UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Lindomar de Oliveira Costa

ALGORITMOS:
Uma experiência com alunos do ensino médio

Vitória da Conquista
2018

Lindomar de Oliveira Costa

ALGORITMOS:
Uma experiência com alunos do ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu* Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sergio da Silva Aguiar

Vitória da Conquista
2018

C873a Costa, Lindomar de Oliveira.

Algoritmos: Uma experiência com alunos do ensino médio. / Lindomar de Oliveira Costa, 2018.

76f. il.

Orientador (a): Dr. Sergio da Silva Aguiar.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2018.

Inclui referências. 67 - 71.

1. Algoritmos – Ensino médio. 2. Desafios de travessia e estratégias de ensino. 3. Lógica. I. Aguiar, Sérgio da Silva. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 005.1

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890

UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Lindomar de Oliveira Costa

ALGORITMOS:
Uma experiência com alunos do ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu* Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 13/06/2018.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Sergio da Silva Aguiar – PROFMAT/UESB
(Presidente)

Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira - PROFMAT/UESB
(Examinador)

Profª. Drª. Selma Rozane Vieira - IFBA
(Examinadora)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por oportunizar mais uma etapa de crescimento.

A minha esposa Maria das Dores e minha filha Maria Eduarda pelo estímulo e pela compreensão durante as minhas ausências.

Ao professor Dr. Sergio por aceitar ser meu orientador e contribuir significativamente com a minha formação.

Aos meus companheiros nesta jornada: Rita, Maurício, Paulo, Letsa, Fábia, Fábio e Marcelo (In Memoriam). Não foi fácil, mas o desafio está sendo finalizado.

Aos meus pais pelos exemplos a serem seguidos.

A Maria do Amparo e João Vitor, por me acolher durante algumas etapas nesta jornada.

Aos alunos do primeiro ano B do Colégio Estadual Antônio Batista no ano de 2017, por participarem contribuindo com o desenvolvimento deste trabalho.

À professora Edilaine, por permitir adentrar em sua sala de aula e por apoiar a realização deste trabalho.

A todas as pessoas que contribuíram e estiveram presentes nesta jornada.

RESUMO

Neste trabalho é enfatizada a utilização de algoritmos como ferramenta para solução de problemas combinatórios no ensino médio. Após analisar alguns problemas envolvendo análise combinatória este trabalho foi direcionado para analisar a utilização de algoritmos como ferramenta para solução de problemas combinatórios no Ensino Médio. Neste sentido, foram escolhidos desafios de lógica relacionados com algum tipo de travessia. Estes problemas apresentam uma situação de início (ponto de partida) onde na sequência são propostas algumas tarefas intermediárias e uma situação final (ponto de chegada). Normalmente eles contém restrições para a realização das tarefas impossibilitando algumas de acontecerem, sendo estas excluídas como possibilidade de solução. Neste tipo de problema é preciso estabelecer uma sequência de escolhas viáveis, conduzindo do ponto de partida ao ponto de chegada, ou seja, deve-se construir uma heurística que solucione o problema. O trabalho apresenta uma discussão sobre algoritmos, suas estruturas de elaboração, análise e também uma experiência didática que foi conduzida no Colégio Estadual Antônio Batista localizado na cidade de Candiba-BA em uma turma do primeiro ano do ensino médio integral. A realização da experiência foi dividida em três partes, sendo: sondagem, intervenção e avaliação. No âmbito da Educação Matemática, a utilização desses desafios proporcionaram maior interesse e participação durante as aulas como também direcionou os alunos para a resolução de problemas, investigação matemática e aplicação de noções de algoritmos.

Palavras-chave: Desafios de travessia; Lógica; Ensino Médio; Algoritmos.

ABSTRACT

In this work it is emphasized the use of algorithms as a tool to solve combinatory problems in high school. After analyzing some problems involving combinatorial analysis this work was directed to analyze the use of algorithms as a tool to solve combinatorial problems in High School. In this sense, logic challenges related to some kind of crossing were chosen. These problems present a start situation (starting point) where in the sequence some intermediate tasks and a final situation (arrival point) are proposed. Usually they contain constraints to the accomplishment of the tasks, making some of them impossible, and these are excluded as a possibility of solution. In this type of problem it is necessary to establish a sequence of viable choices, leading from the point of departure to the point of arrival, that is, one must construct a heuristic that solves the problem. The work presents a discussion about algorithms, their elaboration structures, analysis and also a didactic experience that was conducted in the Antônio Batista State College located in the city of Candiba-BA in a class of the first year of high school. The experiment was divided into three parts, namely: survey, intervention and evaluation. In Mathematics Education, the use of these challenges provided greater interest and participation during the classes, as well as directed the students to problem solving, mathematical investigation and application of notions of algorithms.

Keywords: Crossing challenges; Logic; High school; Algorithms.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

As tecnologias digitais estão evoluindo de forma rápida na sociedade atual e estão presentes na realização de tarefas básicas no cotidiano das pessoas e isso provoca indagações referentes à formação educacional dos indivíduos inseridos nesta sociedade. Como instruir um indivíduo, em meio a vasta disponibilidade de tecnologia, para ascensão profissional? Quais ferramentas a escola deve proporcionar para a formação dos cidadãos do século XXI?

Os futuros profissionais para as carreiras tecnológicas deveram dominar as técnicas de criação, utilização e análise de algoritmos. Então surgiu a questão norteadora deste trabalho: Quais estratégias didáticas proporcionam aos alunos do ensino médio a utilização das noções de algoritmos para resolução de problemas?

Ao afirmar que é possível ensinar algoritmos no ensino médio, não é objetivo dentro das atividades previstas para ocorrer neste trabalho, ensinar alguma linguagem de programação aos alunos. O que se espera é que os alunos do ensino médio sejam capazes de raciocinar logicamente empregando recursos do pensamento algorítmico como ferramenta para a resolução de problemas específicos, como por exemplo os desafios de lógica.

Considerando que deve-se utilizar a lógica e seus fundamentos, mesmo ao se defrontar com algoritmos prontos, é que surgiu a motivação para realização de uma experiência didática para registrar a utilização, por estudantes do ensino médio, das noções de algoritmos tendo como gerador os desafios de lógica do tipo travessia e contribuir para o desenvolvimento do pensamento algoritmico para resolução de problemas, em geral.

Para a resolução deste tipo de desafio é necessário organizar uma sequência de ações a serem realizadas, ou seja, deve-se utilizar o pensamento algorítmico e suas estruturas lógicas.

Existem diversos tipos de desafios de lógica e neste trabalho foram selecionados para compor a experiência apenas os desafios do tipo travessia.

A ideia de se investigar a importância do pensamento algorítmico na formação de estudantes do ensino médio surgiu da busca por compreender como a lógica pode interferir nas relações de ensino-aprendizagem e como as estratégias de pensamento são elaboradas para chegar a solução de um desafio através da análise do algoritmo elaborado.

1.1. A importância da lógica

Tendo como ponto de partida o proposto na seção anterior fica evidente que os conhecimentos de lógica contribuem para o desenvolvimento dos estudantes, possibilitando melhores ferramentas para atuar na sociedade que os mesmos estão inseridos. Deixar a lógica de lado e não incluí-la nas atividades de Matemática provoca, segundo Soares (2004, p. 4), “[…] efeitos no entendimento da Matemática e outras linguagens.”

O aluno utiliza noções de lógica quando submetido a processos decisórios que necessitam da identificação da veracidade ou não de uma afirmação. Pela inexperiência ou por não conhecerem ferramentas da lógica matemática estes alunos, segundo Soares (2004) acabam utilizando processos intuitivos, mas:

> Em muitos casos, a intuição nos mostra a verdade, mas em outros ela pode nos pregar uma peça. Nesses momentos, somos levados a buscar um recurso mais eficiente que nos permita afirmar com certeza o que queremos. (p. 1)

Os conhecimentos matemáticos são necessários em diversas situações na atual sociedade e podem ser utilizados “[…] como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento” (BRASIL, 2002, p. 111). Os problemas de travessias contribuem neste sentido, pois exercita a criatividade, a tomada de decisões e a elaboração de estratégias para encontrar a solução adequada proporcionando ao aluno pensar de forma autônoma.

Soares (2004) menciona que o pensamento lógico apresenta vantagens em relação à simples aplicação de fórmulas, pois permite que situações desconhecidas sejam tratadas de forma ordenada, ou seja, são considerados os dados do problema e não apenas a aplicação de fórmulas predeterminadas. Isso significa que através da lógica existe a possibilidade de se elaborar algoritmos que solucionem o problema proposto sem depender previamente de um modelo.

Em diferentes disciplinas os conteúdos apresentados baseiam-se em discernimentos e aberturas que são atribuídas logicamente permitindo que se estabeleça um pensar crítico envolvendo aquisição de conhecimentos. Neste contexto necessita-se compreender o que é lógica.

Apesar de existirem outras definições sobre o estudo de lógica, neste trabalho considera-se a apresentada por Copi (1978, p. 19), sendo a seguinte: “O estudo da Lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto”. Isso significa que o estudo da lógica faz uso de códigos capazes de definirem como raciocinar criativamente atuando na formação de opiniões, deduções e análises de contextos que atribuem significados aos pensamentos. O estudo da lógica oferece subsídio ao aprendizado dos estudantes na forma de raciocinar, na interpretação de conceitos básicos, na verificação formal de instruções e melhor prepara para o entendimento do conteúdo de tópicos mais avançados, conforme Copi (1978).

1.2. Pensamento Lógico

Considerando que a sociedade é constituída por indivíduos lógicos e que a lógica é proveniente de experiências cotidianas, surge a necessidade de proporcionar aos alunos um espaço onde desenvolvam habilidades capazes de contribuir para a aquisição da autonomia na construção do conhecimento. Nestes espaços sugere-se que iniciem a inserção dos alunos ao pensamento algorítmico e computacional que “[…] desde o ensino básico traz vários benefícios no desenvolvimento educacional e motiva o surgimento de futuros profissionais na área da computação” de acordo com Lima e Souza (2015, p. 1)

O pensamento algorítmico consiste em utilizar passos ordenados e conscientes para realização de uma determinada tarefa que demanda uma sequência lógica de ações para a adequada elaboração. Dentre as habilidades e conhecimentos exigidos pela atual sociedade no desenvolvimento de funções profissionais ou cotidianas está o pensamento algorítmico, pois devido ao desenvolvimento tecnológico alcançado é exigido cada vez mais profissionais qualificados para acompanhar e contribuir com esse processo evolutivo.

Sabe-se que o mundo está passando por uma veloz evolução tecnológica baseada em informática. Para que a informação produzida por esses meios seja confiável, existe a necessidade de criação e análise de algoritmos que vão facilitar ou automatizar a realização de tarefas específicas com segurança, daí a necessidade de provocar desde o ensino médio o desenvolvimento do raciocínio algorítmico.

1.3. O sistema educacional

Acompanhando o desenvolvimento globalizado da humanidade, a informática tornou-se um instrumento necessário para o trabalho. Um sistema de ensino que deseje oferecer formação adequada para seu aluno necessita usar novas tecnologias.

O computador e outros aparelhos tecnológicos que eram considerados como ferramentas para especialistas tornaram-se instrumentos necessários ao cotidiano das pessoas. Nas unidades de ensino as novas tecnologias representam a ampliação das potencialidades para aquisição de empregos, de ensino-aprendizagem e de apropriação cultural, sendo evidente que o processo de inserção de inovações tecnológicas não ocorre sem transpor as barreiras dos atuais paradigmas. A realidade das escolas brasileiras apresenta diversos entraves quanto à utilização de novas tecnologias, variando desde a falta de recursos até ausência de profissionais qualificados para fazer uso destas tecnologias.

Para favorecer um trabalho pedagógico eficiente o sistema de ensino deve promover a aproximação dos discentes e docentes ao novo cenário. Com recursos tecnológicos cria-se novas situações de aprendizagem gerando a necessidade de reestruturação dos sistemas de ensino e para tal propõe-se que sejam inseridos nos currículos, desde o ensino médio, os conceitos de algoritmos, pois são através deles que o processo de informatização se torna possível.

Este trabalho está organizado em sete capítulos, onde no primeiro capítulo é apresentado ao leitor uma visão inicial do objeto de estudo, as motivações, as justificativas, o problema de pesquisa e os objetivos que embasaram a elaboração deste estudo.

No segundo e terceiro capítulo é realizada uma descrição das bases teóricas utilizadas para o desenvolvimento desta pesquisa e também das estratégias de ensino utilizadas.

O quarto capítulo apresenta a caracterização dos desafios do tipo travessia, realiza um breve histórico sobre as origens, apresenta também um dos desafios clássicos desta modalidade com o respectivo passo a passo das soluções com comentários sobre regularidades observadas através de estudos já realizados.

O quinto capítulo trata da abordagem metodológica utilizada para implementação desta experiência, descreve o público-alvo, especifica os instrumentos de coleta de dados e as ferramentas de análise e discussão dos dados.

No sexto capítulo discute-se cada uma das etapas realizadas neste estudo, apresenta-se os dados obtidos através de recortes dos materiais coletados e também são expostos os resultados.

O último capítulo enfoca os pontos positivos e as contribuições alcançadas, bem como as limitações deste trabalho.

2. ALGORITMOS

Considera-se algoritmo toda sequência de ações ordenadas, finitas e definidas com intuito de alcançar um objetivo previsto. Para estabelecer esta sequência de ações é necessário ordenar o pensamento utilizando a lógica. A necessidade de se representar formalmente o raciocínio lógico torna importante a elaboração de algoritmos.

Para elaboração correta de um algoritmo deve-se atentar para três propriedades:

I. Cada instrução do algoritmo obrigatoriamente deve ser realizável;

II. As ações devem ser organizadas em uma ordem predeterminada;

III. Faz-se necessário indicar o fim do algoritmo.

A elaboração de um algoritmo é algo subjetivo, pois cada pessoa define uma sequência diferente para resolver o mesmo desafio. É comum a utilização de algoritmos no dia a dia, como exemplo:

- Em uma receita de culinária onde estão especificados os ingredientes a serem utilizados e as instruções a serem seguidas para completar a tarefa;
- Na definição do trajeto da escola para casa, onde se escolhe as ruas por onde se deve passar;
- Na realização da troca de um pneu de carro;
- Na troca de uma lâmpada queimada;

2.1. Formas de representação de um algoritmo

Ao estudar a matemática do ensino médio, o aluno depara-se com vários algoritmos previamente definidos e em muitos casos não são disponibilizados aprofundamentos e análises dos mesmos. A seguir destacam-se algumas formas de representação de algoritmos.

2.1.1. Descrição narrativa

A descrição narrativa faz uso da linguagem natural para indicar os passos necessários para a realização de uma tarefa e pode ser utilizada como um dos primeiros passos na formalização de conceitos referentes aos algoritmos.

Veja a seguir um exemplo de um algoritmo utilizando a descrição narrativa.

Figura 1: Algoritmo para calcular a área de uma sala

```
Início
    - Medir a largura da sala e anotar o resultado;
    - Medir o comprimento da sala e anotar o resultado;
    - Multiplicar o comprimento pela largura e anotar o resultado;
    - O valor da área da sala é o resultado anotado no passo anterior;
Fim
```

Fonte: Autor

2.1.2. Pseudocódigo

O pseudocódigo utiliza-se de uma linguagem flexível fazendo a intermediação entre a linguagem natural e a linguagem de programação. Possui regras predefinidas para sua escrita e facilita o mapeamento para uma linguagem de programação formal. O pseudocódigo mais utilizado no Brasil denomina-se Portugol.

2.1.2.1. Portugol

Portugol consiste na extensão da linguagem natural através de comandos, operadores, funções, funções recursivas, estruturas e construtores de estruturas complexos e foi criado para facilitar o estudo dos algoritmos usando o idioma português, tendo em vista que a maioria das linguagens de programação existentes utilizam o idioma inglês, sendo esta uma barreira para muitos estudantes. É uma forma de escrita estruturada, cuja finalidade é descrever, em uma sequência lógica, os passos para a resolução de um problema. Os algoritmos escritos em Portugol devem ser organizados de maneira que todas as linhas contenham uma única instrução e pode ser elaborado utilizando lápis e papel.

Os pseudocódigos constantes neste trabalho foram elaborados no Portugol Studio que é uma ferramenta desenvolvida pelo Laboratório de Inovação Tecnológica na Educação (LITE) da Universidade do Vale do Itajaí (UNIVALI) para auxiliar os universitários novatos dos cursos de computação nas atividades de ensino-aprendizagem de algoritmos para linguagem de programação. É gratuito e de código aberto permitindo melhorias nas versões existentes. A seguir apresenta-se um exemplo de algoritmo elaborado em Portugol.

