UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Trigonometria no ensino médio e suas aplicações

Francine Dalavale Tozatto Souza

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Francine Dalavale Tozatto Souza

Trigonometria no ensino médio e suas aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira

USP – São Carlos
Julho de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

T757t

Tozatto Souza, Francine Dalavale
Trigonometria no ensino médio e suas aplicações / Francine Dalavale Tozatto Souza; orientador Regilene Delazari dos Santos Oliveira. -- São Carlos, 2018.
95 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Trigonometria. 2. Triângulo. 3. Funções e leis trigonométricas. 4. Aplicações. 5. Ensino médio. I. Delazari dos Santos Oliveira, Regilene, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Francine Dalavale Tozatto Souza

Trigonometry in the High School and its applications

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira

USP – São Carlos
July 2018

Este trabalho é dedicado ao meu marido Willian e ao meu filho Theo.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e forças para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração e ao IMPA, que tornaram possível a realização deste mestrado.

Em especial, a minha orientador Regilene Oliveira, por todo empenho, paciência e dedicação que foram essenciais para que eu concluísse esse trabalho.

À querida professora Ires Dias que sempre me apoiou.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

À minha amada avó e aos meus queridos familiares que sempre estiveram ao meu lado, abriram mão de muitos compromissos para ficarem com o meu filho durante meus estudos e idas para a faculdade. Ao meu marido Willian que não mediu esforços para me ajudar em todas as situações e que, como todo seu amor e sua compreensão, foi a base para a concretização do meu sonho.

Ao grande amor da minha vida, meu filho Theo, que nasceu no último semestre de aulas do programa PROFMAT, e que foi minha grande inspiração para finalizar essa dissertação.

Aos meus colegas de sala, especialmente ao meu amigo Fabrício e minha amiga e companheira de viagens, Liliane, que sempre me ajudaram e incentivaram em todos os momentos.

Enfim, aos colegas de trabalho, alunos, amigos e todos os envolvidos que de alguma forma contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade.

“Todas as vitórias ocultam uma abdicação.”
(Simone de Beauvoir)

RESUMO

TOZATTO, FRANCINE D. S. **Trigonometria no ensino médio e suas aplicações**. 2018. 97 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Neste trabalho fazemos um estudo detalhado sobre o tema *Trigonometria*. A trigonometria é um tema bastante discutido em sala de aula durante o ensino médio. Não apenas apresentamos resultados sobre o tema mas também suas provas e justificativas, assim como exemplos e exercícios com o objetivo de ter um material completo para professores do ensino médio que desejem estudar tais tópicos. Em seguida apresentamos algumas aplicações da Trigonometria que podemos encontrar em nosso dia-a-dia, também aqui o objetivo é apresentar motivação para o estudo deste importante assunto e tão frequente nos vestibulares atualmente. Finalmente, apresentamos uma atividade realizada com meus alunos em sala de aula. Esta dissertação foi desenvolvida como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestrado acadêmico junto ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC), da Universidade de São Paulo (USP).

Palavras-chave: Trigonometria, triângulos, funções e leis trigonométricas, aplicações e ensino médio.

ABSTRACT

TOZATTO, FRANCINE D. S. **Trigonometry in the High School and its applications**. 2018. 97 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

In this dissertation we present a detailed study about *Trigonometry*. This subject is frequently discussed em classes during High school courses. We do not only present the main results about Trigonometry but also their proofs, as well examples and exercises. Our main objective here is obtain a complete text for high school teachers. We also present some applications of Trigonometry that can be easily find in our life. Here our main objective is to motivate the study of this important subject that appears so frequently in the exams for universities entrance. To conclude, we present an activity realized with high school students. This dissertation was developed as part of the requirements necessary for the obtension of the degree of Mathematics Professional Master at Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP).

Keywords: Trigonometry, triangles, functions and trigonometric laws, applications and high school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Triângulo Retângulo 27
Figura 2 – ABH e ACH são triângulos semelhantes. 28
Figura 3 – Prova do Teorema de Pitágoras por decomposição de áreas. 28
Figura 4 – Ilustração do exemplo CFTMG 2017. 29
Figura 5 – Ilustração da resolução do exemplo proposto 30
Figura 6 – Triângulo retângulo 31
Figura 7 – Triângulo Retângulo 32
Figura 8 – Triângulo Retângulo 32
Figura 9 – Triângulo Equilátero 34
Figura 10 – Quadrado de lado l 35
Figura 12 – Paralelepípedo $ABCDEFGH$ 36
Figura 11 – Tabela valores das razões trigonométricas 37
Figura 13 – Paraleleípedo ABCDEFGH-resolução 38
Figura 14 – Triângulo ABC 39
Figura 15 – Triângulo ABC 40
Figura 16 – Triângulo Retângulo 41
Figura 17 – Demonstração através da Potência de Ponto 41
Figura 18 – Figura ilustrativa referente ao exemplo UNESP 2017 42
Figura 19 – Figura ilustrativa referente à resolução do exemplo UNESP 2017 43
Figura 20 – Triângulo ABC 43
Figura 21 – Ângulo Central AÔB 44
Figura 22 – O grau 45
Figura 23 – Arco de um radiano 46
Figura 24 – Relação arco, ângulo central e raio 46
Figura 25 – Ângulo formado pelos ponteiros de um relógio 47
Figura 28 – Quadrantes 48
Figura 26 – Circunferência Trigonométrica 48
Figura 27 – Quadrantes 48
Figura 29 – Arcos Côngruos 49
Figura 30 – Seno no ciclo trigonométrico 49
Figura 31 – f(x)= sen x 50
Figura 32 – Gráfico de $f(x) = 1 + \text{sen} x$ 51
Figura 33 – Gráfico de $f(x) = 2\text{sen} x$ 51

Figura 34 – Gráfico da função $f(x) = -2\text{sen}x$ 52
Figura 35 – Gráfico de $g(x) = \text{sen}2x$ 52
Figura 36 – Gráfico de $f(x) = sen(x+\pi)$ 53
Figura 37 – Cosseno no ciclo trigonométrico 54
Figura 38 – A curva cossenoide 54
Figura 39 – Gráfico de $f(x) = -2+3\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 55
Figura 41 – Tangentóides 55
Figura 40 – Tangente no ciclo trigonométrico 56
Figura 42 – Cossecante no Ciclo 57
Figura 43 – Gráfico de $f(x) = \csc x$ 57
Figura 44 – Secante no ciclo trigonométrico 58
Figura 45 – Gráfico de $f(x) = \sec x$ 58
Figura 46 – Cotangente no ciclo trigonométrico 59
Figura 47 – Gráfico de $f(x) = \cot x$ 60
Figura 48 – Gráfico da função seno restrita ao domínio D 61
Figura 49 – Gráfico da função arco seno 61
Figura 50 – Gráfico da função $g(x)$ restrita ao domínio D 62
Figura 51 – Gráfico da função $g^{-1}(x)$ 62
Figura 52 – Gráfico de $g(x) = \tan x$ restrita a $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 63
Figura 53 – Gráfico da função arco tangente 63
Figura 54 – Prova da soma de arcos para a função seno e cosseno 64
Figura 55 – Triângulo 1 64
Figura 56 – Triângulo 2 65
Figura 57 – Triângulo 3 65
Figura 58 – Triângulo 4 65
Figura 59 – Figura Final 66
Figura 60 – Poço em Siena 72
Figura 61 – Distância entre Alexandria e Siena 72
Figura 62 – Medida da Terra feita por Erastótenes 73
Figura 63 – Pirâmide Quéops do Egito 74
Figura 64 – Esquema elaborado por Tales de Mileto 75
Figura 65 – Lançamento Oblíquo 76
Figura 66 – Imagem de Refração 78
Figura 67 – Figura referente ao exercício de refração 79
Figura 68 – Ondas Sonoras 80
Figura 69 – Gráficos que representam sons 81
Figura 70 – Gráfico de amplitude 5 81
Figura 71 – Gráfico de amplitude 2 82
Figura 72 – Gráfico da pressão 83

Figura 73 – Gráfico de acertos 88
Figura 74 – Teste aplicado aos alunos, página 1. 89
Figura 75 – Teste aplicado aos alunos, página 2. 90
Figura 76 – Teste resolvido pelo aluno 1, página 1. 91
Figura 77 – Teste resolvido pelo aluno 1, página 2. 92
Figura 78 – Teste resolvido pelo aluno 2, página 1. 93
Figura 79 – Teste resolvido pelo aluno 3, página 1. 94

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 21

2 CONCEITOS PRINCIPAIS DA TRIGONOMETRIA 25
2.1 Ângulos 26
2.2 Triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras 26
2.3 Razões Trigonométricas 30
2.4 Ângulos Complementares 31
2.5 Relação Fundamental 32
2.5.1 Outras relações 33
2.6 Ângulos Notáveis 33
2.7 Lei dos cossenos 38
2.8 Lei dos senos 43
2.9 Arcos e ângulos na circunferência 44
2.10 Unidades de Medida 44
2.11 Conversão de unidades 45
2.12 Comprimento do arco 46
2.13 Ângulo formado pelos ponteiros de um relógio 46
2.14 Ciclo ou circunferência trigonométrico 47
2.15 Funções Trigonométricas 49
2.15.1 Função seno 49
2.15.2 Função cosseno 53
2.15.3 Função tangente 55
2.15.4 Função cossecante 56
2.15.5 Função secante 58
2.15.6 Função cotangente 59
2.16 Funções Trigonométricas Inversas 60
2.16.1 Função arco-seno 60
2.16.2 Função arco-cosseno 61
2.16.3 Função arco-tangente 62
2.17 Adição e subtração de arcos 63
2.17.1 Arco Duplo 67
2.17.2 Fatoração ou fórmulas de Prostaférese 67
2.17.3 Arco Triplo 68

2.17.4 Arco Metade *69*

3 APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA **71**
3.1 Medidas de distância **71**
3.1.1 Erastóstenes e o cálculo do raio da Terra *72*
3.1.2 Tales de Mileto e altura da pirâmide de Quéops *74*
3.2 Trigonometria na Física **75**
3.2.1 Lançamento Oblíquo *75*
3.2.2 Refração *77*
3.2.3 O Som *79*
3.3 Na medicina **82**

4 ATIVIDADE REALIZADA EM SALA DE AULA **87**

REFERÊNCIAS **97**

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Ao lecionarmos disciplinas de matemática para as séries do Ensino Médio facilmente percebemos a grande dificuldade que os alunos apresentam nestas disciplinas. A Trigonometria é uma das disciplinas que se enquadram nessa dificuldade. Certamente não existe um único motivo que torne a trigonometria um conteúdo árduo para os estudantes, mas acreditamos que um desses motivos possa ser o distanciamento do empirismo do qual se originou. Nosso objetivo é mostrar como podemos desenvolver, em conjunto com os alunos, um conteúdo mais interessante, para que exista uma maior motivação e apreciação, não só para o aluno, mas também para o docente ao explanar desse conteúdo em sala de aula. Nesse contexto, aplicações aparecem como um forte aparato para a interpretação de muitos porquês. Podemos encontrar nos Parâmetros Curriculares Nacionais uma citação do estudo da trigonometria, na qual é destacado o seu potencial relacionado ao desenvolvimento de habilidades e competências.

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações [...](BRASIL, 1999, p. 257)

Acreditamos que assim que o aluno entra em contato com o contexto histórico da Trigonometria, ele observa que esta não nasceu da forma que é apresentada, mas sim, que foi estruturada a partir das necessidades de comunidades antigas, cursando assim, um extenso percurso até tomar a forma da qual é encontrada nos dias de hoje. Porém, um dos principais objetivos dos alunos do Ensino Médio atualmente é o ingresso em grandes universidades públicas e isso só é possível após realizar uma prova muito complexa organizada por institutos responsáveis pelos seus respectivos vestibulares. A Fuvest, por exemplo, exige um conhecimento extremamente aprofundado em trigonometria que faz com que o aluno tenha que ter um investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações, contrariando assim a citação encontrada no

PCN. Dessa maneira, o professor encontra um dilema na sala da aula: deixar a trigonometria mais palpável e próxima da realidade dos alunos ou aprofundar os conceitos e as equações trigonométricas para deixá-los mais preparados para os grandes vestibulares? Analisando este dilema concluímos que podemos tentar conciliar as duas situações. Mostrar aos alunos a origem da trigonometria, suas aplicações atuais e em seguida trabalhar os conceitos e aprofundá-los. Não é um trabalho fácil, mas é possível.

Ainda de acordo com os PCN,

> O ensino de Matemática, devido ao caráter formativo, instrumental e científico, propicia condições para inserção do indivíduo num mundo em constante evolução e mudança, contribuindo para investigar, questionar, pesquisar, construir hipóteses, inferir e generalizar, adquirir confiança na própria capacidade de pensar, encontrar soluções, trabalhar cooperativamente e desenvolver capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional.

Ao mostrar para o aluno que o conteúdo visto em sala terá alguma utilidade em sua vida acadêmica ou profissional, o interesse aumenta e a aula flui com maior naturalidade. Uma maneira de deixar o momento de resolução de exercícios mais agradável, é trabalhar em grupos e liderar a aula como um tutor, tirando as dúvidas e dando mais autonomia para os alunos resolverem as questões.

O nome "Modelagem Matemática" consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" segundo, Bassanezi, (2002, p.16).

Ela permite a realização de previsões e tendências e é eficiente a partir do momento que tomamos consciência de que estamos trabalhando sobre representações de um sistema ou parte dele. É um processo dinâmico que, partindo de um problema real, associado a um conjunto de hipóteses, alcança sua solução com uso de ferramentas auxiliares. A Trigonometria é uma destas ferramentas auxiliares.

Assim, é muito produtivo trabalhar com listas de exercícios contextualizados que aparecem nos vestibulares mais famosos do Brasil, assim como no Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM.

O ENEM possui 180 questões de múltipla escolha, das quais 45 são de matemática. Grande parte das 45 questões de matemática pertencem a geometria e trigonometria. Questões baseadas em situações problemas do dia-a-dia, ou seja, uma trigonometria mais fácil de ser trabalhada em sala.

Descreveremos a seguir como está dividido este trabalho.

No primeiro capítulo encontra-se toda a parte teórica da trigonometria que o aluno terá contato. Apresentamos triângulos, teoremas, semelhanças, funções, fórmulas, ciclo trigonométrico, equações e inequações. Junto a tais resultados encontram-se suas provas e/ou justificativas, assim como exemplos e exercícios propostos.

No segundo capítulo, mostramos que o conteúdo pode ser aplicado tanto na matemática quanto na física, na arquitetura, na engenharia e até na medicina. As aplicações tornam a matemática muito mais atraente para os alunos.

Finalmente no capítulo 3, mostramos como foi o teste aplicado para os alunos. O teste foi criado a partir de questões atuais retiradas de provas dos vestibulares e do ENEM. Foi de grande importância, visto que os alunos mostraram suas habilidades e suas dificuldades.

CAPÍTULO

2

CONCEITOS PRINCIPAIS DA TRIGONOMETRIA

A palavra trigonometria é uma palavra de origem grega e composta onde “*trígono*"significa triângulo e “*metria*"significa medida, contudo ela não tem como finalidade exclusiva o estudo dos triângulos, seu estudo se estende a outras investigações sobre ângulos como veremos nesta dissertação. Acredita-se que o estudo da trigonometria teve início com às civilizações babilônicas e egípcias. Atualmente a trigonometria tem grande importância não apenas para estudos matemáticos mas também como instrumento de outras ciências como física, agrimensura, engenharia e navegação. Ela é bastante utilizada em análise de sistemas elétricos e de ondas sonoras. Provavelmente a trigonometria teve início no estudo da astronomia, que exigia o cálculo de distâncias entre pontos inacessíveis. Hiparco de Nicéia, astrônomo grego e considerado o pai da Trigonometria, por volta de 180 a 125 a.C, criou metodologias para medir distâncias e ângulos. Ele fez um tratado em doze livros em que se construiu a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. A elaboração de um catálogo estrelar, a duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação eclítica e a descoberta da precedência dos equinócios, são as principais contribuições à Astronomia, atribuídas a Hiparco. A Trigonometria foi desvinculada da astronomia somente no início do século XVIII através do matemático e físico suíço Leonhard Euler, que foi o primeiro a relacionar a trigonometria com funções. (COSTA,) Muito citada, a palavra corda recebeu uma tradução errônea que é utilizada até hoje, seno que vem de *sinus*. *Sinus* é a tradução latina da palavra árabe *Jaib*, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta, o que não tem relação com o conceito matemático de seno. A palavra árabe adequada, que deveria ser traduzida, seria *jiba*, em vez de *jaib*. *Jiba* significa a corda de um arco. Também muito usado, o cosseno teve surgimento apenas no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Já a tangente, ao que tudo indica, teve origem através da necessidade de calcular alturas e distâncias. A unidade grau é muito utilizada na Trigonometria, assim como seus submúltiplos, minuto e segundo. Ao que tudo indica o conceito de grau é originário da Babilônia. Para estabelecerem o grau, os babilônios dividiram o círculo em 360 partes iguais, pois acreditavam que essa era a quantidade de dias referente ao período de um ano e porque seu sistema de numeração era de base sessenta ou sexagesimal. Como cada uma das 360 divisões do círculo corresponde a um grau, temos que:

Uma volta equivale a 360 graus.

Meia volta equivale a 180 graus.

Um quarto de volta equivale a 90 graus.

Outra justificativa para escolher o número 360 pode ser porque ele tem 24 divisores. Além disso, 360 é divisível pelos números de 1 a 10, com exceção de 7. Esta propriedade tem diversas aplicações práticas, tal como dividir o planeta em 24 fusos horários, cada um com 15^o de longitude, correlacionando com a convenção estabelecida do dia de 24 horas.

Para facilitar muitos cálculos trigonométricos, uma outra unidade de medida é utilizada, o radiano. Ele é útil para distinguir quantidades de diferentes naturezas, mas com a mesma dimensão. O radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o referido arco. Como ao arco está associado um ângulo central, também podemos dizer que radiano é a medida do ângulo central que determina na circunferência um arco cujo comprimento é igual ao raio.

Neste capítulo apresentaremos os conteúdos básicos da trigonometria que consideramos essenciais para o ensino do tema e pré-requisitos para a realização da discussão do mesmo em sala de aula. O conteúdo deste capítulo foi baseado nas seguintes referências bibliográficas: (REIS, 2016) (IEZZI, 1985) (SILVA, 2017) (COSTA, 2016) (KRIKORIAN, 1987) (OLIVEIRA, 2010).

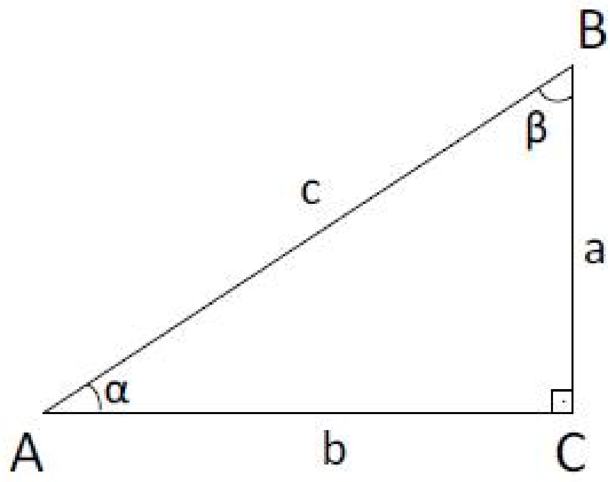
2.1 Ângulos

Dadas duas semirretas no plano, AB e AC, um ângulo (ou região angular) de vértice em A e lados $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas AB e AC. Denotamos um ângulo convexo de lados $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ escrevendo $B\hat{A}C$ ou usando uma letra grega α, como mostrado na Figura 1.

2.2 Triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras

Um triângulo retângulo é um triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, com medida igual a 90^0, e dois ângulos agudos, isto é, menores que 90^0 e maiores que 0^0. Esse triângulo é de grande importância e muito usado na engenharia, arquitetura, navegação e astronomia. Cada lado desse triângulo recebe um nome diferente, como podemos observar na Figura 1.

Figura 1 – Triângulo Retângulo



O maior lado desse triângulo recebe o nome de hipotenusa e é oposto ao ângulo reto. Os outros dois lados recebem nomes de catetos. O lado BC, por ser oposto ao ângulo alfa (α), pode ser chamado de cateto oposto ao ângulo α ou ainda, cateto adjacente ao ângulo beta (β), de maneira análoga, o lado AC recebe o nome de cateto oposto ao ângulo β ou cateto adjacente ao ângulo α.

Um dos filósofos que merece destaque no estudo dos triângulos retângulos é Pitágoras. Pitágoras foi um importante matemático e filósofo grego que nasceu no ano de 570 a .C na ilha de Samos, na região da Ásia Menor (Magna Grécia). Provavelmente, morreu em 497 ou 496 a.C em Metaponto (região sul da Itália). Embora sua biografia seja marcada por diversas lendas e fatos não comprovados pela História, temos dados e informações importantes sobre suas colaborações científicas, como por exemplo o Teorema de Pitágoras, que afirma que

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Para este resultado encontramos várias demonstrações. Vejamos abaixo uma delas, obtida por semelhança de triângulos.

Considere o triângulo ABC, retângulo em A. Trace AH, a altura referente a hipotenusa BC. Os triângulos ABH e ACH são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo-ângulo. Veja Figura 2.

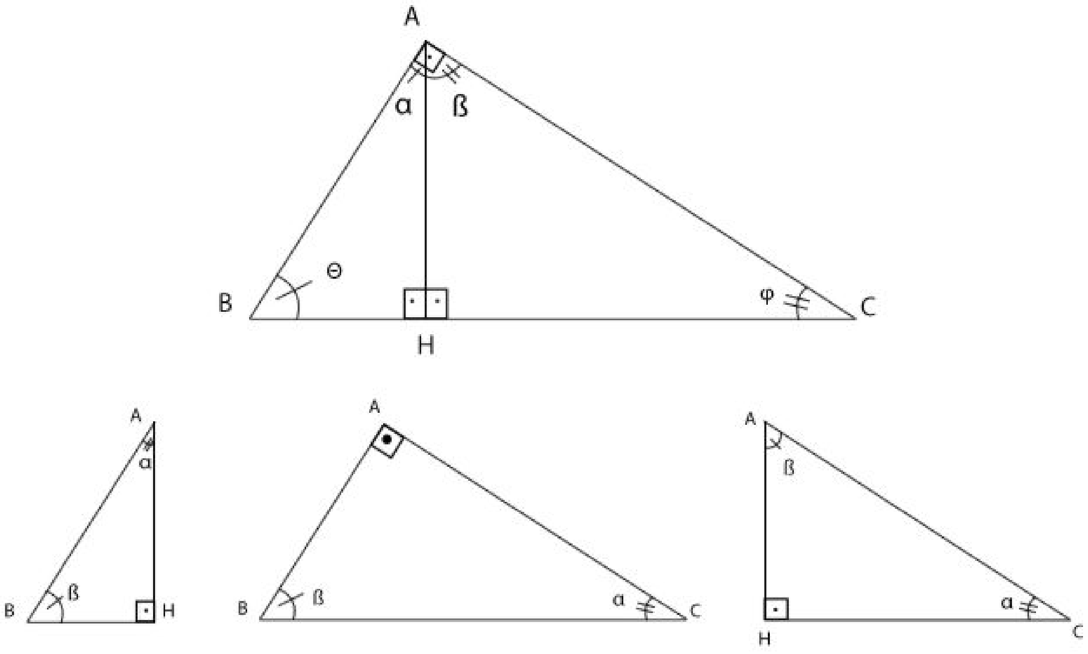
Portanto segue que

$$\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}, \qquad \frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}. \tag{2.1}$$

Consequentemente, $AB^2 = BC.BH$ e $AC^2 = BC.CH$ e temos que:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BCBH + BCCH \\ &= BC(BH + CH) \\ &= BCBC = BC^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

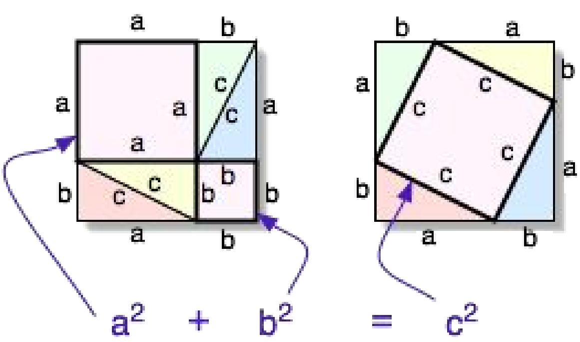
Figura 2 – *ABH* e *ACH* são triângulos semelhantes.



