SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MÁRIO HENRIQUE DA SILVA

MATERIAL MULTIMÍDIA: Resolução comentada de algumas questões do nível 2 da OBMEP sobre geometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Belém

2013

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MÁRIO HENRIQUE DA SILVA

MATERIAL MULTIMÍDIA: Resolução comentada de algumas questões do nível **2** da OBMEP sobre geometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 15/04/2013

Conceito: APROVADO

Banca examinadora

PROF. DR. JOÃO PABLO PINHEIRO DA SILVA – ORIENTADOR - UFPA

PROF. DR. JOSÉ MIGUEL MARTINS VELOSO – MEMBRO - UFPA

PROF. DR. ROBERTO CARLOS DANTAS ANDRADE – MEMBRO – ESCOLA TENENTE REGO BARROS

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Silva, Mário Henrique da, 1974-
Material multimídia: resolução comentada de algumas questões do nível 2 da obmep sobre geometria / Mário Henrique da Silva. - 2013.

Orientador: João Pablo Pinheiro da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2013.

1. Multimídia interativa. 2. Geometria-Estudo e ensino (Ensino fundamental). 3. Olimpíadas-Matemática. I. Título.
CDD 22. ed. 006.7

SUMÁRIO

RESUMO

As apresentações multimídias são as mais eficazes para garantir a percepção e o cúmulo de conhecimento. Isso porque incitam mais sentidos que as simples mídias, pois em cada momento o usuário é estimulado, em mais de um sentido, a capacidade de processamento e armazenamento das informações. As multimídias que envolvem textos, gráficos, sons, imagens, animação e outros, são muito mais dinâmicas e no contexto educacional facilitam ao aluno um melhor entendimento dos fatos desenvolvidos nas situações-problemas, promovendo meios para sua resolução. Este trabalho tem por objetivo mostrar a importância dos aspectos audiovisuais na resolução de problemas de geometria. O processo escolhido para o desenvolvimento deste trabalho foi a produção de um material multimídia com a resolução áudio visual com animações de algumas questões do nível dois de geometria das provas da 1ª a 8ª OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, elaboradas no software *Power Point*, com ênfase em animações dos elementos e figuras geométricas, e apresentadas através do software *Camtasia Studio* com a narração em vídeo.

Palavras-chave: Matemática interativa; Olimpíadas-Matemática; Audiovisual; Geometria-Estudo e ensino.

ABSTRACT

The multimedia presentations are most effective in ensuring the realization and accumulation of knowledge. That they stimulate more senses than simple media, because every time the user is encouraged in more than one sense, the capacity of processing and storage of information. The multimedia involving text, graphics, sounds, images, animation and others are much more dynamic in the educational context and facilitate the student a better understanding of the facts developed in problem situations, providing means for its resolution. This work aims to show the importance of visual aspects in solving geometry problems. The process chosen for the development of this work was the production of a multimedia material with resolution audio visual animations of some issues at level two geometry proofs of 1st to 8th OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools), developed in the software Power Point, with emphasis on animations and elements of geometric figures, and submitted using the software Camtasia Studio video with narration.

Keywords: Matemática interativa; Olimpíadas-Matemática; Audiovisual; Geometria-Estudo e ensino.

INTRODUÇÃO

O seguinte trabalho é parte constituinte de um trabalho desenvolvido por um grupo de três integrantes: Augusto Lacerda Lopes de Carvalho Júnior, Mário Henrique da Silva e Ronildo Lopes Pontes. Sendo o trabalho integral um material multimídia contendo resoluções áudio visual de quarenta e cinco questões comentadas e com animações. Este trabalho aborda sobre a resolução comentada de quinze questões de geometria das provas da 1ª a 8ª Olimpíada Brasileira de Matemáticas das Escolas Públicas – OBMEP, onde todas as questões são das provas do nível dois e da segunda fase.

As ferramentas utilizadas para a confecção do trabalho integral foram os softwares *PowerPoint* para a produção dos Slides e o *Camtasia* para a gravação dos vídeos.

Uma das ideias para a confecção deste trabalho integral veio do fato de que existem poucos materiais desse tipo, existem muitas vídeo-aulas, mas resolução áudio visual comentada e com animações encontramos poucas, principalmente em geometria. Além disso, temos os alunos, que hoje já nascem inseridos em um mundo tecnológico onde as informações são transmitidas de modo dinâmico e com diversos recursos destinados a prender sua atenção. Segundo os Parâmetros curriculares nacionais. 2. Matemática: Ensino de quinta a oitava séries

> *(...) "a atual tecnologia de produção de vídeos educativos permite que conceitos, figuras, relações, gráficos sejam apresentados de forma atrativa e dinâmica. Nos vídeos, o ritmo e a cor são fatores estéticos importantes para captar o interesse do observador. Além disso, esse tipo de recurso possibilita uma observação mais completa e detalhada na medida em que permite parar a imagem, voltar, antecipar" (Brasil, 1998, p. 46).*

A finalidade do desenvolvimento deste trabalho foi a compreensão através de alegações visualmente animadas dos conceitos e propriedades inerentes à geometria proposta pelos PCN's ao quarto ciclo do Ensino Fundamental da educação básica, pois acreditamos que nas situações-problemas geométricos o visual é fundamental no entendimento das resoluções, as quais muitas vezes não são apresentadas dessa forma nos livros didáticos. Pensou-se em disponibilizar um material audiovisual diferenciado que tornará mais prazeroso o ensino e aprendizagem dos problemas geométricos propostos na segunda fase da OBMEP.

No intuito que este trabalho sirva como um instrumento inovador na construção do conhecimento geométrico e que o mesmo seja assistido por todos os envolvidos no ensino e aprendizagem da geometria, principalmente pelos novos talentos que estão sendo revelados pela OBMEP.

METODOLOGIA

O PROFESSOR E AS NOVAS TECNOLOGIAS

Na aurora do século XXI, as escolas carecem os professores preparados para interagir com uma geração mais atualizada e mais informada, porque os modernos meios de comunicação, liderados pela Internet, permitem o acesso instantâneo à informação e os alunos têm mais facilidade para buscar conhecimento por meio da tecnologia colocada à sua disposição.

Os procedimentos didáticos, nesta nova realidade, devem privilegiar a construção coletiva dos conhecimentos mediada pela tecnologia, na qual o professor é um participante pró-ativo que intermedia e orienta esta construção.

Trata-se de uma inovação pedagógica fundamentada no construtivismo sociointeracionista que, com os recursos da informática, levará o educador a ter muito mais oportunidade de compreender os processos mentais, os conceitos e as estratégias utilizadas pelo aluno e, com esse conhecimento, mediar e contribuir de maneira mais efetiva nesse processo de construção do conhecimento, como sugere Valente, (1999,p.22).

O papel do educador está em orientar e mediar as situações de aprendizagem para que ocorra a comunidade de alunos e idéias, o compartilhamento e a aprendizagem colaborativa para que aconteça a apropriação que vai do social ao individual, como preconiza o ideário vygotskyano. O professor, pesquisando junto com os educandos, problematiza e desafia-os, pelo uso da tecnologia, à qual os jovens modernos estão mais habituados, surgindo mais facilmente a interatividade.

OS RECURSOS TECNOLÓGICOS NO PROCESSO DE MUDANÇA

Sabemos que a educação precisa ser repensada e que é preciso buscar formas alternativas para aumentar o entusiasmo do professor e o interesse do aluno. Qual o papel da tecnologia nesse processo de mudança? A aplicação inteligente da multimídea na educação é aquela que sugere mudanças na abordagem pedagógica, encaminhando os sujeitos para atividades mais criativas, críticas e de construção conjunta.

Os recursos tecnológicos facilitam a passagem do modelo mecanicista para uma educação sociointeracionista, ainda que a realização de um novo paradigma educacional dependa do projeto político-pedagógico da instituição escolar, da maneira como o professor sente a necessidade desta mudança e da forma como prepara o ambiente da aula. É importante criar um ambiente de ensino e aprendizagem instigante, que proporcione oportunidades para que seus alunos pesquisem e participem na comunidade, com autonomia.

É a partir da criteriosa escolha dos softwares educativos e da adequada utilização da Web (com todas as suas funcionalidades, entre elas o hipertexto) que podemos almejar maneiras de trabalho mais ousadas e até mais interativas. A simples ‘transmissão de conteúdos’ realizada através do computador e da Web não possibilita espaço para que o aluno crie, aprenda, produza, torne-se cidadão do mundo.

A tecnologia facilita a transmissão da informação, mas o papel do professor continua sendo fundamental na escolha e correta utilização da tecnologia, dos softwares e seus aplicativos para auxiliar o aluno a resolver problemas e realizar tarefas que exijam raciocínio e reflexão. Segundo Leite et al, temos que:

> “Diante desta realidade, torna-se necessário que as escolas passem a trabalhar visando a formação de cidadãos capazes de lidar, de modo crítico e criativo, com a tecnologia no seu dia-a-dia. Cabendo à escola esta função, ela deve utilizar como meio facilitador do processo de ensino-aprendizagem a própria tecnologia com base nos princípios da Tecnologia Educacional ((2000), p. 40).”

Diversos são os tipos de aplicativos que o professor pode escolher, dependendo dos objetivos da disciplina, conteúdo, características dos educandos e proposta pedagógica da escola. Cortelazzo (1999, p.22-23) apresenta uma classificação de softwares em: software de informação (só transmite a informação), tutorial (ensina procedimentos), de exercício e prática (exercícios de instrução programada), jogos educacionais (jogos de cunho pedagógico), simulação (simulam situações da vida real), solução de problemas (situações problemáticas para o aluno solucionar), utilitários (executam tarefas pré-determinadas), software de autoria (programas específicos), aplicativos (realizam uma tarefa com diversas operações);

enfim, é grande a lista de softwares e mídias que são simples exercícios de memória ou que auxiliam na construção contínua do sujeito individual e coletivo, mas, sobretudo colaborativo, solidário e humano.

As aulas desenvolvidas por meio do tecnológico, dos diferentes softwares poderão ser presenciais – com auxílio do professor ou de tutores – e a distância.

A importância da utilização dos recursos virtuais no ensino presencial, quando em alguns momentos/etapas possa haver interatividade virtual, por meio do correio eletrônico. Muitos professores já recebem trabalhos dos alunos virtualmente, avaliam e enviam a avaliação por e-mail ou utilizam os recursos da Internet para pesquisa. Um início de autonomia e independência acontece quando os alunos trabalham nos computadores da escola sem a presença do professor e orientados por tutores.

Este trabalho foi desenvolvido pensando no aluno que além de ver as animações das figuras geométricas, para as resoluções das questões propostas nas provas da OBMEP, ele terá uma narração em áudio para auxiliar o entendimento das soluções. As ferramentas utilizadas para a confecção do trabalho integral foram os softwares *PowerPoint* para a produção dos Slides e o *Camtasia* para a gravação dos vídeos.

A ideia principal para a confecção deste trabalho integral veio com a oportunidade de trabalharmos com um grupo de alunos selecionados das escolas públicas que trabalhamos e que as atividades trabalhadas usando alguma mídia eletrônica, os alunos tiveram uma maior participação e entendimento, pois eles já estão inseridos em um mundo tecnológico onde as informações são transmitidas de modo dinâmico.

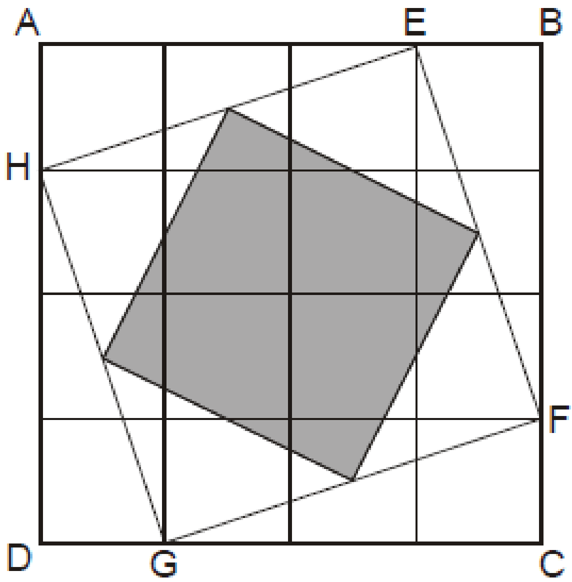
Temos assim um instrumento inovador na construção do conhecimento geométrico do aluno e que sirva como fonte inspiradora para profissionais da educação para que estes produzam suas mídias, pensando sempre em um melhor aprendizado para nossos educandos.

QUESTÔES

Nessa seção apresentamos as quinze questões e resoluções desenvolvidas por este trabalho que é componente de um trabalho integral do material multimídia contendo resoluções áudio visual de questões comentadas e com animações, nas quais foram retiradas das provas da 1ª a 8ª Olimpíada Brasileira de Matemáticas das Escolas Públicas – OBMEP, onde todas as questões foram retiradas das provas do nível dois e da segunda fase.

QUESTÃO 1 (OBMEP – 2005)

O quadrado $\boldsymbol{ABCD}$ da figura está dividido em $\mathbf{16}$ quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado $\boldsymbol{EFGH}$.

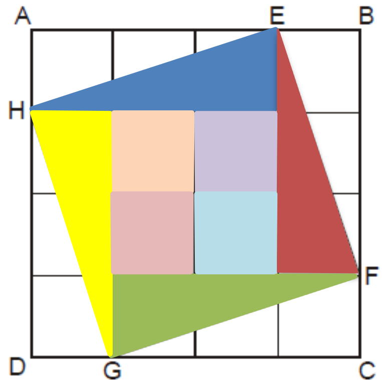


(a) A área do quadrado $\boldsymbol{EFGH}$ corresponde a que fração da área do quadrado $\boldsymbol{ABCD}$?

