Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

A interdisciplinaridade no ensino da Matemática: problemas matemáticos oriundos do estudo do Sistema Solar

Maycon Cristian Godoi

Orientador: Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

Coorientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

São José dos Campos
Abril, 2018

Título: *A interdisciplinaridade no ensino da Matemática: problemas matemáticos oriundos do estudo do Sistema Solar*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Abril, 2018

Godoi, Maycon Cristian

A interdisciplinaridade no ensino da Matemática: problemas matemáticos oriundos do estudo do Sistema Solar, Maycon Cristian Godoi – São José dos Campos, 2018.

viii, 60f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Interdisciplinarity in mathematics teaching: mathematical problems arising from the study of the Solar system

1. Interdisciplinaridade. 2. Contextualização. 3. Astronomia. 4. Matemática. 5. Ensino.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

MAYCON CRISTIAN GODOI

A INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO DA MATEMÁTICA: PROBLEMAS MATEMÁTICOS ORIUNDOS DO ESTUDO DO SISTEMA SOLAR

Presidente da banca: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Prof^{a}. Dr^{a} Claudia Celeste Celestino

Prof^{a}. Dr^{a}. Graziela Marchi Tiago

Data da Defesa: 21 de maio de 2018

“Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza”.

Bertrand Russel

AGRADECIMENTOS

Muito especialmente, desejo agradecer aos meus orientadores Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes que humildemente me mostrara todo um universo ainda desconhecido, abrindo novos horizontes e possibilidades, sempre atencioso e dedicado e ao Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi, pela disponibilidade, atenção, paciência, dedicação e profissionalismo.

À minha esposa, Karoenne Rodrigues Godoi, que em várias noites ficara dormindo no sofá só para ter um pouco da minha companhia enquanto digitava e pesquisava noite a dentro, sempre incentivando, compreendendo e encorajando, durante todo este período.

À minha família e aos meus amigos, em especial aos Três Patetas, uma segunda família a qual sempre pude contar desde a época da faculdade e que por força do destino viemos a cursar juntos o Mestrado.

Aos meus colegas de mestrado, pelos momentos de entusiasmo partilhados em conjunto.

A todos os demais... um Muito Obrigado.

RESUMO

Neste trabalho trazemos como tema “A interdisciplinaridade no ensino da Matemática: problemas matemáticos oriundos do estudo do Sistema Solar”, onde propomos o estudo de como temas interdisciplinares podem enriquecer uma aula de matemática, levantando questões como “contextualização do ensino” e “desenvolvimento histórico”, fazendo uso de tecnologias atuais e criando modelos dinâmicos para aulas dentro da perspectiva de Seymour Papert. Será feito um estudo de caso de como é possível desenvolver a Matemática através da Astronomia, recriando problemas históricos que alavancaram ambas as ciências.

Palavras-chave: 1. Interdisciplinaridade. 2. Contextualização. 3. Astronomia. 4. Matemática. 5. Ensino.

ABSTRACT

In this work we bring as a theme “The interdisciplinarity in mathematics teaching: mathematical problems arising from the study of the Solar system”, where we propose the study of how interdisciplinary themes can enrich a class of Mathematics, raising issues such as “contextualization of teaching” and “historical development ”, making use of current technologies and creating dynamic models for lessons from the perspective of Seymour Papert. It will be done a case study of how it is possible to develop mathematics through astronomy, recreating historical problems that have leveraged both sciences.

Keywords: 1. Interdisciplinarity. 2. Contextualization. 3. Astronomy. 4. Math. 5. Teaching.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1

INTRODUÇÃO

A Matemática quando tratada no âmbito educacional tem sido historicamente mal vista na sociedade, chegando a ser taxada de difícil e inútil para a vida, essa pelo menos é a sensação que tive tanto da minha experiência como aluno, como professor. Talvez esse problema com a Matemática seja causado por um preconceito que já trazemos de casa, uma vez que a educação matemática ainda está engatinhando no Brasil e que o ensino ainda carregue consigo uma bagagem de tradicionalismo e formalismo, os quais "traumatizaram" as gerações passadas. Ou talvez os cursos de licenciaturas no país ainda não tenham conseguido formar uma identidade correspondente, não preparando os futuros professores para a realidade do ambiente escolar. Eu poderia continuar especulando quais são os diversos fatores causadores do péssimo desempenho dos alunos nesta disciplina, mas o fato é que é preciso repensar o ensino da matemática como um todo, desde o básico ao avançado, do ensino infantil ao ensino superior, dar infraestrutura adequada aos professores e alunos, atrelar o ensino a um significado e transformar a escola em um centro educacional de fato, acolhedor e inspirador, que valorize a imaginação.

A maioria desses fatores não são de responsabilidade docente, ao menos não diretamente. Esse trabalho irá focar no ensino da matemática, onde temos professor e aluno como protagonistas, trazendo discussões de "como?" e o "por que?" fazendo uso da interdisciplinaridade, trazendo novas possibilidades e metodologias que podem ser utilizadas a fim de inovar ou agregar as metodologias já existentes.

Como professor, ao longo dos anos venho adquirindo conhecimento sobre tecnologias em prol do ensino e procuro sempre estar utilizando *softwares* matemáticos durante atividades docentes, na tentativa de melhorar o desenvolvimento da capacidade de abstração dos alunos, intimamente ligada ao desempenho.

Desenvolver tal habilidade nos alunos já poderia ser considerada uma grande proeza, mas nesse trabalho decidimos ir além, não há aprendizado se não há interesse de ambas as partes, a do professor de ensinar e a do aluno em aprender, o qual os pensadores pedagógicos chamam de contrato didático. Mas, como lidar com a imaturidade e com a falta de conhecimento do mundo? Confesso que não tenho respostas para estas perguntas, somente mais perguntas como: *Por que me interesso por matemática?*, *O que me fascina a ponto de acreditar que todos deveriam estudar matemática?*, estas perguntas entre outras, levaram-me a perceber que a Matemática está impregnada em tudo, em cada pensamento e a cada decisão de sua vida. Todavia, tal pensamento não era compartilhado pelos meus alunos e acredito que por grande parte da sociedade.

Por tal motivo, decidimos trabalhar com a contextualização da matemática através de temas interdisciplinares, *e o que seria mais belo e inspirador que o próprio Universo?*.

Tal tema proporciona a possibilidade de brincar com o inimaginável, explorar ideias, fatos e mitos, além de dar a possibilidade de contextualizar diversos conteúdos mais abstratos e não presentes nas atividades habituais contemporâneas.

2

PRELIMINARES

2.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O desempenho dos alunos na disciplina de Matemática está muito abaixo do que pode ser considerado adequado, os resultados demonstrados nas provas externas que o Brasil realiza ou que faz parte corroboram esta afirmação. Resultados que são catastróficos, para não dizer vergonhosos. Como exemplo podemos citar o resultado do país na prova do PISA 2015, organizada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas (INEP) e pela Diretoria de Avaliação da Educação Básica (DAEB), onde o país atingiu uma média de 377 pontos em matemática, enquanto que a média dos países participantes é de 490. Basicamente, esse resultado mostra que o país está muito abaixo da média.

Para entendermos melhor o problema, o PISA é uma prova internacional que consiste em avaliar o domínio de leitura, e os conhecimentos de ciência e de matemática dos alunos na faixa dos quinze anos. Ao todo, são 72 países participantes, e do último ranking de desempenho levantado em 2015, o Brasil encontrava-se na sexagésima quinta posição (65ª), ficando à frete somente do Peru, do Líbano, da Tunísia, da Ex-República Iugoslava da Macedônia, de Kosovo, da Argélia e da República Dominicana, o que é um resultado extremamente preocupante, mas também muito intrigante, pois de longe o Brasil é o país que tem o menor PIB (produto interno bruto) ou o que faz menor investimento em educação e no desenvolvimento de tecnologias, ainda sim continua a apresentar o mesmo resultado insatisfatório ano após ano.

2.2 PREMISSAS E HIPÓTESES

Seria então possível reverter essa situação no Brasil? A resposta é não, ao menos, não a curto prazo. O Brasil tem diversos programas e diretrizes de Ensino em que, em sua essência, são bem planejados, mas geralmente mal executados, tomemos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como exemplo, de acordo com o PCN o ensino da matemática deve ser contextualizado de modo que o estudante possa resolver problemas do seu cotidiano e possa ter uma bagagem cultural para um melhor entendimento do meio onde vive.

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (PCN - Ensino Médio - Parte III, 2000, p. 6)

Essa linha de pensamento de um ensino contextualizado, vai ao encontro das ideias de Paulo Freire e demais pedagogos construtivistas, contudo, embora tenhamos parâmetros a serem seguidos, a infraestrutura das escolas, os livros didáticos e a própria formação dos professores não correspondem a essas ideias.

O professor de Matemática acaba encontrando uma barreira ao tentar passar determinados conteúdos de forma contextualizada, pois a Matemática não se resume a ser uma ferramenta utilitária para a vida, e sim uma ciência, e como tal, existem certos conteúdos que são abstratos e que nem sempre serão tratados de forma contextualizada, não ao menos como o PCN descreve.

Todavia, abordar determinados conteúdos através de um contexto histórico, explicando assim o surgimento e simultaneamente sua importância, poderia talvez proporcionar um maior significado para o estudante e chegando próximo a intenção inicial descrita no PCN.

Tendo como ponto de partida a utilização de contextos históricos para o desenvolvimento da Matemática, escolhemos a Astronomia para trabalhar determinados conteúdos da Matemática pertencentes ao ensino de acordo com o currículo básico nacional.

A escolha da Astronomia como tema interdisciplinar, se dá ao fato de que vários conteúdos da matemática que são ensinados nas escolas, muitos deles, são oriundos dos estudos dos Astros, das observações dos padrões formados e das indagações feitas no passado. Sendo a matemática uma importante ferramenta para se entender o meio em que se vivia, nesse caso formando uma simbiose entre as duas ciências, onde o desenvolvimento de uma acarretava no desenvolvimento da outra.

Ao olharmos os grandes matemáticos da antiguidade clássica, nos deparamos com Ptolomeu, Arquimedes, Eratóstenes, Tales de Mileto, entre outros, onde todos eles eram, além de matemáticos, também eram filósofos e astrônomos.

Mas, uma vez que a matemática foi se desenvolvendo, e as ciências foram se segregando, o ensino da Matemática ao longo dos tempos, perdeu em sua essência parte fundamental dessa ciência, que era o questionamento, o porquê por de trás de um fato, e passou a ser uma mera ferramenta para se resolver exercícios.

Logo, é ao menos plausível de se esperar que a Matemática quando trabalhada de forma que inclua seu contexto histórico de desenvolvimento, possa trazer benefícios para o ensino, pois trará consigo informações de outras ciências, enriquecendo a aula, desmistificando a disciplina e possivelmente acarretar uma melhora no ensino da matemática.

2.3 OBJETIVO GERAL

Esse trabalhado tem como objetivo mostrar novas possibilidades para o Ensino da Matemática no nível básico de ensino, explorando metodologias atuais, juntamente com a utilização de ferramentas computacionais e utilizando temas interdisciplinares a fim de se poder abordar de forma mais contextualizada alguns conteúdos considerados mais abstratos, possibilitando uma possível melhora no Ensino da Matemática no país.

2.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O objetivo especifico é criar algumas sequências didáticas que abrangem a Astronomia como tema interdisciplinar, trazendo consigo um caráter históricos do desenvolvimento da matemática, que poderão servir como inspiração para que os professores de matemática possam criar suas próprias sequências didáticas.

2.5 ESTRUTURA DA MONOGRAFIA

Esta monografia é constituída pelas seguintes sessões:

Introdução: A qual já fora apresentada, introduz o tema e as discussões que serão levantadas nesta monografia ao leitor.

Preliminares: Apresenta as hipóteses formuladas assim como os objetivos a serem atingidos.

Desenvolvimento: Contém um breve relato histórico de alguns problemas da astronomia intimamente ligados à matemática que podem ser inseridos nas aulas de matemática no ensino básico, além de apresentar um breve panorama das escolas públicas do Brasil.

Proposta didática: Nessa etapa são propostas duas sequências didáticas as quais procuram abordar conteúdos da matemática através de uma nova perspectiva, utilizando-se de um tema interdisciplinar para o desenvolvimento do conteúdo tendo como base o princípio do construcionismo.

Conclusões: Serão colocadas as considerações finais acerca da construção de todo o trabalho.

Apêndice: São dispostos os planos de aulas e um tutorial de como criar os modelos do sistema solar que serão apresentados no trabalho.

Anexos: São dispostos alguns dados relevantes ao trabalho retirado da análise técnica realiza pelo INEP referente a participação do Brasil no PISA 2015.

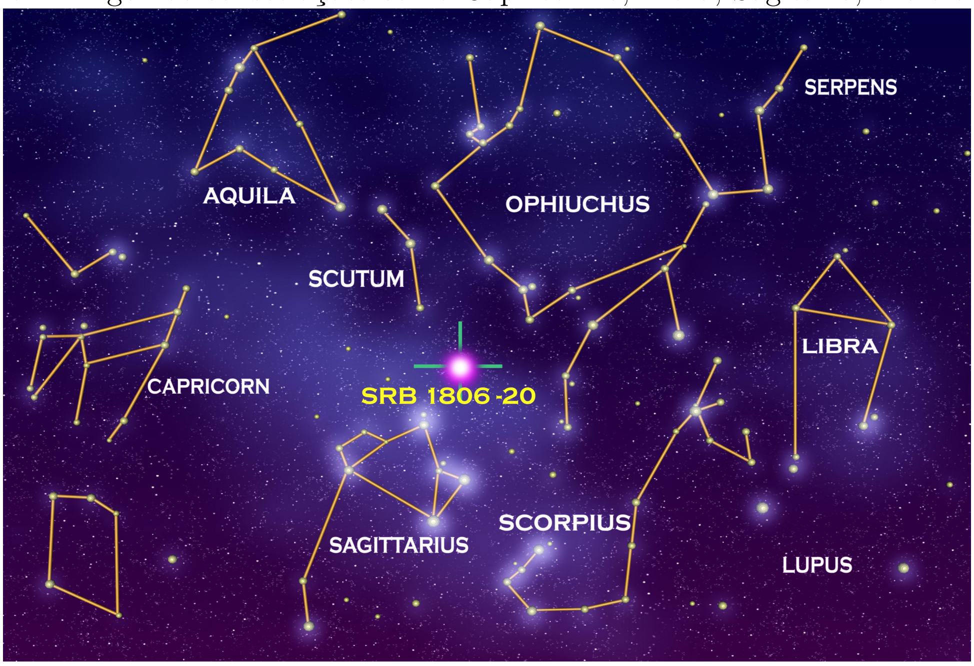
3 DESENVOLVIMENTO

3.1 A MATEMÁTICA, A ASTRONOMIA E A SALA DE AULA

Imaginemos estando em um tempo sem prédios, edifícios ou arranha-céus, sem poluição, muito antes da grandes civilizações antigas, onde é possível olhar o céu noturno e as estrelas em toda a sua magnitude, sem distrações e interferências, sem o conhecimento que possuímos hoje, não seria estranho de se chegar a conclusão que somos o centro do universo e que o céu seria uma espécie de domo que abrigava todos os pontos brilhantes no céu, é simplesmente uma questão de pura perspectiva, um conceito muito usado pelos artistas a partir do século XIV.

Essa curiosidade natural do ser humano que só aumentava conforme mais se observava o céu, consequentemente levando a uma observação sistemática das estrelas, a qual inicialmente levará à conclusão que as estrelas aparentemente estavam fixas em um domo, enquanto este girava em torno da Terra. Para se catalogar as estrelas os astrônomos da época criativamente visualizavam determinados padrões que lhes lembravam certas figuras (geralmente ligadas as suas crenças, objetos ou animais conhecidos), esses padrões foram chamados de constelações.

Figura 1: Algumas constelações como Capricórnio, Libra, Sagitário, entre outras

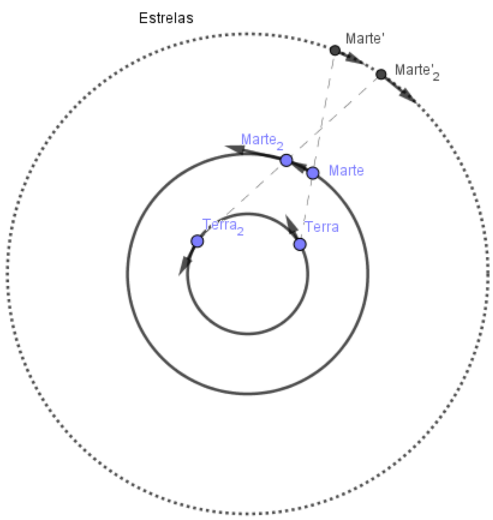


Fonte: Página da NASA[1].

Ainda assim, havia algumas estrelas que pareciam movimenta-se entre as demais estrelas, a estas estrelas errantes fora dado o nome de planetas[2].

Não é difícil para nós analisarmos a situação e entendermos o porquê do movimento estranho dos planetas. Consideremos circunferências coplanares e concêntricas quaisquer como órbitas dos planetas e os pontos pertencentes as circunferências, as possíveis posições de cada planeta, coloquemos a Terra sobre uma circunferência e Marte sobre uma outra circunferência de raio maior, e todas as estrelas sobre uma circunferência de raio superior as das outras duas circunferências, tracemos uma reta que passe pela Terra e por Marte prolongando-a até que intercepte a circunferência que contém as estrelas, esse ponto de encontro denotado Marte' é a projeção de Marte sobre a circunferência das estrelas (correspondente ao domo do universo), como estamos falando de distâncias muito grandes, a percepção que temos é que tudo jaz sobre a mesma circunferência, ou seja enxergamos Marte', conforme figura 2.

