX} tal que $BC = a$. Usando o plano de construção do Exemplo 1.7 determine o ponto médio N sobre o segmento BC . Pelo ponto médio do segmento BC e usando o plano de construção no Exemplo 1.12 constrói o arco capaz C_4 do ângulo dado sobre a corda NC . Com centro em B e raio m traça-se o círculo C_5 que intersesta C_4 em M . Centro em M e raio \overline{MC} traça-se o círculo C_6 que intersesta a semirreta \overrightarrow{CM} em A . Finaliza-se a figura-solução (Figura 2.7) conduzindo por B o segmento BA paralelo a MN .

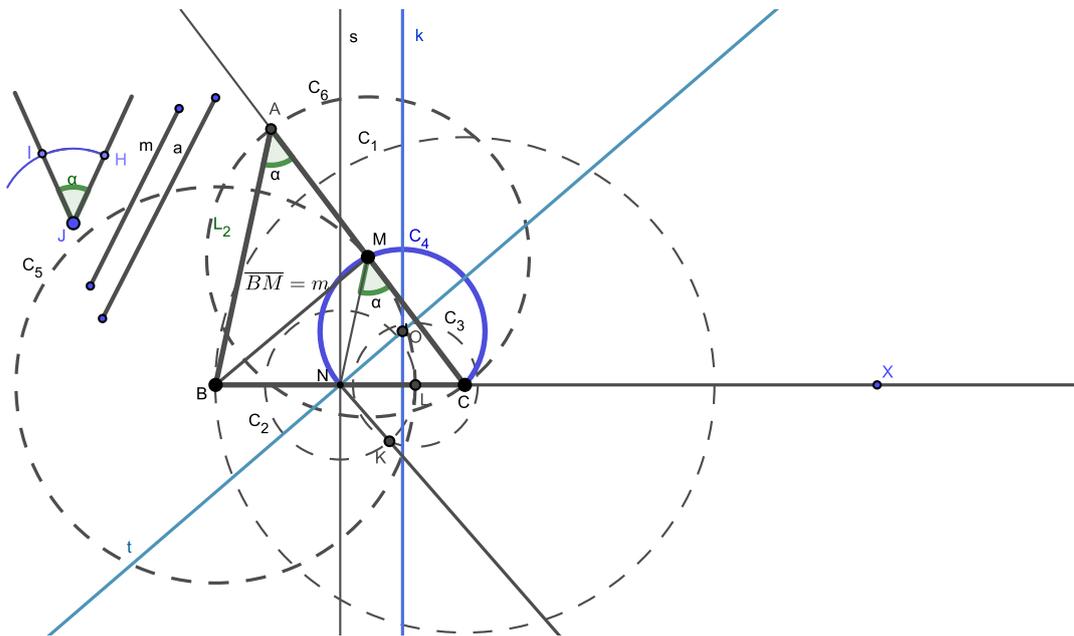


Figura 2.7: Construção do triângulo ABC , dados: ângulo, mediana e lado.

2.2 Quadriláteros

Da geometria dos objetos geométricos sugeriu-se aqui a construção de tipos particulares de quadriláteros que certamente são os paralelogramos.

Exemplo 2.8 (Quadrado). Construir um quadrado conhecendo o lado $\overline{AB} = a$.

Construção: Tomando uma semirreta auxiliar \overrightarrow{AX} transporte, com o auxílio do compasso, o segmento de comprimento a tal que $AB = a$, identificando os vértices A e B do quadrado. Usando sucessivamente o plano de construção visto no Exemplo 1.6 se conclui a construção do quadrado sugerido.

Outra opção, tome um ponto E entre A e B e com centro em A e raio igual a \overline{AE} construa o círculo C_1 , com o mesmo raio e centro em E construa C_2 que intersesta C_1 em G , centro em G e o mesmo raio, construa C_3 que intersesta C_1 em H e ainda usando o mesmo

raio com centro em H , construa C_4 que intersecta C_3 em J . A semirreta de origem em A traçada por J é perpendicular à semirreta \overrightarrow{AX} pela extremidade A . O vértice D do quadrado fica definido com a construção do círculo C_5 de centro em A e raio a . Usando o mesmo raio a , centro em D e em B traça-se, nesta ordem, os círculos C_6 e C_7 que intersectam-se em C , finalizando a construção do quadrado (Figura 2.8).

Comentário: Veja que os círculos C_1 ao C_4 possuem o mesmo raio \overline{AE} , portanto os triângulos AEG e AGH são equiláteros e \overline{AJ} bissecta o ângulo $\angle GAH$, logo o ângulo $\angle(BAD) = \angle(EAJ)$ reto em A . Por outro lado os círculos C_5, C_6 e C_7 foram construídos com mesmo raio a , segue que os lados BC, CD, DA e AB são iguais, logo a figura construída é um losango com ângulo interno reto. Portanto a figura-solução (Figura 2.8) é um quadrado de lado a .

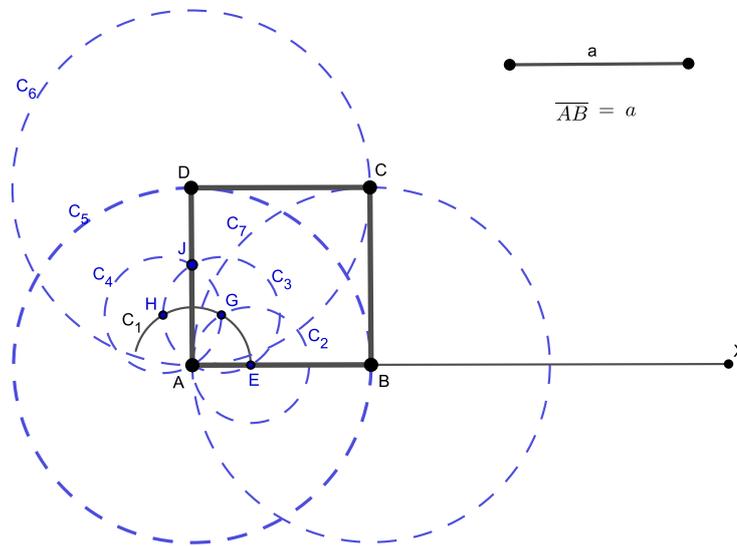


Figura 2.8: Construção do quadrado

Exemplo 2.9 (Retângulo). Construir um retângulo, dados um lado $\overline{AD} = a$ e uma diagonal d .

Construção: Usando os procedimentos do Exemplo 1.1, transporta-se para a reta r o segmento de comprimento d , tal que a diagonal $\overline{AC} = d$. Com centro em A e em C , raio igual a d traça-se os círculos C_1 e C_2 que se intersectam em E e F . Ligando esses pontos pelo segmento EF , intersecta AC no ponto médio M . Com centro em M e raio igual a $\overline{MA} = \overline{MC}$ se obtém o círculo C_3 de diâmetro \overline{AC} . Novamente com centro em A e C e raio igual a \overline{MA} se constrói C_4 e C_5 cujas intersecções com C_3 define-se em semiplano opostos os vértices B e D da figura-solução.

Comentário: A figura-solução (Figura 2.9) é um retângulo. De fato, os triângulos ACD e ABC inscritos nos semicírculos de C_3 são retângulos, retos em D e B , o segmento AC é hipotenusa comum e os catetos são paralelos dois a dois, logo o quadrilátero $ABCD$ inscritos em C_3 cuja a soma $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ é um retângulo.

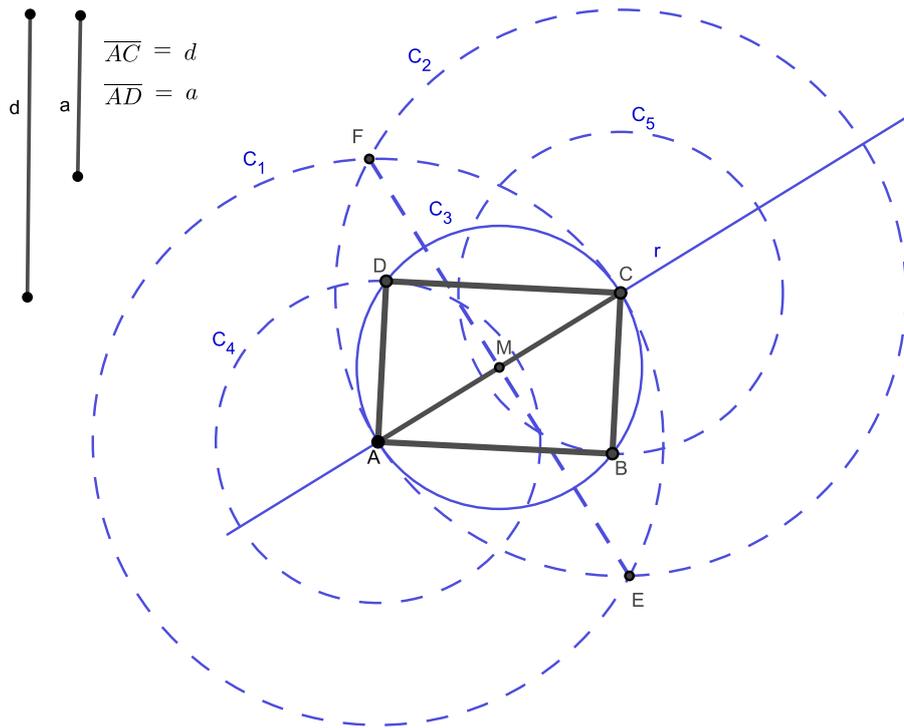


Figura 2.9: Construção do retângulo

Exemplo 2.10 (Losango). Construir um losango conhecendo um ângulo $\angle ABC$ e um lado.

Construção: O losango é um paralelogramo que tem os lados com o mesmo comprimento. Tome como referência na Subsecção 1.1.2 o Exemplo 1.4 para transportar para a reta \overleftrightarrow{BP} o ângulo dado, na Subsecção 1.1.1 o Exemplo 1.1 para o transporte de segmento e na Secção 1.2 o Exemplo 1.7 para a construção de reta paralela.

Comentário: Observe que os lados AB e BC da figura procurada estão definidos sobre os lados do ângulo transportado, enquanto que AD e DC sobre paralelas conduzidas por A e C , respectivamente. Por outro lado os círculos C_3 , C_4 e C_5 completam a construção com os vértices B , C e D da figura-solução (Figura 2.10).

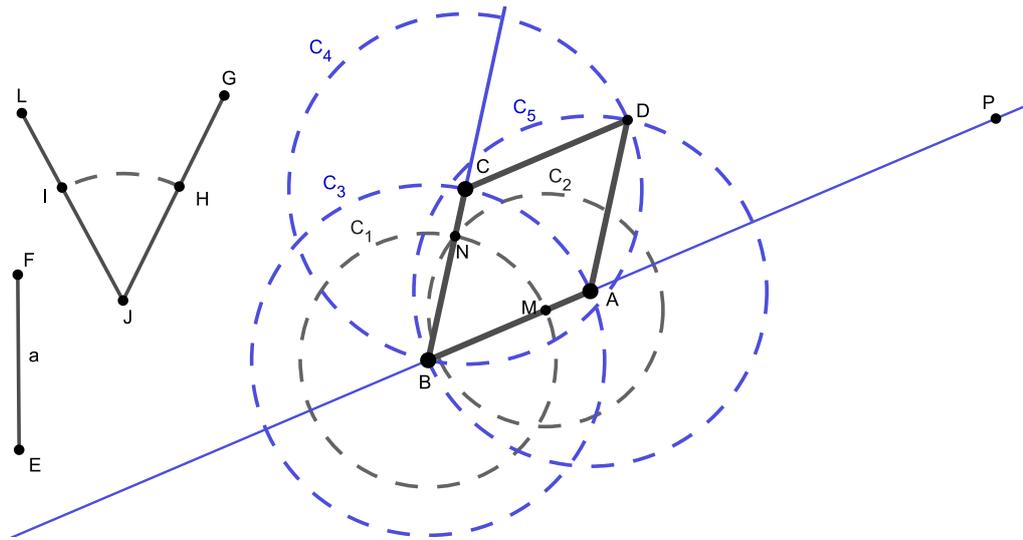


Figura 2.10: Construção do losango

Exemplo 2.11 (Trapézio). Construir um trapézio isósceles dados o comprimento da base maior $\overline{AB} = a$, o lado não paralelo $\overline{BC} = c$, e o ângulo θ formado por esses dois lados.

Construção: Usando o Exemplo 1.1 na Subsecção 1.1.1 transporte o segmento de comprimento a para a semireta auxiliar \overrightarrow{AX} e pelo Exemplo 1.4 na Secção 1.2, para transportar para as extremidades A e B o mesmo ângulo θ . Complete a construção com os círculos C_7 e C_8 que definem os lados não paralelos do trapézio.

Comentário: Observe que como a figura a construir é trapézio isósceles, os ângulos da base maior são iguais a θ e os lados não paralelos tem o mesmo comprimento c . O segmento que liga os pontos C e D finaliza a figura-solução (Figura 2.11).

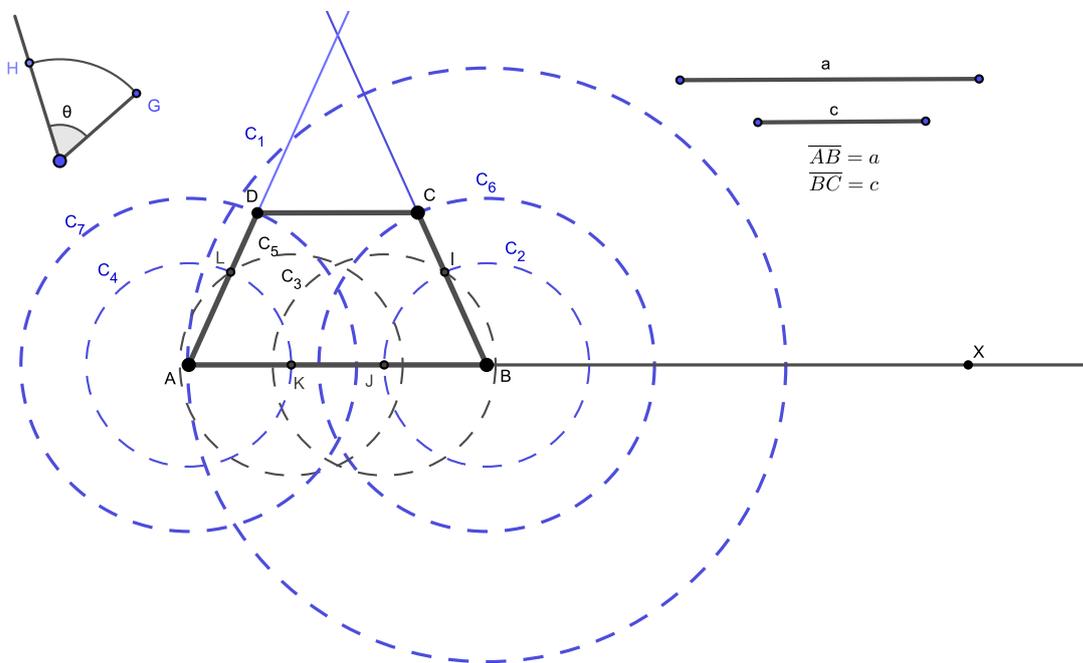


Figura 2.11: Construção do trapézio isósceles

Capítulo 3

Construções Fundamentais Associadas a Números e Fórmulas

Introduziremos neste capítulo construções geométricas fundamentais associadas a números e fórmulas. As construções apresentadas nos Capítulos 1 e 2, nenhum segmento foi usado como padrão para medir outros segmentos, isto é, não associou-se a cada segmento a existência de um número real positivo. Entretanto segundo Wagner [5] (p.46) “Se estabelecemos um segmento unitário, quer dizer, um segmento a que associaremos o número 1, a expressão $\frac{a}{b}$ poderá ser representada por um segmento. Sendo assim para solucionar um problema de construção geométrica podemos adotar como incógnita um segmento não conhecido e em seguida tentar expressar em função dos elementos já conhecidos. Os matemáticos da Grécia antiga associavam o comprimento de segmento aos inteiros e o produto entre dois segmentos representava a área de uma figura bidimensional. Desta forma é possível relacionar números a expressões algébricas.

