Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Máximos e mínimos no Ensino Básico: uma abordagem utilizando a Otimização Linear e Não-Linear

Emídio Rodrigues Silva

Orientador: Prof. Dr. Luiz Leduíno de Salles Neto

São José dos Campos

Maio, 2018

PROFMAT

Título: *Máximos e mínimos no Ensino Básico: uma abordagem utilizando a Otimização Linear e Não-Linear*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, Campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Maio, 2018

Rodrigues Silva, Emídio

Máximos e mínimos no Ensino Básico: uma abordagem utilizando a Otimização Linear e Não-Linear, Emídio Rodrigues Silva – São José dos Campos, 2018.

viii, 102f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Maximum and minimum levels in Basic Education: an approach using Linear and Non-Linear Optimization

1. Máximos. 2. Mínimos. 3. Otimização. 4. Modelagem na Educação.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

EMÍDIO RODRIGUES SILVA

MÁXIMOS E MÍNIMOS NO ENSINO BÁSICO: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO A OTIMIZAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR

Presidente da banca: Prof. Dr. Luiz Leduíno de Salles Neto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luís Felipe Cesar da Rocha Bueno

Prof. Dr. Michael Macedo Diniz

Prof. Dr. Thadeu Alves Senne

Data da Defesa: 08 de junho de 2018

"Não basta termos um bom espírito. O mais importante é aplicá-lo bem."
René Descartes

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus autor de todas as coisa.

Agradeço aos colegas do PROFMAT, que nestes dois anos em que estivemos juntos me apoiaram e incentivaram, aos professores do curso que transmitiram além de um grande conhecimento, suas experiências tanto na docência quanto da vida acadêmica.

Agradeço também ao Prof. Dr. Luiz Leduíno de Salles Neto, que aceitou me orientar neste trabalho, a CAPES pelo auxilio financeiro e a todos os funcionários da UNIFESP - São José dos Campos.

E especialmente agradeço aos meus pais que sempre foram grandes incentivadores, e a minha amada esposa Jéssica, pela compreensão e dedicação durante todo este processo.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo propor uma abordagem para os conteúdos do Ensino Básico em que se apresentam os conceitos de máximos e mínimos, proporcionando ao aluno uma visão da Otimização. Primeiramente, foi levantado, segundo o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, os temas que tratam de máximos e mínimos e explanados na forma como são trabalhados nessa etapa do ensino, tomando como referência autores de literaturas comumente usadas no Ensino Fundamental - anos finais e no Ensino Médio. Em seguida, desenvolve-se o conceito de Modelagem Matemática, aborda-se a Otimização Linear e suas resoluções gráficas e analíticas, e apresenta-se a Otimização Não-Linear. Por fim, sugerem-se planos de aulas, com foco nos assuntos levantados, que podem ser aplicadas no decorrer do Ensino Básico a fim de elucidar a Otimização sempre de forma contextualizada, buscando aproximar o tema da realidade do educando.

Palavras-chave: 1. Máximos. 2. Mínimos. 3. Otimização. 4. Modelagem na Educação.

ABSTRACT

This work aims to propose an approach to the contents of Basic Education in which the concepts of maximum and minimum are presented, giving the student a vision of Optimization. Firstly, according to the Official Curriculum of the State of São Paulo, the themes that deal with maxima and minima and explanations in the way they are worked out in this stage of education are taken, taking as reference authors of literatures commonly used in Elementary School - final years and in High School. Then, the concept of Mathematical Modeling is developed, Linear Optimization and its graphical and analytical resolutions are discussed, and Nonlinear Optimization is presented. Finally, lesson plans are suggested, focusing on the subjects raised, which can be applied during the Basic Education in order to elucidate the Optimization always in a contextualized way, seeking to bring the subject closer to the reality of the student.

Keywords: 1. Maxima. 2. Minima. 3. Optimization. 4. Modeling in Education.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma proposta de utilização da Otimização Linear e Não-Linear em alguns tópicos da Matemática do Ensino Básico. Apresentaremos os conteúdos do Ensino Básico, selecionaremos alguns deles para apresentar uma proposta de trabalho, sempre visando o Ensino Fundamental II - anos finais e também o Ensino Médio.

O Ensino Básico no Brasil é dividido em três etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. O Ensino Fundamental é subdividido em dois: Ensino Fundamental I (anos iniciais) e Ensino Fundamental II (anos finais). Este trabalho focará nos Ensinos Fundamental II e Médio.

Segundo a BNCC [3], Base Nacional Comum Curricular, o Ensino Fundamental é o período mais longo da educação básica. Os estudantes iniciam o primeiro ano com a idade de 6 anos e finalizam o 9º ano com idades entre 14 e 15 anos, e passam por várias mudanças nos campos físico, cognitivo, afetivo, social e emocional. No Ensino Fundamental II, onde acontece a transição da fase infantil para a adolescência, essas mudanças são mais evidentes e impõem desafios à elaboração de currículos, planos de ensino e atividades, para essa etapa de escolarização. A BNCC [3] diz ainda que:

> Neste período da vida, ampliam-se os vínculos sociais e os laços afetivos, as possibilidades intelectuais e a capacidade de raciocínios mais abstratos. Os estudantes tornam-se mais capazes de ver e avaliar os fatos pelo ponto de vista do outro.

Assim, o professor, mesmo que indiretamente, irá contribuir com o projeto de vida destes alunos, estabelecendo uma articulação entre os desejos do educando em relação ao seu futuro, com a continuidade dos estudos e o seu desenvolvimento pessoal e social.