Figura 2: Percepção da movimentação de Marte - sentido horário

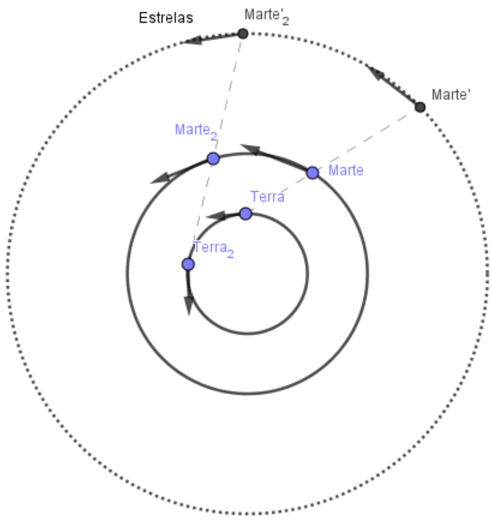


Contudo, dependendo da posição da Terra e de Marte e da diferença da velocidade de translação entre ambas, a projeção de Marte, ou seja Marte', pode movimenta-se em sentido horário ou anti-horário, conforme pode ser notado na figura 3, dando a impressão que está movimentando-se entre as estrelas, ou poeticamente *dançando entre as estrelas.*

[1] Disponível em https://www.nasa.gov/audience/forstudents/k-4/dictionary/Constellation.html, visualizado em 03/04/2018.

[2] Planeta é uma palavra derivada da palavra grega *planetes*, que significa aquele que vagueia ou viaja, e fora usada como adjetivo na expressão *aster planetes* (Astros errantes)

Figura 3: Percepção da movimentação de Marte - sentido anti-horário



Note que para nossa análise não foram necessários muitos elementos e ferramentas matemáticas, sendo totalmente plausível uma discussão desses fatos ao se trabalhar noções de geometria plana em sala de aula.

A Lua passou a ser outro objeto de muito interesse dos astrônomos, mas por que não seria, emanava luz, mas não ofuscante como o Sol, mudava de formato a cada noite, sem contar os eclipses, ela por si só é um objeto que por muitos séculos fascinou e continua a fascinar a humanidade, não é à toa que existam muitos mitos que envolvam este objeto.

Não seria diferente ao abordá-la como objeto de estudos nas aulas de matemática, uma vez que boa parte das respostas foram obtidas através de conteúdos como geometria plana, trigonometria, razão e proporção, entre outros assuntos tipicamente abordados no Ensino Fundamental.

A determinação do **período orbital da Lua** é um bom exemplo para citarmos, o qual para obtermos seu período orbital (que denotaremos por T), precisamos de algumas poucas informações, como por exemplo quanto tempo leva para Lua sair da Lua cheia e novamente voltar para Lua cheia.

Contudo, desde tempos remotos, a observação continuada da variação do formato da Lua fez com que fosse muito bem conhecido pelos astrônomos há séculos antes de Cristo, o período entre duas lunações[3], isto é, já sabiam que o período sinódico da Lua (denotaremos por S) é de 29,530589 dias conforme figura 4.

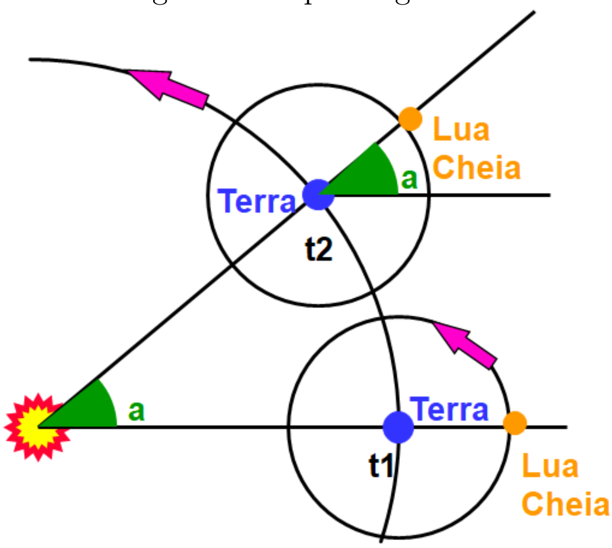
[3] Período de lunação ou período sinódico lunar: é o intervalo de tempo decorrido entre duas configurações iguais consecutivos.

Figura 4: As fase da Lua

Fonte: Professor Dr. Roberto Boczko - IAG/USP

É importante que seja a Lua cheia, para simplificar o problema, uma vez que dessa forma a Lua fica sobre a reta que passa pelo Sol e pela Terra conforme pode ser visto na figura 5.

Figura 5: Esquema geométrico



Fonte: Professor Dr. Roberto Boczko - IAG/USP

Ao observar o esquema geométrico disposto na Figura 5, podemos notar que depois que a Lua completou o seu ciclo retornando a configuração original de partida, a Terra deslocou-se a graus da sua posição original, o qual pode ser determinado da seguinte maneira:

$$\begin{gathered}\text{365 dias} \rightarrow 360^o\\ \text{29,530589 dias} \rightarrow a\end{gathered}$$

ou seja:

$$a = \frac{29,530589 \times 360}{365} = 29,126060383^o$$

o que nos leva a concluir que:

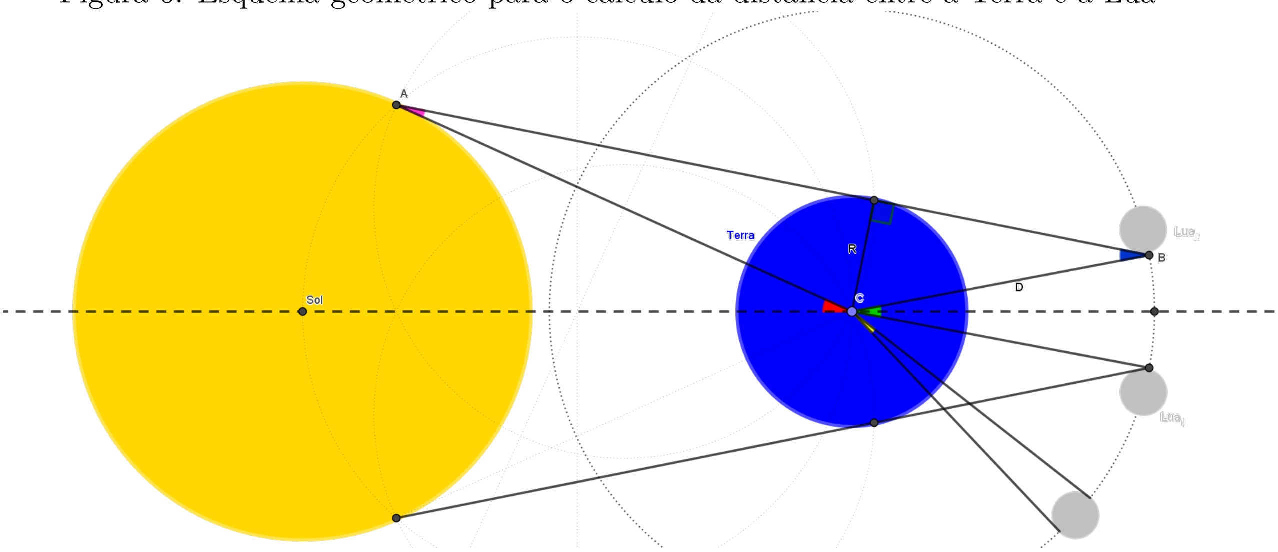
$$\begin{gathered}\text{29,530589 dias} \rightarrow 360^o + 29,126060383^o\\ T \rightarrow 360^o\end{gathered}$$

obtendo assim o período orbital da Lua:

$$T = \frac{29,530589 \times 360}{360 + 29,126060383} = 27,321660\ dias$$

Outro exemplo clássico da Astronomia que poderia facilmente ser discutido durante as aulas de matemática, é a determinação da **distância da Terra à Lua** (denotaremos por D), onde a construção geométrica para resolver essa questão por si só já renderia alguns tópicos de desenho geométrico como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6: Esquema geométrico para o cálculo da distância entre a Terra e a Lua



Tal problema fora resolvido pelo astrônomo grego Hiparco durante o século II a.C., praticamente com geometria plana e trigonometria. Problema que necessitava somente de alguns dados os quais já eram conhecidos através de medições da época, mas que será trabalhado por nós de forma literal.

São eles:

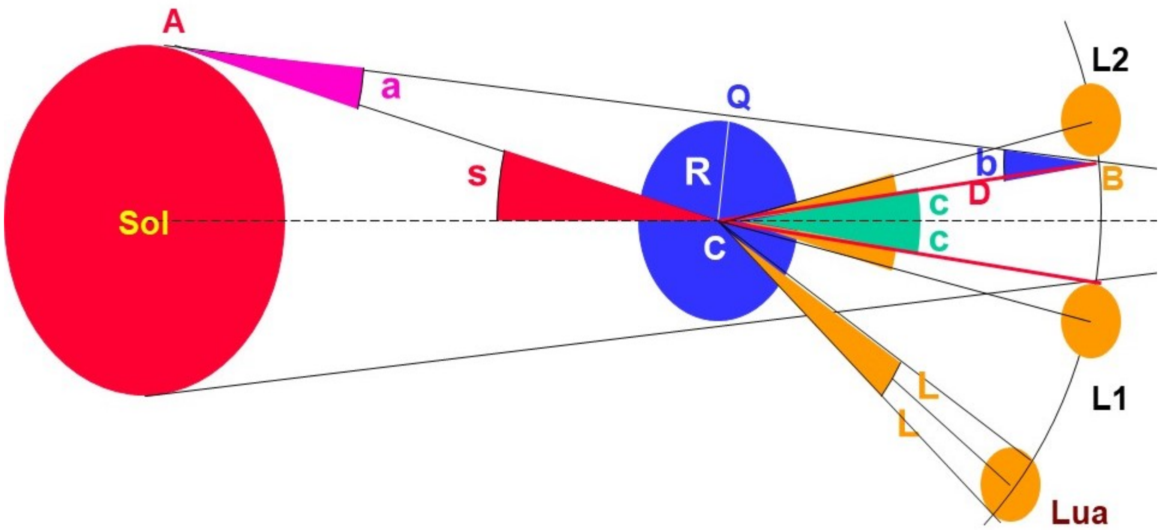
- O raio da Terra denotado por R (Obtido através da experiência de Eratóstenes, a qual será discutida posteriormente dentro da seção: proposta didática);
- O semi-diâmetro angular[4] da Lua ≈ 16' denotado por L (medido);
- O semi-diâmetro angular do Sol ≈ 16' denotado por s (medido);
- O semi-diâmetro angular da Terra vista do Sol ≈ 8,794" denotado por a;
- O período orbital da Lua ≈ 27,3 dias denotado por T;

Uma curiosidade sobre os dados é que o fato do diâmetro angular da Lua e do Sol serem iguais possibilita a ocorrência do eclipse solar total sem deformações.

Hiparco observou que primeiramente ele precisaria do intervalo de tempo necessário para que a Lua entre e saia do cone de sombra projetado pela Terra (denotaremos por t), o qual obteve através de observação.

Assim como do ângulo do trajeto percorrido pela Lua o qual denotaremos de $2c$.

Figura 7: Esquema geométrico para o cálculo da distância entre a Terra e a Lua



Fonte: Professor Dr. Roberto Boczko - IAG/USP

O qual pode ser determinado através do seguinte raciocínio:

Se a Lua leva T dias para dar uma volta completa ao redor da Terra, e leva t dias para entrar e sair por completo do cone de sombra projetado pela Terra, temos:

$$T \rightarrow 360^o$$

$$t \rightarrow 2(L + c)$$

o que nos leva à:

$$c = \frac{t \times 360}{2T} - L$$

[4] O semi-diâmetro angular de um objeto é a metade do diâmetro aparente quando observado a partir da Terra, utilizando medidas em graus, minutos e segundos de arco.

Do triângulo ABC temos que $a + x + b = 180^o$ e do ângulo raso em C temos $S + x + c = 180^o$, desse modo se igualarmos ambos os ângulos de 180^o temos:

$$a + x + b = S + x + c \leftrightarrow a + b = S + c$$

Contudo, como a distância entre o Sol e a Terra é um valor muito grande, o valor de a passa a ser extremamente pequeno, quase nulo, dessa forma podemos dizer:

$$a + b \approx b$$

O que nos leva a concluir que $b = S + c$.

Dessa forma reduzimos o problema a uma simples questão de trigonometria já que o triângulo QBC é retângulo em Q, e conhecemos o valor de um dos catetos (raio da Terra) e temos o valor de b temos:

$$\sin(b) = \frac{R}{D}$$

ou seja

$$D = \frac{R}{\sin(b)}$$

determinando assim a distância média entre a Terra e a Lua.

Com a observação da Lua e dos demais astros, não demorou muito para os astrônomos começarem a relacionar seus movimentos com os fenômenos naturais onde viviam, dando início a um uso prático do conhecimento da movimentação dos astros adquirido até então. Um exemplo claro era na agronomia, para civilizações antigas como os egípcios e os babilônicos que se estabeleceram as margens de rios, o entendimento das marés por exemplo, era fundamental para suas plantações, vemos nessa época o surgimento dos calendários lunares que os auxiliariam na otimização de seus recursos. Contudo, a cada novo conhecimento surgem novos questionamentos, esses questionamentos impulsionaram os matemáticos e astrônomos da época a criarem modelos que tentassem responder e explicar esse universo observável e desconhecido até então.

É interessante notar que antes de se conseguir uma explicação lógica, as civilizações antigas obtinham muitas de suas respostas através da religião ou tentavam agregar à ciência suas crenças, por exemplo na mitologia grega, o Sol era levado pelo deus Apolo, o qual o carregava em sua carruagem pelos céus, dessa forma explicavam o movimento do Sol durante o dia, enquanto que a tarefa de carregar a Lua fora incumbida a deusa Selene que a carregava em sua carruagem durante a noite.

Figura 8: Helio (Apolo) na carruagem do Sol acompanhado por Phosphorus, Hermes e outros

Fonte: Pintura de Johann Baptist Zimmermann (1680-1758).

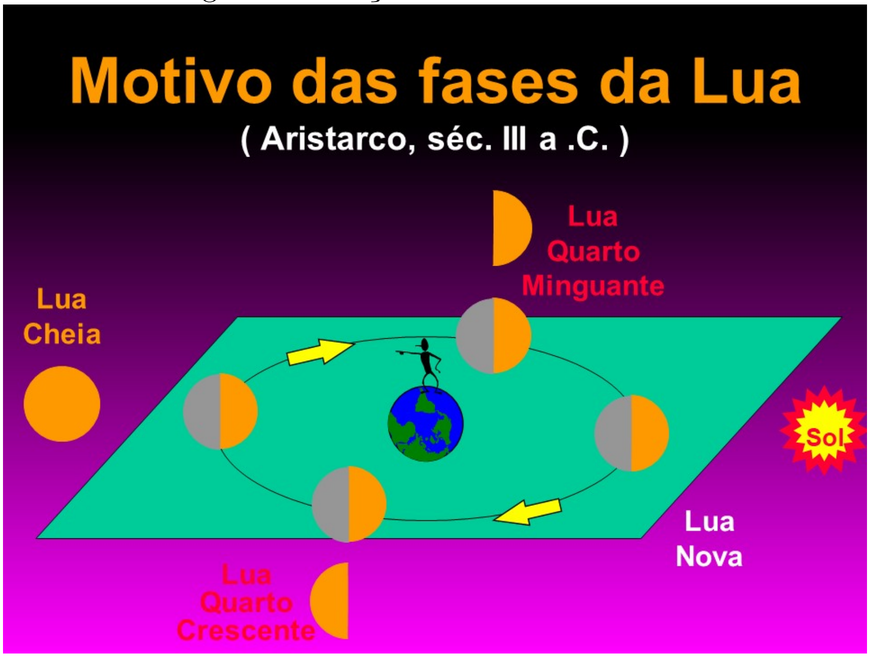
Curiosamente a Lua sempre fora alvo de mitos nas diferentes crenças das diferentes civilizações, alguns desses mitos tentavam explicar as mudanças no seu formato, alguns envolviam feras místicas que gladiavam em seu solo (explicando as crateras que a Lua possui), outros atribuíam poderes a Lua, chegando a considerá-la inclusive como um fator que auxiliava na fertilidade da mulher.

Isso mostra o quão necessário é fazer questionamentos, levantar novas hipóteses, fazer verificações e se necessário refazer todo o processo quantas vezes for necessário. Dessas inquietações e das lacunas que as religiões não conseguiam explicar que surgem os primeiros modelos matemáticos que tentaram explicar o até então inexplicável.

Já sem mitos e lendas, as mudanças de fase da Lua podem ser facilmente entendidas ao analisarmos a Figura 9 onde podemos notar que trata-se apenas de uma questão de posicionamento da Lua em relação a Terra e o Sol.

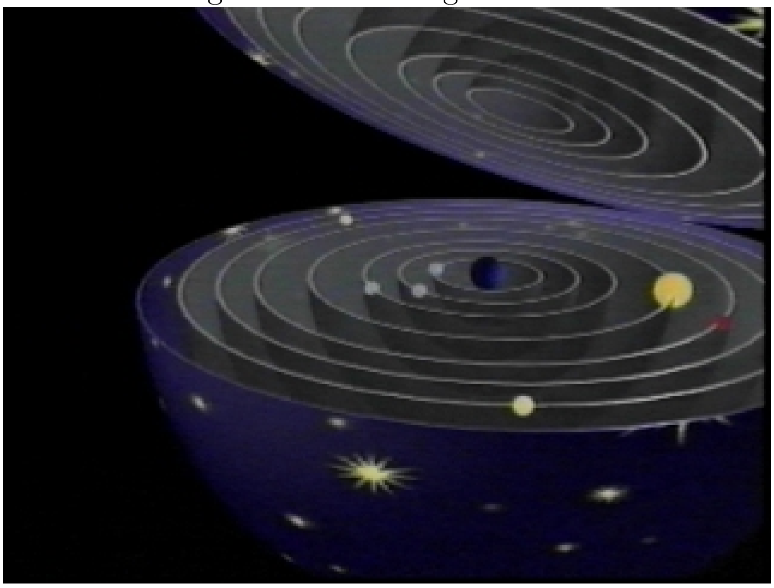
Um dos mais antigos modelos do sistema solar conhecido é o modelo geocêntrico, o qual coloca a Terra no centro do universo, o qual sabemos hoje que está totalmente equivocado, mas ao se colocar na mesma época em que esse modelo foi criado, é um modelo muito plausível uma vez que olhando-se da Terra, a primeira impressão que se tem é que ela está fixa no lugar e que todo o resto se movendo em torno dela, é uma simples questão de referência e ponto de vista. Esse modelo coloca os demais corpos celestes numa trajetória circular, cujo o centro das circunferências que descrevem a trajetória de cada corpo está sobre o eixo de rotação da Terra.