Figura 2: Algoritmo da soma de dois números em Portugol

```
programa
 {
    funcao inicio()         {
         real x, y, resultado

         escreva("Digite o primeiro número: ")
         leia(x)

         escreva("Digite o segundo número: ")
         leia(y)

         resultado = x + y

         escreva("\nA soma dos números é igual a: ", resultado)   }
}
```

Fonte: Autor

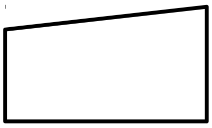
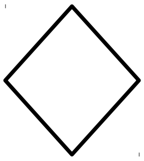
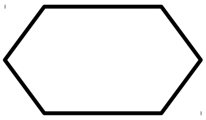
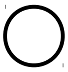
2.1.3. Fluxograma

Os fluxogramas são confeccionados através da utilização de figuras geométricas que ilustram as ações a serem realizadas para solução de um determinado problema, e segundo Gondim e Ambrósio (2008, p. 110), "[…] o ser humano tem mais habilidade para interpretar um algoritmo usando formas visuais que em formato de código texto".

A tabela seguinte apresenta as principais formas geométricas que são utilizadas na confecção de um fluxograma, seus nomes e as funções que cada figura representa no fluxograma.

Tabela 1: Alguns dos símbolos para fluxogramas

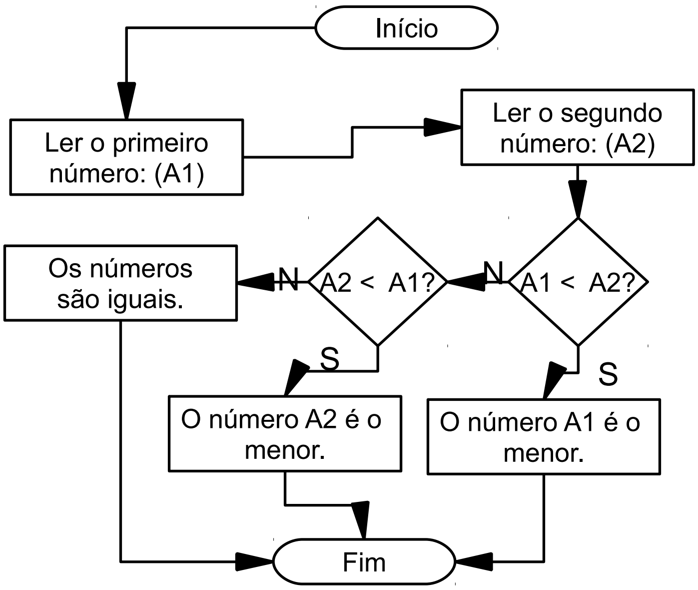
Símbolo	Nome	Função
	Terminador	É utilizado para iniciar e terminar um fluxograma.
	Processo	É utilizado para representar a realização de ações ou operações.

Símbolo	Nome	Função
	Entrada Manual	Usado para representar a inserção de dados para as variáveis.
	Exibir	Usado para identificar a saída de dados por meio de monitor de vídeo.
	Decisão	Utilizado para representar uma ação de escolha.
	Preparação	Utilizado para representar uma ação preparatória para o processamento.
	Conector	Utilizado para conectar elementos que estão separados em uma página.

Fonte: Gomes (2018)

Para ilustrar a construção de um fluxograma realiza-se a seguir um exemplo de algoritmo que compara dois números e decide qual é o menor.

Figura 3: Algoritmo para verificação do menor de dois números

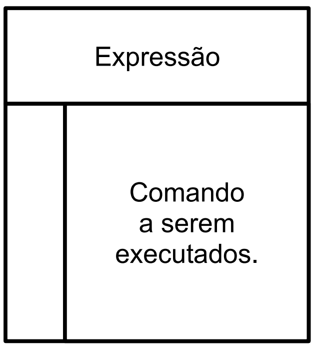
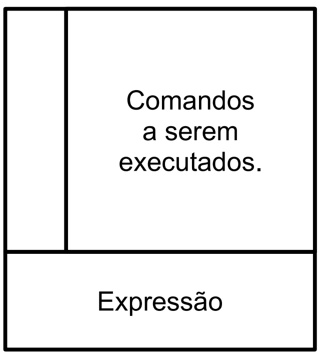


Fonte: Autor

2.1.4. Diagrama de Chapin

O diagrama de Chapin representa o algoritmo utilizando quadros que permitem estabelecer a hierarquia e a estrutura da lógica envolvida na solução. Na tabela seguir estão apresentados os símbolos e seus respectivos significados para serem utilizados na elaboração de um diagrama.

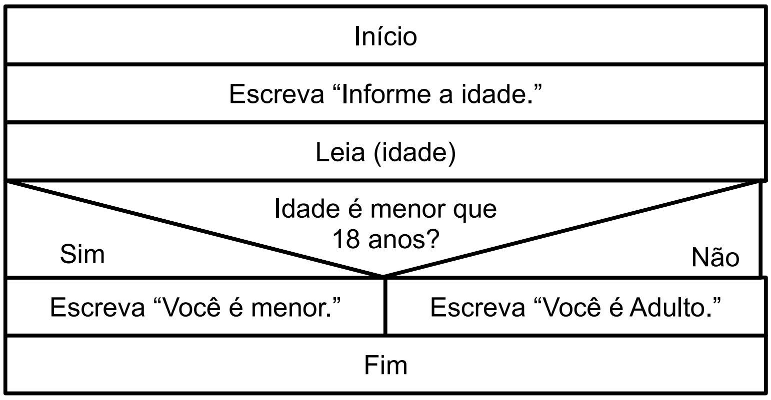
Tabela 2: Alguns dos símbolos utilizados em diagramas de Chapin

Símbolo	Função
	É utilizado para representar início, fim e o processamento.
	Utilizado para representar uma ação de escolha.
	Usado para indicar a repetição de um bloco com o teste no início.
	Usado para indicar a repetição de um bloco com o teste no final.

Fonte: (NASSI–SHNEIDERMAN DIAGRAM, 2018)

Como exemplo apresenta-se um algoritmo que retorna se uma pessoa é adulta ou não a partir da entrada da idade da pessoa utilizando o diagrama de Chapin.

Figura 4: Exemplo de Diagrama de Chapin



Fonte: Autor

2.2. Refinamento de Algoritmos

O refinamento é uma técnica que divide o problema em subproblemas e as soluções para cada um desses subproblemas gerados são condensadas e chega-se à solução geral do problema proposto. Essa técnica é denominada de refinamento sucessivo e permite abordar o problema de maneira mais objetiva diminuindo-se a probabilidade de erros e facilitando a sua reparação caso ocorram. Observe um exemplo de refinamento no algoritmo da divisão.

Tabela 3: Etapa 1 – Descrição geral

```
Início
   Insira o dividendo;
   Insira o divisor;
   Quociente = dividendo / divisor
Fim
```

Fonte: Autor

O algoritmo na forma como está estruturado apresentará erro quando o divisor for igual a zero e para corrigir é necessário refinar.

Tabela 4: Etapa 2 – Controlando o erro

```
Início
   Insira o dividendo;
   Insira o divisor;
   Se o divisor ≠ 0 então Quociente = dividendo / divisor;
   Se o divisor = 0 então escreva “Não é possível realizar a divisão”;
Fim
```

Fonte: Autor

2.3. Alguns exemplos de Algoritmos

Para exemplificar que algoritmos fazem parte do cotidiano do aluno do ensino médio e que podem ser trabalhados com estes estudantes. Apresenta-se a seguir os algoritmos: de Euclides, do fatorial de um número natural, do zero de uma função afim e dos zeros de uma função quadrática.

2.3.1. Algoritmo de Euclides

O algoritmo de Euclides é uma forma simples e elegante de se calcular o máximo divisor comum (MDC) de dois números inteiros diferentes de zero. Segundo Hefez (2014, p. 89) este algoritmo "[…] é um primor do ponto de vista computacional e pouco conseguiu-se aperfeiçoá-lo em mais de dois milênios."

A aplicação do algoritmo de Euclides obedece as seguintes regras:

Considere $a, b \in \mathbb{N}$ e suponha $b \leqslant a \ com \ a,\ b \neq 0.$

Caso $b = 1$ ou $b = a$ ou que b seja divisor de a, segue que $MDC(a,b) = b.$

Para o caso em que $1 < b < a$, onde b não seja divisor de a e utilizando a divisão Euclidiana, pode-se escrever: $a = b \cdot q_1 + r_1$ com $0 < r_1 < b$. Neste caso há duas opções.

(a) O resto r_1 é divisor de b. Daí segue que $MDC(a,b) = r_{1.}$ e o algoritmo é finalizado.

(b) O resto r_1 não é divisor de b. Aplica-se a divisão Euclidiana de b por r_1 e obtêm-se: $b=(r_1) \cdot q_2 + r_2$ com $0 < r_2 < r_{1.}$

Neste caso há duas opções novamente.

(a_1) O resto r_2 é divisor de r_1 Daí segue que $MDC(a,b) = r_{2.}$ e o algoritmo é finalizado.

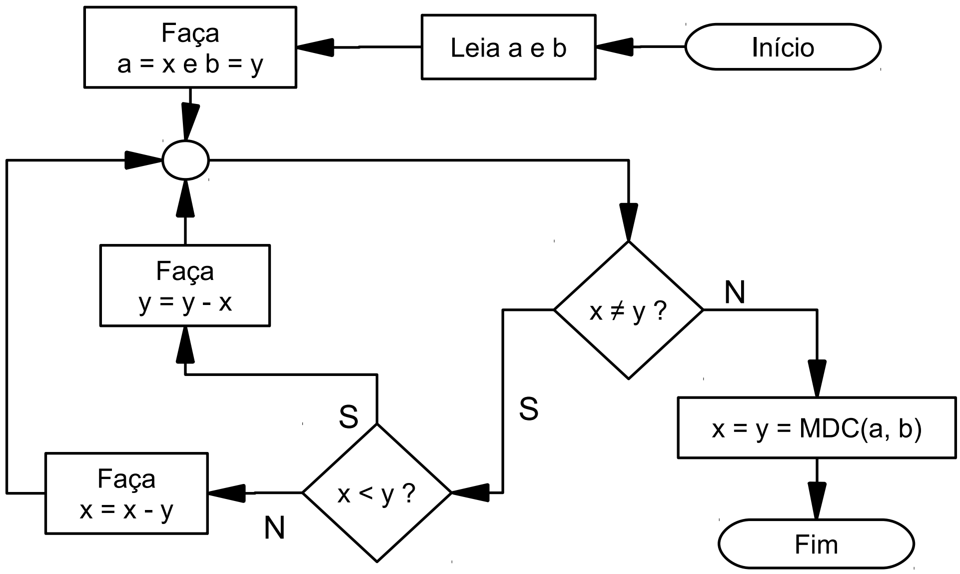
(b_1) O resto r_2 não é divisor de $r_{1.}$ Aplica-se a divisão Euclidiana de r_1 por r_2 e obtêm-se: $r_1=(r_2) \cdot q_3 + r_3$ com $0 < r_3 < r_{2.}$

Este processo é repetido até finalizar o algoritmo. É garantido que o algoritmo finalizará pois, caso contrário, haveria a formação de uma sequência de números naturais ($b > r_1 > r_2 > \ldots$) que não possui um menor elemento o que contraria o princípio da Boa Ordenação dos naturais.

Portanto existirá algum n para o qual o resto $r_{(n+1)}$ será divisor de r_n e o algoritmo será finalizado obtendo $MDC(a,b) = r_{(n+1)}$.

As figuras 5 e 6 apresentam o algoritmo de Euclides em forma de fluxograma e de Pseudocódigo, respectivamente.

Figura 5: Fluxograma do Algoritmo de Euclides



Fonte: Autor

Figura 6: Pseudocódigo do Algoritmo de Euclides

```
programa {
    funcao inicio()        {
         inteiro x, y, a, b
         escreva("Digite o Primeiro Número: ")
         leia(a)
         escreva("Digite o Segundo Número: ")
         leia(b)
         x = a
         y = b
         enquanto(x != y)
                   { se(x > y)
                             { x = x – y }
                   senao
                             { y = y – x }        }
                   se(x == y)
                   { escreva("\nO MDC(",a,", ",b,") = ",x,"\n") }
    }
}
```

Fonte: Autor

2.3.2. Fatorial de um número natural

O fatorial de um número natural n é definido como o produto dos números naturais de n até 1. De forma genérica é representado por: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ \ldots \ \cdot 2 \cdot 1$ e por definição $0! = 1$.

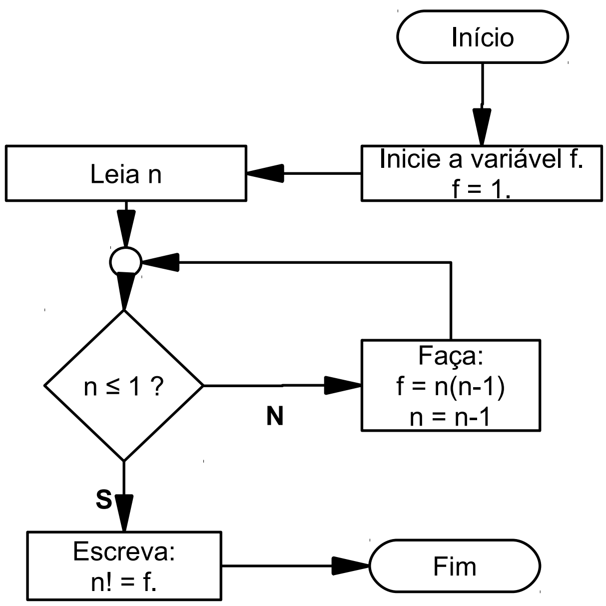
Figura 7: Pseudocódigo do Fatorial de um número natural

```
programa {
    funcao inicio()        {
        inteiro n, fator, r = 1
        cadeia t = ""
        escreva ("Insira um número natural: ")
        leia (n)

        para (fator = n; fator >= 1; fator--)        {
                se(fator == 1)
                {        t = t + fator        }
                senao
                {        t = t + fator + " x "        }
        r = r * fator
        }
    escreva ("\n",n, "! = ", t, " = ", r,"\n")
    }
}
```

Fonte: Autor

Figura 8: Fluxograma do Fatorial de um número natural



Fonte: Próprio Autor

2.3.3. Zero de uma Função Afim

Toda função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ com constantes $a,b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ tais que $f(x)=ax+b$ com $x \in \mathbb{R}$ é denominada de função afim.

O gráfico desta função é uma reta passando pela origem se $b = 0$ ou pelo pelo eixo das ordenadas no ponto $(0,b)$ se $b \neq 0$.

É considerado raiz de uma função afim o valor da abscissa que satisfaça $f(x)=0$.

Figura 9: Pseudocódigo para raiz de uma Função Afim

```
programa
{
    funcao inicio()
    {

    real x, a, b

    escreva("Digite o valor de a: ")
    leia(a)
    escreva("Digite o valor de b: ")
    leia(b)

    se(a != 0)
    {
        x = -b/a
        escreva("\nA raiz é X = ", x,"\n")
    }

        senao
        {
                escreva("\nO coeficiente 'a' deve ser diferente de '0'\n")
        }
    }
}
```

Fonte: Autor

2.3.4. As raízes da Função Quadrática

Toda função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ com constantes $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ tais que $f(x)=ax^2+bx+c$ com $x \in \mathbb{R}$ é denominada de função quadrática.

O gráfico desta função é uma parábola com a concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$.

As raízes de uma função quadrática são dadas pela solução da equação $f(x)=0$. Na figura a seguir está descrito em Portugol o algoritmo que determina as referidas raízes.

Figura 10: Algoritmo das raízes da Função Quadrática

```
programa
{
    inclua biblioteca Matematica --> mat

    funcao inicio()
    {
    real x1, x2, delta, b2, a, b, c

    escreva("Digite o valor de a: ")
    leia(a)
    escreva("Digite o valor de b: ")
    leia(b)
    escreva("Digite o valor de c: ")
    leia(c)

    b2 = b*b
    delta = b2 - 4 * a * c

    se(a != 0)
    {
    se(delta > 0)
    {
        escreva("\nExistem duas raizes diferentes:\n")
        x1 = (-b+mat.raiz(delta, 2.0)) / 2*a
        x2 = (-b-mat.raiz(delta, 2.0)) / 2*a
        escreva("\nPrimeira raiz X' = ", x1,"\n")
        escreva("Segunda raiz X'' = ", x2,"\n")
    }
        senao
        se(delta == 0)
                {
                        escreva("\nDuas raízes iguais: \n")
                        x1 = (-b+mat.raiz(delta, 2.0)) / 2*a
                        x2 = (-b-mat.raiz(delta, 2.0)) / 2*a
                        escreva("\nPrimeira raiz X' = ", x1,"\n")
                        escreva("Segunda raiz X'' = ", x2, "\n")
                }
                senao
                se(delta < 0)
                        {
                                escreva("\nAs raízes não pertencem aos números reais\n")
                        }
    }
    senao
    {
        escreva("\n'A' deve ser diferente de '0'\n")
    }
    }
}
```

Fonte: Autor

3. PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

O sorteio de uma loteria, um bingo, um campeonato esportivo, a elaboração de um cardápio, a organização e distribuição de pessoas em grupos são exemplos de situações que permitem a aplicação de conhecimentos e propriedades de combinatória.