Em relação ao Ensino Médio, a BNCC - Ensino Médio [4] diz que um dos grandes desafios do Ensino Médio na atualidade é o de garantir a aprendizagem dos estudantes, respondendo às suas aspirações presentes e futuras. As Diretrizes Curriculares Nacionais [5] nos mostra que o Ensino Médio deve trabalhar com a perspectiva de que, ao possibilitar o acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho a um grande número de adolescentes e jovens, isso pode ampliar as condições de inclusão social destes estudantes.

A BNCC - Ensino Médio [4] também aponta que:

> Em lugar de pretender que os jovens apenas aprendam o que já sabemos, o mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos sociais, produtivos, ambientais e culturais. Desse modo, a escola os convoca a assumir responsabilidades para equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores, valorizando o esforço dos que os precederam e abrindo-se criativamente para o novo.

Assim, com o intuito de propor ao leitor deste trabalho uma alternativa de contextualização de alguns assuntos em que os estudantes brasileiros necessitam de adquirirem as competências e habilidades discriminadas tanto nos documentos nacionais que norteiam a educação, como a BNCC [3], a BNCC - Ensino Médio [4], as Diretrizes Curriculares Nacionais [5], quanto também em documentos estaduais, como o que abordamos neste trabalho, o Currículo do Estado de São Paulo Matemática e sua Tecnologias [20]. Trazemos uma rápida abordagem dos temas selecionados, buscando mostrar a forma como são desenvolvidos na etapa do ensino em que estão inseridos, e propomos sugestões de aulas que irão tratar os temas com uma abordagem direta ou indiretamente ligada ao conceito de Otimização, que permite ao educador contextualizar os assuntos a ele inerentes de forma prática e diretamente conectada com o que os alunos possam encontrar caso continuem seus estudos em um curso de graduação inserido no contexto das Ciências Exatas e/ou Tecnológicas.

1 MÁXIMOS E MÍNIMOS NO ENSINO BÁSICO

O ensino da Matemática é de fundamental importância para o individuo compreender a sociedade em que está inserido. O Currículo Oficial do Estado de São Paulo [20] nos traz que:

> Em todas as épocas, em todas as culturas, a Matemática e a língua materna constituem dois componentes básicos dos currículos escolares. Tal fato era traduzido, em tempos antigos, pela tríplice caracterização da função da escola como o lugar em que se devia aprender a "ler, escrever e contar", o que significava, sinteticamente, uma dupla "alfabetização", no universo das letras e dos números.

Mas esta alfabetização no universo dos números precisa trazer significado ao estudante, para isso, utiliza-se a contextualização, ou seja, abordar o assunto a ser trabalhado em um contexto que seja de fácil percepção ao educando. Na BNCC [3], é dito que:

> ...é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da Matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência.

Com o objetivo de propor uma intervenção utilizando os conceitos de Otimização, e tendo como base o Currículo Oficial do Estado de São Paulo [20], levantaremos os assuntos do Ensino Básico onde os conceitos de máximo e mínimo podem ser trabalhados de forma contextualizada, proporcionando maior significado ao estudante.

1.1 ENSINO FUNDAMENTAL II - ANOS FINAIS

A BNCC [3] nos diz que o conhecimento matemático é extremamente importante para todos os alunos da educação básica, tanto por sua vasta aplicação na sociedade, quanto por sua importância na formação de cidadãos críticos e cientes de suas responsabilidades. Voltada para as habilidades e competências na área da Matemática a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental II – Anos Finais, a BNCC [3] propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, para orientarem a formulação de habilidades que serão desenvolvidas durante o Ensino Fundamental. A unidade **Números**, que tem a finalidade de desenvolver o pensamento numérico, maneiras de quantificar características de objetos, de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. A unidade **Álgebra** tem a finalidade de desenvolver um tipo característico de pensamento, o pensamento algébrico, fundamental para utilização de modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas entre grandezas e de estruturas matemáticas, utilizando letras e outros símbolos. A unidade **Geometria**, que envolve um grande conjunto de conceitos e procedimentos para compreender problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Nessa unidade temática, para ampliar e desenvolver o pensamento geométrico dos alunos, deve-se estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais. A unidade temática **Grandezas e medidas** propõe o estudo das relações métricas, para favorecer a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências ou Geografia. Contribui também para a ampliação da noção de número e a construção do pensamento algébrico. Por fim na unidade **Probabilidade e estatística**, são estudadas a incerteza e o tratamento de dados, aborda conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações do cotidiano, das ciências e da tecnologia, desenvolve a capacidade de fazer julgamentos e tomar as decisões fundamentadas através de coleta, organização, representação, interpretação e análise de dados em diferentes contextos e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos.

O Currículo Oficial do Estado de São Paulo [20] indica os conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos nos anos finais (6º ao 9º) do Ensino Fundamental. Dentre os temas propostos pelo currículo, selecionamos os que serão abordados neste trabalho.

1.1.1 *Conteúdos de Matemática Ensino Fundamental - Anos Finais*

As Tabelas 1 e 2 apresentam os conteúdos a serem desenvolvidos no Ensino Fundamental - Anos finais propostos pelo Currículo Oficial do Estado de São Paulo [20].