(b) Se o quadrado $\boldsymbol{ABCD}$ tem $\mathbf{80}\,\boldsymbol{cm^2}$ de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

Resolução – Item (a)

O quadrado $\boldsymbol{EFGH}$ é formado por quatro triângulos e quatro quadradinhos, como mostra a figura abaixo.



Consideremos que cada quadradinho tenha uma unidade de área ($\mathbf{1}$ $\boldsymbol{u.a.}$), assim:

Área dos quatro quadradinhos $= \mathbf{4} \times \mathbf{1} = \mathbf{4}\ \boldsymbol{u.a.}$

Cada um dos triângulos tem área igual à metade da área de três quadradinhos.

Área de um triângulo = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times \mathbf{3} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{u.a.}$

Área dos quatro triângulos = $\mathbf{4} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} = \mathbf{6}\ \boldsymbol{u.a.}$

Área do quadrado $\boldsymbol{EFGH} = \mathbf{4} + \mathbf{6} = \mathbf{10}\ \boldsymbol{u.a.}$

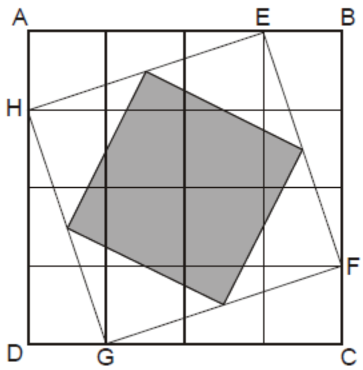
Área do quadrado $\boldsymbol{ABCD} = \mathbf{16}\ \boldsymbol{u.a.}$

Portanto:

$$\frac{\textbf{Área do quadrado EFGH}}{\textbf{Área do quadrado ABCD}} = \frac{\mathbf{10}\ \boldsymbol{u.a.}}{\mathbf{16}\ \boldsymbol{u.a.}} = \boxed{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}}$$

Resolução – Item (b)

Observe que a área da região sombreada é a metade da área do quadrado $\boldsymbol{EFGH}$.



Pelo item anterior temos que:

Área do quadrado $\boldsymbol{EFGH} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$ da Área do quadrado $\boldsymbol{ABCD}$

Área do quadrado $\boldsymbol{EFGH} = \frac{5}{8} \times \mathbf{80} = \mathbf{50}\ \boldsymbol{cm^2}$

Área sombreada = $\frac{1}{2}$ da Área do quadrado $\boldsymbol{EFGH}$

Área sombreada = $\frac{1}{2} \times \mathbf{50} = \mathbf{25}\ \boldsymbol{cm^2}$

Portanto o lado do quadrado sombreado é igual a:

$$\sqrt{\boldsymbol{área\ do\ quadrado}} = \sqrt{\mathbf{25}} = \boxed{\mathbf{5}\ \boldsymbol{cm}}$$

QUESTÃO 2 (OBMEP – 2005)

A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em $\mathbf{9}$ quadrados de lados $\mathbf{1}$, $\mathbf{4}$, $\mathbf{7}$, $\mathbf{8}$, $\mathbf{9}$, $\mathbf{10}$, $\mathbf{14}$, $\mathbf{15}$ e $\mathbf{18}$ centímetros.

(a) Qual era a área da folha antes de ser cortada?

(b) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?

(c) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Resolução – Item (a)

A área da folha antes de ser cortada é igual a soma das áreas dos quadrados formados e como a área de um quadrado é igual ao quadrado do lado $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}^{\mathbf{2}}$, temos:

Área do quadrado de lado $\mathbf{1} = \mathbf{1^2} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do quadrado de lado $\mathbf{4} = \mathbf{4^2} = \mathbf{16}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do quadrado de lado $\mathbf{7} = \mathbf{7^2} = \mathbf{49}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do quadrado de lado $\mathbf{8} = \mathbf{8^2} = \mathbf{64}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do quadrado de lado $\mathbf{9} = \mathbf{9^2} = \mathbf{81}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do quadrado de lado $\mathbf{10} = \mathbf{10^2} = \mathbf{100}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do quadrado de lado $\mathbf{14} = \mathbf{14^2} = \mathbf{196}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do quadrado de lado $\mathbf{15} = \mathbf{15^2} = \mathbf{225}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do quadrado de lado $\mathbf{18} = \mathbf{18^2} = \mathbf{324}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Portanto a área ($\boldsymbol{A}$) da folha antes de ser cortada é a soma destes resultados:

$$\boldsymbol{A = 1 + 16 + 49 + 64 + 81 + 100 + 196 + 225 + 324}$$

$$\boldsymbol{A = \boxed{1056\ cm^2}}$$

Resolução – Item (b)

Como a folha era retangular e a área ($\boldsymbol{A}$) de um retângulo é o produto entre a base($\boldsymbol{b}$) e a altura($\boldsymbol{h}$), isto é, $\boldsymbol{A = b \times h}$. Então fatorando $\mathbf{1056}$, que era a área da folha antes de ser cortada (solução do item a), temos:

$$\begin{array}{r|l}
\mathbf{1056} & \mathbf{2} \\
\mathbf{528} & \mathbf{2} \\
\mathbf{264} & \mathbf{2} \\
\mathbf{132} & \mathbf{2} \\
\mathbf{66} & \mathbf{2} \\
\mathbf{33} & \mathbf{3} \\
\mathbf{11} & \mathbf{11} \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{2^5 \times 3^1 \times 11^1}
\end{array}$$

Assim temos que $\boldsymbol{b \times h} = \mathbf{2^5 \times 3 \times 11}$

Os possíveis pares de fatores que o produto é $\mathbf{1056}$, são:

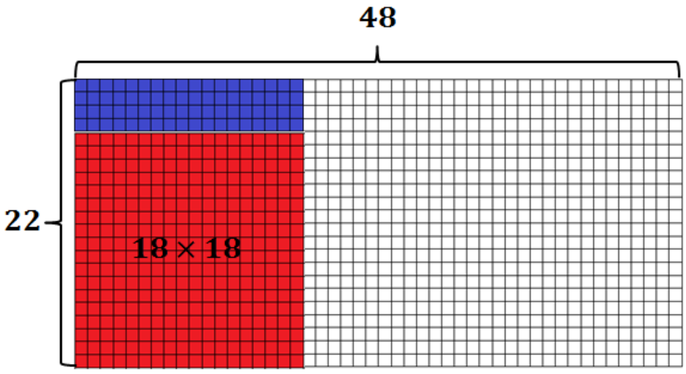
$\mathbf{(1) \times (2^5.3.11) = 1 \times 1056}$	$\mathbf{(3) \times (2^5.11) = 3 \times 352}$
$\mathbf{(2) \times (2^4.3.11) = 2 \times 528}$	$\mathbf{(2.3) \times (2^4.11) = 6 \times 176}$
$\mathbf{(2^2) \times (2^3.3.11) = 4 \times 264}$	$\mathbf{(2^2.3) \times (2^3.11) = 12 \times 88}$
$\mathbf{(2^3) \times (2^2.3.11) = 8 \times 132}$	$\mathbf{(2^3.3) \times (2^2.11) = 24 \times 44}$
$\mathbf{(2^4) \times (2.3.11) = 16 \times 66}$	$\mathbf{(2^4.3) \times (2.11) = 48 \times 22}$
$\mathbf{(2^5) \times (3.11) = 32 \times 33}$	$\mathbf{(2^5.3) \times (11) = 96 \times 11}$

Como o quadrado de lado $\mathbf{18}$ fazia parte da folha, então nenhum dos lados do retângulo é menor que $\mathbf{18}$, assim temos que eliminar os produtos que possui fatores menores que $\mathbf{18}$.

Assim:

$$\boldsymbol{b \times h = 22 \times 48\ ou\ 24 \times 44\ ou\ 32 \times 33}$$

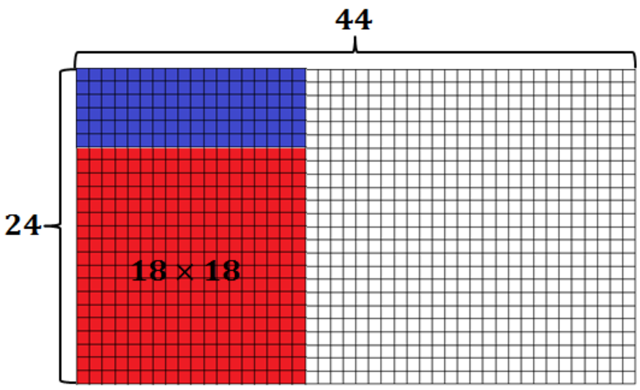
Observe quando se coloca o quadrado de lado $\boldsymbol{18\ cm}$ na primeira possibilidade.



O espaço em azul, não pode ser preenchido (sem sobra) com os quadrados de lados $\mathbf{1}$, $\mathbf{4}$, $\mathbf{7}$, $\mathbf{8}$, $\mathbf{9}$, $\mathbf{10}$, $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ $\boldsymbol{cm}$.

$$\boldsymbol{b \times h = \cancel{22 \times 48}\ ou\ 24 \times 44\ ou\ 32 \times 33}$$

Observe quando se coloca o quadrado de lado $\mathbf{18}$ $\boldsymbol{cm}$ na segunda possibilidade.



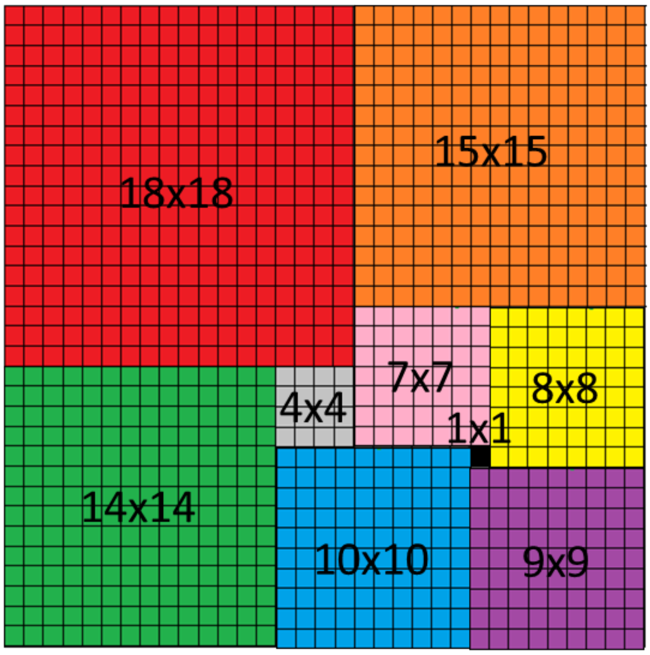
O espaço em azul, não pode ser preenchido (sem sobra) com os quadrados de lados $\mathbf{1}$, $\mathbf{4}$, $\mathbf{7}$, $\mathbf{8}$, $\mathbf{9}$, $\mathbf{10}$, $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ $\boldsymbol{cm}$.

$$\boldsymbol{b \times h = \cancel{22 \times 48}\ ou\ \cancel{24 \times 44}\ ou\ 32 \times 33}$$

Portanto as medidas da folha antes de ser cortada só podem ser:

$$\boxed{\boldsymbol{32\ cm\ por\ 33cm}}$$

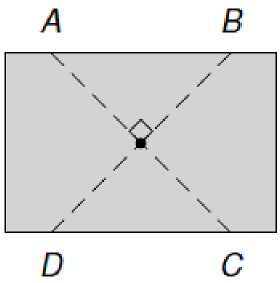
Resolução – Item (c)



QUESTÃO 3 (OBMEP – 2006)

Uma folha retangular de $\mathbf{20}\,\boldsymbol{cm}$ por $\mathbf{30}\,\boldsymbol{cm}$ foi cortada ao longo das linhas tracejadas $\boldsymbol{AC}$ e $\boldsymbol{BD}$ em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na $\boldsymbol{figura\ I}$.

I

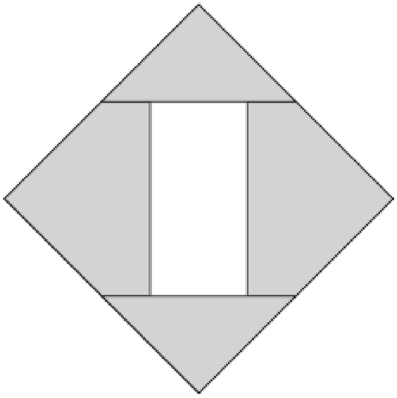


Os segmentos $\boldsymbol{AC}$ e $\boldsymbol{BD}$ têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.

(a) Qual é o comprimento do segmento $\boldsymbol{AB}$?

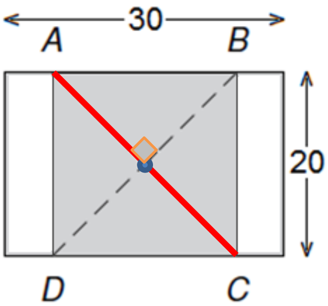
(b) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?

(c) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na $\boldsymbol{figura\ II}$. Qual é a área do buraco?



Resolução – item (a)

Consideremos o quadrilátero $\boldsymbol{ABCD}$. Agora é só verificar que o quadrilátero $\boldsymbol{ABCD}$ na figura abaixo é um quadrado. Para isso basta observar que as diagonais são:



• De mesma medida ($\boldsymbol{AC = BD}$)

• Se cortam ao meio (pois se encontram no centro do retângulo)

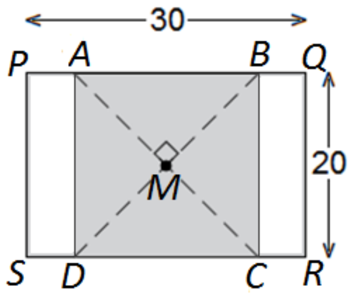
• São perpendiculares (pois formam um ângulo reto)

Como o quadrilátero $\boldsymbol{ABCD}$ é um quadrado e $\boldsymbol{BC = 20\ cm}$, então:

$$\boldsymbol{AB = BC = \boxed{20\ cm}}$$

Resolução – item (b)

Considerando $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$ os vértices do retângulo e $\boldsymbol{M}$ o centro do retângulo, como mostra a figura abaixo.