Figura 9: Posições da Lua e suas fases



Fonte: Professor Dr. Roberto Boczko - IAG/USP

Figura 10: Modelo geocêntrico



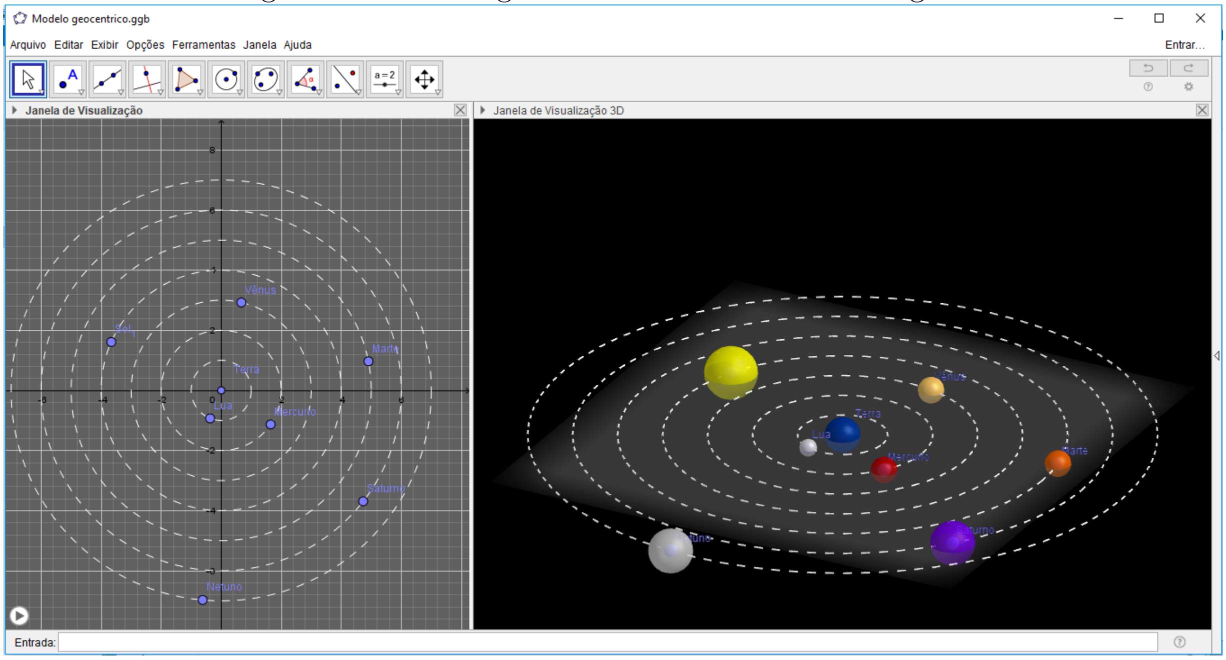
Fonte: Página da UFRGS[5].

Esse é um modelo simples que pode ser construído em sala de aula pelos alunos e pode ser usado para discussões referentes ao conteúdo da disciplina de matemática. Essa construção pode ser realizada de maneiras diferentes, como por exemplo, através de trabalhos manuais onde os alunos iriam construir utilizando materiais como papelão, isopor, TNT, PVC, entre outros materiais, ou através de ambientes virtuais, softwares, jogos, entre outros.

[5] Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/p1/p1.htm, acesso em abril 2018.

Para exemplificar essa última opção, construímos um modelo geocêntrico[6] no *software* Geogebra que pode ser visualizado na Figura 11.

Figura 11: Modelo geocêntrico construído no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Esse modelo construído de acordo com as observações da época era bastante plausível, já não considerava todos os astros sobre um mesmo domo, contudo divergia de alguns fatos observáveis, como por exemplo a impressão de que em determinadas épocas certos astros aparentariam realizando um movimento retrogrado, e os astrônomos não conseguiam explicar tal movimento através desse modelo.

Somente durante o século II d.C. surge um novo modelo que explicaria de forma muito mais precisa esses movimentos. Esse modelo aparece numa obra do matemático e astrônomo alexandrino, Cláudio Ptolomeu, denominada de Almagesto. Tal tratado foi um dos textos científicos que mais influentes de todos os tempos.

Ambos os modelos, com o auxílio do professor, podem gerar durante uma aula debates interessantes, tais debates poderiam envolver tópicos de História, Geografia, Matemática e Física, além é claro da própria Astronomia.

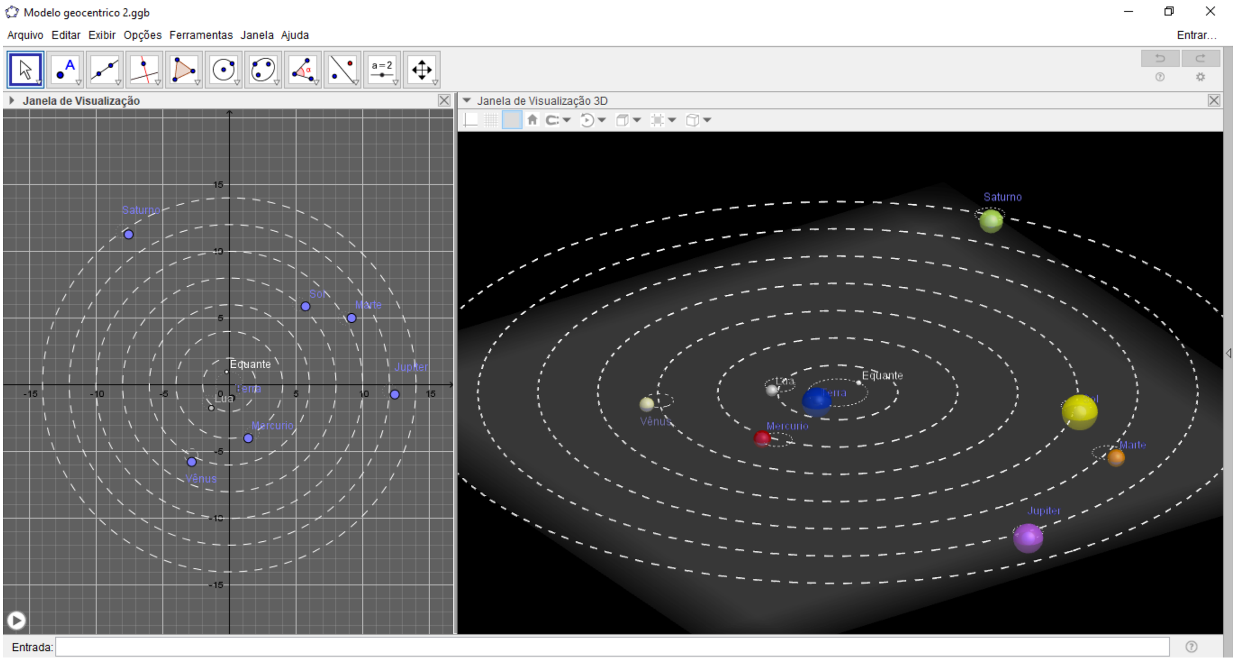
Assim como o modelo anterior, o modelo geocêntrico ptolomaico[7] pode facilmente ser construído no Geogebra.

É importante notar, que não existe uma necessidade de se criar modelos reais, e sim, criar modelos que auxiliem a aproximação da temática escolhida para a aula de Matemática, abordando assim determinados conteúdos de modo não convencionais.

[6] O modelo encontra-se disponível no seguinte link: https://ggbm.at/nC9gqWrJ

[7] O modelo encontra-se disponível no seguinte link: https://ggbm.at/j7AEpyg3

Figura 12: Modelo geocêntrico ptolomaico construído no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Através de ambos os modelos é possível trabalhar conteúdos da matemática como trigonometria, tópicos da geometria analítica como a circunferência e seus elementos, tópicos da geometria plana e da geometria espacial, entre outros conteúdos, mas o mais importante, é que alguns desses conteúdos matemáticos surgiram justamente através da Astronomia como é o caso da trigonometria.

Dependendo da estrutura da escola e em que nível essa discussão será apresentada, o professor pode ensinar os passos básicos no Geogebra para que seus alunos possam construir seus próprios modelos, essa seria uma forma divertida de aprender e entender matemática, uma vez que as ferramentas do Geogebra na verdade não passam de ferramentas matemáticas.

Contudo, para explicar a movimentação dos planetas e relacionar com o que era possível de se observar através do sistema geocêntrico ptolomaico, utilizavam-se sistemas de epiciclos complexos, alguns deles chegando a usar de doze a quatorze epiciclos para cada planeta, o que tornou o modelo extremamente complexo embora aproximasse das observações. Fora somente durante o século XIV, quando surge Nicolau Copérnico, um matemático e astrônomo polonês, que desenvolveu a Teoria do Heliocentrismo do Sistema Solar trazendo um novo ponto de partida para a Astronomia.

Essa nova teoria considerava a Terra girando em torno do Sol, e logicamente fora rejeitada pelos astrônomos seguidores dos ensinamentos de Aristóteles e de Ptolomeu, assim como pela própria igreja, mas houve aqueles que a defenderam como o próprio Galileu Galilei que fora perseguido pela igreja e forçado a rejeitar suas obras.

O modelo mais realista e que utilizamos até os dias de hoje fora baseado na Teoria Heliocentrista de Copérnico, mas fora Johannes Kepler que reformulou drasticamente o modelo copérnico baseando-se nos seus próprios cálculos.

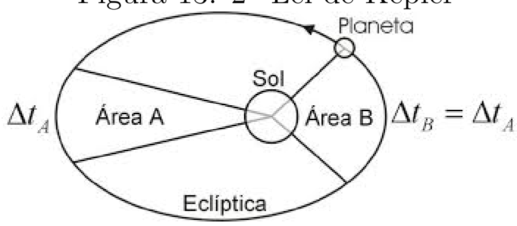
Johannes Kepler, um matemático e astrônomo alemão, fez diversas contribuições em diferentes áreas, mas sua grande contribuição para com a Astronomia ficara conhecida com as *As três leis de Kepler*, as quais as duas primeiras foram apresentadas na obra "*De motibus stellae Martis*" em 1609 e a terceira no trabalho "*Harmonices Mundi*" dez anos depois.

Primeira lei de Kepler: lei das órbitas elípticas
"O planeta em órbita em torno do Sol descreve uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos".

Esta lei definiu que as órbitas não eram circunferências, como se supunha até então, mas sim elipses.

Segunda lei de Kepler: lei das áreas
"O segmento que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.".

Figura 13: 2ª Lei de Kepler



Fonte: Página da Física em construção[8].

Esta lei determina que os planetas se movem com velocidades diferentes, dependendo da distância a que estão do Sol, estabelecendo-se dois pontos sobre a Eclíptica, o Periélio (o ponto mais próximo do Sol, onde o planeta move-se mais rapidamente) e o Afélio (o ponto mais afastado do Sol, onde o planeta move-se mais lentamente).

Terceira lei de Kepler: lei dos períodos
"Os quadrados dos períodos de translação dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas.".

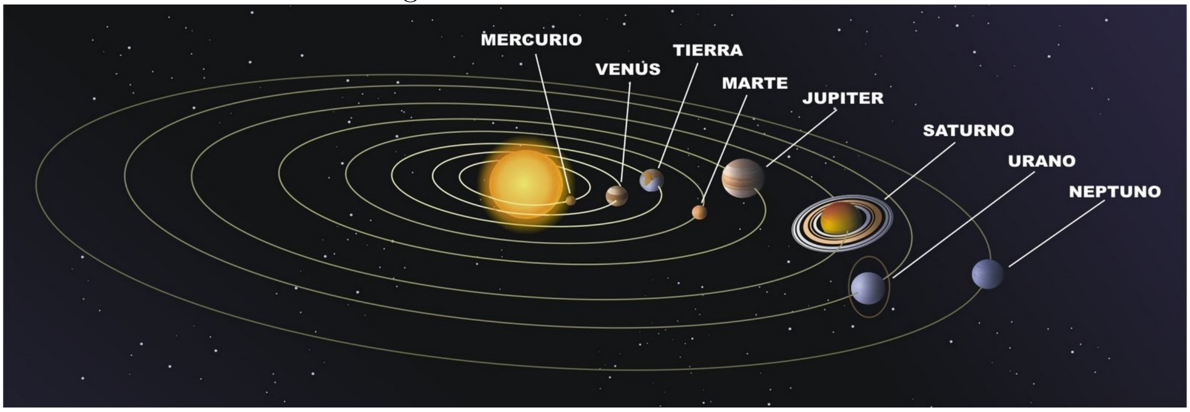
Ou seja, sendo T_r o período de revolução (ano do planeta) e D_m o semi-eixo maior da órbita de um planeta, tem-se:

$$\frac{(T_r)^2}{(D_m)^3} = k \text{ (Sendo } k \text{ uma constante)}$$

Esta lei indica que existe uma relação entre a distância do planeta e o período de translação (tempo que ele demora para completar uma revolução em torno do Sol). Portanto, quanto mais distante estiver do Sol mais tempo levará para completar sua volta em torno desta estrela.

[8] Disponível em: http://fisicaemconstrucaomeublog.blogspot.com.br/p/3-galileu-e-kepler.html, acesso em abril de 2018.

Figura 14: Modelo Heliocêntrico



Fonte: Página do Educastur[9].

Esse modelo heliocêntrico exibido na figura 14 além de naturalmente fascinante, possibilita, quando inserido nas aulas de Matemática, explorar os mesmos conteúdos da matemática, mas com uma perspectiva diferente, indo muito além de uma aula de Matemática comum. Para exemplificar a questão, dentro das propostas didáticas que serão apresentadas mais adiante, iremos propor o estudo das cônicas através dos modelos do sistema solar mais utilizados ao longo das civilizações, mostrando uma pequena fração dessas possibilidades.

O que podemos visualizar até o momento é que a Matemática está em tudo, mas cabe ao professor ter a criatividade, conhecimento e acima de tudo vontade de fazer a diferença, realizando uma das principais funções de um professor que é de construir a ponte entre o saber e a ignorância, através da transposição didática, transformando um saber cientifico em algo palpável para seus alunos, dando significado e inspiração, abrindo novos questionamentos e novos horizontes.

A realização de tal feito não é um ato simplório, sendo necessário assumir a própria ignorância, parar com as acomodações e continuar a evoluir sempre, o que é um processo árduo quando não há um retorno, uma contrapartida motivadora e uma política de formação continuada séria e constante nos ambientes escolares.

3.2 UM PANORAMA DAS ESCOLAS DO BRASIL

As ideias apresentadas até o momento dependem de diversos fatores para que seja viável sua execução, fatores como a infraestrutura das escolas, a existência de laboratórios de informática e acesso ao conhecimento como bibliotecas físicas e virtuais. O que nos leva a seguinte pergunta:

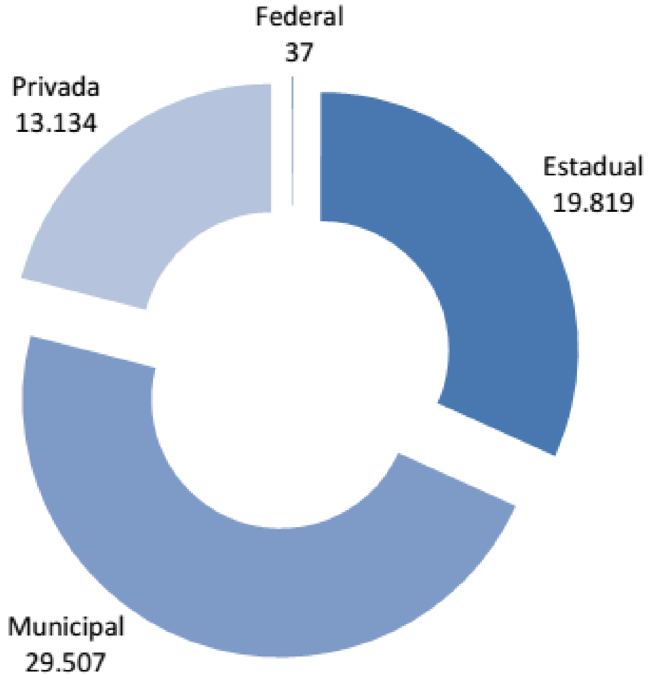
Mas as escolas brasileiras estariam preparadas para esse tipo de aula?

[9] Imagem disponível em http://blog.educastur.es/baudilio52010/2010/11/30/pioneer/, acesso em abril de 2018.

Para chegarmos a resposta, analisaremos os resultados do Censo Escolar 2016[10], cujo o resultado foi apresentado em fevereiro de 2017.

De acordo com o Censo Escolar de 2016, o Brasil possui 62,5 mil escolas de ensino fundamental II, sendo 47,2% escolas municipais, 31,7% escolas estaduais e 21% escolas privadas, conforme pode ser visto na figura 15.