6º ano	7º ano
Números	**Números**
Números naturais	Sistemas de numeração
• Múltiplos e divisores	• Sistemas de numeração na Antiguidade
• Números primos	• O sistema posicional decimal
• Operações básicas ($+$, $-$, $\cdot$, $\div$)	
• Introdução às potências	Números negativos
	• Representação
Frações	• Operações
• Representação	
• Comparação e ordenação	Números racionais
• Operações	• Representação fracionaria e decimal
	• Operações com decimais e frações (complementos)
Números/Relações	
Números decimais	**Geometria**
• Representação	Geometria
• Transformação em fração decimal	• Ângulos
• Operações	• Polígonos
	• Circunferência
Sistemas de medida	• Simetrias
• Medidas de comprimento, massa e capacidade	• Construções geométricas
• Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade	• Poliedros
Geometria/Relações	**Relações**
Formas geométricas	Proporcionalidade
• Formas planas	• Variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais
• Formas espaciais	• Conceito de razão
	• Porcentagem
Perímetro e área	• Razões constantes na Geometria: π
• Unidades de medida	• Construção de gráficos de setores
• Perímetro de uma figura plana	• Problemas envolvendo probabilidade
• Calculo de área por composição e decomposição	
• Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas	**Números**
	Álgebra
Números/Relações	• Uso de letras para representar um valor desconhecido
Estatística	• Conceito de equação
• Leitura e construção de gráficos e tabelas	• Resolução de equações
• Média aritmética	• Equações e problemas
• Problemas de contagem	

Tabela 1: Conteúdos 6º e 7º ano do Ensino Fundamental - Anos Finais [20]

8º ano	9º ano
Números	**Números**
Números racionais	Números reais
• Transformação de decimais finitos em fração	• Conjuntos numéricos
• Dizimas periódicas e fração geratriz	• Números irracionais
	• Potenciação e radiciação em R
Potenciação	• Notação cientifica
• Propriedades para expoentes inteiros	
• Problemas de contagem	**Números/Relações**
	Álgebra
Números/Relações	• Equações de 2º grau: resolução e problemas
Expressões algébricas	
• Equivalências e transformações	Funções
• Produtos notáveis	• Noções básicas sobre função
• Fatoração algébrica	• A ideia de variação
	• Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e de 2º graus
Números/Relações	
Equações	**Geometria/Relações**
• Resolução de equações de 1º grau	Proporcionalidade na Geometria
• Sistemas de equações e resolução de problemas	• O conceito de semelhança
• Inequações de 1º grau	• Semelhança de triângulos
	• Razões trigonométricas
Gráficos	
• Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano	**Geometria/Números**
	Corpos redondos
Geometria	• O número π ; a circunferência; o círculo e suas partes; área do circulo;
Geometria	• Volume e área do cilindro
• Teorema de Tales	
• Teorema de Pitágoras	Probabilidade
• Área de polígonos	• Problemas de contagem e introdução a probabilidade
• Volume do prisma	

Tabela 2: Conteúdos 8º e 9º ano do Ensino Fundamental - Anos Finais [20]

Analisando os conteúdos descritos nas Tabelas 1 e 2, selecionamos os temas que julgamos mais relevantes para o uso do conceito de Otimização.

Apresentaremos aqui uma breve definição dos temas selecionados, e no Capítulo 3, apresentaremos uma proposta didática para tratar destes temas.

1.1.2 *Múltiplos e divisores*

No Ensino Fundamental, mais precisamente no 6º ano, o ensino de múltiplos e divisores é apresentado de maneira formal ao alunos. Nos anos anteriores, eles foram apresentados a estes conceitos, porém sem uma formalização. Nesta etapa do ensino, além da formalização do conceito de múltiplos e divisores, também são apresentados os conceitos de número primo, MMC e MDC. PINTO [18] define múltiplos e divisores conforme apresentamos na Definição 1.1

Definição 1.1. *[18] Sendo* $a, b, c \in \mathbb{N}$, *definimos que a é múltiplo de b ou de c se* $a = b \times c$*; nestas condições, os números b e c são chamados de divisores de a.*

Em outras palavras, um determinado número é dito múltiplo de outro, quando o primeiro é obtido ao se multiplicar o segundo número por um número natural. Neste contexto, os dois números que foram multiplicados e geraram o primeiro, também são ditos divisores do primeiro número.

Exemplo 1.2.

15 é múltiplo de 3, pois $3 \times 5 = 15$ *. Assim, podemos também dizer que os números 3 e 5 são divisores de 15.*

Listando Múltiplos

Os múltiplos de um número são obtidos multiplicando este número pelos naturais. Desta forma, é possível listá-los.

Exemplo 1.3.

Múltiplos do número 2: $M(2) = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots$

Exemplo 1.4.

Múltiplos do número 7: $M(7) = 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, \ldots$

Listando Divisores

Os divisores de um número natural também podem ser listados. Para escrever os divisores de um número natural, devemos nos atentar que o maior divisor de um número natural é ele mesmo, e o menor divisor de um número natural é o 1(um).

Exemplo 1.5.

Divisores do número 15: $D(15) = 1, 3, 5, 15.$

Exemplo 1.6.

Divisores do número 20: $D(20) = 1, 2, 4, 5, 10, 20.$

O aluno irá perceber que um número natural possui infinitos múltiplos e uma quantidade finita de divisores. Também perceberá que, ao listarmos os múltiplos e divisores de alguns números, existem ali números comuns.

Assim, podemos trabalhar os conceitos de **MMC** (Mínimo Múltiplo Comum) e **MDC** (Máximo Divisor Comum).

Mínimo Múltiplo Comum

PINTO [18] apresenta a seguinte definição para mínimo múltiplo comum:

Definição 1.7. *[18] Diremos que um número natural $m \neq 0$ é mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de $a, b \in \mathbb{N}$ se possuir as seguintes propriedades:*

i) m é um múltiplo comum de a e b;

ii) se c é um múltiplo comum de a e b, então $m|c$.