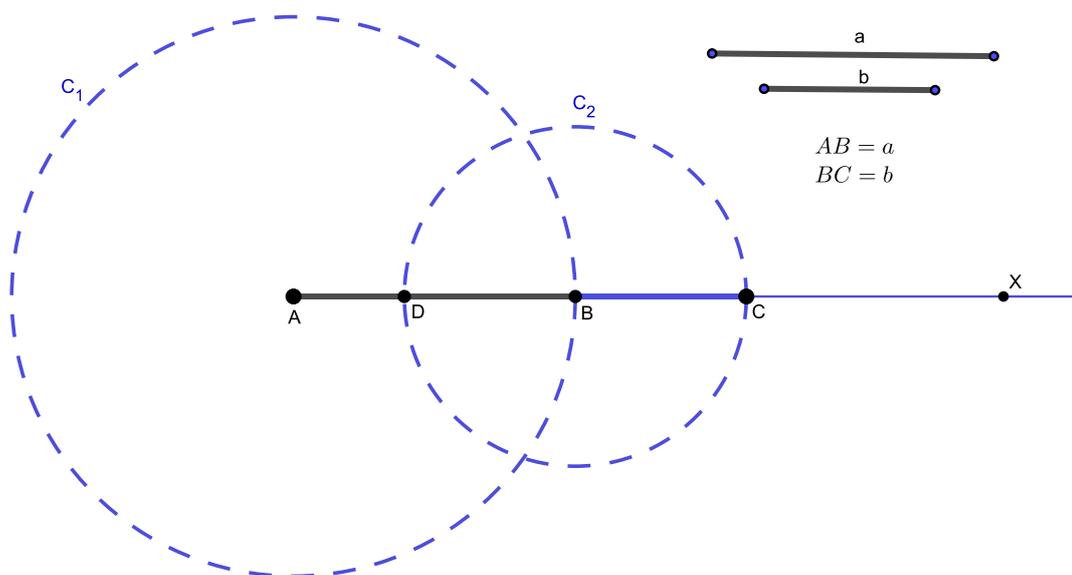


Figura 3.1: Segmentos construtíveis

Comentário: No Capítulo 1 observou-se preliminarmente que a reta, a semirreta, o segmento de reta e o círculo são construções permitidas com os instrumentos euclidianos. Dados dois segmentos de comprimentos a e b , prova-se também que os segmentos representados pelas operações $a + b$ ou $a - b$, com $b < a$ são construtíveis. Se o segmento que liga o ponto A ao ponto B , e o que liga o ponto C ao ponto D são construtíveis, então podemos alcançar outros pontos do plano e segmentos que os ligam também construtíveis com régua e compasso (Figura 3.1).

3.1 Teorema de Tales

Um feixe de retas paralelas são cortadas por duas ou mais transversais determina sobre estas, segmentos proporcionais. Usando sucessivamente os procedimentos de construção da paralela do Exemplo 1.7 na Secção 1.2 se obtém um feixe de retas paralelas. Essas retas cortadas por duas transversais estão representadas na Figura 3.2 que, pelo Teorema de Tales, $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$.

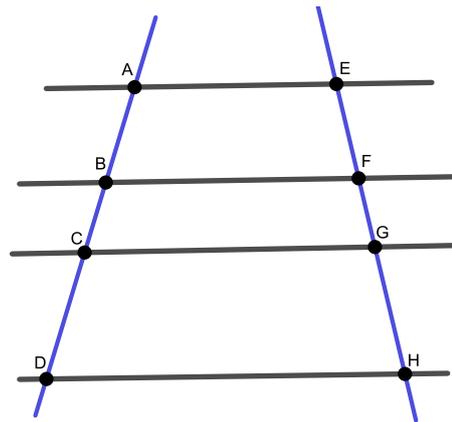


Figura 3.2: Teorema de Tales

Exemplo 3.1 (Quarta Proporcional). Dados os segmentos de comprimentos $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ e $\overline{EF} = c$ construir um segmento de comprimento k que representa a quarta proporcional, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{k}$.

Construção: A divisão em partes proporcionais é uma consequência do Teorema de Tales e a construção da figura-solução (Figura 3.3) é sugerida no Exemplo 1.8 da Secção 1.2.

Comentário: Dados os segmentos a , b e c em posição, é construtível um segmento de comprimento x , tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, denominado *quarta proporcional*.

Terceira Proporcional

Pela construção anterior, fazendo $c = b$, tem-se a seguinte proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$ e o segmento de comprimento x será denominado *terceira proporcional* de construção análoga à quarta proporcional. Observa-se que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, pela propriedade fundamental da proporção $x =$

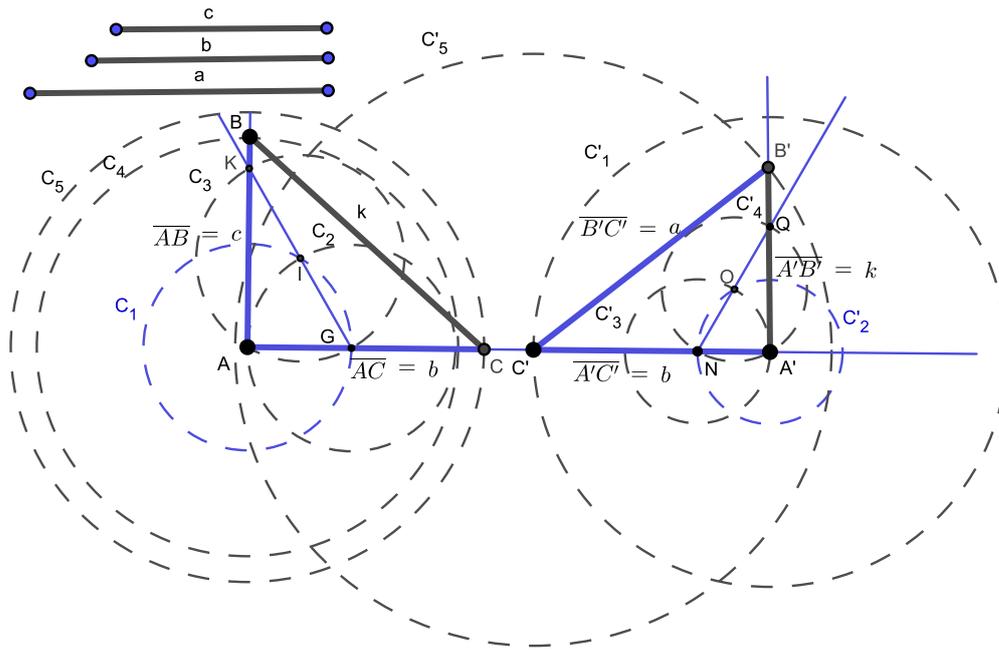


Figura 3.4: Teorema de Pitágoras

3.3 Relações Métricas num Triângulo Retângulo

Dentre as relações métricas no triângulo retângulo, Figura 3.5, citaremos apenas as que, naturalmente, estão relacionadas com os objetos da Secção 3.4.

- “O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção que este forma sobre a hipotenusa”.
- “O quadrado da altura relativa a hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa”.

Considerando a , b e c os respectivos comprimentos da hipotenusa e dos catetos, enquanto m a projeção do cateto c sobre a e n , projeção do cateto b sobre a tem-se que:

1. $b^2 = a \cdot n$;
2. $c^2 = a \cdot m$;
3. $h^2 = m \cdot n$.

3.4 Construções de Segmentos que Representam um Número

Nesta secção serão ampliadas as ideias de construções geométricas com régua e compasso com a introdução de segmento que representa um número, como padrão de unidade. Essa noção parte do princípio de usar um segmento para medir outros segmentos, desta forma

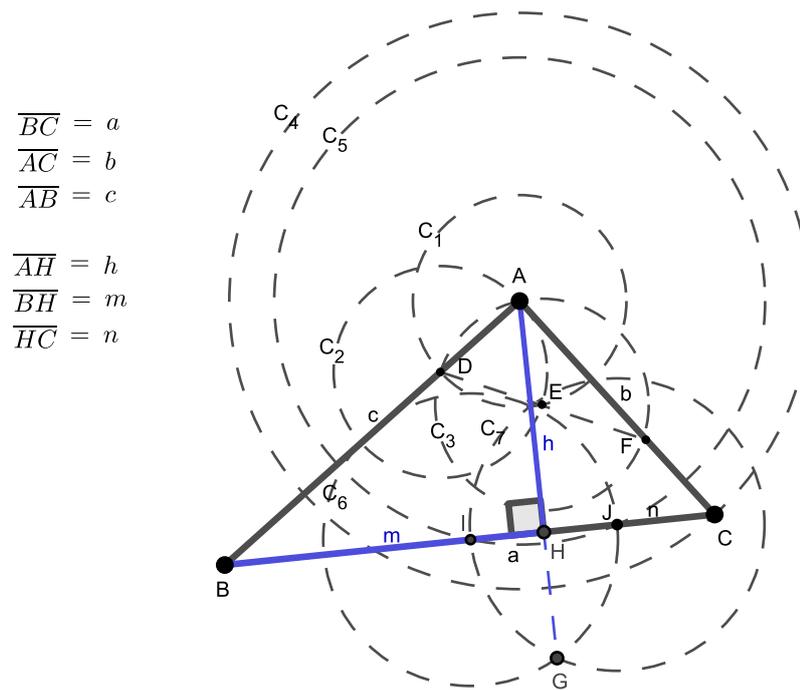


Figura 3.5: Relações métricas no triângulo retângulo.

há a possibilidade de construtibilidade de números reais associados a um segmento. Em geral a expressão $\frac{p}{q} = x$ não está associada a um número inteiro, além disso se $p = q \cdot x$, então um segmento de comprimento p não é igual a uma área. Adotando, segundo Wagner [5], um *segmento comprimento unitário*, às expressões do tipo: $n \cdot a$, $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$, a^2 , \sqrt{a} poderão ser representadas por outros segmentos. Logo a fração $\frac{p}{q}$ que não estaria associada a um segmento, pela Secção 3.1 sobre o Teorema de Tales, pode ser escrita da forma $\frac{p}{q} = x$ equivalente a $\frac{q}{p} = \frac{1}{x}$, que representa a quarta proporcional entre p e q e o segmento unitário. Isto significa dizer que a expressão $x = \frac{q}{p}$ é construtível.

Exemplo 3.3 (Construtibilidade de Fórmulas). Mostrar que, dado um segmento de comprimento a e uma unidade de medida fixada, $u = 1$, são construtíveis:

1. a^2
2. \sqrt{a}

Construção: Usando o plano de construção visto no Exemplo 1.1 da Subsecção 1.1.1, transporta-se o segmento unitário u para a semirreta \overrightarrow{AX} , tal que $\overline{AH} = u = 1$ e pelo Exemplo 1.6 na Secção 1.2, baixar uma perpendicular à semirreta \overrightarrow{AX} pelo ponto H . Com centro em A e raio a , traça-se o círculo C_3 que intersecta as semirretas \overrightarrow{HJ} e \overrightarrow{AX} nos pontos C e D , respectivamente. Novamente pelo Exemplo 1.6, traça-se a perpendicular ao segmento AC pela extremidade C que intersecta a semirreta \overrightarrow{AX} em B , tal que ABC forma um triângulo retângulo, reto em C . De forma análoga ao plano de construção descrito acima, se obtém o triângulo retângulo HRS , reto em H . Os círculos C_7 e C_8 de

centros E e T com raio igual a a intersectam em U e V , o segmento UV intersecta ET no ponto médio O' . Com centro em O' e raio igual a $\frac{a}{2}$ traça-se o círculo C_9 que intersecta a semirreta \overrightarrow{HS} em P . Finaliza-se a construção conduzindo o círculo C_{10} de centro em E e raio igual a \overline{EP} , tal que $\overline{EW} = \overline{EP}$. O triângulo ETP inscrito no semicírculo de C_9 é retângulo, reto em P é tal que $\overline{ET} = a$ e $\overline{EH} = u$ é a projeção de $\overline{EP} = \sqrt{a}$ sobre \overline{ET} .

Comentário: Na Secção 3.3 sobre as relações métricas no triângulo retângulo, qualquer cateto elevado ao quadrado é igual ao produto da projeção deste sobre a hipotenusa, pela hipotenusa, ou seja, $\overline{AC}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$ e $\overline{EP}^2 = \overline{EH} \cdot \overline{ET}$, provando a construtibilidade de a^2 e \sqrt{a} conforme a figura-solução (Figura 3.6).

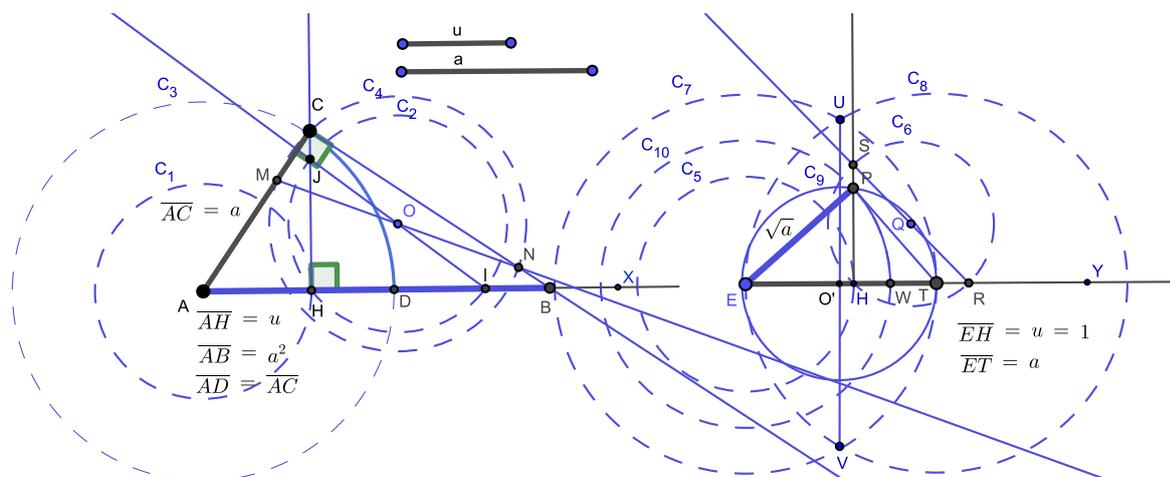


Figura 3.6: Números construtíveis

3.4.1 Média Aritmética e Média Geométrica

Exemplo 3.4 (Média Aritmética). Construir o segmento que representa a média aritmética de dois segmentos dados de comprimentos $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$.

Construção: De acordo com a Figura 3.7 a construção da média aritmética por régua e compasso remete às construções fundamentais vistas na Subsecção 1.1.1 e na Secção 1.2, ou seja, o procedimento de transportar os segmentos de comprimentos a e b para a semirreta \overrightarrow{EX} , tal que $\overline{EF} = \overline{AB} = a$ e $\overline{FG} = \overline{CD} = b$. Com centro em G e em E , usando o mesmo raio igual a \overline{EG} construa os círculos C_3 e C_4 nesta ordem, que se intersectam nos pontos I e J , ligando esses pontos pelo segmento IJ determina-se a mediatriz do segmento EG que o intersecta no ponto médio M tal que $\overline{EM} = \overline{MG}$.

Comentário: Dados os segmentos $AB = a$ e $CD = b$, a média aritmética de a e b é o segmento de comprimento m definido pela relação $m = \frac{a+b}{2}$. Note que pelo Exemplo 1.5 o segmento IJ é por construção a mediatriz do segmento EG , logo os triângulos MIE e MGI , por exemplo, são congruentes pelo critério especial LAL , portanto $\overline{EM} = \overline{MG} = m$ (Figura 3.7).

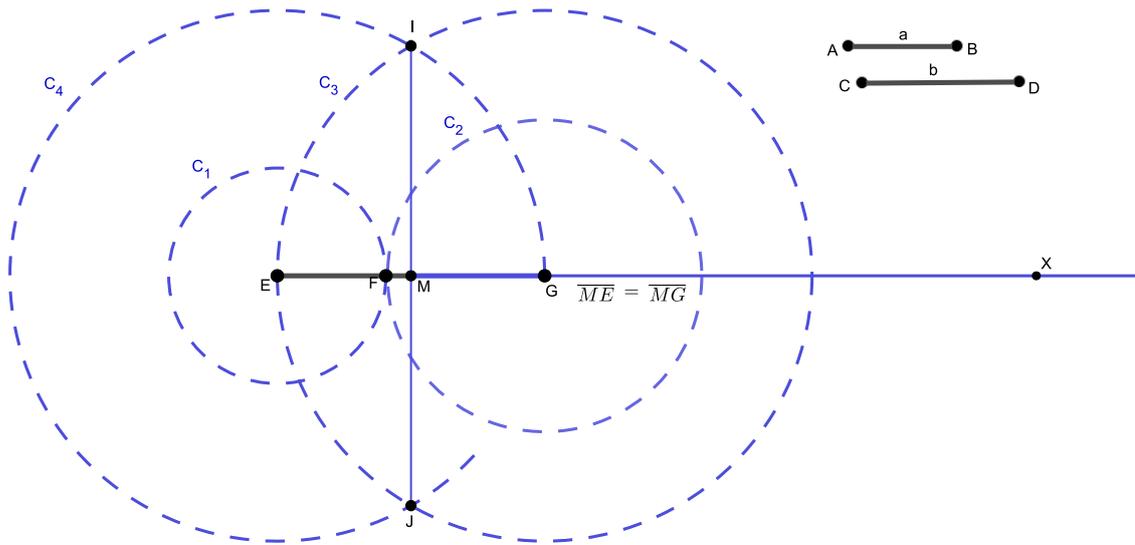


Figura 3.7: Média aritmética.

Exemplo 3.5 (Média Geométrica). Dados os segmentos $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$, construir o segmento de comprimento h que representa a média geométrica entre os dois segmentos.

Construção: Usando uma das relações métricas do triângulo retângulo citadas na Secção 3.3, ou seja:

1. $b^2 = a \cdot n$ ou $c^2 = a \cdot m$, cada cateto é a média proporcional a sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.
2. $h^2 = m \cdot n$, a altura é média proporcional das projeções dos catetos m e n sobre a hipotenusa.