Fonte – Elaborada pela autora

Outra prova do Teorema de Pitágoras pode ser realizada por decomposição de áreas, como ilustra a Figura 3.

Figura 3 – Prova do Teorema de Pitágoras por decomposição de áreas.

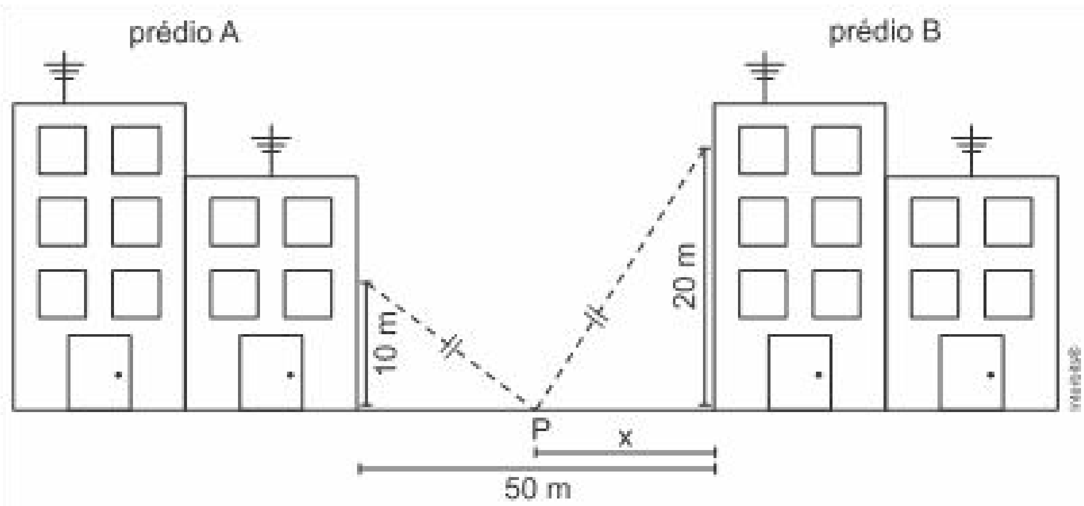


Nesta demonstração basta observarmos que a figura à esquerda apresenta um quadrado de lado a + b decomposto em seis partes: um quadrado de lado a, um quadrado de lado b e quatro triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c. A figura à direita apresenta um quadrado, congruente ao primeiro, porém decomposto de outra forma, em cinco partes: um quadrado de lado c e quatro triângulos retângulos congruentes aos da primeira figura. Como a área da figura à direita é igual à área da figura à esquerda, retirando-se os quatro triângulos retângulos de ambas as figuras, o que resta tem que ser igual: $a^2 = b^2 + c^2$, onde a e b representam as medidas dos catetos e c a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer.

Vejamos agora um exemplo onde o Teorema de Pitágoras pode ser empregado.

(CFTMG 2017) Duas crianças, cada uma em um prédio diferente, brincam com canetas lasers nas janelas de seus apartamentos, apontando para um ponto na quadra situada entre os prédios. A criança do prédio A está a uma altura de $10m$ e a do prédio B $20m$ a uma altura de do chão. A distância entre os prédios é de $50m$. Em um determinado momento, os lasers das crianças atingem, simultaneamente, um ponto do pátio equidistante das crianças, tal como ilustra a Figura 4.

Figura 4 – Ilustração do exemplo CFTMG 2017.



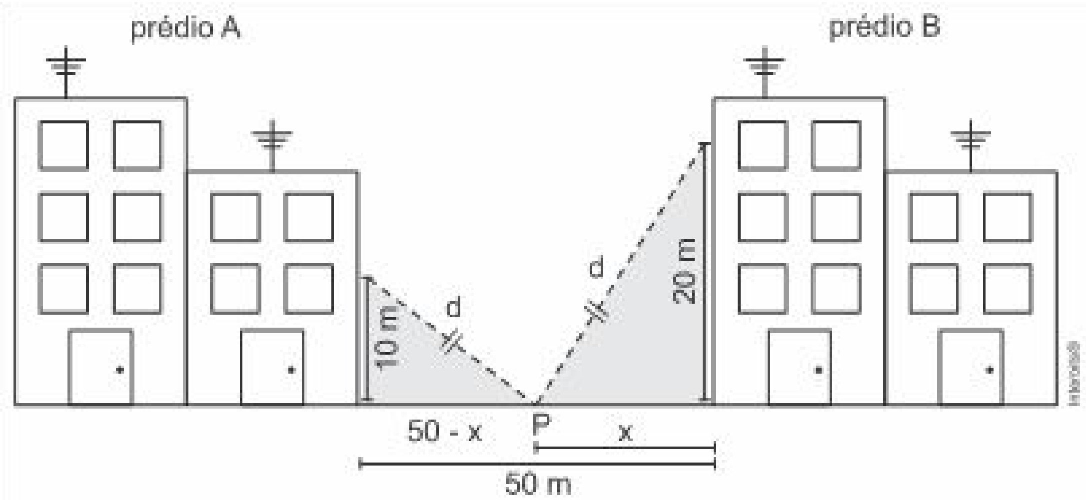
Fonte – www.sprweb.com.br

Responda, a distância x em metros deste ponto até o prédio B é:

$a)\,22$ $\quad b)\,23$ $\quad c)\,25$ $\quad d)\,28$

Resolução: Considere a Figura 5.

Figura 5 – Ilustração da resolução do exemplo proposto



Fonte – www.sprweb.com.br

Nos triângulos destacados acima aplica-se o Teorema de Pitágoras:

$d^2 = 10^2 + (50 - x)^2 = 20^2 + x^2$

$100 + 2500 - 100x + x^2 = 400 + x^2$

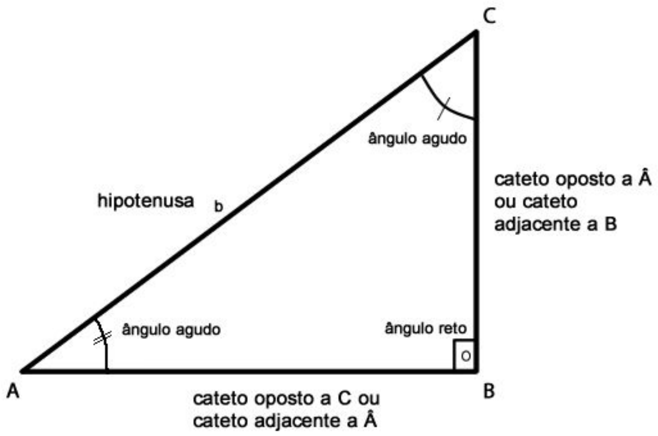
$100x = 2200$

$x = 22.$

2.3 Razões Trigonométricas

Acredita-se que as razões trigonométricas surgiram pela necessidade de se calcular medidas em linha reta entre dois pontos na superfície da Terra. O povo Hindu notou que a razão entre a medida do cateto oposto de um ângulo agudo do triângulo retângulo pela medida da hipotenusa resulta em uma mesma constante e deu o nome de JIVA(meia corda) a essa razão. Os árabes transformaram em JIBA e registraram JB, pois era comum na língua árabe apenas escrever as consoantes. Ao traduzir para o latim, os historiadores entenderam que JB seriam as consoantes de JAIB, que significa "baía"e traduziram como SINUS. Assim, JIBA, ou meia corda Hindu recebeu o nome errôneo de SINUS e é mantido até hoje como SENO, em português. Outro conceito bastante usado é o cosseno. O cosseno surgiu apenas no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Já a tangente, ao que tudo indica, teve origem através da necessidade de calcular alturas e distâncias. As razões cossecante, secante e cotangente surgiram como razões inversas das razões seno, cosseno e tangente, respectivamente. Veja a seguir as definições das razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Considere o triângulo retângulo ABC na figura 6.

Figura 6 – Triângulo retângulo



Fonte – Elaborada pela autora

- Seno

$$\text{sen}A = \frac{BC}{AC} \qquad \text{sen}C = \frac{AB}{AC}$$

- Cosseno

$$\cos A = \frac{AB}{AC} \qquad \cos C = \frac{BC}{AC}$$

- Tangente

$$\tan A = \frac{BC}{AB} \qquad \tan C = \frac{AB}{BC}$$

- Secante

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\cos A} \qquad \sec C = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\cos C}$$

- Cossecante

$$\csc A = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\text{sen}A} \qquad \csc C = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\text{sen}C}$$

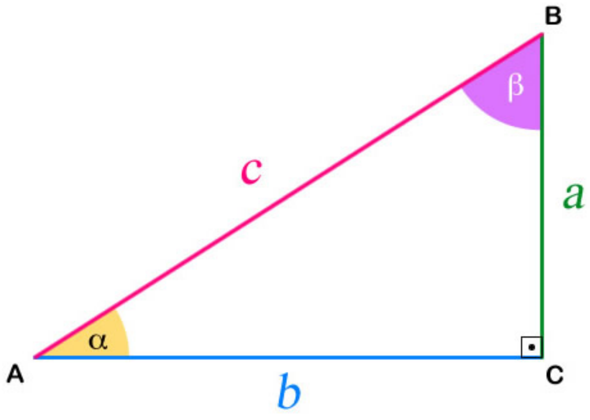
- Cotangente

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\tan A} = \frac{\cos A}{\text{sen}A} \qquad \cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\tan C} = \frac{\cos C}{\text{sen}C}$$

2.4 Ângulos Complementares

Em todo triângulo retângulo os ângulos agudos são complementares, ou seja, a soma de suas medidas resultam em 90^0. Assim, ao calcularmos as razões trigonométricas num triângulo retângulo, algumas igualdades são conhecidas como igualdades notáveis. Vejamos algumas destas igualdades

Figura 7 – Triângulo Retângulo



i) $\text{sen}\hat{A} = \dfrac{\text{cateto oposto a } \hat{A}}{\text{hipotenusa}} = \cos\hat{B}$

ii) $\text{sen}\hat{B} = \dfrac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}} = \cos\hat{A}$

iii) $\tan\hat{A} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\tan B}$

v) $\sec\hat{A} = \dfrac{c}{b} = \csc\hat{B}$

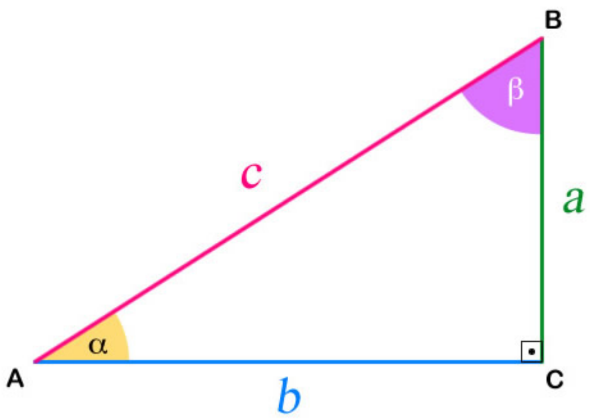
vi) $\sec\hat{B} = \dfrac{c}{a} = \csc\hat{A}$

vii) $\cot\hat{A} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\cot B}$

2.5 Relação Fundamental

Uma relação de grande importância para a Trigonometria é a Relação Fundamental que iremos apresentar a seguir. Observe a Figura 8.

Figura 8 – Triângulo Retângulo



Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, tem-se:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dividindo-se, ambos os membros por c^2:

$$\frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

Portanto,

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

conhecida como relação fundamental no triângulo retângulo.

2.5.1 Outras relações

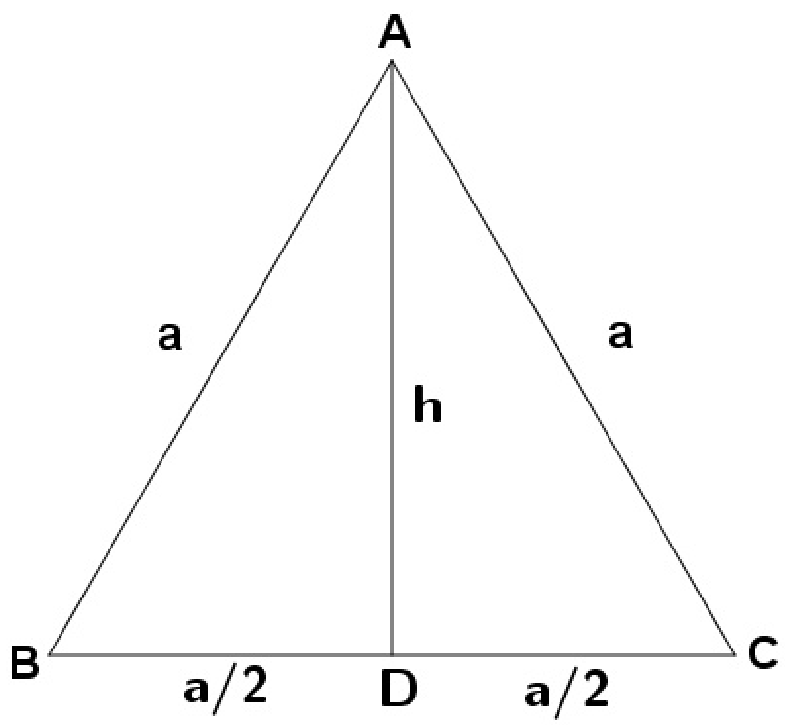
A partir da relação fundamental acima apresentada pode-se obter outras relações muito úteis. Dividindo-se ambos os membros da relação fundamental por $cos^2\alpha$ e posteriormente por $sin^2\alpha$, obtém-se respectivamente, as seguintes identidades trigonométricas:

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha, \qquad \cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha.$$

2.6 Ângulos Notáveis

Os ângulos de 30^0, 45^0 e 60^0 são chamados ângulos notáveis e aparecem frequentemente em diversas aplicações. Considere o triângulo equilátero ABC da Figura 9.

Figura 9 – Triângulo Equilátero



Ao traçar a bissetriz, mediana, ou ainda, a altura AD, obtemos o triângulo ACD com ângulos agudos de 30^0 e 60^0. Através do Teorema de Pitágoras, determinamos a medida h da altura em função do lado a do triângulo ABC, pois

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Portanto temos que $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Desta forma determinamos os valores das razões trigonométricas de 30^0 e 60^0. Como visto anteriormente, o seno de um ângulo é definido como a razão entre a medida do cateto oposto a este ângulo pela medida da hipotenusa do triângulo, ou seja,

$$\text{sen}30^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}, \qquad \text{sen}60^o = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

O cosseno de um ângulo é definido pela razão entre a medida do cateto adjacente a este ângulo pela medida da hipotenusa do triângulo:

$$\cos 30^o = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^o = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}.$$

A tangente de um ângulo é definida pela razão entre a medida do cateto oposto pela medida do cateto adjacente a este ângulo, isto é,

$$\tan 30^o = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \sqrt{3}.$$

Para obter as razões secante, cossecante e cotangente, basta calcular o inverso de cada razão encontrada. Primeiramente, calcula-se as razões inversas do ângulo de 30^o:

$$\sec 30^o = 1/\cos 30^o = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \csc 30^o = 1/\text{sen}30^o = 2, \quad \cot 30^o = 1/\tan 30^o = \sqrt{3}.$$

Para encontrar as razões inversas do ângulo de 60^o, pode-se utilizar a propriedade dos ângulos complementares:

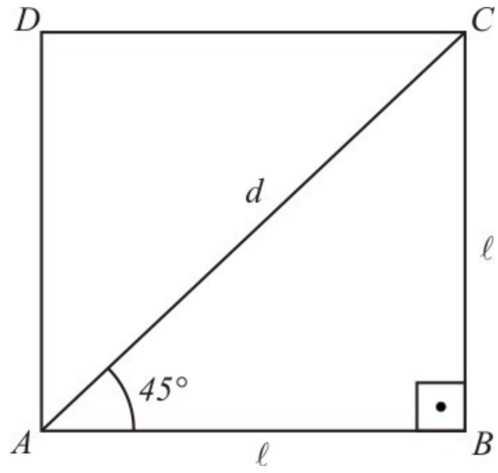
$$\sec 60^o = \csc 30^o = 2,$$

$$\csc 60^0 = \sec 30^o = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot 60^o = \tan 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para calcular o seno, cosseno e tangente de 45^o podemos utilizar o quadrado $ABCD$ ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Quadrado de lado l



A diagonal d forma com os lados l ângulos de 45^o e pode-se escrever a medida da diagonal d em função das medidas dos lados l aplicando-se o Teorema de Pitágoras

$d^2 = l^2 + l^2$,

$d^2 = 2l^2$,

Logo, $d = l.\sqrt{2}$.

Assim, tem-se :

$\text{sen}45^o = \dfrac{l}{l.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad \cos 45^o = \dfrac{l}{l.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad \tan 45^o = \dfrac{l}{l} = 1$.

Consequentemente temos que

$\sec 45^o = \sqrt{2}$, e $\cot 45^o = 1$.

Dessa maneira, obtemos a tabela com os ângulos notáveis dada a seguir

	30^o	45^o	60^o
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
secante	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cossecante	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Além dos ângulos notáveis temos a tabela (11) com outros valores.

Observe o exemplo abaixo:

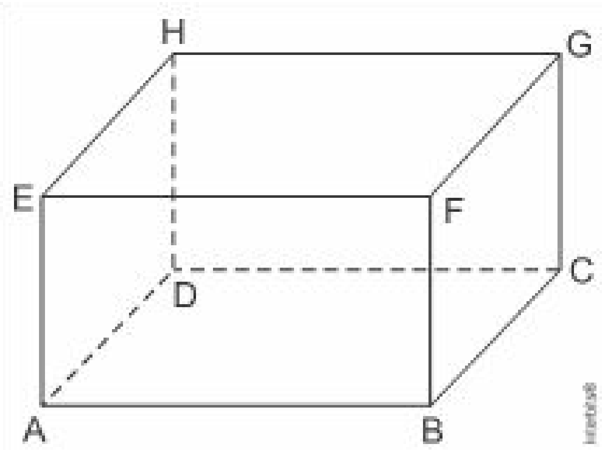
(Fuvest 2017) O paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$ representado na Figura 12 tem medida dos lados $AB = 4$, $BC = 2$ e $BF = 2$.

Figura 11 – Tabela valores das razões trigonométricas

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

Fonte – <http://naveiadamatematica.blogspot.com.br/2010/08/tabela-completa-com-outras-medidas-dos.html>

Figura 12 – Paralelepípedo $ABCDEFGH$



Fonte – www.sprweb.com.br

O seno do ângulo $H\hat{A}F$ é igual a:

a) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

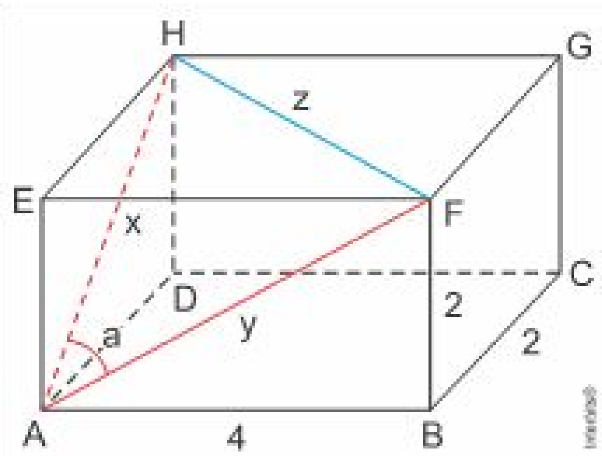
c) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

Resolução:

Figura 13 – Paraleleípedo ABCDEFGH-resolução



Fonte – www.sprweb.com.br

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo AFB temos que $y^2 = 2^2 + 4^2$, ou seja, $y^2 = 20$, ou ainda, $y = 2\sqrt{5}$.

Como o triângulo FHG é congruente ao triângulo AFB, tem-se que $z = y = 2\sqrt{5}$. Dado que x é a diagonal do quadrado $ADEH$, temos que $x = 2\sqrt{2}$.

Traça-se a altura FT do triângulo isósceles AFH e aplica -se o Teorema de Pitágoras ao triângulo AFT.

$(2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + (FT)^2$, ou seja, $(FT)^2 = 18$, ou ainda, $FT = 3\sqrt{2}$.

Por fim,

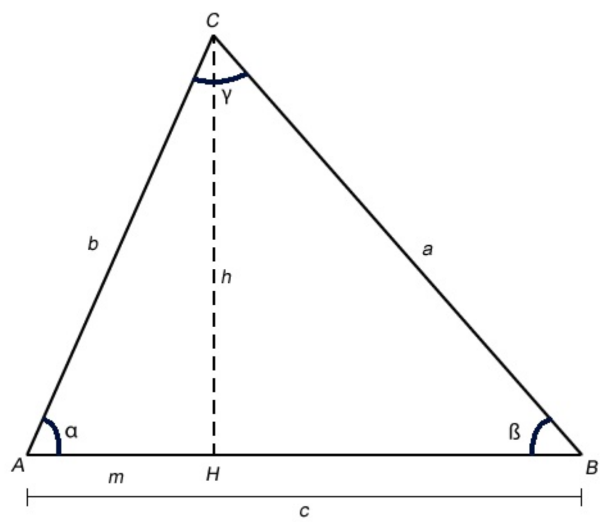
$$\text{sen} H\hat{A}F = \frac{FT}{FA} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

2.7 Lei dos cossenos

A Lei dos cossenos é utilizada para determinar a medida de um lado ou de um ângulo em um triângulo qualquer. Usa-se principalmente, em triângulos que não possuem ângulo reto. Observa-se as demonstrações a seguir:

1^o) Triângulo ABC é acutângulo:

Figura 14 – Triângulo ABC



- Traça-se a altura CH;

- Aplica-se o Teorema de Pitágoras no triângulo ACH e no triângulo BCH

(I)$a^2 = h^2 + (c-m)^2$

(II) $h^2 = b^2 - m^2$

- Substitui-se (II) em (I):

$a^2 = b^2 - m^2 + (c-m)^2$

$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2mc + m^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2mc$

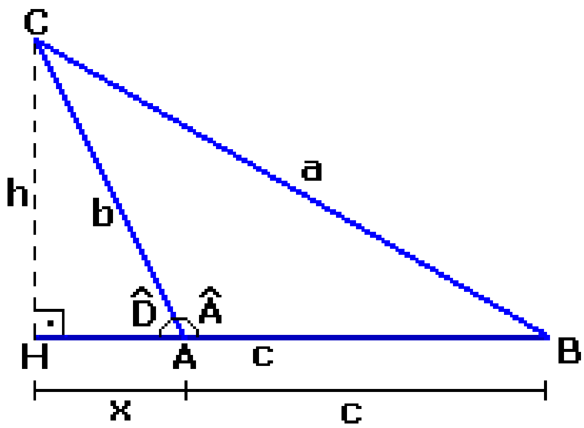
-Ainda no triângulo ACH, temos

$\cos\alpha = \frac{m}{b}$ ou sejam $m = b\cos\alpha$

Assim $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

2^o) O Triângulo ABC é obtusângulo e $\hat{A}$ é ângulo obtuso:

Figura 15 – Triângulo ABC



- Trace a altura h;

- Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo BCH e no triângulo ACH e temos

(I) $a^2 = h^2 + (c+x)^2$

(II) $b^2 = h^2 + x^2$

- Substitui-se (II) em (I):

$a^2 = b^2 - x^2 + (c+x)^2$

$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2xc + x^2$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2xc$

- Ainda no triângulo retângulo ACH, temos $\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{x}{b}$, ou seja, $x = -b.\cos\alpha$

Assim, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

- Empregando raciocínio análogo obtemos as expressões

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

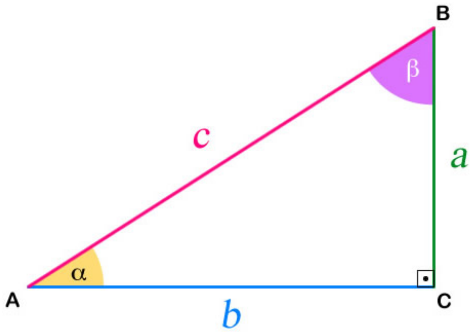
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