Ou seja, ao listarmos os múltiplos de dois números naturais distintos, perceberemos que alguns destes múltiplos apareceram nas duas listas. Estes são os múltiplos comuns aos dois números. O menor múltiplo que aparecer nas duas listas é chamado de **mínimo múltiplo comum** (o famoso ***MMC***). Como os números naturais possuem infinitos múltiplos, não é possível definir o que seria o máximo múltiplo comum.

Exemplo 1.8. .

$M(2) = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \underline{\boldsymbol{14}}, 16, \ldots$

$M(7) = 0, 7, \underline{\boldsymbol{14}}, 21, 28, 35, 42, 49, \ldots$

Podemos afirmar que o mmc entre 2 e 7 é o número 14.

Máximo Divisor Comum

Segundo PINTO [18], o máximo divisor comum pode ser definido como:

Definição 1.9. *[18] Diremos que um número natural $d \neq 0$ é um máximo divisor comum (m.d.c.) de a e b dois inteiros não conjuntamente nulos $(a \neq 0$ ou $b \neq 0)$ se possuir as seguintes propriedades:*

i) d é um divisor comum de a e de b;

ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

A condição (ii) acima pode ser re-enunciada como se segue.

ii') Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$.

Podemos dizer que, assim como nos múltiplos, ao listarmos os divisores de mais de um número natural, perceberemos que alguns números possuem divisores em comum. Como os números naturais possuem uma quantidade finita de divisores, é possível determinar o maior divisor comum, o chamado **máximo divisor comum**, o famoso ***MDC***. Como o número 1 é divisor de todo número, ele é o mínimo divisor comum de quaisquer grupos de números.

Exemplo 1.10. $D(15) = 1, 3, \underline{\boldsymbol{5}}, 15.$

$D(20) = 1, 2, 4, \underline{\boldsymbol{5}}, 10, 20.$

Podemos afirmar que o número 5 é o MDC entre 15 e 20.

1.1.3 *Perímetro de uma figura plana*

Por todos os anos do Ensino Fundamental, o aluno é levado a trabalhar e a compreender os conceitos de perímetro e área de figuras planas. Porém, ao questionarmos um aluno de Ensino Fundamental ou mesmo de Ensino Médio sobre o que é perímetro, uma das respostas mais comuns é “Perímetro é a soma dos lados da figura”. Muitos educandos tomam esta expressão como a definição de perímetro, mas esta definição pode levar a erros, pois não abrange todas as possíveis figuras planas. Uma possível definição de perímetro pode ser expressa como:

Definição 1.11. *Dada uma região plana limitada, é chamado de perímetro o comprimento da linha que delimita tal região.*

Uma forma de introduzir o conceito de perímetro aos alunos do Ensino Fundamental é relacionar o conceito com fatos cotidianos por meio de problemas.

Exemplo 1.12.

Observe a situação: O professor de Educação Física pediu ao seu aluno Josemar para se aquecer antes do treino de futebol. Para isso, Josemar se alongou e correu ao redor da quadra por 3 vezes. Tendo abaixo a representação da quadra, qual a distância que Josemar correu?

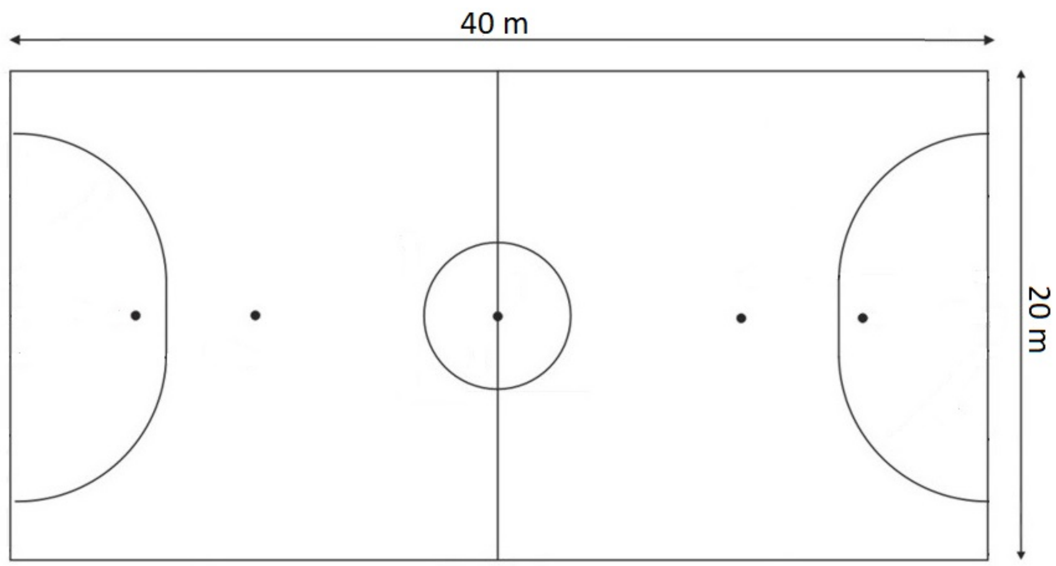


Figura 1: Dimensões de uma quadra de futsal

Para determinar a distância que Josemar correu, iremos primeiro determinar o perímetro da quadra, ou seja, determinar o comprimento do contorno da quadra. Observando a

Figura 1, percebemos que se trata de um retângulo onde dois lados têm medidas iguais a $40m$ e os outros dois lados têm medidas iguais a $20m$. Logo, o perímetro da quadra será:

$$Perímetro = 2 \times 40 + 2 \times 20$$

$$Perímetro = 80 + 40$$

$$Perímetro = 120m.$$

Como Josemar deu 3 voltas em torno da quadra, conclui-se que:

$$Distância = 3 \times perímetro$$

$$Distância = 3 \times 120$$

$$Distância = 360m$$

Assim, Josemar percorreu a distância de 360m.

