UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

MARIVALDO CONCEIÇÃO GONÇALVES

O PROGRAMA DE ENRIQUECIMENTO INSTRUMENTAL DE REUVEN FEUERSTEIN COMO REQUISITO PARA O ESTUDO DE TEORIA DOS GRAFOS

Ilhéus-Bahia
2018

MARIVALDO CONCEIÇÃO GONÇALVES

O PROGRAMA DE ENRIQUECIMENTO INSTRUMENTAL DE REUVEN FEUERSTEIN COMO REQUISITO PARA O ESTUDO DE TEORIA DOS GRAFOS

Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da Universidade Estadual de Santa Cruz.

Orientadora: Profa. Dra. Mirela Vanina de Mello

Ilhéus-Bahia
2018

Marivaldo Conceição Gonçalves

O PROGRAMA DE ENRIQUECIMENTO INSTRUMENTAL DE REUVEN FEUERSTEIN COMO REQUISITO PARA O ESTUDO DE TEORIA DOS GRAFOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Ficha catalográfica.

G635 Gonçalves, Marivaldo Conceição.
O Programa de Enriquecimento Instrumental de Reuven Feuerstein como requisito para o estudo de Teoria dos Grafos / Marivaldo Conceição Gonçalves. – Ilhéus, BA: UESC, 2018.
74 f. : il.

Orientadora: Mirela Vanina de Mello.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Referências bibliográficas: f. 73-74.

1. Teoria dos grafos. 2. Programa de Enriquecimento Instrumental. 3. Professores e alunos. 4. Mediação. 5. Cognição. I. Título.

CDD 511.5

Trabalho aprovado. Ilhéus, 11 de junho de 2018:

Mirela Vanina de Mello

Profa. Dra. Mirela Vanina de Mello.
Orientador

Prof. Me. André Malvezzi Lopes - UESC

Grasiele C. Jorge

Profa. Dra. Grasiele Cristiane Jorge
Membro Externo - UNIFESP - São José dos Campos

Levai as cargas uns dos outros e assim cumprireis a lei de Cristo. (Gálatas 6.2).

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade e por permitir que conseguisse alcançar este êxito.

Aos meus irmãos Alexandre Conceição Gonçalves, Hilda Conceição Gonçalves e Iolanda Conceição Gonçalves e aos meus avôs Alcides Pereira Conceição e Maria de Jesus Miranda pelo apoio nas dificuldades encontradas.

A todos os meus professores do Ensino Básico, em especial aos professores Rosângela Cardoso, Maria Nelma Porto e Alex José Ramos pelos conhecimentos obtidos e pelo apoio como colegas de trabalho.

À coordenação e todos os professores do PROFMAT - UESC.

À minha orientadora Professora Dra. Mirela Vanina de Mello pela paciência durante todo período de orientação.

Aos membros da banca, em especial Professor Me. André Malvezzi Lopes por todo suporte durante o curso.

Aos demais familiares e amigos pelo crédito.

Aos meus colegas e amigos de curso Adenilson, Edmilson, Lucas, Robson, Tamiri, Watila, Fernando Eliel, Norislei e Joelson pelas alegrias durante o curso.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação apresenta uma proposta de ensino do conteúdo Teoria dos Grafos, utilizando as ideias da Pedagogia da Atividade Mediada de Reuver Feuerstein, por meio de tarefas com características similares as que são encontradas no Programa de Enriquecimento Instrumental (PEI). O objetivo geral deste trabalho é fazer com que o aluno desenvolva o seu lado cognitivo, possibilitando que o mesmo resolva algumas atividades utilizando uma outra abordagem, com base na Teoria de Grafos.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, Mediação de Reuver Feuerstein, Programa de Enriquecimento Instrumental (PEI).

Abstract

This dissertation presents a teaching proposal of the Graphs Theory content, using the ideas of the Pedagogy of the Mediated Activity of Reuver Feurstein, through tasks with similar features to those found in the Instrumental Enrichment Program (IEP). The general objective of this work is to make the students solve some activities using another approach, based on Graph Theory.

Keywords: Graph Theory, Reuver Feuerstein Mediation, Instrumental Enrichment Program (IEP).

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A análise Combinatória, grande área da Matemática, abrange quantidade significativa de tópicos em seu ensino. No Ensino Médio atual, apenas uma pequena porcentagem desses tópicos é abordada. Nesse sentido, o professor Paulo César Carvalho Pinto (durante uma de suas aulas de Combinatória do Programa de Aperfeiçoamento Para Professores de Matemática do Ensino Médio: PAPMEM-IMPA, Julho de 2017) comenta a respeito da falta de alguns desses tópicos, enfatizado que nos próximos anos muitos deles deverão constar no currículo do ensino médio e que em vários países esse quadro já vem sendo mudado. Ele cita grafos como exemplo, onde se insere uma linguagem adequada para formular problemas de encontrar um melhor caminho de um ponto para outro em uma cidade. Num outro momento, durante uma aula de Algoritmos e Grafos (também no Programa de aperfeiçoamento para professores de Matemática do Ensino Médio, Janeiro de 2016), Paulo Cesar fala a respeito da falta do estudo de Teoria dos Grafos no Ensino Básico, ressaltando sua importância para entender muitas das tecnologias do mundo atual. Segundo ele, estudar Combinatória não é apenas contar quantos elementos possui um conjunto, mas também entender as relações entre os mesmos, ou se existe dentro de um dado conjunto um melhor elemento cumprindo alguma condição. Ver mais em [12] e [13].

O famoso problema das pontes de Konigsberg é considerado o marco fundador da Teoria dos Grafos. Nele, alguns habitantes da cidade de Konigsberg (hoje Kaliningrado - Rússia) questionavam o seguinte: Seria possível uma pessoa saindo de um determinado local atravessar as sete pontes do rio Praga sem passar duas vezes na mesma ponte retornando ao ponto de partida

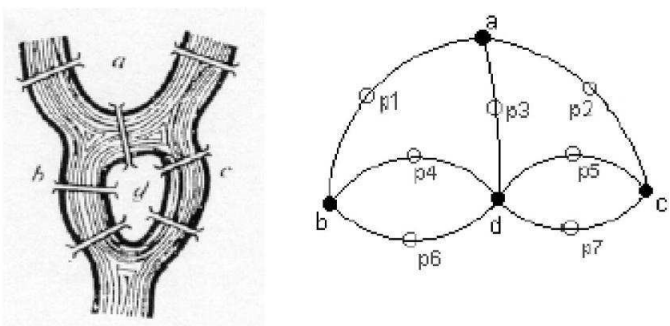


Figura 1: Pontes de Konigsberg e seu grafo representativo

Em [4] podemos ver que Euler apresentou um conjunto de estratégias bem elaboradas para a solução do problema das Pontes de Konigsberg, como segue: Euler usou um raciocínio muito simples. Transformou os caminhos em retas e suas intersecções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história. Com isso, percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos. A razão de tal coisa é que de cada ponto deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para entrar e outro para sair. Os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Se não houver pontos com número ímpar de caminhos, pode-se (e deve-se) iniciar e terminar o trajeto no mesmo ponto, podendo esse ser qualquer ponto do grafo.

Atualmente, muitos problemas possuem características parecidas com o que acabamos de observar e para solucioná-los é necessário elaborar estratégias similares àquelas utilizadas por Euler. Dentro da organização moderna, o sujeito deve ser cada vez mais capacitado: ser capaz de mudar de uma tarefa para outra, aprender habilidades novas (mesmo quando seu campo de experiência ainda não a necessite), habituar-se as mudanças frequentes de novos chefes, trabalhar em equipes organizadas para desenvolver um projeto específico e concluir suas tarefas num menor tempo, além de buscar sempre um menor custo para realizá-las. Em todas essas problemáticas, o indivíduo deve estar em alerta constante para a sua adaptação às mudanças que podem vir a ocorrer, mediante perspectivas de um futuro cada vez mais inseguro, onde encontramos muitos problemas que apresentam um grau elevado de dificuldades em sua compreensão [8]. Nesse sentido, destacamos as dificuldades encontradas em grande parte dos alunos da Educação Básica no que diz respeito ao Ensino, em especial da Matemática. Com isso, a atuação do professor no processo de ensino-aprendizagem não pode ser vista apenas como reprodutora de conhecimento, também como um elemento motivador capaz de levar seus alunos a obter um grau de satisfação aceitável em relação ao seu desenvolvimento. Nesse sentido, começamos a pensar na ideia da elaboração de uma proposta de ensino que coloca a Pedagogia da Atividade Mediada de Reuver Feuerstein, através de atividades do Programa de Enriquecimento Instrumental (PEI) como requisito para Ensino de Teoria dos Grafos. O fato de eu, enquanto aluno do Ensino Médio, ter cursado as disciplinas do Programa de Enriquecimento Instrumental (PEI) nos níveis I e II durante os dois primeiros anos, acabou corroborando para que a proposta pudesse ser então iniciada. Nessas disciplinas, o professor trabalha como um observador/mediador, auxiliando seus alunos na resolução das tarefas propostas, ajudando o educando a desenvolver sua autonomia acima de tudo.

Nesse trabalho, elaboramos uma Proposta de Ensino do conteúdo Teoria dos Grafos usando como requisito a Pedagogia da Atividade Mediada de Reuver Feuerstein, por meio de atividades com características similares com as que são abordadas no Programa de Enriquecimento Instrumental. O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos as definições e teoremas referentes aos conceitos que consideramos fundamentais em Teoria dos Grafos: Grafos Simples; Grafos Conexos; Multigrafos; Grafos Orientados; Subgrafos de um Grafo; Grafos Completos; Grafos Complementares; Grafos Eulerianos, Grafos Semieulerianos; Ciclos em um Grafo; Grafos Conexos; Isomorfismo entre Grafos; Grafos Bipartidos; Árvores e Florestas; Grafo com Peso; Grafos Orientados e Grafos Planares e não Planares. No segundo capítulo, fazemos uma abordagem da Pedagogia da Atividade Mediada de Reuver Feuerstein, mostrando um pouco do contexto histórico que a envolve, procurando sempre enfatizar a ideia de mediação. Ainda nesse capítulo, são citados pedagogos importantes como Vygotsky e Piaget e são apresentados os critérios de mediação propostos por Feuerstein, onde enfatizamos os três critérios considerados universais e essenciais para a mediação: Mediação da Intencionalidade/Reciprocidade, Mediação do Significado e Mediação da Transcendência. Finalmente, abordamos o Programa de Enriquecimento Instrumental, mostrando onde essa ferramenta pode ser trabalhada, bem como seus objetivos geral e específicos. Mostramos ainda, os quatorze instrumentos que compõem o PEI, suas descrições e seus aspectos essenciais desenvolvidos: Organização de Pontos; Orientação Espacial I, Comparações, Classificações, Percepção Analítica, Orientação Espacial II, Ilustrações, Progressões Numéricas, Relações Familiares, Instruções, Relações Temporais, Desenho de Padrões, Relações Transitivas e Silogismo. Finalmente, no terceiro capítulo, apresentamos um problema motivador, bem como uma possível solução do mesmo, objetivando despertar o interesse do aluno para o aprendizado de Teoria dos Grafos. Em seguida, apresentamos algumas atividades do Programa de Enriquecimento Instrumental e grafos relacionados a cada uma delas, onde podemos vê que os conteúdos das mesmas podem ser traduzidos e resolvidos mediante o uso das ideias de Teoria dos Grafos. Apresentamos também uma tarefa relacionada à primeira atividade mostrada, deixando-a como referência para que o professor possa elaborar outras tarefas a serem trabalhadas em sala de aula. Fizemos o uso do GeoGebra para elaborar os grafos relacionados a cada uma das atividades apresentadas no terceiro capítulo.

Por que o trabalho com uso das ideias de Reuver Feuerstein? A explicação vem do fato de que a Teoria das Experiências de Aprendizagem Mediadas, desde a sua criação em 1950, tem alcançado muita importância no cenário mundial. Existem amplos estudos empíricos evidenciando a validade dessa teoria. Ver mais em [10].

Figura 2: PEI e o pensamento humano

Afinal o que é o Programa de Enriquecimento Instrumental? Em [7] vemos que o Programa de Enriquecimento Instrumental é um programa de intervenção multidimensional que compreende uma fundamentação teórica, um repertório rico de instrumentos práticos e um conjunto de ferramentas analítico-didáticas, focalizando em cada um dos três componentes de uma interação: o aprendiz, o estímulo e o mediador, com o objetivo de aumentar a eficiência do processo de aprendizagem. O PEI se fundamenta na Teoria da Modificabilidade Cognitiva Estrutural e na Experiência de Aprendizagem Mediada de Reuven Feuerstein, que nos oferece uma visão dinâmica das capacidades cognitivas do ser humano, esclarecendo como os processos de aprendizagem ocorrem, sendo possível, através de uma mediação adequada, expandir o potencial para aprender aumentando a eficiência do funcionamento intelectual dos indivíduos.

A maneira como Reuver Feuerstein pensa o sujeito, como um ser modificável, que está sempre em processo de mudança, está diretamente ligada as relações interpessoais, significados e sentidos que constituem a forma como pensamos e como agimos, não havendo um limite final de desenvolvimento. Em seus trabalhos, Feuerstein insiste, de forma árdua, na importância da interação que tem o educador como um interlocutor que compartilha suas experiências durante todo processo e desenvolvimento e que na sua perspectiva, o sujeito é modificado à medida com que ocorre a modificação consigo próprio e com seu entorno. Dessa forma, devemos pensar em uma educação que relacione de forma constante o conhecimento e o desenvolvimento humano, pois, o desenvolvimento humano assim como o conhecimento são inacabados.

Capítulo 1

Introdução à Teoria dos Grafos

Na elaboração dessa seção foram utilizadas as seguintes referências bibliográficas: [2],[4],[5],[6],[11] e [12].

A Teoria dos Grafos tem seu marco com o famoso Problema das Pontes de Konigsberg. Nesse problema, os habitantes de Konisberg (hoje Kaliningrado) questionavam se seria possível uma pessoa saindo de um local atravessar as sete pontes do Rio Prega sem passar duas vezes na mesma ponte e retornar ao local de onde saiu. Vários problemas se apresentam com características muito parecidas com esse. No exemplo apresentado na Figura 1.1 pode ser questionado se alguém seria capaz de desenhar tal figura sem retirar o lápis do papel, isto é, se alguém é capaz de saindo de um ponto qualquer percorrer todos os outros sem passar pela mesma linha mais de uma vez?

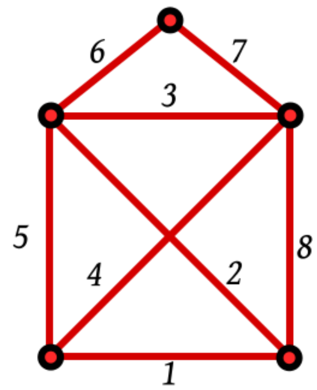


Figura 1.1: Grafo com caminho euleriano

A situação mostrada, a princípio não possui muita relevância, pois não existe um contexto em que a mesma está inserida. No entanto, se forem elaboradas atividades/oficinas contextualizadas, o aluno pode se interessar/motivar muito mais pelas resoluções das mesmas.

1.1 Grafos: Definições

Suponha um campeonato de xadrez em que foram inscritos seis participantes:

$$P1, P2, P3, P4, P5, P6.$$

Suponha ainda que até um dado momento haviam sido realizados os seguintes jogos:

$$\begin{gathered} P1 \text{ jogou com } P3, P4, P6 \\ P2 \text{ jogou com } P3, P5, P6 \\ P3 \text{ jogou com } P1, P2 \\ P4 \text{ jogou com } P1, P5, P6 \\ P5 \text{ jogou com } P2, P4, P6 \\ P6 \text{ jogou com } P1, P2, P4, P5. \end{gathered}$$

Será que esta listagem está correta, isto é, se um confronto não aparece mais de uma vez ou se há um confronto entre um jogador com ele próprio? Como sabemos se não houve equívoco na mesma? Uma maneira de representar a situação é através da Figura 1.2 em que os participantes serão representadas por pontos e os confrontos serão representados pelas linhas que ligam esses pontos.

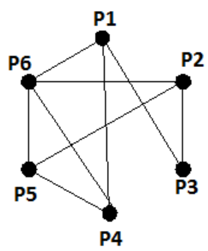


Figura 1.2: Grafo do campeonato de xadrez

Note que com o auxilio da Figura 1.2 acima não é difícil constatar a consistência das informações. Essa estrutura, que apresenta pontos e linhas é o que chamamos de grafo.

Definição 1.1 *Um grafo (simples) G consiste de um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de objetos chamados vértices, juntamente com um conjunto $A(G)$ de pares não ordenados de vértices. Os elementos de $A(G)$ são chamados de arestas. Podemos representá-lo por $G = (V; A)$, onde $V = V(G)$ e $A = A(G)$.*

No exemplo do campeonato de xadrez, temos que o conjunto V, dos vértices é composto por todos os participantes do campeonato, enquanto que o conjunto A, das arestas é composto pelos confrontos até então realizados. Resumindo, o que de fato é interessante a princípio em um grafo é determinar quem são os vértices e quais pares de vértices estão ligados e quais não estão (isto é, quem são as arestas?). Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os mesmos são adjacentes e que a aresta é incidente a ambos. No nosso exemplo podemos representar o grafo de forma sucinta como:

$$V = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6\}$$
$$A = \{(P1P3); (P1P4); (P1P6); (P2P3); (P2P5); (P2P6); (P4P5); (P4P6); (P5P6)\}.$$

Observe que não precisamos colocar, por exemplo, o confronto $(P3P1)$ no conjunto de arestas, uma vez colocado o confronto $(P1P3)$, pois ambos correspondem ao mesmo confronto. Vamos usar a notação $|V|$ ou n para representar o número de vértices e a notação $|A|$ ou m para representar o numero de arestas de um grafo. Note que no exemplo dada $n = 6$ e $m = 9$. Ainda no exemplo do campeonato de xadrez, podemos perceber que nos vértices que indicam os participantes $P1, P2, P3, P4, P5, P6$ incidem, respectivamente, $3, 3, 2, 3, 3, 4$ arestas sobre eles. Com isso dizemos que os participantes $P1, P2, P3, P4, P5, P6$ realizaram, respectivamente, $3, 3, 2, 3, 3, 4$ partidas. Usaremos a notação $d(V_0)$ para indicar o grau de V_0, isto é, o número de arestas que incidem sobre o vértice V_0 . No nosso exemplo temos, $d(P1) = 3$; $d(P2) = 3$; $d(P3) = 2$; $d(P4) = 3$; $d(P5) = 3$; $d(P6) = 4$.

Teorema 1.2 *Para todo grafo G, tem-se*

$$\sum_{w \in V(G)} d(w) = 2 \cdot m.$$

Isto é, a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas.

Prova:

Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, logo cada aresta foi contada duas vezes.

Corolário 1.3 *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Prova:

Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto é um número par.

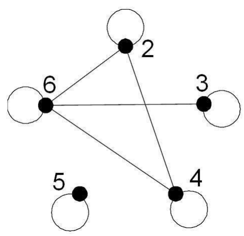


Figura 1.3: Grafo com laços

Algumas perguntas acerca das definições podem nos deixar atrapalhados. Vamos examinar algumas. Uma aresta pode ligar um vértice a ele mesmo? Pode. É o que chamamos de laço, na construção do grafo da figura 1.3 temos o seguinte: $V = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e dois vértices serão ligados quando tiverem um divisor comum e diferente de 1. Pela definição do grafo vemos que o vértice 5 não está ligado a nenhum outro, mas tem um laço (como aliás todos os outros vértices deste grafo). Para haver coerência com os resultados da seção anterior, temos que contar o laço duas vezes (uma para cada extremidade) quando calcularmos o grau do vértice. Assim, $d(2) = 4$; $d(3) = 3$; $d(4) = 4$; $d(5) = 2$; $d(6) = 5$.

Nem sempre haverá apenas uma aresta ligando dois vértices, quando esse fato ocorrer estaremos tratando de um tipo de grafo conforme segue a definição abaixo:

Definição 1.4 *Quando dois ou mais vértices de um grafo estão ligados por mais de uma aresta, dizemos que esse grafo é um multigrafo.*

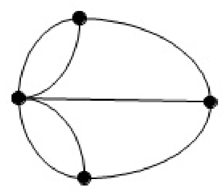


Figura 1.4: Multigrafo

Definição 1.5 *Grafos sem laços ou arestas múltiplas são chamados de grafos simples.*

Um tipo de grafo bastante utilizado em atividades com sentido (orientação) pré-definida é o chamado grafo orientado, como segue:

Definição 1.6 *Um grafo orientado G, consiste em:*
i) um conjunto $V = V(G)$ cujos elementos são chamados vértices de G;
ii) um conjunto $A = A(G)$ de pares ordenados de vértices (u,v), chamados de arestas orientadas de G.

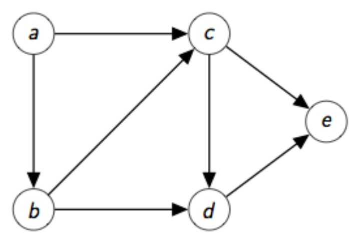


Figura 1.5: Grafo Orientado

O grafo mostrado na Figura 1.5 é orientado, pois as arestas $\overrightarrow{ab}$ e $\overrightarrow{ac}$ estão orientadas a partir do vértice a para os vértices b e c,respectivamente, as arestas $\overrightarrow{bc}$ e $\overrightarrow{bd}$ são orientadas do vértice b para os vértices c e d, respectivamente, as arestas $\overrightarrow{cd}$ e $\overrightarrow{ce}$ são orientadas do vértice c para os vértices d e e, respectivamente, finalmente a aresta $\overrightarrow{de}$ é orientada do vértice d para o vértice e.

Além desses conceitos fundamentais enunciados, temos ainda as seguintes definições:

Definição 1.7 *(Subgrafo) Dados o grafo G definido por V(G) e A(G) e o grafo H definido por V(H) e A(H), diz-se que H é subgrafo de G se* $V(H) \subseteq V(G)$ *e* $A(H) \subseteq A(G)$.