3^o) O Triângulo ABC é retângulo

Observamos que nesse caso o próprio Teorema de Pitágoras (Figura 16) se aplica e temos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90^o$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

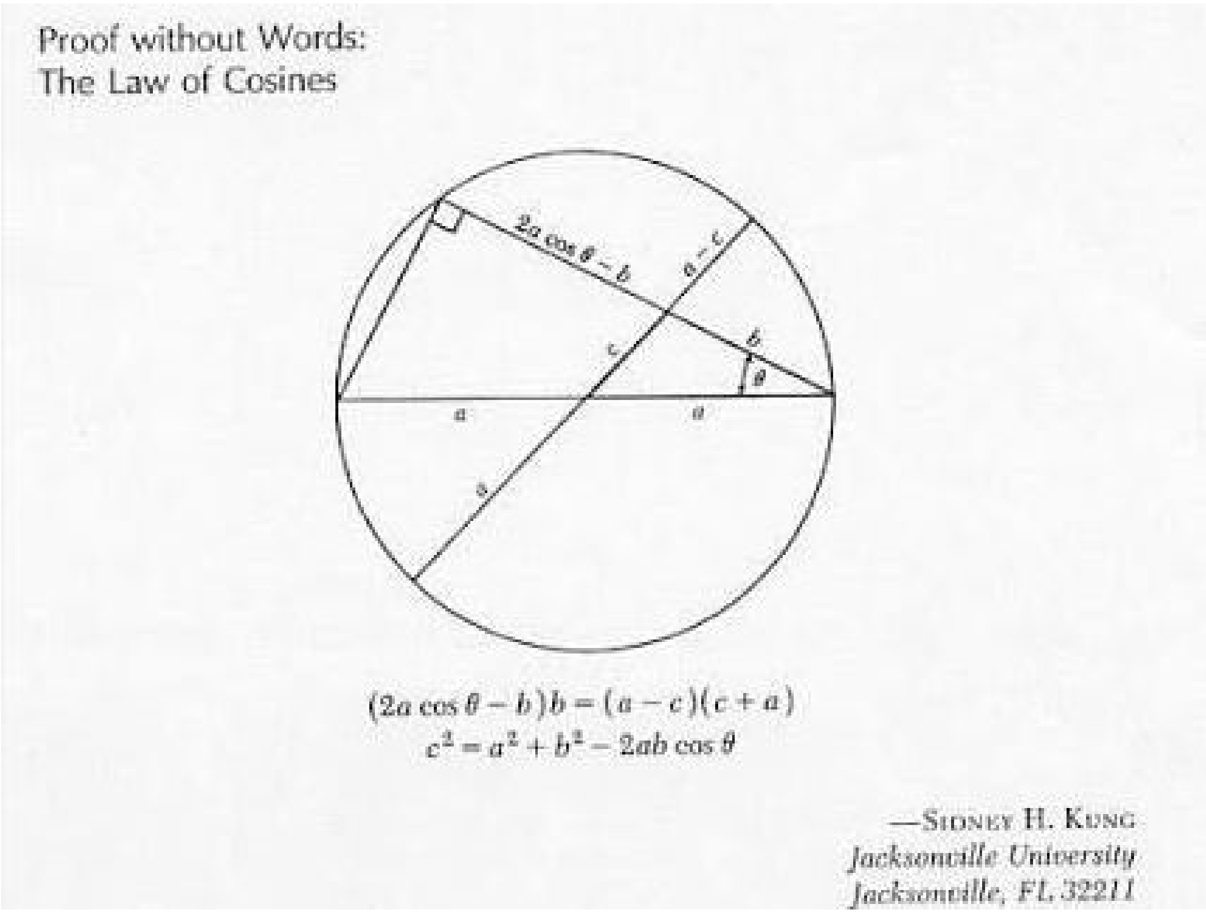
Figura 16 – Triângulo Retângulo



Fonte – Elaborada pela autora

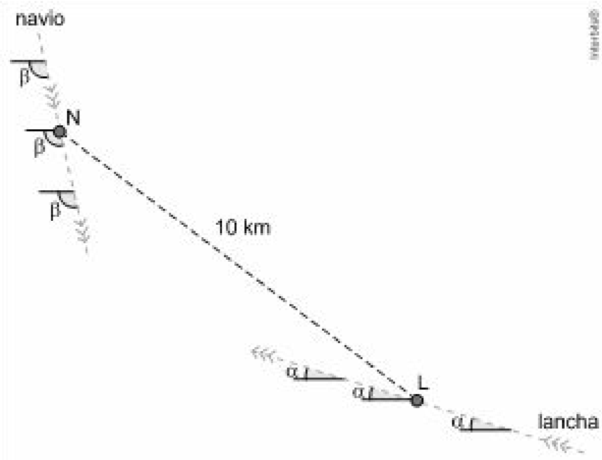
Outra demonstração bem interessante que foi feita por alunos da Olimpíada HMMT em Harvard e descrita na Figura 17.

Figura 17 – Demonstração através da Potência de Ponto



Fonte – University of Sydney Hong Kong

Figura 18 – Figura ilustrativa referente ao exemplo UNESP 2017



Fonte – www.sprweb.com.br

Assim, pode-se enunciar a lei dos cossenos:

Dado um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Observe o exemplo abaixo:

(UNESP 2017) Uma lancha e um navio percorrem rotas lineares no mar plano com velocidades constantes de 80 e 30km/h, respectivamente. Suas rotas, como mostra a Figura 18, estão definidas por ângulos constantes de medidas iguais a α e β, respectivamente. Quando a lancha está no ponto L e o navio no ponto N a distância entre eles é de 10 km.

Sendo P o ponto em que a lancha colidirá com o navio, demonstre que o ângulo obtuso $L\hat{P}N$ será igual a $\alpha+\beta$. Em seguida, calcule a distância entre N e P considerando $cos(\alpha+\beta) = \dfrac{-9}{16}$.

Resolução:

Os ângulos $L\hat{P}N$ e $\alpha+\beta$ são opostos pelo vértice e, portanto, são congruentes. Se t é o tempo, em horas, decorrido até o instante do encontro, então $NP = 30t$ e $LP = 80t$. Donde segue que $LP = \frac{8}{3}NP$. Finalmente, aplicando a Lei dos cossenos no triângulo LNP encontramos

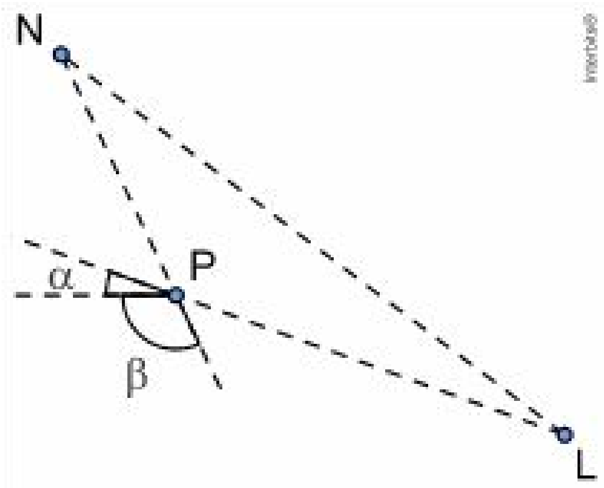
$$(LN)^2 = (NP)^2 + (LP)^2 - 2(NP)(LP)\cos(\alpha+\beta),$$

ou seja,

$$10^2 = (NP)^2 + \left(\frac{8}{3}NP\right)^2 - 2(NP)\frac{8}{3}(NP)\left(\frac{-9}{16}\right),$$

$$\frac{100}{9}(NP)^2 = 100,$$

Figura 19 – Figura ilustrativa referente à resolução do exemplo UNESP 2017



Fonte – www.sprweb.com.br

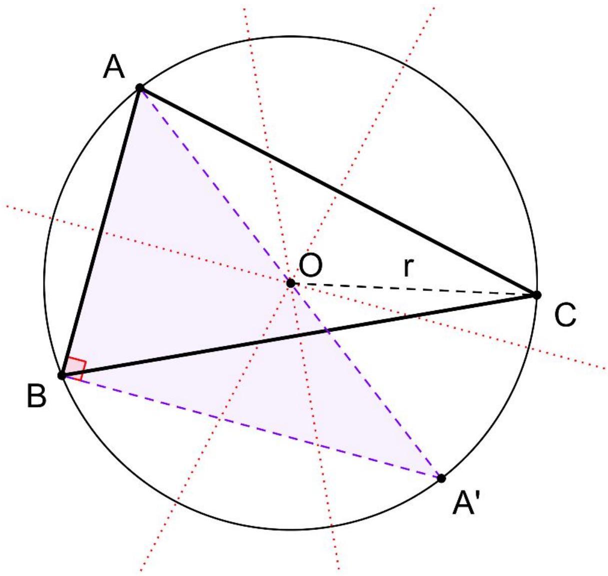
Então concluímos que $NP = 3$ km.

2.8 Lei dos senos

A lei dos senos é utilizada para determinar a medida de um lado ou de um ângulo em um triângulo qualquer. Existe uma relação de proporcionalidade envolvendo o seno do ângulo de um triângulo qualquer e a medida oposta ao ângulo. Considera-se um triângulo ABC qualquer, inscrito numa circunferência.

Observe a Figura 20 e em seguida a demonstração da fórmula.

Figura 20 – Triângulo ABC



- Trace o diâmetro AA' e obtenha o triângulo $AA'B$, retângulo em B;

- Os ângulo ACB e $AA'B$ tem mesma medida pois são ângulos inscritos pelo mesmo arco;

- Assim, no triângulo $AA'B$, temos

$$\text{sen}A' = \frac{AB}{AA'}, \qquad \text{sen}C = \frac{AB}{2r}.$$

Se $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ segue que $\dfrac{c}{\text{sen}C} = 2r$. Analogamente, temos a Lei dos Senos:

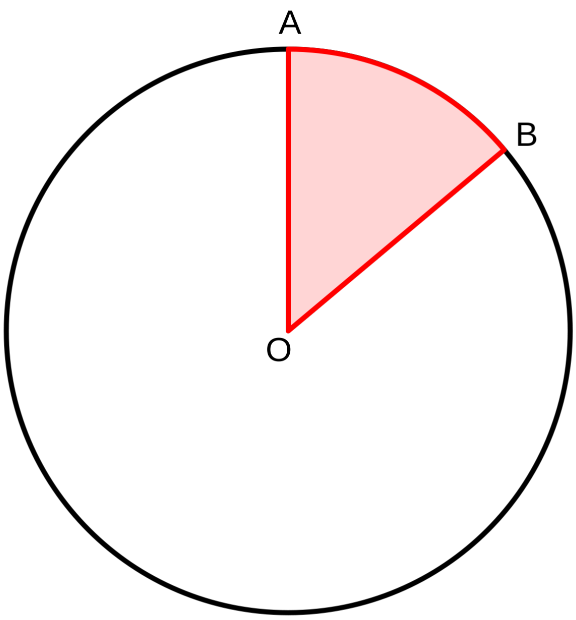
$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2r.$$

2.9 Arcos e ângulos na circunferência

Definição 2.9.1. Ângulo central é todo ângulo que possui vértice no centro da circuferência.

Na Figura 21, a medida do arco AB corresponde a medida do ângulo central AOB.

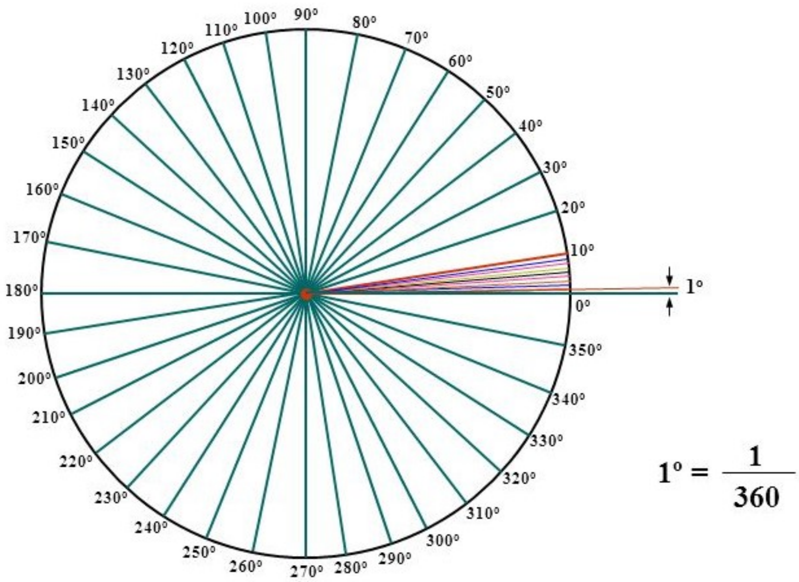
Figura 21 – Ângulo Central AÔB



2.10 Unidades de Medida

Grau $(^0)$ é a unidade de medida mais utilizada em Trigonometria, como mencionamos anteriormente. Representa $\dfrac{1}{360}$ de uma circunferência. Para medidas menores que um grau, usa-se os seus submúltiplos denominados minuto e segundo. Um minuto representa $\dfrac{1}{60}$ do grau e um segundo, $\dfrac{1}{60}$ do minuto.

Figura 22 – O grau



Fonte – www.slideplayer.com.br

Radiano

Segundo Kennedy (XAVIER, 2013), o termo *radiano (radian)* aparece impresso pela primeira vez em 1873, num exame escrito pelo físico James Thonson. O termo radian (radiano) provavelmente foi inspirado pela palavra radius (raio). O uso da unidade radiano em trigonometria surgiu da necessidade de unificar as unidades de medidas do arco e da corda (ou meia corda), e o raio do círculo foi adotado como unidade de medida comum. O Radiano (rad) equivale a um arco de comprimento igual ao raio da circunferência. Veja Figura 23. A medida radiano é muito usada em funções trigonométricas.

$$1\text{rad} \approx 57^o 17' 57''$$

2.11 Conversão de unidades

Na trigonometria é muito comum a conversão de medidas em graus para radianos e medidas em radianos para graus. Numa circunferência com 360^o consegue-se colocar, aproximadamente, $6,28$ arcos de 1 radiano. Assim, tem-se que:

$$360^o \approx 6,28rad \approx 2.3,14rad \approx 2\pi,$$

logo $180^o = \pi$ rad.

Figura 23 – Arco de um radiano

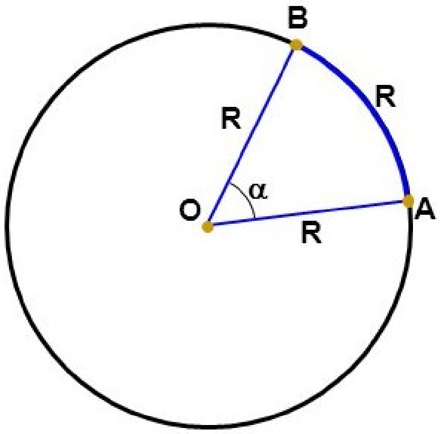
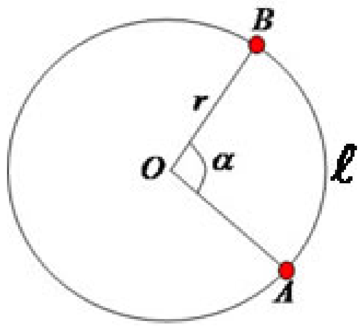


Figura 24 – Relação arco, ângulo central e raio



Fonte – www.brasilescola.uol.com.br

2.12 Comprimento do arco

Uma fórmula muito importante para se encontrar a medida em radianos do ângulo central é dada pela razão entre o comprimento (l) do arco AB e o raio (r) da circunferência dada

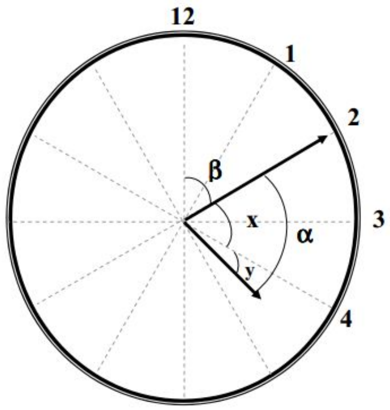
$$\alpha = \frac{l}{r},$$

lembrando que α é a medida do ângulo central em radianos. Veja Figura 24.

2.13 Ângulo formado pelos ponteiros de um relógio

Para encontrar o ângulo formado por ponteiros de um relógio em horas exatas, é muito fácil. Como um relógio possui 360^o e 12 divisões iguais, basta dividir 360^o por 12 e obtemos que o menor ângulo formado é de 30^o. E para encontrar o ângulo entre os ponteiros em outro horário qualquer? Observe a Figura 25.

Figura 25 – Ângulo formado pelos ponteiros de um relógio



Em cada hora o ponteiro das horas "varre"30^o, portanto $\alpha+\beta = H.30^o$. Em cada minuto o ponteiro dos minutos "varre"$\frac{M}{2}$ graus, portanto, $y = \frac{M}{2}$, referente a hora que o ponteiro das horas andou. Assim, a medida do ângulo formado entre os ponteiros será dada pela fórmula:

$$\alpha = |H.30^o + y - \beta| = |H.30^o + M/2 - \beta| = |30.H - 5,5.M|.$$

Em que H são as horas e M são os minutos.

Exemplo:

(FUVEST) O ângulo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

a) 27^o

b) 30^o

c) 36^o

d) 42^o

e) 72^o

Resolução:

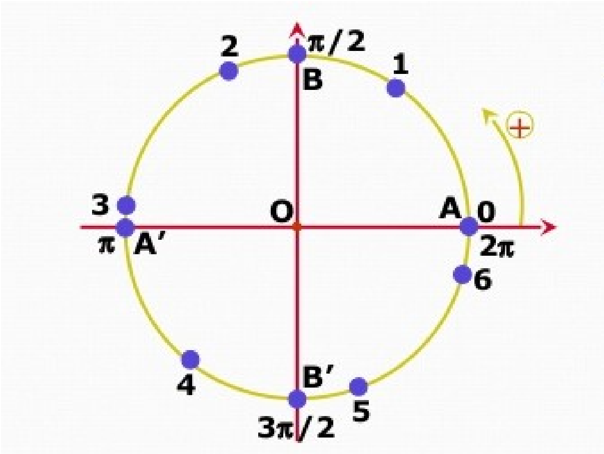
Basta substituirmos na fórmula

$$\alpha = |30.1 - 5,5.12| = |-36|^o = 36^o.$$

2.14 Ciclo ou circunferência trigonométrico

Ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada com centro na origem e está representada no plano cartesiano com raio de medida igual a uma unidade. Os eixos do plano cartesiano dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes, chamadas de *quadrantes*.

Figura 28 – Quadrantes



Fonte – www.slideshare.net

Figura 26 – Circunferência Trigonométrica

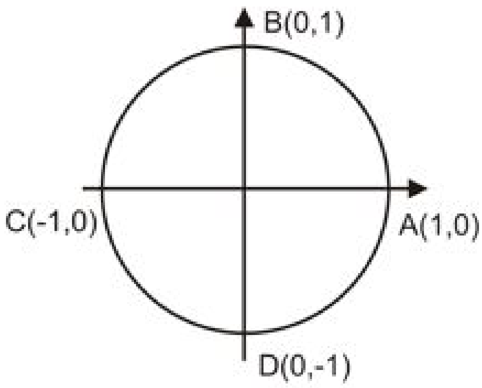
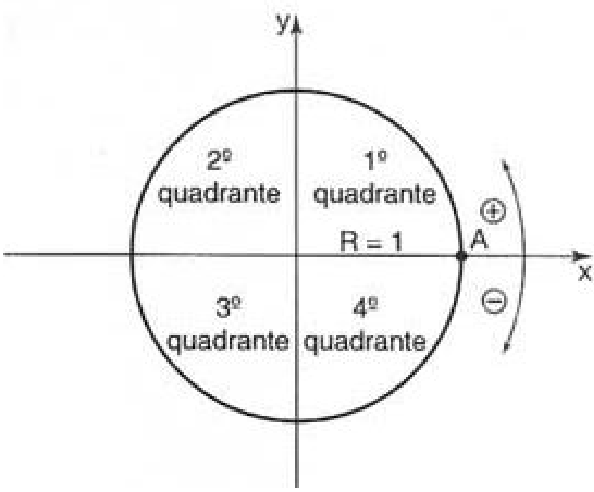
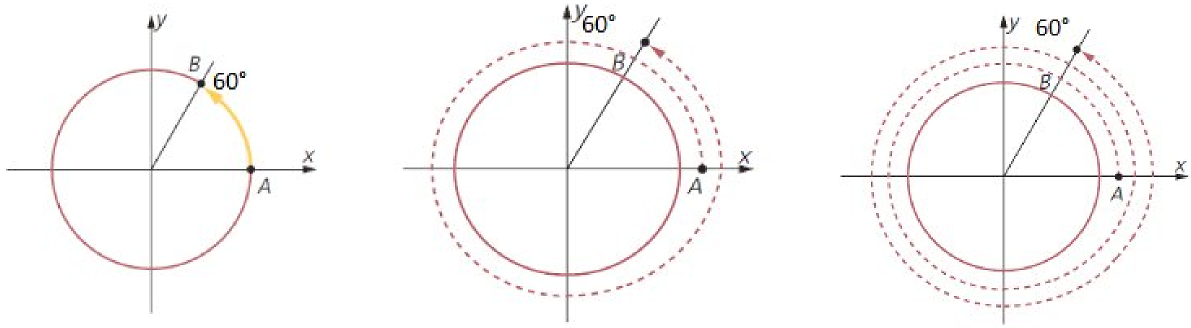


Figura 27 – Quadrantes



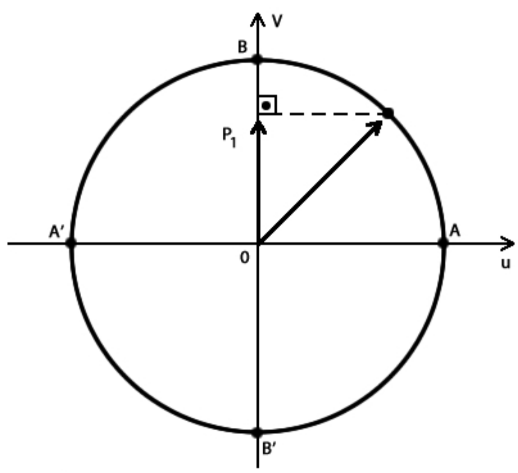
Arcos côngruos são arcos que diferem entre si apenas pelo número de voltas, ou seja, possuem as mesmas extremidades. Assim, por exemplo, podemos calcular o seno de um ângulo

Figura 29 – Arcos Côngruos



Fonte – www.infoescola.com

Figura 30 – Seno no ciclo trigonométrico



Fonte – Elaborada pela autora

de 420^o que será equivalente ao seno de 60^o, pois $420^o = 360^o + 60^o$, como mostra a Figura 29.

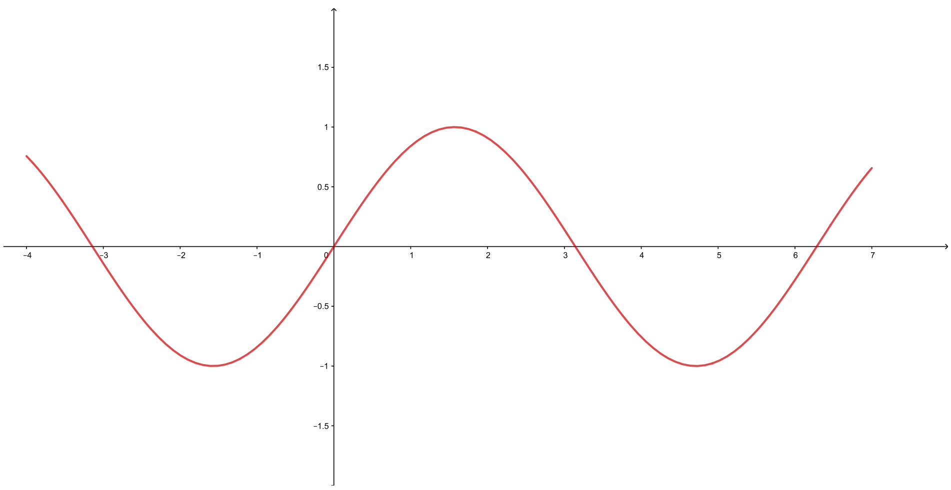
2.15 Funções Trigonométricas

2.15.1 Função seno

Definição 2.15.1. Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Denomina-se seno de x e indicamos como sen$x$ a ordenada $OP1$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o número real $OP1 =$ sen$x$, isto é $f(x) =$ sen$x$. Veja a representação nas Figuras 30 e 31.