Com o auxílio de régua e compasso, e os procedimentos da Subsecção 1.1.1 transporte os segmentos dados para a semirreta auxiliar \overrightarrow{XY} . Pela Secção 1.2 determina-se o ponto médio M , e o com centro em M e raio \overline{EM} se constrói o círculo C_5 . O segmento $\overline{GL} = h$ conduzido sobre a reta suporte \overleftrightarrow{GL} perpendicular a EH pelo ponto G é a média geométrica em relação aos segmentos dados.

Comentário: De fato, todo triângulo inscrito num semicírculo é retângulo. Por construção o segmento GL é perpendicular a EH , logo é a altura do triângulo retângulo EHL reto em L , portanto $h^2 = \overline{EG} \cdot \overline{GH}$, figura-solução (Figura 3.8).

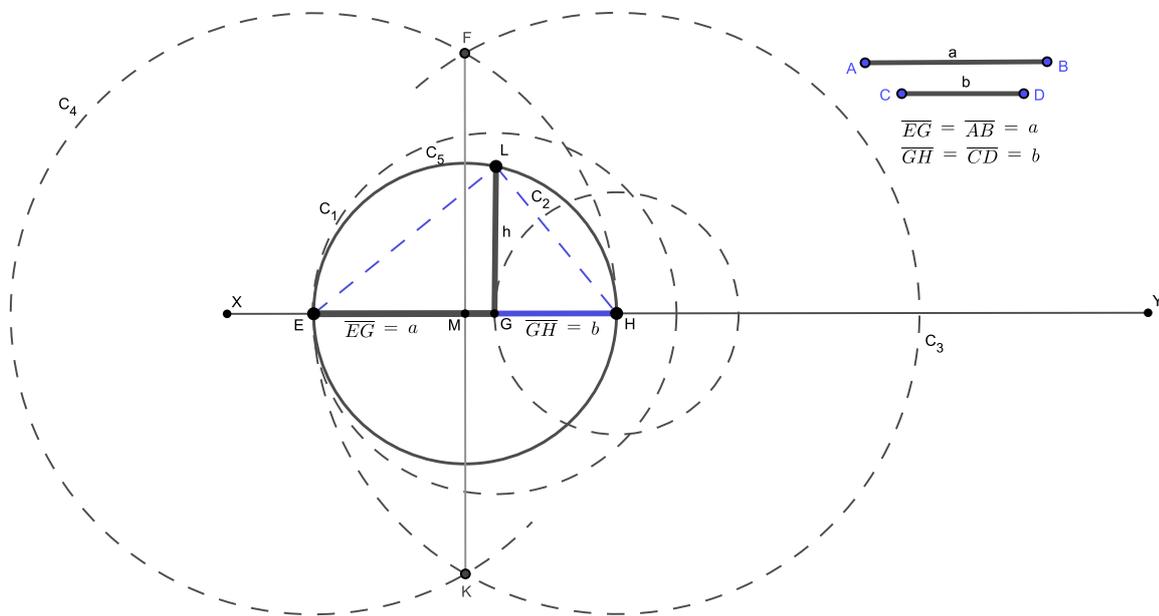


Figura 3.8: Construção da média geométrica.

Capítulo 4

Áreas e Equivalências

Equivalência de áreas é um problema antigo citados nos livros I e II dos Elementos de Euclides. Para melhor entender a noção de equivalências citaremos alguns conceitos introdutórios de acordo com Dolce [10]:

- Dois polígonos são *adjacentes* quando têm em comum somente os pontos de seus contornos.
- *Soma* de dois polígonos adjacentes é a superfície constituída pelos pontos dos polígonos que sejam comuns e os não comuns a eles.
- Dois polígonos são chamados *equivalentes* se forem somas de igual número de polígonos dois a dois congruentes.

A noção de área aqui está associada ao comprimento de um segmento, ou seja, se a área de um polígono P é igual a b^2 , sendo b um segmento, significa dizer que o polígono P é equivalente a um quadrado cujo lado está representado pelo segmento b .

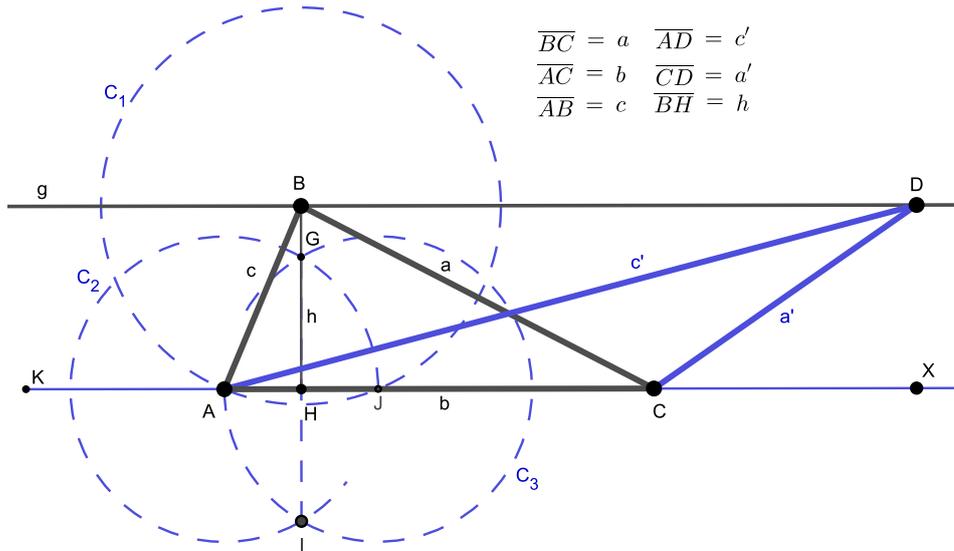
Exemplo 4.1. Construir um triângulo de mesma base e mesma altura, equivalente ao triângulo dado ABC .

Construção: Admitindo que o triângulo-solução do problema não seja congruente ao triângulo dado, qualquer outro com a base fixada igual a de ABC , com o terceiro vértice pertencente à reta paralela a base, conduzida pelo vértice do triângulo ABC , oposto a essa base é a figura-solução. Para construir tome como referência a Secção 1.2 e o Exemplo 1.7 para conduzir pelo vértice B uma paralela g à reta suporte da base AC .

Comentário: Qualquer ponto diferente do vértice B , forma com os vértices A e C um triângulo equivalente ao triângulo dado, conforme figura-solução (Figura 4.1).

Exemplo 4.2. Construir um triângulo retângulo ABC' , reto em A e equivalente ao triângulo dado ABC .

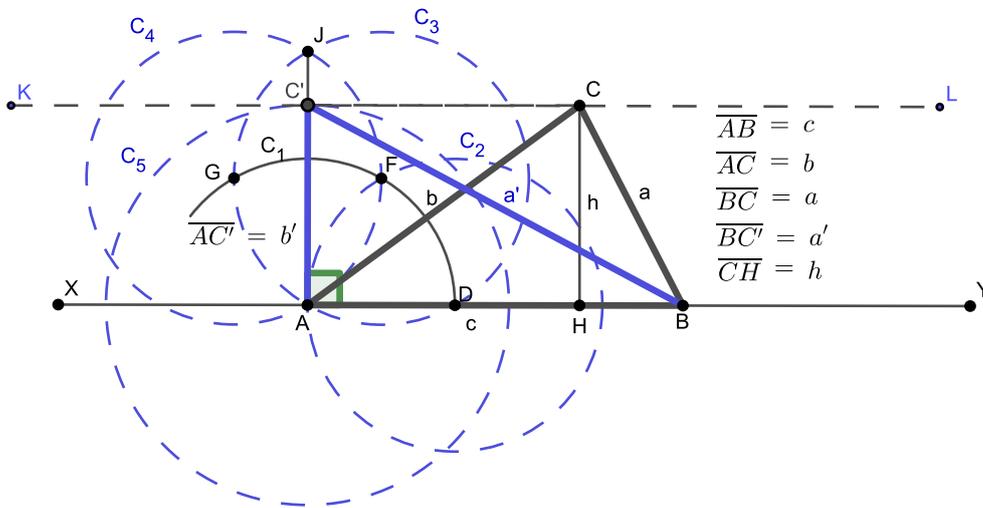
Construção: Tomando como referência o plano de construção da Figura 4.1 trace pelo ponto A uma perpendicular à reta suporte do segmento XY . Com centro em A e o raio igual a h construa o círculo C_5 que intersecta o segmento AJ no ponto C' , ou trace pelo



$$\begin{aligned} \overline{BC} &= a & \overline{AD} &= c' \\ \overline{AC} &= b & \overline{CD} &= a' \\ \overline{AB} &= c & \overline{BH} &= h \end{aligned}$$

Figura 4.1: Triângulos equivalentes.

vértice C a paralela \overleftrightarrow{KL} à base AB que intersecta a perpendicular em C' . O triângulo construído ABC' é equivalente ao triângulo dado, conforme a (Figura 4.2).



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= c \\ \overline{AC} &= b \\ \overline{BC} &= a \\ \overline{BC'} &= a' \\ \overline{CH} &= h \end{aligned}$$

Figura 4.2: Equivalência de triângulos.

Exemplo 4.3. Dado o quadrado $ABCD$, construir o triângulo BEF equivalente ao quadrado dado e com a base igual ao comprimento do lado do quadrado.

Construção: A base do triângulo tem o mesmo comprimento do lado a do quadrado, logo pelo princípio da equivalência $h = 2a$. Com o auxílio da régua e o compasso e usando os procedimentos do Exemplo 1.5 na Secção 1.2 para conduzir uma perpendicular pelo ponto médio L de BE que intersecta a reta t no ponto M . O círculo C_5 com centro em

M e raio igual ao dobro de a intersecta a perpendicular \overleftrightarrow{LM} no ponto F , terceiro vértice da construção do triângulo BEF , (Figura 4.3).

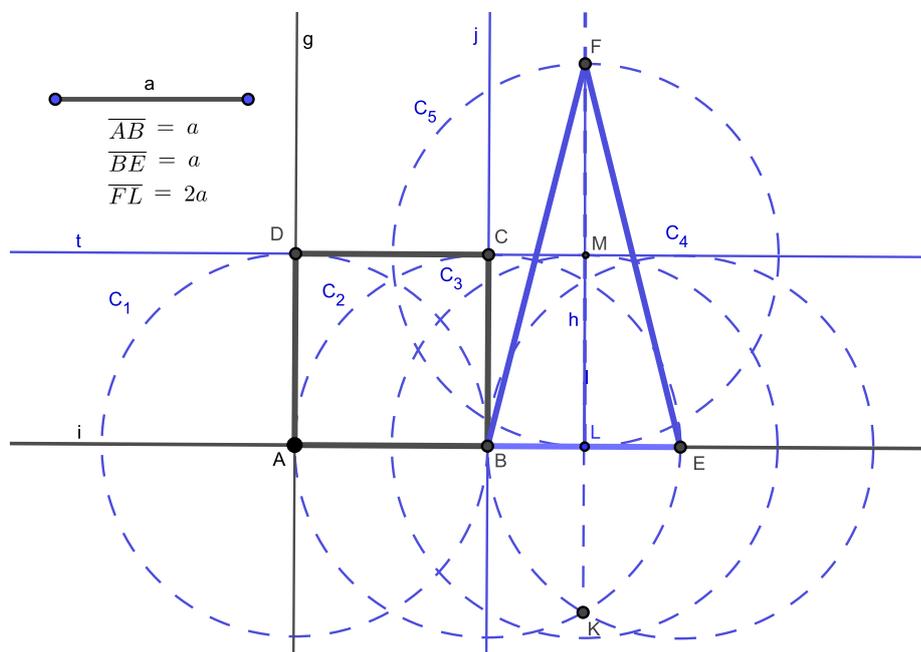


Figura 4.3: Triângulo equivalente ao quadrado.

Exemplo 4.4. Construir, usando régua e compasso, o lado do quadrado equivalente a um retângulo de base b e altura h .

Construção: Admitindo que já sabemos pelas construções da Secção 1.2 traçar retas perpendiculares, retas paralelas e usando o plano de construção do Exemplo 2.8 e da Secção 2.2 se obtém o retângulo de base b e altura h . Tomando o plano de construção do Exemplo 3.5 da Subsecção 3.4.1 se constrói os segmentos $\overline{A'B'} = b$, $\overline{A'N} = h$ e $\overline{A'Q} = a$ que corresponde ao lado do quadrado, tais que $\overline{A'Q}^2 = \overline{A'N} \cdot \overline{A'B'}$.

Comentário: Por hipótese o quadrado é equivalente ao retângulo, portanto o lado $a = \sqrt{bh}$ é a média geométrica da base do retângulo pela altura conforme a figura-solução (Figura 4.4).

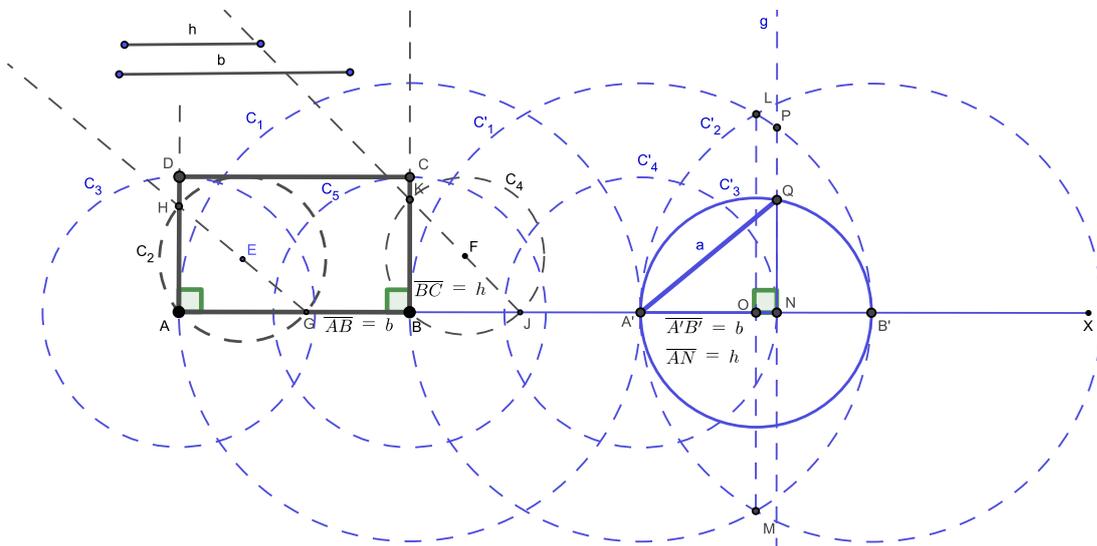


Figura 4.4: Lado do quadrado equivalente ao retângulo.

Capítulo 5

Discussão e Considerações Finais

Voltando a discussão inicial apresentada no Capítulo 3 sobre construtibilidade, vimos que pelos relatos históricos foi por volta do século VI a.E.C., que começa a florescer a filosofia grega e com esta nasceu a geometria demonstrativa. Por esses mesmos relatos, deve-se a Tales de Mileto os primeiros passos nesse sentido, porém o desenvolvimento da matemática grega não ficou restrita somente aos estudos da geometria que culminou nos Elementos de Euclides que serve, até os dias atuais, de referências para as escolas de educação básica, mas conforme cita em Eves [7], (2004, p. 132 e 133):

Podem-se notar três importantes e distintas linha de desenvolvimento durante os primeiros 300 anos da matemática grega. Primeiro temos o desenvolvimento do material que acabou se organizando nos *Elementos*, [...]. Em segunda lugar, há o desenvolvimento de noções relacionadas com infinitésimos, infinitos e processos somatórios [...]. A terceira linha de desenvolvimento é a da geometria superior ou geometria de curvas outras que não a reta e a circunferência e superfícies outras que não o plano e a esfera.

Por outro lado devemos notar no contexto histórico, a importância em solucionar, por régua e compasso, os três famosos problemas gregos:

1. Duplicação do cubo, consiste em construir um cubo cujo volume é o dobro de outro fixado.
2. Trissecção do ângulo, ou seja, dividir um ângulo qualquer em três partes iguais.
3. Quadratura do círculo, problema de construir um quadrado de área igual à de um círculo de raio fixado.

Embora não pudessem ser resolvidos com os instrumentos euclidianos, a busca por solução, levou os gregos a outras descobertas como secções cônicas, curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentais. Portanto não podemos desmerecer o valor heurístico de tais problemas para os dias atuais. Esses e outros problemas como o de inscrição de polígonos regulares, que surgiram no auge do desenvolvimento da álgebra geométrica grega,

só tiveram um desfecho final no século XIX E.C., com o avanço das teorias algébricas, da álgebra dos números complexos, da teoria de grupos, da análise, das contribuições de Euler e finalmente com Gauss (1777-1855), que estabeleceu de uma vez por todas em 1796, a impossibilidade de tais construções sob as condições que auto impõe os instrumentos euclidianos e também com a demonstração do critério geral de construtibilidade de polígonos regulares inscritos num círculo. Todavia vemos em Roque e Carvalho [15] que os matemáticos gregos estudaram outras possibilidades de solução. “As construções com régua e compasso não permitiram resolver todos os problemas tratados pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides, os quais não se recusaram a utilizar outros métodos de construção ou a empregar outras curvas”.