O problema da travessia também se enquadra na classe de problemas de natureza combinatória segundo a definição apresentada por Borba (2010, p. 3) que os caracterizam como “[…] um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) [...]”.

Partindo desta definição, algumas indagações surgem como exemplos de como é importante se pensar numa maneira de resolver um problema combinatório. Será que as ações foram realizadas por tentativa? Ou por uma maneira geral de resolução? A descrição dos passos da resolução está apresentada de maneira clara? Caso a descrição esteja apresentando um passo a passo de como proceder para chegar ao resultado pretendido considera-se que foi produzido um algoritmo.

O raciocínio combinatório deve ser estimulado através de processos que exigem construções de modelos simplificados que podem ser usados para explicar a situação. Segundo Borba, Rocha e Azevedo (2015) existem cinco tipos de problemas considerados em combinatória, que são: os de existência, enumeração, contagem, classificação e otimização. No ensino básico são explorados, na maior parte dos casos, os de contagem e enumeração.

Ainda segundo Borba, Rocha e Azevedo (2015) as intervenções rápidas também auxiliam no desenvolvimento do pensamento combinatório por permitirem estimular o aluno usando diversas formas de abordagem para problemas desse tipo.

Gerdentis (2014) menciona que situações onde são utilizadas o raciocínio multiplicativo fazem parte do tipo de pensamento considerado como raciocínio combinatório.

Faz parte da realidade de muitas escolas no Brasil a utilização demasiada de fórmulas prontas para abordagens de problemas que envolvem o raciocínio combinatório em detrimento de proporcionar aos alunos situações desafiadoras que permitam o desenvolvimento de estratégias diversificadas capazes de mobilizar o gerenciamento de informações disponíveis provendo os alunos da ampliação de seus conhecimentos e aumento da autoconfiança.

A árvore de possibilidades é apontada por Gerdentis (2014, p. 69) como uma construção que motiva e é capaz de sistematizar o princípio fundamental da contagem, porém admite que “[...] é uma técnica limitada para problemas que apresentam um número elevado de possibilidades de respostas”.

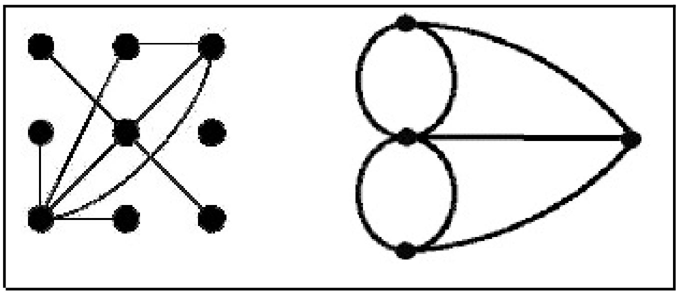
Em relação ao nível escolar existem as seguintes situações combinatórias: no ensino fundamental trabalha-se o produto cartesiano e situações associadas à ideia de combinação; No ensino médio trabalha-se com arranjos, permutações e combinações.

Para auxiliar os estudos de problemas combinatórios utiliza-se de uma estrutura conhecida como grafos.

3.1. Grafos

Um grafo G consiste num conjunto finito e não vazio V de elementos denominados vértices ou nós, que podem ou não estar ligados aos pares por arestas. O conjunto finito formado por essas arestas é denominado A. Portanto escreve-se G = (V, A) para indicar que o grafo tem o conjunto de vértices V e o conjunto de arestas A.

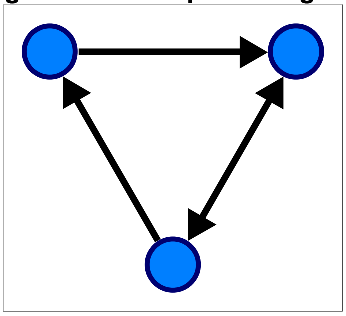
Figura 11: Exemplos de Grafos



Fonte: Próprio Autor

Os grafos são muito utilizados para resolução de problemas envolvendo transportes, logística, redes de computadores, internet e a depender da aplicação as arestas poderão ser orientadas ou não, pode permitir que arestas conectem ao próprio vértice e podem ser utilizados valores para definir o peso de cada arestas. O grafo que possui arestas associadas a representação de direções é denominado de dígrafo ou grafo orientado.

Figura 12: Exemplo de Dígrafo



Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a2/Directed.svg>. Acesso em: 21 Abr. 2018.

3.2. Tipos de Grafos

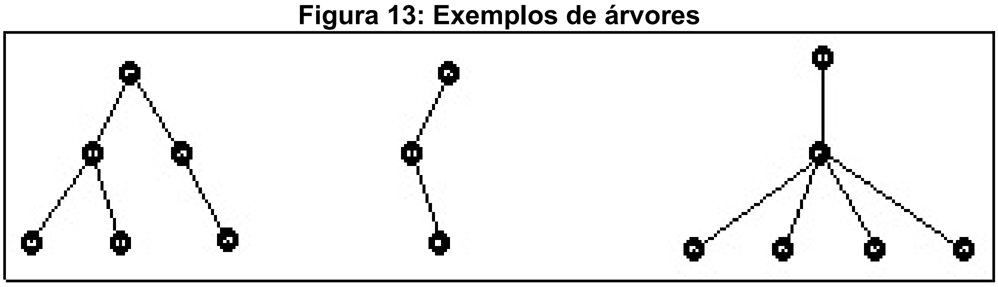
Segundo a teoria dos grafos algumas das classificações são: Grafo simples, Grafo completo, Grafo nulo, Grafo vazio, Grafo trivial, Grafo regular, Multigrafo, Pseudografo, Grafo conexo, Árvore, Floresta, Grafo planar, Grafo bipartido, Grafo bipartido completo, Grafo k-partido.

A seguir define-se o grafo do tipo árvore por possuir características que podem ser utilizadas no estudo dos problemas de travessia.

3.3. Árvores

Um grafo G é denominado árvore se ele for conexo e não contiver qualquer ciclo como subgrafo. Um grafo é conexo se para quaisquer dois vértices de G pode ser conectado por um caminho, ou seja, G precisa de uma quantidade mínima de arestas que satisfaçam a essa condição.

Figura 13: Exemplos de árvores



Fonte: Autor

3.4. Algoritmos de busca

Existem diversas formas de realizar uma busca em um grafo. Cada algoritmo define o padrão a ser seguido para realizar a escolha dos vértices a serem visitados.

As estratégias de busca são avaliadas de acordo com critérios como completeza, complexidade de tempo, complexidade de espaço e otimização. Completeza significa que o algoritmo será capaz de encontrar a solução, caso ela exista; complexidade de tempo está relacionada à quantidade de nós envolvidos na busca e gerados pelo algoritmo; complexidade de espaço está relacionada com a capacidade da memória disponível; otimização significa encontrar a melhor solução, ou seja, o caminho com menor custo.

Ao implementar um algoritmo de busca deve-se identificar a geração de processos repetidos que podem transformar um problema de tempo linear em um problema de tempo exponencial.

Há dois tipos principais de algoritmos de buscas, sendo: busca cega e busca heurística. A busca cega trata-se de tentar resolver um problema utilizando apenas as proposições oriundas da formulação do problema. Partindo de um ponto qualquer gera-se novos estados e verifica se o objetivo foi atingido. A busca heurística considera o objetivo do problema para realizar a escolha do caminho a percorrer, ou seja, o conhecimento já formalizado sobre o problema guia a busca.

Considere como exemplo a situação do submarino Argentino San Juan que desapareceu em alto-mar quando fazia o trajeto de origem na Patagônia com destino a Mar del Plata. Um algoritmo cego faria a busca em todo o oceano atlântico. Já uma busca com heurística envolvida iniciaria pela última localização conhecida do submarino e prosseguiria em direção definida pelas pistas existentes.

A estrutura dos algoritmos de buscas considera quatro etapas distintas:

- As condições iniciais do problema;
- As ações que devem ser realizadas para resolver o problema;
- Teste do resultado obtido para verificar se é o estado final;
- E o custo da solução.

Uma solução é caracterizada por uma sequência de passos que conduzem o estado inicial ao estado final. A solução considerada ótima é a de menor custo.

3.4.1. Busca em profundidade

A busca em profundidade é uma busca cega que utiliza um algoritmo que permite visitar todos os vértices de um determinado grafo percorrendo através das arestas que conecta um vértice a outro.

Este tipo de busca percorre todo o ramo de uma árvore primeiro, caso não alcance o objetivo retorna ao nó anterior e continua a busca no próximo ramo. Este algoritmo basicamente verifica se todos os vértices estão conectados permitindo serem acessados a partir de qualquer outro vértice (através das arestas) do grafo e enquanto faz a verificação vai numerando os vértices acessados na ordem do percurso desenvolvido.

3.5. Algoritmos não-determinísticos

Segundo Becceneri (2013) os algoritmos que produzem resultados diferentes considerando a mesma entrada são classificados como algoritmos não-determinísticos.

Argenta (2012) afirma que apesar da aleatoriedade os resultados apresentam alguma similaridade quanto ao objetivo, caso o algoritmo utilizado seja robusto e que estes algoritmos possuem inspiração na natureza. Nos problemas de travessia é notável essa característica devido ao fato de ser possível apresentar várias heurísticas que os solucionem.

Para Leal (2002) algoritmos não-determinísticos possuem em sua composição dois estágios disjuntos, sendo: a estimativa e a checagem.

Martinhon (2002) apresenta uma forma de interpretar um algoritmo não-determinístico baseada num processamento paralelo, ilimitado e propõe que essa forma abstrata de interpretação permite classificar os “[…] os problemas de decisão quanto ao seu grau de dificuldade [...]” (MARTINHON, 2002, p. 8). Para exemplificar, é como se o algoritmo fizesse cópias do seu processo de execução e modificasse a resposta a ser testada em cada uma dessas cópias. A estrutura destes algoritmos é formada por comandos que instruem processos de “[…] repetição, decisão, atribuição [...]” (MARTINHON, 2002, p. 30) e também processos de escolha e finalização podendo ser fracasso ou sucesso.

Algoritmos não-determinísticos são utilizados na busca por soluções de problemas classificados como NP ou NP-completos. Essas classes de problemas demandam algoritmos com alto custo (tempo) de computação. Os NP-completos tiveram a existência provada na década de setenta do século XX por Steve Cook e Leonid Levin de forma independente, segundo Cardoso (2012).

Os problemas NP-completos estão contidos na classe denominada NP. Os problemas NP são aqueles em que se pode verificar a validade de uma solução utilizando algoritmos com custo de computação polinomial e trata-se de problemas de decisão.

4. PROBLEMAS DE LÓGICA DO TIPO TRAVESSIAS

Neste estudo são considerados problemas do tipo travessia os que apresentam uma situação de início (ponto de partida) onde na sequência são propostas algumas tarefas intermediárias e uma situação final (ponto de chegada). Normalmente contém restrições para a realização das tarefas impossibilitando algumas de acontecerem, sendo estas excluídas como possibilidade de solução. Para resolver este tipo de problema é preciso estabelecer uma sequência de escolhas viáveis, conduzindo do ponto de partida ao ponto de chegada.

Para Ascher (1990), os problemas de travessia são enigmas simples e acessíveis porque não dependem de um corpo específico de conhecimento e, no entanto, são matemáticos, já que um objetivo definido deve ser alcançado considerando um conjunto de restrições lógicas e que esses enigmas são oriundos das expressões culturais de um povo, sendo assim, ocorrerá variações nos personagens, nas configurações e na forma como o problema lógico é enquadrado.

Alguns autores apontam que desafios de lógica proporcionam a motivação, o desenvolvimento da criatividade e situações de ludicidade. Outros inserem os problemas de travessia como parte da matemática recreativa.

A motivação é apontada por Moser (2008) como algo proveniente do trabalho com desafios e destaca que este é um fator muito importante para que ocorra o envolvimento do aluno nas atividades propostas.

O desenvolvimento da criatividade também é registrado por Moser (2008, p. 19) ao afirmar que “[...] quanto mais cedo o indivíduo tem oportunidade de usar a sua criatividade, mais capacidade criativa terá, sendo essencial para seu futuro”.

Os autores Menezes (2004) e Marcén (2014) classificam atividades que possuem as características dos problemas de travessia como parte integrante da matemática recreativa, possibilitando sua utilização como atrativo para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Na visão de Soares e Oliveira (2016, p. 2) os desafios de travessia são consideradas ferramentas lúdicas, pois afirmam que são capazes de criar momentos “[…] onde os alunos se interagem e desenvolvem suas habilidades criando e aplicando estratégias em busca de uma explicação para uma situação que necessita de uma resposta compreensiva.”

Para tópicos mais avançados Lampis e Mitsou (2007) consideram que os problemas de travessia de rio são interessantes ao menos por duas razões: a primeira por derivar de um desafio clássico e ser divertido ao resolver; a segunda por permitir a aplicação de algoritmos de profundidade e apontam ainda aplicações possíveis na área da criptografia.

4.1. Um pouco de História

Foram identificadas dois tipos principais de versões para os problemas de travessia, segundo Ascher (1990), sendo: as ocidentais e as africanas.

Nas versões ocidentais todos compartilham da mesma estrutura lógica que os apresentados nos manuscritos atribuídos a Alcuíno de York e tem o seguinte formato: “A, B, C devem ser transportados através de um rio em um barco que só suporta o remador humano e um dos itens A, B ou C; nem A nem C podem ser deixados sozinhos com B em qualquer uma das margens.” (ASCHER, 1990, p. 26, tradução nossa). Essas versões são encontradas em coleções folclóricas de países como Dinamarca, Rússia, Itália, País de Gales e Estados Unidos.

As versões africanas apresentam as mesmas estruturas lógicas e foram encontradas na Etiópia, Cabo Verde e Camarões. A estrutura lógica apresentada nas versões africanas difere das versões ocidentais e tem o seguinte formato:

> Agora A, B e C devem ser transportados através de um rio por um humano que pode transportar dois dos itens A, B, C ao mesmo tempo. Nem A nem C podem ser deixados sozinhos com B em qualquer uma das margens. (ASCHER, 1990, p. 27, tradução nossa).

Segundo Ascher (1990) apesar dos objetivos serem semelhantes, atravessar alguns itens de uma margem para outra de um rio, a formatação lógica difere um pouco ao permitir o transporte de dois itens no barco em vez de apenas um e essas caraterísticas não são suficientes para que estejam conectados historicamente.

4.1.1. Alcuíno de York

Alcuíno foi um dos mais notáveis intelectuais do período 500-1000. Ele foi estudante, depois professor e em seguida chefe da escola catedral de Yorkshire numa época em que esta escola era considerada a mais distinta da Inglaterra, segundo Hadley e Singmaster (1992).

Após aceitar o convite de Carlos Magno, na época Rei dos Francos, Alcuíno foi designado dirigente da escola do palácio situado na capital Aachen onde também atuou como conselheiro dos assuntos educacionais e foi o responsável pela reforma da educação que reavivou o aprendizado em toda a Europa, afirmam Hadley e Singmaster (1992).

Outros trabalhos foram realizados por Alcuíno e os tópicos aos quais se dedicava a escrever tinha como público-alvo os jovens, pois para a maior parte dos historiadores "[…] Alcuíno escreveu para principiantes [...]" (BOYER, 1974, p. 182). Atribui-se a Alcuíno a autoria do manuscrito *Propositiones ad Acuendos Juvenes* contendo uma lista de problemas em Latim, dentre os quais estão quatro problemas de travessia.

Figura 14: Alcuíno de York

Fonte: <http://escoladeartesliberais.com.br/alcuino-de-yorque-e-escola-palatina/>.
Acesso em: 01 mai. 2018

4.1.2. O manuscrito *Propositiones ad Acuendos Juvenes*

Ao pesquisar a história da matemática recreativa alguns autores, como Hedley e Singmaster (1992), apontam que os primeiros problemas conhecidos de travessia do rio ocorrem no manuscrito *Propositiones ad Acuendos Juvenes*. Os primeiros exemplares deste manuscrito datam do século IX e contém 53 (cinquenta e três) problemas numerados com suas respectivas soluções. A autoria desse manuscrito é atribuída a Alcuíno e foi escrito em Latim. As soluções são esboços simples que verifica que a resposta funciona e não apresenta formalidade algébrica em sua maioria.