Figura 15: Gráfico da distribuição das escolas de Ensino Fundamental II por dependência administrativas - Brasil 2016



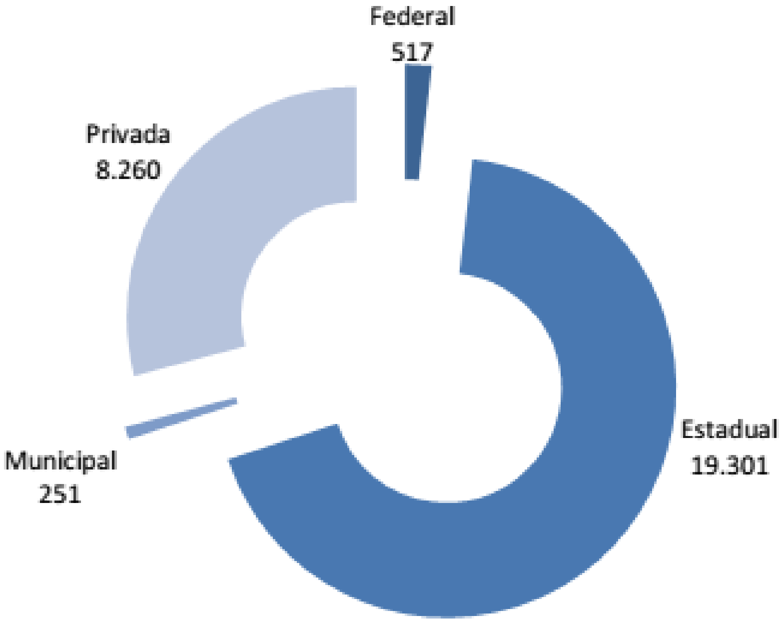
Fonte: Censo Escolar da Educação Básica 2016 - INEP - MEC

Dessas 62,5 mil escolas, somente 67,8% contam com ao menos um laboratório de informática, já o laboratório de ciências está presente em apenas 25,2% das escolas.

E se tratando das escolas de Ensino Médio os números não são muito melhores, 68,1% das escolas de ensino médio são estaduais e 29,2% privadas. A União e os municípios participam com 1,8% e 0,9%, respectivamente. Veja figura 16.

[10] O Censo Escolar da Educação Básica é uma pesquisa realizada anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) em articulação com as Secretarias Estaduais de educação das 27 unidades da federação, sendo obrigatória aos estabelecimentos públicos e privados de educação básica, conforme determina o art. 4º do Decreto nº 6.425/2008. Trata-se de um amplo e relevante levantamento sistemático sobre a educação básica no País. Os dados coletados constituem a mais completa fonte de informações utilizada pelo Ministério da Educação (MEC) para a formulação, monitoramento e avaliação de políticas e para a definição de programas e de critérios para a atuação supletiva do MEC. Também subsidia o cálculo de vários indicadores, dentre eles o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) e outros que possibilitam contextualizar os resultados das avaliações e monitorar a trajetória dos estudantes desde seu ingresso na escola.

Figura 16: Gráfico da distribuição das escolas de ensino Médio por dependência administrativas - Brasil 2016



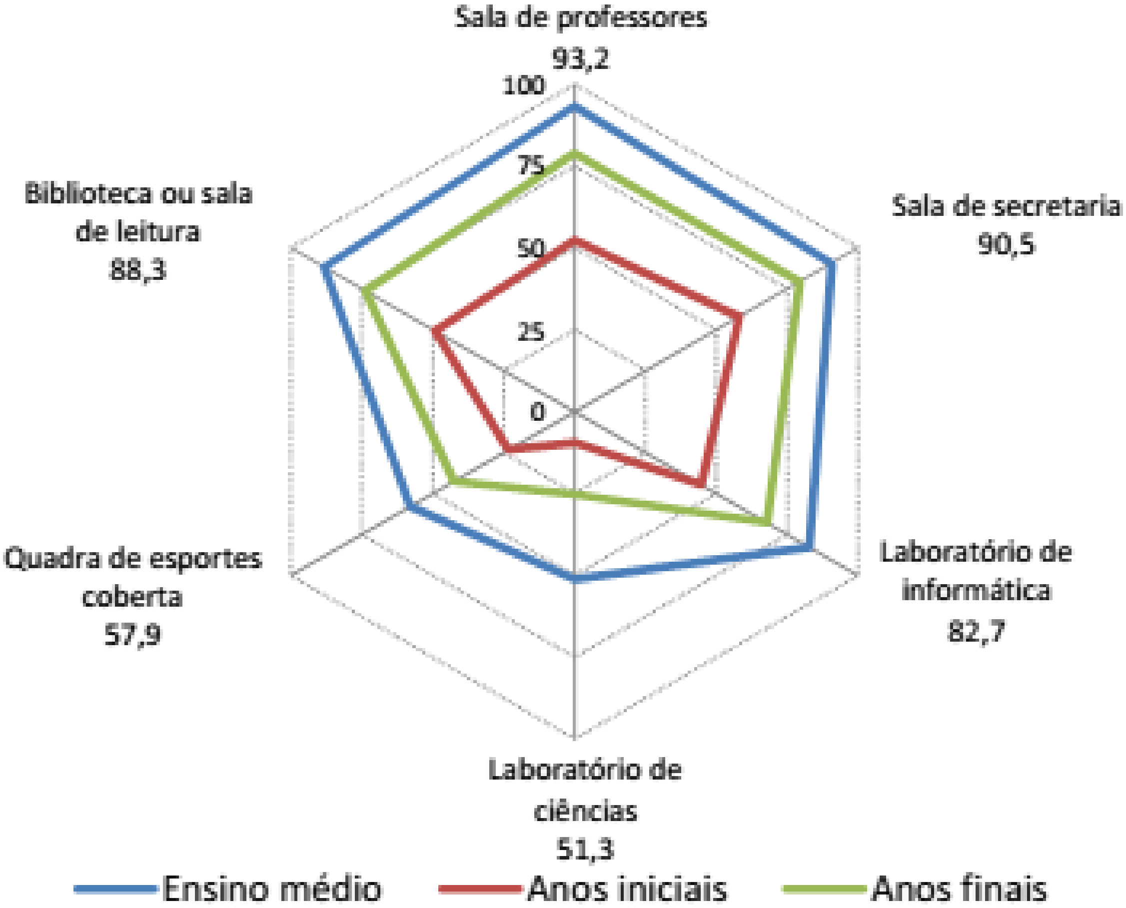
Fonte: Censo Escolar da Educação Básica 2016 - INEP - MEC

Talvez pelo fato da grande maioria das escolas de Ensino Médio serem estaduais, consiga haver uma distribuição mais equilibrada dos recursos necessários entre seus municípios, melhorando levemente os resultados já que apresenta em 82,7% das escolas de ensino médio um laboratório de informática, já laboratório de ciências está presente em pouco mais da metade das escolas (51,3%).

Em ambos os casos os dados mostram o quão longe do ideal o Brasil se encontra, pois trabalhamos com um número mínimo de laboratórios dentro das escolas, ou seja, geralmente é necessário uma certa logística dentro das escolas para que todos tenham acesso aos laboratórios, o que acarreta, dependendo da escola, de um uso mensal de uma determinada turma, e mesmo trabalhando com somente um laboratório em cada escola o Brasil não atinge o percentual de 100%.

E se tratando de infraestrutura básica, as escolas brasileiras não atingem 100% em nada que possa ser considerado como parte básica e essencial em uma escola, como por exemplo, biblioteca (73,8% em escolas de Ensino Fundamental e 88,3% em escolas de Ensino Médio), banheiro (91.5% em escolas de Ensino Fundamental e 95,4% em escolas de Ensino Médio), quadras de esporte não cobertas (60,4% em escolas de Ensino Fundamental e 77,0% em escolas de Ensino Médio), e esses foram somente alguns itens básicos. A figura 17 mostra nos três níveis de ensino como se encontram os recursos básicos nas escolas públicas brasileiras.

Figura 17: Gráfico do percentual de escolas por recurso disponível, segundo a etapa de ensino (percentual destacado relativo ao ensino médio) - Brasil 2016



Fonte: Censo Escolar da Educação Básica 2016 - INEP - MEC

Outro dado preocupante é a escolaridade dos docentes que atuam na educação básica, o qual de acordo com o censo somente 77,5% dos professores que atuam na educação básica possuem nível superior completo, e se tratando das creches brasileiras esse número cai para 64,2%.

O panorama das escolas brasileiras após exposição desses dados é no mínimo desanimador, e acreditar que o trabalho docente pode ser significativo e trazer mudanças para o futuro do país parece ser idealismo poético. Nesse momento é trivial dizer que somente isso não basta para revolucionar o ensino no país, são inúmeros fatores que precisam ser combatidos, mas se não acreditarmos que uma mudança é possível, se não nos prepararmos para um futuro melhor, e nos apegarmos a esse ideal, ele nunca será tangível e estaremos destinados ao fracassado como professores, mas para reflexão trago uma frase de Paulo Freire, *"Num país como o Brasil, manter a esperança viva é em si um ato revolucionário"*.

4 PROPOSTA DIDÁTICA

Mostraremos agora dois desenvolvimentos de aula que seguem a linha de pensamento escolhida para esse trabalho onde procuramos trabalhar o ensino de matemática percorrendo seu desenvolvimento através da Astronomia, utilizando-se assim da sua história para contextualizar os conteúdos que devem ser ministrados. Para o desenvolvimento dessas aulas, escolhemos trabalhar utilizando-se como base o construcionismo[1] de Seymour Papert[2] através do *software* Geogebra[3].

É importante destacar que para que as aulas estejam dentro da base construcionista proposta, o auto-questionamento por parte dos educandos se faz ser extremamente fundamental para o processo, dessa forma optou-se por abordar cada tema proposto de forma investigativa.

> [...] o professor procura envolver os alunos no trabalho, propondo-lhes a realização de uma tarefa. Durante a atividade, verifica se eles estão a trabalhar de modo produtivo, formulando questões, representado a informação dada, ensaiando e testando conjecturas e procurando justificá-las. Na fase final, o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificam e se tiram implicações interessantes. O professor tem de manter um diálogo com os alunos enquanto eles vão trabalhando na tarefa proposta, e no final cabe-lhe conduzir a discussão colectiva (PONTE et al, 1998, p.2).

A avaliação constante em todas as etapas também faz parte do processo, é através dela que o professor poderá diagnosticar como os conteúdos estão sendo desenvolvidos e absorvidos pelos seus educandos, dando novos rumos e revendo estratégias quando necessário.

No primeiro modelo escolhemos trabalhar com um tema da Geometria Plana, o conhecido Teorema de Tales, abordado no Ensino Fundamental, tal tema é ricamente exuberante historicamente, o qual tem um imenso potencial histórico que pode ser abordado no desenvolver desse tema.

Já no segundo modelo, escolhemos trabalhar com as Cônicas, tema estudado desde a época da Grécia Antiga, e abordado no Ensino Médio como um dos tópicos do conteúdo da Geometria Analítica, o qual possui um imenso potencial a ser explorado em conjunto

[1] Teoria que tem como base o construtivismo e, portanto vê o aluno como construtores de suas estruturas intelectuais. No entanto, o construcionismo inclui a necessidade de construção de um artefato externo.

[2] Seymour Papert (1928-2016) foi um matemático e um dos primeiros pioneiros da inteligência artificial. Além disso, ele é reconhecido internacionalmente como o pensador seminal sobre computadores e pedagogia para crianças. Um matemático por treinamento, sua colaboração com Jean Piaget na Universidade de Genebra levou-o a considerar o uso de matemática no serviço de compreensão de como as crianças podem aprender e pensar.

[3] Geogebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em um pacote fácil de usar.

com temas interdisciplinares, mas que normalmente é negligenciado durante o processo de Ensino pelo seu nível de abstração.

4.1 DESENVOLVIMENTO DE AULA - O TEOREMA DE TALES

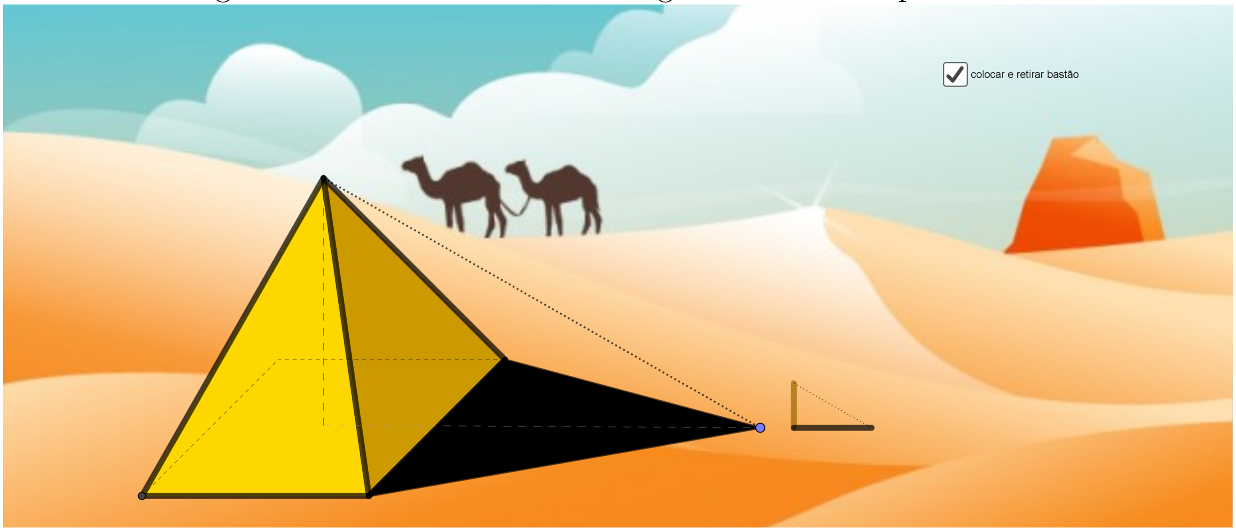
Tendo como público alvo alunos da oitava série, onde este conteúdo normalmente é inserido, inicia-se a aula contando um pouco da história de Tales de Mileto e de suas descobertas e conhecimento que adquiriu durante suas viagens para outras regiões, em seguida o professor deverá contar que através de seus estudos, Tales de Mileto, formalizou um Teorema o qual já era utilizado somente de maneira prática pelos egípcios para calcular a altura de uma pirâmide qualquer.

Neste momento o professor deverá apresentar aos alunos o Teorema de Tales:

Teorema 4.1. *Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.*

Em seguida apresentar o problema das pirâmides para que os alunos possam discutir de que forma o Teorema apresentado se encaixaria na discussão. Para o desenvolver dessa etapa, o professor poderá proceder de diversas formas, mas como nesse trabalho a metodologia construcionista de Seymour Papert foi escolhida para estar presente, o professor então deverá fazê-la através do uso de um computador. Com um *software* adequado é possível recriar essa discussão tornando-a um pouco mais dinâmica, como exemplo criamos um modelo[4] utilizando o Geogebra.

Figura 18: Modelo de aula no Geogebra: Tales e as pirâmides



Fonte: Elaborado pelo autor

Neste modelo é possível modificar o tamanho da sombra da pirâmide e automaticamente a sobra formada pelo bastão também se altera, dessa forma o professor deverá

[4] O modelo encontra-se disponível no seguinte link: https://ggbm.at/nsbPjyyg

conduzir a experiência de modo que os alunos a partir de uma interação com o *software*, possam investigar a situação e chegar à conclusão que a altura da pirâmide e a altura do bastão estão representando as retas paralelas, enquanto que a luz do sol e o solo representam as retas transversais.

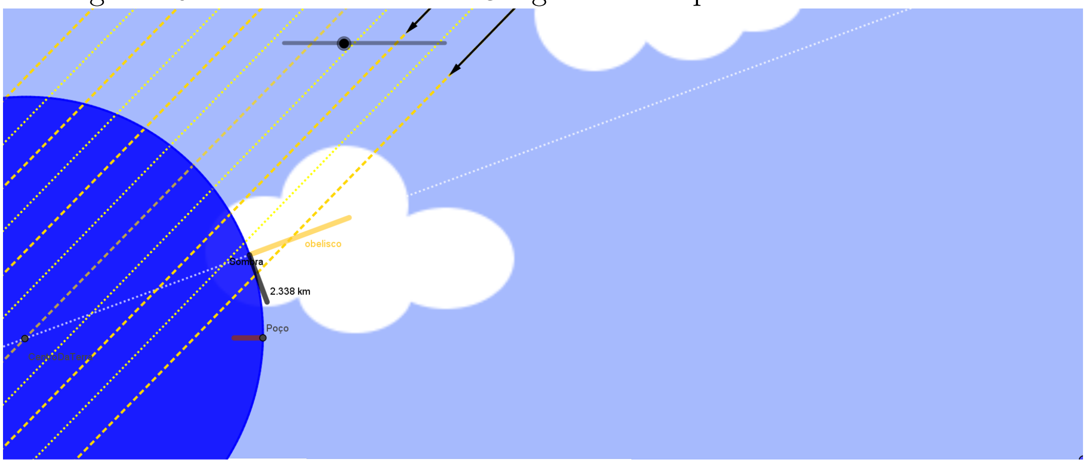
Assim que os alunos perceberem a relação entre o Teorema e as pirâmides o professor poderá atribuir alguns valores às medidas das sombras do bastão e da pirâmide assim como uma medida para o bastão, para que os alunos possam assim visualizar a utilização do Teorema para que se possa determinar a altura da pirâmide.

Após discussão, os alunos poderão realizar alguns problemas ou atividades para melhor fixação do conteúdo discutido.

Em seguida o professor deverá contar um pouco sobre a civilização grega e de como eles chegaram à conclusão de que a Terra não era plana e sim esférica, diferente das civilizações posteriores, enfatizando o matemático Eratóstenes e sua experiência, a qual permitiu determinar, muito próximo do valor real, o raio da Terra.