1.1.4 *Área de polígonos*

Durante o 6º ano do Ensino Fundamental, também é apresentado aos alunos o conceito de área, geralmente trabalhado por composição e decomposição de figuras. Neste período, o uso de malhas quadriculadas é comumente recomendado para a melhor compreensão por parte dos alunos deste conceito. Nos anos seguintes (7º, 8º e 9º anos), este conceito é ampliado e são desenvolvidas regras para o cálculo de áreas de polígonos como triângulos, trapézios, paralelogramos, polígonos regulares e círculos. Propomos aqui uma definição para área.

Definição 1.13. *Dada uma região plana limitada, é chamada de área a medida da superfície de tal região.*

Para MUNIZ NETO [16], área pode ser definida intuitivamente como descrito na Definição 1.14 .

Definição 1.14. *[16] A área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado.*

Um exemplo de atividade introdutória para áreas pode ser observada no Exemplo 1.15:

Exemplo 1.15.

Um grande clube de futebol do estado de São Paulo alugou seu estádio para a realização de um show. Porém, para não prejudicar o gramado, serão colocadas grandes placas de metal sobre todo o gramado. As placas são quadradas de lados medindo 1 metro. Sabe-se que o campo é um retângulo de lados 80m por 105m. Quantas placas de metal serão necessárias para cobrir todo o gramado?

Para responder este problema, o aluno deverá pensar em como distribuir as placas de metal sobre o gramado, como mostra a Figura 2:

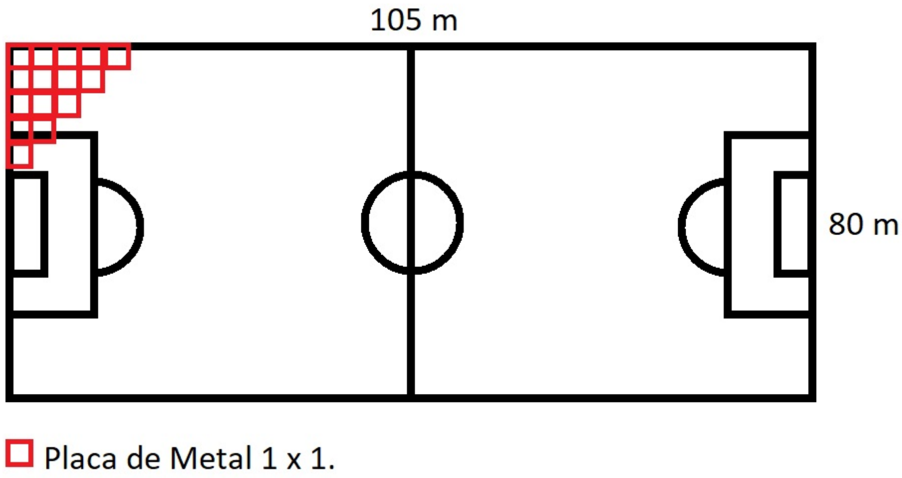


Figura 2: Campo de Futebol

Ele perceberá que em uma direção poderá preencher o campo com 80 linhas contendo 105 placas cada. Assim espera-se que o aluno conclua que ele preencherá as linhas com 105 placas 80 vezes, de modo que conclua:

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ de placas} = 80 \times 105$$

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ de placas} = 8400.$$

Logo, são necessárias 8400 placas de metal para cobrir todo o gramado.

Pode-se, com este exemplo, introduzir o conceito de área, e aproveitar para mostrar ao aluno que cada placa de metal é um quadrado de lado 1m, ou seja, ocupa uma área de 1 m^2, o que nos leva a concluir que a área do campo de futebol é de $8400m^2$.

1.2 ENSINO MÉDIO

Durante o Ensino Médio, a BNCC - Ensino Médio [4] na área de Matemática propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental. Com essa finalidade, apresenta 5 competências específicas para esse aprofundamento:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
> 2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas

e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O Currículo Oficial do Estado de São Paulo [20] indica os conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos no Ensino Médio. Dentre os temas propostos pelo currículo, selecionamos os que serão abordados neste trabalho.

1.2.1 *Conteúdos de Matemática do Ensino Médio*

As Tabelas 3 e 4 apresentam os conteúdos a serem desenvolvidos no Ensino Médio, propostos pelo Currículo Oficial do Estado de São Paulo [20].