Propriedades

Figura 31 – f(x)= sen x



Fonte – Elaborada pela autora

1^a) A imagem da função seno é o intervalo $[-1,1]$.

2^a) Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então sen$x$ é positivo.

3^a) Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então sen$x$ é negativo.

4^a) A função seno é periódica e seu período é 2π.

5^a) A função seno é ímpar, pois $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Gráficos das curvas senoides

Agora vamos analisar o gráfico de $f(x) = a + b\text{sen}(cx+d)$, onde a, b, c e d são parâmetros reais. Vamos analisar o efeito de cada parâmetro separadamente por meio de exemplos numéricos e depois generalizar a aplicação desses parâmetros. Finalmente, integramos todos os parâmetros numa mesma função.

- Papel do parâmetro a: deslocamento vertical do gráfico.

  Exemplo: $f(x) = 1 + \text{sen}x$

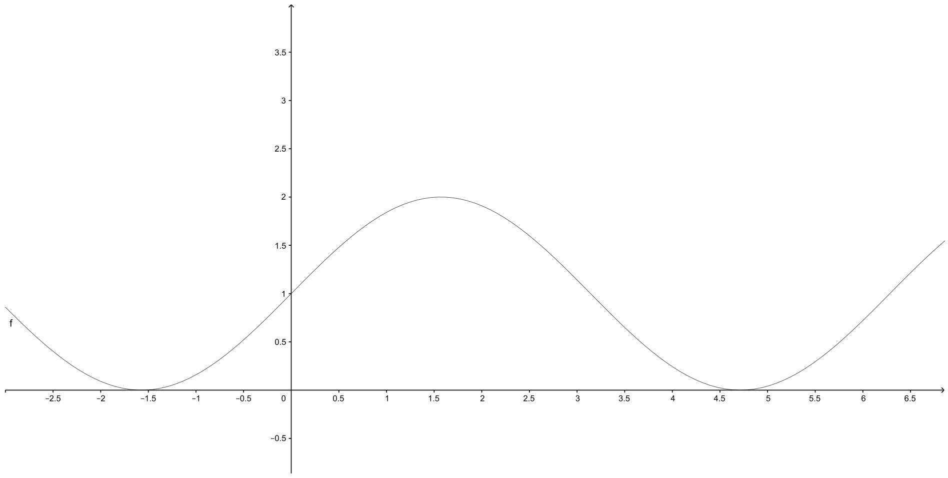
  Observando a Figura 32 notamos que o parâmetro a provoca um deslocamento vertical com o gráfico, portanto altera o gráfico da função.

- Parâmetro b: amplitude da função.

  Observamos agora as Figuras 33 e 34. O parâmetro b modifica a *amplitute* do gráfico, alterando assim, a sua imagem. Observe que no segundo exemplo ocorreu uma inversão do gráfico devido ao sinal negativo. Assim, concluímos que a imagem da função $f(x) = a + b.\text{sen}(cx+d)$ é dada por $Im(f) = [a - |b|; a + |b|]$

  Sendo $a - |b|$ o valor mínimo da função, enquanto que $a + |b|$ é o valor máximo da função.

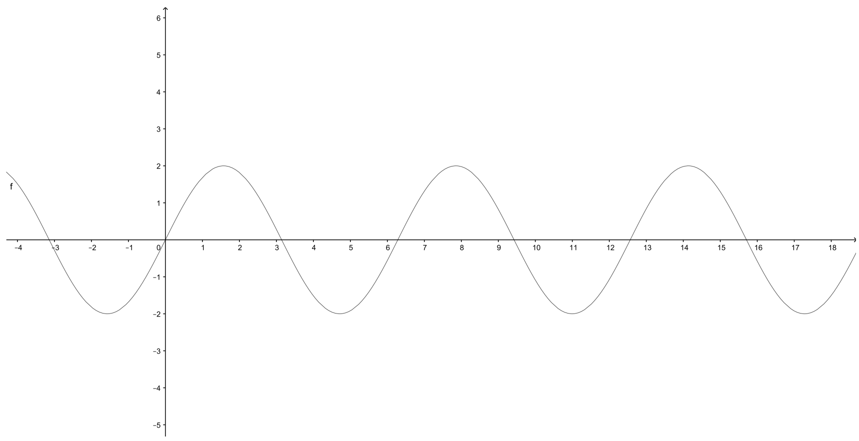
Figura 32 – Gráfico de $f(x) = 1 + \text{sen}x$



Fonte – Elaborada pela autora

Exemplo 2.15.2. $b > 0$: $f(x) = 2\text{sen}x$

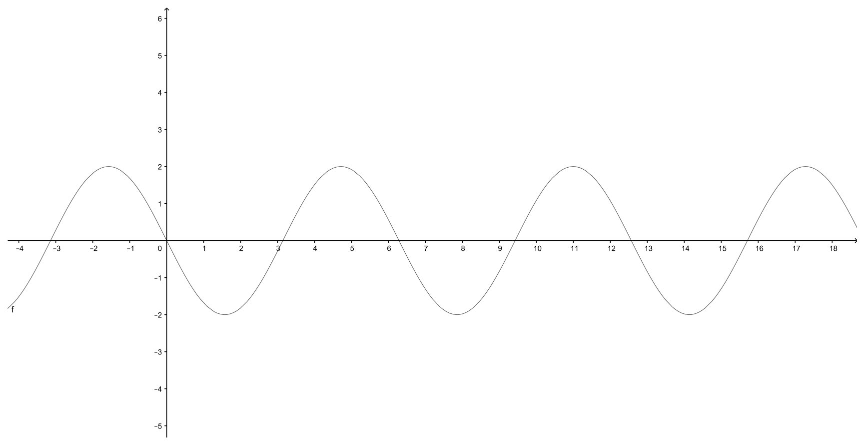
Figura 33 – Gráfico de $f(x) = 2\text{sen}x$



Fonte – Elaborada pela autora

Exemplo 2.15.3. $b < 0$:$f(x) = -2\text{sen}x$

Figura 34 – Gráfico da função $f(x) = -2\text{sen}x$



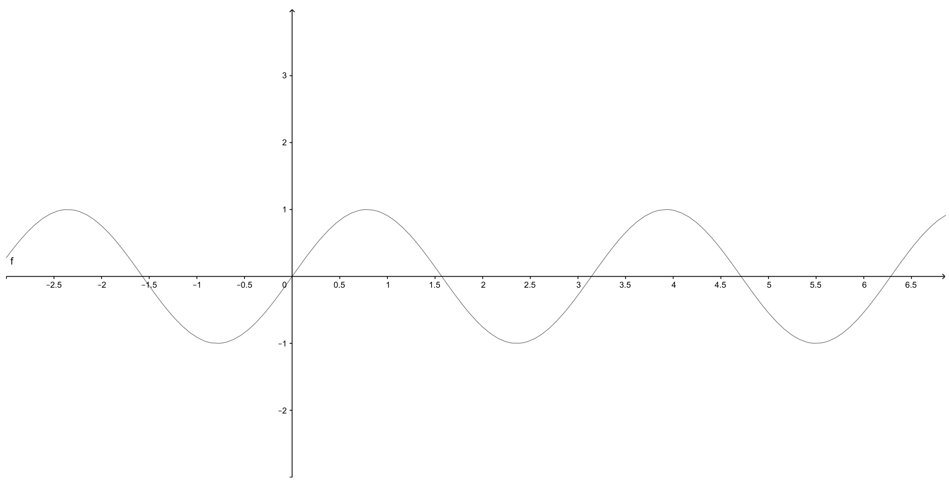
Fonte – Elaborada pela autora

- Parâmetro c: período da função.

  Analise as funções $f(x) = \text{sen}x$ e $g(x) = \text{sen}2x$ e observe as tabelas apresentadas a seguir:

2x	x	sen(2x)
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0

Figura 35 – Gráfico de $g(x) = \text{sen}2x$



Fonte – Elaborada pela autora

Observamos que o período da função $g(x) = \text{sen}2x$ é π. Logo o parâmetro c afeta o período da função e é dado por $P = \dfrac{2\pi}{|c|}$. De fato:

Se $P > 0$ e $f(x) = f(x+P)$, $\forall x \in$ R, então o menor valor positivo de P é o período da função f.

Utilizando essa definição, temos que $f(x) = a + b.\text{sen}(cx+d)$ e $f(x+P) = a + b.\text{sen}[c(x+P)+d]$. Adotando $f(x) = f(x+P)$ temos

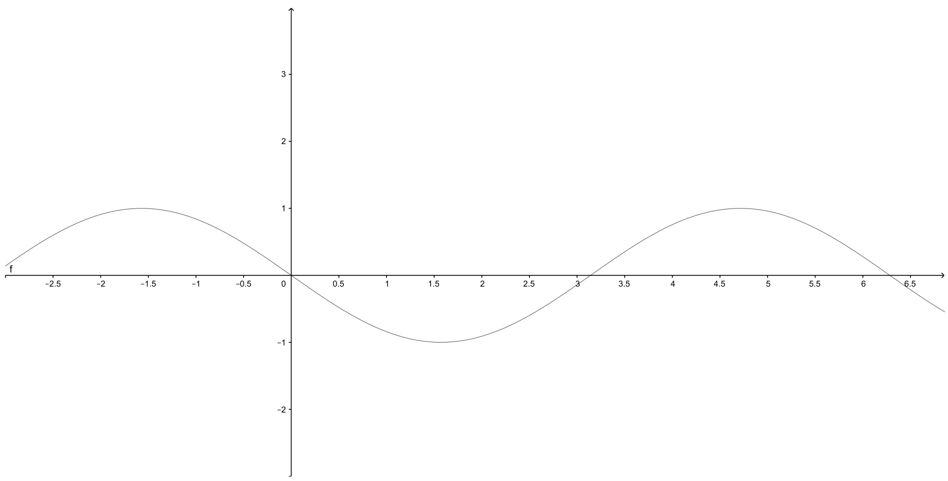
$$\text{sen}(cx+d) = \text{sen}(cx+cP+d)$$

ou seja, $cP = 2K\pi$ portanto $P = \dfrac{2K\pi}{|c|}$, como P é o menor valor positivo, faz-se $K = 1$. Concluímos assim que $P = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

- Parâmetro d:deslocamento horizontal.

  Observe os gráficos das funções $f(x) = \text{sen}x$ e $h(x) = \text{sen}(x+\pi)$. Por este gráfico concluímos que o parâmetro d provoca deslocamento horizontal do gráfico.

Figura 36 – Gráfico de $f(x) = sen(x+\pi)$



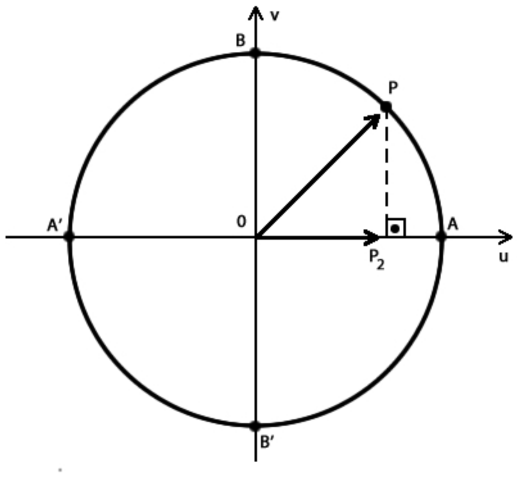
Fonte – Elaborada pela autora

2.15.2 Função cosseno

A função cosseno possui a mesma riqueza de detalhes da função seno. O mesmo raciocínio será usado para o estudo de cada parâmetro da função $f(x) = a + b\cos(cx+d)$.

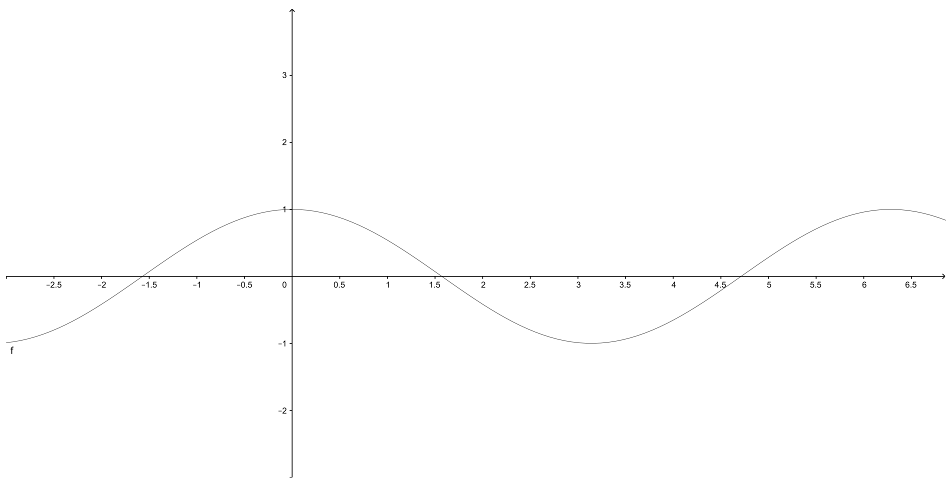
Definição 2.15.4. Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denomina-se cosseno de x e indica-se como $\cos x$ a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv. Denomina-se função cosseno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o número real $OP_2 = \cos x$; isto é $f(x) = \cos x$.

Figura 37 – Cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte – Elaborada pela autora

Figura 38 – A curva cossenoide



Fonte – Elaborada pela autora

Propriedades

1^a) A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1,1]$.

2^a) Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $\cos x$ é positivo.

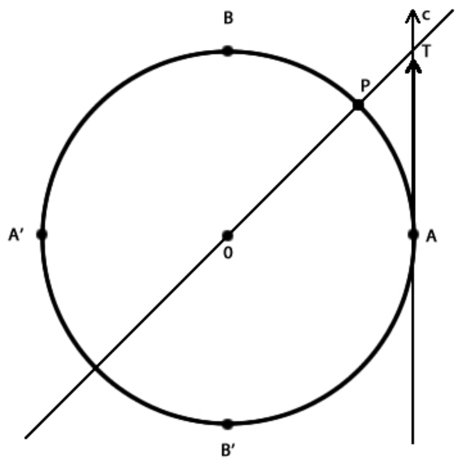
3^a) Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $\cos x$ é negativo.

4^a) A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

5^a) A função cosseno é par pois $\cos(x) = \cos(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Gráfico da função $f(x) = a + b.\cos(cx + d)$, para a, b, c e d parâmetros reais.

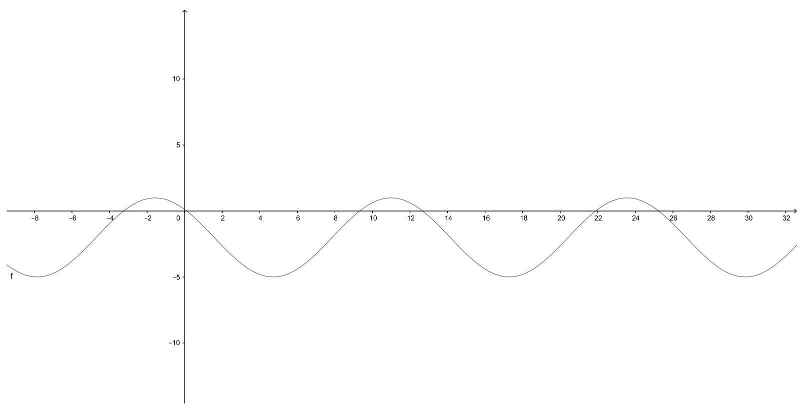
Figura 40 – Tangente no ciclo trigonométrico



Fonte – Elaborada pela autora

As alterações gráficas são equivalentes às alterações observadas na função seno, como observamos no gráfico da função $f(x) = -2 + 3\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, apresentada em Figura 39.

Figura 39 – Gráfico de $f(x) = -2 + 3\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

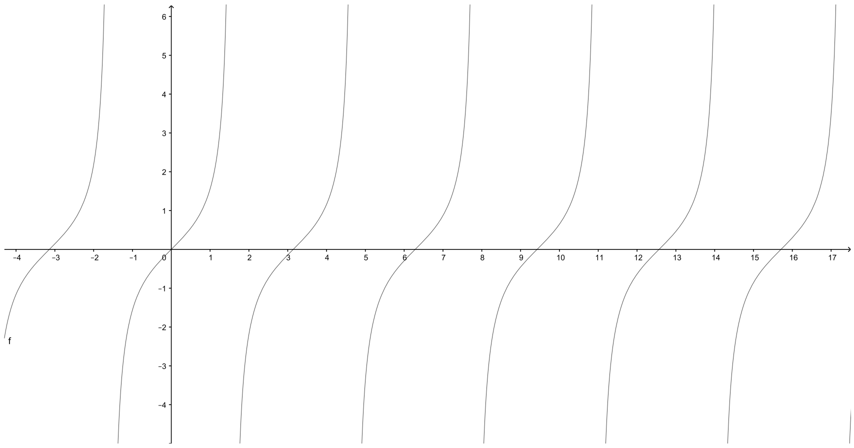


Fonte – Elaborada pela autora

2.15.3 Função tangente

Definição 2.15.5. Dado um número real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja P sua representação no ciclo trigonométrico. Considere a reta OP e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denomina-se tangente de x e indicamos $\tan x$, a medida algébrica do segmento AT. Veja Figura 40. Denomina-se função tangente a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o número real $AT = \tan x$, isto é, $f(x) = \tan x$.

Figura 41 – Tangentóides



Fonte – Elaborada pela autora

Notamos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta OP fica paralela ao eixo das tangentes. Assim, a tangente não é definida (nesse caso, não existe o ponto T).

Propriedades

1^a) O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R}/, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2^a) Para todo $y \in \mathbb{R}$ existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = \tan x$, isto é, $Im(\tan x) = \mathbb{R}$.

3^a) Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\tan x$ é positiva.

4^a) Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\tan x$ é negativa.

5^a) A função tangente é periódica e seu período é π.

6^a) A função tangente é ímpar, pois $\tan(x) = -\tan(-x)$, $\forall x \in D$.

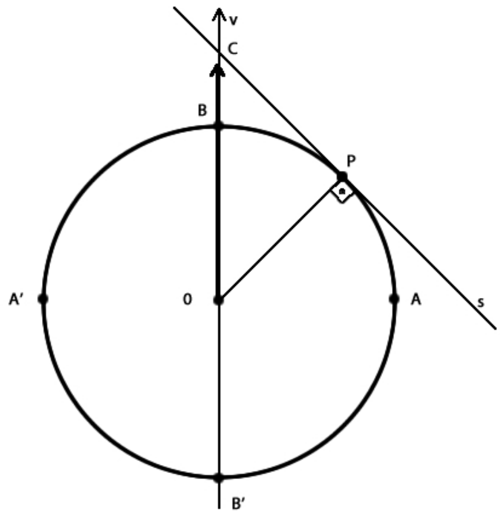
2.15.4 Função cossecante

Definição 2.15.6. Dado um número real $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Considere a reta s tangente ao ciclo em P e seja C a intersecção da mesma com o eixo dos senos. Denomina-se cossecante de x e indica-se por $\csc x$, a ordenada OC do ponto C. Denomina-se função cossecante a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real $x \neq k\pi$, o real $OC = \csc x$, isto é, $f(x) = \csc x$. Notamos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a função $\csc x$ não é bem definida. Veja Figura 42. Na Figura 43 encontra-se o gráfico da função.

Propriedades

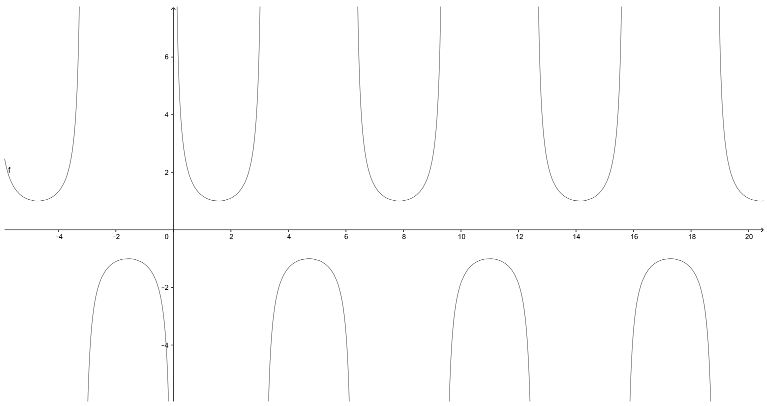
1^a) O domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi\}$.

Figura 42 – Cossecante no Ciclo



Fonte – Elaborada pela autora

Figura 43 – Gráfico de $f(x) = \csc x$



Fonte – Elaborada pela autora

2^a) A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} \setminus (-1;1)$.

3^a) Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então $\csc x$ é positiva.

4^a) Se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então $\csc x$ é negativa.

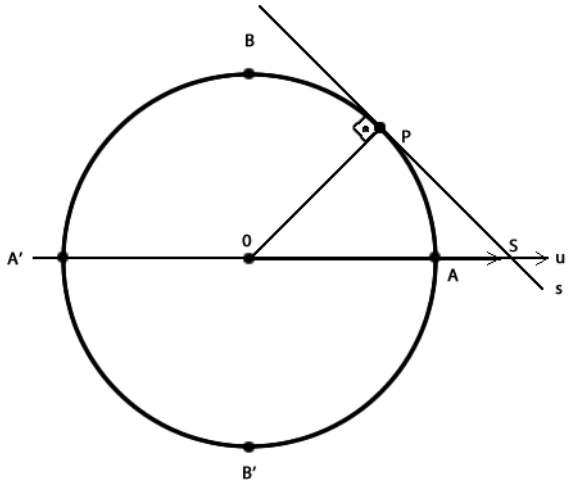
5^a) A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

6^a) A função cossecante é ímpar, pois $\csc x = -\csc(-x)$, $\forall x \in D$.

2.15.5 Função secante

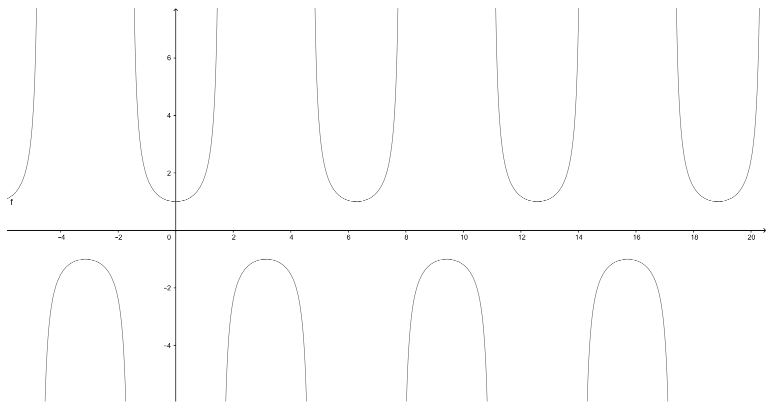
Definição 2.15.7. Dado um número real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Considere a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos

Figura 44 – Secante no ciclo trigonométrico



Fonte – Elaborada pela autora

Figura 45 – Gráfico de $f(x) = \sec x$



Fonte – Elaborada pela autora

cossenos. Denomina-se secante de x e indicamos por $\sec x$ a abscissa OS do ponto S. Denomina-se função secante a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o número real $OS = \sec x$, isto é, $f(x) = \sec x$. Notamos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto S, a função secante não é bem definida. Veja Figura 44. Na Figura 45 apresentamos o gráfico da função secante.