Existe também uma tradução comentada deste manuscrito, em inglês, elaborada por John Hadley e David Singmaster cujo título é *Problems to Sharpen the Young*. Esta tradução é mais acessível devido aos comentários elaborados e pela disponibilidade nos meios digitais.

Essa coleção de problemas medievais contém quatro problemas de travessia, sendo estes os problemas de número 17, 18, 19 e 20. Estes desafios se tornaram clássicos dessa modalidade e tratam do seguinte: O problema 17 (dezessete) trata da travessia de três amigos e suas irmãs; O problema 18 (dezoito) trata da travessia de um lobo, uma cabra e um punhado de couve; O problema 19 (dezenove) trata da travessia de um homem e uma mulher muito pesados. O problema 20 (vinte) também aparenta ser de travessia mas, segundo Hadley e Singmaster (1992), "O texto latino parece ser defeituoso. Hadley não tentou traduzi-lo. Parece dizer: Sobre um casal e dois jovens, tendo certo peso, esperando para atravessar um rio". (p. 112, tradução nossa).

A seguir está descrito o enunciado de um dos problemas de travessias, a solução e comentários que se assemelham aos apresentados por Alcuíno.

4.2. Desafio: A travessia do lobo, da cabra e do punhado de repolho

Este desafio é uma adaptação do problema 18 (dezoito) que compõem os manuscritos de Alcuíno.

Neste problema o homem é um fazendeiro (F) e deve atravessar com um lobo (L), uma cabra (C) e um punhado de repolho (R) de um lado para o outro do rio usando um barco que só pode conter um item além do fazendeiro. Sabendo que o lobo não pode ser deixado sozinho com a cabra e a cabra não pode ser deixada sozinha com o punhado de repolho, como deve proceder o fazendeiro para transportar todos os itens intactos? (EVES, 2004).

A solução é apresentada a seguir, sendo ilustrada por meio de tabelas as etapas compreendidas em cada travessia. Essa forma de representação foi escolhida porque permite registrar as condições das margens do rio e também a composição do barco em cada travessia.

Considerando que os itens estão todos na margem esquerda do rio, para concluir com êxito a primeira travessia, o fazendeiro precisa realizar a escolha adequada para preservar a integridade de todos os itens, ou seja, não pode escolher o lobo porque a cabra e o repolho são itens conflitantes e nem escolher o repolho porque o lobo e a cabra são itens conflitantes.

A alternativa para o primeiro item a ser transportado deve ser a cabra.

Tabela 5: Desafio – Primeira travessia

Número da travessia (K)	Margem Esquerda (E)	Barco (B)	Margem Direita (D)
1	L, R	F, C → [1]	Ø[2]

Fonte: Autor

A segunda travessia ocorrerá com o fazendeiro deixando a cabra na margem direita e retornando sozinho para a margem esquerda.

Tabela 6: Desafio – Segunda Travessia

Número da travessia (K)	Margem Esquerda (E)	Barco (B)	Margem Direita (D)
2	L, R	F ← [3]	C

Fonte: Autor

Para a terceira travessia o fazendeiro poderá escolher o repolho ou o lobo. Com essa possibilidade de dupla escolha fica perceptível que o desafio apresenta mais de uma solução, sendo essa uma das características presentes em todos os desafios desta modalidade. Nesta solução optou-se por escolher a travessia do repolho.

Tabela 7: Desafio – Terceira travessia

Número da travessia (K)	Margem Esquerda (E)	Barco (B)	Margem Direita (D)
3	L	F, R →	C

Fonte: Autor

Na próxima travessia o fazendeiro precisa realizar mais uma escolha, pois não pode deixar a cabra e o repolho sozinhos na margem direita. Então o fazendeiro precisa trazer de volta para a margem esquerda a cabra e deixar o repolho na margem direita.

---

1 A seta → indica o sentido da travessia, ou seja, que é da esquerda para a direita.
2 A utilização do símbolo Ø, nas tabelas, significa lugar vago.

Tabela 8: Desafio – Quarta travessia

Número da travessia (K)	Margem Esquerda (E)	Barco (B)	Margem Direita (D)
4	L	F, C ←	R

Fonte: Autor

A seguir o fazendeiro retorna levando consigo o lobo e deixa a cabra na margem esquerda porque não pode transportar dois itens ao mesmo tempo no barco.

Tabela 9: Desafio – Quinta travessia

Número da travessia (K)	Margem Esquerda (E)	Barco (B)	Margem Direita (D)
5	C	F, L →	R

Fonte: Autor

Na travessia de número seis o fazendeiro retorna sozinho no barco e deixa o lobo e o repolho na margem direita pois não são itens conflitantes.

Tabela 10: Desafio – Sexta travessia

Número da travessia (K)	Margem Esquerda (E)	Barco (B)	Margem Direita (D)
6	C	F ←	L, R

Fonte: Autor

O fazendeiro conclui sua jornada quando transporta o último item da margem esquerda que nesse caso é a cabra. Com essa travessia a solução do problema atende todas as restrições impostas e ainda utiliza o número mínimo de travessias necessárias.

Tabela 11: Desafio – Sétima travessia

Número da travessia (K)	Margem Esquerda (E)	Barco (B)	Margem Direita (D)
7	Ø	F, C →	L, R

Fonte: Autor

Para facilitar a discussão da solução deste desafio será apresentada a seguir uma tabela que resume as decisões e as travessias realizadas.

3 A seta ← indica que o sentido da travessia é da direita para a esquerda.

Tabela 12: Desafio – Resumo das travessias

Número da travessia (K)	Margem Esquerda (E)	Barco (B)	Margem Direita (D)
1	L, R	F, C $\rightarrow$	Ø
2	L, R	F $\leftarrow$	C
3	L	F, R $\rightarrow$	C
4	L	F, C $\leftarrow$	R
5	C	F, L $\rightarrow$	R
6	C	F $\leftarrow$	L, R
7	Ø	F, C $\rightarrow$	L, R

Fonte: Autor

Ao observar a tabela resumo da solução do desafio é possível verificar algumas regularidades que segundo Csorba, Hurkens e Woeginger (2008) são comuns às soluções dos desafios de travessia. Em relação aos dados apresentados na tabela resumo a primeira regularidade observada trata da paridade dos índices da travessia, pois travessias ímpares ocorrem da margem esquerda para margem direita e travessias pares ocorrem da margem direita para a margem esquerda.

Também, segundo Csorba, Hurkens e Woeginger (2008), é possível observar que o resumo da solução apresenta os seguintes conjuntos:

- E_k = conjunto que contém os itens da margem esquerda;
- B_k = conjunto que contém os itens do barco;
- D_k = conjunto que contém os itens da margem direita;
- U = conjunto que contém todos os personagens envolvidos na travessia.

Para exemplificar, considere k como índice que indica o número da travessia que está sendo realizada. Temos para k = 1:

- $E_1 = \{L, R\}$;
- $B_1 = \{F, C\}$;
- $D_1 = Ø$;
- $U = \{F, L, C, R\}$.

Os conjuntos citados acima possuem outras características, como:

1 Os conjuntos E_k e D_k não possuem itens conflitantes durante as travessias;

2 Os estados inicial e final são definidos, respectivamente, por:

- $E_1 \cup B_1 = U$ e $D_1 = \emptyset$;
- $E_f = \emptyset$ e $D_f \cup B_f = U$, com $f \in \mathbb{N}^*$, sendo f o número da última travessia.

3 Ao chegar em cada margem o fazendeiro pode, arbitrariamente, escolher dentre os itens que estão na mesma margem, qual será transportado. Essa divisão dos itens permite que:

- Para k par e maior ou igual a 2, $B_k \cup D_k = B_{(k-1)} \cup D_{(k-1)}$ e $E_k = E_{(k-1)}$.
- Para k ímpar e maior ou igual a 3, $E_k \cup B_k = E_{(k-1)} \cup B_{(k-1)}$ e $D_k = D_{(k-1)}$.

Além dessas observações é possível verificar que existem simetrias entre as linhas 1 e 7, 2 e 6 considerando a coluna do barco como eixo. Em relação a uma generalização para esse desafio Mitsou (2014) agrupa conhecimentos de ciência da computação, teoria dos grafos, teoria dos jogos combinatórios e aponta que o problema de cobertura de vértices e a generalização desse problema estão intimamente relacionados e menciona a existência de variações na complexidade computacional podendo ser classificado como de resolução em tempo polinomial como também de tempo não-polinomial sendo a capacidade do barco a variável que define a classificação, pois:

> O objetivo varia de minimizar o tamanho do barco para minimizar o número de viagens necessárias. Esses dois objetivos são, em certo sentido, contraditórios: uma transferência completa pode ser realizada com apenas uma viagem se for permitido um barco de tamanho ilimitado; Por outro lado, se houver restrições sobre o tamanho permitido do barco, então serão necessárias mais viagens. (MITSOU, 2014, pp. 12-13, tradução nossa)

Encontra-se no apêndice A um Grafo em Árvore onde representa as possíveis soluções para o desafio discutido nessa seção.

4.3. Desafios de travessia e estratégias de ensino

Após estas discussões, classificações e regularidades apresentadas, percebe-se que para a implementação de uma proposta pedagógica com aplicações na sala de aula é preciso embasá-la com alguma estratégia de ensino. Neste trabalho as estratégias selecionadas foram a resolução de problemas e a investigação matemática. A seguir serão apresentadas algumas especificidades em relação a essas duas estratégias.

Ao trabalhar com problemas o objetivo esperado é que se chegue à solução do problema, porém para alcançar o resultado positivo é necessário orientar-se por algumas etapas.

É consenso que as primeiras experiências exitosas, ainda na década de 50 do século XX, com a resolução de problemas foram sistematizadas por Polya (2006) através da identificação de quatro etapas envolvidas neste processo, que consistem em: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e verificar a solução.

Em relação à resolução de problemas Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) afirmam que o aluno não possui a princípio uma receita a ser seguida.

Em contrapartida Redling (2011) se posiciona afirmando que é no momento inicial de aplicação desta metodologia que o professor deve propor situações que explore novos conceitos.

Além de novos conceitos na resolução de problemas também é propiciado o desenvolvimento de habilidades inerente aos pensamento, como:

> […] o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. (BRASIL, 2002, p. 113)

Existem diferentes concepções sobre a metodologia de resolução de problemas e destacam-se o “ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas, ensinar Matemática através da resolução de problemas”. (SCHROEDER e LESTER, 1989 apud NUNES e SOUZA, 2008, pp. 3-4).

Esta última abordagem é considera mais atual e muitos estudiosos a utilizam como norteadora de seus trabalho como por exemplo Lourdes de la Rosa Onuchic[4] que elaborou um roteiro baseado em suas experiências e apresenta como sugestão para uma aula utilizando a resolução de problemas como estratégia de ensino-aprendizagem-avaliação, sendo: Preparação do problema, Leitura individual, Leitura em conjunto, Resolução do problema, Observar e incentivar, Registro das resoluções na lousa, Plenária, Busca do consenso e Formalização do conteúdo (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011).

---

4 Professora voluntária do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp – Rio Claro/SP.

Na perspectiva da investigação matemática Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) apontam quatro momentos a serem elaborados, sendo:

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. (p. 20).

Durante a parte inicial do processo investigativo o professor necessitará apoiar as iniciativas dos alunos no percurso já trilhado. Na etapa de desenvolvimento do trabalho de investigação o professor deverá acompanhar as produções elaboradas, apontando melhorias se necessário e no caso de trabalhos em grupos ficar atento às interações entre os membros, pois estas determinam o rumo da investigação, segundo Ponte et al (1998).

Ao realizar um trabalho envolvendo matemática, muitas vezes a base do ensino tem foco na aplicação de algoritmos desprovidos de análise e reflexão sobre as regras envolvidas e outras vezes transformam situações problemas em meros exercícios, por não permitirem que os alunos sejam desafiados e com isso perdem a oportunidade de elaborar estratégias diferenciadas.

Visando o envolvimento dos alunos é necessário esclarecer que é permitido errar. Essa situação cria um ambiente que encoraja os alunos a exporem o que pensam e a tornarem-se condutores de seu próprio conhecimento. Segundo Bertini e Passos (2008, p. 2) as aulas com investigação matemática desafiam os estudantes e "[…] permitem a elaboração e discussão de diferentes estratégias, possibilitando que estes possam expor seus pontos de vistas, compreender e respeitar o ponto de vista dos outros, analisar e construir aprendizagens a partir dos erros".

Considerando essa mesma perspectiva Ponte et al (1998) afirma que uma das vantagens de uma aula considerando a investigação matemática é permitir o envolvimento dos alunos desde os momentos iniciais da aplicação das atividades. Em relação à estrutura, uma aula com essa estratégia de ensino deve ser constituída de quatro etapas distintas, sendo: apresentação da tarefa, o progresso dos trabalhos, a sintetização e a finalização da tarefa com apresentação dos resultados envolvendo uma participação coletiva.

Ao considerar uma abordagem que permita ao aluno adquirir os meios necessários para solucionar um problema, do tipo aberto, a sala de aula é transformada em um ambiente de investigação e, segundo Brasil (2006, p. 84):

> A prática em sala de aula desse tipo de problema acaba por transformar a própria relação entre o professor e os alunos e entre os alunos e o conhecimento matemático. O conhecimento passa a ser entendido como uma importante ferramenta para resolver problemas, e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em momentos de “provas escritas”.

Investigações matemáticas e resolução de problemas possuem relações de proximidade, entretanto deve-se atentar para a especificidade de cada proposta. Segundo Brasil (2006, 84) “[…] a situação-problema apresenta um objetivo distinto, porque leva o aluno à construção de um novo conhecimento matemático” enquanto que Bertini e Passos (2008, p.3) afirma que na investigação matemática “O ponto de partida é uma situação aberta, ou seja, a questão não está completamente definida, cabendo a quem investiga (estudante) um papel fundamental na sua concretização”

Na tentativa de estabelecer uma diferenciação entre as estratégias de ensino, resolução de problemas e investigação matemática, Minatel, Sander e Meneghetti (2015, p. 575) aponta “que, na investigação, os objetivos são menos definidos e a finalidade não é apresentada de antemão” e destaca que uma atividade de investigação matemática é “aberta e difícil” (MINATEL; SANDER; MENEGHETTI 2015, p. 576).

5. METODOLOGIA

O estudo realizado teve o enfoque qualitativo pelo caráter subjetivo que apresenta, pois para Borba e Araújo (2013, p. 116) “O qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões”. Esses conceitos permitiram que o objeto de pesquisa fosse melhor compreendido pois trouxeram contribuições no sentido de registrar o que os alunos pensavam ao se depararem com os desafios de travessia, como foram as primeiras tentativas de solução, quais recursos utilizaram, quais semelhanças ou diferenças apresentaram pelo grupo de pessoas selecionadas.

Outro fator que embasou a decisão pela pesquisa qualitativa foi o formato dos instrumentos elaborados para a coleta de dados serem compostos por instrumentos estruturados e também não estruturados, pois Borba e Araújo (2013, p. 117) afirmam que na pesquisa qualitativa:

> […] privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos, etc.

O estudo foi desenvolvido no Colégio Estadual Antônio Batista localizado no município de Candiba estado da Bahia, no ano de 2017. Este Colégio oferece as seguintes modalidades de ensino:

- Programa ensino médio integral, identificado pela sigla PROEI, para 4 (quatro) turmas de primeiro ano;
- Programa ensino médio inovador, identificado pela sigla PROEMI, para 4 (quatro) turmas de segundo ano e 4 (quatro) turmas de terceiro ano.
- Educação de jovens e adultos, identificado pela sigla EJA, para 2 (duas) turmas com funcionamento no turno noturno;
- Ensino médio regular para uma turma do primeiro ano no período noturno.

Os sujeitos envolvidos nessa pesquisa foram os alunos do primeiro ano do ensino médio integral, turma B com 33 alunos, e o objeto de estudo foram as resoluções apresentadas para os desafios de lógica conhecidos como desafios de travessia, pois segundo Soares (2004) em relação ao público do ensino médio é necessário que o aluno perceba as estruturas lógicas envolvidas num determinado problema e isso permite que o pensamento matemático do aluno melhore no sentido de ampliar a capacidade de resolução de problemas e demais situações provenientes do cotidiano.

Além da resolução de problemas a investigação matemática também foi considerada durante a realização da intervenção como estratégia de ensino norteadora da aplicação.

O instrumento de coleta de dados estruturado utilizado foi o questionário de sondagem; os não estruturados a observação sistemática durante a intervenção realizada e o pós-teste.

A modalidade de pesquisa utilizada foi o estudo de caso, que segundo Gil (2010, p. 37) “Consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento [...]”.

Devido à escolha do tipo da pesquisa os dados coletados foram submetidos ao processo de categorização que segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 134) “A categorização significa um processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns.”