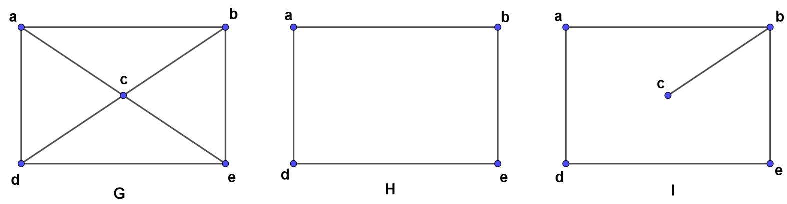


Figura 1.6: Grafo e subgrafos

Na Figura 1.6 nota-se que, os grafos H e I são subgrafos do mesmo grafo G. O grafo H é dito um subgrafo induzido pelo subconjunto $\{a, b, d, e\}$ de $V(G)$, pois todas as arestas incidentes aos vértices de a, b, d, e em G estão presentes em H, de maneira análoga, dizemos que o grafo I é subgrafo induzido pelo subconjunto $\{a, b, c, d, e\}$ de $V(G)$.

Voltando ao problema do campeonato de xadrez, temos que, conforme foi visto, apenas algumas partidas foram realizadas. Por outro lado, se supormos uma situação em que todos os confrontos possíveis tenham sido realizados, teríamos que cada vértice estaria ligado aos demais. Assim, todos os vértices seriam adjacentes dois a dois e o grafo que representaria tal situação seria chamado de grafo completo, pois:

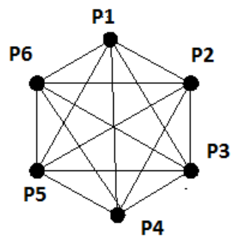


Figura 1.7: Grafo Completo

Definição 1.8 *Um grafo completo é definido como um grafo onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n. Em particular, K_n tem exatamente $C_{n,2}$ arestas, onde* $C_{n,2} = \dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}$.

Suponha agora que temos um grafo que represente algumas partidas realizadas e queremos estabelecer outro grafo que representa os jogos que faltam. Nesse caso, estamos falando de um grafo que possui o mesmo conjunto de vértices, mas contendo apenas as arestas que faltam para que o grafo que representa os jogos realizados até o momento se torne completo. Assim, estaremos abordando o conceito de grafos complementares, como segue a definição:

Definição 1.9 *Seja $G = (V; A)$ um grafo. Definamos o seu grafo complementar pelo grafo $\overline{G} = (V; A_c)$, onde A_c denota o complementar de A.*

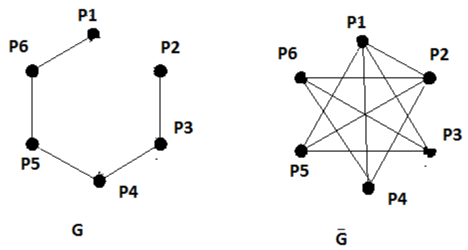


Figura 1.8: Grafo $G = (V; A)$ e seu complementar $\overline{G} = (V; A_c)$

Na Figura 1.1 apresentado no início do capítulo, foi questionado se seria possível sair de um determinado vértice, ir em todos os outros e voltar ao vértice de onde saiu inicialmente sem passar duas vezes por uma mesma aresta. Esse tipo de situação será resolvido mediante o conceito que apresentaremos abaixo, o qual é chamado de caminho euleriano. A definição de caminho pode ser vista na Definição 1.36.

Definição 1.10 *Um grafo $G = (V; A)$ com m arestas é dito euleriano se existe um caminho de comprimento m em $G = (V; A)$. Em outras palavras, se pudermos percorrer cada aresta uma e só uma vez partindo de um vértice e a ele retornar. Se o grafo $G = (V; A)$ não é euleriano mas tem um caminho aberto de comprimento m, ele é dito semieuleriano.*

Observação 1.11 *Em outras palavras, quando estivermos tratando de grafos eulerianos, queremos simplesmente dizer que podemos desenhar um grafo (ou melhor, uma representação gráfica dele) sem retirar o lápis do papel e retornar ao ponto inicial. Por outro lado, no que se refere a grafos semieulerianos, podemos fazer o processo parecido com o que é feito em grafos eulerianos, no entanto, começamos em um ponto e terminamos em outro . Na Figura 1.9 acima temos, G_1 é euleriano e uma trilha pode ser $(a - b - c - d - e - f - a)$, G_2 é semieuleriano e uma trilha pode ser $(a - e - b - c - d)$ e G_3 não é euleriano e nem semieuleriano.*

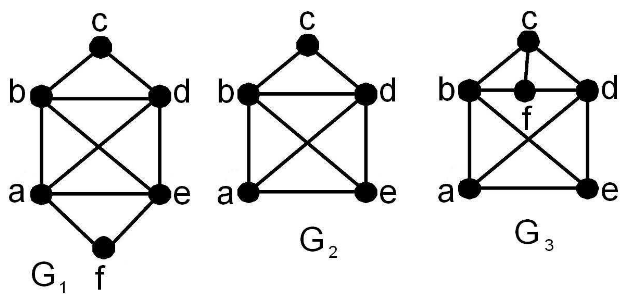


Figura 1.9: Grafo com caminhos eulerianos (ciclos)

Definição 1.12 *Um ciclo em um grafo $G = (V; A)$ é um caminho de algum vértice V_0 para ele mesmo tal que nenhuma aresta aparece mais de uma vez, isto é, V_0 é o único vértice que aparece mais de uma vez e V_0 aparece apenas nas extremidades. Assim, ciclo é um caminho que começa e acaba com o mesmo vértice.*

Definição 1.13 *Seja $G = (V; A)$ um grafo. Diz-se que $G = (V; A)$ é conexo se, e somente se, dados quaisquer dois vértices V_1, $V_2 \in G = (V; A)$, existe um caminho em $G = (V; A)$ que une V_1 a V_2. Caso contrário o grafo diz-se desconexo.*

Definição 1.14 *Dois grafos $G = (V_1; A_1)$ e $H = (V_2; A_2)$ são isomorfos se existir uma bijeção $f : V_1 \to V_2$ que preserva incidência, isto é, tal que, para vértices distintos quaisquer u e v de G, tenhamos $\{u, v\} \in A_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in A_2$.*

Proposição 1.15 *Dois grafos $G = (V_1; A_1)$ e $H = (V_2; A_2)$ isomorfos têm quantidade iguais de vértices de um mesmo grau. Em particular, têm quantidades iguais de vértices e quantidades iguais de arestas.*

Prova:

Sejam $G = (V_1; A_1)$ e $H = (V_2; A_2)$ grafos isomorfos e $f : V_1 \to V_2$ uma bijeção que preserva incidência. Se u é um vértice de G com grau $k \geq 0$, é imediato que f(u) é um vértice de H com grau k, e reciprocamente. Portanto, G e H têm quantidades iguais de vértices de grau k, digamos a_k, com $|V_1| = |V_2|$ e $|A_1| = |A_2|$, $k \geq 0$.

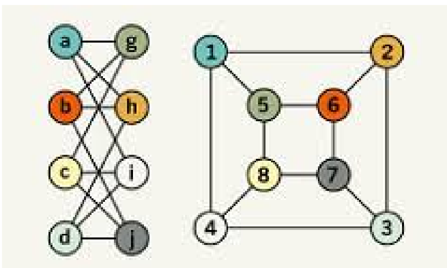


Figura 1.10: Grafos Isomorfos

Perceba que os dois grafos mostrados na Figura 1.10 apresentam oito vértices e doze arestas cada. Além disso, cada aresta tem grau 3. Logo, de acordo com a Proposição 1.15 há um isomorfismo entre eles.

Definição 1.16 *Na teoria dos grafos, um conjunto independente de um grafo G é um conjunto S de vértices de G tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S. Em outras palavras, se V_1, $V_2 \in S$, então não há nenhuma aresta que conecte V_1 e V_2.*

Definição 1.17 *Um grafo $G = (V; A)$ é bipartido se pudermos escrever $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos disjuntos, não vazios e independentes. Notação G_{n_1,n_2}, indica que o grafo G é bipartido e possui conjuntos disjuntos, não vazios e independentes com n_1 e n_2 vértices, respectivamente.*

Note que de acordo com a Definição 1.17, o grafo da Figura 1.11 é um grafo bipartido.

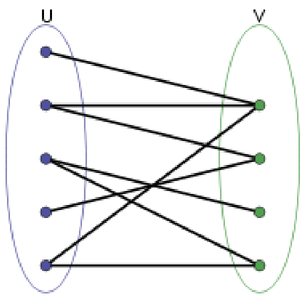


Figura 1.11: Grafo Bipartido

Teorema 1.18 *Um grafo G é bipartido se, e somente se, não contém ciclos cuja a soma de suas arestas é ímpar.*

Prova:

($\Rightarrow$) Seja G bipartido. Se não houver ciclo em G, não há o que mostrar. Se há um ciclo em G este alterna vértices de V_1 e V_2, dois subconjuntos independentes e disjuntos. Partindo de V_1 (por exemplo), para retornar ao ponto de partida teremos que utilizar um número par de arestas. O ciclo é, portanto, de comprimento par.

($\Leftarrow$) Seja G um grafo sem ciclos cuja soma de suas arestas é ímpar. Vamos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos V_1 e V_2, independentes e disjuntos. Tomamos primeiramente um vértice qualquer v. O subconjunto V_1 será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento par entre v e w. O subconjunto V_2 será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre v e w. Os conjuntos V_1 e V_2 disjuntos, pois se w estivesse em V_1 e V_2 ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando v a

w. Esses dois caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em w, produzindo alguns ciclos. Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar (é a soma do número de arestas dos dois caminhos) isso produziria pelo menos um ciclo ímpar em G, contrariando a hipótese.

A partir de agora, daremos ênfase a tipos de grafos que são frequentemente utilizados, são os que chamamos de árvores e florestas.

Definição 1.19 *Uma árvore T é um grafo conexo sem ciclos.*

Definição 1.20 *Toda árvore T é também uma componente conexa sem ciclos.*

Definição 1.21 *Um grafo T cujas componentes conexas são árvores é chamado de floresta.*

Definição 1.22 *Seja T uma árvore. Uma folha de T é um vértice de grau 1 e um nó de T é um vértice de grau maior que 1.*

Definição 1.23 *Em teoria dos grafos, uma ponte (também conhecida como aresta-de-corte ou arco de corte) é uma aresta cuja deleção em um grafo T, aumenta o número de componentes conexas deste. Equivalentemente, uma aresta é uma ponte se, e somente se, ela não está contida em qualquer ciclo.*

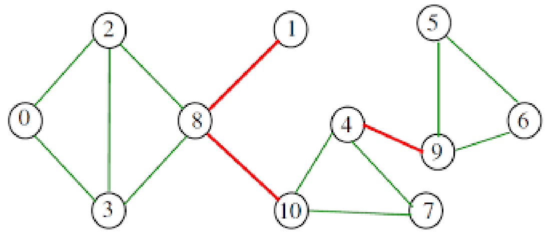


Figura 1.12: Grafo contendo Pontes

No grafo da Figura 1.12, pode-se verificar que as arestas $1-8$, $8-10$ e $4-9$, de acordo com a Definição 1.23, representam pontes. Por outro lado, de acordo com a Definição 1.22 temos que o vértice 1 representa uma folha e os demais representam nós.

Teorema 1.24 *Seja T um grafo com n vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) T é uma árvore.
(ii) T não contém ciclos e tem $n-1$ arestas.
(iii) T é conexo e tem $n-1$ arestas.
(iv) T é conexo e toda aresta é uma ponte.
(v) Todo par de vértices de T é ligado por um único caminho.
(vi) T não contém ciclos, mas a adição de uma aresta produz um único ciclo.

Prova:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Pela definição de árvore, T não contém ciclos. Portanto, a retirada de uma aresta uw separa u de v e o grafo é separado em um par de árvores T_1 e T_2 com n_1 e n_2 vértices, respectivamente, tais que $n = n_1 + n_2$. Por indução, o número de arestas de T_1 é $n_1 - 1$ e o número de arestas de T_2 é $n_2 - 1$. Acrescentando a aresta uw, concluímos que o número de arestas de T é, portanto, $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n - 1$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Se T fosse desconexo, cada componente seria uma árvore. Por indução, o número de arestas em cada componente é inferior em uma unidade ao número de vértices e o número total de arestas seria inferior a $n - 1$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: A retirada de qualquer aresta separa o grafo, pois $n-2$ arestas são insuficientes para conectar o grafo.
$(iv) \Rightarrow (v)$: Se existisse mais de um caminho entre dois vértices, o grafo teria um ciclo e haveria uma aresta que não separaria o grafo.
$(v) \Rightarrow (vi)$: Se T contivesse um ciclo, haveria um par de vértices ligado por mais de um caminho. A adição de uma aresta uw, concatenada com o caminho (único) entre u e v, produz um ciclo. Se este ciclo não fosse único, a retirada da aresta uw deixaria dois caminhos distintos entre u e w.
$(vi) \Rightarrow (i)$: Basta mostrar que T é conexo. Se T fosse desconexo, uma aresta ligando duas componentes não produziria um ciclo.

Definição 1.25 *Uma árvore geradora de uma componente conexa de um grafo $G = (V; A)$, com n vértices, é um subgrafo que é uma árvore com $n - 1$ arestas; isto é, toca todos os vértices.*

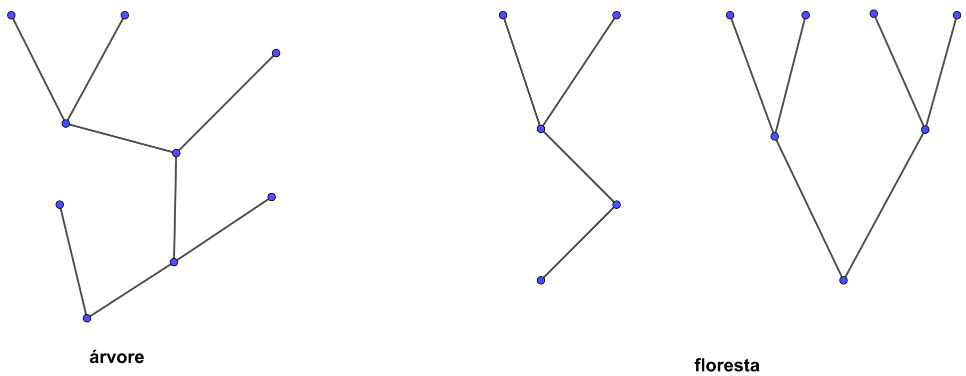


Figura 1.13: Árvore e Floresta

Teorema 1.26 *Seja T uma árvore com n vértices, $n \geq 2$. Então T possui no mínimo duas folhas.*

Prova:

Provaremos por indução na ordem de T. Se $n = 2$, temos que a única árvore com dois vértices é $T = K_2$, que tem duas folhas. Suponhamos o resultado válido para árvores de ordem $n - 1 \geq 2$ e consideremos uma árvore T, de ordem n, que pelo Teorema 1.16, possui $n - 1$ arestas. Se toda aresta de T contém uma folha, então T contém no mínimo duas folhas. Suponhamos então que existe alguma aresta $a = uv$ de T que não contém folhas. O grafo $T - a$ é um par de árvores T_1 e T_2, cada uma de ordem menor que n. Vamos supor que $u \in V(T_1)$ e $v \in V(T_2)$ com $|V(T_1)| = n_1$, $|V(T_2)| = n_2$. Como u, v não são folhas de T, seus graus $g(u)$ e $g(v)$ (calculados em T_1 e T_2) são pelo menos 1 e portanto n_1 e n_2 são pelo menos 2. Por hipótese de indução, T_1 e T_2 possuem duas folhas no mínimo. Mas ao considerarmos a aresta uv poderemos eliminar no máximo duas folhas de T, uma em T_1 e outra em T_2, de modo que T ainda contém no mínimo duas folhas.

Definição 1.27 *Um grafo com peso é um grafo cujas arestas possuem valores associados à cada uma delas. Seja $u \in A(G)$, o valor associado $p(u)$ é chamado de peso de u. Definimos o peso total de G por $P(G) = \sum_{u \in A(G)} p(u)$.*

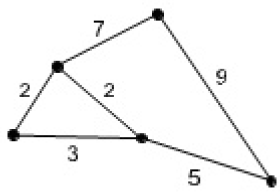


Figura 1.14: Grafo com peso

Definição 1.28 *Um grafo bipartido completo, $G = (V_1 \cup V_2, A)$, é um grafo bipartido tal que para quaisquer dois vértices, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, v_1v_2 é uma aresta em G. O grafo bipartido completo com partições de tamanho $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, é denotado $K_{m,n}$.*

A partir de agora, daremos ênfase ao conceito de planaridade de grafos. Uma das motivações mais antigas para o estudo desse conceito é o famoso problema das três casas. Este problema foi proposto por Henry Dudeney em 1913, no qual pode ser enunciado matematicamente na seguinte forma. Dado um grafo $K_{3,3}$ bipartido, completo, gostaríamos de saber se este grafo pode ser desenhado no plano de forma que nenhuma aresta cruze outra. É possível tal desenho?

Definição 1.29 *Um grafo planar é um grafo que admite uma representação gráfica em que as arestas só se encontrem (possivelmente) nos vértices a que são incidentes, isto é, é um grafo que pode ser imerso no plano de tal forma que suas arestas não se cruzem.*

Uma pergunta a ser feita é a seguinte: todos os grafos que existem são planares ou têm grafos que não são planares? E o que diferencia grafos planares de grafos não planares, caso eles existam?

Mostraremos que o grafo completo K_5 não é planar. De fato, qualquer representação de K_5 deverá ter um ciclo de comprimento 5 que divida o plano em interior e exterior. Em se tratando de K_5, só conseguimos colocar duas arestas no interior sem que se cruzem; o mesmo acontece no exterior. Com isso, irá restar uma aresta que deverá ser colocada no interior ou no exterior, mas em qualquer local que esta aresta for colocada haverá pelo menos um cruzamento. Concluirmos então que K_5 não é planar. Por outro lado temos que o grafo completo K_4 é planar, basta ver a Figura 1.15.

Afinal, qual o número de arestas de um grafo planar, existem quantidades específicas de arestas para um grafo ser grafo planar? É preciso deixar claro que uma representação gráfica de um grafo com pelo menos um ciclo separa o plano em regiões (caso o grafo em questão seja uma árvores, temos uma única região). Estas regiões chamaremos de faces; é preciso também entender que uma das faces é tudo que sobra do plano, isto é, é a face ilimitada. Chamando de f, n e m os números de faces, vértices e arestas respectivamente, de um grafo. Vale a relação de Euler para poliedros, conforme o Teorema 1.30.

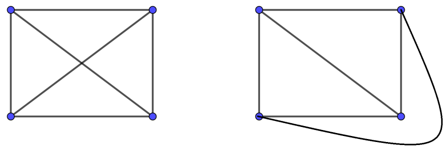


Figura 1.15: Grafo Completo Planar K_4

Teorema 1.30 *Teorema de Euler: Suponha que uma representação plana do grafo conexo G tem n vértices, m arestas e f faces. Então vale $f - m + n = 2$.*

Prova:

Por indução sobre m. É fácil ver que o teorema é válido quando m é pequeno: se $m = 0$, então o grafo deve ser K_1, que tem $n = 1$ e $f = 1$. Se $m = 1$ ou $m = 2$, nós temos um caminho com $m + 1$ vértices e uma face. Agora assumimos o teorema como verdadeiro para todos os grafos com r ou menos arestas, e suponha $m = r + 1$.

Se G é uma árvore, então $n = m + 1$ e $f = 1$, logo $n - m + f = m + 1 - m + 1 = 2$. Caso contrário G contém um ciclo. Selecione uma aresta que se encontra neste ciclo. A aresta se encontrará separando duas faces (uma possivelmente pode ser a face exterior). Se esta aresta for eliminada, obtém-se um grafo com uma aresta a menos e menos uma face do que o original. Se há r arestas assim, por indução, segue que: $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$.

Observação 1.31 *Observe que sempre que um grafo planar tiver uma porção do plano limitada por um ciclo de comprimento maior do que 3, podemos acrescentar arestas a esse* *grafo. Logo, um grafo maximal planar, isto é, um grafo ao qual não poderemos acrescentar arestas sem comprometer a sua planaridade tem uma representação composta por ciclos de comprimento 3. Isto nos dá outra relação importante.*

Teorema 1.32 *Num grafo planar conexo G vale $m \leq 3.n - 6$. A igualdade vale se G é maximal planar.*

Prova:

Se formos contar as arestas de cada face, contaremos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face tem no mínimo 3 arestas (a igualdade valendo no caso maximal) temos:

$$3.f \leq 2.m.$$

Substituindo na fórmula de Euler:

$$\begin{gathered} f - m + n = 2 \Rightarrow \\ 3.f - 3.m + 3.n = 6 \Rightarrow \\ 2.m - 3.m + 3.n \geq 6 \Rightarrow \\ m \leq 3.n - 6. \end{gathered}$$

Com o auxílio desse teorema, acabamos de conseguir outra demonstração de que K_5 não é planar. De fato, K_5 e todos os grafos completos K_n, com $n \geq 5$ não obedecem à relação acima: $10 > 3.5 - 6$.

Teorema 1.33 *Num grafo planar bipartido conexo G vale $m \leq 2.n - 4$.*

Prova:

Observamos que um grafo bipartido só tem ciclos pares. Cada face tem no mínimo 4 arestas. Assim temos:

$$4.f \leq 2.m.$$

Substituindo na fórmula de Euler:

$$\begin{gathered} f - m + n = 2 \Rightarrow \\ 4.f - 4.m + 4.n = 8 \Rightarrow \\ 2.m - 4.m + 4.n \geq 8 \Rightarrow \\ m \leq 2.n - 4. \end{gathered}$$

Vemos agora, como o auxílio do Teorema 1.33 que $K_{3,3}$ não é planar, pois

$$9 > 2.6 - 4.$$

O problema das casinhas, na Introdução, acaba de ser resolvido. Os grafos mostrados na Figura 1.16 são não planares.

Vamos abordar o conceito de homeomorfismo entre grafos. Esse conceito é muito importante, pois nos ajuda a determinar se um grafo será planar ou não planar após a retirada e/ou a inserção de uma ou mais arestas.