Segundo Wagner [5] “O problema de construir o polígono regular n lados, é equivalente a dividir o círculo em n arcos de mesmo comprimento, reduz-se ao de construir o seu ângulo central $\frac{360^\circ}{n}$ [...]”. Viu-se no Exemplo 1.11 que a inscrição do quadrado é um processo simples, e a partir da construção inicial, por bissecção de seus ângulos internos, se obtém o octógono. Também em Hefez e Villela [2] (2012, p.198): “A construção dos polígonos regulares de 2^n lados inscritos em um círculo, com $n \geq 3$, se obtém por recorrência tomando o polígono de 2^{n-1} lados, por bissecção de seus ângulos internos, o polígono regular inscrito com 2^n lados”.

Reciprocamente em Wagner [5](2007, p.117):

Se um polígono P_n for construtível e n tem um fator m com $m \geq 3$, então P_m também será construtível, pois se $n = m \cdot q$ é só ligar os vértices de P_n , q em q pontos do círculo que obteremos P_m . Por outro lado se m e n forem primos entre si e P_m e P_n forem construtíveis, então $P_{m \cdot n}$ também será.

A construtibilidade de pontos no plano, conforme visto na Secção 3.4, a partir de dois pontos ligados por um segmento unitário, outros segmentos e círculos podem ser construídos, e após cada construção novos objetos são incorporados ao conjunto das construções permitidas. Um ponto P do plano ou um polígono P_n é dito *construtível* com régua e compasso se puder ser obtido após um número finito de construções fundamentais.

Os problemas de construtibilidade descritos acima, após um longo período passam a ser visto com um outro foco da matemática. A partir da algebrização e da identificação dos números complexos com o \mathbb{R}^2 , os problemas de construtibilidade dos complexos com régua e compasso ficam relacionadas ao 0 e o 1, segue destes a algebrização inicial destacando-se os pontos $0 = 0 + 0i$ e $1 = 1 + 0i$. A construtibilidade de um polígono regular de n lados inscrito num círculo de raio $R = 1$ se reduz as soluções complexas da equação $x^n - 1 = 0$. A generalização do problema de construtibilidade de polígonos regulares chega-se a uma conclusão final quando Gauss propõe segundo Hefez e Villela [2](2012, p.211) “Um polígono regular com um número n de lados é construtível com régua e compasso se, e somente se, n é o produto de uma potência de 2 e de primos de Fermat distintos”.

5.1 Condução do Projeto

Público Alvo A proposta deste trabalho foi estruturada e a ser aplicada aos estudantes da educação básica, a partir do EJA IV, que corresponde ao 6° e 7° ano do ensino fundamental.

Objetivos

Os objetivos do trabalho se alinham à proposta pedagógica do sistema educacional do município, através da matriz curricular, que propõe o uso de múltiplos espaços de aprendizagem e nesse sentido relacionou-se os seguintes objetivos:

1. Analisar o protagonismo dos estudantes na resolução de desafios, usando régua e compasso que possibilite uma aprendizagem mais estimulante, dinâmica e resignificativa, na perspectiva de construção de argumentação e validação de resultados.
2. Observar e avaliar o uso de recursos tecnológicos no processo ensino e aprendizagem de matemática no ensino básico.
3. Estimular o uso da linguagem simbólica da matemática e ampliar significados já existentes no desenvolvimento geométrico, a partir das ferramentas permitidas na construção de objetos geométricos por régua e compasso.
4. Analisar a resignificar formas de abordagem da geometria na Educação de Jovens e Adultos - EJA, a partir das construções geométricos por régua e compasso do software de geometria dinâmica, o GeoGebra.
5. Analisar as possibilidades de construção de letramento matemática numa perspectiva colaborativa voltada para releitura de geometria e convivência em sociedade.

Metodologia

O trabalho ficou organizado e desenvolvido em três etapas:

- primeira etapa: coincidindo naturalmente com o cronograma de aulas da disciplina, identificando pré-requisitos teóricos e logísticas para o desenvolvimento da proposta;
- segunda etapa: atividades de reconhecimento do software de geometria dinâmica, GeoGebra;
- terceira etapa: aplicação de uma sequência de atividades que propõe a construção de objetos geométricos, com o auxílio de régua e compasso do software de geometria dinâmica, o GeoGebra e, argumentos de validação da figura-solução. As atividades propostas foram divididas em dois grupos de quatro seções de 80 minutos. As quatro primeiras relacionadas aos Capítulos 1 e 2, sem instruções, ou “passo a passo” de construção da figura-solução do desafio geométrico, enquanto as outras referentes aos Capítulos 3 e 4, foram introduzidas as instruções do processo de construção.

A avaliação prévia das turmas de Educação de Jovens e Adultos, eixos IV e V da Escola Municipal Giltonia Pereira de Souza, localizada em Arembepe na linha verde no Município de Camaçari, região metropolitana de Salvador, identificou grupos com características de classes multiseriadas, grande a variação de faixa etária e níveis de letramento bastante diversificado. A primeira atividade envolvendo conhecimentos prévios de Geometria, consistia em determinar, com o auxílio de uma régua graduada, o valor aproximado do perímetro de duas figuras geométricas distintas, um triângulo e um retângulo, os resultados sem exceção, apresentaram um traço comum, a referência para a medição não foi o zero, mas a partir do número 1. Os conhecimentos em geometria desses grupos estavam ainda restritos ao espaço e forma de alguns objetos físicos do dia a dia e baixíssimo nível de abstração.

Verificou-se que o processo de ensino e aprendizagem com estudantes apresentando tal contexto de formação básica, exigiria outros meios que os colocassem como sujeitos da ação pedagógica, potencializando formas de aprendizagem mais atraentes, que os envolvesse conquistando o desejo de superar os desafios, que segundo Perrenoud [6][2004](2007, p.55), em Três condições para aprender:

[...] Para aprender, é preciso encontrar-se tão frequentemente quanto possível:

- em uma situação que não ameace a identidade, a segurança, a solidariedade dos que aprendem;
- em uma situação mobilizadora, que tenha sentido e que provoque uma atividade na qual o aprendiz se envolva pessoal e duradouramente;
- em uma situação que solicite o sujeito em sua zona próxima de aprendizagem (menor desequilíbrio possível, obstáculo transponível).

No percurso de aplicação desta proposta ocorrem algumas dificuldades caracterizadas pela hostilidade entre colegas, o alto índice de violência no entorno, consumo de álcool e drogas, a evasão escolar do turno noturno, principalmente na alta estação e a interrupção do uso do laboratório no terceiro trimestre para manutenção foram motivos de grande preocupação. Muitos estudantes são atraídos por trabalhos temporários, elevando a taxa de evasão e repetência da escola. Nessas turmas, as noções de geometria plana sobre ponto, reta e plano, ângulos, triângulos e pontos notáveis, quadriláteros, relações e propriedades, perímetro e área, noções de sólidos geométricos e volume ocorrem no período do 2º trimestre. Depois, ainda nesse trimestre, os alunos frequentaram aulas teóricas e práticas no laboratório de informática com exercícios exploratórios das ferramentas do GeoGebra. Com a interdição do laboratório houve uma descontinuidade e, só foi possível a aplicação da terceira a partir de janeiro de 2018, com a participação efetiva de 10 alunos envolvendo as atividades de construções geométricas com o auxílio de régua e compasso do software GeoGebra.

Após avaliação prévia foram feitas adequações no plano anual de curso desses grupos de forma que, os tópicos básicos de geometria fossem potencializando com os de outros eixos e, desse modo, o projeto fosse inserido ao final do terceiro trimestre, sem suprimir

o que já estava posposto no planejamento das turmas de EJA IV e V. Constatou-se que, como já foi dito anteriormente, os conhecimentos prévios dos estudantes dessas turmas do noturno ainda permaneciam num estágio de representação a objetos geométricos vinculados pela aparência. Naturalmente na etapa seguinte, o reconhecimento das ferramentas do GeoGebra e suas funcionalidades, notou-se que o acréscimo de novos conteúdos não iria afetar o cumprimento do plano de curso previsto inicialmente para o ano letivo de 2017, pelo contrário, o projeto proposto possibilitou novas formas de construção de competências e habilidades na formação geral desses jovens e adultos do turno noturno da Escola Municipal Giltonia Pereira de Souza.

No período letivo de 2017 ocorreram diversas interrupções no calendário por conta de paralisações de reivindicações salariais e condições de trabalho, tanto que o ano letivo teve de ser repactuado com término para fevereiro de 2018, a exceção dos estudantes do último ano do fundamental, que tiveram antecipação usando um horário especial, possibilitando que a matrícula destes no estado ocorresse nos dias 17 e 18 de janeiro. Por esta razão e motivos de força maior, como a indisponibilidade do laboratório de informática para manutenção, acarretou a exclusão das turmas de EJA V da terceira etapa deste projeto, deixando uma lacuna no processo de análise comparativa de resultados, embora tivessem realizado toda segunda etapa do projeto, a de reconhecimento das ferramentas reta, semirreta, segmento, ponto, compasso, mover, exibir e esconder rótulo, trocar o rótulo, cor, tipo de linha, criar uma pasta e exportar os objetos geométricos construídos e evitar o uso de ferramentas não permitidas neste trabalho, tais como arrastar objetos e o uso de medidas fixas predefinidas. Os recursos disponibilizados no laboratório de informática, pós manutenção, foram 15 máquinas em bom estado de uso com o software GeoGebra já instalado, mas sem internet. O processo teve continuidade nos meses de janeiro e fevereiro conforme o Apêndice A.

A metodologia de aplicação deste projeto ficou caracterizada em cada etapa por ações somativas com o propósito de identificar caminhas que venham resignificar metodologia e práticas pedagógicas através da valorização do ativismo do estudante, de construção de novas competências e habilidades a partir de preexistentes usando outras linguagens, estimular a formação matemática através do raciocínio lógico e dedutivo, incentivar o saber aprender e o saber fazer relacionando ações colaborativas ao cumprimento das atividades propostas.

Antes do início das atividades n° 1, 2, 3 e 4, uma pequena pausa para as orientações e o trabalho prosseguia até às 20 : 20h, ou às 21 : 40h dependendo do dia da semana, mesmo assim, os estudantes insistiam em permanecer no laboratório na tentativa de concluir as atividades com construções parciais. Para facilitar o trabalho, todas as atividades foram impressas segundo a sequência sugerida no Apêndice A. Observou-se que quando o aluno não conseguia desenvolver um plano de construção, passava a fazer figuras geométricas quaisquer como passatempo e para evitar tais situações, eram questionado sobre o plano de construção da figura, quais procedimentos, como ele desenvolveu o plano de construção,

embora muitas vezes não houvesse plano algum, o propósito aí era estimular a execução das atividades e desenvolvimento do raciocínio geométrico segundo a introdução deste trabalho. Estudantes nesta situação, em geral, reiniciavam a construção completamente depois de novas orientações. Constatamos também que esses estudantes, além de mais inseguros, sempre estavam buscando um apoio, ou seja, a perguntar se o que estava fazendo era o correto, porém cabe ao orientador (o professor aplicador) mediar tais desequilíbrios. Incentivar e questionar o quê, o porquê, investigar quais propriedades dos objetos estão sendo evidenciadas, quais as relações deste com outros objetos, quais diferenças e semelhanças e principalmente quais construções elementares são permitidas usando régua e compasso e partindo destas obter novas construções. Para as quatro últimas atividades, foram incluídos instruções de construção e novamente observou-se comportamento idêntico. Não podemos informar se os estudantes tiveram acesso a algum plano de construção via internet e se tal fato tenha ocorrido não foi no laboratório, mas por outros meios.

Constatou-se que houve um processo de apropriação mais rápido da linguagem e funcionalidades das ferramentas do software em relação à linguagem matemática tradicionalmente ensinada nas salas de aula, que prevalessem também em relação à escrita e por último a formulação de argumentos de validação da solução final de cada desafio proposto. Observou-se que quando conseguiam fazer alguma redação era através de frases curtas, soltas e desprovidas de conectivo, sem uma ideia que apresentasse um texto com introdução, desenvolvimento e conclusão. Outro fator que chamou a atenção foi com relação ao cumprimento das atividades que deveria ocorrer de forma sequencial, isto é, obedecendo a ordem que foi sugerida. Nas duas primeira atividades os alunos que por ventura faltaram a aula anterior sempre queria fazer os mesmos desafios dos que não faltaram, isso acarretou mais dificuldades, pois aqueles desafios serviam de suporte para os próximos. Obviamente o grau de complexidade do plano de construção das atividades em geral iam se ampliando, e na ordem inversa os resultados práticos obtidos, tal que as construções propostas a partir da quarta atividade ocorrem de forma superficial.

5.2 Considerações Finais

Análise de Resultados

Pelos anexos, constatou-se que o desempenho de cada estudante foi satisfatório conforme o seu tempo real de aprendizagem, basta observar o número de mesmo rótulos de figura-solução, contrapondo às dificuldades enfrentadas no processo.

Positivamente este projeto mostrou que é possível buscar novos ambientes de aprendizagem com potencialidade de estimular a autonomia dos estudantes, de construir uma cultura de valorização dos saberes já construídos, de valorizar e respeitar a diferenciação e tempo de resposta aos estímulos direcionados durante as aulas e de que é possível construir novas competências sem a reprovação que tanto colabora para denegrir a autoimagem dos estudantes.

Segundo Perrenoud [6](2004, p.15):

[...] é mais fácil ensinar saberes do que levar o aluno a construir competências, é mais fácil também ensinar e avaliar saberes de baixo nível (memorização) do que de alto nível (raciocínio). Em um ano letivo, o aluno pode assimilar regras e noções particulares. Não pode ao mesmo tempo, construir uma cultura científica ou histórica, aprender completamente a ler, a produzir textos, a raciocinar, a argumentar, a antecipar, a debater, a imaginar, a comunicar.

Pela aplicação do projeto, observou-se claramente a dificuldade do grupo participante em produzir argumentos matemáticos de releitura do raciocínio lógico empregado no plano de construção de cada objeto geométrico construído. Entretanto deve-se considerar que os conhecimentos prévios desses alunos, oriundos de um processo histórico de vulnerabilidade social, remetem à representação visual, sem uma compreensão clara de suas partes e propriedades. Por outro lado um olhar criterioso desses estudantes neste contexto, comparando com os resultados das atividades propostas, ainda que preliminar, é estimulador para novas ações no sentido de desenvolver uma cultura de ensino e aprendizagem significativa, dinâmica, crítica e reflexiva.

No processo de desenvolvimento das atividades deste projeto, observou-se que:

- Há um vínculo muito forte no sentido de dependência de ação do professor, para que o aluno possa construir um plano de resolução de um problema.
- As construções fundamentais que apresentam poucos passos de construção obtiveram maior índice de aproveitamento, quanto maior o encadeamento e mais complexas, os alunos tendem se perderem em meio ao percurso de plano de construção da figura.
- Há a tendência da linguagem digital se sobrepor à simbólica da matemática, oral e escrita. Apesar de ao final do primeiro grupo de atividades, os alunos já construírem um discurso oral de construção da figura-solução, observou-se que as tentativas de escrita de um texto argumentativo se restringiu a algumas frases soltas do tipo: “primeiro peguei o ponto, depois do segmento o círculo e coloquei na reta”. A dificuldade na escrita desses alunos está claramente relacionada ao nível de suas apresentações e conseqüentemente em construir argumentos matemáticos para justificar resultados.

Apêndice A

Construções Geométricas Realizadas no GeoGebra por Estudantes de EJA IV

Cronograma:

A aplicação das atividades deste projeto nas turmas do noturno de EJA IV, para ensino de geometria com o foco em construções geométricas com o auxílio de régua e compasso do software GeoGebra, segue as seguintes datas, conforme referência dos capítulos, seções e subseções:

16 – 01 – 2018 - atividade n° 1: Referência Capítulo 1: Seção 1.1 e a Subseção 1.1.1 com resultados no Apêndice B. Para o desenvolvimento desta atividade as orientações foram passadas preliminarmente e no período de duas aulas os estudantes estiveram sob observação do orientador o professor Fernando Eliel de Lima. Fizeram perguntas pontuais como certificar-se de que o procedimento estava correto e se realmente a medida do segmento transportado era igual, isto é, se a medida do segmento dado se conservava ao ser transportado. Outras perguntas que ocorreram eram sobre algumas funcionalidades de ferramentas do software GeoGebra. Como respostas para estas perguntas solicitou-se que os alunos observassem as anotações sobre o uso das ferramentas do GeoGebra e as construções fundamentais permitidas.

17 – 01 – 2018 - atividade n° 2: Referência Capítulo 1: Subseção 1.1.2, resultados no Apêndice C. Essa atividade é uma continuação do Capítulo 1 deste trabalho, houve aqui também uma produção, considerando-se a base teórica desses jovens e adultos do EJA IV, as condições materiais e a jornada complementar de estudos para muitos destes depois de um dia de trabalho.