1º Ano	**2º Ano**	**3º Ano**
Números	**Relações**	**Geometria/Relações**
Números e sequências	*Trigonometria*	*Geometria analítica*
• Conjuntos numéricos	• Fenômenos periódicos	• Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos
• Regularidades numéricas: sequências	• Funções trigonométricas	• Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares
• Progressões aritméticas e progressões geométricas	• Equações e inequações	• Ponto e reta: distância
	• Adição de arcos	• Circunferência: equação
Relações		• Reta e circunferência: posições relativas
Funções	**Números/Relações**	• Cônicas: noções, equações, aplicações
• Relação entre duas grandezas	*Matrizes, determinantes e sistemas lineares*	**Números**
• Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado	• Matrizes: significado como tabelas, características e operações	*Equações algébricas e números complexos*
• Função de 1º grau	• A noção de determinante de uma matriz quadrada	• Equações polinomiais
• Função de 2º grau	• Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento	• Números complexos: operações e representação geométrica
		• Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial
		• Relações de Girard

Tabela 3: Conteúdos do Ensino Médio - 1º e 2º bimestre [20]

1º Ano	**2º Ano**	**3º Ano**
Relações	**Números**	**Relações**
Funções exponencial e logarítmica	*Análise combinatória e probabilidade*	*Estudo das funções*
• Crescimento exponencial	• Princípios multiplicativo e aditivo	• Qualidades das funções
• Função exponencial: equações e inequações	• Probabilidade simples	• Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais
• Logaritmos: definição e propriedades	• Arranjos, combinações e permutações	• Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação
• Função logarítmica: equações e inequações	• Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos	• Composição: translações e reflexões
	• Probabilidade condicional	• Inversão
Geometria/Relações	• Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o binômio de Newton	
Geometria-Trigonometria		**Números/Relações**
• Razões trigonométricas nos triângulos retângulos	**Geometria**	*Estatística*
• Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies	*Geometria métrica espacial*	• Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos
• Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos	• Elementos de geometria de posição	• Medidas de tendência central: média, mediana e moda
	• Poliedros, prismas e pirâmides	• Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão
	• Cilindros, cones e esferas	• Elementos de amostragem

Tabela 4: Conteúdos do Ensino Médio - 3º e 4º bimestre [20]

Observando as Tabelas 3 e 4, selecionamos os conteúdos que julgamos relevantes para aplicarmos os conceitos de Otimização. Apresentaremos aqui uma breve definição dos temas selecionados. Já no Capítulo 3, apresentaremos uma proposta didática para tratar estes temas com uma visão voltada para a Otimização.

1.2.2 *Funções Quadráticas*

Uma função polinomial do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, é dita *função quadrática* ou *função polinomial do 2º grau*. No 9º ano do Ensino Fundamental, os alunos são apresentados a este tipo de função, mas é no Ensino Médio que tal conceito é aprofundado. Segundo GIOVANI [8], a função quadrática pode ser definida como mostrado na Definição 1.16.

Definição 1.16. *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, denomina-se função polinomial do segundo grau ou função quadrática.*

Para LIMA [14], a terminologia "função do segundo grau", não é adequada, já que o que possui grau é o polinômio e não a função. Porém, grande parte da literatura utilizada no Ensino Básico, utiliza as duas terminologias, funções quadráticas ou funções polinomiais do segundo grau.

Uma maneira que muitos autores utilizam para introduzir a função quadrática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, é por meio de problemas introdutórios. A problematização ajuda o aluno a pensar sobre o tema e propor soluções. O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo [20] diz que a problematização é uma estratégia muito fecunda, pois propõe que perguntas de diferentes contextos sejam reescritas na forma de equações a serem resolvidas.

IEZZI[11] propõe o problema que apresentamos no Exemplo 1.17 para introduzir o conceito de Função Quadrática.

Exemplo 1.17.

Um clube esportivo construiu uma quadra de vôlei com 12m de comprimento por 6m de largura e, para acomodar juízes e reservas, deixou uma faixa de 3m entre a quadra e a cerca. Qual é a área do terreno limitado pela cerca?

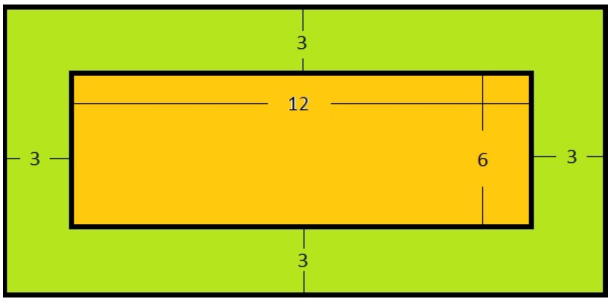


Figura 3: Área da quadra

A área da região cercada é:

$$(12 + 2 \cdot 3)(6 + 2 \cdot 3) = 216m^2$$

Se a largura da faixa fosse $3,5m$, a área da região cerada seria:

$$(12 + 2 \cdot 3.5)(6 + 2 \cdot 3,5) = 247m^2$$

Enfim, para cada largura x escolhida para a faixa há uma área $A(x)$ da região cercada.

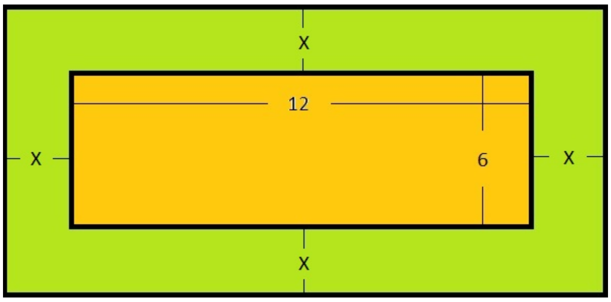


Figura 4: Área da quadra, sem largura definida

O valor de $A(x)$ é uma função de x. Procuremos a lei que expressa $A(x)$ em função de x.

$$A(x) = (12 + 2x)(6 + 2x)$$
$$A(x) = 72 + 12x + 24x + 4x^2$$
$$A(x) = 4x^2 + 36x + 72.$$