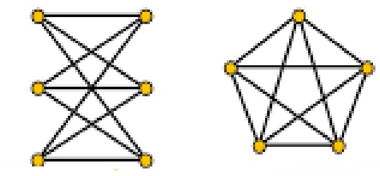


Figura 1.16: Grafos não planares $K_{3,3}$ e K_5, respectivamente

Definição 1.34 *Dizemos que dois grafos G_1 e G_2 são homeomorfos se ambos podem ser obtidos a partir do mesmo grafo por uma sucessão de subdivisões elementares de bordas, isto é, se um novo grafo for obtido de outro através da inserção de um novo vértice de grau 2 no meio de uma aresta (dividindo uma aresta), ou por eliminação de um vértice de grau 2 e juntando os dois vértices adjacentes a ele.*

Teorema 1.35 *Suponhamos que G é planar. Se G' for obtido de G de acordo com a Definição 1.34, G' também será planar.*

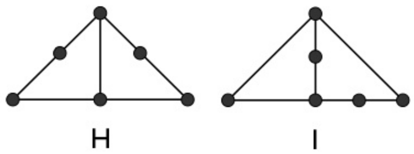


Figura 1.17: Grafos Homeomorfos

Uma vez que K_5 e $K_{3,3}$ não são planares, segue-se que um grafo que tem K_5 ou $K_{3,3}$ como um subgrafo não pode ser planar. Além disso, um grafo que é homeomorfo a um grafo com subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$ não pode ser planar.

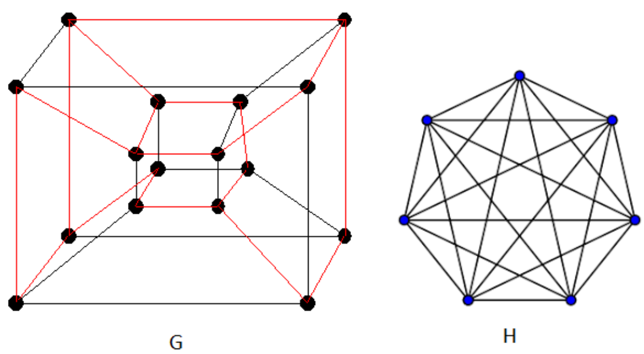


Figura 1.18: Grafos com subdivisões de $K_{3,3}$ e K_5, respectivamente

Os grafos da Figura 1.18 por possuírem subdivisões de $K_{3,3}$ e K_5, respectivamente, são ambos não planares.

Definição 1.36 *Em teoria dos grafos, um caminho em um grafo é uma sequência finita ou infinita de vértices conectados por uma sequência de arestas que, são todos diferentes uns dos outros. O primeiro vértice é chamado de vértice inicial e o último é chamado de vértice final.*

Capítulo 2

Metodologia da Pedagogia da Atividade Mediada de Reuver Feuerstein e o Programa de Enriquecimento Instrumental

Encontrar uma metodologia "ideal" para o processo de ensino-aprendizagem tem sido ao logo dos anos algo complicado para os pesquisadores nas mais diversas áreas da educação. A busca por um motivo específico que explique o insucesso da aprendizagem dos conteúdos ensinados nas escolas de educação básica também é algo desafiador e que certamente se estenderá por muito tempo. Conforme podemos encontrar em [15] e [9], o fracasso da teoria da disciplina formal foi demonstrado em diversas investigações onde revelaram que a aprendizagem em determinado campo tem uma influência mínima sobre o desenvolvimento geral. Woodwoth e Thorndike [10] demonstraram que os adultos, depois de determinado período de exercícios, podem brevemente, aumentar suas capacidades de avaliação, mas que é difícil que isso aumente sua capacidade de avaliação quando as linhas são maiores. Outros adultos, que aprendem com exatidão definir a área de figuras geométricas, enganam-se depois mais de dois terços das vezes quando muda a figura geométrica. Também Gibert, Fracker e Martin [14] demonstraram que aprender a reagir rapidamente a determinado tipo de sinal, influi pouquíssimo, perante a capacidade de reagir diante de outro tipo de sinal. Assim, faz-se necessário um acompanhamento constante por meio de atividades estabelecidas, objetivos traçados que tenham em vista o desenvolvimento cognitivo do indivíduo que o torne capaz, de maneira satisfatória, a alcançar sua autonomia nas mais diversas áreas, principalmente no que diz respeito à produção do seu conhecimento.

Nesse sentido, conforme pode ser visto em [14], o psicopedagogo Reuver Feuerstein pensa o ser humano em todas as fases da vida como um sujeito que está sempre em processo de mudança. Segundo ele, a mediação está diretamente ligada às relações interpessoais, significados e sentidos que constituem a forma como o ser humano pensa e como age. Suas teorias se baseiam no fato de que não há um limite de desenvolvimento e que não se deve classificar pessoas. Em seus trabalhos, Feuerstein insiste de forma árdua na importância da interação que tem o educador como interlocutor que compartilha suas experiências durante todo processo do desenvolvimento. Em sua perspetivava, o sujeito é modificado à medida com que ocorre a modificação consigo próprio e com seu entorno. Cole e Wertsch[15], consideram a mediação como fato central da psicologia de Vygotsky, pois para quem a utiliza de artefato tem efeito sobre a mente do utilizador e sobre o contexto envolvente. Quando se fala em atividades mediadas deve-se, sempre da ênfase à Vygotsky e a Piaget que são referenciados em muitos trabalhos nessa linha de pesquisa.

2.1 Reuver Feuerstein e a Pedagogia da Atividade Mediada

Nascido na Roménia no ano de 1921, Reuven Feuerstein residiu em Israel desde 1944. Em 1965, tornou-se diretor do "Hadassah-Wizo-Canada Research Institute". Também atuou como diretor do atual "International Center for the Enhancement of Learning Potencial", fundado em 1993. Em 1970, iniciou como professor na Escola de Educação da Universidade Bar llan, em Ramas Gan, em Israel, e na Escola de Educação da Universidade Vanderbilt, em Nashville, nos Estados Unidos. Em 1970 concluiu sua tese de doutorado na Sorbonne/Paris, na área de psicologia, com o título: *Les Defferences de Fonctionnement Cognitif Dans Les Grupes Socio-ethniques Differents. Leur Nature, Leur Etioogie Et Le Pronostics de Modifiabilité* (Diferenças do Funcionamento Cognitivo em Diferentes Grupos Sociais e Étnicos. Sua natureza, sua Etiologia e Prognóstico de Modificabilidade). Antes, estudou na Universidade de Genebra sobre a orientação de Jean Piaget, tendo como interlocutores André Rey, Barbel Inhelder, M. Richele, o próprio Vygotsky, entre outros. Mais sobre o assunto o leitor poderá encontrar em [10], [14] e [3].

Figura 2.1: Reuver Feuerstein

A relação do homem com o mundo se dá por meio de signos culturais. É por meio das experiências das atividades mediadas, ou seja, aquelas intencionalmente voltadas à produção de significados, que se efetiva o desenvolvimento humano rumo a modificabilidade. Como pode ser visto em [3] a relação sujeito/cultura demanda um processo constante de modificabilidade. Esse processo é algo produzido; não se trata de uma qualidade inata ou natural do sujeito: é construído socialmente. Assim, não se pensa em uma Proposta Pedagógica Mediadora da Aprendizagem e do Conhecimento apenas pelo fato do homem ser modificável, mas também porque a relação sujeito/sociedade exige um modificar-se constante. Feuerstein em [10] e [14] define a mediação como uma atitude intencional realizada por um sujeito mais experiente que tem a incumbência de preparar situações que favoreçam o desenvolvimento cognitivo de seu aprendiz. Outro conceito fundamental em sua teoria é a Modificabilidade Cognitiva Estrutural (MCE), que define os seres humanos como indivíduos que têm a propensão para modificar-se ou para serem modificados nas estruturas de seu funcionamento cognitivo à medida que eles respondem às demandas de mudança de situações de vida. A Experiência de Aprendizagem Mediada é o processo pelo qual a modificabilidade cognitiva é obtida.

A mediação proposta por Reuver Feuerstein acontece mediante doze critérios de mediação, sendo três deles considerados universais e essenciais para a mediação e nove complementares. Os critérios são: Mediação da Intencionalidade/Reciprocidade; Mediação do Significado; Mediação da Transcendência; Mediação da Regulação e Controle do Comportamento, Mediação do Sentimento de Competência; Mediação Sobre o Comportamento de Compartilhar; Mediação da Diferenciação Individual Psicológica; Mediação da Busca, Planeamento e Alcance de Objetos; Mediação do Desafio; Mediação da Conscientização da sua Modificabilidade; Mediação do Otimismo; Mediação do Sentimento de Pertinência. Dentre todos esses critérios, iremos destacar a seguir, os três considerados universais que podem ser utilizados através de qualquer conteúdo ou situação específica a qual o mediador queira mediar. Mais sobre os outros critérios pode ser encontrado em [8]:

2.1.1 Mediação da Intencionalidade/Reciprocidade

Significa mediar a intenção na ação do mediador. Ela acontece quando o mediador não apenas tem a intenção de mediar e para isso planeja ações com objetivos definidos, conteúdos específicos, operações cognitivas, funções cognitivas e tarefas, mas também quando ele compartilha com o mediado essa intenção, deixando claro que a experiência mútua vai provocar um enriquecimento e desenvolvimento de ambas as partes. Nesse sentido, ao falarmos da intencionalidade, estamos falando de um conjunto de ações efetivas que promovem e demonstram a busca pela aprendizagem, devendo com isso, ser levado em conta os seguintes princípios: a seleção consciente dos estímulos por parte do mediador, apresentação dos estímulos ao alunos, mostrando para eles o porquê de tal escolha e a busca por resposta a essa ação,isto é, a reciprocidade.

2.1.2 Mediação do Significado

Nesse modelo de mediação busca-se da relevância, enfatizar com energia e interesse aquilo que os sujeitos devem aprender a partir do contexto ao qual eles estão inseridos. É o redirecionar dentro de uma rede de valores e crenças o conceito com o qual se está trabalhando. Mediar o significado é construir com o indivíduo o aprendizado de conceitos que transcendem o objeto, é opor-se a todas as formas de educação bancária que apenas transmite informações, é auxiliar o aluno na construção do seu conhecimento.

2.1.3 Mediação da Transcendência

A mediação da transcendência é a orientação consciente em ensinar tendo em vista outros contextos além daquele com que um determinado conteúdo é abordado. É ter em vista o futuro. Nesse sentido, é necessário o exercício de levar o mediado a projetar os seus conhecimentos em outras situações, provocando um pensamento dedutivo, as generalizações, abstrações, ou universalização de conceitos, ampliação de práticas e multiplicação de estratégias de resolução de problemas. A mediação da transcendência ajuda o aluno a exercitar a metacognição, ou o pensar sobre seu próprio ato de pensar, isto é, é o aprendizado de como se aprende.

O processo de construção de nossas vidas envolve o passado, o presente e o futuro. Dois fatos importantes para o sucesso desse processo são: o controle da impulsividade e a compreensão da existência do outro. Nesse sentido, vemos em [3]: "limitar a existência à modificabilidade unidimensional do mediatismo cria um estado de desequilíbrio profundo para existência humana. A ruptura com o passado é acompanhada com uma redução de capacidade de se projetar o futuro, não permitindo aos indivíduos interessar-se, a não ser pelos parâmetros que destacam os episódios vivenciados de forma imediatas".

Apesar de Feuerstein ter Piaget como um de seus interlocutores, houveram muitas divergências entre eles. A expressão "exposição direta ao estímulo", usada por Feuerstein marca a ruptura com Piaget, uma vez que ela é utilizada para falar da diferença que ele vê entre a concepção de desenvolvimneto humano de Piaget e a sua, a qual se apoia em uma relação com o mundo necessariamente mediado por aspectos culturais. Feuerstein entende que o processo de desenvolvimento e aprendizagem compreende necessariamente a presença do outro representante da cultura e mediador de sua apropriação. No final do anos de 1990, Feuerstein começa a trabalhar com a hipótese de aprendizagem mediada via interações e mediações humanas ($SHOHR$). Isso já apontava para uma concepção de direção do processo de desenvolvimento e aprendizagem que se dá pelo e no coletivo, contrariando portanto a concepção piagetiana de desenvolvimento. O autor deixa claro que o trabalho de mediação é uma experiência interpessoal produzida por relações interpessoais . É uma experiência, não é uma confrontação de conhecimentos por transmissão. O que medeia o indivíduo é o fato de que ele enquanto sujeito interage com o outro que é sujeito também. Há uma reciprocidade entre os dois sujeito. Feuerstein esclarece que o processo de pensamento ocorre em três momentos: a consideração inicial dos dados apresentados aos indivíduos, os processos de análises e elaboração das respostas. Mais sobre o assunto pode ser visto em [3].

2.2 O Programa de Enriquecimento Instrumental (PEI)

O Programa de Enriquecimento Instrumental (PEI), desenvolvido em 1980 com base na teoria da Experiência de Aprendizagem Mediada (EAM), pelo psicólogo Reuven Feuerstein, é atualmente considerado um dos programas mais inovadores e promissores no contexto da reabilitação, utilizado para modificar e melhorar a estrutura cognitiva do indivíduo e sobre tudo transformá-lo em um pensador autônomo e independente. O PEI destina-se a todas as pessoas, independentemente da idade, nível de escolaridade ou experiência profissional, que necessitam desenvolver seu potencial cognitivo. Aplica-se, especialmente, à desmotivação para o estudo, problemas de memória, baixo rendimento escolar e dificuldades de aprendizagem, dificuldades de atenção, dificuldades de raciocínio e abstração [1]. O Programa de Enriquecimento Instrumental surge após os estudos da avaliação, quando Feuerstein iniciou o trabalho pedagógico com crianças imigradas que traziam consigo perdas e privações de toda ordem, marca da guerra, do holocausto. De acordo com [3] a teoria de onde se origina o PEI teve sua base primeiramente numa profissão de fé, uma vez que sua gênese surgiu de uma necessidade. Da profissão de fé à sua afirmação científica, a teoria e o método de Feuerstein passaram por diversas modificações, processo ainda hoje ativo. É por isso que se diz que essa teoria está em constante construção. Diferentes estudos e experiências realizadas por quase todos os países, desde o início de 1950, estão sendo os agentes construtivos. Em [7] e [1] verifica-se que o PEI pode ser utilizado em grupo ou individualmente em crianças na idade escolar e em adultos de vários níveis de funcionamento. O programa está traduzido em 12 línguas e é utilizado em diversos países. A formação completa para interessados na utilização do programa tem duração de 210 horas/aula, divididas em 3 módulos de 70 horas cada. O PEI pode ser aplicado em diferentes áreas: Área educacional - para alunos do ensino regular, de sala de recursos, superdotados e na educação de adultos. Área clínica - com todos os indivíduos a partir de 8 anos que necessitem de uma abordagem cognitiva para superar suas dificuldades de aprendizagem e/ou de comportamento. Área empresarial - em programas de treinamento das habilidades de pensamento e de aprendizagem e na promoção da produtividade. Área institucional e social - como uma ferramenta adicional para ajudar indivíduos que necessitam socializar-se, praticar atividades intelectuais, recuperar a auto-estima e melhorar suas capacidades cognitivas.

Em relação aos objetivos geral e especificos do PEI, vemos em [7]:

Objetivo Geral:

A produção de modificações nas estruturas cognitivas dos indivíduos, expandindo o potencial de aprendizagem, aumentando a eficiência mental e melhorando a qualidade do desempenho intelectual.

Objetivos Específicos:

O primeiro é a correção das deficiências nos pré-requisitos cognitivos do pensamento operacional, ou seja, as funções cognitivas, que falharam no seu desenvolvimento, em grande parte como o resultado da falta de experiência de mediação ou porque o aprendiz foi incapaz de se beneficiar da mediação recebida; o segundo consiste em equipar o aprendiz com linguagem e ferramentas verbais necessárias para a análise do processo mental internalizado, facilitando, consequentemente, o controle e o insight de seu funcionamento cognitivo; no terceiro encontramos que despertar a motivação intrínseca no aprendiz é considerado como um pré-requisito indispensável para qualquer intervenção que visa o desenvolvimento das habilidades de pensamento e do processo cognitivo, com o objetivo de prevenir o estado de contínua dependência do indivíduo em fontes externas de motivação as quais nem sempre são oferecidas pelo ambiente; o quarto consiste no despertar de consciência do aprendiz na implícita relação entre diferentes modos de raciocínio e o consequente resultado do seu funcionamento cognitivo; o quinto está relacionado ao tipo de motivação que pode se originar da sensação de domínio de uma tarefa e do valor social que vem acompanhado ao sucesso desta realização; o sexto se refere a necessidade de mudança da auto imagem do aluno, o qual frequentemente se percebe capaz apenas de registrar e reter informações, de fonte externa e de forma passiva, de maneira que ele possa conceber-se como pensador ativo, capaz de gerar novas informações com base numa adequada coleta e elaboração de dados.

O PEI Standard, voltado para populações acima de 9 anos de idade e adultos, possui uma série de quatorze instrumentos: Comparações, Organização de Pontos; Orientação Espacial I, Percepção Analítica, Classificações, Orientação Espacial II, Ilustrações, Relações Familiares, Relações Temporais, Progressões Numéricas, Instruções, Silogismo, Relações Transitivas e Desenho de Padrões que serão detalhados a seguir. Todo o texto abaixo foi retirado de [7] e [1].

2.2.1 Comparações

Feuerstein atribui a esse instrumento uma função básica. O objetivo desse instrumento é apoiar o pensamento comparativo, noutras palavras, é a capacidade de constatar semelhança ou diferença entre dois objetos ou acontecimentos. Este instrumento aumenta a habilidade de diferenciação entre parâmetros de comparação, por meio do enriquecimento do repertório de conceitos, rótulos e operações para descrever semelhanças e diferenças. Pela comparação os indivíduos aprendem a organizar, integrar, separar e distinguir partes de informações em um sistema coordenado e significativo. Aspectos essenciais desenvolvidos: desenvolvimento de comportamento comparativo espontâneo, conceitos diferenciados para a formulação de semelhanças e diferenças, discernir aspectos essenciais vs. não essenciais, relevantes vs. irrelevantes, específicos vs. gerais de divergências e similaridades.

2.2.2 Organizações de Pontos

No instrumento organização de pontos os aspectos básicos da tarefa consiste em identificar e traçar, dentro de uma nuvem de pontos, uma série de figuras que se entrecruzam de modo parcial, tais como quadrados, triângulos, estrelas, entre outras. Entre as operações cognitivas, vele destacar: projeção de relações virtuais entre pontos, observação de constância de determinada figura, identificação de tamanhos, distâncias e paralelismos de linhas, capacidade de planejar e restrição a impulsividade. Aspectos essenciais desenvolvidos: habilidades de organização e planejamento, controle da impulsividade, conservação de constâncias, projeção de relações virtuais.

2.2.3 Orientação Espacial I

Desenvolve a habilidade de perceber a relação de diferentes pontos de referência no espaço, inicialmente por meio de objetos concretos e posteriormente utilizando tarefas abstratas. Ajuda a gerar a mediação da conduta de busca, escolha e realização de objetivos. Aspectos essenciais desenvolvidos: controle do egocentrismo, estabelecimento de um quadro de referência pessoal estável para a percepção e projeção de relações espaciais, desenvolvimento da representação mental.

2.2.4 Percepção Analítica

Desenvolve a habilidade de dividir um todo em partes (diferenciação) e unir partes num todo (integração). A adaptação ao mundo externo depende da flexibilidade em alternar estes dois processos perceptivos. Aspectos essenciais desenvolvidos: desenvolvimento de uma percepção precisa e acurada, entender a realidade baseado numa equilibrada diferenciação e integração, aplicação sistemática dos processos de análise e síntese.

2.2.5 Classificações

Este instrumento auxilia a desenvolver a flexibilidade e o pensamento divergente necessários para categorizar e re-categorizar os mesmos objetos em diferentes conjuntos de acordo com distintos parâmetros e princípios. Na categorização o indivíduo passa do estabelecimento de relações entre objetos concretos para a projeção de relações entre conceitos. Esta habilidade é essencial e básica para as operações lógicas verbais. Aspectos essenciais desenvolvidos: critérios de inclusão de elementos em classes e categorias, classificação e categorização, seleção dos critérios relevantes para categorização, categorização simultânea com base em princípios múltiplos.

2.2.6 Orientação Espacial II

Introduz um sistema de referência externo, absoluto e estável no qual o indivíduo aplica simultaneamente o sistema relativo (interno) e o sistema absoluto (externo) para descrever e entender as relações espacias. Aspectos essenciais desenvolvidos: introdução do quadro de referência universal dos pontos cardeais, reconhecer conceitos geográficos (latitude, longitude, paralelos, meridianos) necessários para a orientação no espaço, integração dos sistemas pessoal e universal de referência espacial.

2.2.7 Ilustrações

O instrumento de Ilustrações é apresentado por meio de uma coleção de situações em que um problema pode ser percebido e reconhecido. Desenvolve a habilidade de perceber detalhes com precisão, utilizando várias fontes de informações exercitando o comportamento comparativo. Aspectos essenciais desenvolvidos: perceber e definir problemas, desenvolver um vocabulário rico e diferenciado, promover pensamento inferencial e reflexivo, necessidade de evidência lógica.

2.2.8 Relações Familiares

O objetivo deste instrumento não é de ensinar as relações existentes em uma. Este tema foi escolhido pelo fato de oportunizar o trabalho com diferentes categorias de relacionamento. As situações de parentesco são oportunidades eficazes para que o sujeito perceba os vínculos existentes entre duas ou mais existências separadas. Aspectos essenciais desenvolvidos: diferenciar relações simétricas, assimétricas e hierárquicas, codificar e decodificar informações, pensamento analógico e inferencial baseado no raciocínio lógico.

2.2.9 Relações Temporais

É um instrumento voltado a reorientar a percepção deficiente do individuo quanto a dimensão do tempo e sua capacidade de registrar, processar e ordenar relações temporais. As páginas deste instrumentos são divididas em Unidades, sendo que cada uma delas apresenta, explora e desenvolve um aspecto diferente da orientação (representação) temporal. Aspectos essenciais desenvolvidos: sequenciação e quantificação de intervalos temporais, percepção subjetiva do tempo, relevância dos fatores temporais na determinação de casualidade.

2.2.10 Progressões Numéricas

O objetivo maior desse instrumento está voltado à procura de regras e leis, através da dedução das relações existentes entre eventos vivenciados. A ordem e o surgimento rítmico das relações são formuladas como regras, com a ajuda das quais as pessoas podem construir ou predizer sequências futuras dos eventos. Uma das principais propostas deste instrumento é o desenvolver uma orientação para perceber objetos e eventos como por algum tipo de relação que possa ser deduzida. Aspectos essenciais desenvolvidos: descobrir leis e relações subjacentes à evolução de diferentes fenômenos, desenvolver o processo de pensamento hipotético, buscar evidência lógica como base do pensamento inferencial.