Optou-se por não estabelecer nenhum tipo de categoria por se tratar de uma pesquisa qualitativa em conformidade com Fiorentini e Lorenzato (2012), pois deixam claro que categorias prévias não são usuais em uma pesquisa de cunho qualitativo por serem grandes as chances de surgir informações ou dados não apresentados em estudos anteriores.

Para análise dos dados foi utilizada a análise de conteúdo conforme apresentada por Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 140), onde afirmam que “A vantagem desta forma de organização é que ela permite, independente da opção teórica ou metodológica de cada estudo, comparar, por contraste, os diferentes olhares e resultados produzidos”.

A coleta de dados foi realizada em três etapas, sendo denominadas: sondagem, intervenção e pós-teste.

A sondagem foi elaborada para conhecer melhor a turma e construir um perfil dos alunos contemplando características como a receptividade em relação à Matemática, conhecimentos prévios sobre lógica e parte da trajetória escolar.

Os instrumentos utilizados na intervenção foram elaborados para direcionar os alunos na realização das tarefas e consistiu em dois roteiros com instruções que orientavam para alcançar êxito na solução dos desafios. Estes roteiros foram construídos considerando as abordagens didáticas da resolução de problemas e da investigação matemática discutidos anteriormente.

Na etapa do pós-teste os alunos realizaram uma autoavaliação através da produção de um relatório conforme instruções contidas num roteiro. A produção de relatórios como forma de avaliação está de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 110) quando menciona que a utilização dessa ferramenta permite que os alunos registrem “[…] não só as conclusões que tiraram da realização de uma tarefa de investigação, mas também os processos que usaram para chegar a essas conclusões”. Neste sentido, os alunos foram orientados a registrarem os processos que utilizaram durante a realização das atividades sugeridas, as dificuldades apresentadas e a receptividade em relação ao material aplicado.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO DOS DADOS

A resolução dos desafios do tipo travessias está intimamente relacionada com a lógica pois de acordo com Alvim (2013, p. 12):

> Quando buscamos resolver um problema de qualquer natureza, tanto mais sucesso temos, quanto conseguimos, com serenidade, organizar nossas ideias. Nestes momentos, buscamos priorizar a nossa razão. Para isso, tentamos organizar nossos pensamentos, valendo-nos de uma lógica.

Sendo essa maneira de organização do pensamento, de forma lógica, que foi analisada nos registros realizados pelos alunos em cada etapa da coleta de dados.

6.1. Sobre a Sondagem

O questionário de caracterização dos indivíduos da pesquisa foi aplicado no dia dezoito de outubro de dois mil e dezessete, uma quarta-feira, no turno matutino, tendo início às nove horas e cinquenta e cinco minutos e término às onze horas e vinte três minutos.

A sondagem foi elaborada para conhecer melhor a turma e construir um perfil contemplando as características como a receptividade em relação à Matemática, conhecimentos prévios sobre lógica e parte da trajetória escolar. Os resultados obtidos com a sondagem foram os seguintes.

Para obter informações em relação à receptividade das atividades que encontram nos estudos a maioria dos componentes da turma afirmam que gostam de estudar e essa turma se apresenta de forma heterogênea em relação à preferência por uma disciplina.

Sobre a aceitação da matemática e consequentemente sobre o gosto pela matemática, aproximadamente 60% (sessenta por cento) da turma apontaram que gostam e foi interpretado como fator favorável ao desenvolvimento deste trabalho.

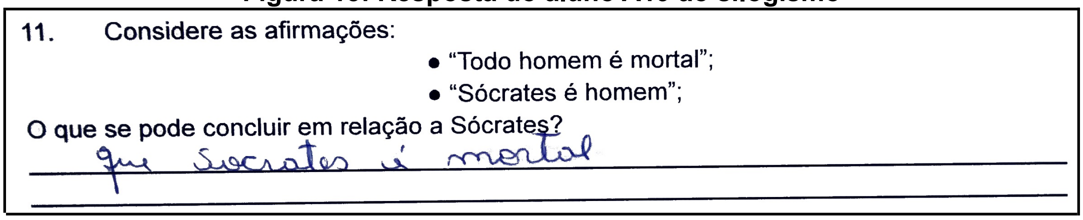
O envolvimento com a matemática fica evidente quando responderam positivamente sobre o quanto a matemática faz sentido na busca por soluções de problemas e na aprendizagem.

Na sondagem sobre se os alunos conheciam o significado da lógica ou se realizavam alguma associação com esse termo constatou-se que a maioria dos alunos já tiveram contato com situações que faziam uso de lógica ao apontarem positivamente no questionário de caracterização.

Em seguida, na tentativa de identificar as fontes de acesso aos desafios de lógica que eram de conhecimento da turma obteve-se como resultado que estes espaços eram a escola e as redes sociais em grande parte. Foram mencionados também, com pouca frequência, provas das Olimpíadas de Matemática das Escola Públicas, piadas e livros.

Ao serem solicitados a resolverem uma questão que objetivava registrar o conhecimento acerca dos silogismos, 27 (vinte e sete) alunos apresentaram solução satisfatória e isso indica que já possuem conhecimentos básicos sobre o tema. A figura 15 mostra a resposta apresentada pelo aluno A19.

Figura 15: Resposta do aluno A19 ao silogismo


11. Considere as afirmações:
- "Todo homem é mortal";
- "Sócrates é homem";

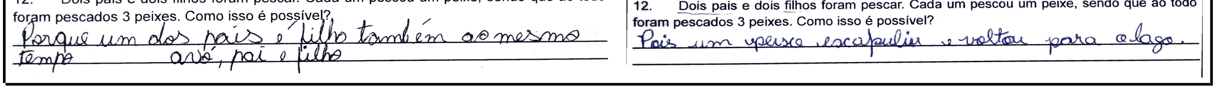
O que se pode concluir em relação a Sócrates?

Que Socrates é mortal

Fonte: Arquivos do Autor

O item 12 da sondagem tratava de um desafio de lógica para registrar o raciocínio lógico e as estratégias que os alunos utilizaram para resolver o desafio ou caso não houvesse êxito registrar as tentativas de resolução. Observando os dados verifica-se que apenas 13 (treze) alunos concluíram com êxito este desafio. Porém muitas estratégias foram observadas a exemplo das apresentadas pelos alunos A2 e A12 e estão contidas, respectivamente, na figura 16.

Figura 16: Respostas dos alunos A2 e A12 para a questão 12 da sondagem


12. Dois pais e dois filhos foram pescar. Cada um pescou um peixe, sendo que ao todo foram pescados 3 peixes. Como isso é possível?

Porque um dos pais é filho também ao mesmo tempo avô, pai e filho

12. Dois pais e dois filhos foram pescar. Cada um pescou um peixe, sendo que ao todo foram pescados 3 peixes. Como isso é possível?

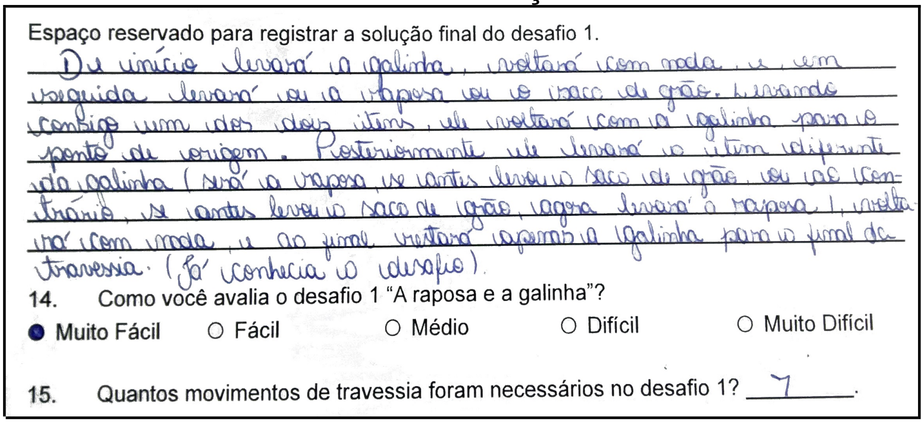
Pois um peixe escapuliu e voltou para o lago.

Fonte: Arquivos do Autor

Foram propostos no questionário de caracterização dois desafios de travessia, com intuito de averiguar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o objeto em estudo. Além de apresentar as estratégias de resolução também foram solicitados a registrarem a opinião sobre o grau de dificuldade e número de travessias.

Estes desafios definem o ponto de partida para inserção dos problemas de travessia na turma em análise, sendo que o objetivo deste primeiro contato foi verificar a existência de conhecimentos prévios sobre esse tipo de desafio. Ao analisar as respostas do questionário, observa-se que apenas a aluna A11 informa que já conhecia, como pode ser verificado na figura 17.

Figura 17: Resposta da aluna A11, questões 13, 14 e 15 no questionário de caracterização


Espaço reservado para registrar a solução final do desafio 1.

De início levará a galinha, voltará com nada, e, em seguida levará ou a raposa ou o saco de grão. Levando consigo um dos dois itens, ele voltará com a galinha para o ponto de origem. Posteriormente ele levará o item diferente da galinha (será a raposa, se antes levou o saco de grão, ou ao contrário, se antes levou o saco de grão, agora levará a raposa), voltará com nada, e ao final voltará apenas a galinha para o final da travessia. (Já conhecia o desafio).

14. Como você avalia o desafio 1 "A raposa e a galinha"?

● Muito Fácil ○ Fácil ○ Médio ○ Difícil ○ Muito Difícil

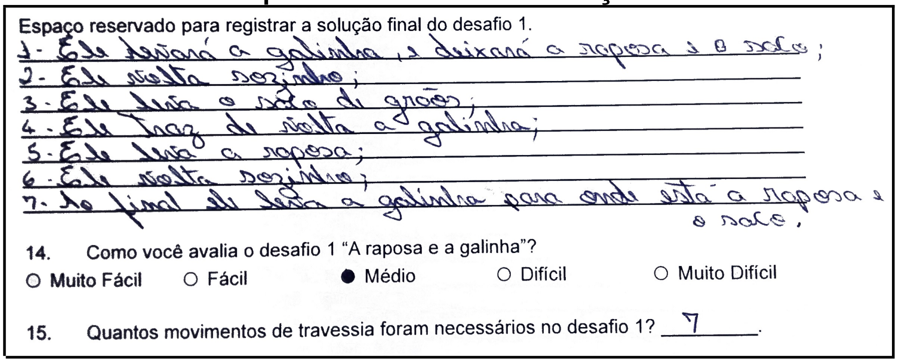
15. Quantos movimentos de travessia foram necessários no desafio 1? 7.

Fonte: Arquivos do Autor

É possível verificar também que essa aluna tem conhecimento que esse tipo de atividade apresenta várias soluções quando ela afirma no espaço destinado ao registro que os itens a serem transportados após a travessia da galinha depende da escolha do fazendeiro, pois não são itens conflitantes. Ela classifica o desafio como muito fácil e descreve corretamente os passos e a quantidade de travessias, inclusive apresenta o número mínimo de travessias possível nessa versão do problema.

Outros alunos que não conheciam o problema conseguiram apresentar respostas adequadas ao desafio, a exemplo da aluna A24 que apresenta uma descrição narrativa das travessias, conforme a figura 18.

Figura 18: Resposta da aluna A24, questões 13, 14 e 15 no questionário de caracterização



Espaço reservado para registrar a solução final do desafio 1.

1- Ele levará a galinha, e deixará a raposa e o saco;
2- Ele volta sozinho;
3- Ele leva o saco de grãos;
4- Ele traz de volta a galinha;
5- Ele leva a raposa;
6- Ele volta sozinho;
7- No final ele leva a galinha para onde está a raposa e o saco.

14. Como você avalia o desafio 1 "A raposa e a galinha"?

○ Muito Fácil ○ Fácil ● Médio ○ Difícil ○ Muito Difícil

15. Quantos movimentos de travessia foram necessários no desafio 1? 7.

Fonte: Arquivos do Autor

A aluna A24 também classifica o nível de dificuldade do desafio como médio e apresenta na sua solução o número mínimo de travessias necessários para concluir com êxito a resolução do problema.

Porém, a maioria não conseguiu apresentar uma solução completa, a exemplo do aluno A4 que registra a sua resposta da seguinte forma: "*Ele leva a galinha volta leva os grãos prende a galinha e depois leva a raposa*." (Aluno A4, registros em arquivo).

Pelo registro acima verifica-se que o aluno aplica uma regra inexistente no enunciado do problema que é a possibilidade de prender a galinha. A criação de regras dificulta a interpretação dos dados da questão e neste caso, impossibilitou o aluno de alcançar o resultado esperado. Sobre a quantidade mínima de movimentos os acertos ficaram abaixo de 50% (cinquenta por cento).

6.2. Intervenção

Os instrumentos utilizados na intervenção foram elaborados para direcionar os alunos na realização das tarefas e consiste em dois roteiros com instruções a serem seguidas para obtenção de êxito na solução dos desafios propostos.

No dia primeiro de novembro de dois mil e dezessete no período matutino, com duração de 2 (duas) horas-aula de 50 (cinquenta) minutos cada e com início às 09:40 h (nove horas e quarenta minutos) foi realizada a etapa denominada de intervenção por meio da aplicação de dois desafios do tipo travessia, onde a turma foi orientada a formar trios para melhor discutirem os passos solicitados para a condução das atividades. Os grupos formados foram relacionados na tabela 13 e devido à ausência da aluna A30 foi necessário a formação de uma dupla.

Tabela 13: Composição dos grupos

Grupo	Integrantes
G1	A32 e A15
G2	A10, A5 e A9
G3	A18, A16 e A27
G4	A1, A23 e A2
G5	A14, A19 e A12
G6	A17, A29 e A4
G7	A26, A21 e A6
G8	A7, A28 e A24
G9	A11, A3 e A8
G10	A22, A33 e A31

Fonte: Autor

Os desafios foram intitulados da seguinte forma: o primeiro foi identificado como o desafio da viagem de acampamento e o segundo como o desafio da balsa. Ambos apresentam contextos semelhantes.

O primeiro a ser aplicado foi o desafio da viagem de acampamento e trata de 4 (quatro) amigos que durante o deslocamento para um acampamento necessita atravessar um rio e para isso eles tem a disposição uma jangada que suporta o transporte de até 100 kg. Considerando a devida massa de cada um dos amigos, relatada no problema, como pode ser realizada a travessia de todos os amigos? E além disso, qual é o menor número de cruzamentos que a jangada precisa realizar para transportar todo o grupo de amigos de uma margem para a outra do rio? Veja a figura 19 onde está descrito o enunciado proposto aos alunos.

Figura 19: Enunciado do desafio a viagem de acampamento

Desafio da Viagem de acampamento

Ana, Bruno, Carol e Daniel estão em uma viagem de acampamento. Como parte da viagem, eles devem atravessar um rio em uma jangada. A jangada só pode levar um máximo de 100 kg antes de começar a afundar. O peso de Ana é de 74 kg. Bruno pesa 49 kg. Carol pesa 58 kg. E o peso de Daniel é 39 kg.

O problema

Qual é o menor número de cruzamentos que a jangada precisa fazer para que todo o grupo seja transportado para o outro lado? ______________________________

Fonte: Arquivos do Autor

Para orientar a resolução da atividade foram propostas 3 (três) etapas e uma ampliação do problema para observar as interações e estratégias que cada grupo fez uso. A seguir encontra-se o enunciado para a etapa 1 (um)

Figura 20: Enunciado da Etapa 1 do desafio a viagem de acampamento

Etapa 1
Discuta com seus colegas quais estratégias vocês poderiam usar para resolver o problema. (Anote-as).

Fonte: Arquivos do Autor

A tabela a seguir registra as respostas apresentadas para esta etapa onde nota-se que todos os grupos informaram o ponto de partida para suas tentativas de solução considerando as restrições impostas pelo enunciado. Nota-se que todas as respostas apresentam convergência para a heurística de formação de pares utilizando as pessoas consideradas mais leves enquanto a pessoa de maior peso deve atravessar sozinha.