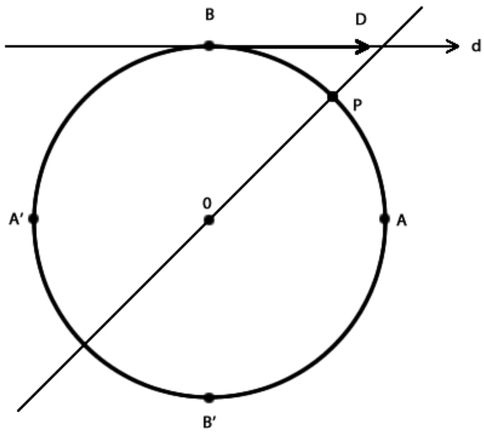
Propriedades

1^a) O domínio da função secante é $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2^a) A imagem da função secante é $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$.

3^a) Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $\sec x$ é positiva.

Figura 46 – Cotangente no ciclo trigonométrico



Fonte – Elaborada pela autora

4^a) Se x está no segundo ou do terceiro quadrante, então $\sec x$ é negativa.

5^a) A função secante é periódica e seu período é 2π.

6^a) A função secante é par, pois $\sec x = \sec(-x)$, $\forall x \in D$.

2.15.6 Função cotangente

Definição 2.15.8. Dado um número real $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Considera-se a reta OP e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denomina-se cotangente de x e indica-se como $\cot x$ a medida algébrica do segmento BD. Denomina-se função cotangente a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real $x \neq k\pi$. Note que se P está em A ou A' então, a reta OP fica paralela ao eixo das cotangentes e neste caso não exite o ponto D, portanto a função $\cot x$ não está bem definida. Veja Figura 46.

Propriedades Observando a Figura 47 concluímos que

1^a) O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2^a) Para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cot x = y$, isto é, $Im(\cot x) = \mathbb{R}$.

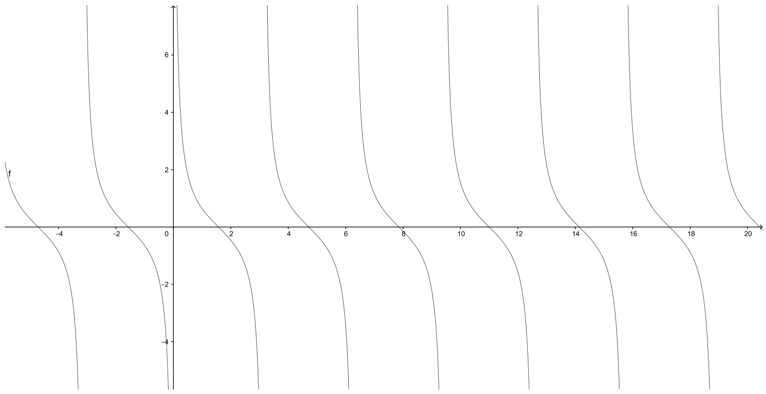
3^a) Se x está no primeiro ou do terceiro quadrante, então $\cot x$ é positiva.

4^a) Se x está no segundo ou do quarto quadrante, então $\cot x$ é negativa.

5^a) A função cossecante é periódica e seu período é π.

6^a) A função cossecante é ímpar, pois $\cot x = -\cot(-x)$, $\forall xD$.

Figura 47 – Gráfico de $f(x) = \cot x$



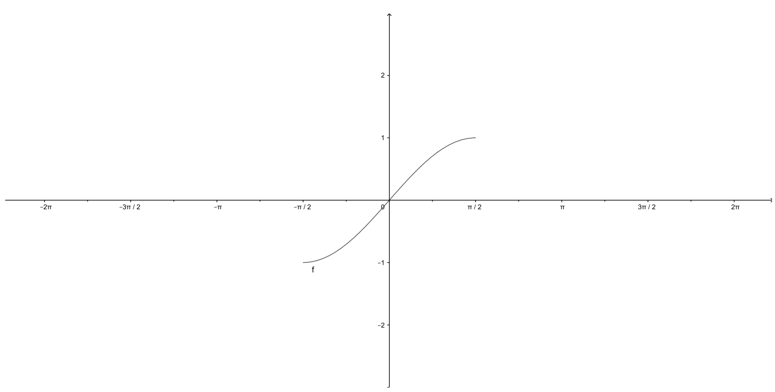
Fonte – Elaborada pela autora

2.16 Funções Trigonométricas Inversas

2.16.1 Função arco-seno

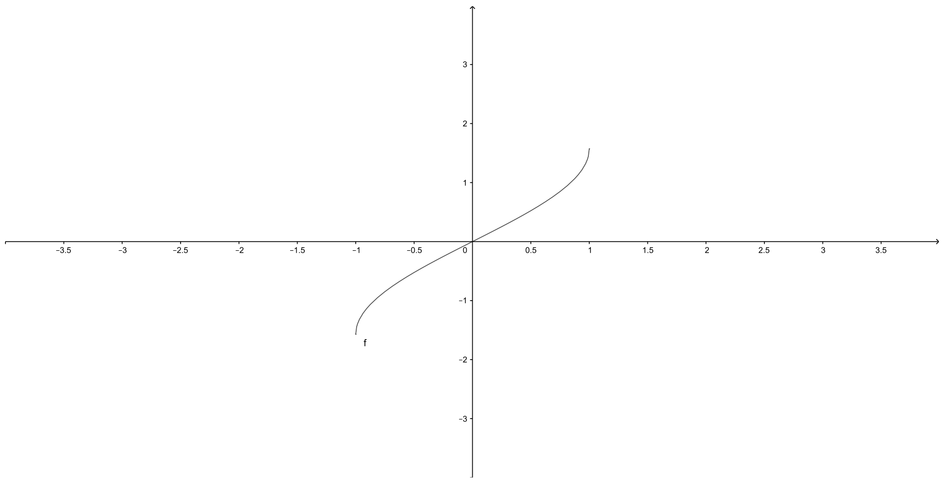
Definição 2.16.1. Uma função só é invertível, ou seja, admite inversa se for bijetora. A função seno, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen} x$ não é injetora pois existem $x_1 \neq x_2$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$ e também não é sobrejetora pois $Im(\text{sen} x) = [-1, 1] \subset R$. Mas restringindo seu domínio $D = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ temos $\tilde{f} : D \to [-1, 1]$ tal que $g(x) = \text{sen} x$ que é bijetora. Assim, a função inversa $g^{-1}(x)$ é denominada função *arco-seno*. Nota-se que g^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contra-dommínio $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e indica-se por $y = \text{arcsen} x$, isto é $y = \text{arcsen} x \Leftrightarrow \text{sen} y = x$.

Figura 48 – Gráfico da função seno restrita ao domínio D



Fonte – Elaborada pela autora

Figura 49 – Gráfico da função arco seno

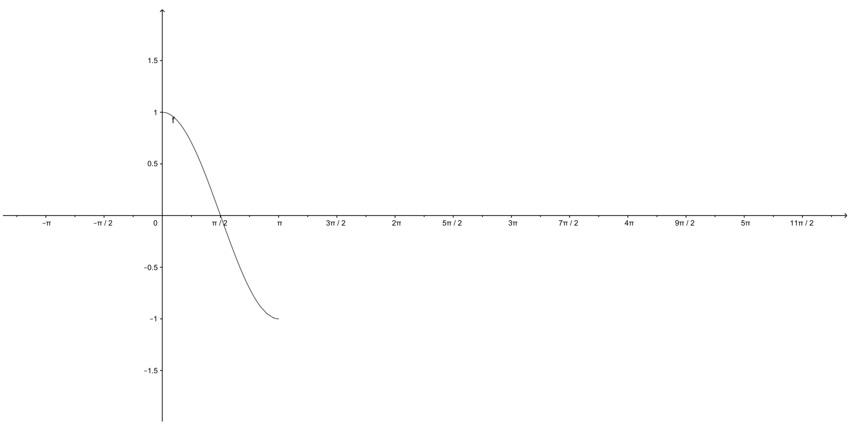


Fonte – Elaborada pela autora

2.16.2 Função arco-cosseno

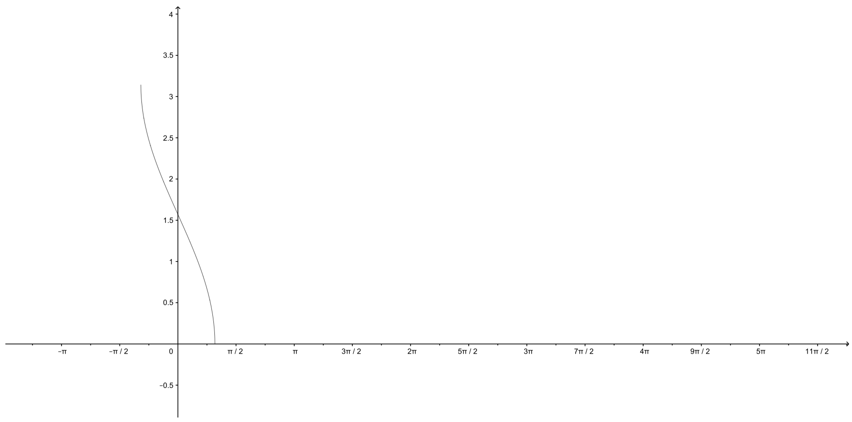
A função cosseno, $f : \mathbb{R} \to R$ dada por $f(x) = \cos x$ também não é injetora pois existem $x_1 \neq x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ e também não é sobrejetora pois sua $Im(\cos x) = [-1,1] \subset \mathbb{R}$. Quando restringimos o domínio de f a $D = [0,\pi]$ e sua imagem a $[-1,1]$ temos que a função restrita de mesma lei $g(x) = cosx$ é invertível. Assim, a função inversa $g^{-1}(x)$ é denominada função arco-cosseno. Nota-se que g^{-1} tem domínio $[-1,1]$, contra-dommínio $[0,\pi]$ e é indicada por $y = \arccos x$. Assim temos que $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$.

Figura 50 – Gráfico da função $g(x)$ restrita ao domínio D



Fonte – Elaborada pela autora

Figura 51 – Gráfico da função $g^{-1}(x)$

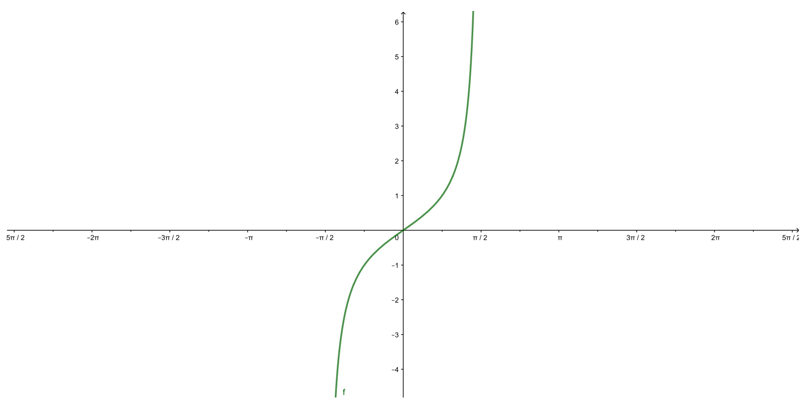


Fonte – Elaborada pela autora

2.16.3 Função arco-tangente

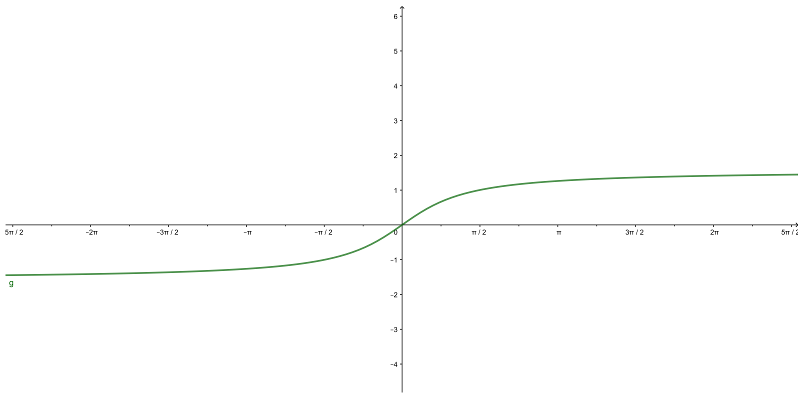
A função tangente como definida anteriormente é sobrejetora. Assim, podemos definir a função inversa g^{-1} denominada função arco-tangente ao considerar domínio $\mathbb{R}$ e contra-domínio $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Donde temos que $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$ para $\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Figura 52 – Gráfico de $g(x) = \tan x$ restrita a $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



Fonte – Elaborada pela autora

Figura 53 – Gráfico da função arco tangente



Fonte – Elaborada pela autora

2.17 Adição e subtração de arcos

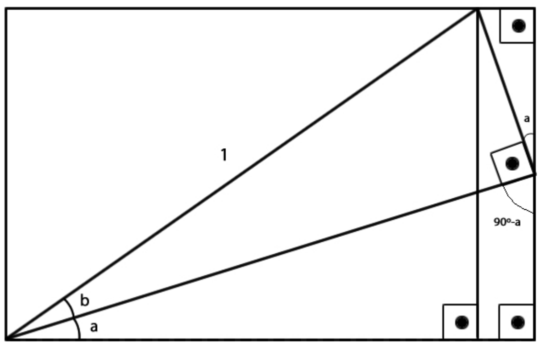
Ao calcularmos funções trigonométricas a soma de dois ângulos percebemos que nem sempre obteremos o mesmo resultado obtido se aplicarmos a mesma função em cada ângulo antes de somarmos esses ângulos. Assim, por exemplo, $\mathrm{sen}(a+b) \neq \mathrm{sen}a+\mathrm{sen}b$.

Vejamos um exemplo. Sabemos que $\mathrm{sen}30^o = \dfrac{1}{2}$ e $\mathrm{sen}60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, mas observamos que

$$\mathrm{sen}(30^o+60^o) = \mathrm{sen}90^o = 1 \neq \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

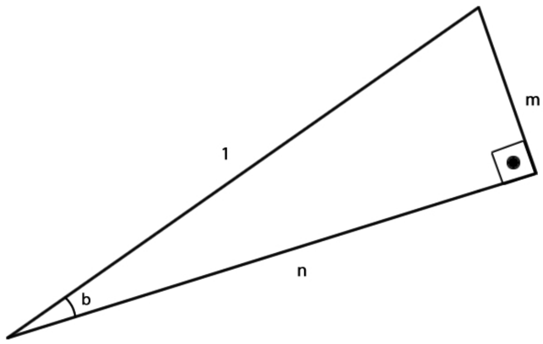
Então, como calcular $\mathrm{sen}(a+b)$? Vejamos uma demonstração por meio das Figuras 54–59. Observando as Figura 55 e 59 onde fixamos um retângulo de diagonal medindo 1 unidade, $\mathrm{sen}(a+b)=x$, $\cos(a+b)=y$, $\mathrm{sen}b=m$ e $\cos b=n$. Segue da Figura 57 que $\mathrm{sen}a = r/\cos b$. Logo $r=\mathrm{sen}a.\cos b$. Analogamente $\cos a = s/\cos b$, portanto $s=\cos a.\cos b$.

Figura 54 – Prova da soma de arcos para a função seno e cosseno



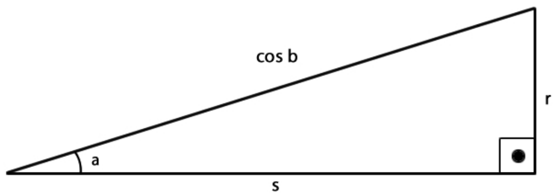
Fonte – Elaborada pela autora

Figura 56 – Triângulo 2



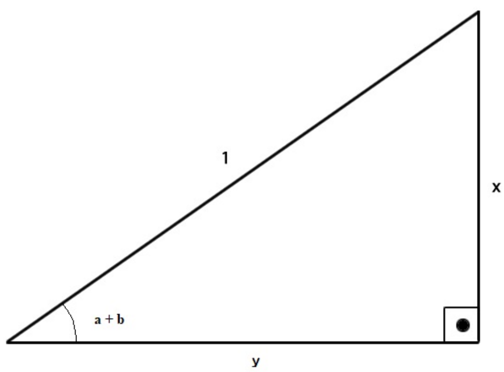
Fonte – Elaborada pela autora

Figura 57 – Triângulo 3



Fonte – Elaborada pela autora

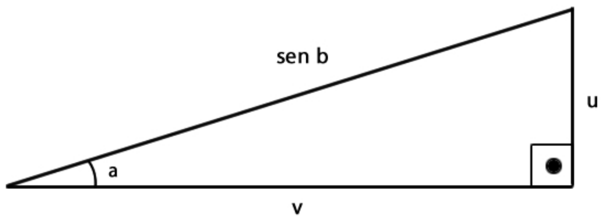
Figura 55 – Triângulo 1



Fonte – Elaborada pela autora

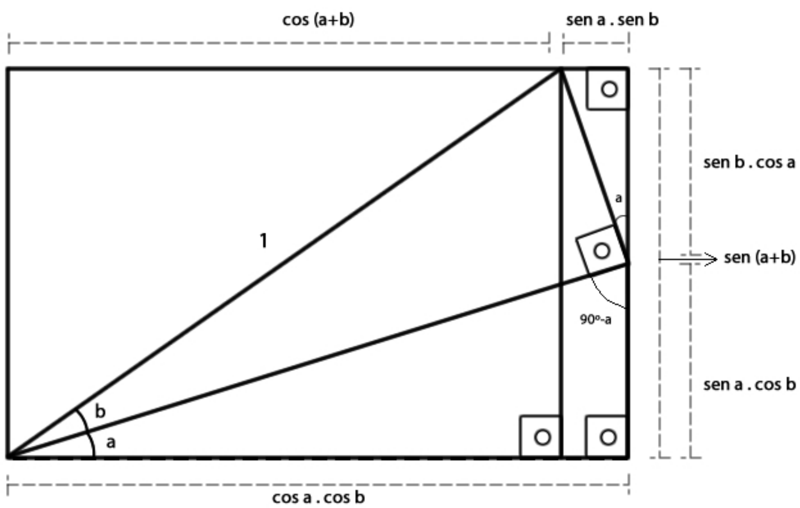
Por outro lado, na Figura 58 temos que $\text{sen}a = u/\text{sen}b$, ou seja, $u = \text{sen}a.\text{sen}b$ e $\cos a = v/\text{sen}b$, ou ainda $v = \cos a.\text{sen}b$. Todas as conclusões acima estão representadas na Figura 59 de onde concluímos que $\text{sen}(a+b) = \text{sen}a\cos b + \text{sen}b\cos a$ e $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}a\text{sen}b$.

Figura 58 – Triângulo 4



Fonte – Elaborada pela autora

Figura 59 – Figura Final



Fonte – Elaborada pela autora

Agora, podemos deduzir os valores de $\text{sen}(a-b)$ e de $\cos(a-b)$ a partir das fórmulas da adição de arcos anteriormente deduzidas. Note que

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}[a+(-b)] = \text{sen}a\cos(-b) + \text{sen}(-b).\cos a.$$

Como $\cos(-b) = \cos b$ e $\text{sen}(-b) = -\text{sen}b$, temos

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}a\cos b - \text{sen}b\cos a.$$

Analogamente

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen} a \text{sen} b.$$

Para determinar a tangente da soma de arcos, devemos lembrar que

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\cos x},$$

com $\cos x \neq 0$, então,

$$\tan(a+b) = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b}.$$

Ao dividirmos o numerador e denominador por $\cos a \cos b$ temos

$$\tan(a+b) = \frac{\dfrac{\text{sen} a}{\cos a} + \dfrac{\text{sen} b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\text{sen} a}{\cos a}\dfrac{\text{sen} b}{\cos b}}.$$

Portanto $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$.

Como $\tan(-b) = -\tan b$ temos que $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

2.17.1 Arco Duplo

Dado um arco x da circunferência trigonométrica, não podemos afirmar que alguma função trigonométrica do dobro do arco x é igual ao dobro da função desse mesmo arco, como mostra o exemplo $\text{sen}(30^o) = \dfrac{1}{2}$ e $\text{sen}(2.30^o) = \text{sen}(60^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, para calcular seno, cosseno e tangente do arco duplo, devemos utilizar as fórmulas da adição de arcos. Observe:

$\text{sen}(2x) = \text{sen}(x+x) = \text{sen} x \cos x + \text{sen} x \cos x$, logo $\text{sen}(2x) = 2\text{sen} x \cos x$.

$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \text{sen} x \text{sen} x$, logo $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$.

Pode-se escrever a fórmula do cosseno do arco duplo de outras maneiras. Por exemplo, utilizando a relação fundamental, temos que $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ e que $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, assim, segue que

$$\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2 x,$$

$$\text{sen}(2x) = 2\cos^2 x - 1,$$

e $\tan(2x) = \tan(x+x) = \dfrac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x}$, logo

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

2.17.2 Fatoração ou fórmulas de Prostaférese

Fatorar uma expressão é sempre algo muito útil na matemática. As fórmulas de Prostaférese, utilizadas na fatoração de funções trigonométricas serão demonstradas logo abaixo.

Considere as relações já encontradas

1^a) $\text{sen}(a+b) = \text{sen}a\cos b + \text{sen}b\cos a$,

2^a) $\text{sen}(a-b) = \text{sen}a\cos b - \text{sen}b\cos a$,

3^a) $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}a\text{sen}b$,

4^a) $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \text{sen}a\text{sen}b$.

Relaciona-se essas fórmulas através de adição e subtração:

1^a + 2^a: $\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2.sena\cos b$.

1^a - 2^a: $\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b) = 2\text{sen}b\cos a$.

3^a + 4^a: $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$.

3^a - 4^a: $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\text{sen}a\text{sen}b$.

Denote $a+b = p$ e $a-b = q$. Assim temos que $a = \dfrac{p+q}{2}$ e $b = \dfrac{p-q}{2}$.

Ao substituirmos nas expressões acima temos as fórmulas de Prostaférese para as funções seno e cosseno.

$\text{sen}p + \text{sen}q = 2\text{sen}\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.

$\text{sen}p - \text{sen}q = 2\text{sen}\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.

$\cos p + cosq = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\ cos\dfrac{p-q}{2}$.

$\cos p - cosq = -2\text{sen}\dfrac{p+q}{2}\text{sen}\dfrac{p-q}{2}$.

Ao fatorar as fórmulas que envolvem tangente, temos

1^a)Adição

$\tan p + \tan q = \dfrac{\text{sen}p}{\cos p} + \dfrac{\text{sen}q}{\cos q}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\text{sen}p\cos q + \text{sen}q\cos p}{\cos p\cos q}$

$$\tan p + \tan q = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p\cos q}.$$

2^a)Subtração

$\tan p - \tan q = \dfrac{\text{sen}p}{\cos p} - \dfrac{\text{sen}q}{\cos q}$

$$\tan p - \tan q = \frac{\text{sen} p \cos q - \text{sen} q \cos p}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}$$

2.17.3 Arco Triplo

Vale observar que o processo acima descrito nos permite calcularmos a expressões para o seno, cosseno e tangente do arco triplo (ou qualquer múltiplo deles):

$$\begin{aligned}
\text{sen}(3x) =& \text{sen}(2x+x) = \text{sen}2x\cos x + \text{sen}x\cos 2x \\
=& 2\text{sen}x\cos x\cos x + \text{sen}x(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \\
=& 2\text{sen}x\cos^2 x + \text{sen}x.\cos^2 x - \text{sen}^3 x \\
=& 3\text{sen}x\cos^2 x - \text{sen}^3 x = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(3x) =& \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \text{sen}2x\text{sen}x \\
=& (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\cos x - 2\text{sen}x\cos x\sin x \\
=& \cos^3 x - \text{sen}^2 x\cos x - 2\text{sen}^2 x\cos x \\
=& \cos^3 x - 3\cos x\text{sen}^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}$$

$$\tan(3x) = \tan(2x+x) = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x\tan x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

2.17.4 Arco Metade

Outra caracterização interessante dentro das relações trigonométricas é a do arco metade. Ao adicionarmos as fórmulas $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ e $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ obtemos que

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1,$$

ou seja, $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ ou ainda, $\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{\cos 2x + 1}{2}}$. Assim chegamos que

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}}.$$

Segue da relação fundamental que

$$\text{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cos x - 1}{2}}.$$

Finalmente, $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$, logo

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}}.$$

CAPÍTULO

3

APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

Aplicações da trigonometria já apareceram no Egito nas medições das pirâmides conforme vestígios encontrados no Papiro Rhind e também era utilizada na confecção do "relógio do sol" em 1500 a.C. Na Babilônia, a trigonometria foi utilizada na confecção de calendários, em épocas de plantio e estações do ano assim como na escrita cuneiforme. Muitos textos matemáticos testemunham a utilização da trigonometria neste período e em períodos posteriores.