*Esse é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**.*

Gráfico da Função Quadrática

Toda função quadrática tem como representação gráfica uma parábola

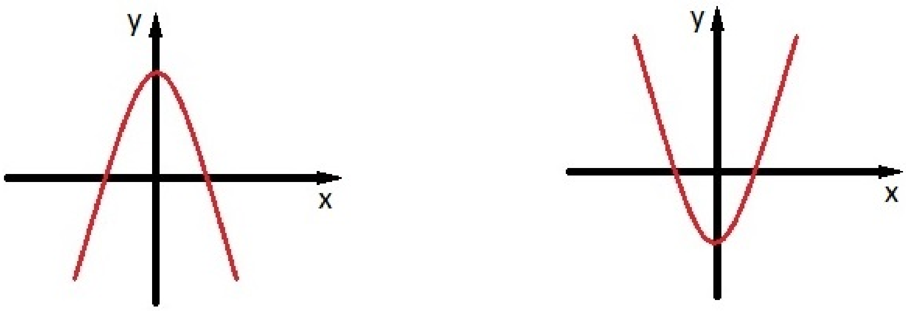


Figura 5: Gráfico da função quadrática (Parábola).

Conforme os valores dos coeficientes a, b e c da função quadrática, define-se a posição da parábola no gráfico, o coeficiente a determina se a parábola terá concavidade para cima ou para baixo, também determina a "abertura" da parábola. O coeficiente b desloca a parábola sobre o ponto $(0, c)$. O coeficiente c desloca a parábola em relação ao eixo das ordenadas.

Para representarmos a parábola em um sistema de eixos cartesianos, é importante determinarmos alguns pontos que ajudam a determinar a curva. Estes pontos são apresentados na Figura 6.

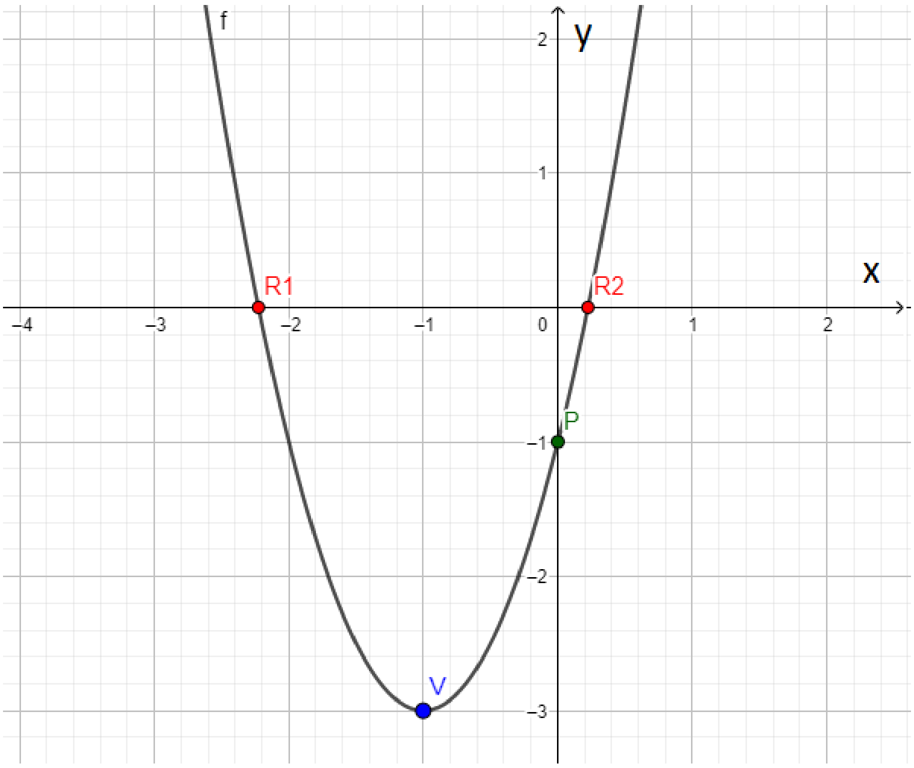


Figura 6: Pontos de destaque da parábola

Observando a Figura 6, os pontos em destaque são fundamentais para interpretar a função, sendo:

- $R1$ e $R2$ os zeros da função, em outras palavras, os pontos onde a função intercepta o eixo das abscissas.
- P o ponto onde a função intercepta o eixo das ordenadas.
- V o vértice da função, que é o ponto onde a função atinge seu valor máximo ou mínimo.

Zeros de uma Função Quadrática

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função determinada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Os zeros da função são os pontos onde a curva corta o eixo das abscissas. Para determiná-los, basta calcularmos os pontos onde $f(x) = 0$, ou seja, determinar as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Para determinarmos os zeros da função quadrática, utilizaremos a fórmula de resolução de equação do 2º grau

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Assim, os zeros da função serão: $\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$.

A função f terá zeros, conforme as raízes da equação $f(x) = 0$, que poderá ter duas raízes reais e distintas, duas raízes reais e iguais ou não ter raízes reais. Podemos concluir esses resultados ao determinarmos o valor do discriminante Δ.

- se $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais e distintas.
- se $\Delta = 0$, a equação terá duas raízes reais e iguais.
- se $\Delta < 0$, a equação não terá raízes reais.

Desta forma, as raízes da equação, são as abscissas dos zeros da função.

Ponto de intersecção da função com o eixo das ordenadas

Toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, intercepta o eixo das ordenadas no pondo de abscissa 0.

Assim, para conhecermos este ponto, basta determinarmos $f(0)$.

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow f(0) = c.$$

Logo, toda função quadrática interceptará o eixo das abscissas no ponto $(0, c)$.