23 – 01 – 2018 - atividade n° 3: Referência Capítulo 1: Seção 1.2 resultados no Apêndice D. A partir desta atividade a produção foi reduzindo, tanto que, somente 40% do grupo, mesmo com erros, realizou a atividade.

24 – 01 – 2018 - atividade n° 4: Referência Capítulo 1: Seção 1.2 com os resultados no Apêndice E. As dificuldades apresentadas pelo grupo, não se resume à falta de iniciativa em desenvolver a atividade, mas à irregularidade da frequência influenciou muito no resultado final da proposta do projeto. O aluno que faltou à aula anterior, na aula se-

guinte tenta realizar a atividade do dia. Se o êxito dos desafios dependem do aprendizado da aula anterior, estes teriam que voltar para a atividade anterior só assim para depois prosseguir. O baixo referencial teórico desses alunos, a baixa frequência e a ampliação do número de passos para realizar a construção do objeto, poucos conseguiram evoluir a partir da atividade nº4. Algumas tentativas pontuais foram realizadas, porém sem muito êxito. Até aqui não foram inseridos sugestões de roteiro de construção. As instruções e dúvidas eram realizadas antes de começar os trabalhos, queremos dizer antes de abrirem a tela do computador.

30 – 01 – 2018 - atividade nº 5: Referência Capítulo 2: Seção 1.3, Seção 2.1 e Seção 2.2. Nesta atividade não houve produção, os alunos estavam atrasados em relação às construções das atividades anteriores que servem de suporte para as próximas construções.

31 – 01 – 2018 - atividade nº 6: Referência Capítulo 3: Seção 3.1. Aqui também não houve produção pelas mesmas razões descritas na data anterior.

06 – 02 – 2018 - atividade nº 7: Referência Capítulo 3: Seção 3.2, Seção 3.3, Seção 3.4 e Subseção 3.4.1. Houve por parte de alguns alunos a tentativa de realizar os desafios desta atividade, porém sem muita relação com os conteúdos teóricos estudados em sala de aula, que resultou no Apêndice F.

07 – 02 – 2018 - atividade nº 8: Referência ao Capítulo 4. A partir da atividade nº 5 os desafios vinham acompanhados de um resumo do plano de construção, resultados do Apêndice G.

Apêndice B

Construções Geométricas - Atividade

$n^{\circ}1$

O rótulo de cada figura-solução está identificado pela inicial maiúscula do nome do estudante, o número que identifica a atividade e o número do desafio.

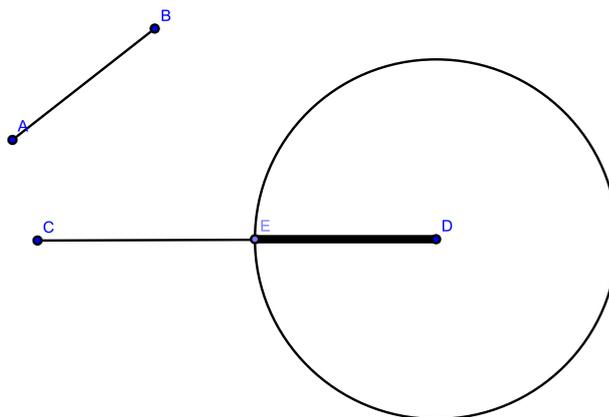


Figura B.1: El: Transporte de segmento para a reta.

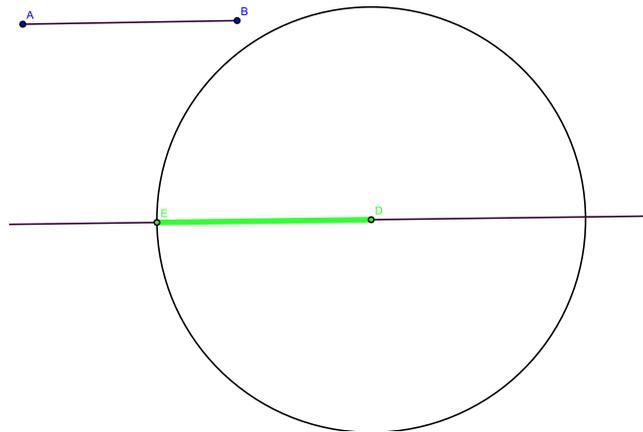


Figura B.2: G1: Transporte de segmento para a reta.

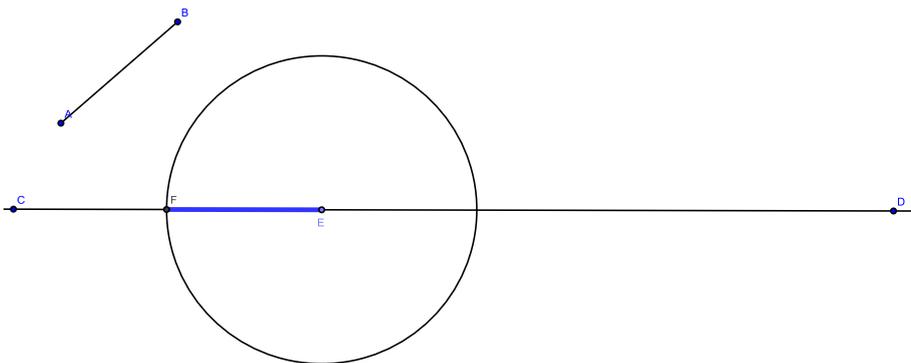


Figura B.3: Th: Transporte de segmento para a reta.

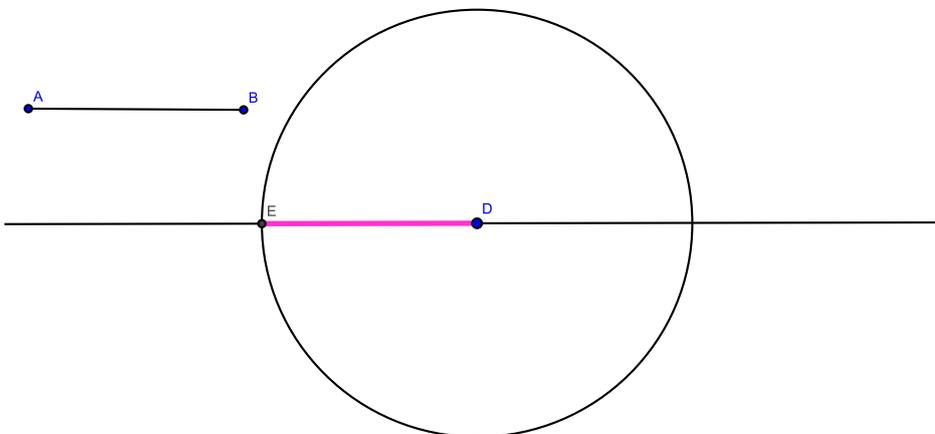


Figura B.4: S1: Transporte de segmento para a reta.

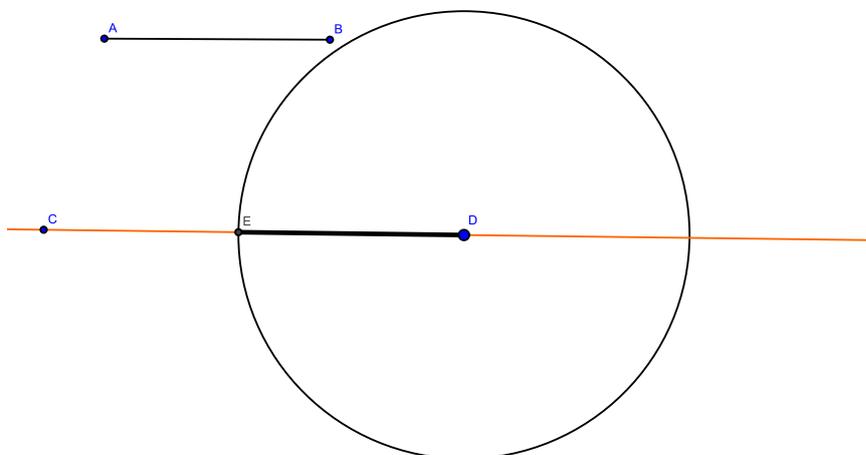


Figura B.5: Jo: Transporte de segmento para a reta.

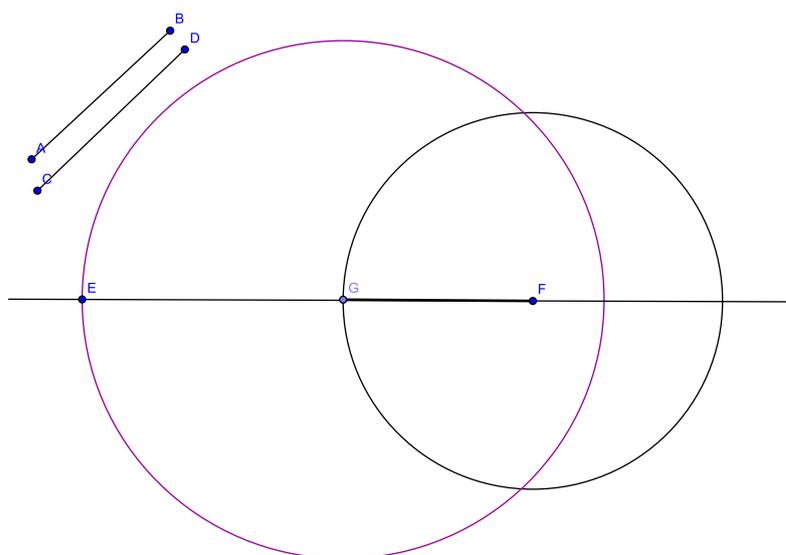


Figura B.6: El: Transporte de segmentos para a reta.

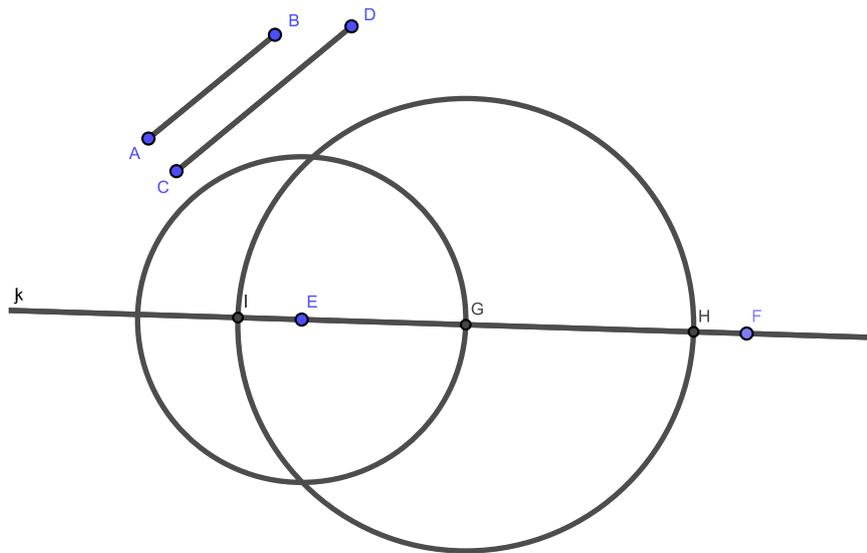


Figura B.7: G1: Transporte de segmentos para a reta.

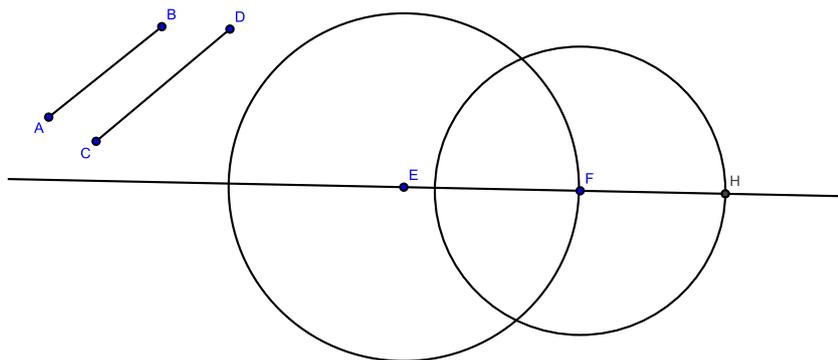


Figura B.8: Id: Transporte de segmentos para a reta.

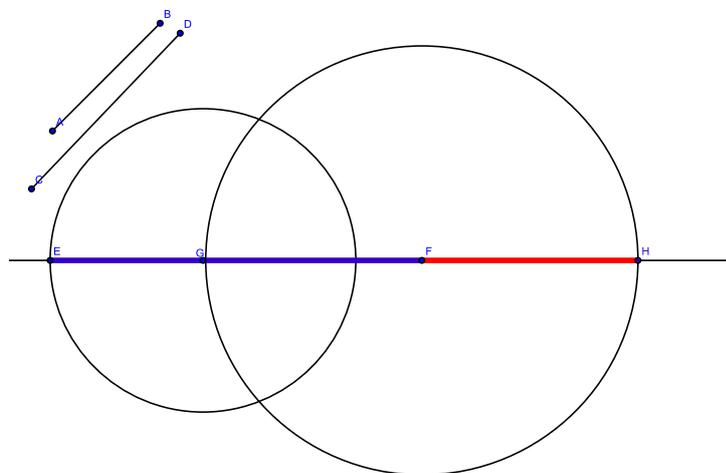


Figura B.9: Th: Transporte de segmentos para a reta.

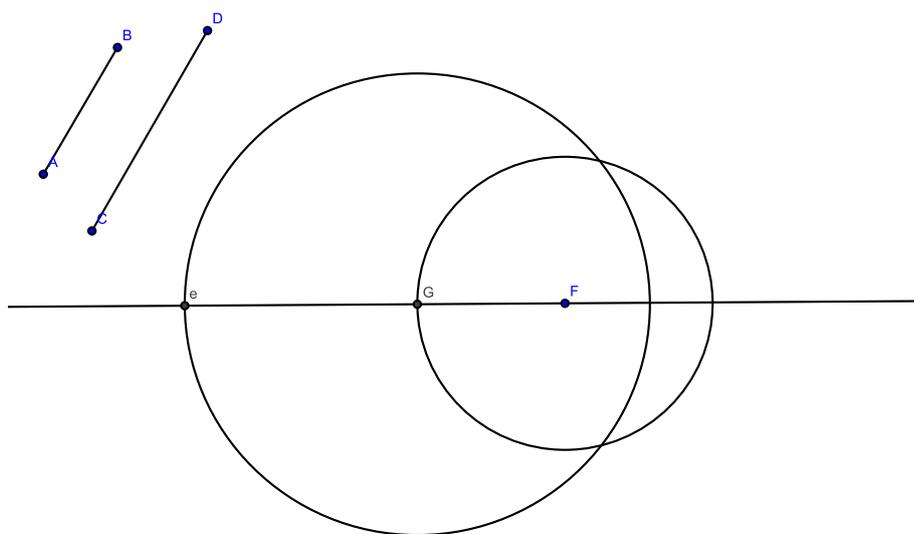


Figura B.10: S1: Transporte de segmentos para a reta.

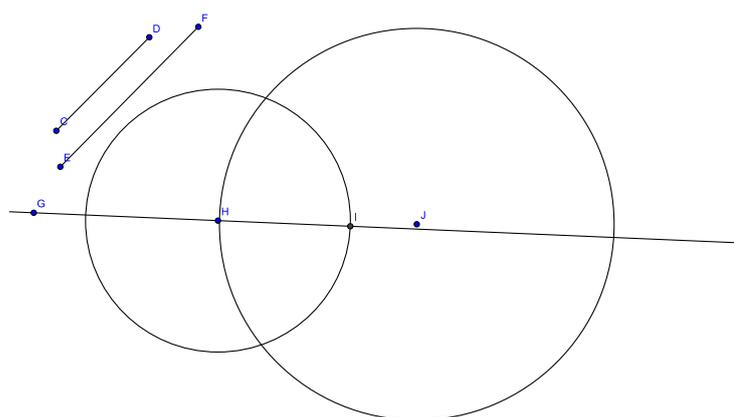


Figura B.11: Ld: Transporte de segmentos para a reta.

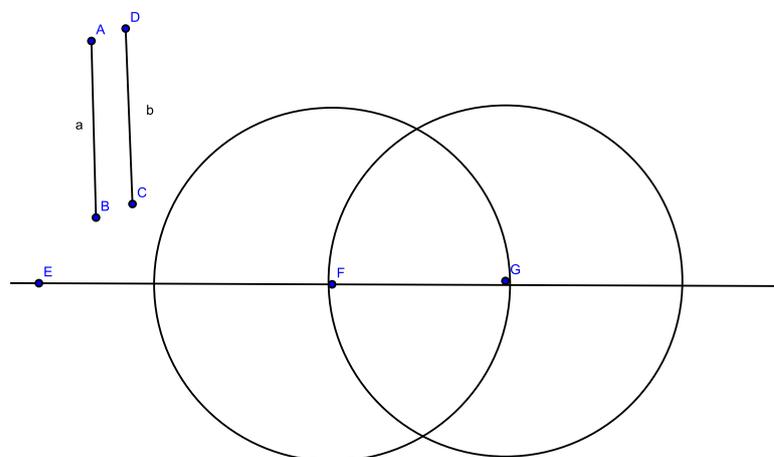


Figura B.12: Dl: Transporte de segmentos para a reta.