No que se refere ao ensino-aprendizagem de Trigonometria no Ensino médio, as propostas e orientações sugerem que seu estudo esteja relacionado as aplicações, ou seja, que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e na construção de modelos que correspondam as fenômenos periódicos. Deste maneira, o ensino da trigonometria deve apresentar as funções seno, cosseno e tangente com enfase no triângulo retângulo e num triângulo qualquer, no círculo trigonométrico (como descrevemos no Capítulo I desta dissertação) e nas suas aplicações (tema deste capítulo). Certamente tal ensino não deve ser reduzido apenas as fórmulas trigonométricas, é necessário dar significado a tais conhecimentos e as aplicações podem ser a motivação e forma contextualizada e integrada de relacionar a trigonometria com outros conhecimentos. Neste capítulo vamos apresentar algumas aplicações da trigonometria no cálculo de distâncias, na Física e na Medicina. O conteúdo deste capítulo foi baseado nas seguintes referências (REDE OMNIA, ; EQUIPE VIRTUOUS, ; COLIBRI INFORMáTICA LTDA, ; ROSSI, 2008; OLIVEIRA, 2013).

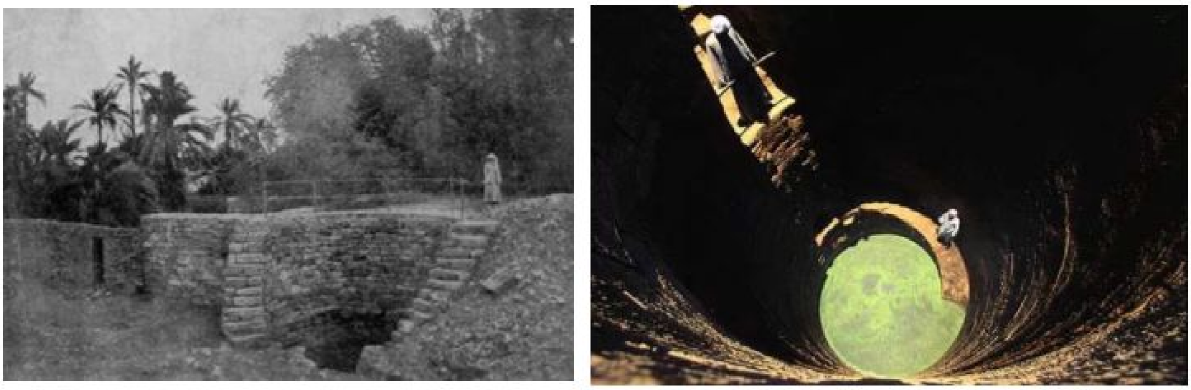
3.1 Medidas de distância

A Trigonometria é muito eficiente para determinar distâncias, principalmente aquelas inacessíveis. O cálculo dessas medidas já eram feitas na antiguidade como mencionamos no início deste capítulo. A seguir vamos apresentar um exemplo de como tal medição pode ser feita.

3.1.1 Erastóstenes e o cálculo do raio da Terra

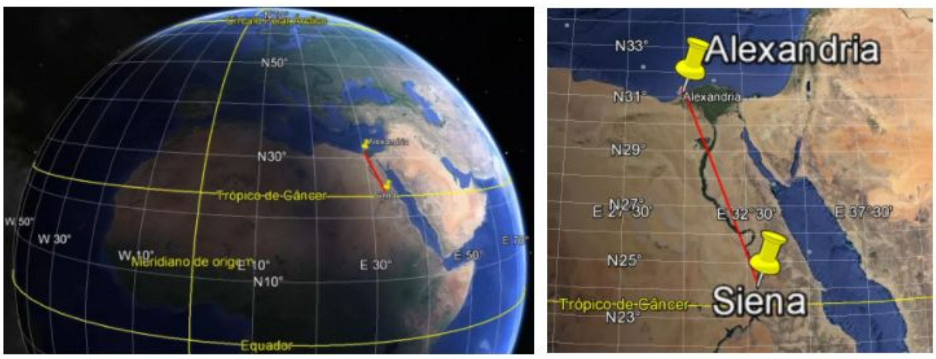
Erastóstenes foi um geógrafo, filósofo e matemático grego. Por volta de 240 a.C, próximo ao meio dia de um solstício de Verão, na cidade de Siena, Erastóstenes observou que em um certo poço o sol ficava no Zênite[1], assim não produzia sombra nos objetos expostos. Já em Alexandria, nesse mesmo momento, os objetos formavam uma sombra de inclinação de 7,2 graus. Assim, para determinar o raio da Terra, Erastóstenes precisou primeiramente calcular a a distância entre Siena e Alexandria para em seguida , que era de aproximadamente de 5000 estádios (onde cada estádio corresponde a 157 metros) e em seguida usou a relação conhecida na época entre o comprimento de arco e o raio da circunferência.

Figura 60 – Poço em Siena



Fonte – www.amma.com.pt

Figura 61 – Distância entre Alexandria e Siena



Fonte – www.amma.com.pt

[1] Zênite, em astronomia e trigonometria, é o termo técnico que designa o ponto (imaginário) interceptado por um eixo vertical (imaginário) traçado a partir da cabeça de um observador (localizado sobre a superfície terrestre) e que se prolonga até a esfera celeste.

Veja o desenvolvimento matemático empregado por Erastóstenes. Era conhecida a seguinte relação matemática

$$\frac{C}{d} = \frac{2\pi}{\theta},$$

onde C é o comprimento da circunferência da Terra e d é a distância entre as cidades de Siena e Alexandria e θ corresponde ao ângulo formado pelas retas que unem o sol as cidades de Siena e Alexandria.

Primeiramente transforma-se 7,2 graus em radianos:

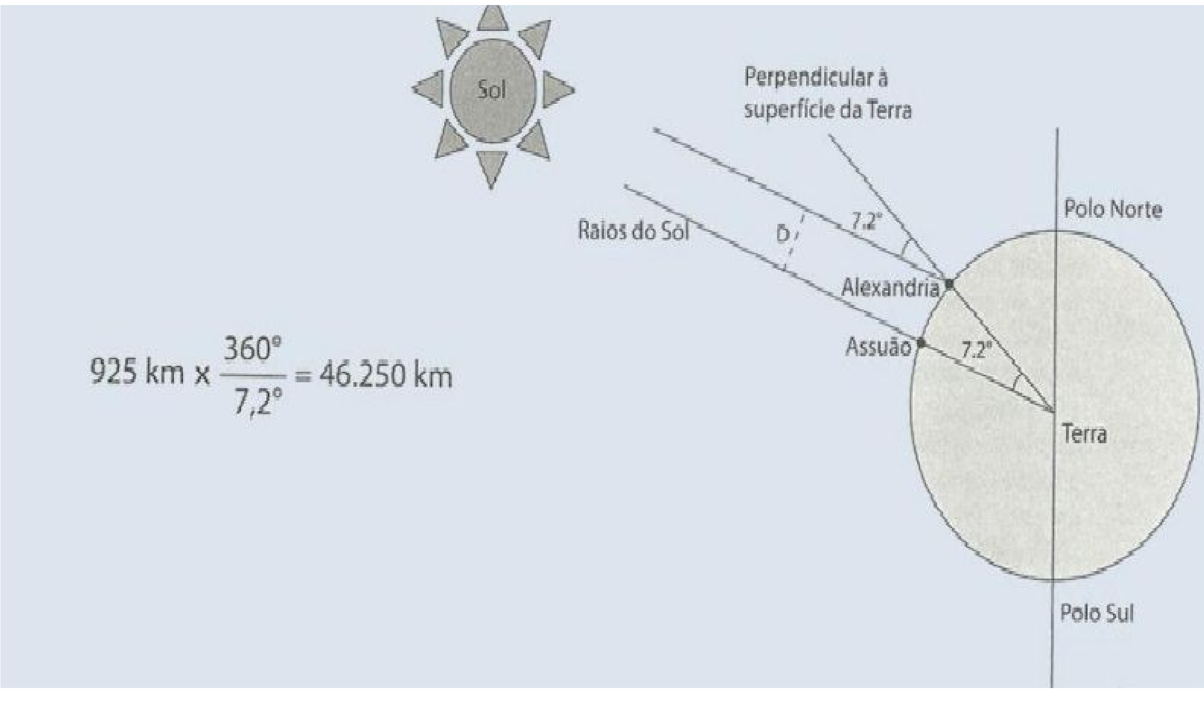
$\theta = 7,2^o.\pi/180^o$

$\theta = 0,04\pi$ radianos

Assim $C = \frac{5000}{0,02}$, ou seja, $C = 250000$ estádios

Como cada estádio corresponde a $0,157km$, segue que $C = 250000.0,157$ ou ainda, $C = 39250km$. Pela fórmula do comprimento da circunferência $C = 2\pi R$ concluímos que $39250 = 2\pi R$, portanto $R = 6247km$. Atualmente sabemos que a distância entre as cidades de Siena e Alexandria é de $4.138,1km$ e o raio da Terra que corresponde a $6378,14km$. Valores próximos aqueles obtidos por Erastóstenes.

Figura 62 – Medida da Terra feita por Erastótenes



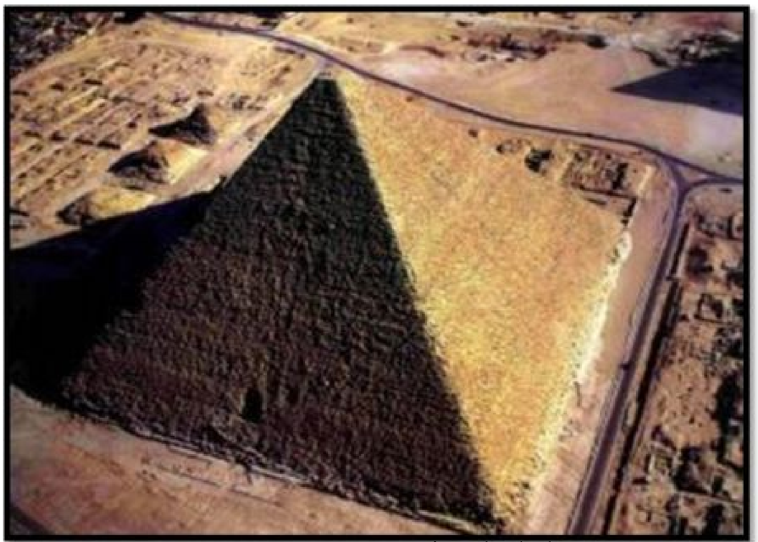
Fonte – Mascarenha (2014)

3.1.2 Tales de Mileto e altura da pirâmide de Quéops

Há diversos historiadores que descrevem como Tales determinou a altura das pirâmides do Egito (ver Figura 63).

A teoria de Diógenes Laércio (século III d.C.) conta que Tales mediu a altura da Pirâmide de Quéops comparando sua sombra com a sombra de um bastão. Para isso ele posicionou um bastão a prumo próximo a pirâmide mas fora de sua sombra e aguardou até que a sombra do bastão fosse igual ao comprimento do mesmo. Neste momento, usando o comprimento da sombra da pirâmide calculou a altura da mesma.

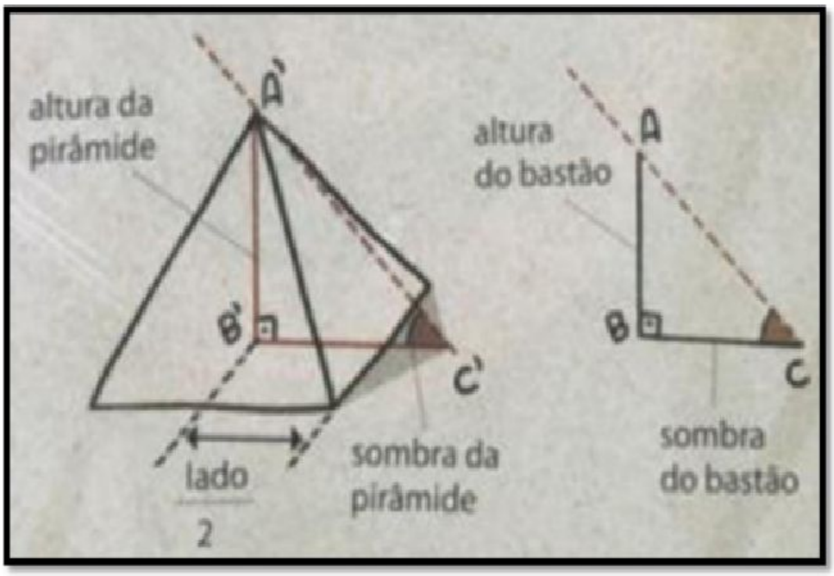
Figura 63 – Pirâmide Quéops do Egito



Fonte – www.imed.edu.br

Veja agora o esquema apresentado na Figura 64 que mostra o raciocínio empregado por Tales.

Figura 64 – Esquema elaborado por Tales de Mileto



Fonte – Barroso (Barroso, p.93)

Tales usou semelhança de triângulos. Os triângulos formados pelas alturas da pirâmide e do bastão e suas sombras são semelhantes pelo fato de ambos serem triângulos retângulos e os raios do sol serem paralelos, determinando o mesmo ângulo na base de ambos os triângulos naquele momento. Ou seja, utilizando as letras da Figura 64 temos

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

3.2 Trigonometria na Física

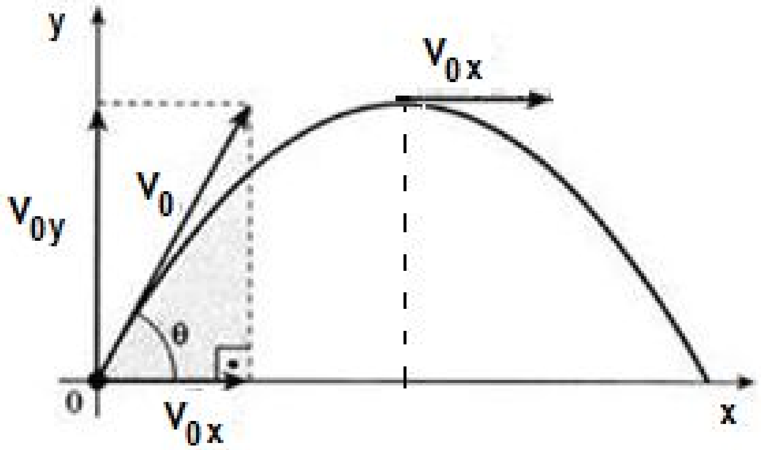
3.2.1 Lançamento Oblíquo

Usa-se semelhança de triângulos ou razões trigonométricas para resolver problemas de lançamento oblíquo.

O lançamento oblíquo ocorre quando um corpo qualquer é arremessado a partir do chão e forma um determinado ângulo θ em relação à horizontal. O movimento executado por um atleta da modalidade do salto em distância, a trajetória adquirida por uma bola de golfe ou por um projétil são exemplos de lançamentos oblíquos.

No lançamento oblíquo, o movimento dos objetos é composto por um deslocamento da vertical e outro horizontal como representado na Figura 65. Assim, ao mesmo tempo em que o objeto vai para frente, ele sobe e desce. O vetor velocidade do corpo a ser lançado v_0 forma um determinado ângulo θ em relação à horizontal. Por essa razão, decompondo-se o vetor $\vec{v_0}$, as velocidades horizontal ($\vec{v_{0,x}}$) e vertical ($\vec{v_{0,y}}$) podem ser determinadas.

Figura 65 – Lançamento Oblíquo



Fonte – http://vamosestudarfisica.com/altura-maxima-e-alcance-maximo/

Utilizando as relações de um triângulo retângulo podemos escrever que

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

onde o cateto oposto corresponde a $\vec{v_{0,y}}$ e a hipotenusa a $\vec{v_0}$. Assim, temos que $\vec{v_{0,y}} = \vec{v_0}\text{sen}\theta$.

Analogamente temos,

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}},$$

onde o cateto adjacente corresponde a $\vec{v_{0,x}}$. Portanto $\vec{v_{0,x}} = \vec{v_0}\cos\theta$.

A seguir um exemplo do uso da teoria acima descrita.

Um objeto é lançado obliquamente no vácuo com velocidade inicial de 200 m/s com uma inclinação de 30^o. Determine o tempo de subida, a altura máxima e o alcance horizontal do objeto. Considere $g = 10m/s^2$.

Resolução: Primeiramente vamos calcular o tempo de subida do objeto sabendo que a aceleração é igual a razão entre a velocidade e o tempo de subida, sendo assim, temos que o tempo t de subida é dado por

$$t = \frac{\vec{v_0\text{sen}\theta}}{g} = \frac{200\text{sen}30^o}{10} = 10,$$

isto é, o objeto subiu por 10 segundos.

Agora podemos calcular a altura máxima alcançada pelo objeto utilizando a equação de Torricelli

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s,$$

onde a é a aceleração do objeto e Δs é seu deslocamento. Para o lançamento horizontal oblíquo temos

$$v_y^2 = v_{0,y}^2 - 2gh,$$

uma vez que a aceleração corresponde a força gravitacional. Portanto segue que

$$h = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \theta}{2g},$$

ou seja, $h = \frac{10000}{20} = 500$. Portanto o objeto subiu 500 metros.

Para calcular o alcance horizontal utilizamos que o deslocamento horizontal é dado pela diferença entre o final e o inicial e que a velocidade é dada pela razão entre o deslocamento e a variação de tempo. Neste caso, o deslocamento horizontal ou alcance A é dado por

$$A = \frac{v_o^2 \text{sen} 2\theta}{g} = \frac{40000.\frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = 4000\sqrt{3}.$$

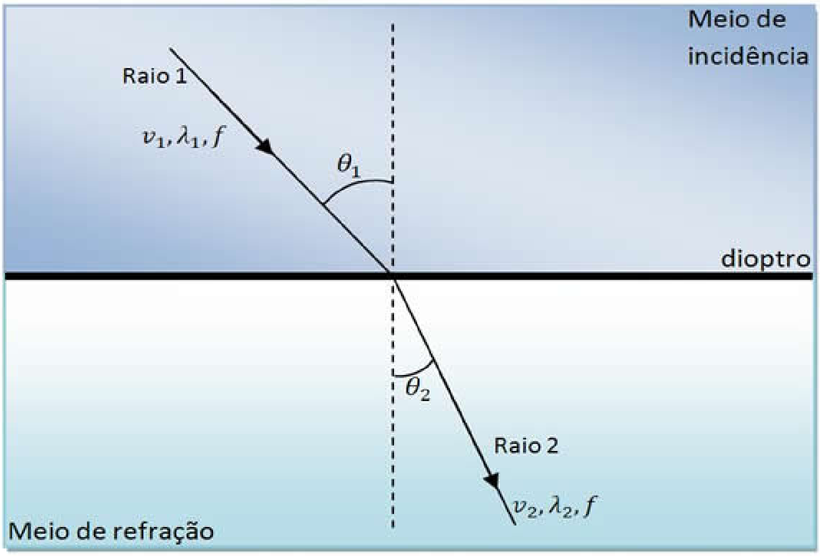
Ou seja, o alcance foi de aproximadamente $6.928,2$ metros.

Como mencionamos anteriormente, esse tipo de exercício pode aparecer em contextos como lançamento de uma bola, de um projétil, salto de um animal, jatos d'água de uma fonte, o que torna o exercício atraente para os alunos pois mostra utilidades no seu cotidiano.

3.2.2 Refração

Refração é nome que se dá ao fenômeno óptico em que a luz é transmitida de um meio para outro. A frequência da onda luminosa não é alterada após essa mudança de meios, entretanto sua velocidade e o seu comprimento de onda sofrem alterações. Após essa alteração da velocidade de propagação, decorre um desvio da direção original. Observe a figura abaixo para entender melhor este fenômeno.

Figura 66 – Imagem de Refração



Fonte – www.sofisica.com.br

Na figura:

- Raio 1 é o raio incidente, com sua velocidade e com seu comprimento de onda característico;

- Raio 2 é o raio refratado, com sua velocidade e com seu comprimento de onda característico;

- A reta tracejada é a linha normal à superfície, ou seja, é reta perpendicular à reta tangente nesse ponto;

- O ângulo formado entre o raio 1 e a reta normal é o ângulo de incidência;

- O ângulo formado entre o raio 2 e a reta normal é o ângulo de refração;

- Dioptro plano é o nome que se dá a fronteira entre os dois meios.

Observe duas leis que regem esse fenômeno:

1ª Lei da Refração

A 1ª lei da refração diz que o raio incidente (raio 1), o raio refratado (raio 2) e a reta normal ao ponto de incidência (reta tracejada) estão contidos no mesmo plano, que no caso do desenho acima é o plano da tela.

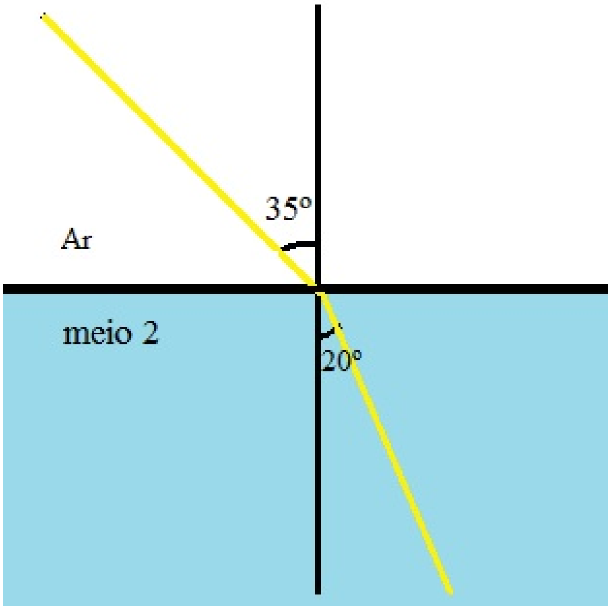
2ª Lei da Refração - Lei de Snell

Na 2ª lei da refração aplica-se relações trigonométricas. Esta é utilizada para calcular o desvio dos raios de luz ao mudarem de meio:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

Exemplo 3.2.1. Um raio de luz atravessa a interface entre o ar e um líquido desconhecido, mudando sua direção conforme mostra a figura abaixo. Sabendo que o índice de refração do ar é 1, calcule o índice de refração do líquido. Dados: $\text{sen}35^o = 0,57$ e $\text{sen}20^o = 0,34$.

Figura 67 – Figura referente ao exercício de refração



Fonte – www.mundoeducacao.com.br.

Resolução: Denotamos por n_{lqdo} o índice de retração do líquido e por n_{ar} o índice de retração do ar. Assim temos que

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{n_{lqdo}}{n_{ar}},$$

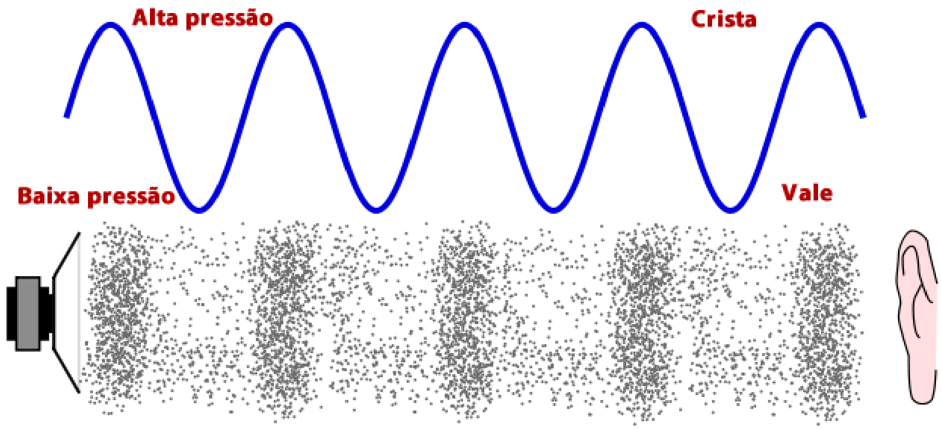
ou seja, $\text{sen}35^o = n_{lqd}.\text{sen}20^o$. Portanto. $0,57 = n_{lqdo}.0,34$ ou ainda, $n_{lqdo} = 1,67$.