O próximo passo é recriar a experiência com seus alunos. Para tal atividade novamente criamos um modelo[5] dinâmico no Geogebra o qual possibilita colocar a luz do Sol em diferentes posições, formando diferentes sombras em dois locais distintos.

Figura 19: Modelo de aula no Geogebra: A experiência de Eratostenes



Fonte: Elaborado pelo autor

Em seguida, os alunos deverão discutir entre eles como o Teorema de Tales novamente se encaixaria na situação, devendo ao final perceber que a luz do Sol está representando as retas paralelas enquanto que a linha do obelisco e do poço representam as retas transversais, neste momento é possível enriquecer a discussão ao direcionar os alunos a certos debates: i) *Como ele sabia que no mesmo horário em outro lugar o ângulo formado pela sombra do obelisco era diferente se não havia relógio?*. ii) *Essa experiência seria possível no Brasil?*. Essas entre outras perguntas serviriam de estopim para aguçar a curiosidade dos alunos.

Após a atividade o professor poderá propor outras situações e fazer novas discussões através de diferentes problemas.

[5] O modelo encontra-se disponível no seguinte link: https://ggbm.at/FwEu3Vd7

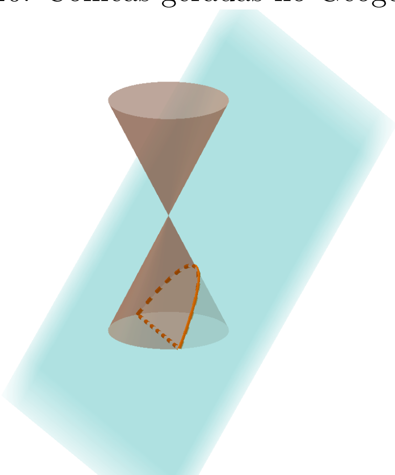
Durante todo o desenvolver das atividades o professor deverá estar avaliando os alunos e suas respostas para, caso necessário, reconduzir alguns experimentos, fazer intervenções, para que dessa forma o aluno possa ter um melhor entendimento do conteúdo apresentado.

4.2 DESENVOLVIMENTO DE AULA - AS CÔNICAS

Como último exemplo, temos as Cônicas, tal conteúdo geralmente é visto muito rapidamente e sem nenhuma contextualização, o que não é inesperado, já que se trata de um conteúdo um tanto quanto abstrato quando visto unicamente através de suas equações características e de seus elementos. Contudo, é possível levar as discussões sobre esse conteúdo a outro nível quando abordada dentro da Astronomia, sendo possível passar por cada uma das cônicas e seus elementos sem prejuízo algum, pelo contrário, dando a aula enriquecimento cultural, por exemplo, é possível trabalhar com a circunferência e seus elementos através do sistema solar geocêntrico, já a elipse e seus elementos podem ser discutidos através do sistema solar heliocêntrico enquanto que as parábolas e as hipérboles podem ser trabalhadas discutindo-se sobre as trajetórias dos cometas.

Essa aula está voltada para as turmas do segundo e terceiro anos do Ensino Médio, e inicia-se com o professor apresentando as cônicas para os alunos, a apresentação das cônicas[6] pode ser feita através do Geogebra onde o professor pode levar pronto para os alunos e explicar como se dera a construção dos cones.

Figura 20: Cônicas geradas no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Através da manipulação por parte dos alunos do plano que intercepta os cones o professor deve fazer com que os alunos consigam visualizar diferentes tipos de curvas geradas pelas interseções entre o plano e os cones, o professor poderá pedir para que os alunos desenhem as curvas que consigam visualizar, em seguida apresentá-las aos demais alunos.

[6] O modelo gerado no Geogebra para estudo das cônicas, encontra-se disponível no seguinte link: https://ggbm.at/Ep9RXc8E

O professor neste momento pode propor que os alunos discutam em grupo sobre as curvas que encontraram e deem quatro curvas que se diferem entre si. Após as respostas dos alunos o professor deverá apresentar cada uma das cônicas onde os alunos verificaram se suas conclusões estavam corretas.

Terminado a apresentação das cônicas de modo generalizado, o professor partirá para o estudo detalhado de cada uma delas, começando pela circunferência.

A Circunferência

Para tratar da circunferência, os modelos geocêntricos criados no Geogebra podem ser potencialmente úteis para ajudar no desenvolvimento desse conteúdo. Iniciando-se com um pouco da história do surgimento dos modelos geocêntricos e das figuras históricas de grande importância por trás de tal teoria, figuras como Aristóteles e Cláudio Ptolomeu, e debater com seus alunos sobre as diferenças existentes entre os modelos geocêntricos, o professor deverá conduzir os alunos de modo que consigam visualizar os elementos da circunferência e com o auxílio do professor nomeá-las.

São eles:

- $P(x, y)$ um ponto qualquer pertencente a circunferência;
- $C(x_c, y_c)$ coordenadas do centro da circunferência;
- r o raio da circunferência.

Com os dados em mãos os alunos deverão debater entre si e através de um debate assistido e perguntas problemáticas, chegar na equação característica da circunferência.

Os alunos deverão chegar na seguinte equação: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

Demonstração:
Dada uma circunferência qualquer com centro $C(x_c; y_c)$ e $P(x; y)$ um ponto qualquer da circunferência, a distância de C a P (d_{CP}) é o raio dessa circunferência. Então pelo distancia de dois pontos:

$$d_{CP} = r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \rightarrow (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

A equação $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ é denotada como equação reduzida da circunferência e permite determinar os elementos essenciais para a construção da circunferência: as coordenadas do centro e o raio.
Observação: Quando o centro da circunferência estiver na origem $(C(0; 0))$, a equação da circunferência passar a ser:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

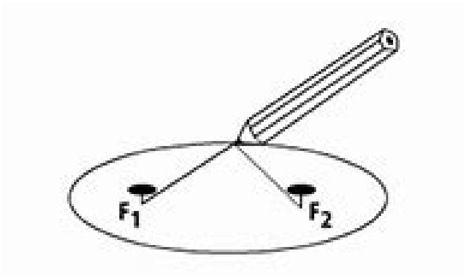
E poderão verificar no próprio Geogebra, montando seu próprio sistema solar geocêntrico no plano, com o auxílio do professor.

Neste momento o professor poderá abordar outros tópicos como posição relativa entre circunferência e ponto, circunferência e reta e entre circunferências.

A Elipse

Já para apresentar a Elipse aos alunos, o professor poderá partir da construção da elipse utilizando um barbante, duas tarraxinhas e um lápis. É uma maneira simples e tradicional, mas muito fácil de reproduzir em sala de aula.

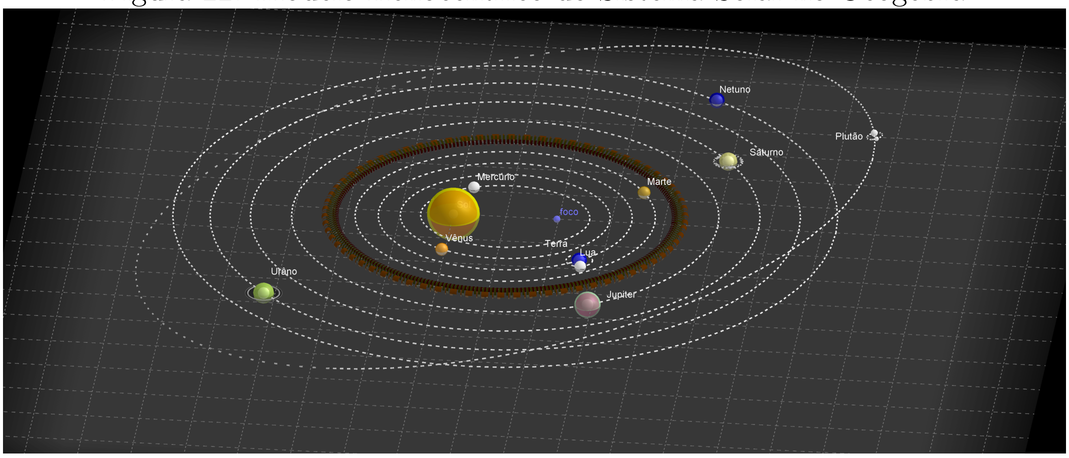
Figura 21: Construção manual da elipse



Fonte: Página da UFRGS[7].

O professor deverá utilizar o sistema heliocêntrico como base para as discussões e para o desenvolvimento do conteúdo, podendo nesse momento contar fatos interessantes da história e apresentar grandes nomes que participaram da formação de tal teoria, nomes como Nicolau Copérnico, Galileu Galilei e Johannes Kepler.

Figura 22: Modelo Heliocêntrico do Sistema Solar no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Apresentando o modelo do sistema heliocêntrico criado no Geogebra, o professor deverá conduzir seus alunos através de indagações e fazendo com que seus alunos façam experiências no modelo, para que dessa forma consigam vislumbrar dos elementos que constituem uma elipse e com o auxílio do professor nomeá-las.

Sendo eles:

- $P(x, y)$ um ponto qualquer pertencente a elipse;

[7] Disponível em: http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_diversas/Elipse/, acesso em abril 2018.

- $C(x_c, y_c)$ coordenadas do centro da elipse;
- $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ focos da elipse;
- $2a$ a medida do diâmetro maior;
- $2b$ a medida do diâmetro menor;
- $2c$ distância entre os focos.

Em seguida deverá fornecer a definição de elipse para os alunos:

Definição 4.2. *A elipse é o conjunto dos pontos P do plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2, denominados focos da elipse, é constante.*

$$d(F_1; P) + d(F_2; P) = 2a \tag{1}$$

Juntamente com a definição de excentricidade da elipse a qual exprime o "achatamento" da elipse e é dada pela divisão:

$$e = \frac{c}{a}$$

Assim como, mostrar para os alunos que em toda a elipse, vale a relação pitagórica:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{2}$$

Dessa forma os alunos possuirão todos os elementos para determinar a equação da elipse. Como a equação é um tanto que trabalhosa algebricamente, se necessário o professor poderá auxiliar os alunos para que consigam chegar na seguinte equação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Demonstração:
Seja $P(x, y)$ um ponto genérico de uma elipse, cujos focos são $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$. Temos que:

$$d(P; F_1) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \tag{3}$$
$$d(P; F_2) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \tag{4}$$

Pela equação (1) temos $d(F_1; P) + d(F_2; P) = 2a$, onde podemos substituir (3) e (4) na relação e obter:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevamos ambos os lados ao quadrado:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Dividimos ambos os lados por 4:

$$cx = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevamos, novamente, ambos os lados ao quadrado:

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + c^2x^2 - a^2x^2 = a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + x^2(c^2 - a^2) = a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Multiplicamos por -1:

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Dividimos ambos os lados por $a^2(a^2 - c^2)$

$$\frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} = \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1 \tag{5}$$

Da relação (2) temos:

$$b^2 = a^2 - c^2 \tag{6}$$

Substituindo (6) em (5), obtemos:

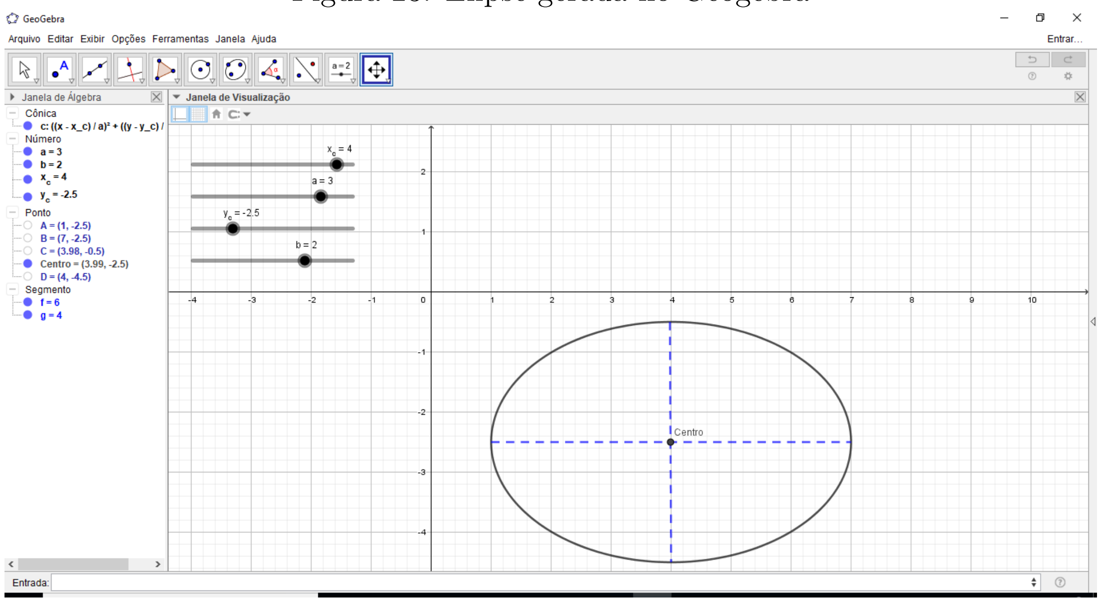
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

É interessante ao tentar encontrar a equação, que o professor coloque para grupos diferentes condições diferentes, dessa forma é possível num mesmo momento, também chegar na equação da elipse quando o eixo maior está sobre o eixo y, onde a equação ficaria da seguinte maneira: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, dessa forma os grupos discutiriam sobre os resultados encontrados.

Uma vez encontradas as equações, é hora de verificá-las no Geogebra, onde o professor pode explicar aos alunos como criar controles deslizantes no Geogebra, dessa forma os alunos teriam uma elipse centrada na origem cujos os diâmetros podem ser alterados, levando a discussão para a excentricidade da elipse. Onde após experimentarem diversos valores os alunos deverão chegar à conclusão que $0 \leq e < 1$ e que se $e = 0$ temos uma circunferência.

Para finalizar o conteúdo sobre as elipse, o professor poderá, se não o tiver feito antes, falar sobre a translação de pontos, dessa forma as equações anteriormente obtidas seriam rescrita da seguinte forma: $\frac{(x-x_C)^2}{a^2} + \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1$ no caso em que o eixo maior é paralelo ao eixo x e $\frac{(x-x_C)^2}{b^2} + \frac{(y-y_C)^2}{a^2} = 1$ no caso em que o eixo maior é paralelo ao eixo y. Novamente os alunos podem testar suas equações no Geogebra, mas dessa vez criando, quatro controles deslizantes, sendo um para o valor de a, um para o valor de b, um para x_C e um para y_C.

Figura 23: Elipse gerada no Geogebra



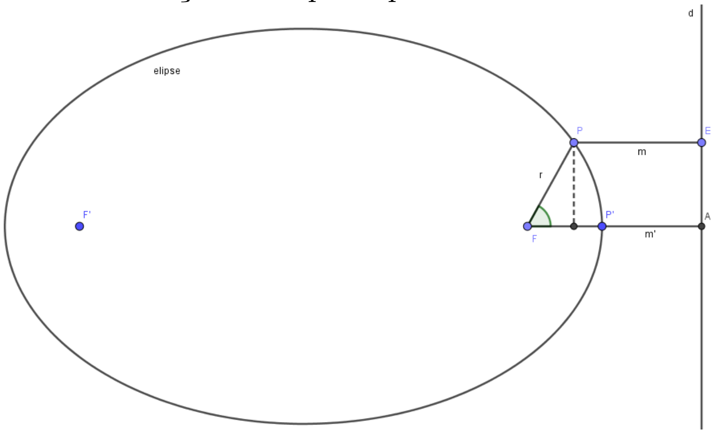
Fonte: Elaborado pelo autor

Uma curiosidade sobre as aplicações das curvas elípticas, é que são muito utilizadas na mecânica celeste, embora não mais com sua equação na forma cartesiana e sim, por conveniência, com a equação na sua forma polar com origem do raio em um dos focos.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e\cos(\theta))}$$

Tal forma é pouco conhecida e explorada no ensino, o que é uma pena, pois a dedução dessa equação parte da definição geral de cônica, e leva em consideração um elemento que é descartado nas demais demonstrações, consequentemente deixando de entrar nas discussões sobre a elipse, ocultando-o em todo o processo, gerando a impressão que somente existe nas demais cônicas, fato não verídico, tal elemento trata-se da reta diretriz.

Figura 24: Construção da elipse a partir do foco e da reta diretriz



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:
Para demonstramos como obter a equação

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos(\theta))}$$

partimos da definição de cônica:

Definição 4.3. *Denomina-se cônica o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão entre as distâncias a um ponto fixo F e a uma reta fixa d é igual a uma constante não negativa e. O ponto fixo é chamado de foco, a reta fixa de diretriz e a razão constante de excentricidade da cônica. Quando $e = 1$ a cônica é chamada de parábola, quando $0 < e < 1$ de elipse e quando $e > 1$ de hipérbole.*

Considerando caso em que $0 < e < 1$ temos:

$$\frac{d(F;P)}{d(P;d)} = e$$

Reescrevendo a equação temos:

$$\frac{r}{m} = e \leftrightarrow r = em \leftrightarrow$$

$$r = e((a-c) - r\cos(\theta) + m') \tag{7}$$

Já ao observamos o ponto P' na Figura 24, podemos utilizar a definição 4.3 para afirmar que:

$$(a-c) = em'$$

O qual se substituirmos em (7) obtemos:

$$r = e(em' - r\cos(\theta) + m')$$

$$r + r\cos(\theta) = em'(e+1)$$

$$r(1 + e\cos(\theta)) = (a-c)(e+1)$$

$$r = \frac{ae + a - ce - c}{1 + e\cos(\theta)}$$

Temos que a excentricidade e é dada por $e = \frac{c}{a}$ logo:

$$r = \frac{a\frac{c}{a} + a - c\frac{c}{a} - c}{1 + e\cos(\theta)}$$

$$r = \frac{a - \frac{c^2}{a}}{1 + e\cos(\theta)}$$

$$r = a\frac{1 + \frac{c^2}{a^2}}{1 + e\cos(\theta)}$$

$$r = a\frac{1 + e^2}{1 + e\cos(\theta)}$$

Na Astronomia, esse ângulo θ que é o ângulo entre as direções foco da elipse - periastro e foco da elipse - posição do astro, na órbita descrita por Kepler (órbita kepleriana), fora denominado de anomalia verdadeira, o qual é utilizada para localizar um astro em sua órbita.