Temos que as áreas dos triângulos $\boldsymbol{ABM}$, $\boldsymbol{BCM}$, $\boldsymbol{CDM}$ e $\boldsymbol{DAM}$ são iguais a $\mathbf{1/4}$ da área do quadrado $\boldsymbol{ABCD}$.

Área do quadrado $\boldsymbol{ABCD} = \mathbf{20 \times 20 = 400}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do triângulo $\boldsymbol{ABM} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \times \mathbf{400} = \boxed{\mathbf{100}\ \boldsymbol{cm^2}.}$

Área do retângulo $\boldsymbol{PQRS} = \mathbf{30 \times 20 = 600}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Como a área do retângulo $\boldsymbol{ADSP}$ é a metade da diferença entre as áreas do retângulo $\boldsymbol{PQRS}$ e do quadrado $\boldsymbol{ABCD}$, assim:

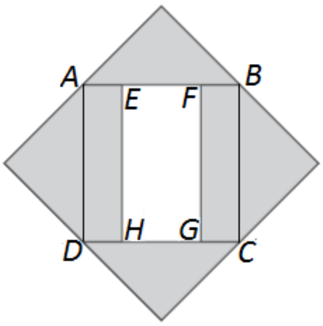
Área do retângulo $\boldsymbol{ADSP} = \frac{\mathbf{600-400}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{200}}{\mathbf{2}} = \mathbf{100}\ \boldsymbol{cm^2}$.

Área do pentágono $\boldsymbol{AMDSP}$ é igual à soma das áreas do retângulo $\boldsymbol{ADSP}$ e do triângulo $\boldsymbol{AMD}$ (que tem a mesma área do triângulo $\boldsymbol{ABM}$), portanto:

Área do pentágono $\boldsymbol{AMDSP} = \mathbf{100 + 100} = \boxed{\mathbf{200}\ \boldsymbol{cm^2}.}$

Resolução – item (c)

Inicialmente identificaremos alguns pontos na figura abaixo, assim como construiremos os segmentos $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{BC}$.



Os lados $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{CD}$ e $\boldsymbol{DA}$, pelo Item (a), medem $\mathbf{20}\ \boldsymbol{cm}$ e os retângulos $\boldsymbol{AEHD}$ e $\boldsymbol{BCGF}$, pelo Item (b), possuem áreas iguais a $\mathbf{100}\ \boldsymbol{cm^2}$.

A área do retângulo $\boldsymbol{EFGH}$ é igual à área do quadrado $\boldsymbol{ABCD}$ subtraída das áreas dos retângulos $\boldsymbol{AEHD}$ e $\boldsymbol{BCGF}$, assim:

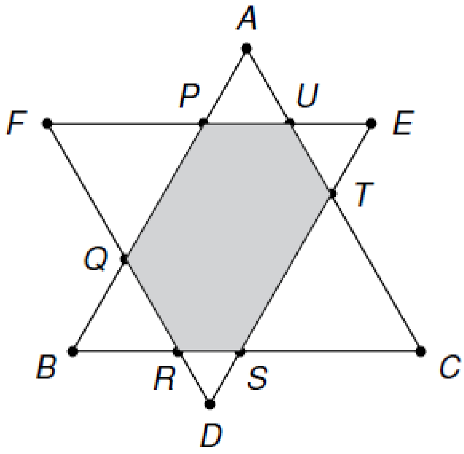
Área do retângulo $\boldsymbol{EFGH} = \mathbf{20 \times 20 - 100 - 100}$

Área do retângulo $\boldsymbol{EFGH} = \mathbf{400} - \mathbf{100} - \mathbf{100}$

Área do retângulo $\boldsymbol{EFGH} = \boxed{\mathbf{200}\ \boldsymbol{cm}^{\mathbf{2}}.}$

QUESTÃO 4 (OBMEP – 2006)

Na figura, os triângulos $\boldsymbol{ABC}$ e $\boldsymbol{DEF}$ são equiláteros de lados $\mathbf{14}\ \boldsymbol{cm}$ e $\mathbf{13}\ \boldsymbol{cm}$, respectivamente, e os lados $\boldsymbol{BC}$ e $\boldsymbol{EF}$ são paralelos.



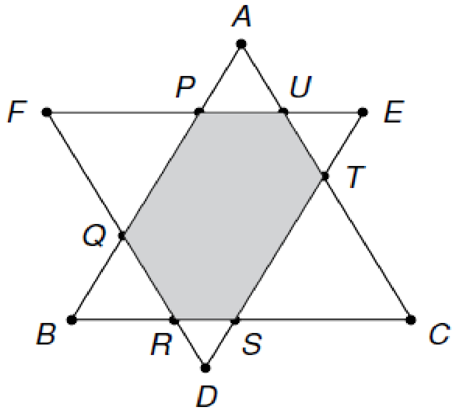
(a) Calcule a medida do ângulo $\boldsymbol{EUT}$.

(b) Calcule o perímetro do polígono $\boldsymbol{PQRSTU}$.

(c) Se o segmento $\boldsymbol{PQ}$ mede $\mathbf{6}\ \boldsymbol{cm}$, qual é a medida do segmento $\boldsymbol{ST}$?

Resolução – item (a)

Como a soma dos internos de um triângulo é $\mathbf{180}°$ e o triângulo $\boldsymbol{ABC}$ é equilátero, seus ângulos internos possuem a mesma medida, então temos que cada ângulo interno do triângulo $\boldsymbol{ABC}$ é igual a $\frac{\mathbf{180}°}{\mathbf{3}} = \mathbf{60}°$.



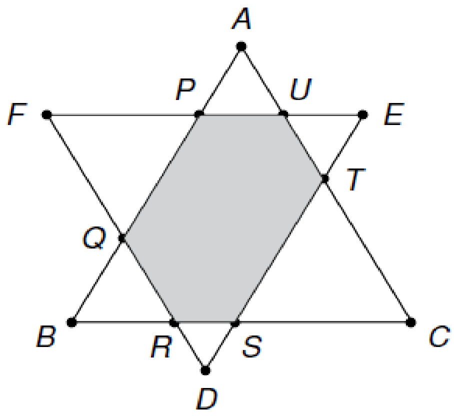
Como os segmentos $\boldsymbol{BC}$ e $\boldsymbol{EF}$ são paralelos e $\boldsymbol{AC}$ um segmento transversal a eles, então $\boldsymbol{E\hat{U}T}$ e $\boldsymbol{\hat{C}}$ são ângulos alternos internos, portanto são congruentes.

Logo

$$\boldsymbol{E\hat{U}T} = \boldsymbol{\hat{C}} = \boxed{\mathbf{60°}}$$

Resolução – item (b)

Como visto no item anterior $\boldsymbol{E\hat{U}T} = \mathbf{60°}$, e sabendo que os triângulos $\boldsymbol{ABC}$ e $\boldsymbol{DEF}$ são equiláteros, então cada um dos ângulos $\boldsymbol{\hat{A}}$, $\boldsymbol{\hat{B}}$, $\boldsymbol{\hat{C}}$, $\boldsymbol{\hat{D}}$, $\boldsymbol{\hat{E}}$ e $\boldsymbol{\hat{F}}$ medem $\mathbf{60°}$.



No triângulo $\boldsymbol{EUT}$ temos dois ângulos internos que medem $\mathbf{60°}$ e como a soma dos ângulos internos em um triângulo é sempre $\mathbf{180°}$.

$$\mathbf{60°} + \mathbf{60°} + \boldsymbol{E\hat{T}U} = \mathbf{180°}$$

$$\boldsymbol{E\hat{T}U} = \mathbf{180°} - \mathbf{60°} - \mathbf{60°} = \mathbf{60°}$$

Deste modo o triângulo $\boldsymbol{EUT}$ é equilátero, pois $\boldsymbol{\hat{E}}$, $\boldsymbol{E\hat{U}T}$ e $\boldsymbol{E\hat{T}U}$ possuem a mesma medida. Os ângulos $\boldsymbol{E\hat{U}T}$ e $\boldsymbol{A\hat{U}P}$ são ângulos opostos pelo vértice, logo possuem a mesma medida, $\mathbf{60°}$.

Analogamente, temos que os ângulos $A\hat{P}U$, $F\hat{P}Q$, $F\hat{Q}P$, $B\hat{Q}R$, $B\hat{R}Q$, $D\hat{R}S$, $D\hat{S}R$, $C\hat{S}T$ e $C\hat{T}S$ medem $60°$. Assim os triângulos APU, FPQ, BQR, DRS e CST também são equiláteros, logo possuem os seus lados com as mesmas medidas, Então:

$$EU = TU,\ SC = ST,\ PF = PQ \text{ e } BR = QR$$

Como $BC = 14\ cm$ e $EF = 13\ cm$, temos que o perímetro de $PQRSTU$ é dado por:

$$QR + RS + ST + TU + UP + PQ = BC + EF$$

$$QR + RS + ST + TU + UP + PQ = 14 + 13$$

$$QR + RS + ST + TU + UP + PQ = \boxed{27\ cm}$$

Resolução – item (c)

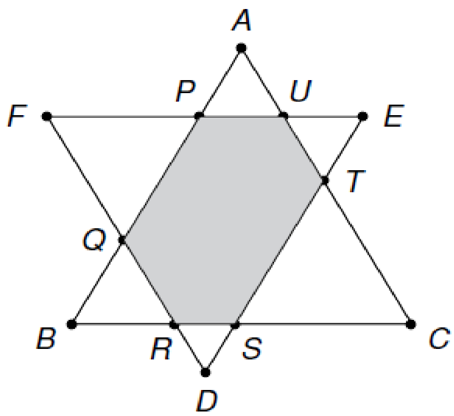
Temos que $PF = PQ = 6\ cm$, pois FPQ é um triângulo equilátero. Deste modo:

$$EP = EF - PF$$

$$EP = 13 - 6 = 7\ cm$$

Como BC é paralelo a EF (pelo enunciado) e AB é paralelo a DE, pois $B = CST = 60°$. Então $BSEP$ é um paralelogramo, assim $BS = EP = 7\ cm$.

Observando a figura, temos que $SC = BC - BS$, Logo $SC = 14 - 7 = 7\ cm$.

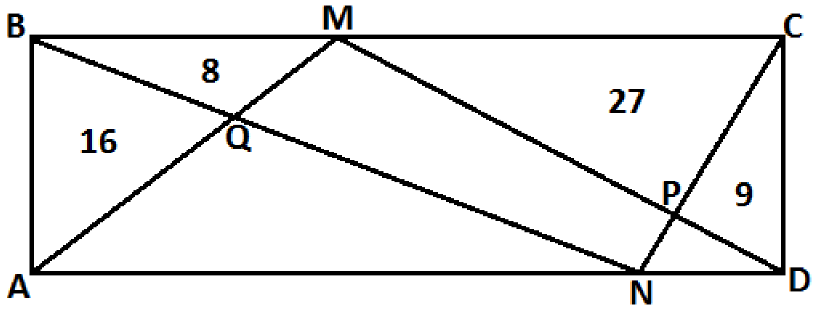


Finalmente, como o triângulo CST é equilátero, temos que:

$$ST = SC = \boxed{7\ cm}$$

QUESTÃO 5 (OBMEP – 2007)

Na figura $ABCD$ é um retângulo, M e N são pontos nos lados BC e AD, respectivamente, e os números representam as áreas dos triângulos ABQ, BQM, MPC e CPD em cm^2.



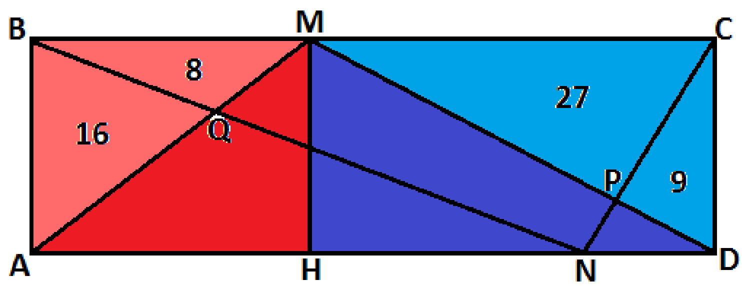
(a) Qual é a área do triângulo $\boldsymbol{AMD}$? Por quê?

(b) Calcule a soma das áreas dos triângulos $\boldsymbol{AQN}$ e $\boldsymbol{NPD}$.

(c) Calcule a área do quadrilátero $\boldsymbol{MPNQ}$.

Resolução – item (a)

Traçando a altura do triângulo $\boldsymbol{AMD}$, e considerado $\boldsymbol{H}$, como a intercessão dessa altura com o segmento $\boldsymbol{AD}$.



Observe que $\boldsymbol{AM}$ divide o retângulo $\boldsymbol{ABMH}$ ao meio, assim como $\boldsymbol{MD}$ divide o retângulo $\boldsymbol{CDHM}$ ao meio.