Tabela 14: Respostas da etapa 1 para o desafio do acampamento

Grupos	Respostas na etapa 1
G1	*Formar pares, para que seus pesos deem menos de 100 kg e montar estratégia onde a menina com maior peso vá só.*
G2	*1º Eles poderiam atravessar em duplas;* *2º Ana deve atravessar sozinha;* *3º O mais leve deve atravessar mais vezes.*
G3	*Utilizamos colocar duplas para atravessar, depois usamos a troca e também a travessia individual e foi usado esquemas.*
G4	*1º vai o mais [leve] com o 2º de maior peso, os dois menos pesados devem ir junto, e a mais pesada deve ir sozinha.*
G5	*Começando dos mais leves; O mais leve voltando sozinho;* *Como a soma do peso de Ana com o dos outros resulta em um número maior que 100 kg, ela atravessa sozinha.*
G6	*Primeiro tive a ideia de levar as pessoas mais leves para facilitar o problema.*
G7	*A canoa não pode voltar sozinha;*
G8	*Pensamos em agrupar as pessoas de peso menor para atravessar o rio.*
G9	*Ana atravessará só; Alguém voltará com a jangada; Iniciar com o menor peso possível.*
G10	*Porque como Daniel tem o peso menor, facilitaria a viagem na jangada, assim ele voltaria para buscar seus amigos e no fim Bruno busca Daniel.*

Fonte: Arquivos do Autor

A etapa 2 (dois) deste desafio solicitou dos participantes que apresentassem formas de combinar pessoas para procederem às travessias juntas. O enunciado foi o seguinte:

Figura 21: Enunciado da etapa 2 do desafio viagem de acampamento

Etapa 2
Anote todas as combinações possíveis de pessoas que podem atravessar o rio na jangada ao mesmo tempo.

Fonte: Arquivos do Autor

Ao analisar os dados observa-se que metade dos grupos apresentaram uma resposta cujo resultado foi considerado pouco satisfatório, não seguiram as orientações e fizeram uma tentativa de resolução de forma comentada para esta questão. Este fato leva a uma indagação quanto às habilidades de interpretação, ao realizarem leituras, que estes alunos possuem.

Tabela 15: Respostas da etapa 2 para o desafio do acampamento

Grupos	Respostas na etapa 2
G1, G3, G5, G8 e G10	Não atenderam ao solicitado
G2 e G6	*Daniel + Carol* *Bruno + Daniel*
G4, G7 e G9	*Daniel + Carol* *Bruno + Daniel* *Ana deve atravessar sozinha*

Fonte: Arquivos do Autor

A etapa 3 (três) propõe aos alunos que façam uso de estratégias diversas e tentem apresentar uma resposta válida para o problema. A sugestão de resolução por tentativa foi proposta para explicitar ao aluno que não havia obrigação, por parte dele, de acertar. Foi solicitado que o aluno apresentasse sua forma de abordar o problema para então refletir sobre a solução apresentada e reelaborá-la caso percebesse a necessidade.

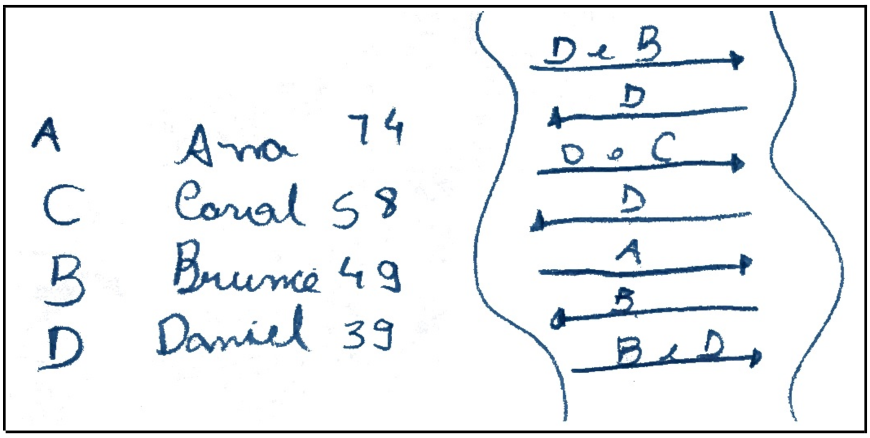
Figura 22: Enunciado da Etapa 3 do desafio viagem de acampamento

Etapa 3
Resolva o desafio por tentativas e/ou fazendo modelos, se possível. Lembrem-se de registrar os movimentos enquanto resolvem o problema. Vocês podem usar diagramas, tabelas, esquemas para ilustrar a explicação sobre como vocês resolveram o problema.

Fonte: Arquivos do Autor

As estratégias apresentadas pelos grupos não variaram muito, todos apresentaram esquemas que registravam as travessias a exemplo do grupo G1 que pode ser observado na figura 23, onde os personagens são identificados pelas iniciais do nome e foi realizado um esboço de um rio com ilustrações das idas e voltas do barco até completar o processo corretamente.

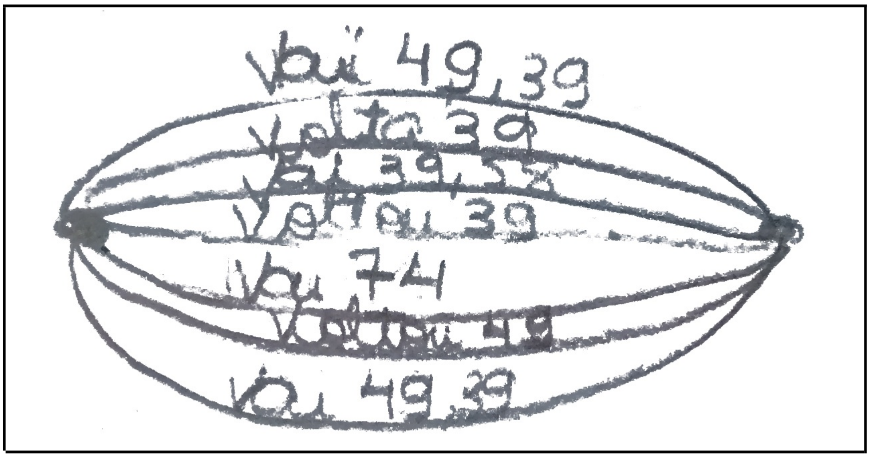
Figura 23: Resposta do grupo G1 para a etapa 3



Fonte: Arquivos do Autor

Os demais grupos fizeram esquemas semelhantes ao do grupo G1, exceto o grupo G6 que apresentou um esquema que lembra um grafo com dois vértices e sete arestas, como pode ser visualizado através da figura 24.

Figura 24: Resposta do grupo G6 para a etapa 3



Fonte: Arquivos do Autor

Como o desafio apresentado permite diferentes respostas, os grupos apresentaram seis tipos, as quais estão indicadas na tabela 16. Observe, na tabela, que o número mínimo de travessias para esse desafio é sete e as colunas numeradas representam a composição do barco em cada travessia, as setas → e ← indicam o sentido da travessia e por conveniência todos iniciaram a travessia considerando o sentindo da margem esquerda para a margem direita.

Tabela 16: Soluções da Etapa 3 do desafio a viagem de acampamento

Grupos	**Travessias**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
G1, G5, G6 e G7	*B+D* →	*D* ←	*C+D* →	*D* ←	*A* →	*B* ←	*B+D* →
G2	*C+D* →	*D* ←	*A* →	*C* ←	*C+D* →	*D* ←	*B+D* →
G3, G8 e G10	*C+D* →	*D* ←	*B+D* →	*D* ←	*A* →	*B* ←	*B+D* →
G4	*C+D* →	*D* ←	*A* →	*C* ←	*B+D* →	*D* ←	*C+D* →
G9	*B+D* →	*D* ←	*A* →	*B* ←	*B+D* →	*D* ←	*C+D* →

Fonte: Aquivos do Autor

As estratégias utilizadas pelos grupos foram sintetizadas conforme a seguir:

- Os grupos G1, G3, G4, G8 e G9 apresentaram como estratégia identificar os personagens com as iniciais dos nomes: A, B, C e D.
- Os grupos G2, G5, G7 e G10 identificaram os personagens descrevendo os respectivos nomes.
- Os grupos G6 e G2 identificaram os personagens utilizando as massas respectivas.
- Todos os grupos fizeram algum tipo de esquema.

Para o desafio a viagem de acampamento foi apresentada uma extensão onde surge um novo colega que também participará da viagem. O enunciando completo está representado na figura abaixo.

Figura 25: Enunciado da extensão do desafio viagem de acampamento

Extensão
Edson junta-se ao grupo e ele pesa 42kg. Qual é o menor número de cruzamentos que a jangada fará para permitir que todo o grupo atravesse o rio? _______________

Fonte: Arquivos do Autor

Considerando as soluções apresentadas nota-se que apenas os grupos G8 e G10 fizeram respostas iguais e todas as soluções realizadas estão descritas na tabela 17.

Tabela 17: Soluções da Extensão do desafio a viagem de acampamento

Grupos	Travessias								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
G1	*B+D* →	*D* ←	*C+D* →	*D* ←	*D+E* →	*D* ←	*A* →	*E* ←	*D+E* →
G2	*C+D* →	*D* ←	*A* →	*C* ←	*C+D* →	*D* ←	*B+D* →	*B* ←	*B+E* →
G3	*C+D* →	*D* ←	*B+D* →	*D* ←	*D+E* →	*D* ←	*A* →	*E* ←	*D+E* →
G4	*D+E* →	*E* ←	*D+C* →	*D* ←	*A* →	*C* ←	*D+E* →	*D* ←	*C+D* →
G5	*B+D* →	*D* ←	*C+D* →	*D* ←	*A* →	*B* ←	*B+D* →	*D* ←	*D+E* →
G6	*D+E* →	*D* ←	*A* →	*E* ←	*C+D* →	*D* ←	*B+D* →	*D* ←	*D+E* →
G7	*B+D* →	*D* ←	*C+D* →	*D* ←	*D+E* →	*D* ←	*A* →	*B* ←	*B+D* →
G8 e G10	*C+D* →	*D* ←	*B+D* →	*D* ←	*A* →	*B* ←	*B+D* →	*D* ←	*D+E* →
G9	*B+E* →	*E* ←	*C+E* →	*E* ←	*D+E* →	*D* ←	*A* →	*E* ←	*D+E* →

Fonte: Arquivos do Autor

Os grupos apresentaram heurísticas contendo algum tipo de esquema ou descreveram as travessias, sendo que os grupos G1, G3, G4, G6, G7 e G9 refizeram todo o processo acrescentando o novo personagem enquanto os grupos G2, G5, G8 e G10 aproveitaram os resultados da etapa 3 e prosseguiu com as travessias do novo personagem.

O segundo desafio proposto durante a etapa da intervenção que foi denominado desafio da balsa, foi apresentado com pretensões de aplicar a investigação matemática e pode ser verificado na figura 26.

Figura 26: Enunciado do desafio da balsa

Desafio da balsa

Um adulto e duas crianças querem atravessar um rio. Eles fazem uma balsa, mas ela só suporta o peso ou de um adulto ou de duas crianças.

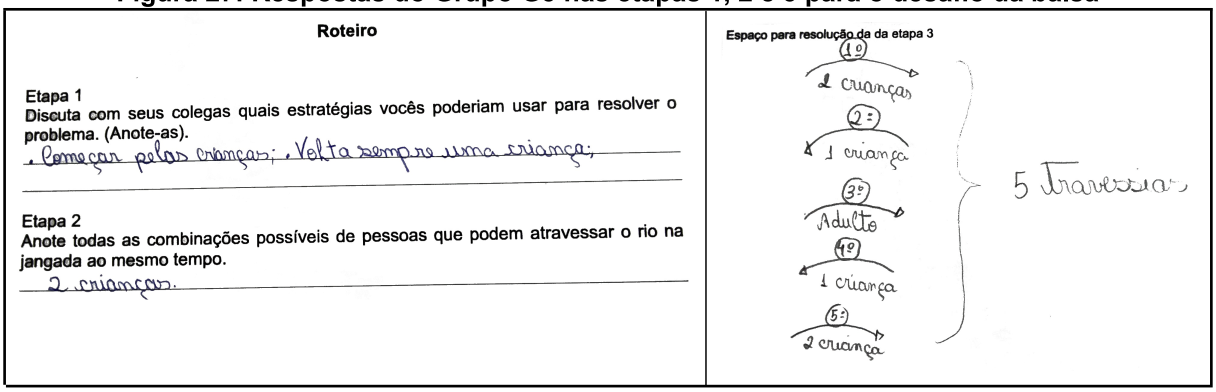
O problema
Qual é o menor número de cruzamentos que a balsa precisa fazer para que todo o grupo seja transportado para o outro lado? ________________________________

Para resolver o problema observe as etapas constantes no roteiro abaixo.

Fonte: Arquivos do Autor

Neste desafio os alunos foram submetidos às mesmas três etapas do primeiro desafio da intervenção e também foram propostas três extensões para este segundo desafio. Quanto às etapas os alunos apresentaram resultados semelhantes aos apresentados no desafio anterior, a viagem de acampamento, conforme pode-se verificar através da figura 27, no final da página anterior, que traz as respostas do grupo G5 às referidas etapas.

Figura 27: Respostas do Grupo G5 nas etapas 1, 2 e 3 para o desafio da balsa


Roteiro

Etapa 1
Discuta com seus colegas quais estratégias vocês poderiam usar para resolver o problema. (Anote-as).
. Começar pelas crianças; . Volta sempre uma criança;

Etapa 2
Anote todas as combinações possíveis de pessoas que podem atravessar o rio na jangada ao mesmo tempo.
2 crianças.

Espaço para resolução da da etapa 3
1º 2 crianças
2º 1 criança
3º Adulto
4º 1 criança
5º 2 criança
5 Travessias

Fonte: Arquivos do Autor

Todos os grupos responderam acertadamente a etapa 3 deste desafio e utilizando esse fato como ponto de partida foram orientados a resolverem as extensões 1, 2 e 3. A extensão 1 informa que outro adulto foi inserido ao grupo e precisa atravessar o rio considerando as mesmas restrições do desafio apresentado. Veja o enunciado na figura 28.

Figura 28: Enunciado da extensão 1 do desafio da balsa

Extensão #1 Outro adulto junta-se ao grupo. Qual é o menor número de cruzamentos que a balsa fará para permitir que todo o grupo atravesse o rio? ____________________________

Fonte: Arquivos do Autor

Os alunos não apresentaram dificuldade em resolver esta extensão pois as respostas registradas sugerem que já internalizaram o processo de resolução deste desafio.

A extensão 2 informa que desta vez foi inserida uma criança ao grupo e sua travessia obedece ao enunciado apresentado para o desafio da balsa e pode ser observado na figura 29.

Figura 29: Enunciado da extensão 2 do desafio da balsa

Extensão #2 Outra criança se junta-se ao grupo. Qual é o menor número de cruzamentos que a balsa fará para permitir que todo o grupo atravesse o rio? _______________________

Fonte: Arquivos do Autor

A extensão 3 fez a proposta de encontrar uma generalização para o desafio da balsa e propôs o seguinte enunciado, conforme a figura 30.

Figura 30: Enunciado da extensão 3 do desafio da balsa

Extensão #3 O grupo é formado por x adultos e y crianças. Qual é o menor número de cruzamentos que a balsa fará para permitir que todo o grupo atravesse o rio?

Fonte: Arquivos do Autor

Com a proposição da extensão 3 os alunos não conseguiram estabelecer conexões com seus conhecimentos prévios, em relação à procura de um modelo que os auxiliassem na solução. Esta situação ficou evidente pelos questionamentos dos alunos direcionados ao pesquisador indicando que os mesmos necessitavam de um ponto de partida.

O pesquisador percebeu que esse era momento adequado para iniciar uma plenária com os alunos e os primeiros comentários e questionamentos foram:

— *“Professor? nunca resolvi coisa parecida!”* (ALUNA A11).

— *“Não sei como fazer, o senhor pode ajudar?”* (ALUNA A21).

— *“Eu acho que é uma fórmula, estou certo professor?”* (ALUNO A1).

Para orientar os alunos considerando que apresentavam dúvidas em como fazer a resolução, o pesquisador confirmou ao aluno A1 que seu raciocínio estava correto e que isso o conduziria para a resposta esperada.

Após a introdução do processo de investigação matemática o pesquisador fez uso de perguntas que contribuíram na identificação dos dados necessários e que foram capazes de conduzí-los para a solução do problema. Uma parte do diálogo nesse momento foi o seguinte:

— *“O que se pode afirmar, em relação à quantidade de travessias, comparando a etapa 3 com a extensão 1?* (PESQUISADOR)

— *“Aumentou.”* (ALUNO A12)

— *“Aumentou quantas travessias?* (PESQUISADOR)

— *“Quatro.”* (ALUNOS EM CORO)

— *“Qual personagem foi acrescentado na extensão 1?* (PESQUISADOR)

— *“Um adulto.”* (ALUNOS EM CORO)

Neste ponto do diálogo o pesquisador solicitou aos alunos que registrassem esses dados para posterior utilização. Em outra parte do diálogo o pesquisador se referiu à extensão 2 onde foi inserido mais um personagem, sendo este, uma criança.