2.2.11 Instruções

O instrumento de Instruções focaliza na codificação e decodificação de informação verbal escrita, auxiliando o aprendiz a desenvolver sua habilidade para extrair dados implícitos a partir das informações explícitas. Por meio dos insights provocados pelo seu sucesso e insucesso, o indivíduo se transforma em gerador de informações, capaz e motivado para interpretar e transmitir instruções complexas. Aspectos essenciais desenvolvidos: substituir a linguagem egocêntrica e idiossincrática por uma comunicação inteligível e universal, codificar e decodificar mensagens formuladas verbalmente, registrar informação implícita através de processo inferencial.

2.2.12 Silogismos

No raciocínio silogístico, a integração da informação a partir de duas premissas sobre a relação entre os termos leva a dedução de uma relação desconhecida. Através das tarefas de Silogismos, aprendizes adquirem a habilidade de discriminar entre uma conclusão válida e inválida e entre um resultado possível e inevitável. Este instrumento promove o pensamento inferencial e abstrato. Aspectos essenciais desenvolvidos: usar a lógica formal proposicional para estabelecer inferências através do pensamento dedutivo, diferenciar entre veracidade e validade de premissas e conclusões, desenvolver pensamento crítico e evitar super-generalização e estereótipos.

2.2.13 Relações Transitivas

Este instrumentos lida com a inferência de novas relações entre objetos e/ou eventos a partir de outras já existentes que podem ser descritas em termos de maior do que, igual a e menor do que. O aluno é introduzido às regras que governam o pensamento transitivo e aprende a conectar os dados apresentados separadamente através de um ponto comum de referência.

Através do instrumento o aluno tem a oportunidade de aprender regras diferentes e aplicá-las. Aspectos essenciais desenvolvidos: estabelecer inferências válidas através do pensamento indutivo, identificar conjuntos ordenados e reconhecer as condições de uma relação transitiva ou transferível, buscar a lógica baseada em evidências como base para estabelecer inferências.

2.2.14 Desenhos e Padrões

Desenho de Padrões consiste de um conjunto de tarefas no qual o indivíduo necessita construir mentalmente um design por meio de uma série complexa de passos que requerem representação mental, antecipação e controle da impulsividade. A identificação do todo dada pela sobreposição de partes, exige uma construção mental ativa com a ajuda de inferências, relações de causa e efeito e representação do resultado final. Aspectos essenciais desenvolvidos: desenvolver o pensamento representacional, analisar e integrar componentes de um fenômeno complexo e abstrato, perceber transformações consecutivas e seu efeito, compensar a lacuna entre percepção e cognição e promover as habilidades do pensamento abstrato para substituir a necessidade de suporte sensorial.

Capítulo 3

Atividades do PEI e Teoria dos Grafos

O Programa de Enriquecimento Instrumental é constituído de uma série de exercícios voltados a desenvolver funções cognitivas específicas. O objetivo central do PEI é a produção de modificações nas estruturas cognitivas dos indivíduos, expandindo o potencial de aprendizagem, aumentando a eficiência mental e melhorando a qualidade do desempenho intelectual [7]. Neste capítulo, serão abordados alguns conceitos de Teoria dos Grafos através de algumas atividades do Programa de Enriquecimento Instrumental. Relacionaremos algumas atividades com diferentes resultados e conceitos importantes da Teoria de Grafos. De antemão, vamos deixar bem claro que não pretendemos que os alunos tenham uma total compreensão dos conceitos tratados em Teoria dos Grafos, mas que tenham maior capacidade de entendimento de tais conceitos após realizar as tarefas parecidas com as que serão mostradas no decorrer do capítulo. A imagem a seguir mostra as referências de onde as atividades foram obtidas.

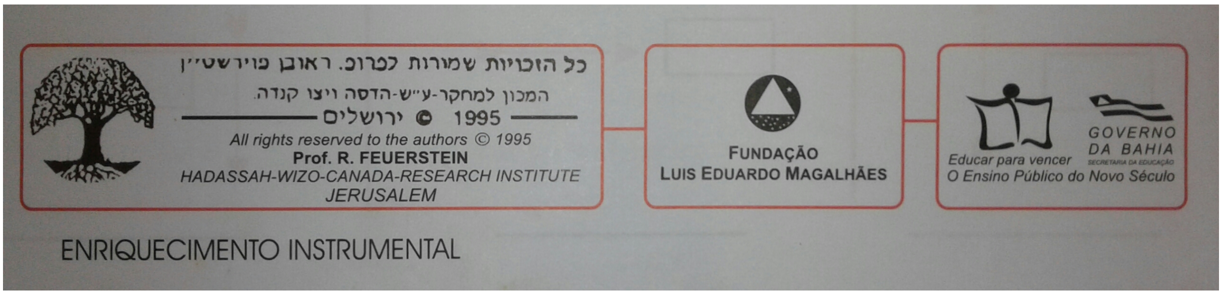


Figura 3.1: Referências das atividades abordadas

O conjunto de atividades que abordaremos, faz parte de um conjunto maior que foi aplicado nos dois anos inicias do Ensino Médio em algumas escolas estaduais da Bahia na primeira década desse milênio. O intuito desse trabalho é fundamentar matematicamente através da Teoria de Grafos algumas aplicações simples com o objetivo de incentivar e motivar o alunado a estudar e gostar da disciplina Matemática e ao mesmo tempo, fazer com que eles percebam diferentes formas de abordar e resolver o mesmo problema.

3.1 Problema motivador: Problema das três casas

O chamado problema das três casas, conhecido também como água, luz e telefone ou problema das três utilidades, é um quebra-cabeça matemático clássico, que pode ser declarado como segue:

Problema das três casas *Suponha que haja três casas em um plano (ou superfície de uma esfera) e cada uma precisa ser ligada às empresas de água, luz e telefone. O uso de uma terceira dimensão ou o envio de qualquer uma das conexões através de outra empresa ou casa não é permitido. Existe uma maneira de fazer todos as nove ligações sem qualquer uma das linhas que se cruzam?*

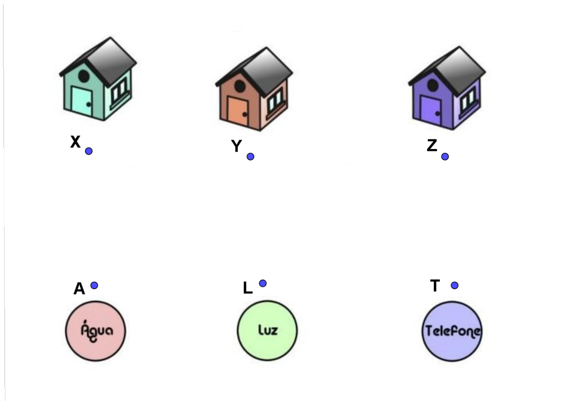


Figura 3.2: Problema das três casas

Solução do Problema das três casas: Partido da casa indicada com o vértice X, traçamos arestas ligando os vértices A, L e T que indicam as empresas de água, luz e telefone, respectivamente, como segue a figura a seguir:

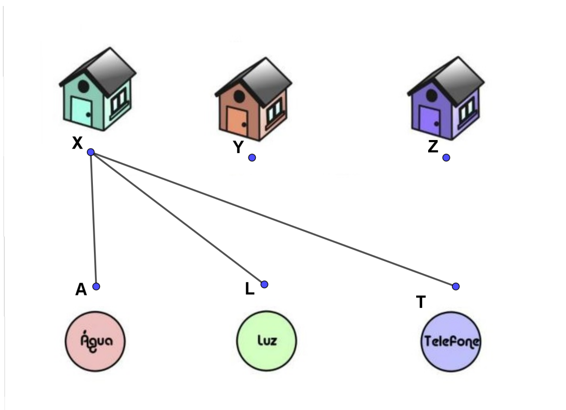


Figura 3.3: Conexões da casa indicada pelo vértice X

De forma análoga a o que foi feito vamos partir da casa indicada com o vértice Y, traçamos arestas ligando os vértices A, L e T que indicam as empresas de água, luz e telefone, respectivamente, conforme a figura a seguir:

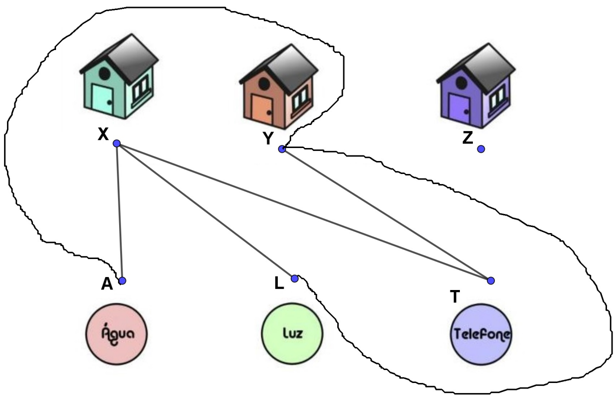


Figura 3.4: Conexões da casa indicada pelo vértice Y

Note que até o momento conseguimos estabelecer as conexões entre as casas indicadas pelos vértices X e Y com os vértices A, L e T que indicam as empresas de água, luz e telefone, respectivamente. Vamos agora, tentar estabelecer as conexões entre os vértices A, L e T com o vértice Z, que indica a casa restante.

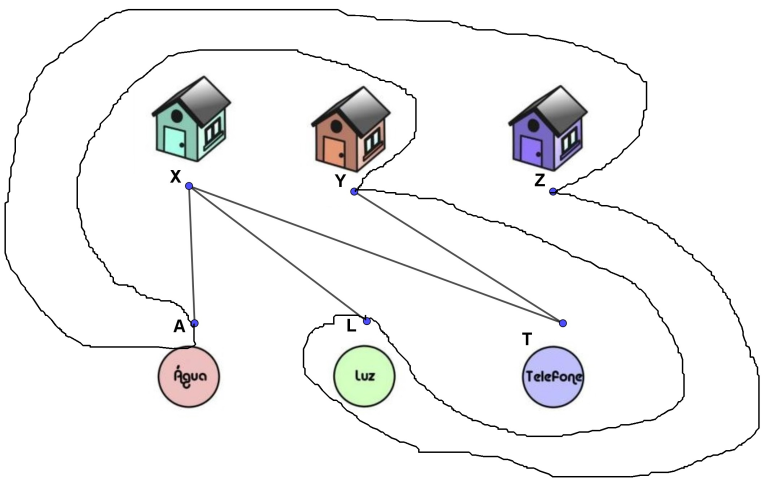


Figura 3.5: Conexões da casa indicada pelo vértice Z

Na figura acima, vemos que só conseguimos estabelecer as conexões entre os vértices A e L com o vértice Z sem que haja cruzamentos de arestas. Com isso, concluímos que não é possível que exista uma maneira de fazer todos as nove ligações sem qualquer uma das linhas que se cruzam, pois na solução apresentada, se tornou impossível realizar a conexão entre a casa indicada pelo vértice Z e o vértice T que indica a empresa de telefone.

Solução do Problema das três casas sob a perspectiva da Teoria dos Grafos:

Sejam V_1 e V_2 conjuntos independentes, com V_1 formado pelas três casas citadas no problema e V_2, formado pelas empresas de água, luz e telefone.

Sejam ainda X, Y e Z os vértices que indicam cada uma das três casas e A, L e T os vértices que indicam as empresas de água, luz e telefone, respectivamente. Note que não há conexões entre os vértices $X, Y, Z \in V_1$ e entre os vértices $A, L, T \in V_2$. Dessa maneira, de acordo com a Definição 1.17, Podemos estabelecer o grafo $G = (V; A)$ bipartido, $V = V_1 \cup V_2$ com $G_{3,3}$ bipartido.

Como nenhum grafo da forma $K_{3,3}$ não pode ser planar de acordo com Teorema 1.33, então o grafo $G_{3,3}$ que representa a situação proposta pelo problema das três casa não é planar. Portanto não pode haver uma conexão entre os vértices $X, Y, Z \in V_1$ e os vértices $A, L, T \in V_2$ sem que nenhumas das arestas se cruzes.

O grafo relacionado ao problema pode ser visto a seguir.

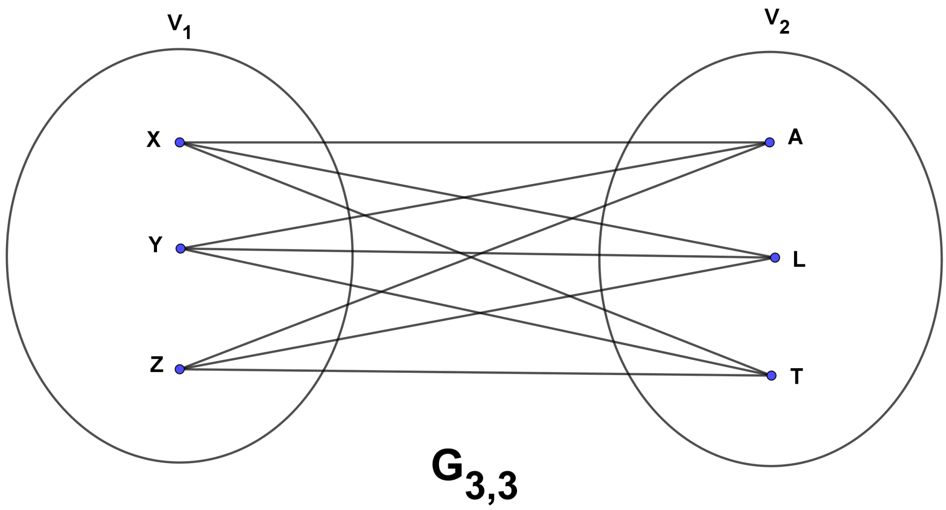


Figura 3.6: Grafo $G_{3,3}$ relacionado ao Problema das três casas

Note que conseguimos resolver o problema com o auxílio da Teoria dos Grafos, utilizado apenas alguns conceitos estabelecidos. Dessa forma, podemos verificar que a Teoria dos Grafos é uma ferramenta indispensável na Matemática, pois simplifica muitos dos problemas que encontramos nos mais diversos contextos, mostrado assim que seu estudo de fato é importante.

3.2 Atividade 13 proposta em Percepção Analítica

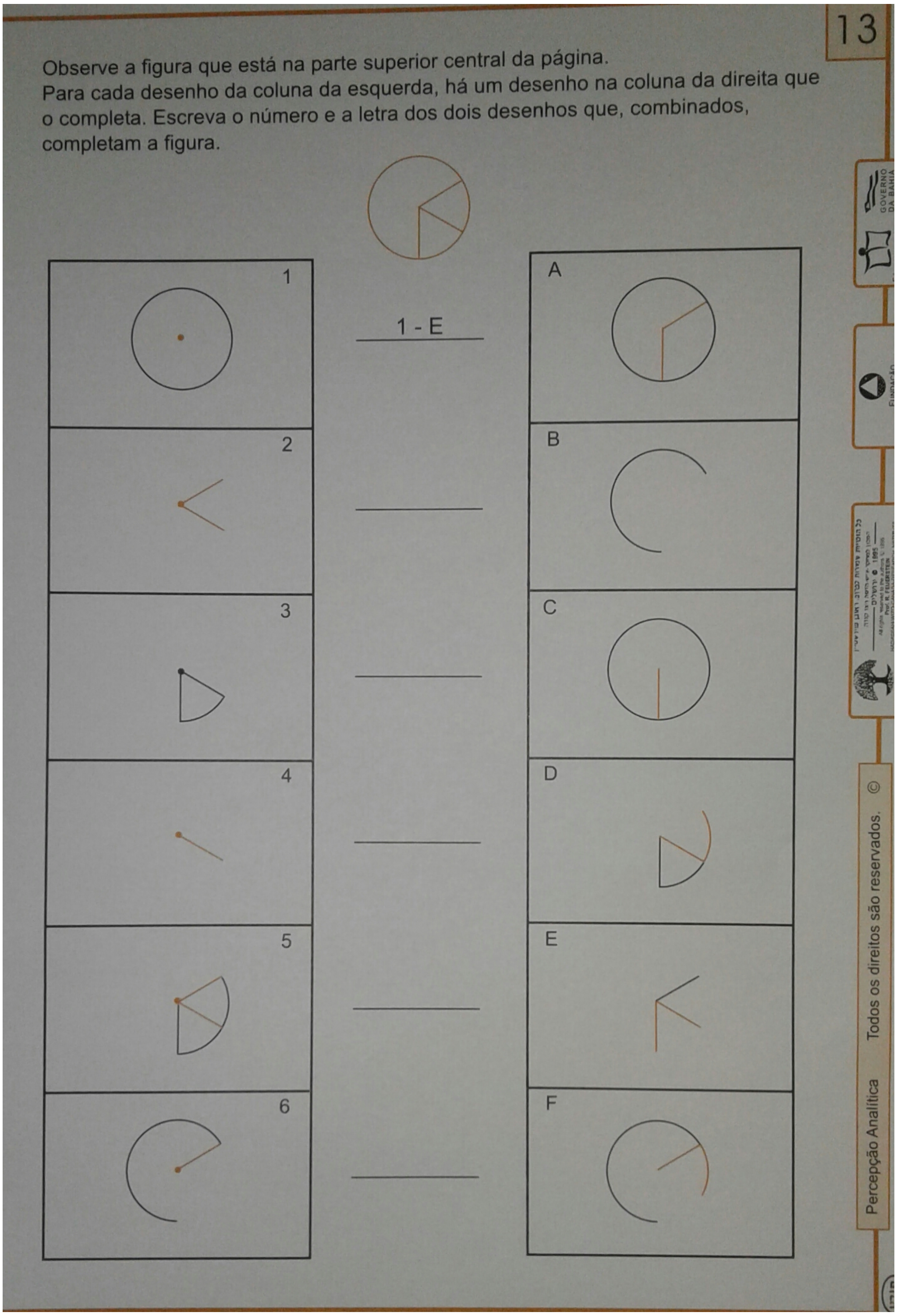
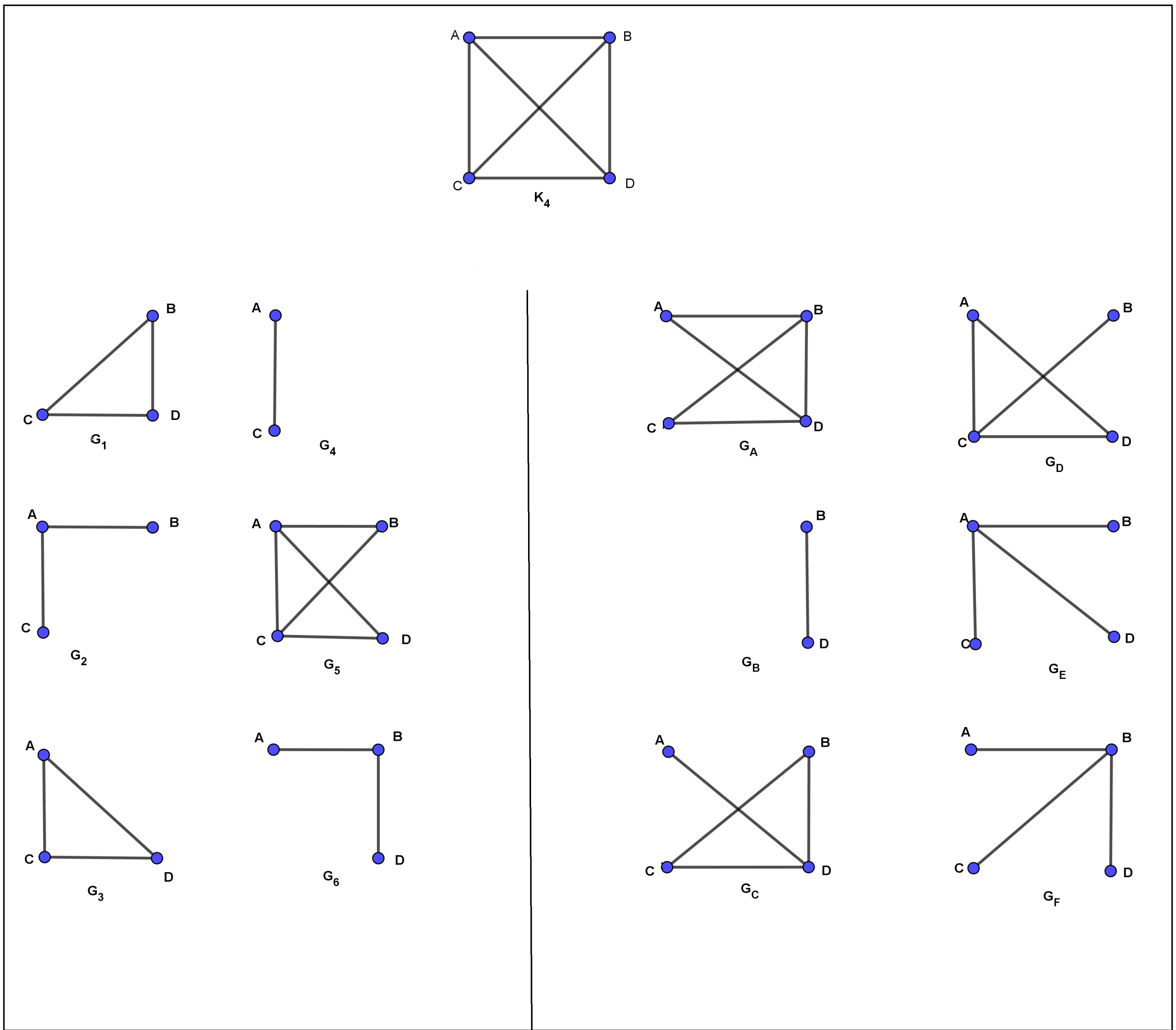


Figura 3.7: Atividade 13 Percepção Analítica

3.2.1 Tarefa relacionada a Atividade 13 proposta em Percepção Analítica

A seguir proporemos a Atividade 13 apresentada anteriormente adaptada para a Teoria de Grafos.



TAREFA PROPOSTA: Relacione cada um dos grafos da esquerda, indicados com índices numéricos, com cada um dos grafos da direita, indicados por índices algébricos. Cada grafo da direita deve ser relacionado a um único grafo da esquerda, de tal forma que um seja complemetar do outro, em relação ao grafo principal em destaque na parte superior da imagem, isto é, quando relacionarmos um grafo qualquer do conjunto indicado na esquerda com seu complementar indicado na parte direita, a junção das arestas desses devem fornecer todas as arestas do grafo principal (completo) e a junção de seus vértices fornece todos os vértices do grafo principal.