Portanto:

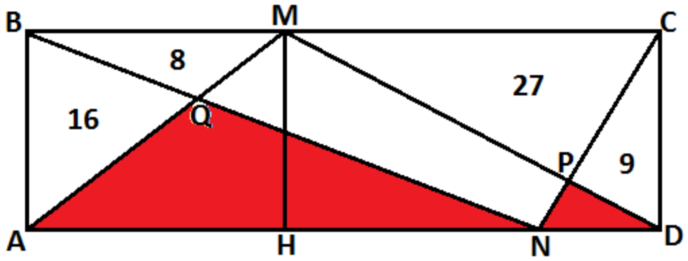
Área $(\boldsymbol{AMD})$ = Área $(\boldsymbol{AHM})$ + Área $(\boldsymbol{DHM})$

Área $(\boldsymbol{AMD})$ = Área $(\boldsymbol{ABM})$ + Área $(\boldsymbol{DCM})$

Área $(\boldsymbol{AMD}) = (\boldsymbol{8+16}) + (\boldsymbol{27+9}) = \boxed{\boldsymbol{60\ cm^2}.}$

Resolução – item (b)

Observe inicialmente que os triângulos $\boldsymbol{AMD}$ e $\boldsymbol{BCN}$ possuem a mesma área, pois possuem a mesma medida de base e altura.



Assim:

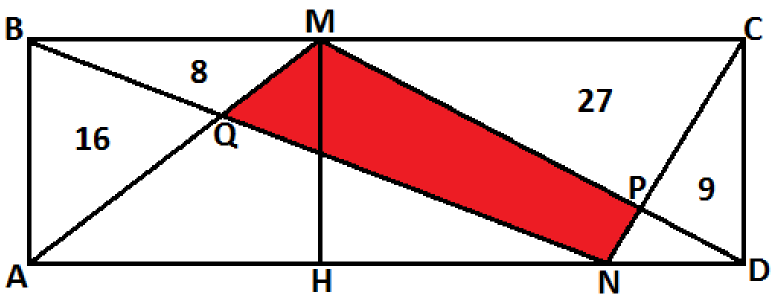
Área $(\boldsymbol{AQN})$ + Área $(\boldsymbol{NPD})$ = Área $\boldsymbol{AMD}-$ Área $(\boldsymbol{MPNQ})$

Área $(\boldsymbol{AQN})$ + Área $(\boldsymbol{NPD})$ = Área $\boldsymbol{BCN}-$ Área $(\boldsymbol{MPNQ})$

Área $(\boldsymbol{AQN})$ + Área $(\boldsymbol{NPD})$ = Área $\boldsymbol{BMQ}+$ Área $(\boldsymbol{CMP})$

Área $(\boldsymbol{AQN})$ + Área $(\boldsymbol{NPD})$ $= \mathbf{8 + 27} \boxed{= \mathbf{35}\ \boldsymbol{cm}^{\mathbf{2}}}$

Resolução – item (c)



Como:

Área $\boldsymbol{AMD} = \mathbf{60}\ \boldsymbol{cm}^{\mathbf{2}}$ (item a)

Área $\boldsymbol{AQN}+$ Área $\boldsymbol{NPD} = \mathbf{35}\boldsymbol{cm}^{\mathbf{2}}$ (item b)

Observando a figura, temos que:

Área $\boldsymbol{MPNQ}$ = Área $\boldsymbol{AMD}$ − [Área $\boldsymbol{AQN}$ + Área $\boldsymbol{NPD}$]

Área $\boldsymbol{MPNQ} = \mathbf{60 - 35}$

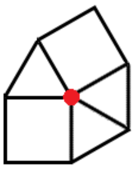
Área $\boldsymbol{MPNQ} \boxed{= \mathbf{25}\ \boldsymbol{cm}^{\mathbf{2}}}$

QUESTÃO 6 (OBMEP – 2007)

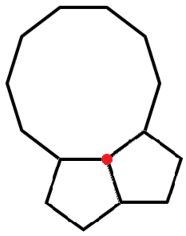
(a) Complete a tabela abaixo, lembrando que a soma de todos os ângulos internos de um polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados é $(\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \times \mathbf{180}$°.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
$\mathbf{3}$	$\mathbf{180}°$	$\mathbf{60}°$
$\mathbf{4}$	$\mathbf{360}°$	$\mathbf{90}°$
$\mathbf{5}$		
$\mathbf{6}$		
$\mathbf{8}$		

Dizemos que três ou mais polígonos regulares se encaixam se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



Três triângulos e dois quadrados



Um decágono e dois pentágonos

(b) Um quadrado e dois octógonos (polígonos regulares de oito lados) se encaixam? Justifique sua resposta.

(c) Um triângulo equilátero, um heptágono (polígono regular de sete lados) e um outro polígono se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

Resolução – item (a)

Como a soma de todos os ângulos internos de um polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados é $(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \times \mathbf{180}°$, então:

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
$\mathbf{3}$	$\mathbf{180°}$	$\mathbf{60°}$
$\mathbf{4}$	$\mathbf{360°}$	$\mathbf{90°}$
$\mathbf{5}$	$\mathbf{540°}$	$\mathbf{108°}$
$\mathbf{6}$	$\mathbf{720°}$	$\mathbf{120°}$
$\mathbf{8}$	$\mathbf{1080°}$	$\mathbf{135°}$

Para obter o valor de cada ângulo interno, basta dividir a soma de todos os ângulos pela quantidade de ângulos.

Resolução – item (b)

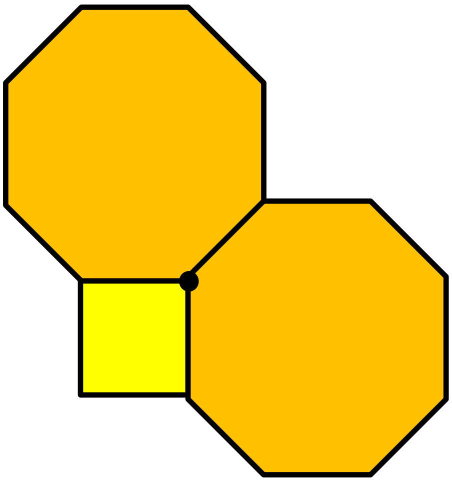
Observe parte da tabela do item (a)

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
$\mathbf{4}$	$\mathbf{360°}$	$\mathbf{90°}$
$\mathbf{8}$	$\mathbf{1080°}$	$\mathbf{135°}$

Somando um ângulo interno de um quadrado ($\mathbf{4}$ lados) e dois ângulos internos de um octógono ($\mathbf{8}$ lados), temos:

$$\mathbf{90°} + \mathbf{135°} + \mathbf{135°} = \mathbf{360°} \text{ (uma volta)}$$

Portanto um quadrado e dois octógonos se encaixam.



Resolução – item (c)

A soma dos ângulos internos de um heptágono regular é:

$$\mathbf{(7-2)\times 180^\circ = 5\times 180^\circ = 900^\circ}$$

então o ângulo interno de um heptágono regular é:

$$\mathbf{900^\circ \div 7 = \frac{900^\circ}{7}}$$

e temos que ângulo interno de um triângulo equilátero é $\mathbf{60^\circ}$.

Seja $\boldsymbol{x}$ o ângulo do polígono regular que se quer encontrar, então:

$$\mathbf{60^\circ + \frac{900^\circ}{7} + \boldsymbol{x} = 360^\circ}$$

$$\mathbf{\boldsymbol{x} = 360^\circ - 60^\circ - \frac{900^\circ}{7} = \frac{1200^\circ}{7}}$$

Como o ângulo interno de um polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados, é dado por $\mathbf{\frac{(\boldsymbol{n}-2)\times 180^\circ}{\boldsymbol{n}}}$, então:

$$\mathbf{\frac{(\boldsymbol{n}-2)\times 180^\circ}{\boldsymbol{n}} = \frac{1200^\circ}{7}}$$

$$\mathbf{(\boldsymbol{n}-2).1260^\circ = 1200^\circ.\boldsymbol{n}}$$

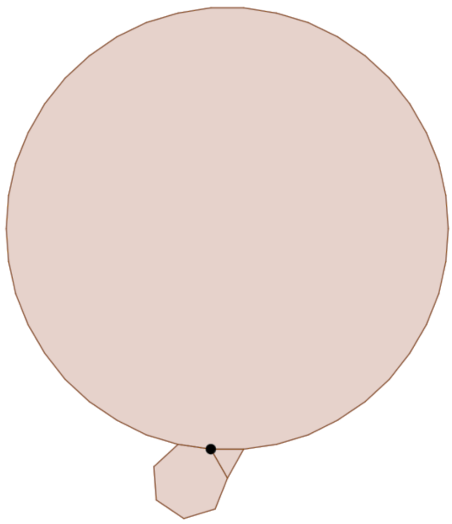
$$\mathbf{1260^\circ.\boldsymbol{n} - 2520^\circ = 1200^\circ.\boldsymbol{n}}$$

$$\mathbf{1260^\circ.\boldsymbol{n} - 1200^\circ.\boldsymbol{n} = 2520^\circ}$$

$$\mathbf{60^\circ.\boldsymbol{n} = 2520^\circ}$$

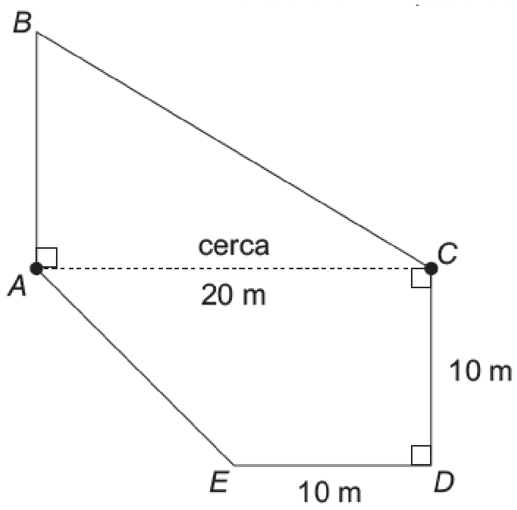
$$\mathbf{\boldsymbol{n} = \frac{2520^\circ}{60^\circ} = 42}$$

Portanto o polígono regular que se encaixa com um triângulo equilátero e um heptágono possui $\boxed{\mathbf{42}\text{ lados.}}$



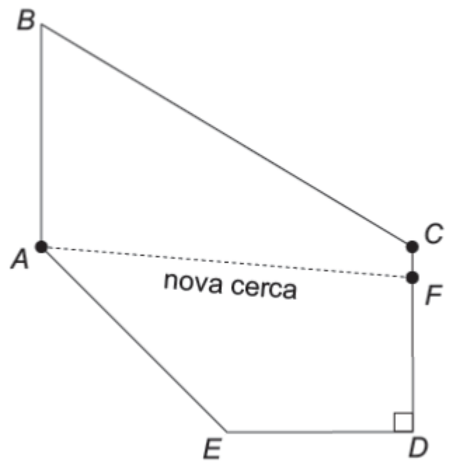
QUESTÃO 7 (OBMEP – 2008)

A figura abaixo representa o terreno de Sinhá Vitória. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a $\mathbf{120}\ \boldsymbol{m^2}$.



(a) Qual é a área total do terreno?

(b) Sinhá Vitória quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser à distância CF?



Resolução – item (a)

A parte poligonal $ACDE$ é um trapézio retângulo e como a área (A) do trapézio é a metade da soma das bases (B e b) multiplicado pela altura (h), isto é $\mathbf{A} = \frac{(B+b)}{2} \times \boldsymbol{h}$.

Área $(\mathbf{ACDE}) = \frac{(\mathbf{20+10})}{\mathbf{2}} \times \mathbf{10} = \mathbf{15} \times \mathbf{10} = \mathbf{150}$

Como a área do terreno é a soma da parte triangular $\boldsymbol{ABC}$ com a parte quadrangular (trapézio), então:

Área $(\mathbf{ABCDE})$ = Área $(\mathbf{ABC})$ + Área $(\mathbf{ACDE})$

Área $(\boldsymbol{ABCDE}) = \mathbf{120} + \mathbf{150}$

Área $(\mathbf{ABCDE}) = \boxed{\mathbf{270}\ \boldsymbol{m^2}.}$

Resolução – item (b)

Como:

Área $(\boldsymbol{ABCDE})$ = $\mathbf{270}\ \boldsymbol{m^2}$ e a área do quadrilátero $\boldsymbol{ABCF}$ é a metade, então:

Área $(\boldsymbol{ABCF}) = \frac{\mathbf{270}}{\mathbf{2}} = \mathbf{135}\ \boldsymbol{m^2}$

Assim a área do triângulo $\boldsymbol{ACF}$ é dada por:

Área $(\boldsymbol{ACF})$ = Área $(\boldsymbol{ABCF})$ − Área $(\boldsymbol{ABC})$

$$\frac{\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{CF}}{\mathbf{2}} = \mathbf{135} - \mathbf{120}$$

$$\frac{\mathbf{20} \times \boldsymbol{CF}}{\mathbf{2}} = \mathbf{15}$$

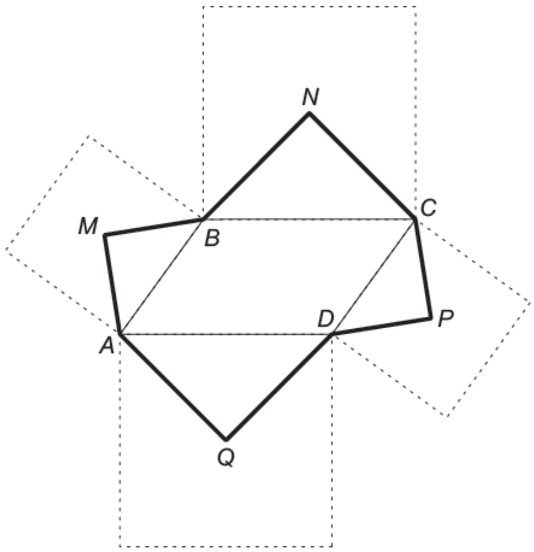
$$\mathbf{10}.\boldsymbol{CF} = \mathbf{15}$$

$$\boldsymbol{CF} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{10}}$$

$$\boldsymbol{CF} = \boxed{\mathbf{1,5}\ \boldsymbol{m}}$$

QUESTÃO 8 (OBMEP – 2008)

Na figura, $\boldsymbol{ABCD}$ é um paralelogramo de área $\mathbf{20}\ \boldsymbol{cm^2}$ e lados medindo $\mathbf{4}\ \boldsymbol{cm}$ e $\mathbf{6}\ \boldsymbol{cm}$. Os pontos $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo.