<u>*A Parábola*</u>

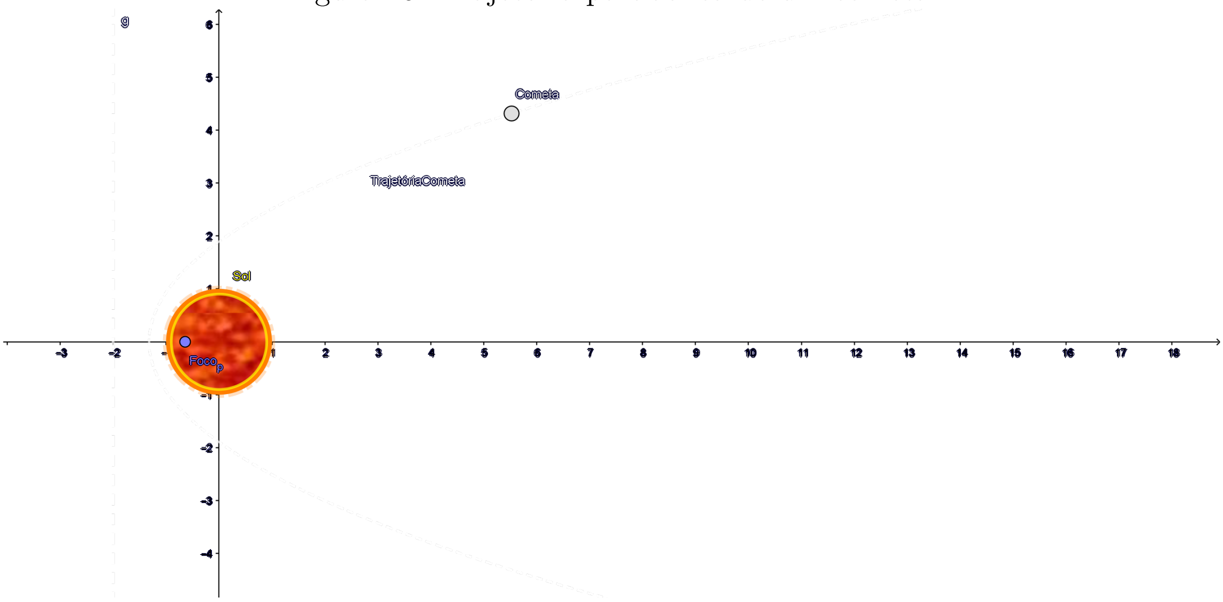
A próxima cônica a ser explorada é a parábola, tema o qual o professor pode iniciar com exemplos onde tal curva pode ser visualizada e desafiando os alunos a darem exemplos diferentes dos citados pelo professor.

Inserindo a Astronomia na temática, o professor pode falar um pouco sobre os cometas, os quais em sua grande maioria possuem órbitas elípticas, contudo a também os que apresentam órbitas parabólicas e hiperbólicas, esse são denominados cometas de aparição única.

O professor poderá utilizar-se da ferramenta do Geogebra *Parábola* para mostrar aos alunos como gerar uma parábola no programa e em seguida apresentar o modelo de órbita de um cometa criado no Geogebra, propondo ao alunos que localizem os mesmos elementos que usara para criar a primeira parábola.

Localizados os elementos (reta diretriz e foco) o professor deve propor que os alunos variem a posição de ambos e que relatem aquilo que observarem.

Figura 25: Trajetória parabólica de um cometa



Fonte: Elaborado pelo autor

Com o auxílio do professor os alunos deverão nomear os elementos da parábola, sendo eles:

- d a reta diretriz da parábola;

- $F(x_c; y_c)$ coordenadas do foco da parábola;

- $P(x; y)$ coordenadas de um ponto qualquer pertencente a parábola;

- $\frac{p}{2}$ a metade da distância existente entre o foco e a reta diretriz.

Em seguida deverá fornecer a definição da parábola para os alunos:

Definição 4.4. *A parábola é o conjunto dos pontos P do plano que equidistam do ponto F (Foco) e da reta diretriz d.*

$$d_{FP} = d_{dP}$$

Se tratando de uma turma do Ensino Médio o professor poderá separar os alunos em quatro grupos onde cada grupo ficará encarregado de encontrar a equação das seguintes parábolas:

Grupo 1: - reta diretriz paralela ao eixo x, com vértice sobre a origem e foco sobre a parte positiva do eixo y;

Grupo 2: reta diretriz paralela ao eixo x, com vértice sobre a origem e foco sobre a parte negativa do eixo y;

Grupo 3: reta diretriz paralela ao eixo y, com vértice sobre a origem e foco sobre a parte positiva do eixo x;

Grupo 4: reta diretriz paralela ao eixo y, com vértice sobre a origem e foco sobre a parte negativa do eixo x;

Onde cada grupo deverá apresentar as seguintes respostas:

Grupo 1: $x^2 = 2py$

Grupo 2: $x^2 = -2py$
Grupo 3: $y^2 = 2px$
Grupo 4: $y^2 = -2px$

Demonstração:
Considerando uma parábola qualquer cuja a reta diretriz é paralela ao eixo x, com vértice na origem e foco sobre a parte positiva o eixo y, ou seja, $F(0; \frac{p}{2})$, seja $P(x, y)$ um ponto genérico da parábola, pela definição de parábola temos que:

$$d_{FP} = d_{dP}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y + \frac{p}{2})^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = \sqrt{(y + \frac{p}{2})^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$x^2 + (y - \frac{p}{2})^2 = (y + \frac{p}{2})^2$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 = 2py$$

As demonstrações das demais equações são análogas.

O mesmo processo de verificação utilizados com as circunferências e com as elipses no Geogebra poderá ser utilizado uma vez que os alunos já estarão mais familiarizados com o programa.

Uma vez verificadas as equações e como a translação de pontos já fora apresentada, nesse momento o professor pode propor que os alunos demonstrem as equações cujos vértices das parábolas não estão sobre a origem do plano cartesiano.

A Hipérbole

Para nossa última cônica o professor deverá pedir para que os alunos tentem utilizar a ferramenta *Hipérbole* no Geogebra para construir sua própria hipérbole inicialmente.

É interessante lembrar aos alunos que a maioria dos cometas possuem órbitas elípticas, mas que alguns cometas também podem apresentar uma órbita parabólica ou hiperbólica levantando a questão para os alunos no que esse fato afetaria a órbita dos cometas.

Após a construção das hipérboles e da discussão proposta o professor deverá solicitar aos alunos que tentem mudar o foco e o ponto de posição, e que anotem os resultados que observarem.

O professor poderá pedir para que os alunos comparem suas anotações e dividam com a sala suas conclusões.

Após essa dinâmica o professor deverá perguntar para os alunos quais elementos da hipérbole eles estariam conseguindo visualizar.

Por se tratar de uma construção simples é provável que os elementos observáveis pelos alunos sejam:

- $P(x, y)$ um ponto qualquer pertencente a hipérbole;

- $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ focos da hipérbole;

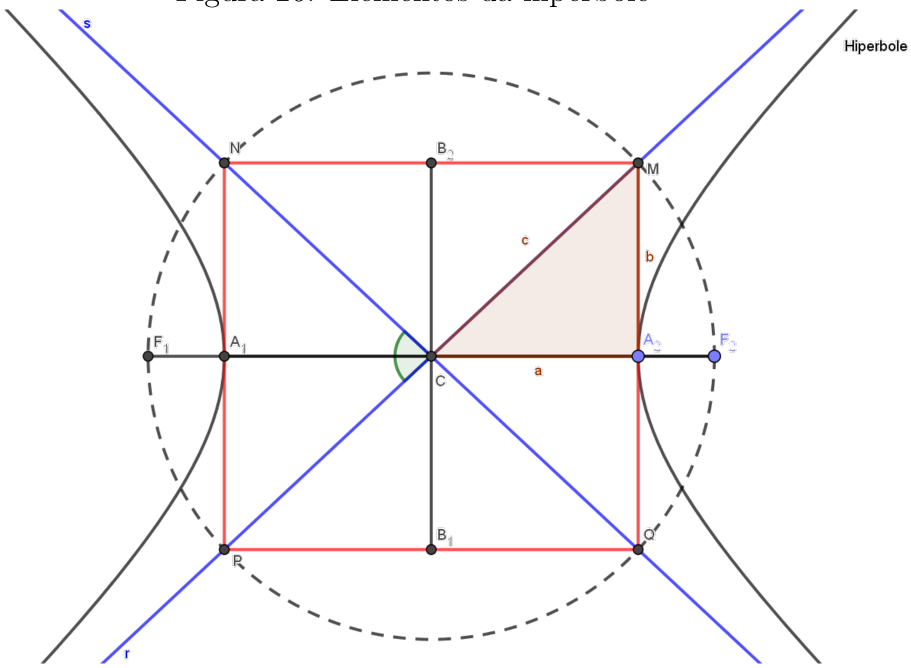
- $C(x_c, y_c)$ o centro da hipérbole o qual é ponto médio do segmento F_1F_2;

- $2c$ a distância focal ou seja, a distância entre os focos, onde $c = CF_1 = CF_2$;

- Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2, de comprimento 2a, onde $a = CA_1 = CA_2$

Neste momento o professor poderá fornecer uma construção mais complexa de uma hipérbole gerada no Geogebra, ou poderá passar as orientações para os alunos a construírem (dependerá do nível de afinidade e conhecimento do *software* pelos alunos).

Figura 26: Elementos da hipérbole



Fonte: Elaborado pelo autor

Com essa construção em mãos, é esperado que seja possível que os alunos consigam fornecer os demais elementos da hipérbole como:

- Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2, de comprimento $2b$. O valor de b é definido pela relação pitagórica:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{8}$$

onde a, b e c são as medidas dos lados do triângulo retângulo CA_2M;

- Assíntotas: são as retas r e s das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos. Esta aproximação é contínua e lenta de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito. Considerando uma circunferência de raio CF_1 ou CF_2, cujo centro C é o mesmo centro da hipérbole, traçamos pelos vértices A_1 e A_2 cordas perpendiculares ao segmento F_1F_2 e marcamos as intersecções com a circunferência. Esses pontos são os vértices do retângulo $MNPQ$ inscrito à circunferência. Esse retângulo tem dimensões $2a$ e $2b$. As retas r e s que contém as diagonais desse retângulo são as assíntotas da hipérbole;

- Abertura: o ângulo θ é chamado de abertura da hipérbole;

- Excentricidade: a excentricidade e da hipérbole é o número dado pela relação:

$$e = \frac{c}{a}$$

Em seguida apresentar a definição de hipérbole para os alunos.

Definição 4.5. *Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 de um plano, tais que a distância entre estes pontos seja igual a $2c > 0$, denomina-se hipérbole, à curva plana cujo módulo da diferença das distâncias de cada um de seus pontos P à estes pontos fixos F_1 e F_2 é igual a um valor constante $2a$, onde $a < c$.*

Ou seja:

$$|PF_1 - PF2| = 2a$$

O professor poderá desafiar os alunos a tentarem determinar a equação da hipérbole, passando os dados necessários como coordenadas do centro e do foco, por exemplo:

- Metade da sala deverá trabalhar com os focos da hipérbole sobre o eixo x e centro da hipérbole na origem do plano cartesiano, enquanto a outra metade deverá trabalhar com os focos da hipérbole sobre o eixo y e centro da hipérbole na origem do plano cartesiano.

É importante o professor estar atento e intervindo nos momentos que acreditar ser necessário, pois a demonstração da equação é por si só um desafio algébrico para alunos, podendo causar certa frustração quando tomados determinados caminhos.

É esperado que os alunos obtenham a equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ no caso em que o foco está sobre o eixo x e o centro da hipérbole está localizado na origem do plano cartesiano. E $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ no caso em que o foco está sobre o eixo y e o centro da hipérbole está localizado na origem do plano cartesiano.

Demonstração:
Seja $P(x;y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole e sejam $F_1(c,0)$ e $F_2(-c,0)$ os seus focos. Sendo $2a$ o valor constante com $c > a$, podemos escrever:

$$|PF_1 - PF2| = 2a$$

Utilizando-se da formula da distância entre dois pontos, podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$-4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}$$

Dividindo ambos os lados por 4 temos:

$$-cx = a^2 \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-(cx + a^2) = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos:

$$(cx + a^2)^2 = a^2[(x+c)^2 + y^2]$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2) + a^2y^2$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \tag{9}$$

Substituímos a relação (8) em (9) e obtemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Nesse ponto, os alunos que já estivem familiarizados com a translação de pontos estariam aptos a fornecer as equações nos casos em que o centro está localizado fora da origem do plano cartesiano.

- No caso de os focos estarem sobre o eixo x:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

- No caso dos focos estarem sobre o eixo y:

$$\frac{(y - y_c)^2}{a^2} - \frac{(x - x_c)^2}{b^2} = 1$$

Por fim, a verificação das equações se dará pela construção das hipérboles através de suas equações, sendo possível estabelecer um desafio onde cada aluno deverá determinar a equação da hipérbole que fora previamente construída utilizando a ferramenta *Hipérbole*.

5 CONCLUSÕES

A conclusão que conseguimos vislumbrar ao término desse trabalho é que ao introduzirmos temas interdisciplinares como a Astronomia para o desenvolvimento de conteúdos da disciplina de matemática, possibilitamos um enriquecimento cultural para os alunos, criamos novos caminhos que podem vir a causar uma mudança significativa no modo que as aulas de matemática são ministradas além de possivelmente promovermos de fato aquilo que é previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Contudo a falta de material adequado disponível para o professor mostra que o ensino da matemática ainda engatinha no Brasil e para se desenvolver necessita de professores bem qualificados e criativos, que possam contornar as dificuldades inseridas continuamente em sala de aula. Professores que possam visualizar novos caminhos quando assim for necessário, colocando em prática todo conhecimento adquirido e não o engavetando como de costume, pois, como mostrado nos modelos criados no Geogebra, alguns deles demandaram conhecimentos que não seriam transmitidos para os alunos, mas são necessários para o professor, para que este sim, possa utilizá-lo para transmitir outros conteúdos pertencentes ao currículo básico para seus educandos.

É preciso reestruturar os cursos de licenciatura, que em sua grande maioria, continuaram nos moldes da educação dos séculos XIX e XX, inserindo dentro de suas estruturas curriculares disciplinas que preparem o professor para as dificuldades da profissão, dentro dos cursos pesquisados foi raro encontrar um disciplina que trata da inclusão no ensino, discutindo as principais deficiências, doenças, síndromes, transtornos, entre outros, assim como uma carga horária relativamente pequena nas disciplinas que tratam das metodologias de ensino, tendências educacionais e na utilização de tecnologias no Ensino, esses são exemplos claros de como as instituições superiores de ensino não preparam seus futuros professores para a realidade no país.

Para os professores já inseridos, é preciso adotar-se uma política séria de capacitação constante, para que se mantenham atualizados.

A infraestrutura das escolas precisa de uma mudança drástica por igual, não criando poucas escolas modelo onde somente uma minoria, geralmente de uma classe social mais afortunada, tenha direito ao acesso.

Por fim, a educação não irá melhorar seus resultados a curto prazo, mas é preciso atacar a todos os fatores que a prejudicam, se desejamos no futuro preparar de fato os futuros cidadãos desse país e consequentemente estar entre os melhores do ranking mundial de educação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Brasil. Brasil no PISA 2015: Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros. Ministério da Educação. INEP: 2016. 272 p.

http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf

[2] Brasil. Censo Escolar da Educação Básica 2016: Notas Estatísticas. Ministério da Educação. INEP: 2017. 29 p.

http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/notas_estatisticas/2017/notas_estatisticas_censo_escolar_da_educacao_basica_2016.pdf

[3] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares. Brasília: MEC/SEF, 1998. 174 p.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf

[4] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília : MEC /SEF, 1998. 148 p.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

[5] Brasil. Secretaria de Educação Básica. Orientações curriculares para o ensino médio - volume 2: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília : Ministério da Educação, 2000. 135 p.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf

[6] D. Follador. Tópicos Especiais no Ensino de Matemática: Tecnologias e Tratamento da Informação. 2. ed. Curitiba: Ibpex, 2011. 156p. (Coleção Metodologia do Ensino de Matemática e Física).

[7] F. Freire, M. Prado, *Professores Construcionistas: A formação em serviço*, UNICAMP

http://www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie96/FORMSERV.html

[8] H. Oliveira; J. M. Varandas; J.P. da Ponte; L. Brunheira. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. Lisboa: Quadrante, 1998. p. 41-70.

[9] K. S. Oliveira Filho; M. F. Oliveira Saraiva; Astronomia e Astrofísica. Editora livraria da física, 2017.

[10] São Paulo. Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias. Secretaria da Educação. 1. ed. atual. São Paulo: 2011. 72 p.
`http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf`

APÊNDICE A - PLANOS DE AULA

PLANOS DE AULA - TEOREMA DE TALES

I. Dados de Identificação
Professor: ______________________________
Disciplina: Matemática
Público alvo: Alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental
Tempo estimado: 6 aulas de 50 minutos

II. Tema:
Geometria Plana: O Teorema de Tales.
Conceito fundamental: Ao aprofundamos nossos estudos em geometria plana, não podemos escapar de esbarrar no legado deixado por Tales de Mileto, matemático, filosofo e astrônomo, o qual recebera o título de o pai da geometria descritiva. Começaremos pelo Teorema de Tales o qual é fundamental para o desenvolvimento de diversos outros conteúdos da geometria plana.