Figura 3.8: Tarefa relacionada a Atividade 13

Note que a figura da atividade 13 sugerida em Percepção Analítica, pôde ser representada por meio do grafo K_4 presente na Figura 3.8, que tem A, B, C e D como vértices e AB, AC, AD, BC, BD e CD como arestas.

Na Tarefa sugerida na Figura 3.7, temos que o conjunto mais à esquerda, formado pelos grafos G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 representa cada um dos desenhos que aparecem nos retângulos indicados pela sequência de números 1, 2, 3, 4, 5, 6, respectivamente, da Atividade 13, apresentada na Figura 3.7. Analogamente, podemos ver que o conjunto formado pelos grafos G_A, G_B, G_C, G_D, G_E, G_F representa cada um dos desenhos que aparecem nos retângulos indicados pela sequência de letras A, B, C, D, E, F, respectivamente.

A Tarefa proposta na Figura 3.8 pode ser resolvida da seguinte maneira: utilizando a representação por meio de grafo de cada uma das figuras da atividade proposta na Figura 3.7 juntamente com a definição de grafos complementares, que foi apresentada na Definição 1.9. Temos que AB, AC, AD, BC, BD e CD representam todas as arestas do grafo K_4.

Note que BC, BD e CD são as arestas de G_1; AB e AC são as arestas de G_2; AC, AD e CD são as arestas de G_3; AC é a única aresta de G_4; AB, AC, AD, BC e CD são as arestas de G_5; AB e BD são as arestas de G_6.

Por outro lado, temos que AB, AD, BC, BD e CD são as arestas de G_A; BD é a única aresta de G_B; AD, BC, BD e CD são as arestas de G_C; AC, AD, BC e CD são as arestas de G_4; AB, AC e AD são as arestas de G_5 e AB, BC e BD são as arestas de G_6.

Juntando as aresta de G_1 e G_E, as aresta de G_2 e G_C, as arestas de G_3 e G_F, as arestas de G_4 e G_A, as arestas de G_5 e G_B e as arestas de G_6 e G_D obtemos em todos os casos o grafo K_4. Com isso, chegamos conclusão que os pares de grafos complementares são: G_1 e G_E, G_2 e G_C, G_3 e G_F, G_4 e G_A, G_5 e G_B, G_6 e G_D.

Voltando à Atividade 13 temos portanto que os pares $1-E$, $2-C$, $3-F$, $4-A$, $5-B$ e $6-D$ representam as combinações entre números e letras que juntos completam a figura.

Note que através dessa simples atividade, podemos levar ao aluno compreender um importante conceito da Teoria de Grafos que é o de grafos complementares. Isto leva também o aluno a "modelar"outros problemas através de grafos e ter uma nova visão sobre sua solução, já que ao meu ver o principal objetivo não é somente o aprendizado da Teoria de Grafos.

3.3 Atividade 20 proposta em Percepção Analítica

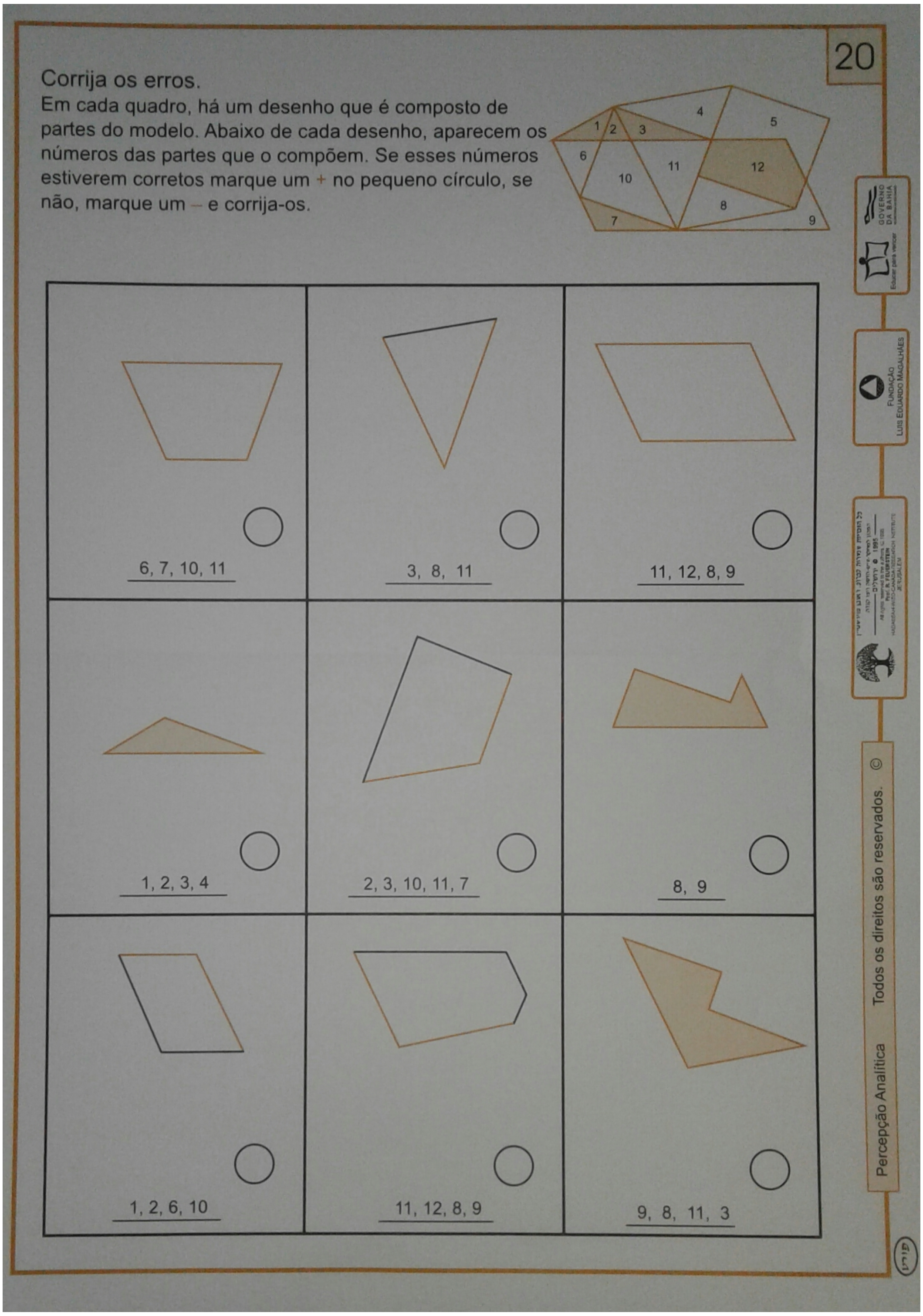


Figura 3.9: Atividade 20 Percepção Analítica

Considere a figura da Atividade 20 sugerida em Percepção Analítica. Podemos representá-la por um grafo com vértices em A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O e com arestas AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BO, CO, DE, DL, EF, EI, EK, EL, FG, GH, HI, HJ, HM, JK, JL, LM, LN, LO, NO, como pode ser visto na figura a seguir:

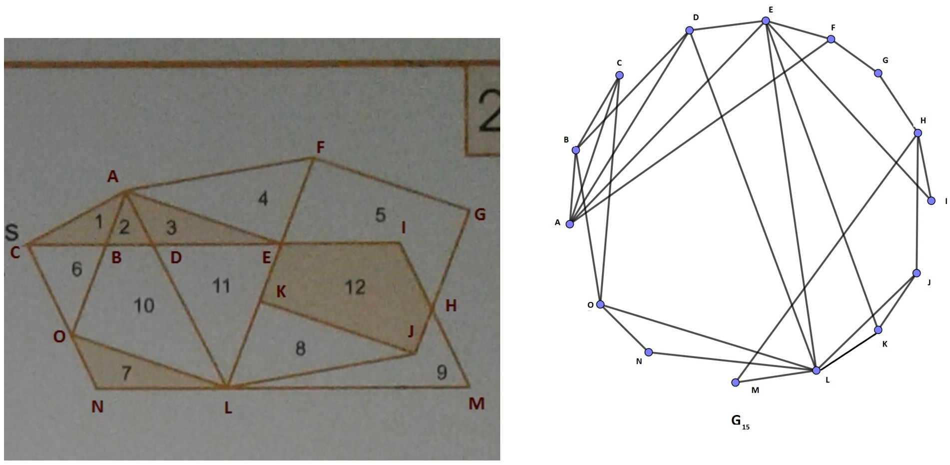


Figura 3.10: Desenho da Atividade 20 e sua representação gráfica

Note que na figura da Atividade 20, por exemplo, as arestas AB, BC e AC representam o triângulo indicado com o número 1, isto é, o triângulo como vértices nos pontos A, B e C; já as arestas AC, BC, BD, DE e AE representam a figura formada pela junção das partes 1, 2 e 3, isto é, o triângulo com vértices nos pontos A, C e E. Esse raciocínio segue de forma análoga para as outras arestas da figura da Atividade 20.

O conjunto de grafos a seguir representa todas as sequencias numéricas presentes em cada um dos desenhos na figura da Atividade 20.

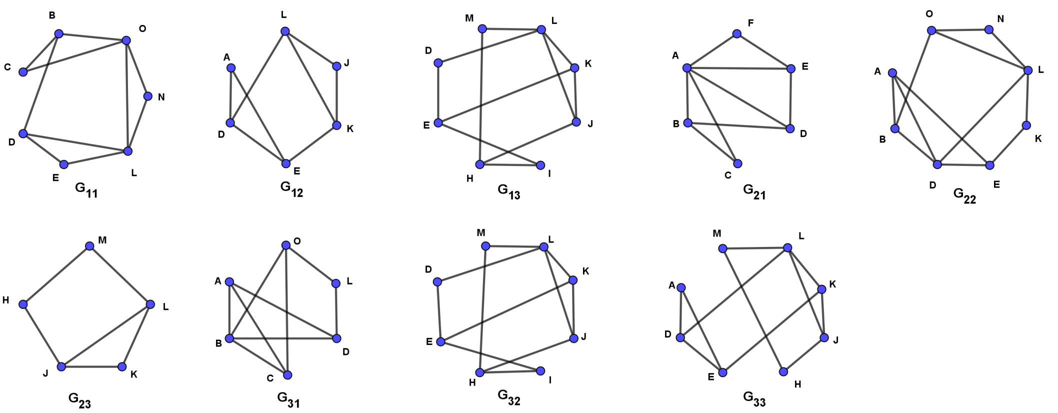


Figura 3.11: Grafos referentes as sequências numéricas da Atividade 20

Veja que cada uma das nove sequências numéricas apresentadas na atividade é representada respectivamente pelos grafos G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{21}, G_{22}, G_{23}, G_{31}, G_{32} e G_{33}, o grafo G_{11}, por exemplo, representa a sequência numérica presente na retângulo da primeira linha e primeira coluna, o grafo G_{12} representa a sequencia que se encontra no retângulo da primeira linha e segunda coluna e assim sucessivamente.

Por outro lado, o conjunto de grafos a seguir representa todos os desenhos mostrados nos retângulos em que estão localizadas as sequências numéricas.

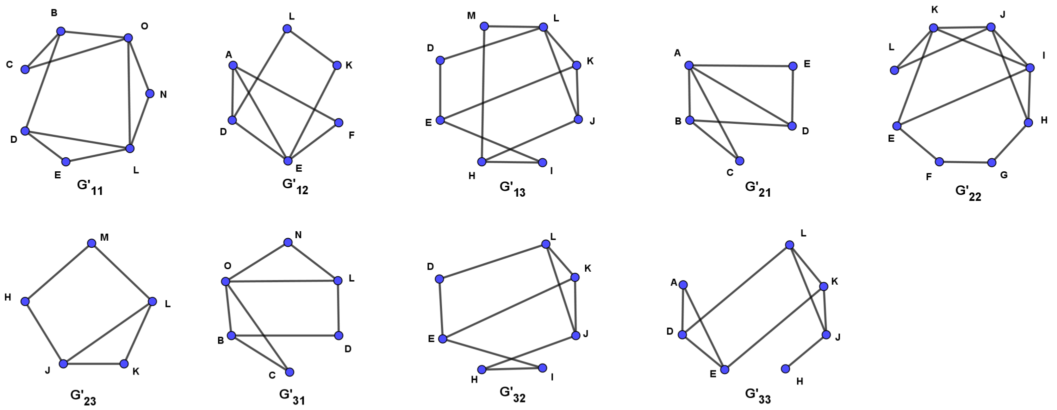


Figura 3.12: Grafos referentes aos desenhos

Note que os grafos G'_{11}, G'_{12}, G'_{13}, G'_{21}, G'_{22}, G'_{23}, G'_{31}, G'_{32} e G'_{33} representam os desenhos presentes nos retângulos da Atividade 20. Por exemplo, o grafo G'_{11} representa o desenho que aparece no retângulo da primeira linha e primeira coluna, o grafo G'_{12} representa o desenho presente no retângulo da primeira linha e segunda coluna.

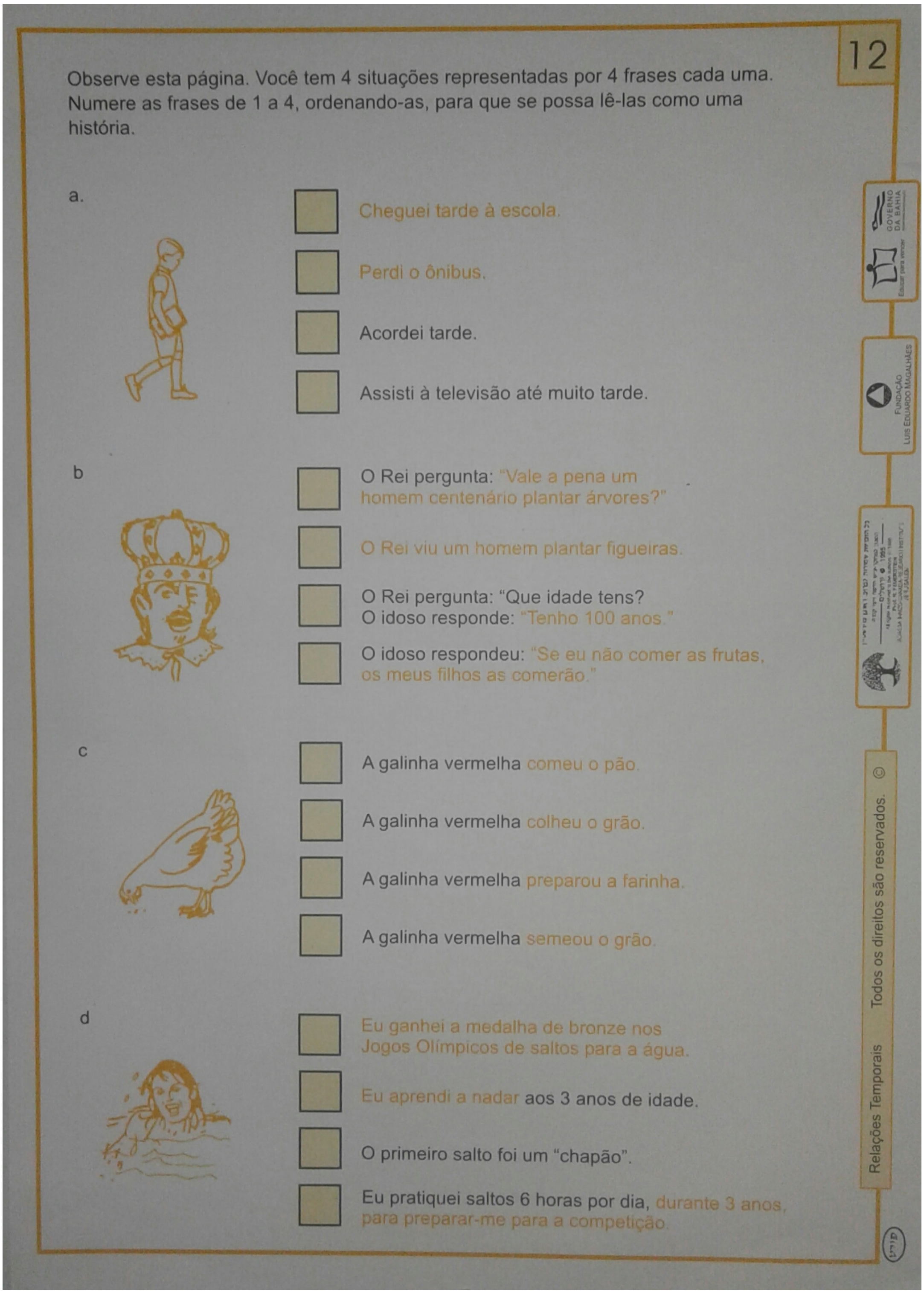
Analisando as duas imagens, podemos ver que os pares de grafos G_{11} e G'_{11}; G_{13} e G'_{13}; G_{23} e G'_{23} são isomorfos, de acordo com a Definição 1.14. Por outro lado temos que cada um dos pares de grafos G_{11} e G'_{12}; G_{22} e G'_{22}; G_{31} e G'_{31}; G_{32} e G'_{32}; G_{33} e G'_{33} é não isomorfo, pois cada um deles não está de acordo com a Definição 1.14 e com a Proposição 1.15.

Perceba que o vértice J aparece em G_{12} e não em G'_{12}, enquanto que o vértice F aparece em G'_{12} e não em G_{12}; o número de vértices de G_{21} é igual a 6, enquanto que o número de vértices de G'_{21} é igual a 5; o vértice O aparece em G_{22} e não aparece em G'_{22}, enquanto que o vértice H aparece em G'_{22} e não em G_{22}; o vértice A compõe G_{31} e não compõe G'_{31}, enquanto que o vértice N faz parte de G'_{31} e não de G_{31} e finalmente os grafos G'_{32} e G'_{33} são obtidos, respectivamente, dos grafos G_{32} e G_{33} por meio da exclusão do vértice M.

Dessa forma, temos que os círculos que aparecem nos retângulos da linha 1 e coluna 1, linha 1 e coluna 3 e linha 2 e coluna 3 devem conter um sinal (+), enquanto que os demais círculos devem ser marcados com o sinal (−).

Observe que nessa atividade é possível abordar o conceito de subgrafos, apresentado na Definição 1.7. Em outras palavras, poderíamos abordar esse problema perguntando, por exemplo, se os grafos das Figuras 3.11 e 3.12 são subgrafos do Grafo apresentado na Figura 3.10 e em quais casos esses subgrafos são iguais.

3.4 Atividade 12 proposta em Relações Temporais



12

Observe esta página. Você tem 4 situações representadas por 4 frases cada uma. Numere as frases de 1 a 4, ordenando-as, para que se possa lê-las como uma história.

a.

- Cheguei tarde à escola.
- Perdi o ônibus.
- Acordei tarde.
- Assisti à televisão até muito tarde.

b

- O Rei pergunta: "Vale a pena um homem centenário plantar árvores?"
- O Rei viu um homem plantar figueiras.
- O Rei pergunta: "Que idade tens? O idoso responde: "Tenho 100 anos."
- O idoso respondeu: "Se eu não comer as frutas, os meus filhos as comerão."

c

- A galinha vermelha comeu o pão.
- A galinha vermelha colheu o grão.
- A galinha vermelha preparou a farinha.
- A galinha vermelha semeou o grão.

d

- Eu ganhei a medalha de bronze nos Jogos Olímpicos de saltos para a água.
- Eu aprendi a nadar aos 3 anos de idade.
- O primeiro salto foi um "chapão".
- Eu pratiquei saltos 6 horas por dia, durante 3 anos, para preparar-me para a competição.

Relações Temporais

Figura 3.13: Atividade 12 Relações Temporais

Perceba que cada uma das quatro situações presentes nos itens a,b,c e d da figura da Atividade 12 proposta em Relações Temporais podem ser representadas por meio de um grafo. A situação presente no item a) pode ser representada pelo grafo G_A da figura a seguir

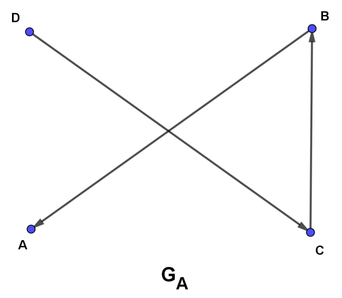


Figura 3.14: Grafo G_A relativo ao Item a) da Atividade 12

Note que o grafo G_A possui vértices A, B, C, D que representam cada uma das quatro ações que constam no item a), isto é, o conjunto de vértices A, B, C, D representa, respectivamente, as ações "Cheguei tarde a escola," "Perdi o ônibus," "Acordei tarde" e "Assisti televisão até muito tarde." E para cada aresta orientada, podemos considerar que a ação no vértice do início da aresta foi realizada imediatamente antes da ação apresentada no vértice ao fim da aresta. Com isso, obtemos as seguintes arestas orientadas $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{BA}$ que pode ser visualizada no Grafo G_A. Portanto, de acordo com o grafo G_A temos que as ações ficam distribuídas na seguinte ordem: "Assisti televisão até muito tarde," "Acordei tarde," "Perdi o ônibus" e "Cheguei tarde a escola".

O grafo G_B que vemos a seguir representa a situação presente no item b)

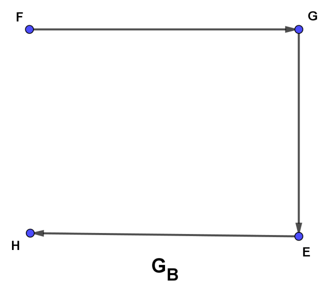


Figura 3.15: Grafo G_B relativo ao Item b) da Atividade 12

De maneira análoga ao que foi feito no item a) temos que G_B possui vértices E, F, G, H que representam as situações que constam no item b). Vamos supor então que a situação " O Rei pergunta: Vale a pena um homem centenário plantar árvores?" seja representada pelo vértice E, " O Rei viu um homem plantar figueiras" pelo vértice F, "O Rei pergunta: Que idade tens? O idoso responde: Tenho 100 anos" pelo vértice G e "O idoso respondeu: Se eu não comer as frutas, meus filhos as comerão" pelo vértice H. Com isso, obtemos $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GE}$ e $\overrightarrow{EH}$ como arestas orientadas do grafo G_B.