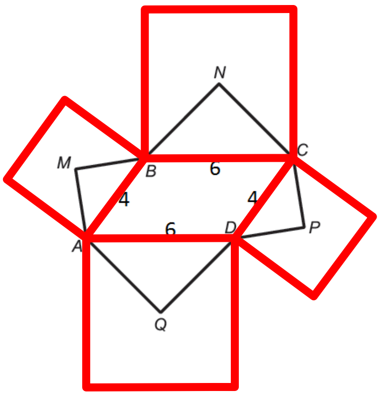
(a) Calcule a área do polígono $\boldsymbol{AMBNCPDQ}$.

(b) Mostre que os ângulos $\mathbf{M}\boldsymbol{A}\mathbf{Q}$ e $\mathbf{M}\boldsymbol{B}\mathbf{N}$ têm a mesma medida.

(c) Mostre que $\boldsymbol{MNPQ}$ é um quadrado e calcule sua área.

Resolução – item (a)

Observe na figura abaixo que os quadrados são de lados $\mathbf{4}$ ou $\mathbf{6}$ centímetros.



Como os pontos $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ são os centros dos quadrados temos que os triângulos $\boldsymbol{ABM}$, $\boldsymbol{BCN}$, $\boldsymbol{CDP}$ e $\boldsymbol{DAQ}$ são a quarta parte das áreas de seus respectivos quadrados. E temos ainda que a área do paralelogramo é igual a $\mathbf{20}\ \boldsymbol{cm^2}$ (enunciado). Assim:

A área($\boldsymbol{ABM}$) e a área($\boldsymbol{CDP}$) são iguais a:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \times \mathbf{4^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \times \mathbf{16} = \mathbf{4}\ \boldsymbol{cm^2}$$

Enquanto a área($\boldsymbol{BCN}$) e a área($\boldsymbol{DAQ}$) são iguais a:

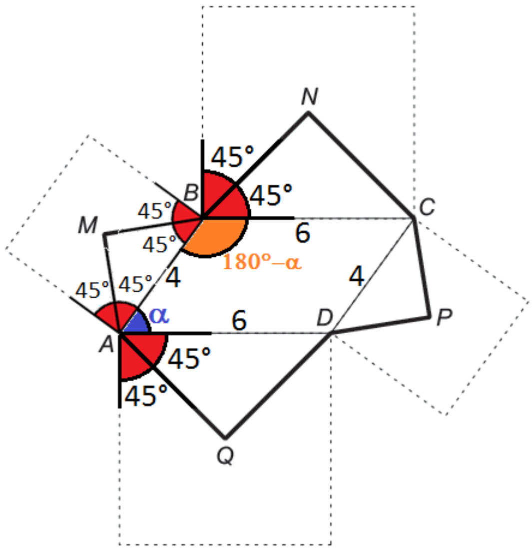
$$\frac{1}{4}\times 6^2 = \frac{1}{4}\times 36 = 9\ cm^2$$

Portanto:

Área($\boldsymbol{AMBNCPDQ}$) = $\mathbf{20+4+4+9+9} = \boxed{\mathbf{46\ cm^2}}$

Resolução – item (b)

Observe na figura abaixo os ângulos $\boldsymbol{D\hat{A}Q}$, $\boldsymbol{M\hat{A}B}$, $\boldsymbol{M\hat{B}A}$ e $\boldsymbol{N\hat{B}C}$ são de $\mathbf{45°}$, pois cada um é a metade do ângulo interno de um quadrado ($\mathbf{90°}$).



Chamando de $\boldsymbol{\alpha}$ o ângulo $\boldsymbol{B\hat{A}D}$ e como o polígono $\boldsymbol{ABCD}$ é um paralelogramo, então:

$$\boldsymbol{\alpha + A\hat{B}C = 180°}$$

$$\boldsymbol{A\hat{B}C = 180° - \alpha}$$

Assim temos que

$$\boldsymbol{M\hat{B}N + 45° + 180° - \alpha + 45° = 360°}$$

$$\boldsymbol{M\hat{B}N = 360° - 45° - 180° + \alpha - 45°}$$

$$\boldsymbol{M\hat{B}N = 90° + \alpha}$$

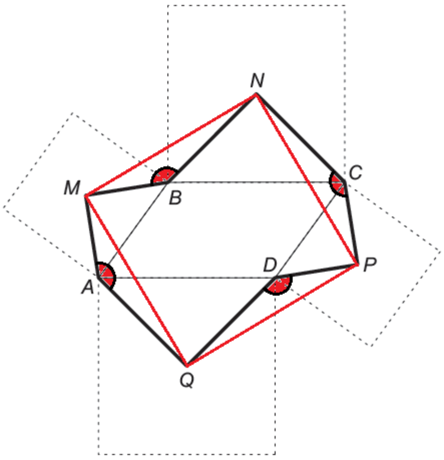
$$\boldsymbol{M\hat{B}N = 45° + 45° + \alpha} \text{ e } \boldsymbol{M\hat{A}Q = 45° + \alpha + 45°}$$

Portanto: $\boxed{\boldsymbol{M\hat{B}N = M\hat{A}Q}}$

Resolução – item (c)

De modo análogo ao item (b) pode-se mostrar que

$$\boldsymbol{M\hat{A}Q = M\hat{B}N = P\hat{D}Q = P\hat{C}N}$$



Temos também que

$$AM = BM = CP = DP$$

pois todos são a metade da diagonal do quadrado de lado $4\ cm$. De mesma forma temos que $BN = CN = AQ = DQ$, pois todos são a metade da diagonal do quadrado de lado $6\ cm$.

Logo os triângulos AMQ, BMN, CNP e DPQ são congruentes, por Lado-Ângulo-Lado (LAL).

Com isso

$$MN = NP = PQ = QM$$

$$A\hat{Q}M = B\hat{N}M = C\hat{N}P = D\hat{Q}P$$

e

$$AMQ = BMN = CPN = DPQ$$

Como visto no item(b), que $M\hat{A}B = M\hat{B}A = 45°$, então $A\hat{M}B = 90°$ (a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$). Assim:

$$N\hat{M}Q = Q\hat{M}B + B\hat{M}N$$

$$N\hat{M}Q = A\hat{M}Q + Q\hat{M}B$$

$$N\hat{M}Q = Q\hat{M}B + A\hat{M}Q$$

$$N\hat{M}Q = A\hat{M}B = 90°$$

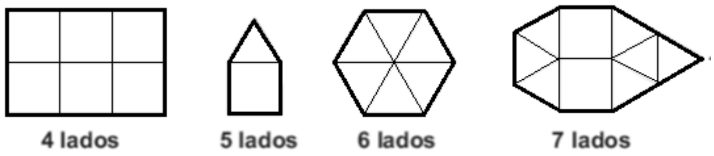
Analogamente temos que $P\hat{N}M = Q\hat{P}N = M\hat{Q}P = 90°$

Como o polígono $MNPQ$ possui os quatro lados com a mesma medida e os ângulos internos retos ($90°$), logo ele é um quadrado.

Temos que os triângulos AMQ, BMN, CNP e DPQ são congruentes, Observe na figura que a área do quadrado $MNPQ$ é igual à área do polígono $AMBNCPDQ$, que é $\boxed{46\ cm^2.}$

QUESTÃO 9 (OBMEP – 2009)

Um polígono convexo é elegante quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. Abaixo, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.



Em um polígono convexo todos os ângulos internos são menores que $\mathbf{180°}$.

(a) Desenhe um polígono elegante de $\mathbf{8}$ lados, indicando uma decomposição.

(b) Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?

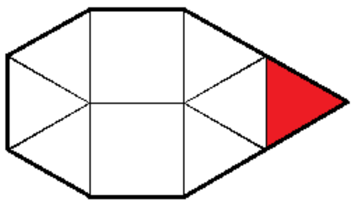
(c) Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que $\mathbf{12}$ lados.

A soma dos ângulos internos de um polígono de $\boldsymbol{n}$ lados é $(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \times \mathbf{180°}$.

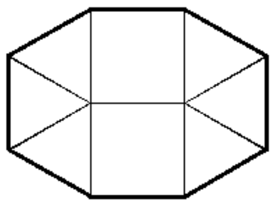
(d) Desenhe um polígono elegante de $\mathbf{12}$ lados, indicando uma decomposição.

Resolução – item (a)

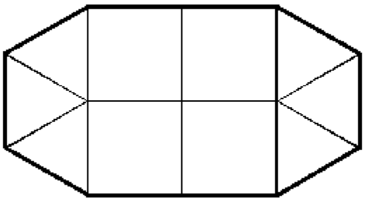
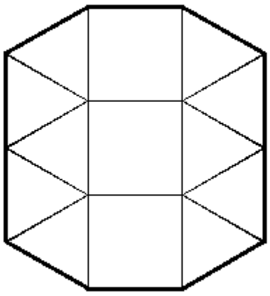
Vamos tomar como referência a figura de sete lados do exemplo



Retirando o triângulo vermelho temos um polígono elegante de $\mathbf{8}$ lados.



Obs. É claro que existem outras soluções, como por exemplo:

Resolução – item (b)

Como um polígono elegante é convexo e é formado colocando lado a lado quadrados (que possui ângulos internos iguais a $\mathbf{90}$°) e triângulos equiláteros (que possui ângulos internos iguais a $\mathbf{60}$°), então seus ângulos são somas de parcelas iguais a $\mathbf{60}$° ou $\mathbf{90}$° que sejam menores que $\mathbf{180}$°. Assim temos somente as seguintes possibilidades:

$$\mathbf{60}°,\ \mathbf{90}°,\ \mathbf{120}° = \mathbf{60}° + \mathbf{60}° \text{ e } \mathbf{150}° = \mathbf{90}° + \mathbf{60}°$$

Portanto as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante são: $\boxed{\mathbf{60}°,\ \mathbf{90}°,\ \mathbf{120}° \text{ e } \mathbf{150}°.}$

Resolução – item (c)

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono com $\boldsymbol{n}$ lados é $(\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \times \mathbf{180}$°. Por outro lado, vimos no item (b) que o maior valor possível do ângulo interno de um polígono elegante é $\mathbf{150}$°; logo, a soma dos ângulos internos de um polígono elegante de $\boldsymbol{n}$ lados é no máximo $\boldsymbol{n} \times \mathbf{150}$°. Temos então:

$$\mathbf{180} \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) = \mathbf{150} \times \boldsymbol{n}$$

$$\mathbf{180}.\boldsymbol{n} - \mathbf{360} = \mathbf{150}.\boldsymbol{n}$$

$$\mathbf{180}.\boldsymbol{n} - \mathbf{150}.\boldsymbol{n} = \mathbf{360}$$

$$\mathbf{30}.\boldsymbol{n} = \mathbf{360}$$

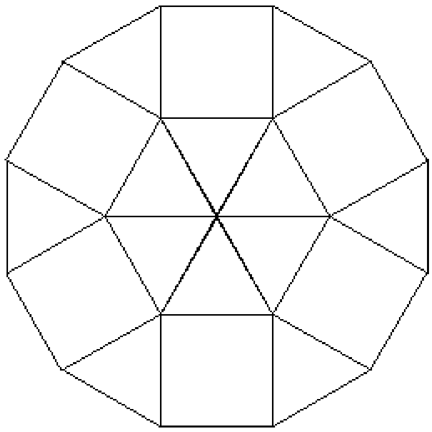
$$\boldsymbol{n} = \mathbf{12}$$

Portanto um polígono elegante não pode ter mais que $\boxed{\mathbf{12} \text{ lados.}}$

Resolução – item (d)

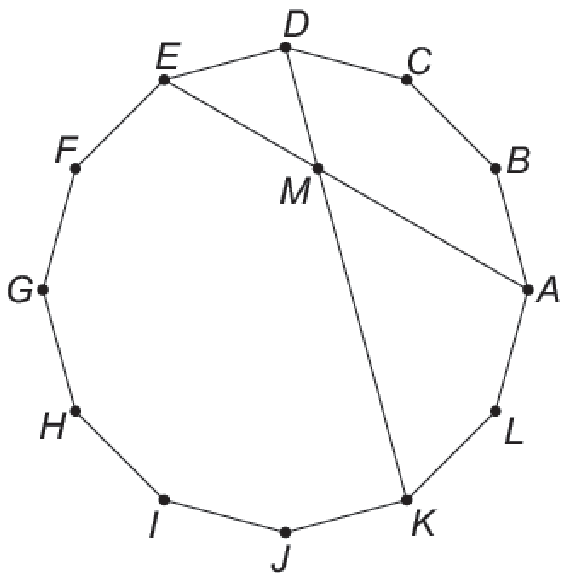
Pela resolução do item (c), para que o polígono elegante tenha $\mathbf{12}$ lados, temos que todos os ângulos internos são iguais a $\mathbf{150}$° ($\mathbf{90}$°+$\mathbf{60}$°), assim a parte externa é formada por sequência de um quadrado seguido de um triângulo equilátero.

A parte interior da figura é um hexágono regular, que pode ser formado por seis triângulos equiláteros, como mostra a figura abaixo.



QUESTÃO 10 (OBMEP – 2009)

O polígono $ABCDEFGHIJKL$ é regular e tem doze lados.