III. Objetivos:
Objetivo geral: Capacitar o aluno a construir os fundamentos básicos da geometria plana, consolidando e ampliando seu conhecimento já estudado a longos dos ciclos anteriores, capacitando a uma análise crítica sobre tais conteúdos.
Objetivos específicos:
Ao nível de conhecimento – O aluno deve ser capaz de entender o teorema de Tales, e identificar em diferentes situações elementos que viabilizam a utilização do teorema para a determinação de medidas desconhecidas.
Ao nível de aplicação – O aluno deve ser capaz de conseguir identificar em quais situações o Teorema de Tales pode estar sendo utilizado, e aplica-lo de maneira correta.
Ao nível de solução de problemas – O aluno deve ser capaz de criar hipóteses e inferir resultados de diferentes problemas em diferentes situações.

IV. Conteúdo:
O Teorema de Tales: contexto histórico e a relação com o Egito, o Teorema, aplicações.

V. Conteúdo prévio necessário:
Operações básicas aritméticas e algébricas. Conceitos básicos de geometria como tipos de reta, medidas de comprimento e ângulos.

VI. Desenvolvimento do tema:
Introdução ao tema através de exposição de relatos históricos e debates. Exposição de conceitos teóricos e demonstrações utilizando lousa e giz, slides e softwares. Demonstrações de fórmulas utilizando lousa e giz. Constatação dos resultados obtidos através de softwares.

VII. Recursos didáticos:
Quadro, giz, Datashow, softwares de apoio gráfico como geogebra.

VIII. Avaliação:
Será realizada com diferentes propósitos como diagnóstica, formativa e somativa.
Atividades: Exercícios durante a aula e exercícios a serem realizadas em casa. As atividades contêm exercícios algorítmicos, problemas e situações problemas.
Critérios adotados para correção das atividades: Respostas fornecidas as atividades, método e raciocínio utilizado para obtenção das respostas, organização das ideias, fatos e dados, justificativas elaboradas.

PLANOS DE AULA - AS CÔNICAS

I. Dados de Identificação
Professor: ______________________________
Disciplina: Matemática
Público alvo: Alunos do 3º Ano do Ensino Médio
Tempo estimado: 16 aulas de 50 minutos

II. Tema:
Geometria Analítica: As cônicas.
Conceito fundamental: A ideia essencial da geometria analítica consiste em caracterizar objetos geométricos por meio de suas equações. Sua invenção está associada independentemente a dois grandes nomes, Pierre de Fermat e René Descartes. Desde sua invenção durante o Renascimento até os dias atuais a geometria analítica serve de instrumento para diversas áreas da ciência, dentre elas a Física, Engenharia Mecânica, Engenharia Civil, entre outras áreas, eis onde reside a justificativa de seu estudo.

III. Objetivos:
Objetivo geral:
Capacitar o aluno a construir os fundamentos básicos da geometria analítica, consolidando e ampliando seu conhecimento específico da disciplina, capacitando a uma análise crítica sobre tais conteúdos.
Objetivos específicos:
Ao nível de conhecimento – O aluno deve ser capaz de definir e caracterizar as Cônicas no plano cartesiano e associar seu uso a diferentes situações.
Ao nível de aplicação – O aluno deve ser capaz de definir as equações da circunferência, da elipse, da parábola e da hipérbole a partir de dados fornecidos, esboçar gráficos, extrair informações.
Ao nível de solução de problemas – O aluno deve ser capaz de formular modelos que o ajudem a estimar, criar ou inferir resultados para situações problemas.

IV. Conteúdo:
Definição de Circunferência e seus elementos; Equação reduzida e geral da circunferência; Gráficos; Posição relativa de uma circunferência.
Definição de Elipse e seus elementos; Equação da elipse; Gráficos.
Definição de Parábola e seus elementos; Equação da parábola; Gráficos.
Definição de Hipérbole e seus elementos; Equação da hipérbole; Gráficos.

V. Conteúdo prévio necessário:
Operações básicas aritméticas e algébricas. Conceitos de geometria analítica sobre o Ponto

e reta. Conhecimento básico de informática.

VI. Desenvolvimento do tema:
Introdução ao tema através de exposição de relatos históricos e debates. Exposição e criação de modelos utilizando *softwares* que ajudem o desenvolver de conceitos teóricos. Questionamentos direcionados que explorem a investigação matemática. Demonstrações de fórmulas no quadro. Verificação e constatação através de *softwares* dos resultados obtidos .

VII. Recursos didáticos:
Quadro, giz ou caneta, Datashow, softwares de apoio gráfico como geogebra.

VIII. Avaliação:
Será realizada com diferentes propósitos como diagnóstica, formativa e somativa.
Atividades: Exercícios durante a aula e exercícios a serem realizadas em casa. As atividades contêm exercícios algorítmicos, problemas e situações problemas.
Critérios adotados para correção das atividades: Respostas fornecidas as atividades, método e raciocínio utilizado para obtenção das respostas, organização das ideias, fatos e dados, justificativas elaboradas.

APÊNDICE B - CONSTRUINDO UM SISTEMA SOLAR NO GEOGEBRA

Para manufaturar os modelos de sistema solar no Geogebra primeiramente se faz necessário o ter instalado em seu computador. Tal software é gratuito e já encontra-se na sua sexta versão, podendo ser adquirido no site https://www.geogebra.org/download, escolhemos o Geogebra que se melhor adeque ao sistema operacional do nosso computador.

Após download e instalação, já podemos utilizar o programa.

FERRAMENTAS BÁSICAS DO GEOGEBRA

Aqui encontram-se as principais ferramentas do Geogebra, muitas das quais estaremos utilizando para o desenvolvimento dos nossos modelos.

Ferramentas da Janela 2D

 - *Mover* - ferramenta que possibilita mover ou selecionar objetos;

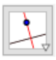
 - *Ponto* - ferramenta que possibilita a inserção de um ponto qualquer no plano cartesiano;

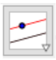
 - *Interseção de Dois Objetos* - ferramenta que possibilita a obtenção da interseção existentes entre dois objetos selecionados;

 - *Reta* - ferramenta que possibilita a criação de uma reta dado dois pontos;

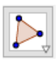
 - *Segmento* - ferramenta que possibilita a criação de um segmento de reta dado dois pontos;

 - *Vetor* - ferramenta que possibilita a criação de um vetor dado dois pontos;

 - *Reta perpendicular* - ferramenta que possibilita a criação de uma reta perpendicular a uma reta passando por um ponto qualquer;

 - *Reta paralela* - ferramenta que possibilita a criação de uma reta paralela a uma reta passando por um ponto qualquer;

 - *Mediatriz* - ferramenta que possibilita a criação de uma reta mediatriz dado dois pontos quaisquer;

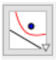
 - *Polígono* - ferramenta que possibilita a criação de um polígono dado os seus vértices;

 - *Círculo dado Centro e Um de seus Pontos* - ferramenta que possibilita a criação de um círculo dado centro e um de seus pontos;

 - *Círculo dados Centro e Raio* - ferramenta que possibilita a criação de um círculo dado centro e a medida do seu raio;

 - *Elipse* - ferramenta que possibilita a criação de uma elipse dados seus focos e um ponto pertencente a elipse;

 - *Hipérbole* - ferramenta que possibilita a criação de uma hipérbole dados seus focos e um ponto pertencente a hipérbole;

 - *Parábola* - ferramenta que possibilita a criação de uma parábola dado seu foco e sua reta diretriz;

 - *Ângulo* - ferramenta que fornece o ângulo entre três pontos;

 - *Distância, Comprimento ou Perímetro* - ferramenta que fornece a distância entre dois pontos, ou o comprimento de um segmento, ou o perímetro tanto de um polígono quanto de uma circunferência;

 - *Área* - ferramenta que fornece a área de um polígono;

 - *Controle Deslizante* - ferramenta que possibilita a criação de um controle deslizante para uma variável qualquer, possibilitando a manipulação entre o valor máximo e mínimo fornecido;

 - *Ângulo* - Possibilita mover a janela em qualquer direção;

 - *Ampliar* - ferramenta que possibilita aumentar o zoom na janela;

 - *Reduzir* - ferramenta que possibilita diminuir o zoom na janela.

Ferramentas da Janela 3D

 - *Círculo dados Eixo e Um de seus Pontos* - ferramenta que possibilita a criação de uma circunferência no espaço uma vez selecionado um eixo e um ponto pertencente à circunferência;

 - *Círculo (Centro - Raio + Direção)* - ferramenta que possibilita a criação de uma circunferência no espaço uma vez fornecido um eixo, o centro e o raio da circunferência;

 - *Interseção de Duas Superfícies* - ferramenta que possibilita a obtenção da interseção entre duas superfícies;

 - *Plano por Três Pontos* - ferramenta que possibilita a criação de um plano fornecido três pontos não colineares;

 - *Cone* - ferramenta que possibilita a criação de um cone uma vez fornecido o centro da base, o topo do cone e o raio da base;

 - *Esfera dados Centro e Um de seus Pontos* - ferramenta que possibilita a criação de uma esfera uma vez fornecido o centro da esfera e um ponto qualquer pertencente à esfera;

 - *Esfera dados Centro e Raio* - ferramenta que possibilita a criação de uma esfera uma vez fornecido o centro da esfera e seu raio.

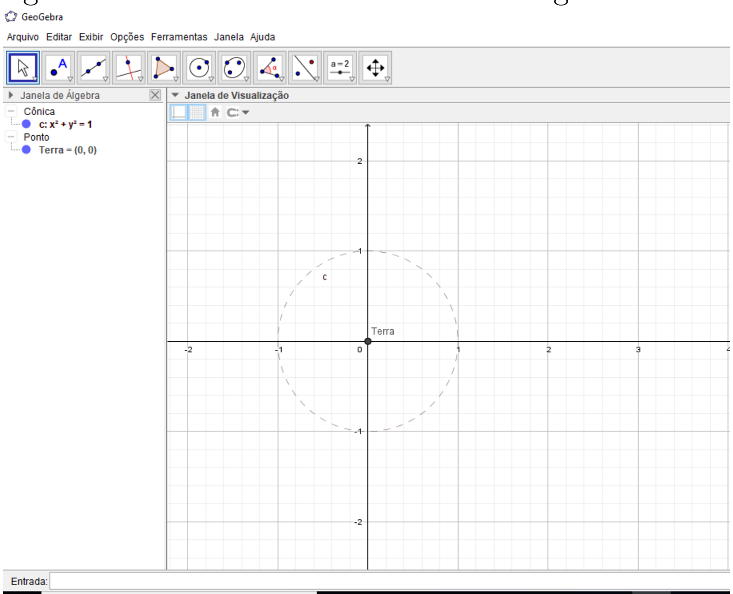
CONSTRUINDO O MODELO GEOCÊNTRICO

1. Abra o Geogebra e clique na ferramenta *Ponto* e clique na origem do plano cartesiano, com o botão direito clique sobre o ponto e selecione a opção renomear, digite *Terra*. Dependendo o que se deseja ensinar podemos também trabalhar escrevendo cada comando, nesse caso clique no campo de entrada e digite as coordenadas $Terra = (0, 0)$.

2. Para criar a órbita da Lua utilize a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*, escolha o tamanho do raio (para nosso modelo escolhemos o tamanho de uma unidade). Os passos anteriores podem ser substituídos colocando no campo de entrada a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

   Para mudar o tipo de traçado da circunferência use a ferramenta Mover e clique sobre a circunferência, clique em *Estilo das Linhas* (localizada logo abaixo da ferramenta *Mover*), escolhendo a segunda opção e diminuindo a espessura da linha para a espessura mínima. Na ferramenta ao lado *Cor e Transparência* escolha a cor cinza.

Figura 27: circunferência centrada na origem de raio 1

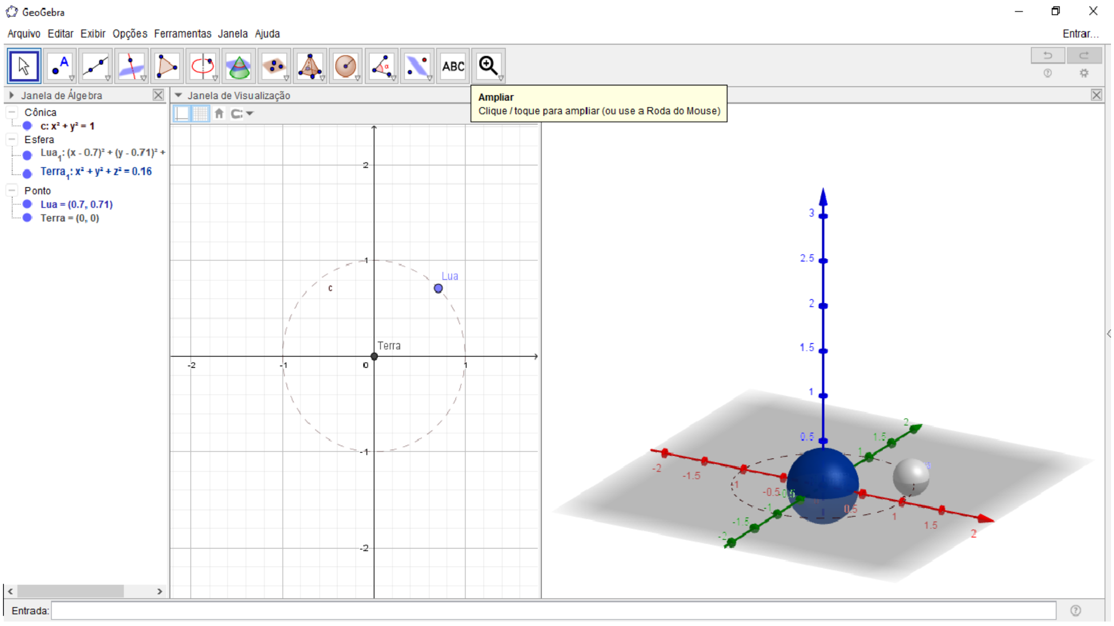


Fonte: Elaborado pelo autor

3. Utilizando a ferramenta *Ponto*, crie um ponto qualquer sobre a circunferência, renomeio de Lua.

4. Clique na opção *Exibir* sobre a barra de ferramentas, em seguida clique em *Janela de visualização 3D*. Utilizando a ferramenta *Esfera dados Centro e Raio*, clique no ponto Terra e coloque 0.4 para a unidade do raio, clique com o botão direito sobre a esfera e em seguida em *Preferências*, escolha a opção *Cor* e escolha a cor azul escuro, diminuindo a transparência até um nível adequado. De modo análogo crie a Lua, utilizando 0.2 como raio.

Figura 28: Exemplo do planeta Terra e da Lua gerados no Geogebra



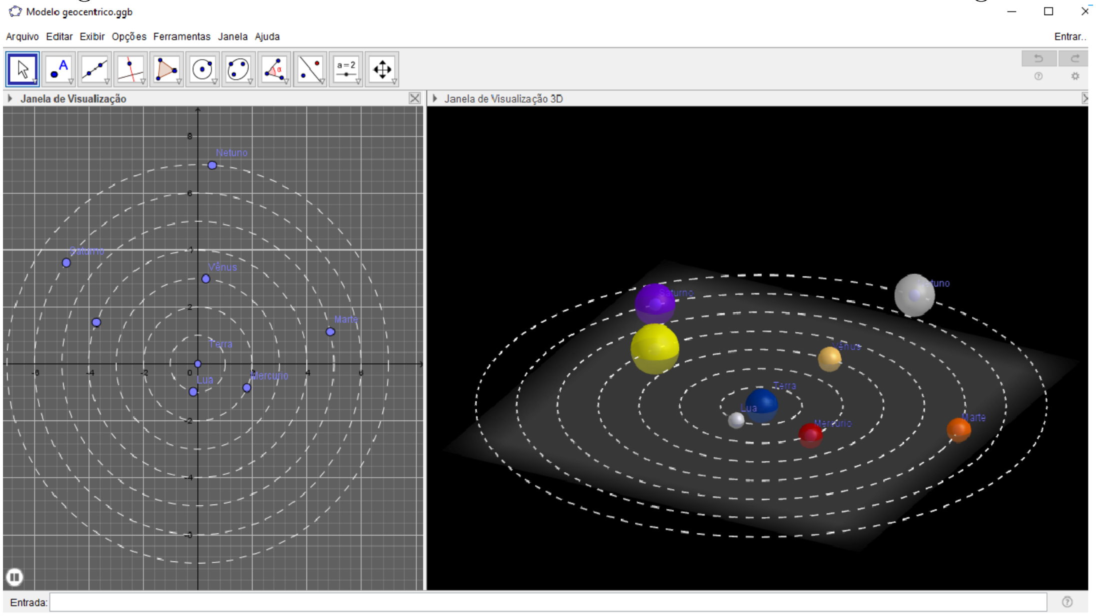
Fonte: Elaborado pelo autor

5. Siga todos os passos anteriores para criar as órbitas e os demais planetas. Escolhendo um espaçamento adequado entre as órbitas e assim como os tamanhos de cada planeta.

6. Sob a janela de visualização 3D, clique utilizando o botão direito do mouse e em seguida selecione a opção *Janela de visualização...*, *Básico*, *outros*, *cor de fundo*, selecione a cor preta.

7. Por fim, para animar o sistema solar, clique em *Exibir*, *Janela de Álgebra*, na janela que se abrirá constará todas as cônicas, esferas e pontos criados até o momento. Clique com o botão direito sobre o ponto Lua e em seguida na opção *Propriedades*,*Básico*, clique em *Animar*, volte a aba principal e clique em *Álgebra*, na opção *velocidade* escolha um número para colocar e lembre-se que para cada planeta da sequência esse número deve ir diminuindo, para o nosso modelo escolhemos o número 5 e fomos diminuindo gradativamente, já na opção *Repetir* selecione a opção *Crescente*. Repita o mesmo processo para os demais astros.