Logo, de acordo com o grafo G_B, temos a seguinte ordem " O Rei viu um homem plantar figueiras," "O Rei pergunta: Que idade tens? O idoso responde: Tenho 100 anos," " O Rei pergunta: Vale a pena um homem centenário plantar árvores?" e "O idoso respondeu: Se eu não comer as frutas, meus filhos as comerão" com que ocorre esses fatos pode ser lida como uma história.

As ações estabelecidas no item c), assim como nos dois itens anteriores, são representadas pelo grafo G_C como segue:

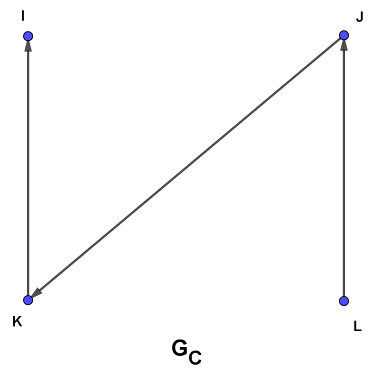


Figura 3.16: Grafo G_C relativo ao Item c) da Atividade 12

Note que os vértices de G_C são I, J, K e L que são relacionados com as ações presentes no item c) da seguinte forma: " A galinha vermelha comeu o pão " relacionada ao vértice I, "A galinha vermelha colheu o grão" relacionada ao vértice J, "A galinha vermelha preparou a farinha " relacionada ao vértice K e "A galinha vermelha semeou o grão" relacionada ao vértice L. Note que o grafo G_C possui $\overrightarrow{LJ}$, $\overrightarrow{JK}$ e $\overrightarrow{KI}$ como arestas orientadas. Portanto, colocando as quatros ações na seguinte ordem: "A galinha vermelha semeou o grão," "A galinha vermelha colheu o grão," "A galinha vermelha preparou a farinha " e " A galinha vermelha comeu o pão, " teremos a leitura de uma história.

Finalmente, temos que o grafo G_D que pode ser visualizado a seguir, indica as situações presentes no item d).

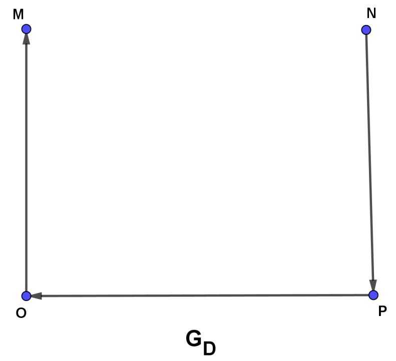


Figura 3.17: Grafo G_D relativo ao Item d) da Atividade 12

De maneira similar aos itens anteriores vemos que o grafo G_D possui vértices M, N, O, P que estão relacionado com as situações presentes nesse item da seguinte forma: o vértice M representa a situação "Eu ganhei a medalha de bronze nos jogos Olímpicos de saltos para água", o vértice N representa a situação "Eu aprendi a nadar aos 3 anos de idade", o vértice O representa a situação "O primeiro salto foi um chapão" e o vértice P representa a situação "Eu pratiquei saltos 6 horas por dia, durante 3 anos, para preparar-me para a competição". As arestas orientadas de G_D são $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PO}$ e $\overrightarrow{OM}$. Logo a sequência como as situações: "Eu aprendi a nadar aos 3 anos de idade," "Eu pratiquei saltos 6 horas por dia, durante 3 anos, para preparar-me para a competição," "O primeiro salto foi um chapão" e "Eu ganhei a medalha de bronze nos jogos Olímpicos de saltos para água" são colocadas, representa uma história.

Através dessa atividade, pode ser abordado, de forma simples, o conceito de grafo orientado, apresentado na Definição 1.6.

3.5 Atividade 10 proposta em Orientação Espacial

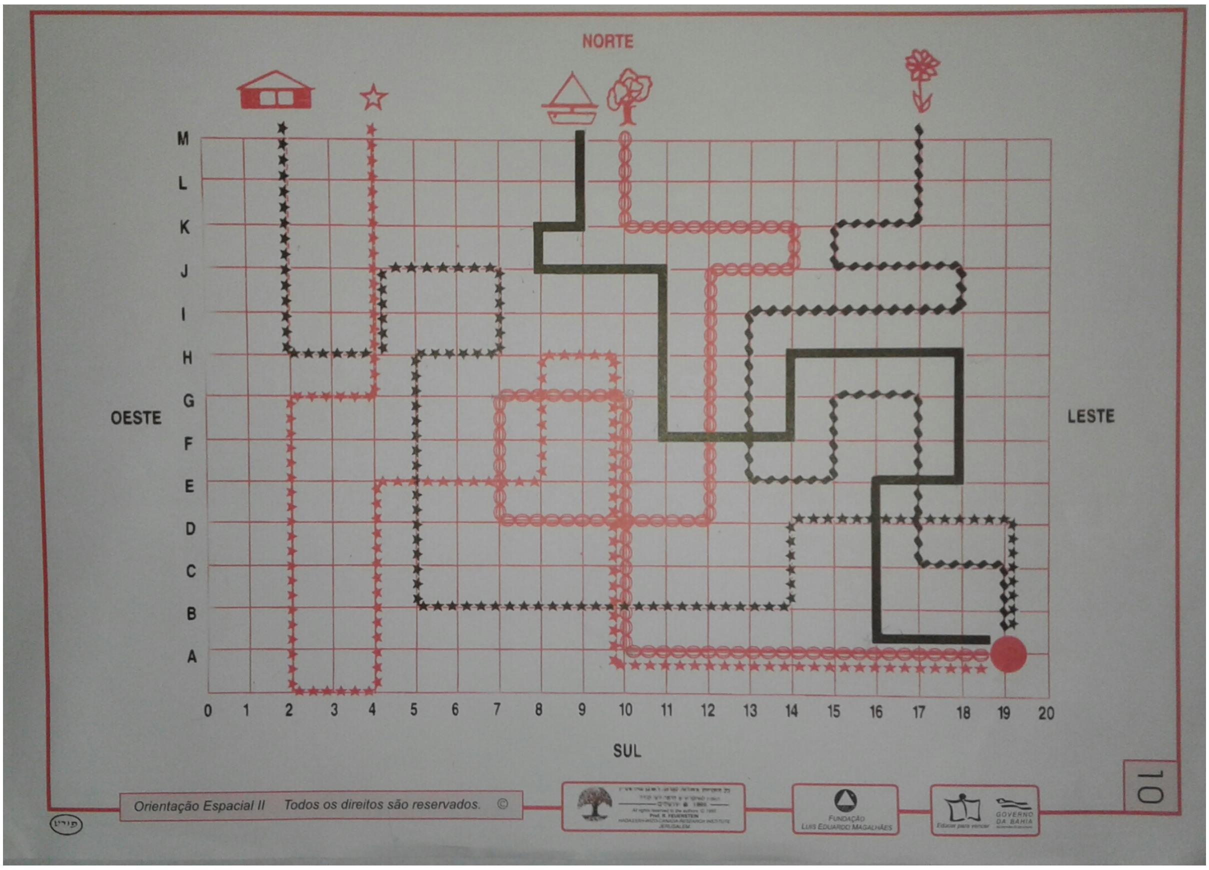
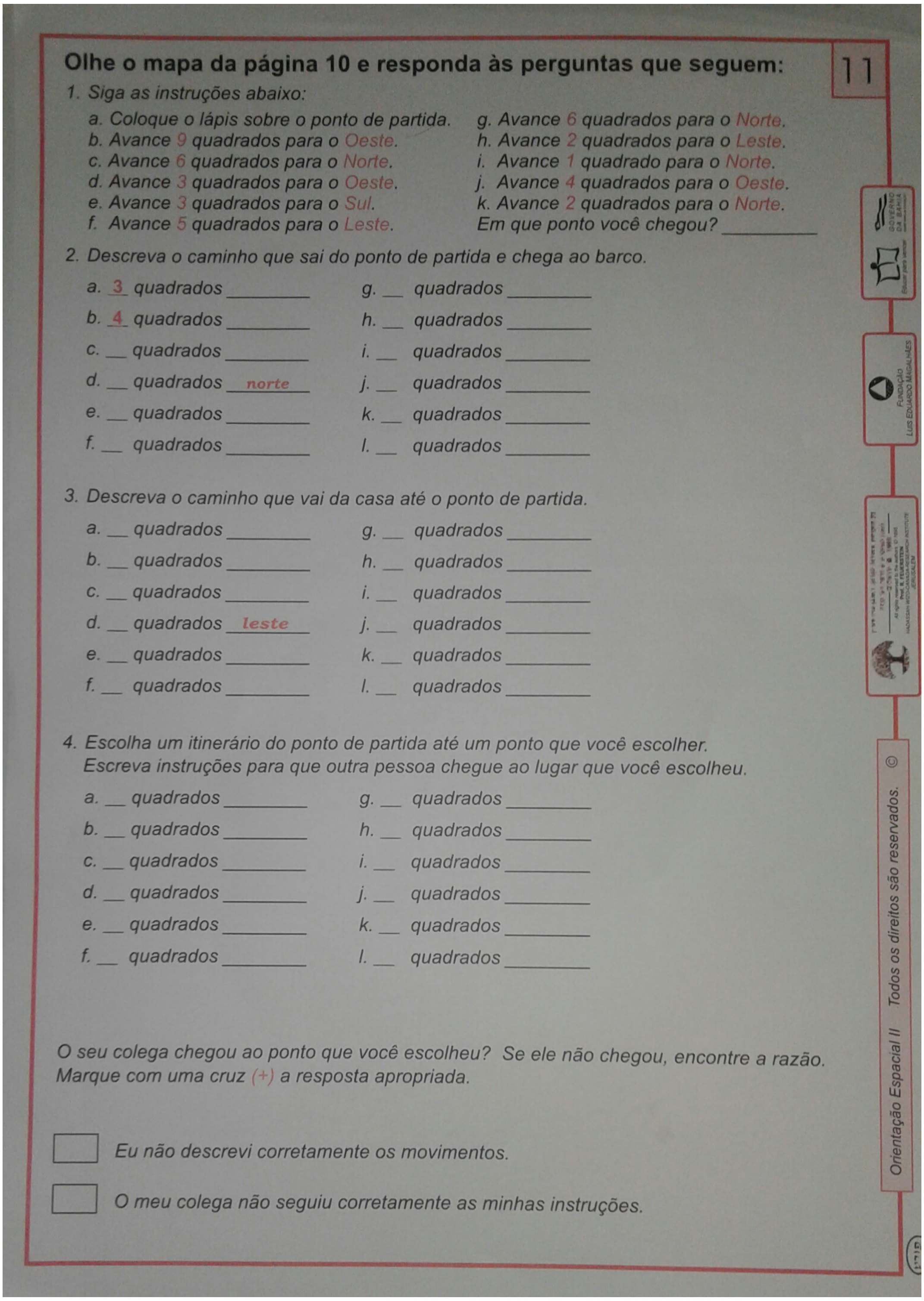


Figura 3.18: Atividade 10 Orientação Espacial

3.6 Atividade 11 proposta em Orientação Espacial



Olhe o mapa da página 10 e responda às perguntas que seguem: 11

1. Siga as instruções abaixo:

a. Coloque o lápis sobre o ponto de partida.
b. Avance 9 quadrados para o Oeste.
c. Avance 6 quadrados para o Norte.
d. Avance 3 quadrados para o Oeste.
e. Avance 3 quadrados para o Sul.
f. Avance 5 quadrados para o Leste.
g. Avance 6 quadrados para o Norte.
h. Avance 2 quadrados para o Leste.
i. Avance 1 quadrado para o Norte.
j. Avance 4 quadrados para o Oeste.
k. Avance 2 quadrados para o Norte.
Em que ponto você chegou? ___

2. Descreva o caminho que sai do ponto de partida e chega ao barco.

a. 3 quadrados ___
b. 4 quadrados ___
c. ___ quadrados ___
d. ___ quadrados norte
e. ___ quadrados ___
f. ___ quadrados ___
g. ___ quadrados ___
h. ___ quadrados ___
i. ___ quadrados ___
j. ___ quadrados ___
k. ___ quadrados ___
l. ___ quadrados ___

3. Descreva o caminho que vai da casa até o ponto de partida.

a. ___ quadrados ___
b. ___ quadrados ___
c. ___ quadrados ___
d. ___ quadrados leste
e. ___ quadrados ___
f. ___ quadrados ___
g. ___ quadrados ___
h. ___ quadrados ___
i. ___ quadrados ___
j. ___ quadrados ___
k. ___ quadrados ___
l. ___ quadrados ___

4. Escolha um itinerário do ponto de partida até um ponto que você escolher.
Escreva instruções para que outra pessoa chegue ao lugar que você escolheu.

a. ___ quadrados ___
b. ___ quadrados ___
c. ___ quadrados ___
d. ___ quadrados ___
e. ___ quadrados ___
f. ___ quadrados ___
g. ___ quadrados ___
h. ___ quadrados ___
i. ___ quadrados ___
j. ___ quadrados ___
k. ___ quadrados ___
l. ___ quadrados ___

O seu colega chegou ao ponto que você escolheu? Se ele não chegou, encontre a razão.
Marque com uma cruz (+) a resposta apropriada.

☐ Eu não descrevi corretamente os movimentos.

☐ O meu colega não seguiu corretamente as minhas instruções.

Orientação Espacial II Todos os direitos são reservados. ©

Figura 3.19: Atividade 11 Orientação Espacial

Através da figura da Atividade 10 proposta em Orientação Espacial, podemos estabelecer grafos que relacionam as instruções propostas em cada uma das quatro situações presentes na Atividade 11.

Nesse exemplo, construiremos o grafo G_{arvore}, onde cada vértice representa o cruzamento das linhas de A à M com as linhas de 0 à 20 da Atividade 10. Nomearemos cada vértice com uma letra e com um subíndice numérico, conforme o cruzamento das linhas. Por exemplo, o vértice A_{19} do grafo G_{arvore}, representa o cruzamento da linha A com a linha 19 na Atividade 10. Dessa forma, temos que o grafo G_{arvore} possui vértices A_{19}, A_{10}, G_{10}, G_7, D_7, D_{12}, J_{12}, J_{14}, K_{14}, K_{10}, M_{10}.

Como partimos de um ponto ao outro, consideremos as seguintes arestas orientadas $\overrightarrow{A_{19}A_{10}}$, $\overrightarrow{A_{10}G_{10}}$, $\overrightarrow{G_{10}G_7}$, $\overrightarrow{G_7D_7}$, $\overrightarrow{D_7D_{12}}$, $\overrightarrow{D_{12}J_{12}}$, $\overrightarrow{J_{12}J_{14}}$, $\overrightarrow{J_{14}K_{14}}$, $\overrightarrow{K_{14}K_{10}}$ e $\overrightarrow{K_{10}M_{10}}$ que veremos a seguir, representa as instruções presentes na Atividade 1 da Figura 3.18. Nessa atividade consta a descrição de um caminho que vai do ponto de partida estabelecido A_{19} e chega em um determinado ponto até então desconhecido.

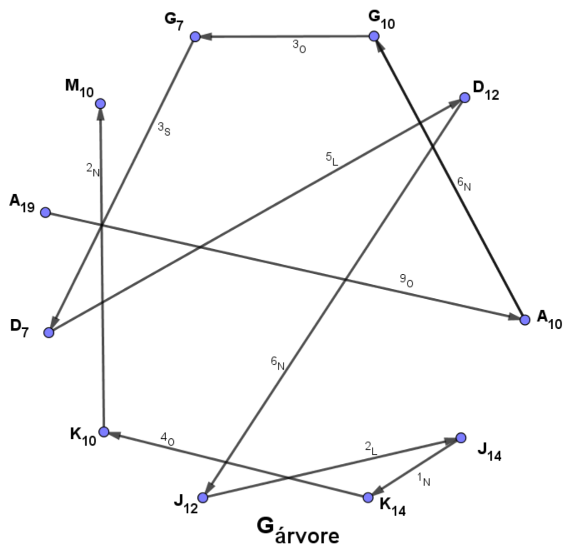


Figura 3.20: Grafo G_{arvore} relativo a Atividade 1 da Figura 3.19

Note que partindo do ponto inicial, isto é, partindo de A_{19} e seguindo todas as instruções descritas na Atividade 1: 9 avanços para o Oeste, 6 avanços para o Norte, 3 avanços para o Oeste, 3 avanços para o sul, 5 avanços para o leste, 6 avanços para o Norte, 2 avanços para o Leste, 1 avanço para o Norte, 4 avanços para o Oeste e 2 avanços para o Norte, percorremos todas arestas orientadas $\overrightarrow{A_{19}A_{10}}$, $\overrightarrow{A_{10}G_{10}}$, $\overrightarrow{G_{10}G_7}$, $\overrightarrow{G_7D_7}$, $\overrightarrow{D_7D_{12}}$, $\overrightarrow{D_{12}J_{12}}$, $\overrightarrow{J_{12}J_{14}}$, $\overrightarrow{J_{14}K_{14}}$, $\overrightarrow{K_{14}K_{10}}$ e $\overrightarrow{K_{10}M_{10}}$, que compõem o grafo G_{arvore}.

Dessa forma chega-se ao ponto M_{10}, que indica a posição em que se encontra a árvore, respondendo então o questionamento feito na Atividade 1. Note ainda que podemos estabelecer o peso total de G_{arvore}, se associarmos a cada aresta, a quantidade de quadrados percorridos para ir de um vértice à outro. Assim, cada aresta orientada assumirá um peso. Então, podemos obter o peso total G_{arvore} somando todos esses pesos. De acordo com a

Definição 1.27 temos que

$$p(\overrightarrow{A_{19}A_{10}}) = 9,\ p(\overrightarrow{A_{10}G_{10}}) = 6,\ p(\overrightarrow{G_{10}G_7}) = 3,\ p(\overrightarrow{G_7D_7}) = 3,$$
$$p(\overrightarrow{D_7D_{12}}) = 5,\ p(\overrightarrow{D_{12}J_{12}}) = 6,\ p(\overrightarrow{J_{12}J_{14}}) = 2,$$
$$p(\overrightarrow{J_{14}K_{14}}) = 1,\ p(\overrightarrow{K_{14}K_{10}}) = 4 \text{ e } p(\overrightarrow{K_{10}M_{10}}) = 2.$$

Portanto $p(G_{arvore}) = 41$.

O grafo G_{barco} que veremos a seguir, representa as instruções presentes na Atividade 2 da Figura 3.18. Nessa atividade é solicitada a descrição do caminho que vai do ponto de partida A_{19} e chega ao ponto M_9 onde se encontra o barco. Procedendo de forma análoga à construção do grafo G_{arvore}, teremos que os vértices de G_{barco} são A_{19}, A_{16}, E_{16}, E_{18}, H_{18}, H_{14}, F_{14}, F_{11}, J_{11}, J_8, K_8, K_9, M_9 e suas arestas orientadas são $\overrightarrow{A_{19}A_{16}}$, $\overrightarrow{A_{16}E_{16}}$, $\overrightarrow{E_{16}E_{18}}$, $\overrightarrow{E_{18}H_{18}}$, $\overrightarrow{H_{18}H_{14}}$, $\overrightarrow{H_{14}F_{14}}$, $\overrightarrow{F_{14}F_{11}}$, $\overrightarrow{F_{11}J_{11}}$, $\overrightarrow{J_{11}J_8}$, $\overrightarrow{J_8K_8}$, $\overrightarrow{K_8K_9}$ e $\overrightarrow{K_9M_9}$

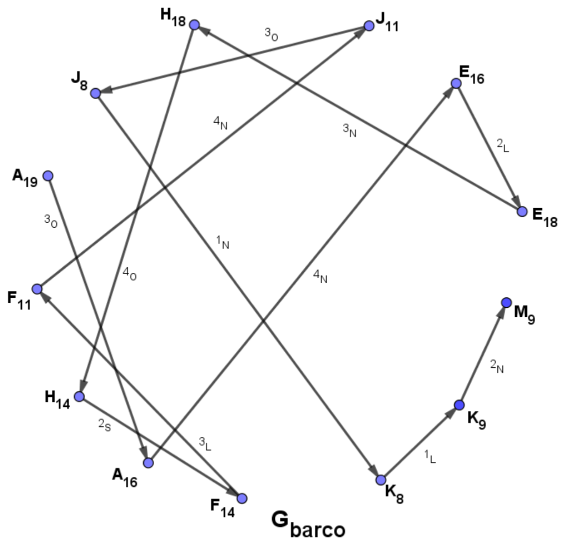


Figura 3.21: Grafo G_{barco} relativo a Atividade 2 da Figura 3.19

Perceba que o grafo G_{barco} foi obtido através de uma observação da Figura 10. Com isso, temos que suas arestas orientadas $\overrightarrow{A_{19}A_{16}}$, $\overrightarrow{A_{16}E_{16}}$, $\overrightarrow{E_{16}E_{18}}$, $\overrightarrow{E_{18}H_{18}}$, $\overrightarrow{H_{18}H_{14}}$, $\overrightarrow{H_{14}F_{14}}$, $\overrightarrow{F_{14}F_{11}}$, $\overrightarrow{F_{11}J_{11}}$, $\overrightarrow{J_{11}J_8}$, $\overrightarrow{J_8K_8}$, $\overrightarrow{K_8K_9}$ e $\overrightarrow{K_9M_9}$ indicam, respectivamente: 3 avanços para o Oeste, 4 avanços para o Norte, 2 avanços para o Leste, 3 avanços para o Norte, 4 avanços para o Oeste, 2 avanços para o Sul, 3 avanços para o Leste, 4 avanços para o Norte, 3 avanços para o Oeste, 1 avanço para o Norte, 1 avanço para o Leste e 2 avanços para o Norte.