Em um polígono regular todos os lados têm o mesmo comprimento e todos os ângulos internos têm a mesma medida.

(a) Qual é a medida dos ângulos internos do polígono?

(b) O ponto M é a interseção dos segmentos AE e DK. Quais são as medidas dos ângulos $\mathbf{M\hat{D}E}$ e $\mathbf{D\hat{M}E}$?

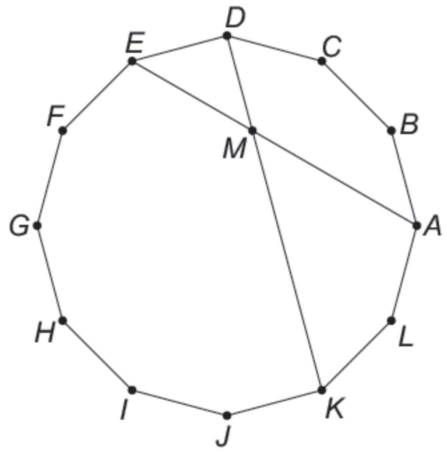
(c) Qual é a medida do ângulo $\mathbf{C\hat{B}M}$?

(d) Prove que os pontos $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{F}$ estão alinhados.

Resolução – item (a)

Lembrando que a soma de todos os ângulos internos de um polígono de $\boldsymbol{n}$ lados é $(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \times \mathbf{180°}$, temos então que a soma dos ângulos internos do polígono $\boldsymbol{ABCDEFGHIJKL}$ é:

$$\mathbf{(12-2) \times 180° = 10 \times 180° = 1800°}$$



Como o polígono é regular, temos que todos os ângulos internos têm a mesma medida, logo cada ângulo interno mede:

$$\mathbf{1800° \div 12 =} \boxed{\mathbf{150°}}$$

Resolução – item (b)

A medida do ângulo $\boldsymbol{E\hat{A}B} = \boldsymbol{A\hat{E}D}$ (por simetria) e lembrando-se da soma dos ângulos internos do polígono de cinco lados $\boldsymbol{AEDCB}$, temos:

$$\boldsymbol{A\hat{E}D + \hat{D} + \hat{C} + \hat{B} + E\hat{A}B = 5 - 2 \times 180°}$$

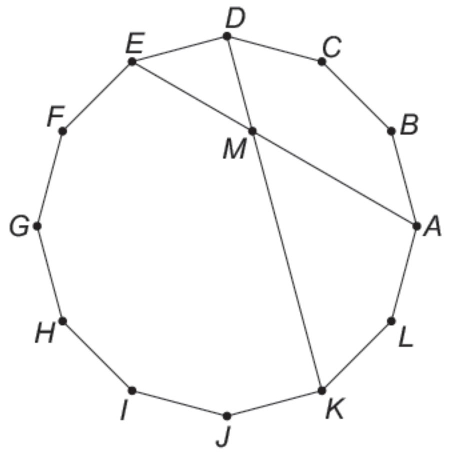
$$\boldsymbol{A\hat{E}D + 150° + 150° + 150° + A\hat{E}D = 3 \times 180°}$$

$$\boldsymbol{2 \times A\hat{E}D = 540° - 150° - 150° - 150°}$$

$$\boldsymbol{2 \times A\hat{E}D = 90°}$$

$$\boldsymbol{A\hat{E}D = 45°}$$

Analogamente, temos que $\boldsymbol{K\hat{D}C} = \boldsymbol{D\hat{K}L}$ (por simetria) e pela soma dos ângulos internos do polígono de seis lados $\boldsymbol{DCBALK}$, temos:



$$\boldsymbol{K\hat{D}C + \hat{C} + \hat{B} + \hat{A} + \hat{L} + D\hat{K}L = 6 - 2 \times 180°}$$

$$\boldsymbol{K\hat{D}C + (4 \times 150°) + K\hat{D}C = 4 \times 180°}$$

$$\boldsymbol{2 \times K\hat{D}C = 720° - 600°}$$

$$\boldsymbol{2 \times K\hat{D}C = 120°}$$

$$\boldsymbol{K\hat{D}C = 60°}$$

Como $\boldsymbol{M\hat{D}E + K\hat{D}C = \hat{D}}$ e $\boldsymbol{\hat{D}}$=$\boldsymbol{150°}$, pelo item (a)

$$\boldsymbol{M\hat{D}E + 60° = 150°} \Rightarrow \boldsymbol{M\hat{D}E = \boxed{90°}}$$

Pelo Triângulo $\boldsymbol{DEM}$, temos que:

$$\boldsymbol{D\hat{M}E + M\hat{D}E + M\hat{E}D = 180°}$$

$$\boldsymbol{D\hat{M}E + M\hat{D}E + A\hat{E}D = 180°}$$

$$\boldsymbol{D\hat{M}E + 90° + 45° = 180°}$$

$$\boldsymbol{D\hat{M}E = 180° - 90° - 45°}$$

$$\boxed{\boldsymbol{D\hat{M}E = 45°}}$$

Resolução – item (c)

Como o triângulo $\boldsymbol{EDM}$ tem dois ângulos de $\boldsymbol{45°}$, ele é isósceles; logo $\boldsymbol{MD = DE}$, ou seja, $\boldsymbol{MD}$ tem a mesma medida que os lados do polígono e pelo item (b) temos que $\boldsymbol{M\hat{D}C = 60°}$. Segue que o triângulo $\boldsymbol{MDC}$ é equilátero. Em particular, temos $\boldsymbol{M\hat{C}D = 60°}$. E segue que:

$$\boldsymbol{B\hat{C}M + M\hat{C}D = B\hat{C}D}$$

$$\boldsymbol{B\hat{C}M + 60° = 150°}$$

$$\boldsymbol{B\hat{C}M = 150° - 60°}$$

$$\boldsymbol{B\hat{C}M = 90°}$$

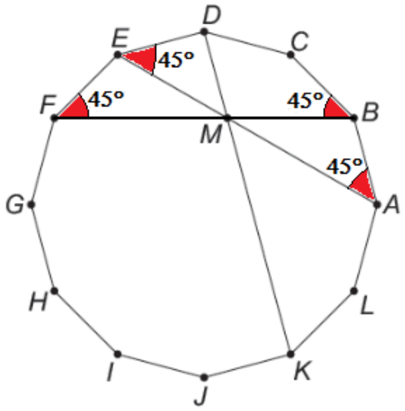
Finalmente, como $\boldsymbol{MC}$=$\boldsymbol{CB}$ e o triângulo $\boldsymbol{MCB}$ é isósceles, então:

$$\widehat{CBM} = \widehat{BMC} = \frac{180° - \widehat{BCM}}{2}$$

$$\widehat{CBM} = \frac{180° - 90°}{2}$$

$$\widehat{CBM} = \boxed{45°}$$

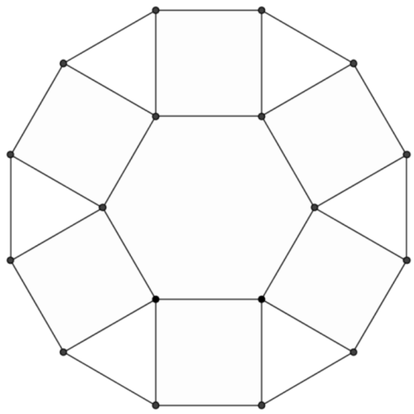
Resolução – item (d)



O polígono $ABCDEFGHIJKL$ é regular, então os polígonos $ABCDE$ e $BCDEF$ são congruentes. Pelo item (b), temos que $\widehat{CBM} = 45°$ e por essa congruência temos $\widehat{CBF} = 45°$, Portanto os pontos B, M e F estão alinhados.

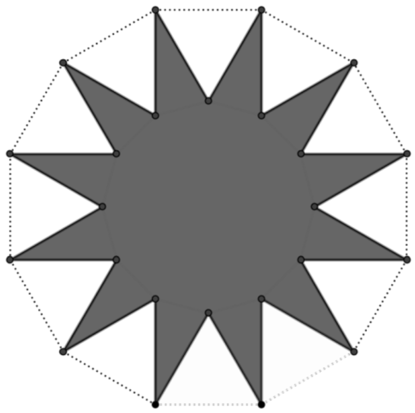
QUESTÃO 11 (OBMEP – 2010)

A figura mostra um dodecágono regular decomposto em seis triângulos equiláteros, seis quadrados e um hexágono regular, todos com lados de mesma medida.

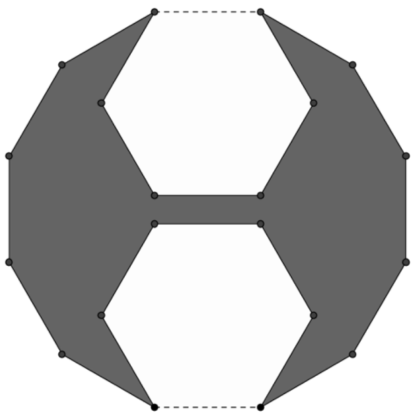


(a) Se cada triângulo da figura tem área igual a $1cm^2$, qual é a área do hexágono?

(b) A figura abaixo foi obtida retirando doze triângulos equiláteros de um dodecágono regular cujo lado mede $\mathbf{1}\boldsymbol{cm}$. Qual é a área dessa figura?

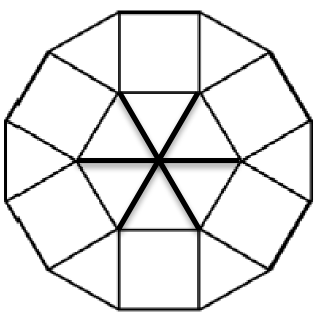


(c) A figura abaixo foi obtida retirando dois hexágonos regulares de um dodecágono regular cujo lado mede $\mathbf{1}\boldsymbol{cm}$. Qual é a área dessa figura?



Resolução – item (a)

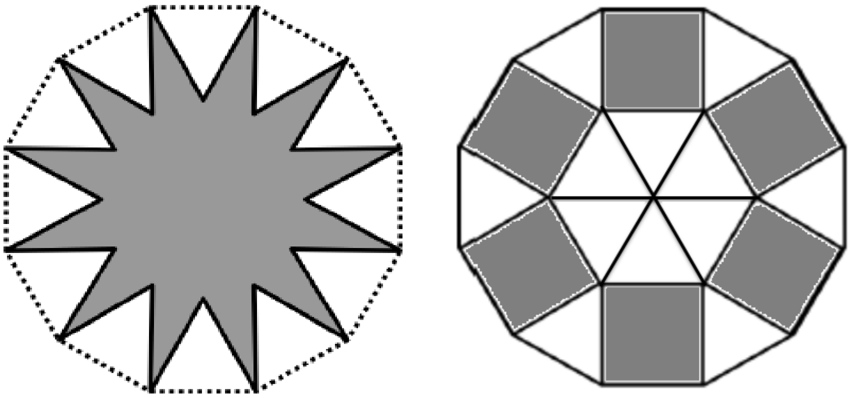
Ligando os vértices opostos do hexágono temos seis triângulos. Os triângulos são côngruos aos triângulos iniciais, pois são equiláteros de lado $\mathbf{1}\ \boldsymbol{cm}$.



Como cada triângulo da figura tem área igual a $\mathbf{1}\boldsymbol{cm^2}$, e o hexágono é formado por seis triângulos, então a área do hexágono é $\boxed{\mathbf{6}\ \boldsymbol{cm^2}.}$

Resolução – item (b)

Observe que, conforme o item (a), a figura inicial pode ser representada por seis quadrados e doze triângulos equiláteros, cujos lados são iguais $\mathbf{1}\boldsymbol{cm}$.



Assim, retirando doze triângulos equiláteros da figura inicial restarão apenas seis quadrados de lado $\mathbf{1}\boldsymbol{cm}$. Logo a região estrelar tem a mesma área dos seis quadrados.

Portanto

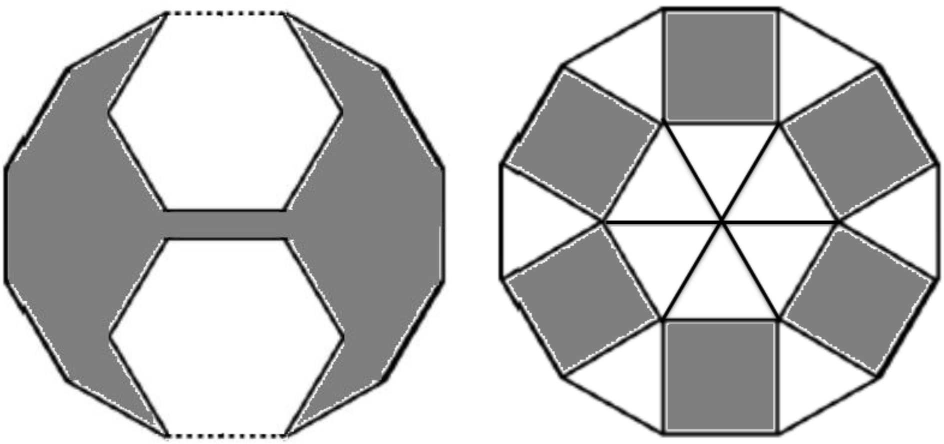
Área do quadrado = $\mathbf{1^2} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{cm^2}$

Área da estrela = $\mathbf{6}\times$ Área do quadrado

Área da estrela = $\mathbf{6}\times\mathbf{1} = \boxed{\mathbf{6}\ \boldsymbol{cm^2}.}$

Resolução – item (c)

Conforme o item (a), cada hexágono pode ser decomposto seis triângulos equiláteros, logo a figura a esquerda pode ser obtida do dodecágono retirando-se doze triângulos equiláteros.



Analogamente ao item (b), a região a esquerda tem a mesma área dos seis quadrados.