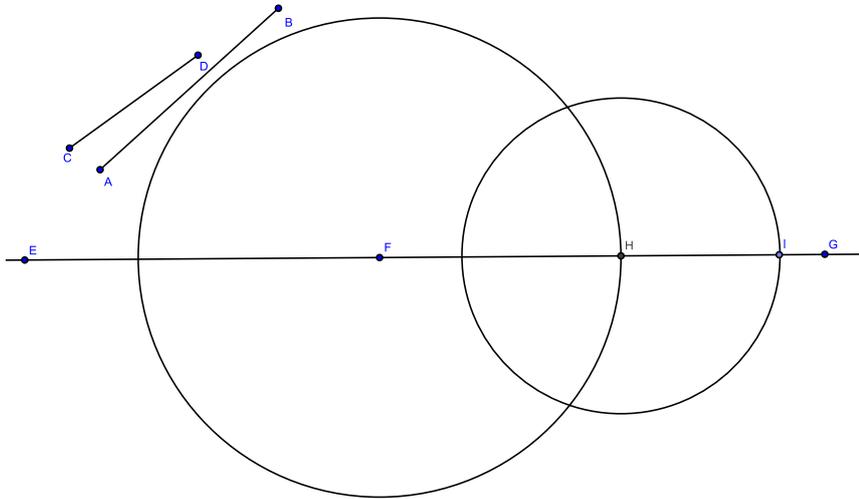


Figura B.13: Jo: Transporte de segmentos para a reta.

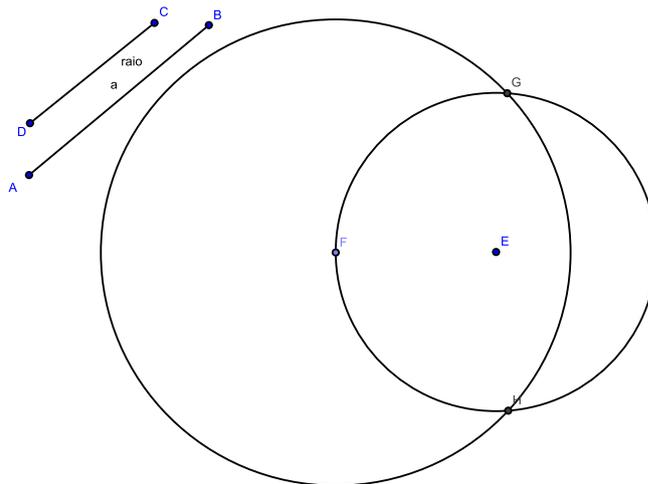


Figura B.14: El: Transporte de segmento para o círculo.

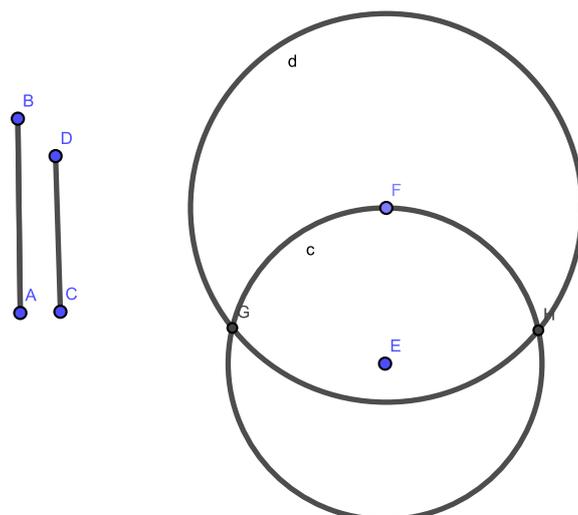


Figura B.15: G1: Transporte de segmento para o círculo.

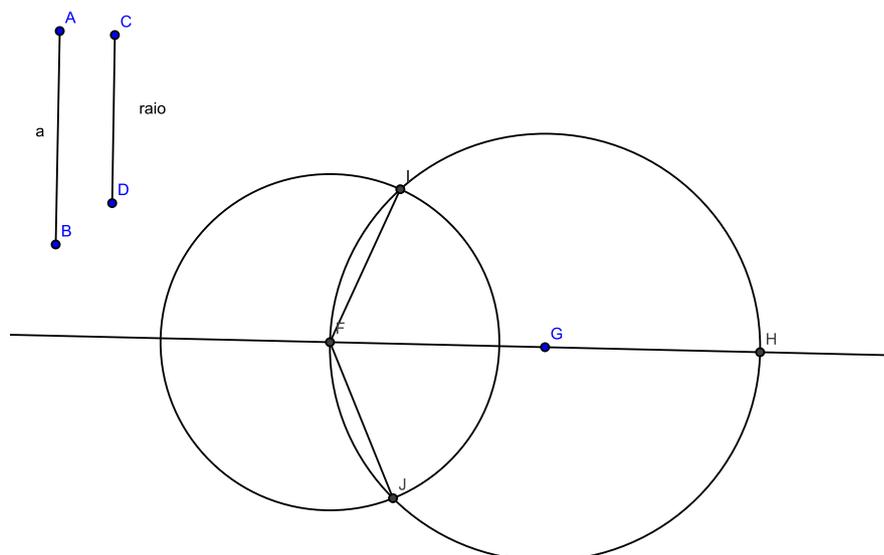


Figura B.16: Id: Transporte de segmento para o círculo.

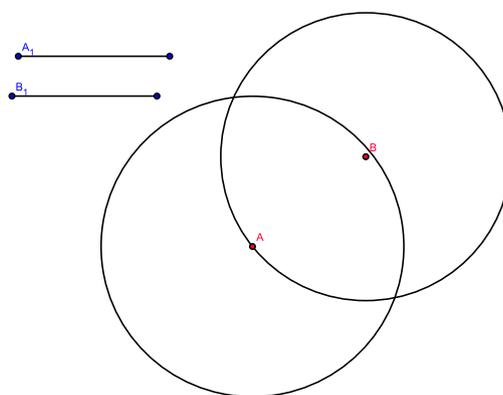


Figura B.17: Th: Transporte de segmento para o círculo.

Apêndice C

Construções Geométricas - Atividade $n^{\circ}2$

A seguir as construções realizadas pelos estudantes de EJA IV na segunda atividade sobre construções geométricas com o auxílio de régua e compasso do software GeoGebra.

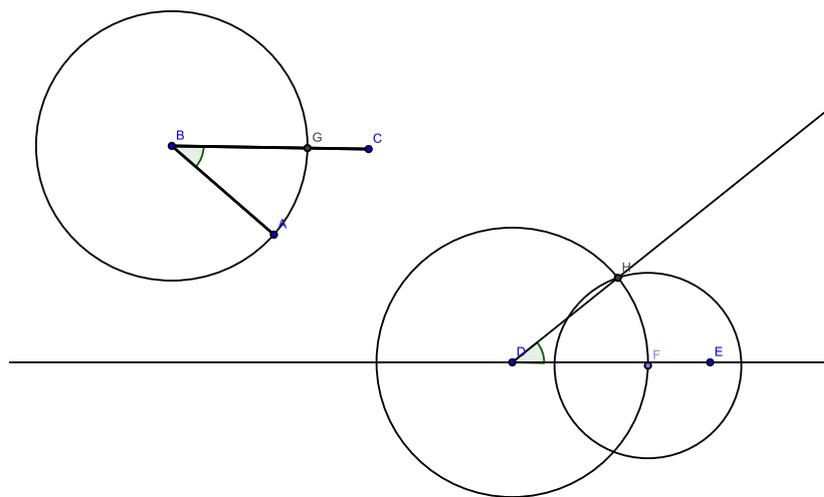


Figura C.1: El: Transporte de ângulo para a reta.

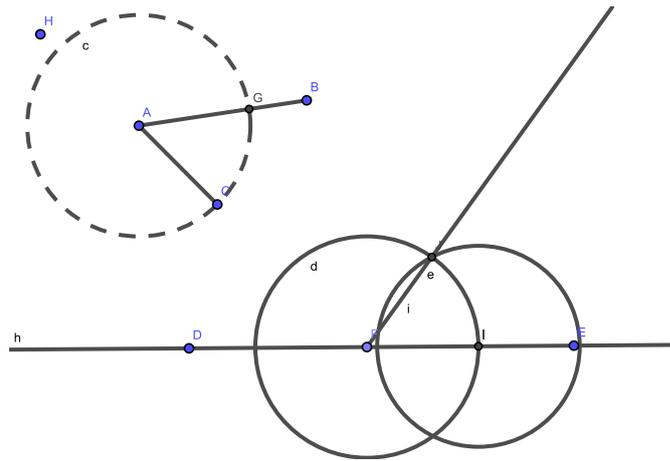


Figura C.2: G1: Transporte de ângulo para a reta.

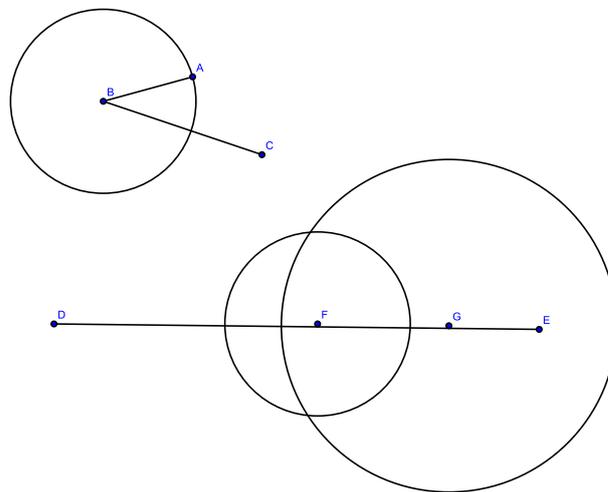


Figura C.3: Jd: Transporte de ângulo para a reta.

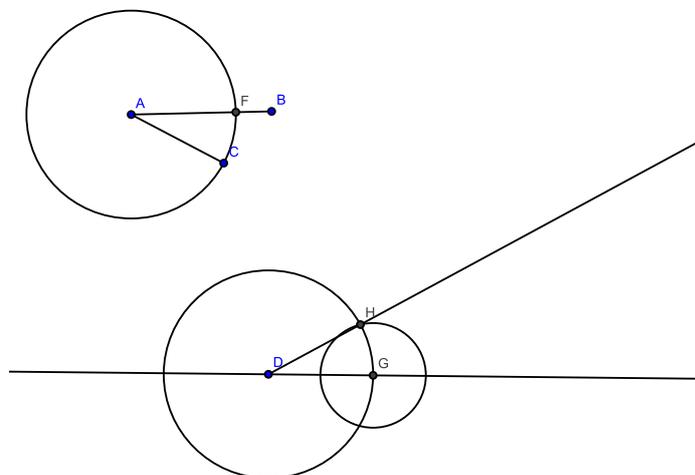


Figura C.4: Id: Transporte de ângulo para a reta.

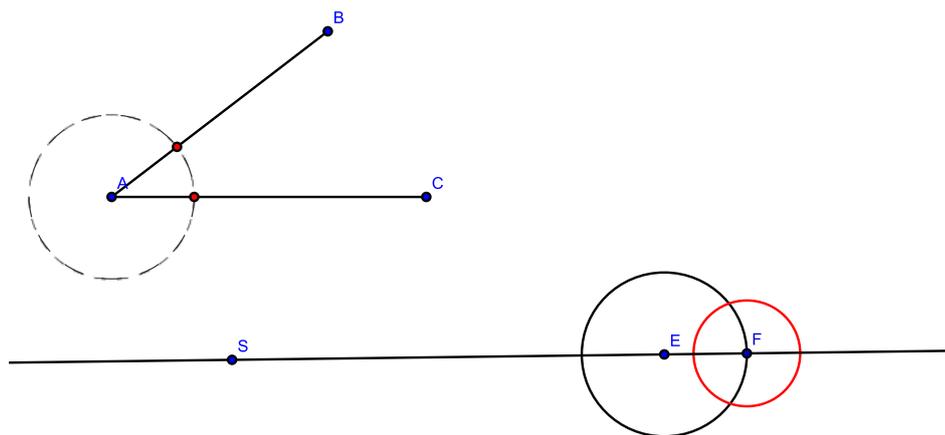


Figura C.5: Th: Transporte de ângulo para a reta.

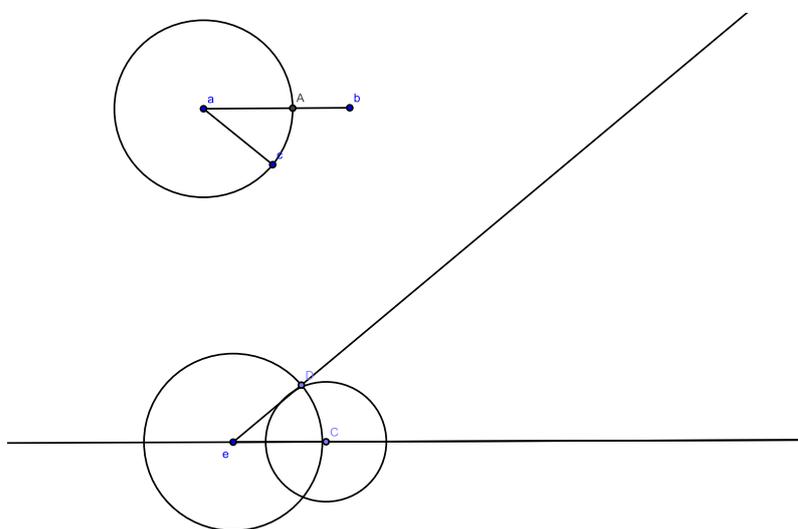


Figura C.6: Sl: Transporte de ângulo para a reta.

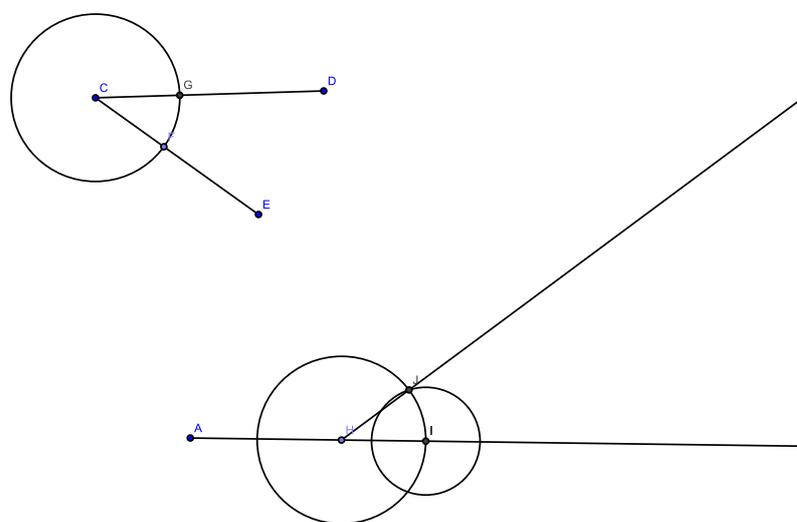


Figura C.7: Ld: Transporte de ângulo para a reta.

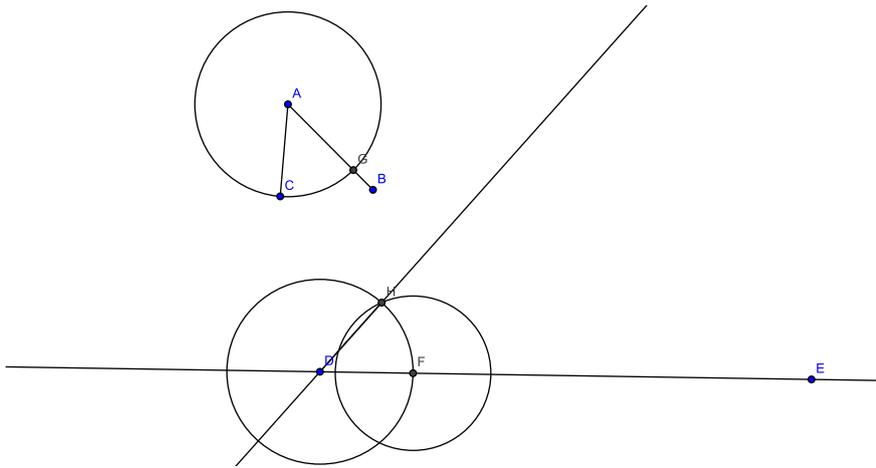


Figura C.8: Ma: Transporte de ângulo para a reta.