Dessa forma, descrevemos todo o caminho que vai ponto de partida A_{19} e chega ao ponto M_9 onde se encontra o barco, resolvendo a atividade 2. De maneira análoga a Atividade 1, vamos estabelecer o peso total de G_{barco}, isto é, $p(G_{barco})$. Note que de acordo com a Definição 1.27 estabelecemos o peso de cada aresta orientada, bem como o peso total de $p(G_{barco})$:

$$p(\overrightarrow{A_{19}A_{16}}) = 3,\ p(\overrightarrow{A_{16}E_{16}}) = 4,\ p(\overrightarrow{E_{16}E_{18}}) = 2,\ p(\overrightarrow{E_{18}H_{18}}) = 3,$$
$$p(\overrightarrow{H_{18}H_{14}}) = 4,\ p(\overrightarrow{H_{14}F_{14}}) = 2,\ p(\overrightarrow{F_{14}F_{11}}) = 3,\ p(\overrightarrow{F_{11}J_{11}}) = 4,$$
$$p(\overrightarrow{J_{11}J_8}) = 3,\ p(\overrightarrow{J_8K_8}) = 1,\ p(\overrightarrow{K_8K_9}) = 1 \text{ e } p(\overrightarrow{K_9M_9}) = 2.$$

Portanto $p(G_{barco}) = 32$

O grafo G_{casa} com vértices M_2, H_2, H_4, J_4, J_7, H_7, H_5, B_5, B_{14}, D_{14}, M_{19}, A_{19} e que possui arestas orientadas $\overrightarrow{M_2H_2}$, $\overrightarrow{H_2H_4}$, $\overrightarrow{H_4J_4}$, $\overrightarrow{J_4J_7}$, $\overrightarrow{J_7H_7}$, $\overrightarrow{H_7H_5}$, $\overrightarrow{H_5B_5}$, $\overrightarrow{B_5B_{14}}$, $\overrightarrow{B_{14}D_{14}}$ e $\overrightarrow{D_{14}M_{19}}$, $\overrightarrow{M_{19}A_{19}}$ que veremos a seguir, representa as instruções presentes na Atividade 3 da Figura 3.19. Nessa atividade, assim como na segunda é solicitada a descrição do caminho que sai do ponto de partida em que se encontra a casa M_2 e chega ao ponto A_{19} onde se encontra o ponto de partida.

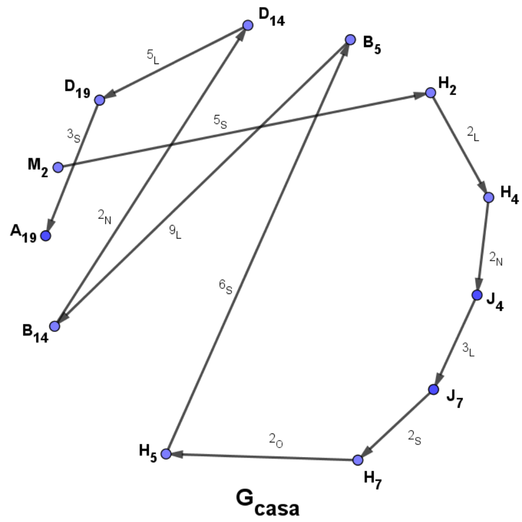


Figura 3.22: Grafo G_{casa} relativo a Atividade 3 da Figura 3.19

Note que o grafo G_{casa}, assim como o grafo G_{barco} foi obtido através de uma observação da Figura 10. Assim, temos que suas arestas orientadas $\overrightarrow{M_2H_2}$, $\overrightarrow{H_2H_4}$, $\overrightarrow{H_4J_4}$, $\overrightarrow{J_4J_7}$, $\overrightarrow{J_7H_7}$, $\overrightarrow{H_7H_5}$, $\overrightarrow{H_5B_5}$, $\overrightarrow{B_5B_{14}}$, $\overrightarrow{B_{14}D_{14}}$ e $\overrightarrow{D_{14}M_{19}}$, $\overrightarrow{M_{19}A_{19}}$ indicam, respectivamente: 5 avanços para o Sul, 2 avanços para o Leste, 2 avanços para o Norte, 3 avanços para o Leste, 2 avanços para o Sul, 2 avanços para o Oeste, 6 avanços para o Sul, 9 avanços para o Leste, 2 avanços para o Norte, 5 avanços para o Leste e 2 avanços para o Sul.

Dessa maneira, descrevemos todo o caminho que vai do ponto em que se encontra a casa M_2 e chega ao ponto de partida A_{19}, resolvendo a Atividade 3. Vamos agora, estabelecer o peso de cada aresta e o peso total de G_{casa}, isto é, $p(G_{casa})$.

$$p(\overrightarrow{M_2H_2}) = 5,\ p(\overrightarrow{H_2H_4}) = 2,\ p(\overrightarrow{H_4J_4}) = 2,\ p(\overrightarrow{J_4J_7}) = 3,$$
$$p(\overrightarrow{J_7H_7}) = 2,\ p(\overrightarrow{H_7H_5}) = 2,\ p(\overrightarrow{H_5B_5}) = 6,\ p(\overrightarrow{B_5B_{14}}) = 9,$$
$$p(\overrightarrow{B_{14}D_{14}}) = 2 \text{ e } p(\overrightarrow{D_{14}M_{19}}) = 5,\ p(\overrightarrow{M_{19}A_{19}}) = 2$$

Portanto $p(G_{casa}) = 40$

Vamos supor que tenhamos escolhido na Atividade 4 da Figura 11 o itinerário do ponto de partida até o ponto em que se encontra a estrela. Assim o grafo $G_{estrela}$ com vértices A_{19}, A_{10}, H_{10}, H_8, E_8, E_4, 0_4, 0_2, G_2, G_4, M_4 e que possui arestas orientadas $\overrightarrow{A_{19}A_{10}}$, $\overrightarrow{A_{10}H_{10}}$, $\overrightarrow{H_{10}H_8}$, $\overrightarrow{H_8E_8}$, $\overrightarrow{E_8E_4}$, $\overrightarrow{E_40_4}$, $\overrightarrow{0_40_2}$, $\overrightarrow{0_2G_2}$, $\overrightarrow{G_2G_4}$ e $\overrightarrow{G_4M_4}$, que veremos a seguir, representa as instruções presentes nessa atividade, que assim como as atividades 2 e 3 é solicitada a descrição do caminho que vai do ponto de partida A_{19} até o ponto em que se encontra a estrela M_4.

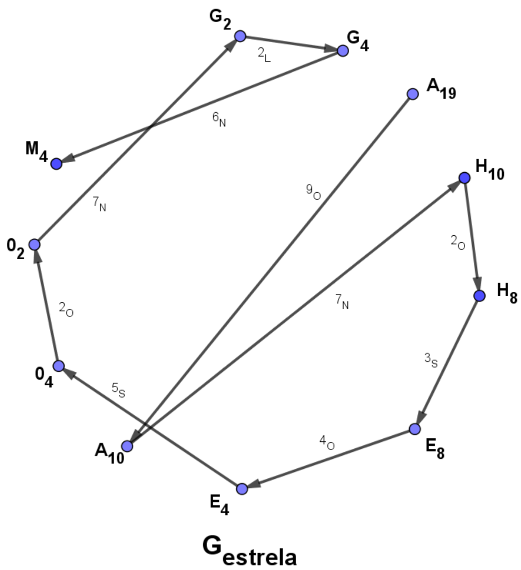


Figura 3.23: Grafo $G_{estrela}$ relativo a atividade 4 da Figura 3.19

Na atividade 4 temos que o grafo $G_{estrela}$, assim como o grafo G_{barco} e o grafo G_{casa} foi obtido através de uma observação da figura 10. Então temos que as arestas orientadas $\overrightarrow{A_{19}A_{10}}$, $\overrightarrow{A_{10}H_{10}}$, $\overrightarrow{H_{10}H_8}$, $\overrightarrow{H_8E_8}$, $\overrightarrow{E_8E_4}$, $\overrightarrow{E_40_4}$, $\overrightarrow{0_40_2}$, $\overrightarrow{0_2G_2}$, $\overrightarrow{G_2G_4}$ e $\overrightarrow{G_4M_4}$ indicam, respectivamente: 9 avanços para o Oeste, 7 avanços para o Norte, 2 avanços para o Oeste, 3 avanços para o Sul, 4 avanços para o Oeste, 5 avanços para o Sul, 2 avanços para o Oeste, 7 avanços para o Norte, 2 avanços para o Leste e 6 avanços para o Norte. Assim, descrevemos todo o caminho que vai do ponto de partida A_{19} até o ponto em que se encontra a estrela M_4, resolvendo a atividade 4. Para encontrar o peso total de $G_{estrela}$, isto é, $p(G_{casa})$, temos que os pesos das arestas são:

$$p(\overrightarrow{A_{19}A_{10}}) = 9,\ p(\overrightarrow{A_{10}H_{10}}) = 7,\ p(\overrightarrow{H_{10}H_8}) = 2,\ p(\overrightarrow{H_8E_8}) = 3,$$
$$p(\overrightarrow{E_8E_4}) = 4,\ p(\overrightarrow{E_40_4}) = 5,\ p(\overrightarrow{0_40_2}) = 2,$$
$$p(\overrightarrow{0_2G_2}) = 7,\ p(\overrightarrow{G_2G_4}) = 2 \text{ e } p(\overrightarrow{G_4M_4}) = 6$$

Portanto $p(G_{estrela}) = 48$

Através dessa atividade, é possível abordar os conceitos de Árvore, grafo orientado e grafo com peso.

3.7 Atividade 04 proposta em Relações Familiares

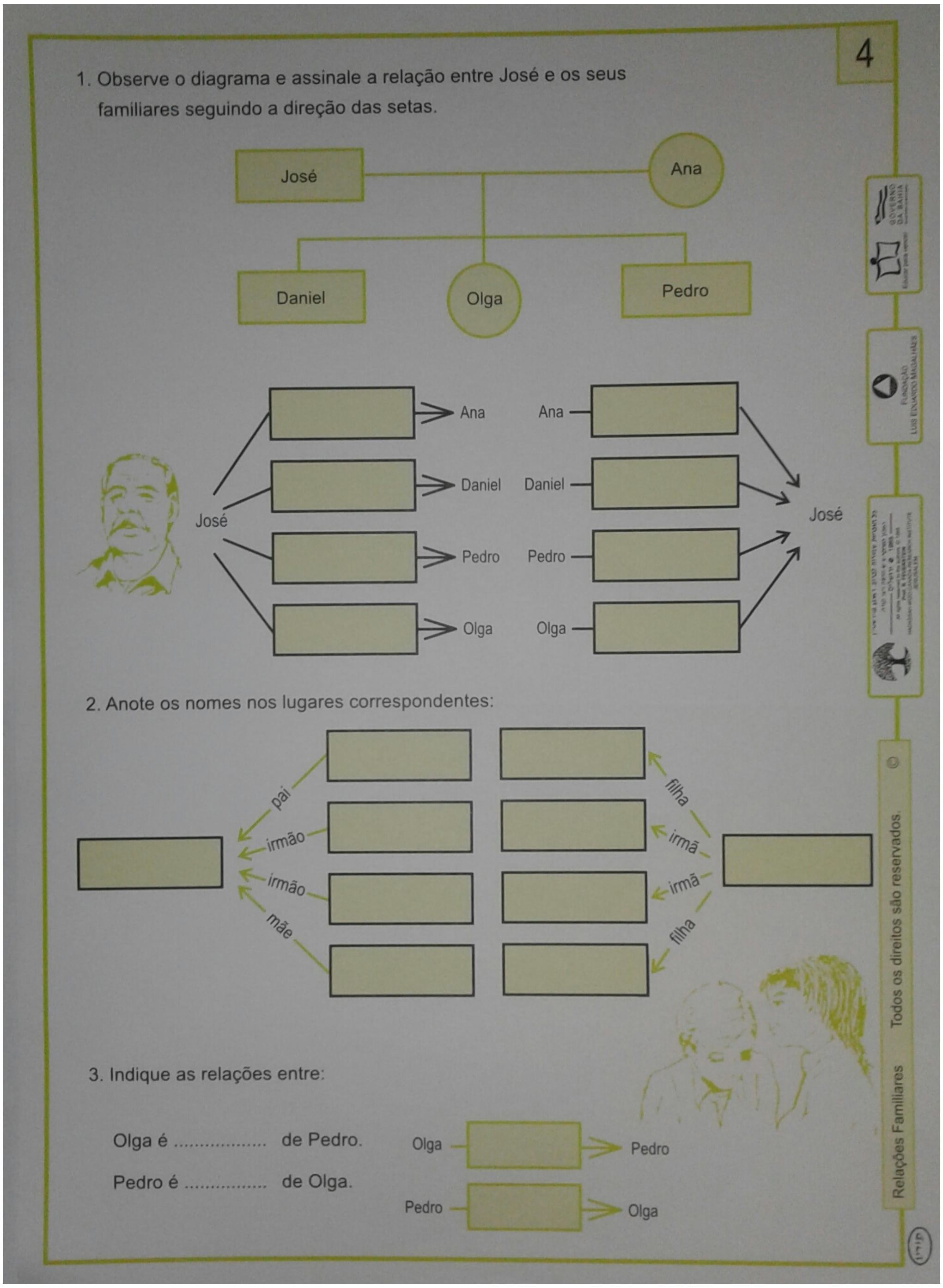


Figura 3.24: Atividade 4 Relações Familiares

A Relação entre José e seus Familiares da atividade 4 sugerida em Percepção Analítica, poder ser representada por meio do grafo F_5 que tem J, A, D, O e P como seus vértices e que representam, respectivamente, José, Ana, Daniel, Olga e Pedro e ainda JA, JD, JO, JP, AD, AO, AP, DO, DP e OP são suas arestas e estas indicam as relações existentes entre os vértices dados, como pode ser observada na figura a seguir: De acordo com F_5 temos que

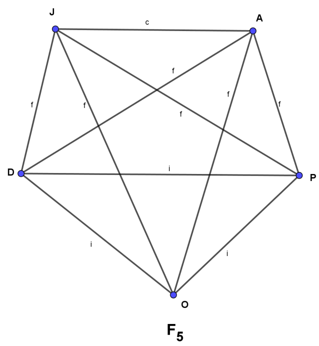


Figura 3.25: Grafo F_5 referente a Atividade 4 de Relações Familiares

a aresta JA indicada com a letra " c " indica a relação de casal entre os vértices por ela conectados, as arestas JD, JO, JP, AD, AO, AP indicadas com a letra " f " indicam a relação de pai(mãe) e filho(a) entre os vértices por elas conectados e as arestas DO, DP e OP indicadas com a letra " i " indica a relação de irmãos entre os vértices por elas conectados.

Dessa forma, temos que José é marido da Ana e ambos são pais de Daniel, Olga e Pedro. Note que através dessa atividade, conseguimos uma aplicação que nos gera um grafo que de acordo com a Definição 1.8, Definição 1.13 e Definição 1.29 do Capítulo 1, é um grafo completo, conexo e não planar.

Além de abordar esses conceitos de grafos, podemos ainda representar essa atividade através do grafo bipartido $F_{2,3}$, como descreveremos a seguir, com vértices J, A, D, O e P e arestas JD, JO, JP, AD, AO e AP.

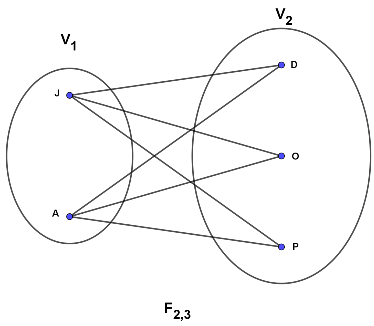
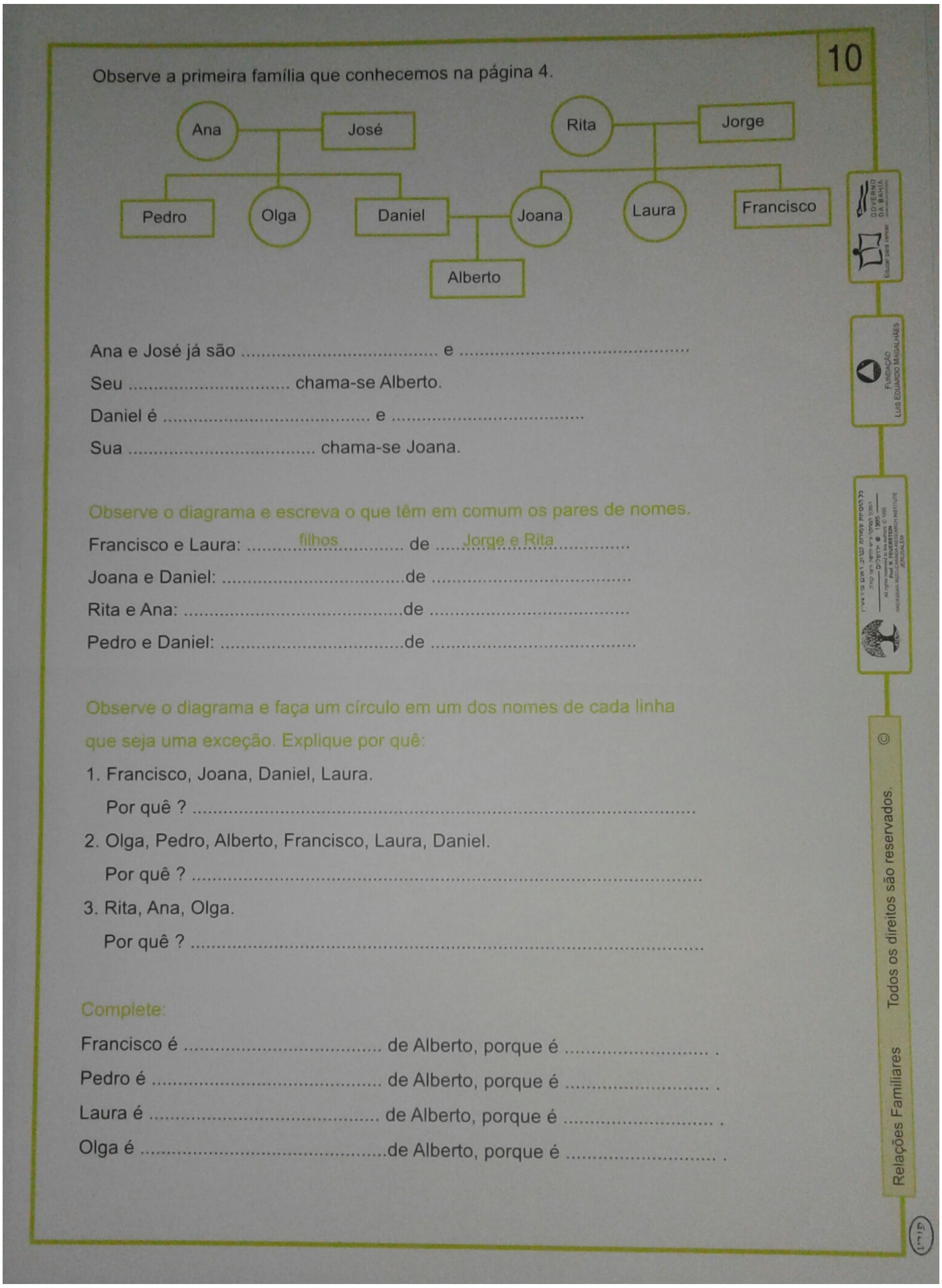


Figura 3.26: Grafo $F_{2,3}$ bipartido

No grafo $F_{2,3}$ temos que os vértices J, A, D, O e P representam as pessoas que compõem a família de José, enquanto que as arestas JD, JO, JP, AD, AO e AP representam as relações entre pais e filhos. Note que não pode haver uma aresta ligando os vértices J e A pois não há uma relação de pais e filhos entre esse par de vértices, por outro lado, temos que não podem haver as arestas DO, DP e OP, pois não há relações entre pais e filhos entre os vértices D, O e P.

Seja V o conjunto formado por todos os seus vértices de $F_{2,3}$, temos que $V = V_1 \cup V_2$, com V_1 e V_2 conjuntos disjuntos, não vazios e independentes. Portanto, de acordo com a Definição 1.17 do Capítulo 1 temos que $F_{2,3}$ é bipartido. Note que podemos exemplificar também o Teorema 1.18 através de $F_{2,3}$, pois sempre teremos ciclos de comprimento par, por exemplo, podemos percorrer o ciclo com arestas JO, OA, AD e DJ, que é de comprimento 4. Perceba que os ciclos são fechados, pois saem e chegam do mesmo vértice.

3.8 Atividade 10 proposta em Relações Familiares



10

Observe a primeira família que conhecemos na página 4.

Ana e José já são .... e ....

Seu .... chama-se Alberto.

Daniel é .... e ....

Sua .... chama-se Joana.

Observe o diagrama e escreva o que têm em comum os pares de nomes.

Francisco e Laura: ....filhos............. de .....Jorge e Rita.............

Joana e Daniel: ....de ....

Rita e Ana: ....de ....

Pedro e Daniel: ....de ....

Observe o diagrama e faça um círculo em um dos nomes de cada linha que seja uma exceção. Explique por quê:

1. Francisco, Joana, Daniel, Laura.
   Por quê ? ....
2. Olga, Pedro, Alberto, Francisco, Laura, Daniel.
   Por quê ? ....
3. Rita, Ana, Olga.
   Por quê ? ....

Complete:

Francisco é .... de Alberto, porque é ....

Pedro é .... de Alberto, porque é ....

Laura é .... de Alberto, porque é ....

Olga é ....de Alberto, porque é ....

Todos os direitos são reservados.

Relações Familiares

Figura 3.27: Atividade 10 Relações Familiares

O grafo F_{11} que veremos a seguir representa as relações entre os familiares de José e os familiares de Jorge.