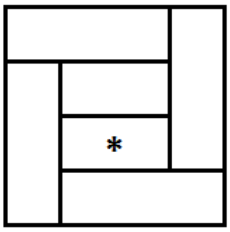
Portanto: Área = $\boxed{\mathbf{6}\ \boldsymbol{cm^2}}$

QUESTÃO 12 (OBMEP – 2011)

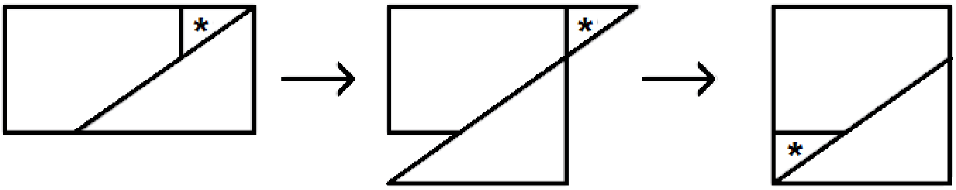
Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

(a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de $\mathbf{36 cm^2}$ de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.

(b) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de $\mathbf{36\ cm^2}$ de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.

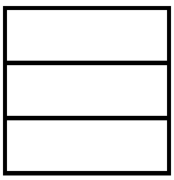


(c) As medidas da terceira tira eram $\mathbf{4{,}5\ cm}$ e $\mathbf{2\ cm}$. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com *?



Resolução – item (a)

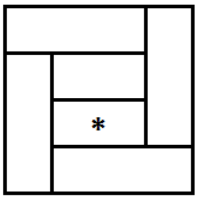
Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área igual a $\mathbf{36cm^2}$, seu lado mede $\sqrt{\mathbf{36}} = \mathbf{6\ cm}$.



Logo o comprimento dos retângulos é $\boxed{\mathbf{6\ cm}}$ e sua largura é um terço de seu comprimento, ou seja, $\boxed{\mathbf{2\ cm.}}$

Resolução – item (b)

Como o quadrado tem $36\ cm^2$ de área, então a medida do lado é $6\ cm$ como na figura. Devido a altura do quadrado ser formado por quatro larguras iguais, então cada largura mede $6 \div 4 = 1,5\ cm$.



E a base é formada por duas larguras da tira e o comprimento do retângulo com *, deste modo temos que o comprimento deste retângulo é $6 - 1,5 - 1,5 = 3cm$. Portanto:

o perímetro do retângulo com * é:

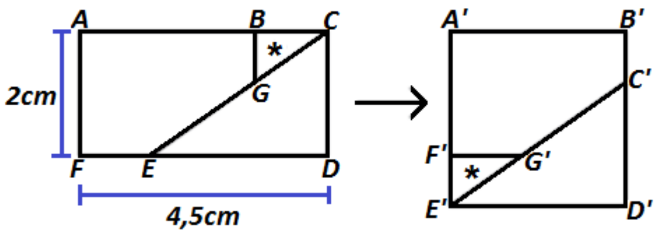
$P = 3+3+1,5+1,5 = \boxed{9\ cm}$

a área do retângulo com * é:

$A = 3 \times 1,5 = \boxed{4,5\ cm^2}$

Resolução – item (c)

Primeiro identificaremos alguns pontos nas figuras.



Pelo retângulo temos a tira cujas medidas eram $4,5cm$ e $2cm$, logo sua área era $4,5 \times 2 = 9\ cm^2$. E como o quadrado possui a mesma área, logo seu lado mede $3cm$. Deste modo $A'B' = AB = 3\ cm$ e como $AC = 4,5\ cm$, temos $BC = AC - AB = 4,5 - 3 = 1,5\ cm$.

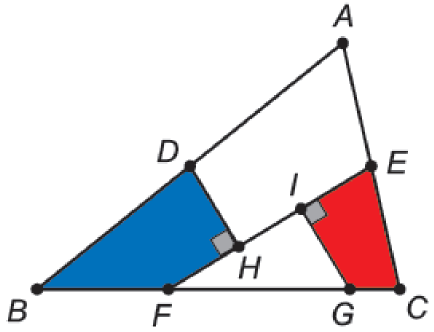
Assim como $A'E' = 3cm$ e como $A'F' = AF = 2cm$, temos $BG = E'F' = A'E' - A'F' = 3 - 2 = 1\ cm$.

Portanto a área do triângulo indicado por * é:

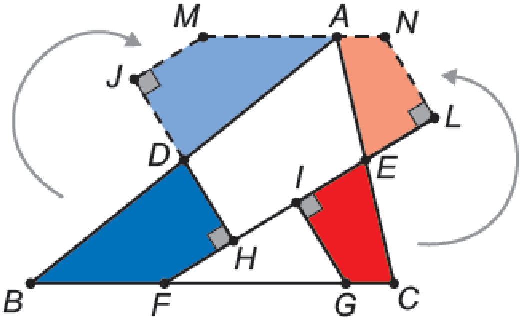
$$A = \frac{Base \times Altura}{2} = \frac{1,5 \times 1}{2} = \frac{1,5}{2} = \boxed{0,75\ cm^2}$$

QUESTÃO 13 (OBMEP – 2011)

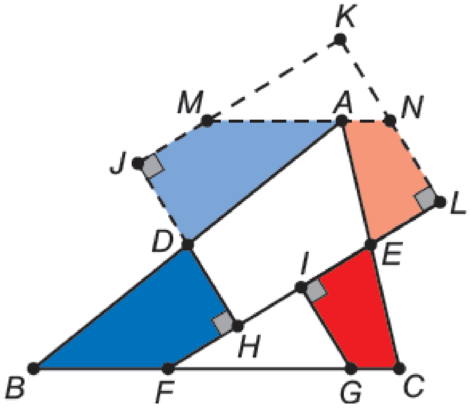
Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB, E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}BC$.



(a) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando $180°$ os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a $180°$.



(b) Na figura, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



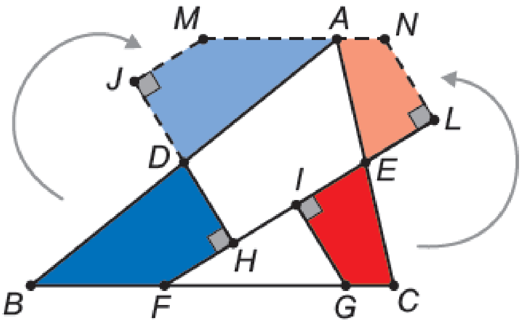
Neste item mostra que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido.

(c) Mostre que $LH=EF$.

(d) Na figura o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.

Resolução – item (a)

Pela rotação dos quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ temos que $C\hat{B}A = M\hat{A}B$ e $A\hat{C}B = C\hat{A}N$, e pelo triângulo ABC temos que $C\hat{B}A + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 180°$.



Logo $M\hat{A}N = M\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}N = 180°$. Portanto os pontos M, A e N estão alinhados.

Resolução – item (b)

Pela rotação dos quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ temos que $C\hat{G}I = A\hat{N}L$, $B\hat{F}H = J\hat{M}A$ e como JK, LK e BC são segmentos, então

$$K\hat{N}M = I\hat{G}F \text{ e } K\hat{M}N = I\hat{F}G.$$

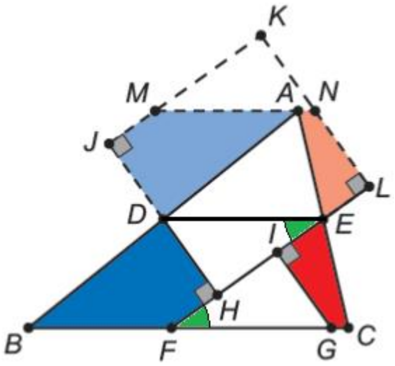
Sabendo que $\mathbf{FG}$ é a metade de BC, temos que $BF + GC$ é a outra metade de BC e pela rotação dos quadriláteros, temos que $MA = BF$ e $AN = GC$, logo $MN = MA + AN = BF + GC = FG$ (metade de BC).

Deste modo: $K\hat{N}M = I\hat{G}F$, $K\hat{M}N = I\hat{F}G$ e $MN = FG$.

Portanto os triângulos FGI e MNK são congruentes por Ângulo-Lado-Ângulo (A.L.A.)

Resolução – item (c)

Traçando a base média DE do triângulo ABC.



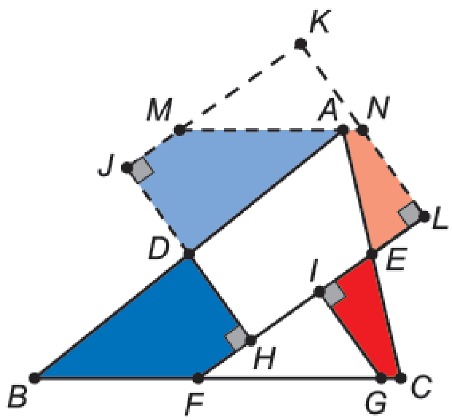
O teorema da base média nos diz que DE é paralelo a BC e que $DE = \frac{1}{2} BC = FG$.

Segue que os triângulos FGI e EHD são congruentes, pois são retângulos, tem os ângulos verdes congruentes (pois são agudos de lados paralelos) e hipotenusas congruentes. Em particular, temos $FI = EH$, e como $FH + HI = FI = EH = HI + IE \Rightarrow FH = IE = LE$.

Logo $LH = LE + EH = FH + HE = EF$.

Resolução – item (d)

Sabendo que $HJKL$ é um quadrado e pelo item (b) ele possui a mesma área do triângulo ABC, cuja área é 9.



Então o lado do quadrado LH mede 3 e pelo item (c) temos que $EF = LH$, logo o comprimento de EF mede $\boxed{3.}$

QUESTÃO 14 (OBMEP – 2012)

Uma folha de papel quadrada de área $16\ cm^2$, branca de um lado e cinza de outro, foi dobrada como indicado abaixo. O ponto O é o centro do quadrado e M é o ponto médio do segmento AB.

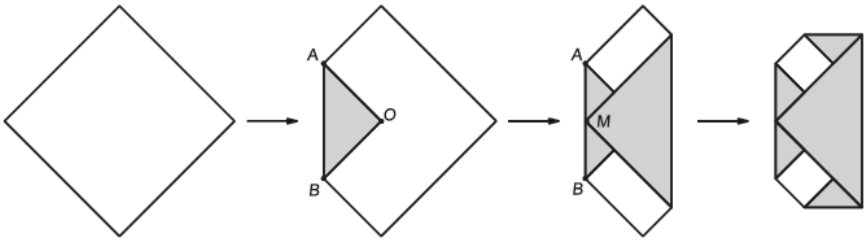


Figura I Figura II Figura III

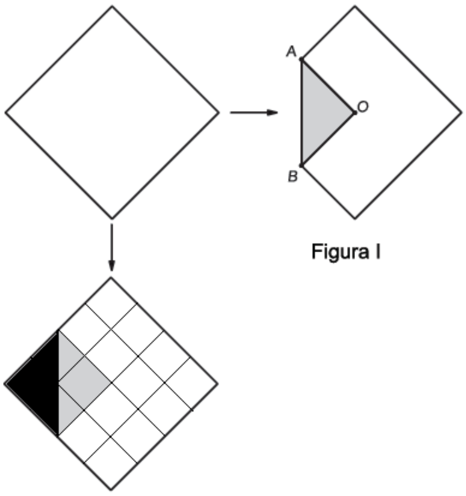
(a) Qual é a área da região branca na $\boldsymbol{Figura\ I}$?

(b) Qual é a área da região branca na $\boldsymbol{Figura\ II}$?

(c) Qual é a área da região branca na $\boldsymbol{Figura\ III}$?

Resolução – item (a)

Sabendo que a folha de papel é quadrada de área $\mathbf{16}\ \boldsymbol{cm^2}$. Então cada lado mede $\mathbf{4}$ $\boldsymbol{cm}$, portanto iremos dividir a folha em $\mathbf{16}\ (\mathbf{4} \times \mathbf{4})$ quadradinhos de $\mathbf{1}\ \boldsymbol{cm^2}$.



A área da região branca na $\boldsymbol{figura\ I}$ é equivalente a $\mathbf{12}$ quadradinhos.

Assim a área da região branca na $\boldsymbol{figura\ I}$ mede $\boxed{\mathbf{12}\ \boldsymbol{cm^2}.}$

Resolução – item (b)

A área da região branca na $\boldsymbol{figura\ II}$ é equivalente a $\mathbf{4}$ quadradinhos. Assim a área da região branca na $\boldsymbol{figura\ II}$ mede $\mathbf{4}\boldsymbol{cm^2}$.

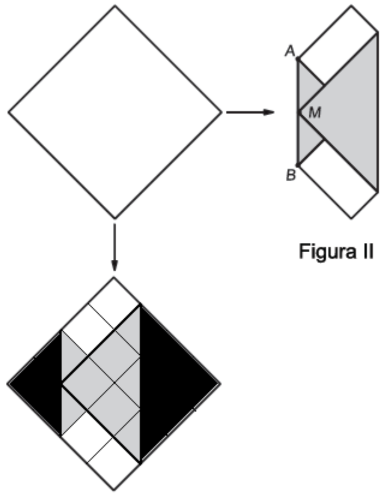


Figura II

Resolução – item (c)

A área da região branca na $\boldsymbol{figura\ III}$ é equivalente a $\mathbf{2}$ quadradinhos.