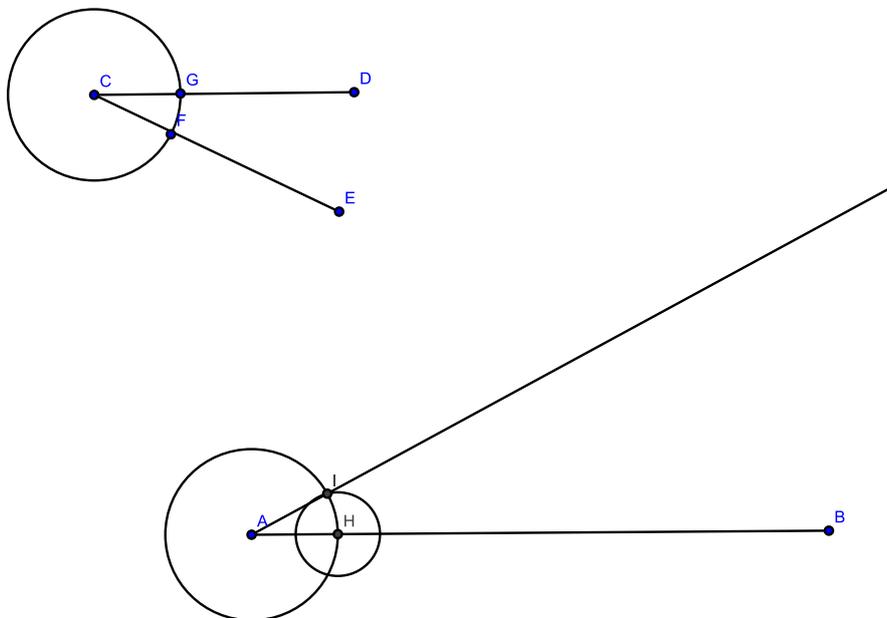


Figura C.9: Jo: Transporte de ângulo para a reta.

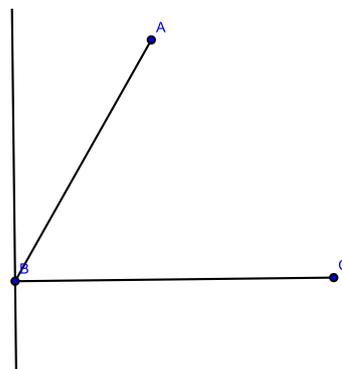


Figura C.10: El: Ângulo de 30° .

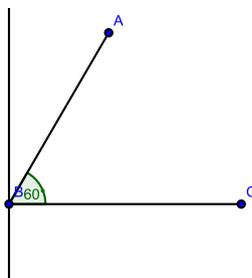


Figura C.11: Ma: Ângulo de 30° .

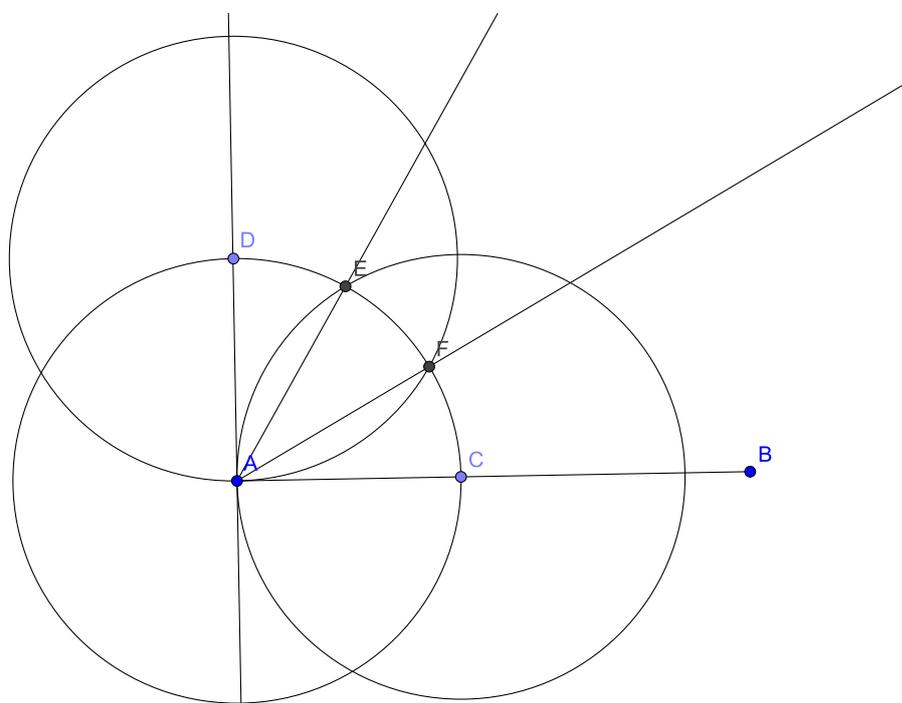


Figura C.12: El: Divisão de 90° em três partes iguais.

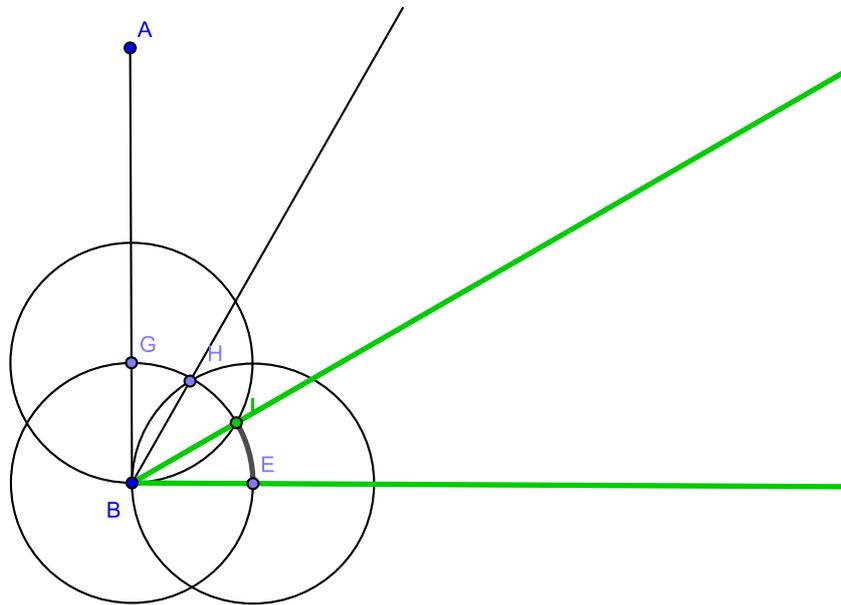


Figura C.13: Jd: Divisão de 90° em três partes iguais.

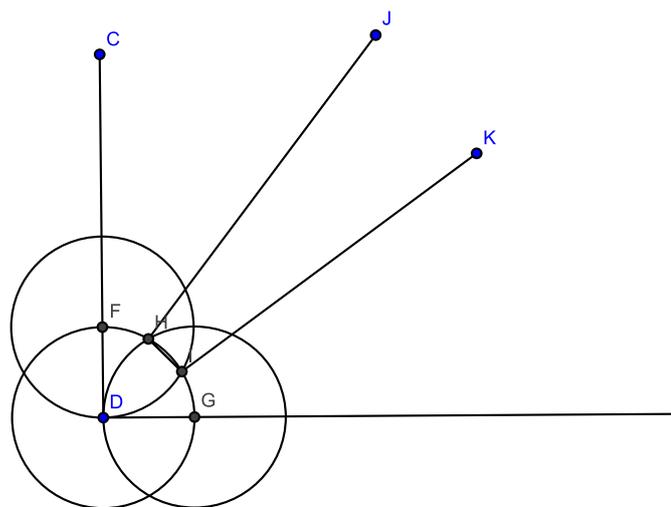


Figura C.14: Sl: Divisão de 90° em três partes iguais.

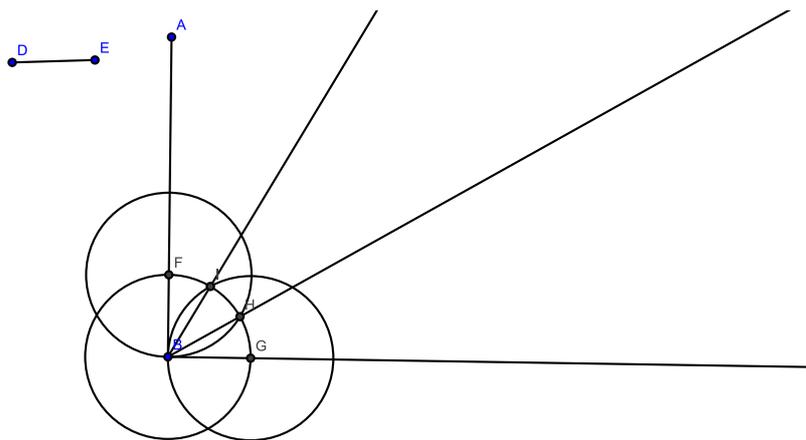


Figura C.15: Ld: Divisão de 90° em três partes iguais.

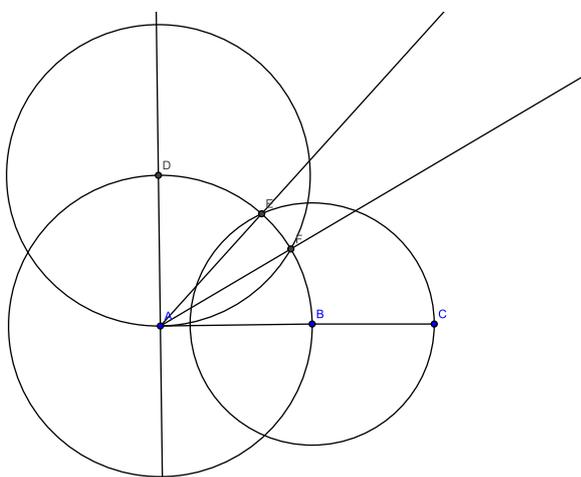


Figura C.16: Ma: Divisão de 90° em três partes iguais.

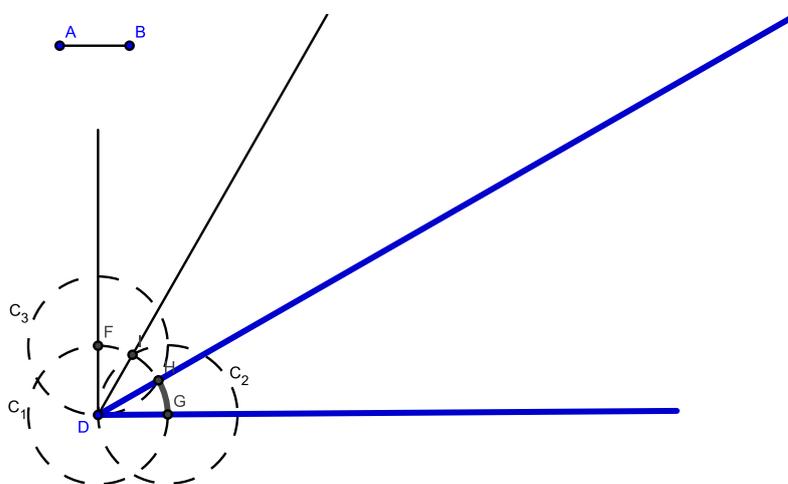


Figura C.17: Jo: Divisão de 90° em três partes iguais.

Apêndice D

Construções Geométricas - Atividade $n^{\circ}3$

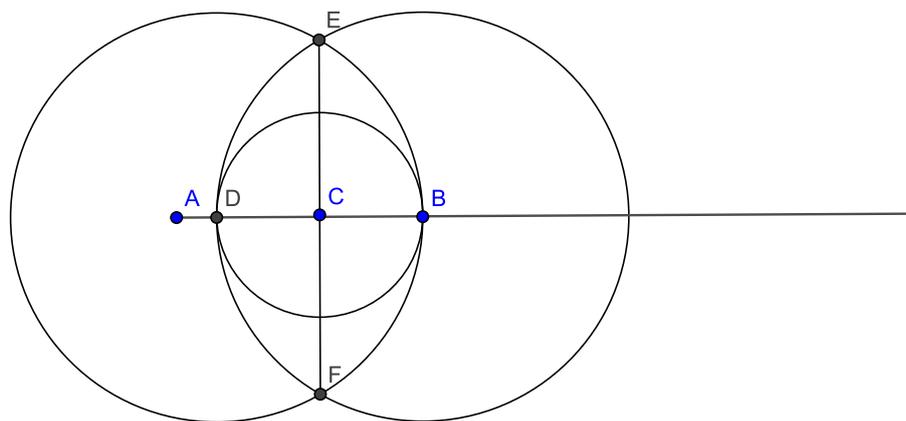


Figura D.1: Ld: Perpendicular por um ponto pertencente à reta.

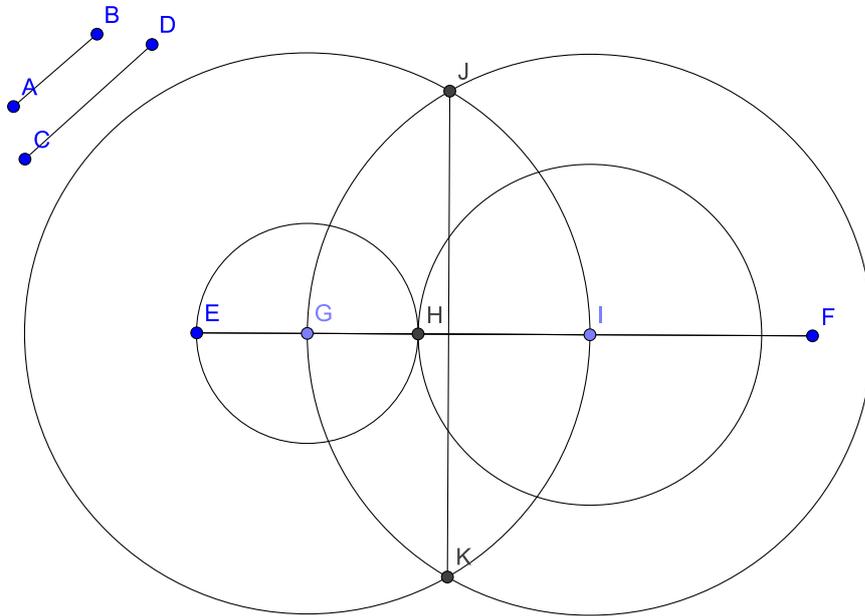


Figura D.2: Ma: Perpendicular passando pelo ponto médio de um segmento.

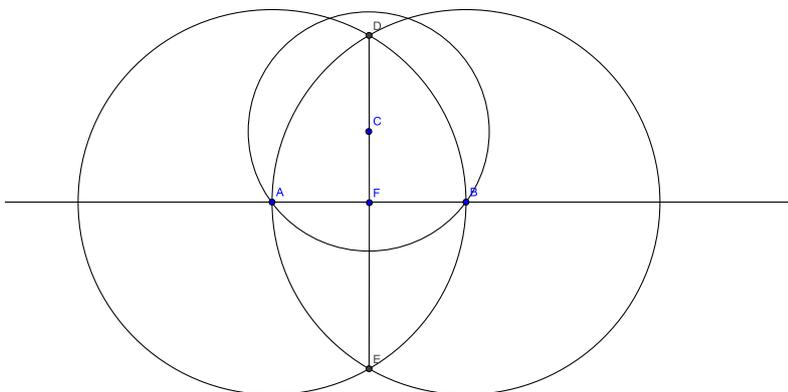


Figura D.3: Ld: Perpendicular passando pelo ponto médio de um segmento.

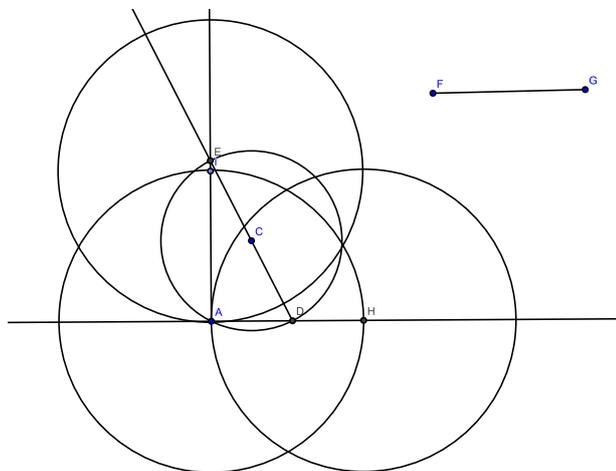


Figura D.4: Id: Perpendicular por uma das extremidades do segmento.

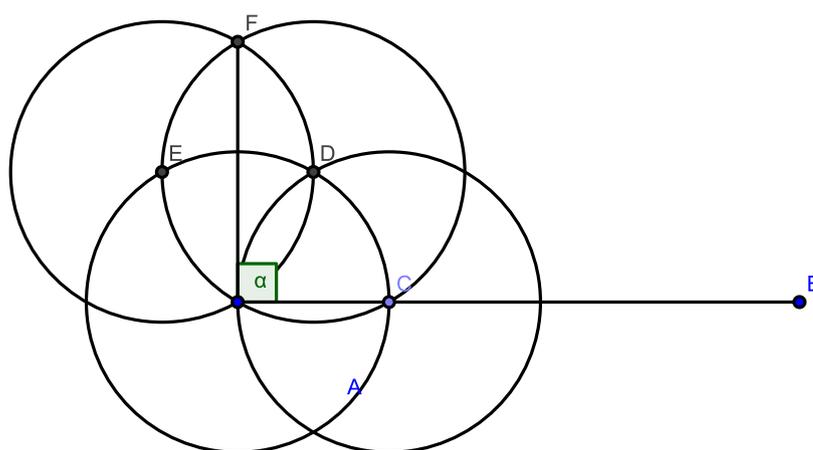


Figura D.5: Sl: Perpendicular por uma das extremidades do segmento.