— *“O que se pode afirmar, em relação à quantidade de travessias, comparando a extensão 1 com a extensão 2?* (PESQUISADOR)

— *“Aumentou duas travessias”* (ALUNO A1)

— *“Qual personagem foi acrescentado na extensão 2?* (PESQUISADOR)

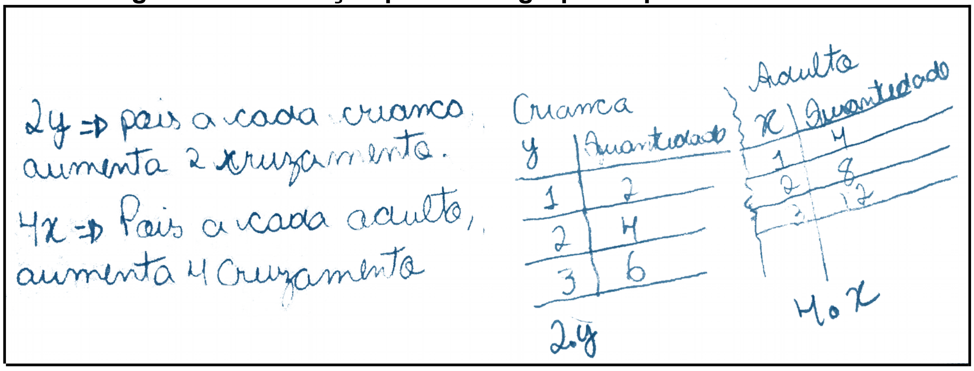
— *“Uma criança.”* (ALUNOS EM CORO)

Deste ponto em diante começaram a surgir as hipóteses:

- Cada adulto que se acrescenta ao grupo aumentam em quatro o número mínimo de travessias.
- Cada criança que se acrescenta ao grupo aumentam em dois o número mínimo de travessias.

Alguns alunos, a exemplo do grupo G5, fizeram a aplicação destas hipóteses e na figura 31 está indicada parte da resposta deste grupo que direciona para as referidas hipóteses.

Figura 31: Resolução parcial do grupo G5 para a extensão 3



2y ⇒ pais a cada criança aumenta 2 cruzamento.
4x ⇒ Pais a cada adulto, aumenta 4 Cruzamento

Criança

y	Quantidade
1	2
2	4
3	6

2.y

Adulto

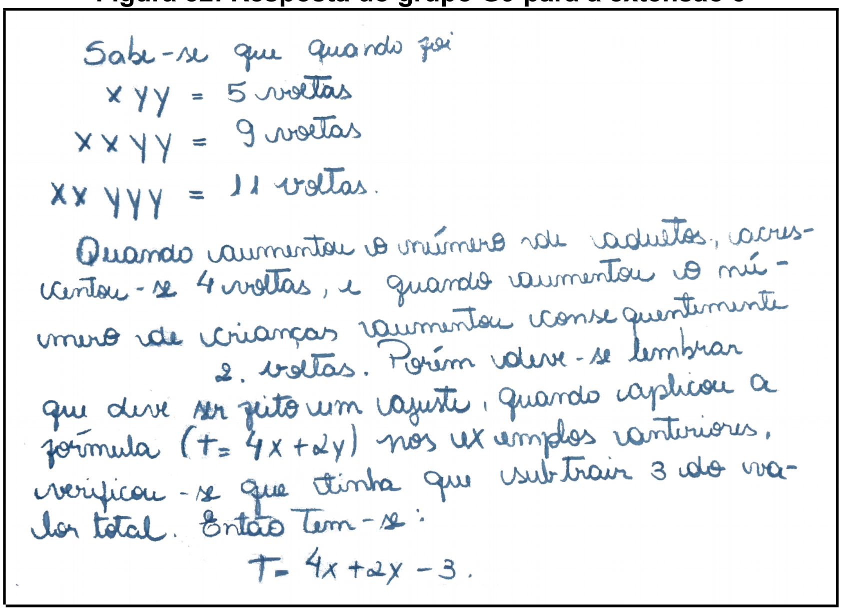
x	Quantidade
1	4
2	8
3	12

4.x

Fonte: Arquivos do autor

Depois destas discussões os alunos foram orientados a trabalharem novamente em grupos e na continuação dos trabalhos surgiram novas indagações. Desta vez no sentido de que ao testarem as hipóteses e reunirem os resultados os alunos estavam encontrando resultados diferentes dos já calculados para a etapa 3 e extensões 1 e 2. Na sequência o grupo G9, ao testarem os resultados, percebeu que existia um padrão nos seus cálculos e esse padrão era que ocorria uma diferença de três unidades em cada um dos resultados das extensões apresentadas e concluíram com êxito a resolução.

Figura 32: Resposta do grupo G9 para a extensão 3



Sabe-se que quando foi
x y y = 5 voltas
x x y y = 9 voltas
x x y y y = 11 voltas.
Quando aumentou o número de adultos, acrescentou-se 4 voltas, e quando aumentou o número de crianças aumentou consequentemente 2. voltas. Porém deve-se lembrar que deve ser feito um ajuste, quando aplicou a fórmula (T= 4x +2y) nos exemplos anteriores, verificou-se que tinha que subtrair 3 do valor total. Então tem-se:
T= 4x +2y − 3.

Fonte: Arquivos do autor

As tabelas 16 e 17 apresentam as diferentes heurísticas utilizadas pelos participantes e cada uma delas necessita de um algoritmo próprio.

O algoritmo apresentado pelo grupo G5 e representado na figura 31 necessita de refinamentos, pois ao considerarem isoladamente os adultos as restrições propostas inviabiliza a resolução. Já se considerarem apenas as crianças o número mínimo de travessia é reduzido.

A figura 32 mostra um algoritmo de generalização das travessias do desafio da balsa, onde os alunos explicam as etapas e descrevem os passos que conduziram para a elaboração de uma fórmula capaz de determinar o número mínimo de travessias considerando a capacidade do barco para até dois itens e considerando as condições do problema.

Analisando os dados dos questionários observa-se que os alunos que não concluíram corretamente a solução dos desafios deixaram de realizar as etapas recomendadas para solução de problemas, apresentadas por Seara (2009, p. 888), que consiste em:

> Para ter êxito na solução de situações-problema e de desafios matemáticos, o aluno precisa, primeiramente, compreender o problema; destacar dados importantes para a sua resolução e, a partir daí, elaborar um plano de trabalho; em seguida, executar esse plano e conferir os resultados. Se necessário, estabelecerá novas estratégias até chegar a uma solução aceitável.

No desafio 2 foi aplicado um roteiro que visava aproximar os alunos de um processo investigativo, com base no conceito de que “Investigar é procurar conhecer o que não se sabe.” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 13).

O processo investigativo envolvido fez uso de dois problemas de travessia para verificar quais contribuições estes desafios poderiam proporcionar ao processo de ensino-aprendizagem. Observou-se que o roteiro elaborado permitiu uma aproximação da definição de investigação utilizada por matemáticos profissionais apresentada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 13) que é a seguinte: “Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades.”

Os grupos G1, G3, G4, G5 e G9 atenderam completamente ao solicitado na extensão 3 deste desafio. Os grupos G2, G8 e G10 fizeram parcialmente a solução e os grupos G6 e G7 não apresentaram nenhum tipo de solução, deixando o espaço destinado para a resolução completamente em branco.

Para Lima (2014, p. 21) “As dificuldades encontradas pelos estudantes no processo de aprendizagem podem ter influência significativa na relação que o aluno desenvolve com a matemática” e os registros produzidos através das anotações de campo mostram que no início alguns alunos demonstravam pouco interesse na resolução destes desafios mas no decorrer das atividades se envolveram com o grupo tornando-se ativos na busca por soluções.

6.3. Pós-teste

A etapa denominada pós-teste foi realizada no dia 29 (vinte e nove) de novembro de dois mil e dezessete no turno matutino com início às 10:30 h (dez horas e trinta minutos) com duração de uma hora-aula de 50 (cinquenta) minutos. Neste dia foi solicitado aos alunos que registrassem as impressões que tiveram ao participar desta pesquisa em forma de um relatório e que observassem alguns tópicos para procederem a avaliação. Estavam presentes trinta e dois alunos e os mesmos se prontificaram à produção do relatório, de forma individual.

A produção de relatórios como forma de avaliação está de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 110) quando menciona que a utilização dessa ferramenta permite que os alunos registrem "[…] não só as conclusões que tiraram da realização de uma tarefa de investigação, mas também os processos que usaram para chegar a essas conclusões". Neste sentido, os alunos foram orientados a registrarem os processos que utilizaram durante a etapa de intervenção, as dificuldades apresentadas e a receptividade em relação à participação nas atividades propostas

Ao realizar a análise dos registros produzidos durante o pós-teste foram identificados 52 (cinquenta e duas) unidades de significado, 16 (dezesseis) unidades invariantes que culminou em 4 (quatro) grandes categorias de convergência, sendo:

- Estratégias utilizadas para resolver os problemas de travessia;
- Contribuições proporcionadas aos participantes das oficinas;
- Requisitos necessários para obter sucesso na busca por soluções;
- Avaliação sobre a ótica dos participantes em relação aos desafios de travessia.

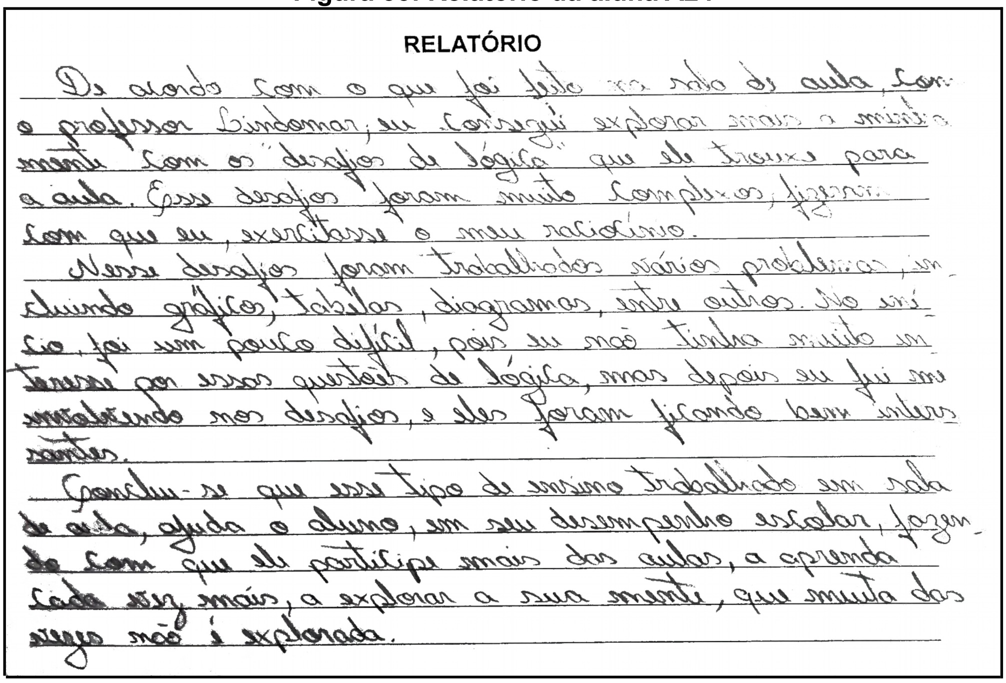
Dentre as estratégias apresentadas as citadas com maior frequência foram: o uso de diagramas, tabelas e desenhos; necessidade de utilizar etapas para resolver os desafios; e realizar leituras atentas.

Sobre as contribuições mais significativas registradas nos relatórios, destacam-se: o despertar do interesse pela resolução dos desafios; estímulos para o desenvolvimento do raciocínio lógico; mudou a rotina das aulas de matemática e despertou a curiosidade; treina a concentração; e utilização de imagens mentais.

Os alunos apontam como requisitos necessários para resolver com sucesso os desafios de travessia as seguintes habilidades: atenção, observação, paciência, persistência e concentração.

A avaliação dos alunos em relação à resolução dos desafios foi positiva, pois os relatórios mencionam que as atividades foram prazerosas e divertidas. Os registros indicam que a maioria dos alunos tiveram dificuldades na resolução dos primeiros desafios, principalmente os solicitados no questionário de caracterização, mas deixa claro também que no decorrer das atividades essa dificuldade foi superada o que é possível averiguar através da figura 20 que apresenta o relatório da aluna A24.

Figura 33: Relatório da aluna A24



RELATÓRIO

De acordo com o que foi feito na sala de aula, com o professor Lindomar, eu consegui explorar mais a minha mente com os "desafios de lógica" que ele trouxe para a aula. Esse desafios foram muito complexos, fizeram com que eu, exercitasse o meu raciocínio.

Nesse desafios foram trabalhados vários problemas, incluindo gráficos, tabelas, diagramas, entre outros. No início, foi um pouco difícil, pois eu não tinha muito interesse por essas questões de lógica, mas depois eu fui me metendo nos desafios, e eles foram ficando bem interessantes.

Conclui-se que esse tipo de ensino trabalhado em sala de aula, ajuda o aluno, em seu desempenho escolar, fazendo com que ele participe mais das aulas, a aprenda cada vez mais, a explorar a sua mente, que muita das vezes não é explorada.

Fonte: Arquivos do autor

No relatório acima a aluna A24 deixa explícito que as atividades aplicadas foram significativas e que por vez explora habilidades dos alunos que não são consideradas nas aulas cotidianas de matemática, além do caráter motivador também descrito.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a análise dos dados, discussão dos resultados, do retorno positivo por parte dos alunos considera-se que os desafios de travessia são importantes por permitir a ampliação da concentração, do raciocínio lógico e da motivação para os estudos. Este trabalho mostra que os alunos do ensino médio já apresentam noções de criação e utilização de algoritmos.

É importante salientar que os desafios do tipo travessia desenvolvem habilidades inerentes à resolução de problemas e investigação matemática através da utilização de algoritmos pois faz-se necessário explorar a situação apresentada, formular hipóteses, testar e avaliar os resultados obtidos.

Em relação a Educação Matemática essa foi uma experiência que mostrou contribuições para mudar o contexto da sala de aula transformando-a num ambiente onde os alunos foram desafiados a usarem as noções de algoritmos, o senso de investigação, a serem sujeitos mais ativos em seu ambiente e também foram instigados a argumentarem, a realizarem autoavaliações e, nos momentos de atuação em grupos, permitiu ampliação do respeito mútuo e do compartilhamento de tarefas.

Alguns alunos apresentaram dificuldades durante os desafios iniciais, mas no decorrer das atividades os desafios de travessia foram obtendo espaço no ambiente escolar, tanto que no final a maioria dos alunos solicitaram que gostariam de continuar com as atividades e atribui-se esse engajamento devido a utilização da resolução de problemas e investigação matemática como estratégia de ensino.

O fato dos desafios possuírem muita proximidade com situações reais também foi fator de contribuição que associado ao trabalho em grupo foram determinantes para o envolvimento dos alunos, para realização das discussões, no levantamento e teste de hipóteses além da aceitação e respeito à opinião do outro.

Devido a amostra escolhida para realização desse trabalho ser específica e pequena, uma turma do primeiro ano do ensino médio integral, não se pode afirmar, com certeza, que os resultados aqui mencionados também poderão ser alcançados quando aplicados a grupos com outras características.

Esta experiência permitiu a reflexão sobre estratégias didáticas e pedagógicas provenientes do processo de ensino e aprendizagem da Matemática como também sobre as contribuições que os desafios de lógica do tipo travessia proporcionam, sem esgotar as possibilidades. Sendo assim, esses fatores favorecem o desenvolvimento cognitivo dos alunos e possibilita ao professor a utilização de técnicas que proporcionam resultados adequados para a utilização de algoritmos no ensino médio.

REFERÊNCIAS

ALVIM, Karina Guerra Cardoso. **Análise combinatória:** uma questão de lógica e linguagens. 2013. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de Goiás, 2013.

ARGENTA, Rodrigo. **Utilização do algoritmo meta-heuristico espiral para a otimização de massa de estruturas treliçadas.** 2012. 15 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ASCHER, Marcia. **A River-Crossing Problem in Cross-Cultural Perspective**. Mathematics Magazine**,** [s.l.], v. 63, n. 1, p.26-29, 1 fev. 1990. JSTOR. Disponível em: http://dx.doi.org/10.2307/2691506. Acesso em:

BECCENERI, José Carlos. **Meta-heurísticas e Otimização Combinatória:** Aplicações em Problemas Ambientais. INPE, São José dos Campos, 2012. Disponível em:<http://www.lac.inpe.br/elac13/arquivos/MiniCurso_02ELAC2012.pdf >. Acesso em: 26 jun. 2018.

BERTINI, Luciane de Fátima; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **Uso da investigação matemática no processo de ensino e aprendizagem nas séries iniciais do ensino fundamental**. XII EBRAPEM (XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática). Anais. v. 7. Rio Claro: UNESP, 2008.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (orgs). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

BORBA, Rute. **O raciocínio combinatório na educação básica**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra15.pdf>. Acesso em: 09 mar. 2018.