3.2.3 O Som

O som é gerado através de oscilações muito rápidas que ocorrem na natureza. Desta forma, as notas musicais são consideradas como variações da frequência dessas oscilações. Na Física, define-se o som como uma onda longitudinal que se propaga em um meio material (sólido, líquido ou gasoso). A audição humana considerada normal consegue captar frequências de onda sonoras que variam entre aproximadamente 20Hz e 20000Hz. São denominadas ondas de infra-som, as ondas que tem frequência menor que 20Hz, e ultra-som as que possuem frequência acima de 20000Hz. Uma onda sonora pode ser representada geometricamente por gráficos de funções trigonométricas.

Observe a imagem abaixo:

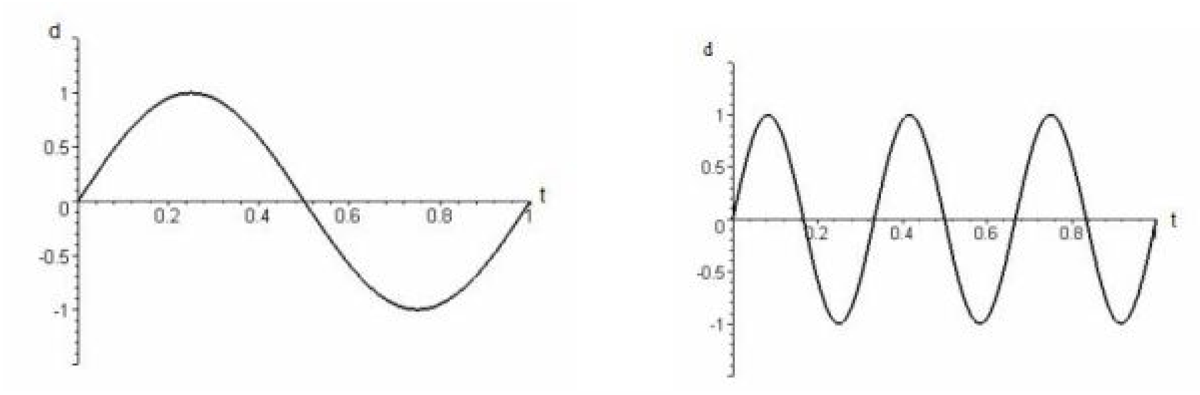
Figura 68 – Ondas Sonoras



Fonte – http://professorbiriba.com.br/boilerplate/html/colegio/terceiroano/aula12-terceiroano.html

A figura possui uma representação da física envolvida. De um lado temos um auto-falante emitindo um som e do outro lado, um ouvido humano. Cada ponto preto representa uma molécula do ar atmosférico. Quando em funcionamento a membrana do auto-falante empurra o ar para frente e para trás formando regiões onde as moléculas desse meio estão mais densas (mais escuras, na imagem). Essas regiões são seguidas por regiões onde as moléculas estão menos densas (menos escuras, na imagem). Nas regiões mais escuras a pressão entre as moléculas é maior, nas mais claras é menor. A onda sonora é, portanto, uma onda de pressão. Podemos fazer um gráfico da pressão pela posição entre o auto-falante e o ouvido. Veja a parte superior da imagem acima. A parte superior da curva (em azul) representa as regiões de pressão mais alta e a parte inferior as de pressão mais baixa. Os pontos de maior pressão são chamados "cristas"e os de menor pressão "vales". Como o auto-falante está em funcionamento as regiões mais densas se movimentam e, após algum tempo, atingem o ouvido humano. Ao fazer isto elas empurram a membrana do tímpano. Essa vibração é transformada em um sinal elétrico que é enviado ao cérebro e lá dá origem ao que entendemos como "som". Ao observar os gráficos das funções trigonométricas, verifica-se que a amplitude da onda determina se o som é forte ou fraco, ou seja, sua intensidade e a frequência equivale à altura da nota. Sendo assim, ao executar 261 pulsos em um segundo obtem-se a nota Dó. O período é o tempo compreendido entre estados iguais de vibração. Quanto maior o número de vibrações, mais agudo é o som. Por exemplo, observe os gráficos das funções $y = \text{sen}(2\pi t)$ e $y = \text{sen}(6\pi t)$. O segundo gráfico representa um som mais agudo que o primeiro, pois o número de vibrações é maior, ou seja, enquanto a primeira função possui frequência de 1 hertz, a segunda função possui uma frequência de 3 hertz.

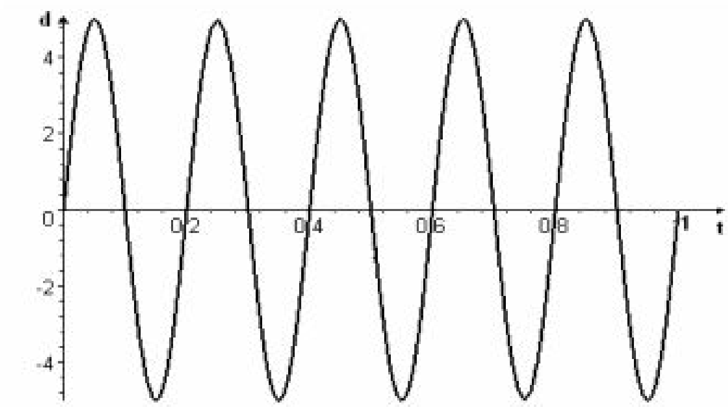
Figura 69 – Gráficos que representam sons



Fonte – http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/113-4.pdf

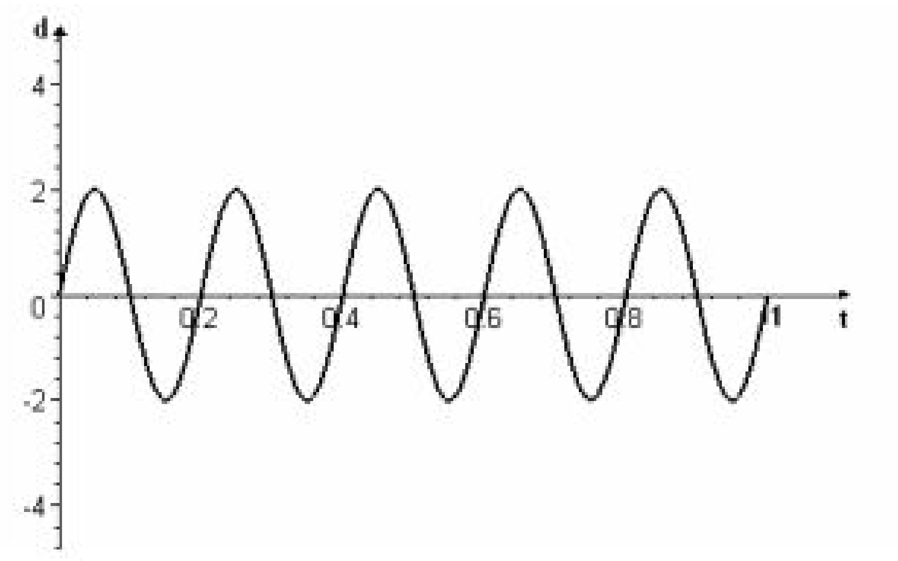
O som forte ou fraco pode ser percebido através da amplitude do gráfico. Quanto maior essa amplitude, mais forte é o som. Por exemplo, uma função definida por $y = 5.\text{sen}(10\pi t)$ apresenta um som mais forte que a função definida por $y = 2.\text{sen}(10\pi t)$, já que a amplitude da primeira é 5 e da segunda é 2. Observe os gráficos que descrevem essas amplitudes:

Figura 70 – Gráfico de amplitude 5



Fonte – http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/113-4.pdf

Figura 71 – Gráfico de amplitude 2



Fonte – http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/113-4.pdf

3.3 Na medicina

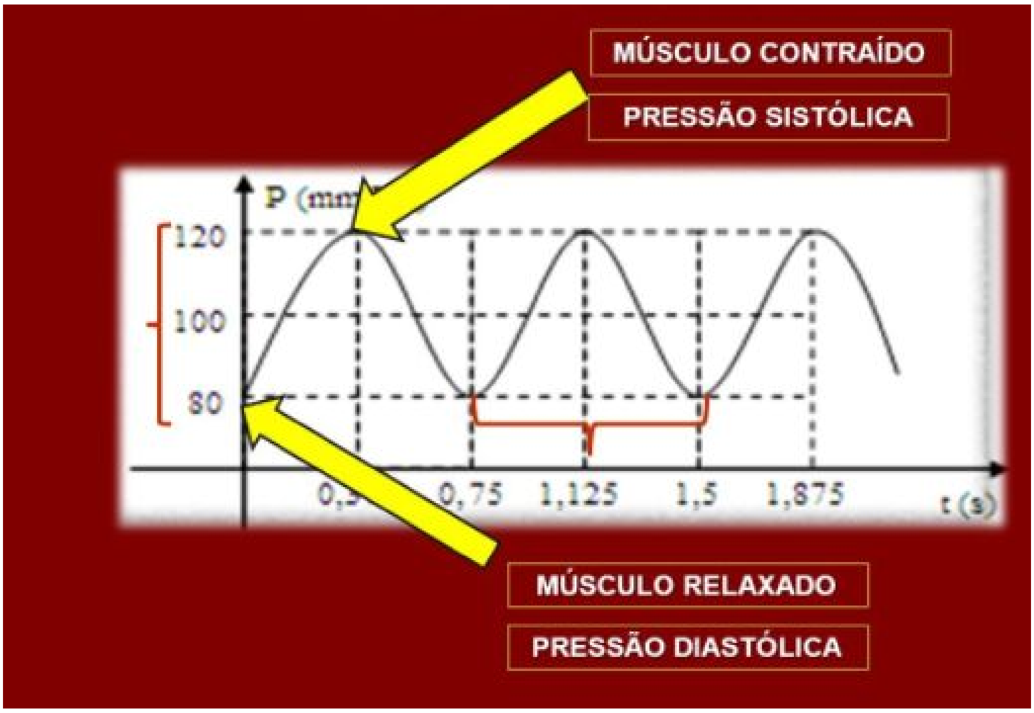
Na medicina, usa-se a função trigonométrica para analisar e estudar a frequência cardíaca, ou seja, o número de batimentos cardíacos em um certo intervalo de tempo, frequentemente aferido em bpm (batimentos cardíacos por minuto). A pressão arterial de uma pessoa é averiguada a partir dessa análise. As artérias são responsáveis pelo transporte do sangue bombeado pelo coração para todos os órgãos e tecidos do corpo humano. A pressão sanguínea ou arterial atinge o valor máximo após a contração do músculo do coração (pressão sistólica) e atinge o valor mínimo (pressão diastólica) quando o músculo repousa. As duas pressões ocorrem durante o intervalo de tempo de um batimento cardíaco. Calcula-se a variação da pressão sanguínea em função do tempo, e é dada pela função trigonométrica

$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right),$$

em que o valor de $\frac{8\pi}{3}$ é dado em radianos e t é medido de segundos.

O gráfico seguir representa a variação da pressão sanguínea (em milímetros de mercúrio $mmHg$) de uma pessoa em função do tempo em segundos s em um monitor médico.

Figura 72 – Gráfico da pressão



Fonte – http://slideplayer.com.br/slide/1265165/

Este assunto é tema frequente em vestibulares e exames como ENEM. Abaixo veja alguns exemplos.

1. (UFSM 2015) Cerca de 24,3 por cento da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de um certo indivíduo é expressa em função do tempo por

$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right),$$

onde t é dado em segundos. Cada período dessa função representa um batimento cardíaco. Analise as afirmativas:

I. A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.

II. A pressão em $t = 2$ segundos é de $110 mmHg$.

III. A amplitude da função P(t) é de $30 mmHg$.

Está(ão) correta(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Resolução:

I. (Verdadeira) A frequência é uma grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento (ciclos, voltas, oscilações etc) em um determinado intervalo de tempo. Assim, para calcular a frequência, basta fazer o inverso do período.

$p = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}} = \frac{3}{4}$

Portanto, a frequência é $f = \frac{4}{3}$

Para calcular a frequência por minuto, basta multiplicar $f = \frac{4}{3}$ por 60, o que resulta em 80 batimentos por minuto.

II. (Verdadeira) Para $t = 2$, temos:

$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi.2}{3}\right)$

$P(t) = 100 - 20.\frac{-1}{2} = 110$

Portanto, a pressão para $t = 2$ é de $110mmHg$.

III. (Falsa)

A amplitude é a metade da distância vertical entre o ponto mínimo e o ponto máximo da função.

Observando a função, temos que o valor máximo é $120(100+20)$ e o mínimo é $80(100-20)$. Assim, a amplitude é dada por $\frac{120-80}{2} = 20$.

Portanto, a amplitude da função é $20mmHg$. Alternativa correta: B.

2.(PUCRS 2017) A pressão arterial é a pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias. Ela atinge o valor máximo (pressão sistólica) quando os ventrículos se contraem, e o valor mínimo (pressão diastólica) quando eles estão em repouso. Suponhamos que a variação da pressão arterial (em mmHg de um cidadão portoalegrense em função do tempo (em segundos) é dada por

$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right),$$

Diante disso, os valores da pressão diastólica e sistólica, em mmHg são iguais, respectivamente, a:

a) 60 e 100.

b) 60 e 120.

c) 80 e 120.

d) 80 e 130.

e) 90 e 120.

Resolução:

Os valores máximo e mínimo que a função $\cos(\frac{8\pi}{3})$ assume são, respectivamente, 1 e -1. Assim, ao substituir na função P(t), obtemos os resultados 80 e 120 que assumem os valores pedidos de pressão diastólica e sistólica. Portanto,a alternativa correta é a c.

Por meio das aplicações acima apresentadas concluímos que a trigonometria nasceu motivada pela astronomia e até a presente data é empregada em diferentes áreas do conhecimento, auxiliando em diferentes teorias e situações problemas.

Podemos utilizar este fato para motivar o estudo da trigonometria no ensino médio, apresentando exemplos e desafios interdisciplinares, permitindo um estudo contextualizado do tema.

CAPÍTULO

4

ATIVIDADE REALIZADA EM SALA DE AULA

Com o objetivo de avaliar o desenvolvimento dos alunos em relação ao conteúdo abordado em sala de aula sobre Trigonometria preparamos um teste com 10 questões sobre o mesmo. O teste foi proposto aos alunos da segunda série do ensino médio de escolas privadas em Barra Bonita, Jaú e Botucatu, alunos com aproximadamente 16 anos de idade. Vale observar que em tais escolas os alunos são distribuídos em salas de aula de acordo com sua aptidão para exatas ou não, sendo assim as turmas podem ser ditas homogêneas. O teste era formado por 10 questões que foram retiradas de provas de grandes vestibulares do país nos anos de 2016 e 2017. O tempo disponível foi de 100 minutos e apenas 60 alunos participaram do teste.

A primeira questão era referente a função cosseno em que o aluno deveria identificar a lei de formação através dos valores máximo e mínimo e do período. A grande dificuldade foi identificar que o número de batimentos cardíacos por minutos estava relacionado ao período da função. Essa questão apareceu no ENEM desse ano e muitos alunos não haviam conseguido fazer e no dia do teste conseguiram e acharam fácil. O que mostra a importância de refazer questões de exames já ocorridos.

Na segunda questão o aluno deveria determinar a medida do raio da circunferência através de alguma aplicação trigonométrica. A maioria dos alunos utilizou a Lei dos Senos e também obteve melhor desempenho no teste do que na prova do ENEM.

A terceira questão da FUVEST envolvia uma função logarítmica que acabou assustando a maioria dos alunos. Ficou muito claro a dificuldade de cada aluno em relação ao assunto Logaritmos. Muitos alunos nem tentaram fazer essa questão.

Na questão de número quatro o aluno devia interpretar, visualizar o desenho formado e aplicar alguma relação trigonométrica, como seno ou lei dos senos, a maioria dos alunos fez essa questão e achou fácil.

As questões cinco e seis apresentavam um contexto, uma função trigonométrica e o aluno deveria encontrar os valores máximo e mínimo da função.

Na quinta questão os alunos deveriam encontrar o período da função, algo que foi classificado como difícil. Faltou interpretação dos alunos para poderem identificar que o exercício pedia para encontrar o período.

O exercício sete, do Enem, foi considerado o mais simples pois o aluno que sabia que o seno de trinta graus era meio, automaticamente identificava que a alternativa correta era a que apresentava cinquenta por cento.

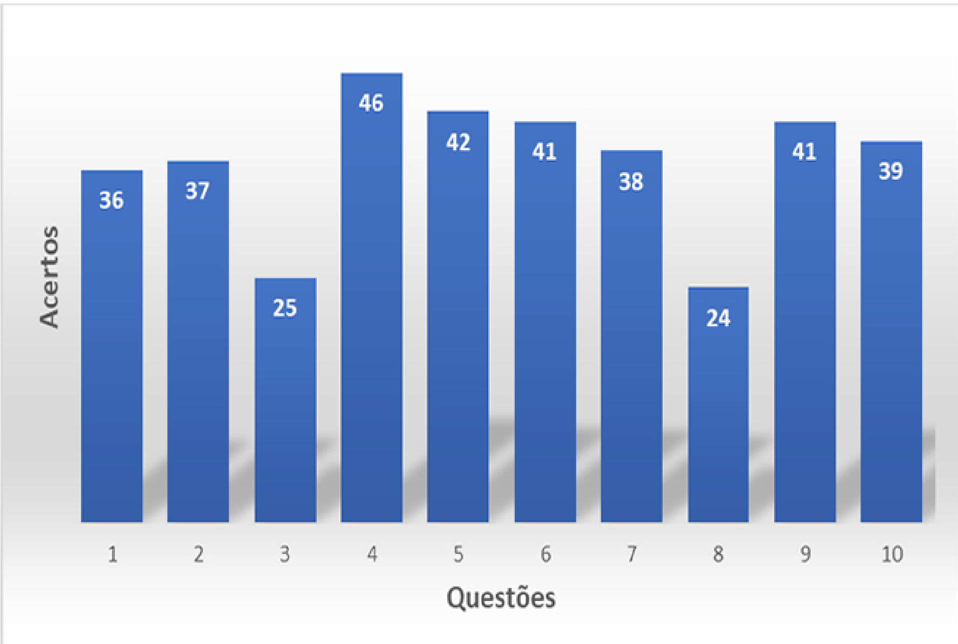
Já na questão de número oito o aluno tinha que utilizar uma fórmula de física que era informada pelo próprio enunciado. Muitos alunos não quiseram fazer pois alegaram que não sabiam física ou que a questão era muito extensa. Após eu insistir que o exercício não era difícil, alguns alunos fizeram e acharam mais fácil do que imaginavam.

Na questão nove a dificuldade apareceu nas contas trabalhosas, mas a maioria dos alunos fez a questão utilizando a lei dos cossenos.

A última questão gerou dúvidas pois os alunos deveriam trabalhar com número irracional e aproximações, isso "assustou"um pouco os alunos.

Abaixo o gráfico com a quantidade de acertos por questões.

Figura 73 – Gráfico de acertos



Fonte – Elaborada pela autora

Outras considerações: A questão quatro exigia um conteúdo que também é visto no Ensino Fundamental e é muito trabalhado em sala, já a questão oito, envolvia física e apesar de não precisar de nenhum conhecimento além da fórmula dada, foi a questão com menor número de acertos.

A seguir anexamos o teste aplicado.

Figura 74 – Teste aplicado aos alunos, página 1.

Teste com os alunos – Mestrado

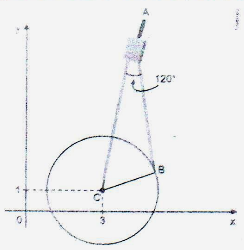
1. (Enem 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

2. (Enem 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de $120°$. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.
Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.



Tipo de material	Intervalo de valores de raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere $1,7$ como aproximação para $\sqrt{3}$.
O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será
a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

3. (Fuvest 2017) Uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida a temperatura constante, e seu volume varia com o tempo de acordo com a seguinte fórmula:

$$V(t) = \log_2(5 + 2\,\text{sen}(\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

em que t é medido em horas e $V(t)$ é medido em m^3. A pressão máxima do gás no intervalo de tempo $[0, 2]$ ocorre no instante
a) $t = 0,4$ b) $t = 0,5$ c) $t = 1$ d) $t = 1,5$ e) $t = 2$

4. (Ifal 2017) Ao soltar pipa, um garoto libera 90 m de linha, supondo que a linha fique esticada e forme um ângulo de $30°$ com a horizontal. A que altura a pipa se encontra do solo?
a) 45 m. b) $45\sqrt{3}$ m. c) $30\sqrt{3}$ m. d) $45\sqrt{2}$ m. e) 30 m.

5. (Ifba 2017) Há milhares de anos, os homens sabem que a Lua tem alguma relação com as marés. Antes do ano 100 a.C., o naturalista romano Plínio escreveu sobre a influência da Lua nas marés. Mas as leis físicas desse fenômeno não foram estudadas até que o cientista inglês Isaac Newton descobriu a lei da gravitação no século XVII. As marés são movimentos de fluxo e refluxo das águas dos mares provocados pela atração que a Lua e secundariamente o Sol exercem sobre os oceanos. Qualquer massa de água, grande ou pequena, está sujeita às forças causadoras de maré provindas do Sol e da Lua. Porém é somente no ponto em que se encontram os oceanos e os continentes que as marés têm grandeza suficiente para serem percebidas. As águas dos rios e lagos apresentam subida e descida tão insignificante que a diferença é inteiramente disfarçada por mudanças de nível devidas ao vento e ao estado do tempo.

Extraído de: http://planetario.ufsc.br/mares/ em 26/08/2016.

Sendo a maré representada por uma função periódica, e supondo que a função que descreve melhor o movimento da maré em Salvador - BA é dada pela expressão:

$A(t) = 1,8 + 1,2\,\text{sen}(0,5\pi t + 0,8\pi)$, t é o tempo em horas $0 \leq t \leq 24$.

Sendo assim, as alturas máxima e mínima da maré descrita pela função $A(t)$ são, respectivamente:
a) $3,0$ m e $0,6$ m
b) $3,0$ m e $0,8$ m
c) $2,5$ m e $0,6$ m
d) $2,5$ m e $0,8$ m
e) $2,8$ m e $0,6$ m

Fonte – Elaborada pela autora

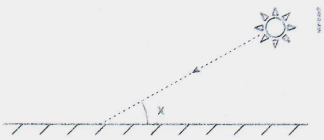
Figura 75 – Teste aplicado aos alunos, página 2.

Teste com os alunos – Mestrado

6. (Pucrs 2017) A pressão arterial é a pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias. Ela atinge o valor máximo (pressão sistólica) quando os ventrículos se contraem, e o valor mínimo (pressão diastólica) quando eles estão em repouso. Suponhamos que a variação da pressão arterial (em mmHg) de um cidadão portoalegrense em função do tempo (em segundos) é dada por $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$. Diante disso, os valores da pressão diastólica e sistólica, em mmHg, são iguais, respectivamente, a

a) 60 e 100 b) 60 e 120 c) 80 e 120
d) 80 e 130 e) 90 e 120

7. (Enem 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.
Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.



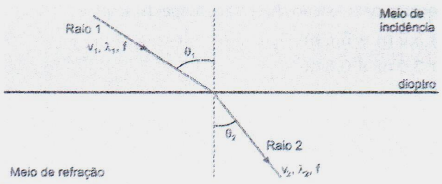
Quando $x = 30°$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33% b) 50% c) 57% d) 70% e) 86%

8. (Ufjf 2017) Chama-se de **refração da luz** o fenômeno em que a luz é transmitida de um meio de incidência para outro meio, dito meio de refração. Nesta mudança de meios a frequência da onda luminosa não é alterada, embora sua velocidade e o seu comprimento de onda sejam. Com a alteração da velocidade de propagação ocorre um desvio da direção original.