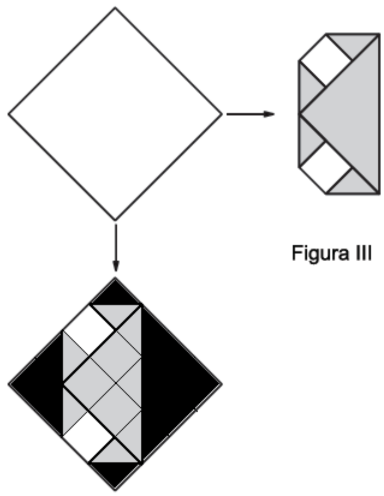
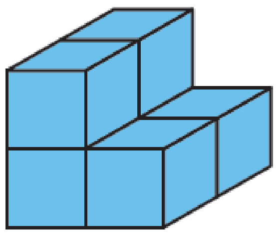


Figura III

Assim a área da região branca na $\boldsymbol{figura\ III}$ mede $\mathbf{2}\boldsymbol{cm}\ \mathbf{2}$.

QUESTÃO 15 (OBMEP – 2012)

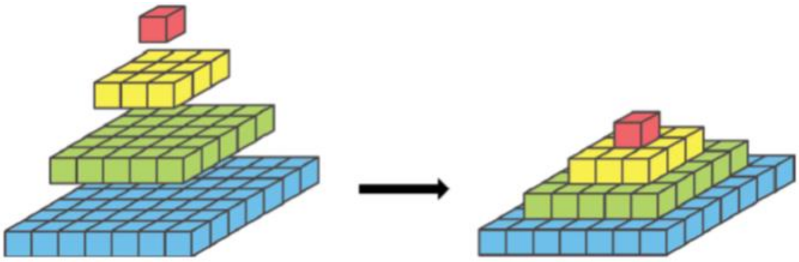
Cláudia gosta de montar sólidos colando cubinhos de aresta $\mathbf{1}\ \boldsymbol{cm}$. Ela sempre usa um pingo de cola entre duas faces de cubinhos que ficam em contato; por exemplo, para montar o sólido abaixo ela usou **7** pingos de cola.



(a) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta $\mathbf{2}\ \boldsymbol{cm}$?

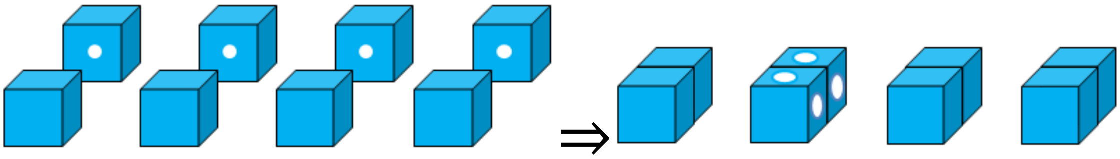
(b) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta $\mathbf{3}\ \boldsymbol{cm}$?

(c) Cláudia montou o sólido abaixo, com quatro camadas de cubinhos. Quantos pingos de cola ela usou?

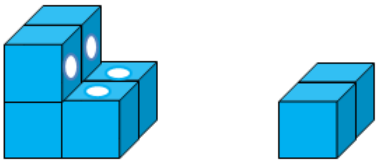


Resolução – item (a)

Observe que para juntar dois blocos basta um pingo, assim precisamos de $\mathbf{4}$ pingos para obtermos quatro pares de dois blocos, cada. Observe que para juntar dois blocos basta um pingo. Assim precisamos de $\mathbf{4}$ pingos para obtermos quatro pares de dois blocos, cada.



Pingando mais $\mathbf{4}$ pingos no segundo conjunto e juntando com o primeiro e o terceiro, temos:

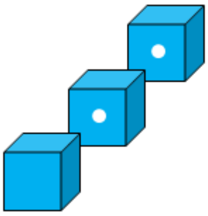


Finalmente pingando mais $\mathbf{4}$ pingos, neste último e juntando com o quarto conjunto, temos o cubo.

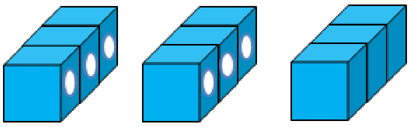
Portanto a Claudia usará $\mathbf{4}+\mathbf{4}+\mathbf{4}=\boxed{\mathbf{12}\ \text{pingos}}$ para montar um cubo de aresta $\mathbf{2}\ \boldsymbol{cm}$.

Resolução – item (b)

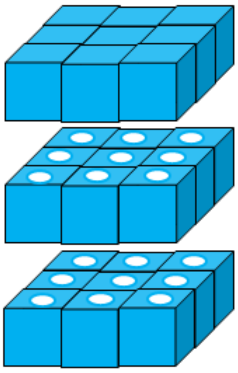
Observe que para montar um conjunto de três blocos alinhados bastam $\mathbf{2}$ pingos.



Para construir a camada da base do cubo de aresta $\mathbf{3}\ \boldsymbol{cm}$, precisamos juntar $\mathbf{3}$ desses conjuntos, que são necessários $\mathbf{3} \times \mathbf{2} = \mathbf{6}$ pingos e mais $\mathbf{3} \times \mathbf{2} = \mathbf{6}$ pingos (totalizando $\mathbf{12}$ pingos) para juntá-los.



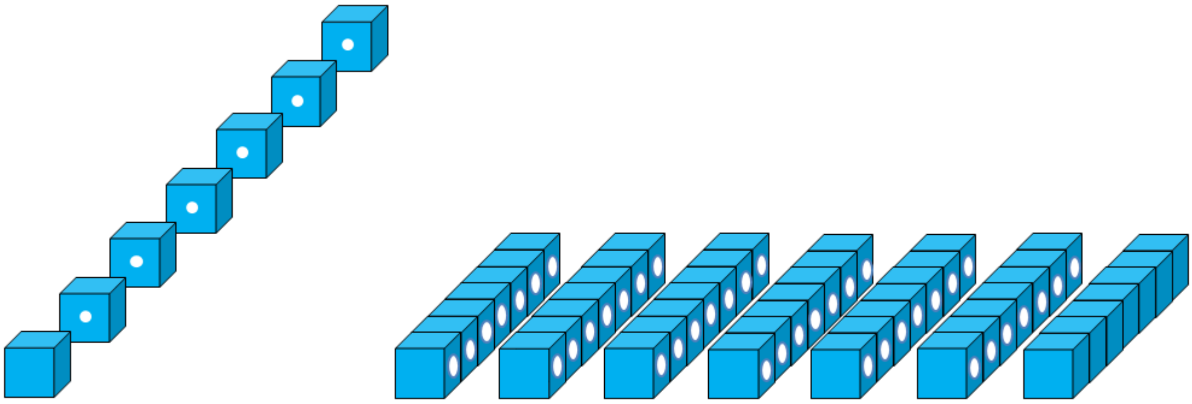
Para terminar de construir o cubo precisamos juntar $\mathbf{3}$ camadas iguais a essa abaixo, assim são necessários $\mathbf{12}\times\mathbf{3} = \mathbf{36}$ pingos e mais $\mathbf{9}\times\mathbf{2}=\mathbf{18}$ pingos para juntá-los.



Portanto a Claudia usará $\mathbf{36}+\mathbf{18}$ = $\boxed{\mathbf{54} \text{ pingos}}$ para montar um cubo de aresta $\mathbf{3}\ \boldsymbol{cm}$.

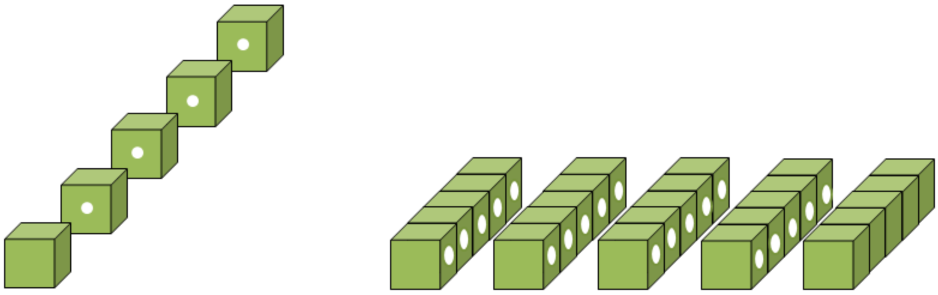
Resolução – item (c)

Para construir a camada $\mathbf{7}\times\mathbf{7}$, fazemos um conjunto de $\mathbf{7}$ cubos alinhados usando $\mathbf{6}$ pingos, e para juntá-los, serão necessários $\mathbf{7} \times \mathbf{6} = \mathbf{42}$ pingos.



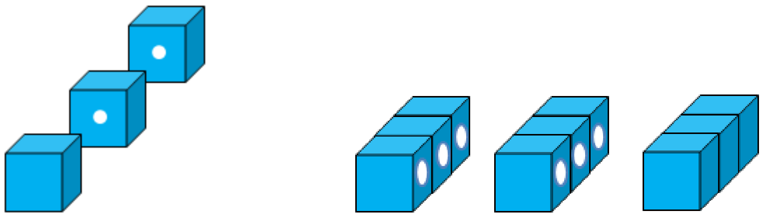
Totalizando $\mathbf{42} + \mathbf{42} = \mathbf{84}$ pingos.

Para construir a camada $\mathbf{5}\times\mathbf{5}$, fazemos um conjunto de $\mathbf{5}$ cubos alinhados usando $\mathbf{4}$ pingos, e repetimos $\mathbf{4}$ vezes esse processo (tendo parcialmente $\mathbf{4} \times \mathbf{5} = \mathbf{20}$ pingos). E para juntá-los, serão necessários $\mathbf{5} \times \mathbf{4} = \mathbf{20}$ pingos.



Totalizando $\mathbf{20} + \mathbf{20} = \mathbf{40}$ pingos.

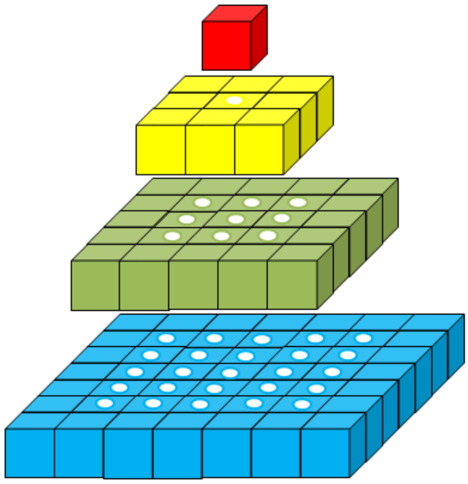
Para construir a camada $\mathbf{3}\times\mathbf{3}$, fazemos um conjunto de $\mathbf{3}$ cubos alinhados usando $\mathbf{2}$ pingos, e repetimos $\mathbf{2}$ vezes esse processo (tendo parcialmente $\mathbf{2} \times \mathbf{3} = \mathbf{6}$ pingos). E para juntá-los, serão necessários $\mathbf{3} \times \mathbf{2} = \mathbf{6}$ pingos.



Totalizando $\mathbf{6}+\mathbf{6}=\mathbf{12}$ pingos.

Para montar a figura temos:

- a camada $\mathbf{7}\times\mathbf{7}$, com $\mathbf{84}$ pingos.
- a camada $\mathbf{5}\times\mathbf{5}$, com $\mathbf{40}$ pingos.
- a camada $\mathbf{3}\times\mathbf{3}$, com $\mathbf{12}$ pingos.
- a camada $\mathbf{1}\times\mathbf{1}$, nenhum pingo.



Para juntá-los são necessários:

$\mathbf{5 \times 5 + 3 \times 3 + 1 = 25 + 9 + 1 = 35}$ pingos

Totalizando

$\mathbf{84 + 40 + 12 + 35} \ = \boxed{\mathbf{171} \text{ pingos.}}$

Generalização da construção de cubos:

Observe que para montar as camadas fizemos os cálculos:

• Na camada $\mathbf{7 \times 7 \Rightarrow 2 \times 7 \times 6 = 84}$ pingos.

• Na camada $\mathbf{5 \times 5 \Rightarrow 2 \times 5 \times 4 = 40}$ pingos.

• Na camada $\mathbf{3 \times 3 \Rightarrow 2 \times 3 \times 2 = 12}$ pingos.

• Na camada $\mathbf{1 \times 1 \Rightarrow 2 \times 1 \times 0 =}$ Nenhum pingo.

Portanto para montar uma camada $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ são necessários $\mathbf{2}.\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$ pingos. Portanto para montar uma camada $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ são necessários $\mathbf{2}.\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$ pingos. E para montar um cubo de aresta $\boldsymbol{n}$ são necessários $\boldsymbol{n}$ camadas, totalizando parcialmente

$$\boldsymbol{n}\times\mathbf{2}.\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) = \mathbf{2}.\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \text{ pingos.}$$

Para colar duas camadas será necessário um pingo em cada cubinho de uma camada, assim teremos $\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}$ pingos, e para colar a terceira camada será necessário mais $\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}$ pingos, prosseguindo esse processo, para colar as camadas serão necessários $\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}} \times(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$ pingos.

Portanto para montar um cubo de aresta $\boldsymbol{n}$ são necessários:

$$\mathbf{2}.\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})+\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) = \boxed{\mathbf{3}.\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \text{ pingos.}}$$

REFERÊNCIAS

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **1. Parâmetros curriculares nacionais. 2. Matemática: Ensino de quinta a oitava séries**, p. 46, Brasília, 1998.

CORTELAZZO, Iolanda. **Computador para interação comunicativa**, Comunicação e Educação, São Paulo, n.º 16, p. 19-25, 1999.

IMPA. OBMEP. **Provas da 1ª a 8ª OBMEP**, 2005 a 2012. Disponíveis em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em 15 dez. 2012, 09:05:25.

LEITE, L et al. **Tecnologia educacional: mitos e possibilidades na sociedade tecnológica**, Tecnologia Educacional, v. 29, n. 148, p. 38-43, Rio de Janeiro, 2000.

VALENTE, José. **Informática na Educação: uma questão técnica ou pedagógica? Pátio**, ano 3, n. 9, p. 20-23, Porto Alegre, 1999.