Figura 29: Modelo Geocêntrico do Sistema Solar construído no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

É possível ocultar tudo que não se deseja que apareça, como alguns objetos ou seus nomes, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto que se deseja ocultar e em seguida escolher a opção *Exibir Objeto* caso se deseje ocultar um objeto ou *Exibir Rótulo* caso se deseje ocultar o nome do objeto. Já para ocultar os eixos, basta clicar com o botão direito do mouse sobre um espaço vazio existente na janela de visualização e em seguida clique na opção *Eixos*.

Pronto nosso modelo geocêntrico simples do Sistema Solar está finalizado.

CONSTRUINDO O MODELO GEOCÊNTRICO PTOLOMAICO

A construção quando comparada ao modelo anterior somente difere na introdução dos epiciclos, os quais podem ser construídos da seguinte maneira:

1. Após a criação da órbita do planeta Mercúrio (o processo será igual para os demais planetas) crie uma reta coincidente com eixo x, utilizando a ferramenta *Reta* clique sobe o ponto de origem do plano cartesiano e sobre um ponto pertencente a circunferência m (órbita de Mercúrio) e também pertencente ao eixo x (chamaremos a reta de reta r).

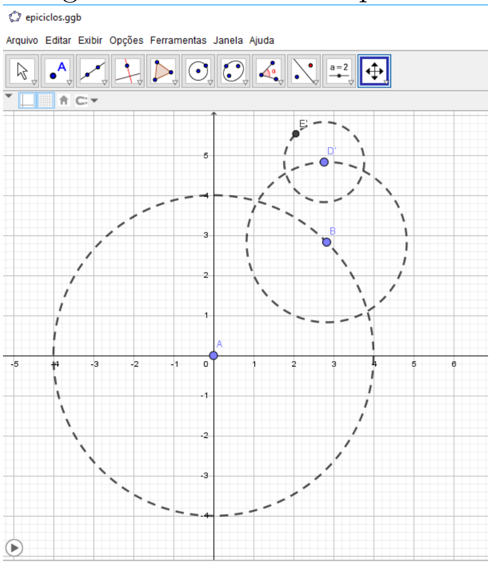
2. Crie um segundo ponto (ponto M) pertencente a mesma circunferência mas em posição diferente do ponto criado anteriormente. Utilize a ferramenta *Ângulo*, clicando sobre o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência m, na origem do plano cartesiano e no ponto M, obtêm-se o ângulo α.

3. Sobre o ponto M cria-se uma nova circunferência de raio inferior ao raio da circunferência m, crie um ponto qualquer pertencente a nova circunferência.

4. Utilizando a ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa* sobre o último ponto criado e o ponto M, aparecendo um campo de entrada a qual deve digitar-se o valor do ângulo, utilizaremos como parâmetro o ângulo α, como exemplo colocamos 2α, obtendo-se um novo ponto pertencente a última circunferência criada, o qual sua posição dependerá do valor de α. Esse último ponto pode ser o centro do planeta Mercúrio ou se necessário pode ser o centro de um novo epiciclo para o desenvolvimento de sistemas mais complexos.

5. Oculte todos os pontos, retas e ângulos e anime a órbita de Mercúrio animando o ponto M.

Figura 30: Sistema de epiciclos



Fonte: Elaborado pelo autor

6. Agora repita o mesmo processo para os demais planetas.

CONSTRUINDO O MODELO HELIOCÊNTRICO

Para a criação desse modelo, devemos ser criativos quanto ao uso das ferramentas matemáticas, uma vez que esse modelo possui algumas características próprias.

1. Começamos abrindo o programa e clicamos em *Exibir*, *Janela de visualização 3D*, embora iramos trabalhar na maior parte do tempo na janela 2D, a janela 3D auxiliará na visualização do modelo.

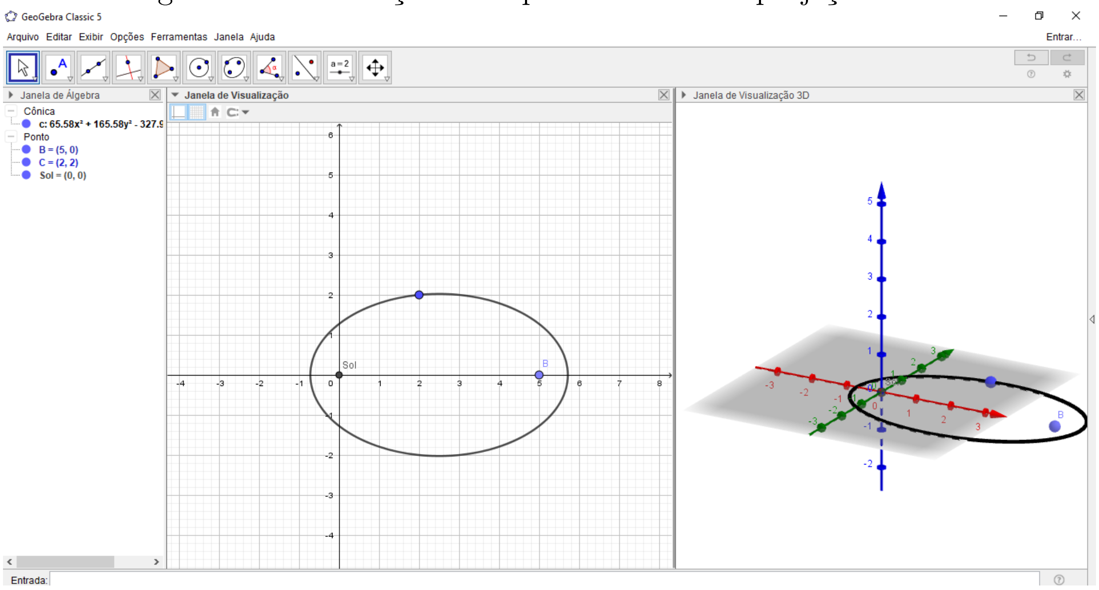
2. Clique na ferramenta *Elipse*, e para cria-la, precisamos determinar dois elementos, as coordenadas dos focos e um ponto qualquer pertencente a elipse.

   Fixe o primeiro ponto foco na origem, e o segundo foco em um ponto qualquer pertencente ao eixo x, em seguida escolha um ponto qualquer pertencente a elipse (dica: escolha um ponto em que se tenha a impressão visual de elipse e não de uma circunferência), e pronto temos nossa elipse principal, todas as demais órbitas serão baseadas nessa elipse.

3. Oculte o ponto utilizado para criar a elipse e renomeie o ponto sobre a origem de Sol.

4. Crie um ponto qualquer sobre a elipse e renomeie de Mercúrio (não utilize o mesmo ponto já utilizado para criar a elipse), a criação dos planetas e do Sol é análogo aos modelos anteriores.

Figura 31: Construção da elipse em 2D e sua projeção em 3D



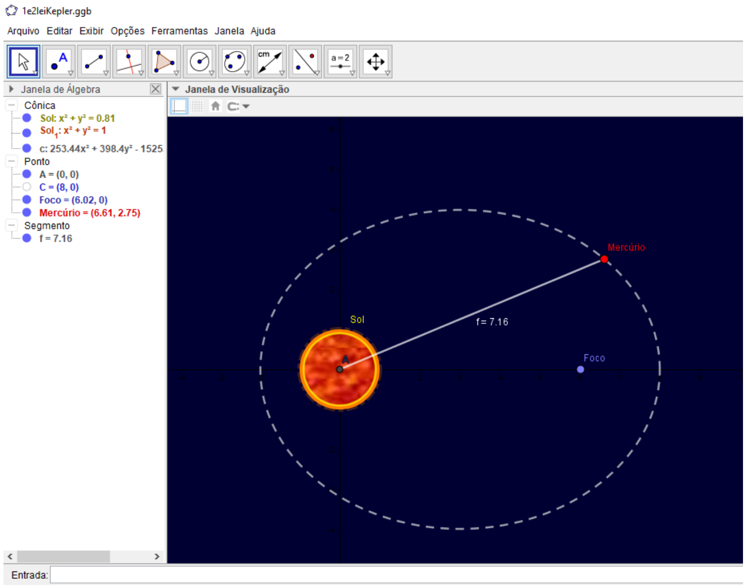
Fonte: Elaborado pelo autor

Não utilizaremos a segunda lei de Kepler por completo, mas simularemos a velocidade de translação dos planetas conforme sua posição, ou seja, mais lento quando no Afélio e mais rápido no Periélio. Para tal tarefa necessitamos de um pouco de criatividade, utilizaremos como parâmetro para a velocidade de translação de cada planeta distância existente entre o planeta e o Sol.

5. Primeiramente, crie um seguimento ligando o Sol ao ponto criado (Mercúrio) usando a ferramenta *Segmento*, em seguida utilizando a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* clicamos sobre o segmente previamente criado, obtendo seu comprimento.

   No nosso caso o segmento criado fora denotado por f, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto pertencente a elipse (Mercúrio), em seguida em propriedades. No campo *Básico* é possível animar o ponto assim como nos outros modelos, mas não ha necessidade de ser feito agora, clique em *Álgebra*, e coloque no campo *Velocidade* o parâmetro f, dessa forma o ponto irá se deslocar conforme o valor do comprimento do segmento, contudo desejamos que quanto menor for o segmente mais rápido o planeta deve se deslocar, dessa forma basta fazer o inverso $\dfrac{k}{f}$, onde k é uma constante qualquer, mas lembre-se da terceira lei de Kepler, ou seja, quanto mais distante o planeta for, menor o valor de k deverá ser, já no campo *Repetir*, mantenha em crescente assim como realizado nos modelos anteriores.

Figura 32: Visualização do modelo heliocêntrico que considera parcialmente a 2ª lei de Kepler



Fonte: Elaborado pelo autor

6. Repita o processo para as demais órbitas em seguida repita o processo utilizado para a criação dos demais planetas com exceção de Plutão.

7. Para a construção da órbita de Plutão e sua lua, devemos criar um plano levemente inclinado o qual servirá de base para toda a construção.

8. Primeiramente devemos construir um vetor levemente com uma pequena inclinação em relação ao eixo z, para isso basta colocar no campo de entrada o comando $v = (0, -\frac{1}{2}, 3)$, o Geogebra criará um vetor $\vec{v}$ com origem em $(0; 0; 0)$ e este será a normal do plano que desejamos.

   Para criar o plano basta colocar no campo de entrada o seguinte comando:

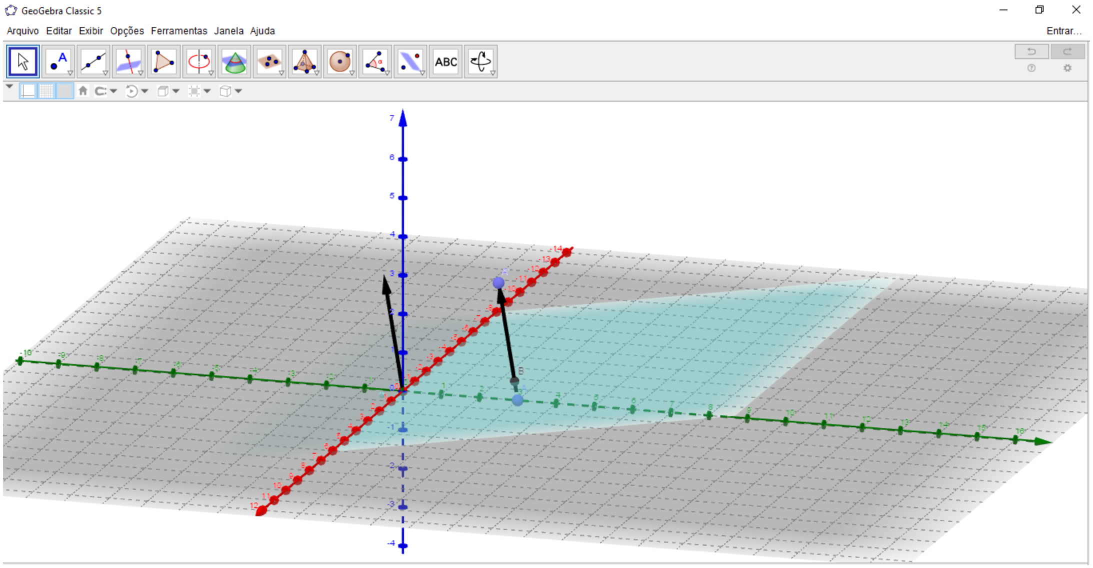
$$-\frac{1}{2}y + 3z = 0$$

9. Crie um segundo vetor paralelo ao primeiro utilizando a ferramenta *Vetor a Partir de um Ponto*, clique no foco e no vetor $\vec{v}$ previamente criado.

10. Crie um seguimento de reta utilizando a ferramenta *Seguimento*, e clicando sobre o foco e sobre o ponto criado pelo último vetor.

11. A seguir, utilize a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e clique sobre o plano e o seguimento criado, obtendo dessa forma um ponto que é a projeção ortogonal do foco sobre esse nosso novo plano.

Figura 33: Plano inclinado que contem a órbita de Plutão



Fonte: Elaborado pelo autor

12. Crie um ponto qualquer sobre o segundo plano (mas o ponto deve ser exterior a todas as outras elipses já criadas), agora podemos criar a órbita de Plutão, basta utilizar a ferramenta *Elipse*, clicar sobre os seguintes pontos: Sol, projeção do foco sobre o novo plano e último ponto criado.

13. Oculte o ponto utilizado para criar a elipse e crie um ponto qualquer pertencente a elipse, renomeie de ponto P, crie um novo vetor com a mesma direção dos vetores anteriores mas com origem em P e renomeie de vetor $\vec{w}$.

14. Utilizando a ferramenta *Círculo (Centro - Raio + Direção)*, clique sobre o ponto P e sobre o vetor $\vec{w}$, digitando o raio desejado (para nosso modelo escolhemos o valor 1).

15. Sobre a circunferência, crie um ponto qualquer e em seguida crie uma reta que passe por este ponto e pelo centro da circunferência, use a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, clique sobre a reta criada e sobre a circunferência obtendo um ponto diametralmente oposto ao primeiro. Oculte os vetores, a reta, o P.

16. Utilize o primeiro ponto criado como centro de Plutão renomeando de Plutão e o segundo ponto como centro da lua de Plutão. Para animar a utilize os mesmos processos utilizados nos planetas dos modelos anteriores.

17. Para os anéis e campos de asteroides, basta utilizar circunferências e elipse de cores, traçados e raios diferentes.

ANEXO A - DADOS DO BRASIL NO PISA 2015

A tabela 1 apresenta a descrição dos seis níveis de proficiência da escala de matemática do PISA 2015, bem como o percentual de estudantes da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e do Brasil em cada nível, com base na edição de 2012, uma vez que não houve novos itens em 2015.

Tabela 1: Descrição e percentual de estudantes nos seis níveis de proficiência em matemática – PISA 2015

Nível	**Escore mínimo**	**Percentual de estudantes no nível**	**Características das tarefas**
6	**669**	OCDE: 2,31% Brasil: 0,13%	No nível 6, os estudantes são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e na modelagem de situações-problema complexas e de usar seu conhecimento em contextos relativamente não padronizados. Conseguem estabelecer ligações entre diferentes fontes de informação e representações e transitar entre elas com flexibilidade. Os estudantes situados nesse nível utilizam pensamento e raciocínio matemáticos avançados. São capazes de associar sua percepção e sua compreensão junto com um domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais para desenvolver novas abordagens e estratégias e, assim, enfrentar novas situações. Conseguem refletir sobre suas ações e formular e comunicar com precisão suas ações e reflexões relacionadas a constatações, interpretações e argumentos, bem como adequá-las às situações originais.

5	**607**	OCDE: 8,37% Brasil: 0,77%	No nível 5, os estudantes são capazes de desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. Conseguem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. Os estudantes situados nesse nível conseguem trabalhar estrategicamente, utilizando habilidades de pensamento e raciocínio abrangentes e bem desenvolvidas, representações conectadas de maneira adequada, caracterizações simbólicas e formais, e percepção relativa a essas situações. Começam a refletir sobre suas ações e a formular e comunicar suas interpretações e seu raciocínio.
4	**545**	OCDE: 18,60% Brasil: 3,09%	No nível 4, os estudantes conseguem trabalhar de maneira eficaz com modelos explícitos em situações concretas complexas, que podem envolver restrições ou exigir formulação de hipóteses. São capazes de selecionar e integrar diferentes representações, inclusive simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real. Os estudantes situados nesse nível conseguem utilizar suas habilidades pouco variadas e raciocinar com alguma perspicácia, em contextos diretos. São capazes de construir e comunicar explicações e argumentos com base em suas interpretações, argumentos e ações.
3	**482**	OCDE: 24,81% Brasil: 8,58%	No nível 3, os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Suas interpretações são seguras o suficiente para servir de base para construir um modelo simples ou para selecionar e aplicar estratégias simples de resolução de problemas. Os estudantes situados nesse nível conseguem interpretar e utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente com base nelas. Demonstram capacidade de lidar com porcentagens, frações e números decimais e de trabalhar com relações de proporção. Suas soluções indicam que estão envolvidos em interpretações e raciocínios básicos.

2	**420**	OCDE: 22,55% Brasil: 17,18%	No nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que uma inferência direta. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um modo simples de representação. Os estudantes situados nesse nível conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicas para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais dos resultados.
1	**358**	OCDE: 14,89% Brasil: 26,51%	No nível 1, os estudantes são capazes de responder a questões definidas com clareza, que envolvem contextos conhecidos, nas quais todas as informações relevantes estão presentes. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros de acordo com instruções diretas em situações claras. Conseguem executar ações óbvias e de acompanhar de forma imediata os estímulos dados.
Abaixo de 1		OCDE: 8,47% Brasil: 43,74%	A OCDE não especifica as habilidades desenvolvidas.

Fonte: OCDE, INEP.