A figura a seguir representa exatamente o fenômeno da Refração da Luz que é modelada pela 2ª lei da Refração:

$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

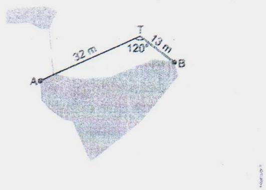


Tem-se, na figura, que:
- Raio 1 é o raio incidente, com velocidade e comprimento de onda característico;
- Raio 2 é o raio refratado, com velocidade e comprimento de onda característico;
- a reta tracejada é a linha normal à superfície;
- o ângulo formado entre o raio 1 e a reta normal é o ângulo de incidência;
- o ângulo formado entre o raio 2 e a reta normal é o ângulo de refração;
- a fronteira entre os dois meios é um dioptro plano.

Numa dada experiência realizada, os seguintes dados foram encontrados:
$\theta_2 = 30°$, $v_1 = 10$ m/s, $v_2 = 15$ m/s.

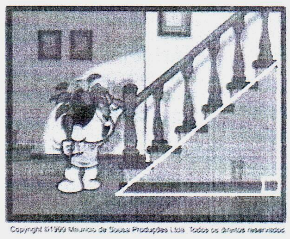
A partir dos dados apresentados, responda as questões a seguir, detalhando seus cálculos:
a) Qual o valor da medida do ângulo θ_1?
b) Qual o valor do cosseno do ângulo θ_1?
c) Qual o valor da medida de $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$?

9. (Uerj 2017) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas $AT = 32$ m; $BT = 13$ m e $A\hat{T}B = 120°$, representadas no esquema abaixo.



Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago.

10. (Uemg 2016) Observe a figura:



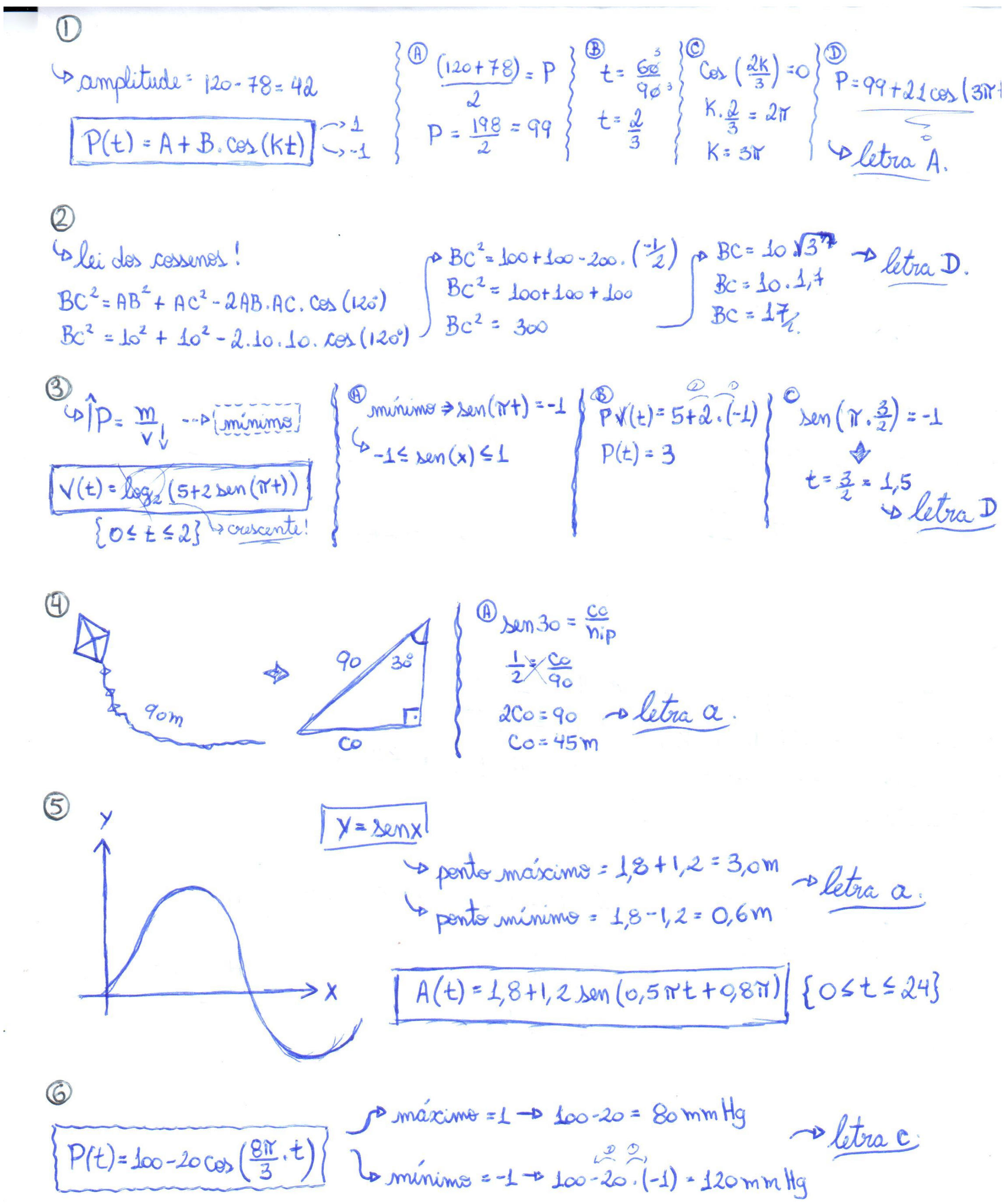
Tendo como vista lateral da escada com 6 degraus, um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $\sqrt{10}$ metros, Magali observa que todos os degraus da escada têm a mesma altura. A medida em cm, de cada degrau, corresponde aproximadamente a:

a) 37. b) 60. c) 75. d) 83.

Página 2 de 5

A seguir anexamos a resolução do teste por três alunos da mesma sala.

Figura 76 – Teste resolvido pelo aluno 1, página 1.



① amplitude $= 120 - 78 = 42$

$\boxed{P(t) = A + B.\cos(kt)}$ → 1, → −1

Ⓐ $\frac{(120+78)}{2} = P$; $P = \frac{198}{2} = 99$

Ⓑ $t = \frac{6\cancel{0}}{9\cancel{0}}$; $t = \frac{2}{3}$

Ⓒ $\cos\left(\frac{2k}{3}\right) = 0$; $K.\frac{2}{3} = 2\pi$; $K = 3\pi$

Ⓓ $P = 99 + 21\cos(3\pi$ → letra A.

② lei dos cossenos!

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(120°)$

$BC^2 = 10^2 + 10^2 - 2.10.10.\cos(120°)$

$BC^2 = 100 + 100 - 200.\left(\frac{-1}{2}\right)$

$BC^2 = 100 + 100 + 100$

$BC^2 = 300$

$BC = 10\sqrt{3}$; $BC = 10.1,7$; $BC = 17$ → letra D.

③ $IP = \frac{m}{v\downarrow}$ → mínimo

$\boxed{V(t) = \log_2(5 + 2\,\text{sen}(\pi t))}$ $\{0 \leq t \leq 2\}$ → crescente!

Ⓐ mínimo ⇒ $\text{sen}(\pi t) = -1$; $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$

Ⓑ $PV(t) = 5 + 2.(-1)$; $P(t) = 3$

Ⓒ $\text{sen}\left(\pi.\frac{3}{2}\right) = -1$; $t = \frac{3}{2} = 1,5$ → letra D

④ 90m; 90; 30°; Co

Ⓐ $\text{sen}\,30 = \frac{Co}{hip}$; $\frac{1}{2} = \frac{Co}{90}$; $2Co = 90$; $Co = 45m$ → letra a.

⑤ y; x

$\boxed{y = \text{sen}\,x}$

ponto máximo $= 1,8 + 1,2 = 3,0m$

ponto mínimo $= 1,8 - 1,2 = 0,6m$ → letra a.

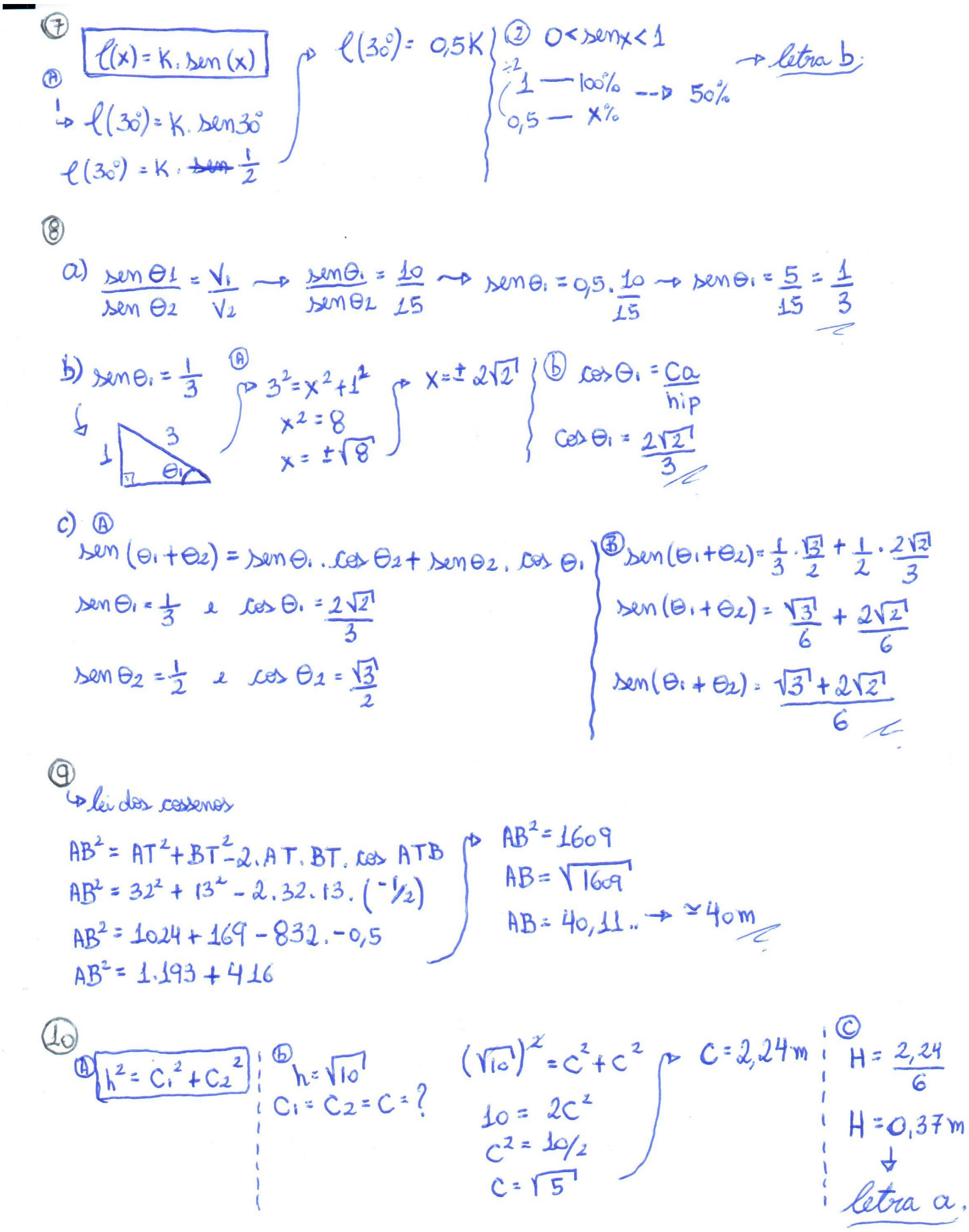
$\boxed{A(t) = 1,8 + 1,2\,\text{sen}(0,5\pi t + 0,8\pi)}$ $\{0 \leq t \leq 24\}$

⑥ $\boxed{P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}.t\right)}$

máximo $= 1 \rightarrow 100 - 20 = 80$ mmHg

mínimo $= -1 \rightarrow 100 - 20.(-1) = 120$ mmHg → letra c.

Figura 77 – Teste resolvido pelo aluno 1, página 2.



7

$\boxed{\ell(x) = K \cdot \text{sen}(x)}$

A

$\ell(30^\circ) = K \cdot \text{sen}\,30^\circ$

$\ell(30^\circ) = K \cdot \cancel{\text{sen}}\ \frac{1}{2}$

$\ell(30^\circ) = 0{,}5K$

2 $0 < \text{sen}\,x < 1$

$\div 2$

1 — 100% $\to$ 50% $\to$ letra b.

$0{,}5$ — $x\%$

8

a) $\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{V_1}{V_2} \to \frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{10}{15} \to \text{sen}\,\theta_1 = 0{,}5 \cdot \frac{10}{15} \to \text{sen}\,\theta_1 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

b) $\text{sen}\,\theta_1 = \frac{1}{3}$

1, 3, θ_1

A $3^2 = x^2 + 1^2$

$x^2 = 8$

$x = \pm\sqrt{8}$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

b $\cos\theta_1 = \frac{Ca}{hip}$

$\cos\theta_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) A

$\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \text{sen}\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2 \cdot \cos\theta_1$

$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{1}{3}$ e $\cos\theta_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{sen}\,\theta_2 = \frac{1}{2}$ e $\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

B $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{6}$

$\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$

9

lei dos cossenos

$AB^2 = AT^2 + BT^2 - 2 \cdot AT \cdot BT \cdot \cos A\hat{T}B$

$AB^2 = 32^2 + 13^2 - 2 \cdot 32 \cdot 13 \cdot (-1/2)$

$AB^2 = 1024 + 169 - 832 \cdot -0{,}5$

$AB^2 = 1.193 + 416$

$AB^2 = 1609$

$AB = \sqrt{1609}$

$AB = 40{,}11\ldots \to \cong 40\,m$

10

a $\boxed{h^2 = C_1^2 + C_2^2}$

b $h = \sqrt{10}$

$C_1 = C_2 = C = ?$

$(\sqrt{10})^2 = C^2 + C^2$

$10 = 2C^2$

$C^2 = 10/2$

$C = \sqrt{5}$

$C = 2{,}24\,m$

c $H = \frac{2{,}24}{6}$

$H = 0{,}37\,m$

letra a.

Figura 78 – Teste resolvido pelo aluno 2, página 1.

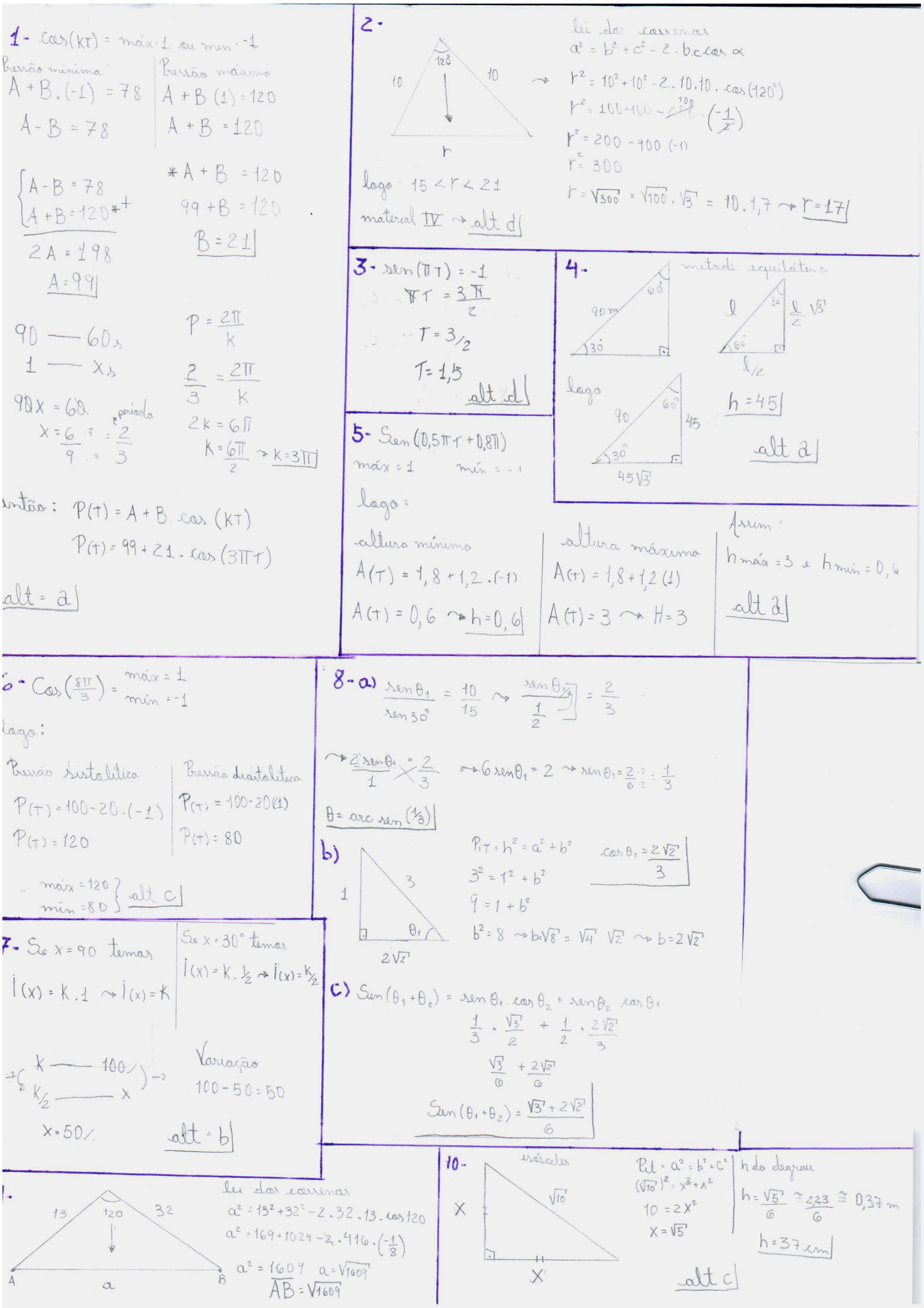
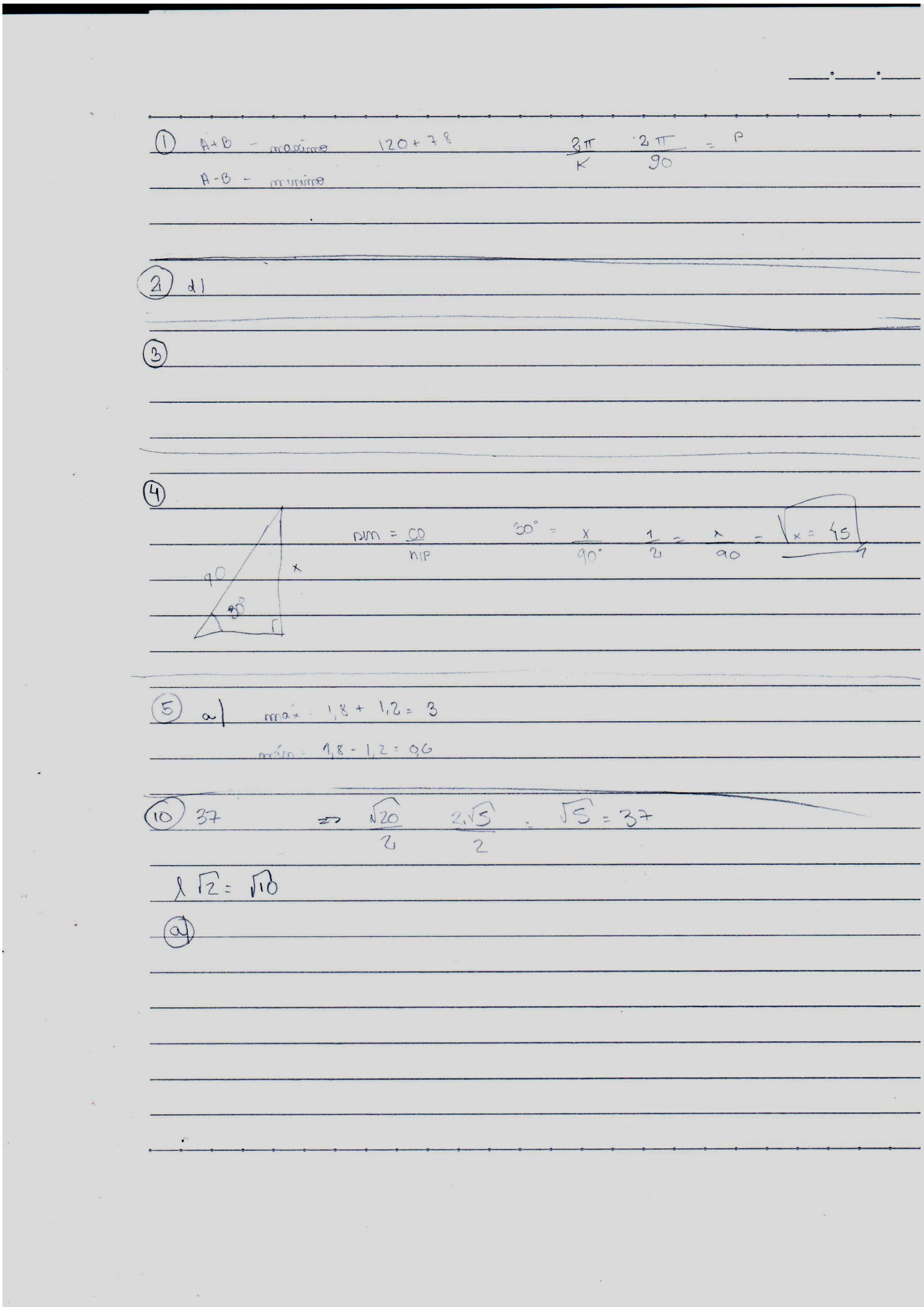


Figura 79 – Teste resolvido pelo aluno 3, página 1.



Observações Finais: Muitos alunos optaram por não entregar o teste proposto. Ao final do teste alguns alunos procuraram a docente para comentar sobre o teste. Os comentários foram positivos de modo geral, por exemplo o aluno 2 comentou que na prova do ENEM não havia conseguido resolver algumas questões, como a proposta no teste acima, mas que durante a resolução do mesmo se sentiu mais tranquilo e pode resolvê-lo de maneira mais simples e clara.

O gráfico acima mostra que alguns alunos ainda tiveram grande dificuldades em algumas questões.

Após o teste concluímos que o trabalho com questões de vestibulares e ENEM na sala de aula é de grande importância para o bom desempenho dos alunos nestes exames. Proporciona a eles mais segurança e confiança. Vale ressaltar ainda que uma grande dificuldade apresentada por vários alunos é na interpretação do texto da questão, principalmente nas questões do ENEM onde o enunciado das questões são longos. Durante o teste enfatizamos a importância da leitura das questões o que viabilizou a interpretação correta do aluno e assim sua resolução pelo mesmo.

REFERÊNCIAS

COLIBRI INFORMáTICA LTDA. Disponível em: <https://www.sprweb.com.br/mod_app/index.php>. Acesso em: 21/01/2018. Citado na página 71.

COSTA, C. L. D. **A UTILIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Maceió, 2016. Citado na página 26.

COSTA, N. M. L. da. **A história da Trigonometria**. Dissertação (Mestrado) — PUC, São Paulo. Citado na página 25.

EQUIPE VIRTUOUS. Disponível em: <http://www.sofisica.com.br/>. Acesso em: 21/01/2018. Citado na página 71.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar - Trigonometria**. São Paulo: Atual Editora, 1985. Citado na página 26.

KRIKORIAN, G. K. e J. **Objetivo - Sistemas de Métodos de Aprendizagem - Trigonometria**. São Paulo: CERED, 1987. Citado na página 26.

OLIVEIRA, J. de. **TÓPICOS SELECIONADOS DE TRIGONOMETRIA E SUA HISTÓRIA**. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010. Citado na página 26.

OLIVEIRA, J. E. M. de. **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013. Citado na página 71.

REDE OMNIA. Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/>. Acesso em: 21/01/2018. Citado na página 71.

REIS, F. dos. **Uma visão geral da Trigonometria:História, Conceitos e Aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa - Setor de Ciências Exatas e Naturais, Ponta Grossa, 2016. Citado na página 26.

ROSSI, S. da S. Funções trigonométricas e os sons musicais. **www.diaadiaeducacao.pr.gov.br**, p. 15–16, 2008. Citado na página 71.

SILVA, B. C. da. **Poliedro Sistema de Ensino**. São José dos Campos: Editora Poliedro, 2017. Citado na página 26.

XAVIER, A. B. **O uso de materiais concretos para o ensino da trigonometria**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 45.

ICMC USP
SÃO CARLOS