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane; AZEVEDO, Juliana. **Estudos em raciocínio combinatório:** investigações e práticas de ensino na educação básica. Bolema, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, 2015.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB). **Orientações curriculares para o ensino médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. v. 2. Brasília: MEC/SEB, 2006.

CARDOSO, Elcio Arthur. **Análise comparativa de algoritmos NP-Completo executados em CPU e GPU utilizando CUDA.** Itajaí, 2012. 84 f. Trabalho Técnico-científico de conclusão de curso (Graduação em Ciências da Computação) – Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, 2012.

COPI, Irving M. **Introdução à lógica.** Tradução de Álvaro Cabral. 2 ed. São Paulo: Mestre Jou, 1978.

CSORBA, Péter; HURKENS, Cor A. J.; WOEGINGER, Gerhard J. **The Alcuin Number of a Graph**. Algorithms – Esa 2008, [s.l.], p.320-331. Springer Berlin Heidelberg, 2008. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-87744-8_27. Acesso em: 11 de set. 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3ª ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

GERDENTIS, Gisele Aparecida Massuela. **Raciocínio combinatório:** uma proposta para professores de matemática do ensino fundamental anos finais. 2014. 169 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos: São Carlos, 2014.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GOMES, Frederico César de Vasconcelos. **Ergonomia**: Fluxo de produção. 2018. Disponível em: <http://professor.ufop.br/sites/default/files/fred/files/fluxograma_e_organograma.pdf>. Acesso em: 29 abr. 2018.

GONDIM, H. W. A. S.; AMBRÓSIO, Ana Paula. **Esboço de fluxogramas no ensino de algoritmos**. In: WEI-Workshop sobre Educação em Computação. 2008. p. 109-117. Disponível em: <http://www.inf.ufg.br/tablets/sites/portal.inf.ufg.br.tablets/files/tabletsArticle-Halley-AnaPaula_Esbo_o-Fluxogramas.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2018.

HADLEY, John; SINGMASTER, David. **Problems to Sharpen the Young**. The Mathematical Gazette, [s.l.], v. 76, n. 475, p.102-126, mar. 1992. JSTOR. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2307/3620384>. Acesso em: 31 out. 2017.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** Rio de Janeiro: SBM, 2014. Coleção PROFMAT.

LAMPIS, Michael; MITSOU, Valia. **Generalizing Alcuin's River Crossing Problem**. In: 11th Panhellenic Conference in Informatics. 2007. p. 617-626. Disponível em: <http://academicworks.cuny.edu/gc_etds/326>. Acesso em: 14 de fev. 2018.

LEAL, Liara Aparecida dos Santos. **Uma fundamentação teórica para a complexidade estrutural de problemas de otimização.** 2002. 116 f. Tese (Doutorado em Ciências da Computação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

LIMA, Adriza Macêdo Damaceno. **Conhecendo os alunos que ingressam nos cursos de ciências exatas da UESB:** uma experiência com alunos dos cursos de ciência da computação e física. 2014. 118 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2014.

LIMA, Árllon Chaves; SOUZA, Deciola Fernades. **Desenvolvimento do raciocínio lógico algoritmo na educação básica**. In: II Congresso Nacional de Educação. V. 1, 2015. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_ EV045_MD1_SA2_ID513_08092015112155.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2018.

MARCÉN, Antonio Miguel Oller. **Los curiosos problemas de mezclas de Alcuino de York**. Pensamiento Matemático, v. 4, n. 1, p. 17-31, 2014. disponível em: <http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/vol_IV_num_1/his_mat_alcuino.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2017.

MARTINHON, Carlos Alberto. **Algoritmos randômicos em otimização combinatória.** 2002. In: XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro, 2002. Disponível em: <http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2002/pdf/arq0226.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2018.

MENEZES, Josinalva Estácio. **Travessias difíceis, divisões divertidas e quadrados mágicos:** evolução histórica de três recreações matemáticas. Recife: UFRPE, Imprensa Universitária, 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/05/5CC19453574449.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2017.

MINATEL, Maria Ângela Dias dos Santos; SANDER, Giovana Pereira; MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel. **Investigação matemática:** uma proposta de atividades investigativas a partir de questões do SARESP. In: CAPELLINI, Vera Lúcia Messias Fialho; SILVA, Luciene Ferreira da; MARQUES, Antonio Francisco; ZANATA, Eliana Marques; FERES, Glória Georges, orgs. **Ensino e aprendizagem na educação básica:** desafios curriculares. Bauru: FC/UNESP, 2015. p. 574-583.

MITSOU, Vasiliki Despoina. **The computational complexity of some games and puzzles with theoretical applications**. Tese (Doutorado na Faculdade de Pós-Graduação em Ciência da Computação) - City University of New York, Nova Iorque, 2014.

MOSER, Fernanda. **O uso de desafios:** motivação e criatividade nas aulas de matemática. 2008. 103 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2008.

NASSI–SHNEIDERMAN DIAGRAM. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Nassi%E2%80%93Shneiderman_diagram&oldid=837030773>. Acesso em: 29 abr. 2018.

NUNES, Célia Barros; SOUZA, Analucia CP de. **A Resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática em sala de aula.** São Paulo: UNESP. 2008. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC65873300534T.doc. Acesso em: 07 de jan. 2018.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em resolução de problemas:** caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 75-98, Dez. 2011. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739/4625>. Acesso em: 09 Nov. 2017.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, João Pedro da et al. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Quadrante, p. 41-70, 1998. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3042/1/98-Ponte%20etc%20Quadrante-MPT_.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2018.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélio. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

REDLING, Julyette Priscila. **A metodologia de resolução de problemas:** concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental. 166 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/90928>. Acesso em 20 de jan. 2018.

SEARA, Helenice Fernandes. **A compreensão de conceitos matemáticos através de desafios e situações-problema**. In: X ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Guarapuava: Unicentro, 2009. pp. 886-892. Disponível em: <http://www.unicentro.br/editora/anais/xeprem/RE/28.pdf>. Acesso em: 21 out. 2017.

SOARES, Flávia. **A lógica no cotidiano e a lógica na matemática.** Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/05/MC03526677700.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2017.

SOARES, Izidio Silva; OLIVEIRA, Joel Silva de. **Teste de QI Chinês:** uma atividade lúdica. In: III Congresso Nacional de Educação, 2016. **Anais III CONEDU**. Campina

Grande: Realize, 2016. v. 1. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV056_MD1_SA8_ID10246_13082016124205.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2017.

TEORIA DOS GRAFOS. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria_dos_grafos&oldid=51770047>. Acesso em: 10 abr. 2018.

ANEXO 1 – TERMO DE ASSENTIMENTO

TERMO DE ASSENTIMENTO

Resolução 510/16 do Conselho Nacional de Saúde.

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa de mestrado intitulada “**Algoritmos: uma experiência com alunos do ensino médio**”, sob a responsabilidade do pesquisador **Lindomar de Oliveira Costa**, do curso de **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT** do **Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas** da **Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB.**

Neste estudo pretendemos Identificar as contribuições que os desafios lógicos proporcionam aos alunos do ensino médio, em especial aos conceitos básicos de lógica matemática.

O motivo que nos leva a estudar esse assunto justifica-se através da importância de conhecermos as contribuições que os desafios de lógica proporcionam aos alunos do Ensino Médio. Partindo disso, esse projeto nos possibilitará a apropriação de conhecimentos e técnicas que proporcionem melhores resultados no âmbito do ensino-aprendizagem de lógica matemática aplicada ao ensino médio.

Este estudo será realizado em três etapas, denominadas: Pré-teste, Intervenção e Pós-teste.

O pré-teste consistirá na aplicação de um questionário denominado “caracterização dos indivíduos da pesquisa” com o objetivo de coletar informações que permitam conhecer o público-alvo e seus conhecimentos prévios sobre lógica.

A Intervenção consistirá na realização de oficinas envolvendo os conteúdos de lógica básica e aplicação de desafios de lógica.

O pós-teste consistirá na elaboração de um relatório pelos participantes com o intuito de coletar informações acerca do aprendizado nas oficinas e também registrar as impressões dos alunos em relação ao estudo realizado.

Para participar do estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em todas as formas que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não causará qualquer punição ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que tratará a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação.

Este estudo não apresenta risco à saúde mental ou física, danos ou maleficência de qualquer natureza relacionada a sua participação. Os benefícios deste estudo são as possibilidades de aumento do conhecimento científico para área de educação, em especial da Matemática.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizados. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, ____ fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações e o meu responsável poderá modificar a decisão em relação a minha participação se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo.

Recebi uma cópia deste termo assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Candiba, ____ de _______________ de 2017.

____

Assinatura do(a) menor

____

Assinatura do(a) pesquisador(a)

Para mais informações em relação a este estudo você poderá entrar em contato com:

PESQUISADOR(A) RESPONSÁVEL: LINDOMAR DE OLIVEIRA COSTA
ENDEREÇO: AV. ANA JOAQUINA, S/N – DISTRITO DE PILÕES
CANDIBA-BA – CEP: 46.380-000
FONE: (77) 9 8140-6752 / E-MAIL: lindomar.costa43@gmail.com

ANEXO 2 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Resolução nº 510, de 07 de Abril de 2016 do Conselho Nacional de Saúde.

O presente termo em atendimento à Resolução 510/16, destina-se a esclarecer ao participante da pesquisa intitulada "**Algoritmos: uma experiência com alunos do ensino médio**", sob responsabilidade do pesquisador **Lindomar de Oliveira Costa**, do curso de **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT** do **Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas**, da **Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB,** os seguintes aspectos:

Objetivo: Identificar as contribuições que os desafios lógicos proporcionam aos alunos do ensino médio, em especial aos conceitos básicos de lógica matemática.

Metodologia: Este estudo será realizado em três etapas, denominadas: Pré-teste, Intervenção e Pós-teste.

O pré-teste consistirá na aplicação de um questionário denominado "caracterização dos indivíduos da pesquisa" com o objetivo de coletar informações que permitam conhecer o público-alvo e seus conhecimentos prévios sobre lógica.

A Intervenção consistirá na realização de oficinas envolvendo os conteúdos de lógica básica e resolução de desafios de lógica.

O pós-teste consistirá na elaboração de um relatório, pelos participantes, com o intuito de coletar informações acerca do aprendizado nas oficinas e também registrar as impressões dos alunos em relação ao estudo realizado.

Justificativa e Relevância: Estudar esse assunto justifica-se através da importância de conhecermos as contribuições que os desafios de lógica proporcionam aos alunos do Ensino Médio. Partindo disso, esse projeto nos possibilitará a apropriação de conhecimentos e técnicas que proporcionem melhores resultados no âmbito do ensino-aprendizagem de lógica matemática aplicada ao ensino médio.

Desconfortos e riscos: Este estudo não apresenta risco à saúde mental ou física, danos ou maleficência de qualquer natureza em relação ao participante.

Confidencialidade do estudo: O pesquisador tratará a identidade do participante com padrões profissionais de sigilo. Ele não será identificado em nenhuma publicação. O nome ou o material que indique a participação não será liberado sem a sua permissão.

Benefícios: Os benefícios deste estudo são as possibilidades de aumento do conhecimento científico para área de educação, em especial da Matemática.

Garantia de esclarecimento: Você será esclarecido(a) em todas as formas que desejar e estará livre para permitir ou recusar que o menor sob sua responsabilidade participe deste estudo. Você poderá retirar o consentimento ou interromper a participação do menor a qualquer momento.

Participação Voluntária: A participação é voluntária e a recusa em participar não causará qualquer punição ou modificação na forma em que o menor é atendido(a) pelo pesquisador. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira.

Consentimento para participação:

Eu, ____, portador (a) do documento de Identidade Nº. __________________________, responsável pelo menor ____, fui informado (a) dos objetivos da pesquisa, dos procedimentos aos quais o menor será submetido e os possíveis riscos envolvidos na participação do mesmo. Os pesquisadores me garantiram disponibilizar qualquer esclarecimento adicional que eu venha solicitar durante o curso da pesquisa e o direito de desistir da participação em qualquer momento, sem que a desistência implique em qualquer prejuízo à minha pessoa ou à minha família, sendo garantido anonimato e o sigilo dos dados referentes a minha identificação e a do menor sob minha responsabilidade, bem como de que a participação neste estudo não me trará nenhum benefício econômico.

Recebi uma via original deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Candiba, ____ de _______________ de 2017.

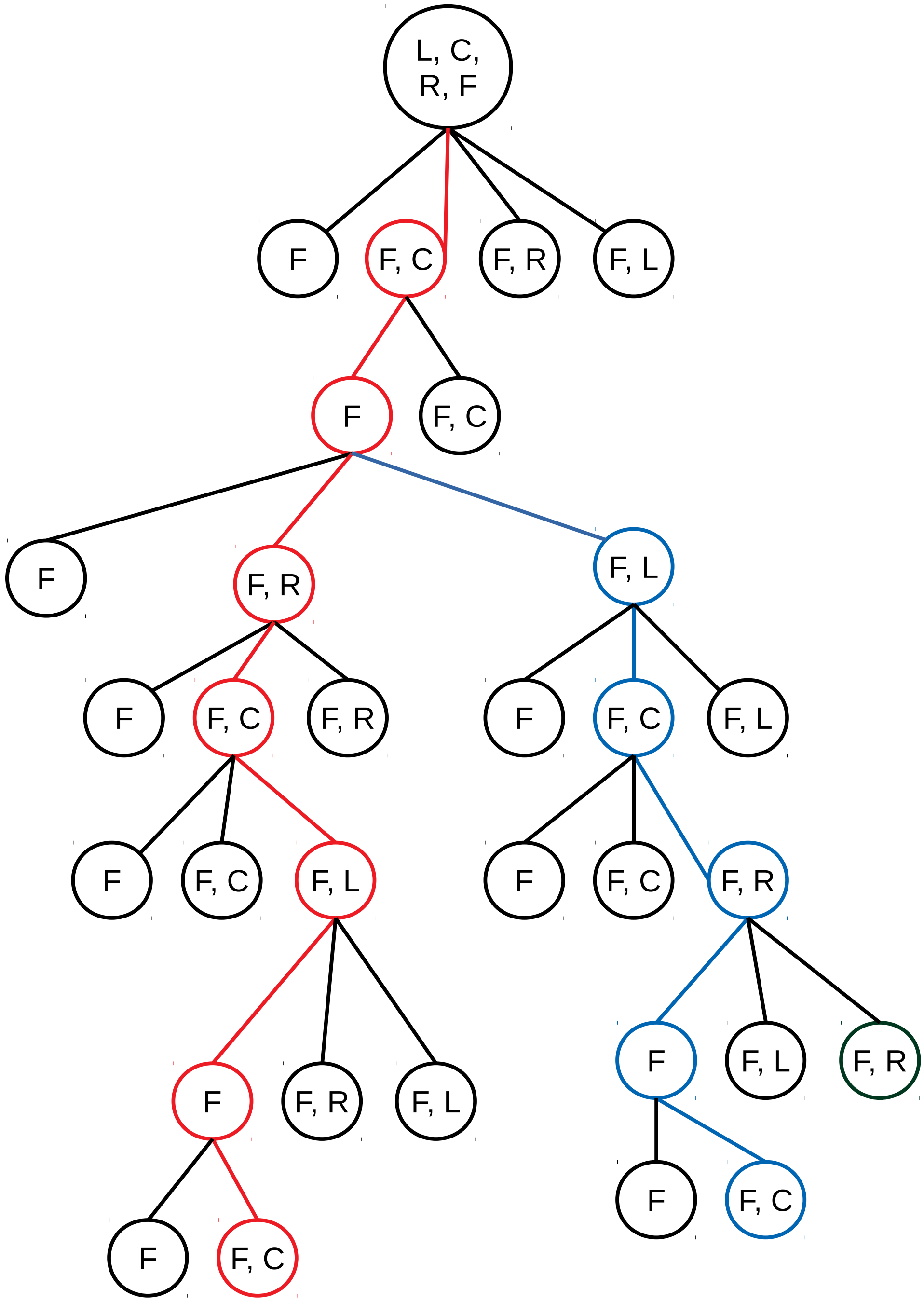
____
Assinatura do Responsável

____
Assinatura do Pesquisador

Para mais informações em relação a este estudo você poderá entrar em contato com:

PESQUISADOR(A) RESPONSÁVEL: LINDOMAR DE OLIVEIRA COSTA
ENDEREÇO: AV. ANA JOAQUINA, S/N – DISTRITO DE PILÕES
CANDIBA-BA – CEP: 46.380-000
FONE: (77) 9 8140-6752 / E-MAIL: lindomar.costa43@gmail.com

APÊNDICE A – BUSCA EM ÁRVORE PARA O DESAFIO DO FAZENDEIRO



Legenda:

Busca sem Sucesso

Busca com Sucesso 1

Busca com Sucesso 2

F = Fazendeiro

C = Cabra

R = Repolho

L = Lobo