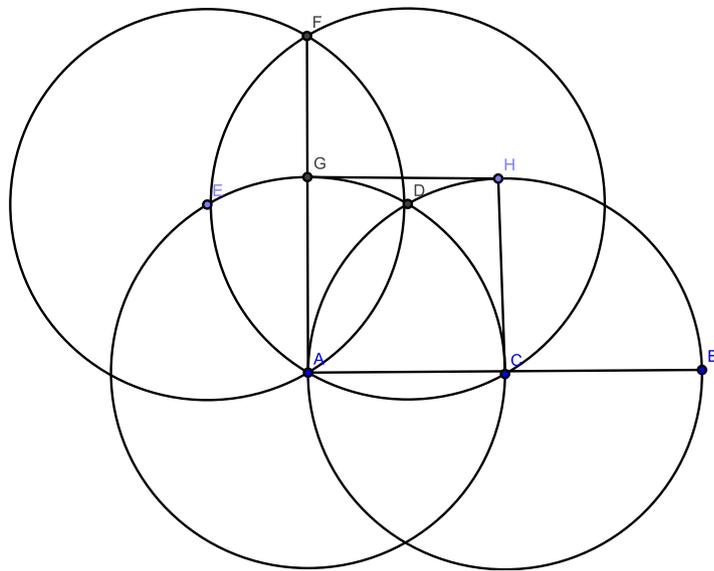


Figura D.6: Ld: Perpendicular por uma das extremidades do segmento

Apêndice E

Construções Geométricas - Atividade

$n^{\circ}4$

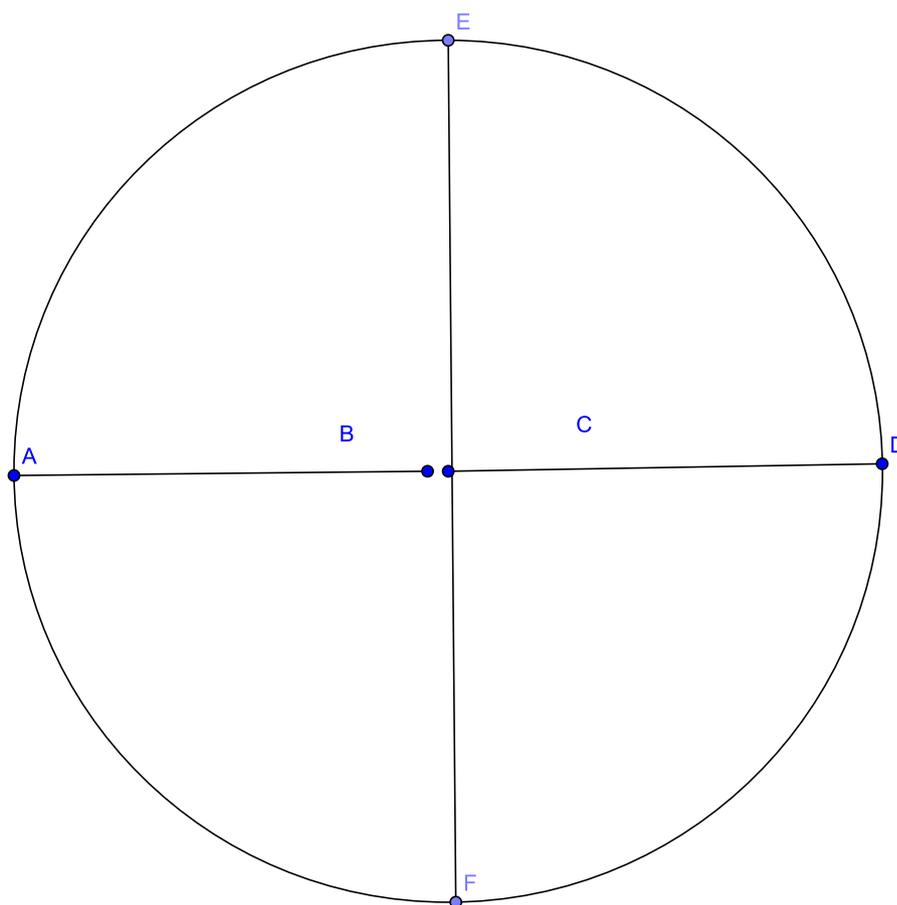


Figura E.1: El: Inscrição do quadrado

Apêndice F

Construções Geométricas - Atividade

nº7

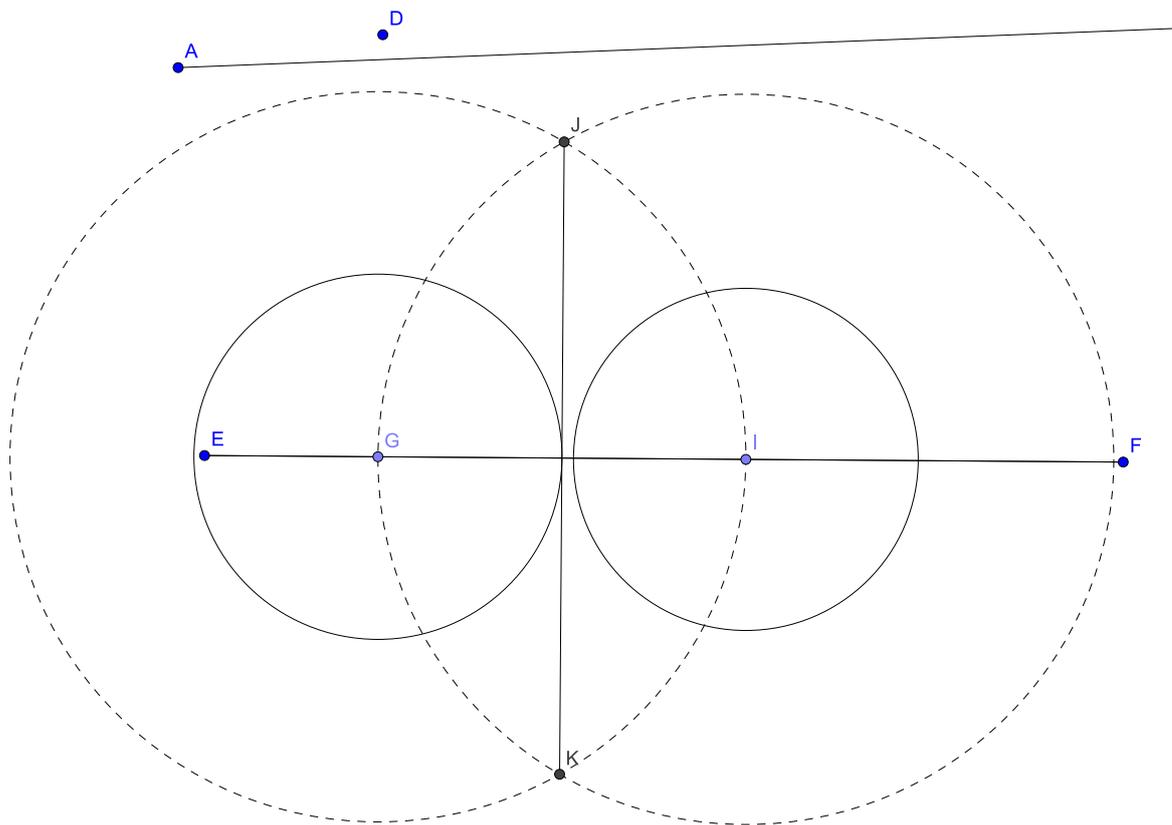


Figura F.1: El: Média aritmética

Apêndice G

Construções Geométricas - Atividade

nº8

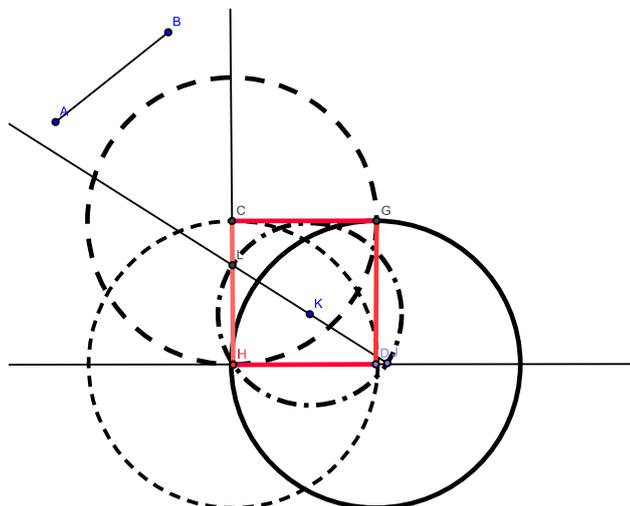


Figura G.1: El: Construção do quadrado equivalente ao triângulo retângulo.

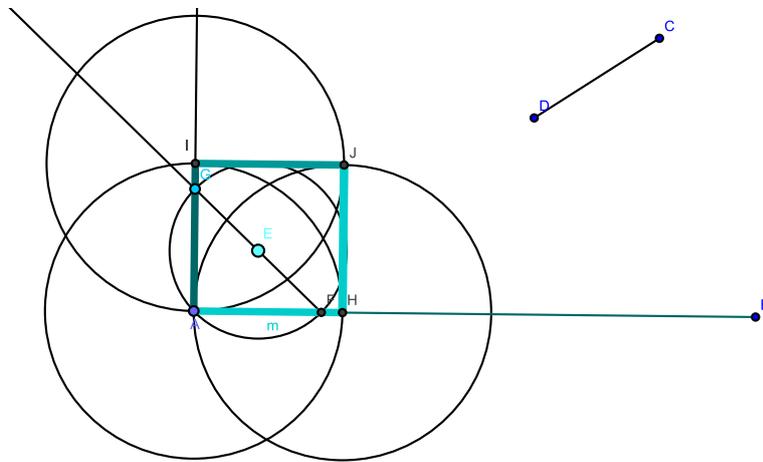


Figura G.2: Jd: Construção de um quadrado equivalente ao triângulo retângulo.

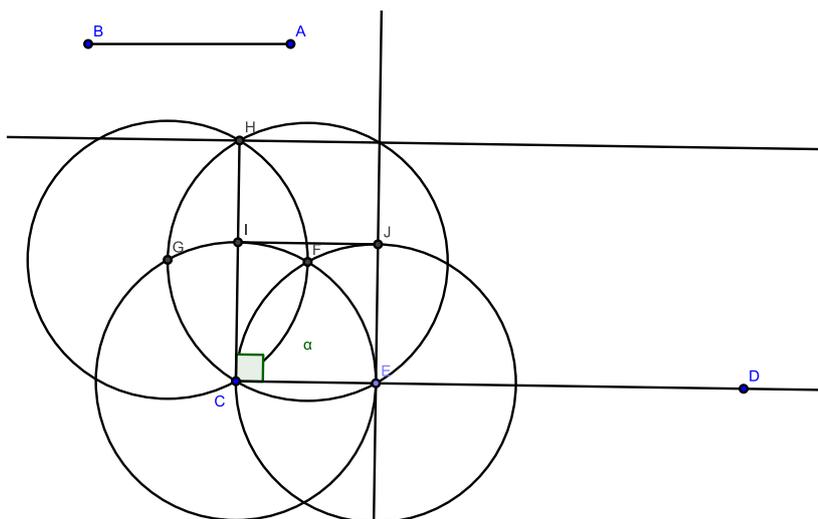


Figura G.3: Gl: Construção de um quadrado equivalente ao triângulo retângulo.

Apêndice H

Indicador de satisfação dos estudantes

Ao final dos trabalhos realizados, segundo essa proposta didática, envolvendo CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DE RÉGUA E COMPASSO DO SOFTWARE GEOGEBRA, aplicou-se uma pesquisa qualitativa sobre o perfil socioeconômico, traços de construção de conhecimentos geométricos e grau de satisfação dos estudos desenvolvidos pelo grupo. A seguir a pesquisa com os respectivos indicadores:

Pesquisa Qualitativa

1. Qual a sua idade?

Indicador: A faixa etária do grupo varia de 17 à 45 anos, com média aritmética de 24 anos.

2. Você tem filho? Quantos?

Indicador: 50% dos educandos do grupo tem de 1 a 3 filhos.

3. Você trabalha com carteira assinada? Trabalho em emprego temporário? Não trabalha de forma alguma?

Indicador: 30% trabalham com carteira assinada; 50% trabalham em empregos temporários e 20% não trabalham de forma alguma.

4. Você já sabia usar o computador antes das aulas no laboratório de informática?

Indicador: 60% dos educandos deste grupo já sabia, de alguma forma, usar o computador antes das aulas no laboratório e 40% nunca usou o computador.

5. Você já conhecia o software de geometria dinâmica, GeoGebra, antes desta proposta de atividades no laboratório de informática?

Indicador: 100% não conheciam esse tipo de recurso tecnológico.

6. Em algum momento de sua formação, em anos anteriores a 2017, algum professor de matemática trabalhou a geometria usando régua e compasso? Se a resposta for sim, em que ano?

Indicador: 90% responderam não, ou seja, nenhum professor de matemática havia trabalhado o estudo de geometria usando régua e compasso. Enquanto 10% respondeu sim em 2013.

7. Comparando metodologias e recursos, qual a sua preferência?

- Aulas expositivas e recursos em classe.

Indicador: 30% tem preferência por esse estilo metodológico.

- Atividades desenvolvidas no laboratório.

Indicador: 70% preferem as aulas no laboratório.

8. Na sua opinião de que forma você aprende mais satisfatoriamente?

- Com o professor expondo os conteúdos em classe.

Indicador: 60% indicaram esta opção, aparentemente contrariando o indicador do quesito anterior, porém isto revela a sistematização da dependência do desenvolvimento do raciocínio lógico formal do aluno em relação à prática pedagógica do professor.

- Usando recursos digitais no laboratório de informática.

Indicador: 40% aponta uma opção mais tecnológica, tendência natural de estudantes com mais habilidades em novas tecnologias.

9. Numa escala de zero a dez, que nota você atribuiria à sua aprendizagem envolvendo construções geométricas usando régua e compasso na plataforma de geometria dinâmica do GeoGebra?

Indicador: Média aritmética atribuída às notas, 7,7.

10. Numa escala de zero a dez que nota você atribuiria as atividades sobre construções geométricas usando o GeoGebra?

Indicador: Média aritmética atribuída às notas, 8,0.

11. Numa escala de zero a dez, qual o seu grau de satisfação com relação as aulas realizadas no laboratório envolvendo as construções geométricas com régua e compasso?

Indicador: Média aritmética atribuída às notas, 9,0.

12. Por que, mesmo depois do toque final da última aula, a maioria de vocês, ainda assim, insistiam em permanecer nos computadores fazendo a atividade? Indicador:

- O porque é bom e eu Aprendo mais quanto mas Eu fico Eu vou Aprender.
- por quê eu queria terminar meu Trabalho é por que eu gosto do Soft por que ele ajuda muito no aprendizado sobre geometria.
- Eu ou agente insistimos porque as vezes nos distrair-mos no tempo.

- porque no computador agente aprende muitas coisas sobre matematica e é mais facil agente gravar as coisas mais facies.
- Proque eu mi distrai e não deu tempo de termina atividade.
- Quando bate o sinal agente sai da aula na hora.

Observou-se também que 40% do grupo não entregaram o questionário em função da dificuldade na redação do último quesito.

Referências Bibliográficas

- [1] AABOE, A. Episódios da História Antiga da Matemática. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM, 1984.
- [2] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] MUNIZ NETO, A. C. Geometria: Coleção Profmmat. Rio de Janeiro; SBM, 2013.
- [4] BOYER, C. B. Tradução: Elza F. Gomide. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- [5] WAGNER, E. Construções Geométricas. Colaboração de José Paulo Q. Carneiro. Coleção do Professor de Matemática. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- [6] PERRENOUD. Tradução: Patrícia Chittoni Ramos Reuillard. OS CICLOS DE APRENDIZAGEM Um caminho para combater o fracasso escolar. Porto Alegre: Artmed, 2004.
- [7] EVES, H. Tradução: Hygino H. Domingues. Introdução à História da Matemática. 3.ed. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.
- [8] BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana: Coleção do Professor de Matemática. 11.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [9] NETO, A. GEOMETRIA: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: 2013, p.(1-210)
- [10] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana. v.9. 8.ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [11] SADOVSKY, Patricia, *Falta Fundamentação Didática no Ensino da Matemática*, Nova Escola. São Paulo: Ed. Abril, Jan./Fev. 2007, p.15.
- [12] BRASIL - Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série): Matemática/ Secretaria de Educação. Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1997. 142p. p.26
- [13] BRASIL - Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF. 1998. 146p. p.19 e p.48

- [14] NETTO, S. L. Construções Geométricas: Exercícios e Soluções. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [15] ROQUE, T. e CARVALHO, J. B. P. Tópicos de História da Matemática. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [16] GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, E. Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2013.