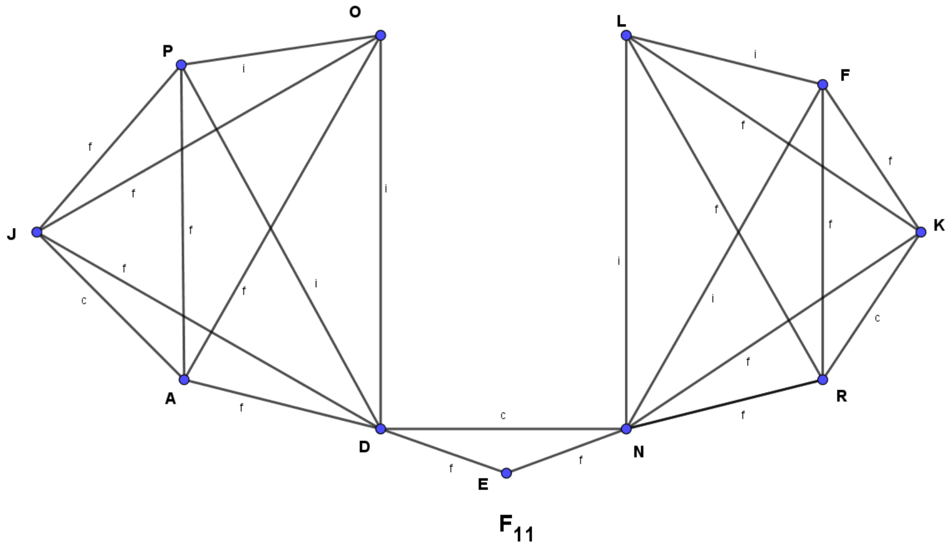


Figura 3.28: Grafo F_{11} referente a Atividade 10 de Relações Familiares

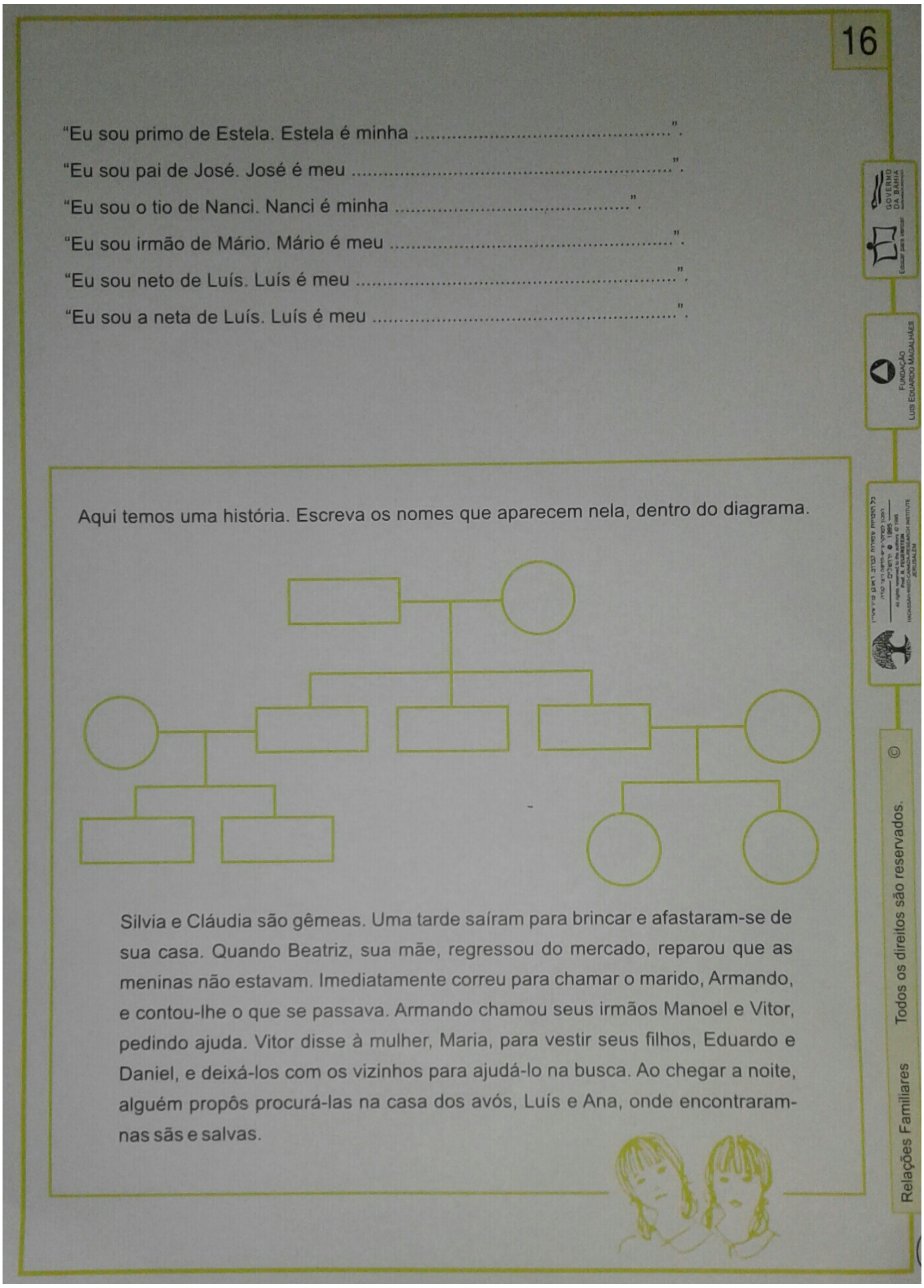
Note que os vértices de F_{11} são J, A, D, O, P, K, R, N, L, F e E que representam, respectivamente, José, Ana, Daniel, Olga, Pedro, Jorge, Rita, Joana, Laura, Francisco e Alberto e ainda JA, JD, JO, JP, AD, AO, AP, DO, DP, DE, OP, KR, KN, KL, KF, RN, RL, RF, NL, NF, NE e LF, são suas arestas e estas indicam as relações existentes entre os vértices dados.

De acordo com F_{11} temos que as arestas JA, KR e DN representadas com a letra " c " indicam a relação de casal entre os vértices por ela conectados, as arestas JD, JO, JP, AD, AO, AP KN, KL, KF, RN, RL, RF, DE e NE representadas com a letra " f " indicam a relação de pai(mãe) e filho(a) entre os vértices por elas conectados e as arestas DO, DP, OP, NL, NF e LF representadas com a letra " i " indica a relação de irmãos entre os vértices por elas conectados.

Dessa maneira, temos que José é marido da Ana e ambos são pais de Daniel, Olga e Pedro. Por outro lado, Jorge é marido de Rita e ambos são pais de Joana, Laura e Francisco. Perceba ainda que Daniel é casado com Joana, e ambos são pais de Alberto. Note ainda que Alberto é neto de José, Jorge, Ana e Rita, sobrinho de Pedro, Olga, Laura e Francisco.

De maneira análoga ao grafo F_5 temos que F_{11} é conexo, não planar, entretanto, não é completo. Veja também que de acordo com a Definição 1.10 do Capitulo 1, o grafo F_{11} não pode ser euleriano e nem semieuleriano, pois não existe uma trilha fechada que parte de um determinado vértice, percorrendo todas as arestas e retornando a esse vértice, e também não há uma trilha aberta que passe por todas as arestas uma única vez.

3.9 Atividade 16 proposta em Relações Familiares


16

"Eu sou primo de Estela. Estela é minha ....".

"Eu sou pai de José. José é meu ....".

"Eu sou o tio de Nanci. Nanci é minha ....".

"Eu sou irmão de Mário. Mário é meu ....".

"Eu sou neto de Luís. Luís é meu ....".

"Eu sou a neta de Luís. Luís é meu ....".

Aqui temos uma história. Escreva os nomes que aparecem nela, dentro do diagrama.

Silvia e Cláudia são gêmeas. Uma tarde saíram para brincar e afastaram-se de sua casa. Quando Beatriz, sua mãe, regressou do mercado, reparou que as meninas não estavam. Imediatamente correu para chamar o marido, Armando, e contou-lhe o que se passava. Armando chamou seus irmãos Manoel e Vitor, pedindo ajuda. Vitor disse à mulher, Maria, para vestir seus filhos, Eduardo e Daniel, e deixá-los com os vizinhos para ajudá-lo na busca. Ao chegar a noite, alguém propôs procurá-las na casa dos avós, Luís e Ana, onde encontraram-nas sãs e salvas.

Relações Familiares

Figura 3.29: Atividade 16 Relações Familiares

O grafo L_{11} abaixo com vértices S, C, B, A, M, V, R, E, D, L, N que representam as pessoas envolvidas no texto da Atividade Proposta na figura 16, simplifica as relações existentes entre as mesmas. O conjunto dos vértices S, C, B, A, M, V, R, E, D, L, N representam, respectivamente, as pessoas Sílvia, Cláudia, Beatriz, Armando, Manoel, Vítor, Maria, Eduardo, Daniel, Luís e Ana.

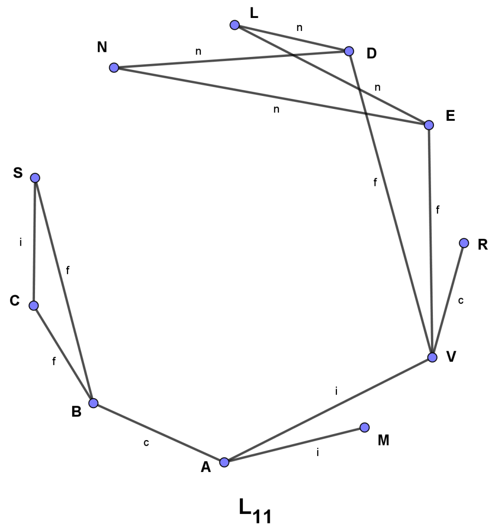


Figura 3.30: Grafo L_{11} referente a Atividade 16 de Relações Familiares

Observando o grafo L_{11} acima, construido de acordo com as informações do texto, podemos ver que suas arestas são SC, SB, CB, BA, AM, AV, VR, VE, VD, DL, DN, EL e EN.

Veja que as arestas BA e VR indicadas com a letra " c " indicam a relações de casais entre os vértices por ela conectados, as arestas SB, CB, VE e VD indicadas com a letra " f " indicam a relações de pais e filhos entre os vértices por elas conectados, as arestas SC, AM e AV indicadas com a letra " i " indicam a relações de irmãos entre os vértices por elas conectados e as arestas DL, DN, EL e EN indicadas com a letra " n " indicam a relações entre avós e netos entre os vértices por elas conectados. No diagrama da figura podemos notar que os círculos representam os lugares onde serão colocadas as mulheres enquanto que os retangulares indicam os lugares reservados aos homens.

Assim, Sílvia e Cláudia deverão ser colocadas nos dois círculos à direita na terceira geração, Beatriz deve ser colocada no círculo da direita na segunda geração, Armando será colocado logo a esquerda de Beatriz no terceiro retângulo na segunda geração, pois ele é marido de Beatriz e pai de Sílvia e Cláudia,

Seguindo o mesmo raciocínio, Manoel e Vítor deverão ser colocados nos dois retângulos que restaram na segunda geração com Vítor a esquerda de Manoel, Maria deverá ser colocada no círculo da esquerda, pois ela é esposa de Vítor, Eduardo e Daniel podem ser colocados em qualquer ordem nos dois retângulos que aparecem a esquerda na terceira geração e finalmente, Luís e Ana deverão ser colocados no retângulo e no círculo, repectivamente, na primeira geração.

Note que, de acordo com a Definição 1.23 o grafo L_{11} é conexo e possui pontes nas arestas BA e AV, pois a deleção de alguma delas faz com que L_{11} seja um grafo não conexo, mas com componentes conexas. Note ainda que L_{11} não é uma árvore, pois há pelo menos um ciclo, por exemplo, o ciclo formado pelos vértices S, C e B.

3.10 Atividade 23 proposta em Relações Familiares

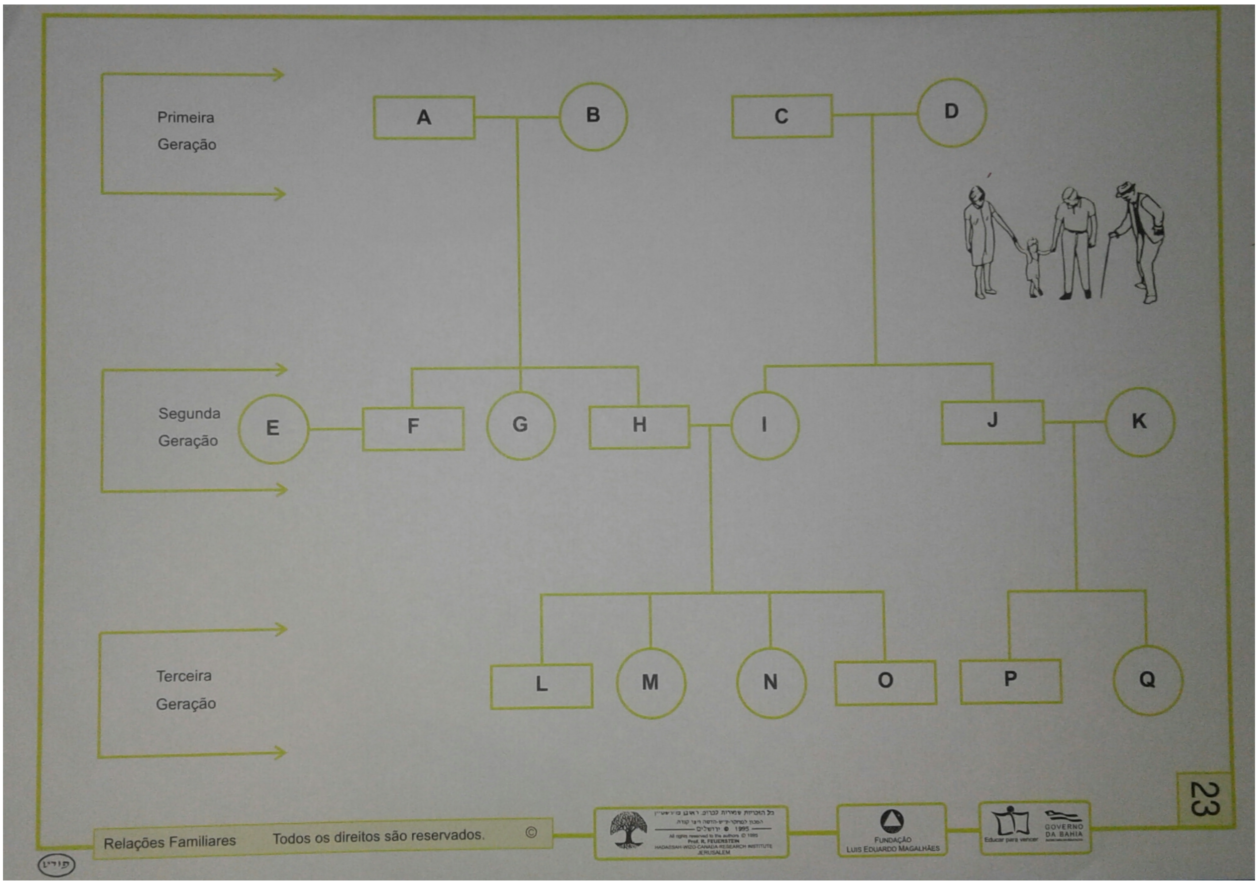


Figura 3.31: Atividade 23 Relações Familiares

O grafo T_{17} a seguir, com vértices A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P e Q que representam os membros de três gerações das duas famílias que aparecem na figura da atividade 23 proposta em Relações Familiares e que possuem os vértices A e C como seus patriarcas, possui arestas AB, AE, AF, AG, AH ,CD, CI, CJ, HI, HL, HM, HN, HO, JK, JP, JQ, que indicam as relações entre o pai e os seus filhos em cada família, bem como a relação entre marido e esposa.

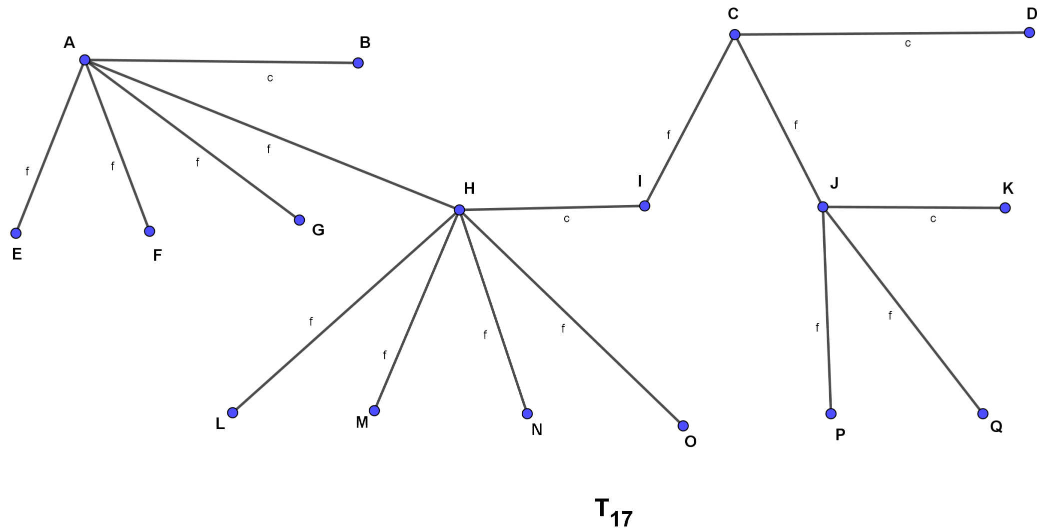


Figura 3.32: Grafo T_{17} referente a Atividade 23 de Relações Familiares

Note em T_{17} que as arestas AE, AF, AG, AH, CI, CJ, HL, HM, HN, HO, JP e JQ denotadas pela letra "f " representam a relação entre o pai e os seus filhos, por outro lado, as arestas AB, CD, HI e JQ denotadas pela letra "c " representam a relação entre o marido e sua esposa.

Perceba que de acordo com a Definição 1.22, temos que T_{17} é uma árvore que possui os vértices E, F, G, B, L, M, N, O, P, Q, K e D como folhas, pois o grau de cada um desses vértices é igual a 1 e os vértices A, H, I, C e J como nós, visto que seus graus são 5, 5, 2, 3, 3 respectivamente.

Veja também que a deleção de uma aresta, HI por exemplo, faz com que T_{17} se torne uma Floresta, de acordo a Definição 1.23. Veja também que todas as hipóteses do Teorema 1.24 são satisfeitas, pois T_{17} é uma árvore, T_{17} possui $17 - 1 = 16$ arestas e não possui ciclo, T_{17} é conexo, toda aresta de T_{17} é uma ponte, todo par de vértice de T_{17} é ligado por um único caminho e T_{17} não possui ciclos, mas a adição de uma aresta produz um único ciclo.

Capítulo 4

Conclusões

O ensino aprendizagem de matemática tem encontrado muitas dificuldades durante todo o seu processo. Encontrar uma forma de passar os conhecimentos de forma satisfatória para os seus alunos, tem sido uma busca constante dos professores, não só no ensino básico, mas em todas as etapas do ensino. Diante de um mundo movido pelas ferramentas tecnológicas, o ensino de Teoria dos Grafos, tem se tornado muito importante para que possamos conhecer um pouco do funcionamento dessas ferramentas. No funcionamento do GPS, por exemplo, utiliza-se das ideias abordadas em Teoria dos Grafos, diante de um conjunto de possibilidades, essas ferramenta busca uma melhor opção para que uma pessoa faça seu deslocamento.

Nessa pesquisa procuramos abordar o ensino de Teoria dos Grafos por meio de atividades do Programa de Enriquecimento Instrumental que a princípio não demonstrava conexão imediata com a Matemática. Assim, foi possível contribuir com fortalecimento da ideia que o Ensino de Matemática pode ser abordado de forma interdisciplinar. Nesse sentido, acreditamos que com realizações de tarefas com características similares com as que foram mostradas, o professor poderá despertar em seus alunos um conjuntos de habilidades, fazendo com que esses possam adquirir autonomia necessária para tomada de decisões futuras, não só na área de Matemática, mas em contextos diversos. Com isso, podemos destacar alguns aspectos essenciais que são desenvolvidos com atividades dessa natureza: habilidades de organização e planejamento, controle da impulsividade, desenvolvimento de uma percepcão precisa e acurada, entender a realidade baseado numa equilibrada diferenciação e integração, aplicação sistemática dos processos de análise e síntese, introdução do quadro de referência universal dos pontos cardeais, reconhecer conceitos geográficos (latitude, longitude, paralelos, meridianos) necessários para a orientação no espaço, integração dos sistemas pessoal e universal de referência espacial, diferenciar relações simétricas, assimétricas e hierárquicas, codificar e decodificar informações, pensamento analógico e inferencial baseado no raciocínio lógico.

Finalizamos com o pensamento de Reuver Feuerstein, que vê o ser humano em todas as fases da vida como um sujeito que está sempre em processo de mudança e acredita que a mediação está diretamente ligada às relações interpessoais, significados e sentidos que constituem a forma como o ser humano pensa e como age. Dessa forma, devemos pensar em uma educação que relacione de forma constante o conhecimento e o desenvolvimento humano, pois, o desenvolvimento humano assim como o conhecimento são inacabados.

Referências Bibliográficas

[1] Corrêa, R. C. R. *Uma Proposta de Reabilitação Neuropsicológica Através do Programa de Enriquecimento Instrumental (PEI)*, vol. 14. Instituto de Ciências Cognitivas, 2009.

[2] Costa, P. P. d. *Teoria dos Grafos e suas Aplicações*. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011.

[3] Da Ros, S. Z. *Pedagogia e Mediação em Reuven Feuerstein*. Plexus Editora, 2002.

[4] De Melo, G. S. *Introdução á Teoria dos Grafos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

[5] De Souza, M. S. *Aplicação da Teoria dos Grafos no Ensnio Médio a Luz das Contribuicção*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão, 2016.

[6] De Souza, S. L. A. *O Ensino de Matrizes Utilizando Teoria dos Grafos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso, Barra do Garças, 2017.

[7] Desconhecido, A. *Centro de Desenvolvimento Coognitivo*. http://www.cdcp.com.br/contato.php, Paraná, -.

[8] Ferreira, J. M., et al. *Mediação Pedagógica na Educação a Distância: Possibilidades a Partir das Contribuições da Abordagem de Reuven Feuerstein*. Universidade Federal de Uberlândia, 2010.

[9] Fino, C. M. N. *Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): Três Implicações Pedagógicas*, vol. 14. 2001.

[10] Giraffa, L. M. M. *Uma Arquitetura de Tutor Para Promover Experiências de Aprendizagem Mediadas*. Programa de Pós Graduação em Informática na Educação Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Itajaí, 2006.

[11] Jurkiewicz, S. *Grafos: Uma Introdução*. Apostila Estilo OBMEP, Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[12] Pinto, P. C. C. *Algoritmos e Grafos: Videoaula*. Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio-PAPMEM(IMPA), Rio de Janeiro, 2016.

[13] Pinto, P. C. C. *Combinatória: Videoaula.* Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio-PAPMEM(IMPA), Rio de Janeiro, 2017.

[14] Turra, N. C. *Reuven Feuerstein: Experiência de Aprendizagem Mediada: Um Salto Para a Modificabilidade Cognitiva Estrutural.* Educare et Educare: Revista de Educação, vol 2, PUC -SP, 2007.

[15] Vygotsky, L. S. *Aprendizagem e Desenvolvimento Intelectual na Idade Escolar.* _____ et al. Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem. São Paulo: Ícone: EDUSP, 1988.