Vértice do gráfico de uma função quadrática

O vértice do gráfico de uma função quadrática é o ponto em que a função atinge o valor máximo ou mínimo, dependendo do valor do coeficiente a:

- se $a > 0$, a parábola terá a concavidade voltada para cima e possuirá um ponto de mínimo.
- se $a < 0$, a parábola terá a concavidade voltada para baixo e possuirá um ponto de máximo.

Para determinar este ponto, devemos nos atentar ao fato de que a parábola é simétrica à reta que passa pelo vértice e é perpendicular ao eixo das abscissas. Na Figura 7, podemos ver o eixo de simetria de uma parábola, e percebemos que os zeros da função estão a uma mesma distância do eixo de simetria e, que para qualquer ponto que se tome na função, teremos um outro ponto equidistante ao eixo de simetria.

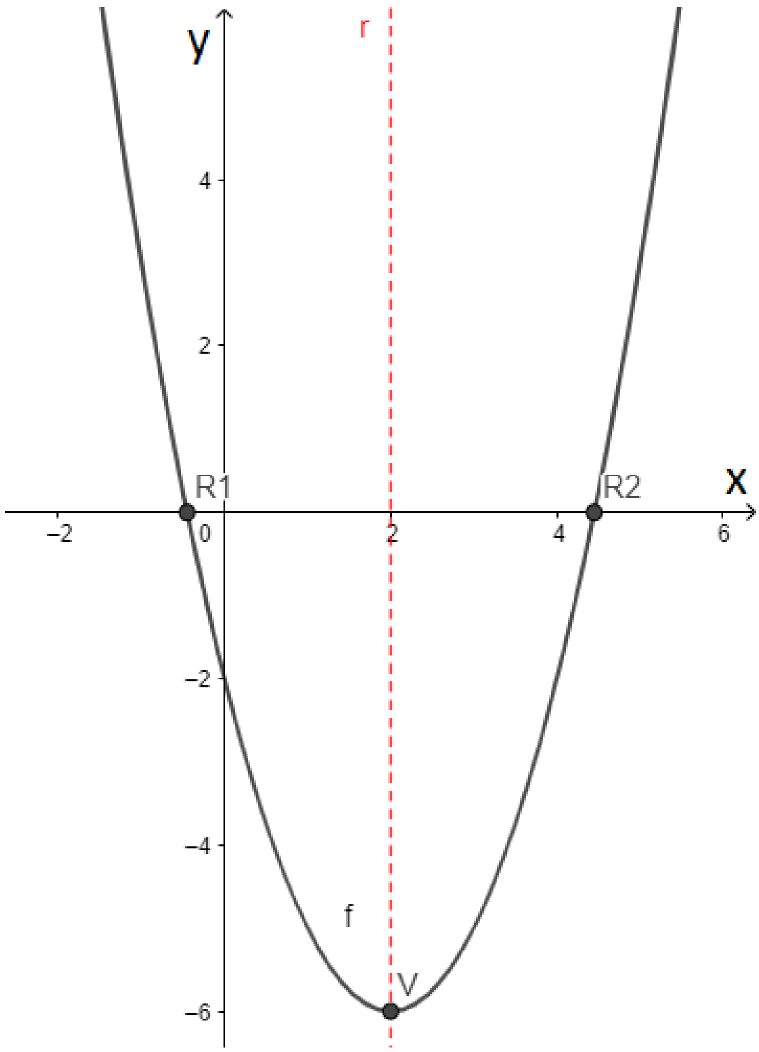


Figura 7: Eixo de simetria da parábola

O ponto V , vértice do gráfico da função, pertence à reta que determina o eixo de simetria. Assim, para determinarmos a abscissa do ponto V, que chamaremos de x_v, tomaremos a média das abscissas dos zeros da função. Desta forma,

$$x_v = \frac{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{-b}{a} \cdot \frac{1}{2}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}.$$

Para determinarmos a ordenada do ponto V, que chamaremos de y_v, iremos determinar o valor de $f(x_v)$. Assim:

$$y_v = f(x_v)$$

$$
\begin{aligned}
y_v &= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \\
y_v &= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\
y_v &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
y_v &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\
y_v &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
y_v &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
y_v &= -\frac{\Delta}{4a}.
\end{aligned}
$$

Logo, o vértice de uma parábola pode ser calculado da seguinte forma:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

1.2.3 *Funções trigonométricas*

Antes de apresentarmos as funções trigonométricas, vamos apresentar a ideia de funções periódicas. Em nosso cotidiano, é comum observarmos fenômenos que ocorrem de tempos em tempos, ou seja, que ocorrem com certa periodicidade, como as fases da lua, a altura das marés, os dias da semana, as estações do ano, eclipses, entre tantos outros exemplos. Na Matemática, ao estudarmos as funções, nos deparamos com funções que também são periódicas. Vejamos o Exemplo 1.18, proposto por IEZZI [11]:

Exemplo 1.18. *[11]*

Seja a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = (-1)^x$. Observe na tabela alguns valores que f assume à medida que x varia em $\mathbb{N}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	...
$f(x)$	1	-1	1	-1	1	-1	1	...

Tabela 5: Valores da função $f(x) = (-1)^x$

Não é difícil perceber que se x é par $f(x) = 1$ e se x é impar $f(x) = -1$.

Também percebemos que $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = \dots$ e que $f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = \dots$

Nos dois casos, quando x varia por duas unidades, o valor de $f(x)$ se repete, desta forma: $f(x) = f(x+2) = f(x+4) = f(x+6) = \ldots$

O menor valor positivo para o qual os valores se repetem é 2. Dizemos então que o período dessa função é 2.

Observe o gráfico:

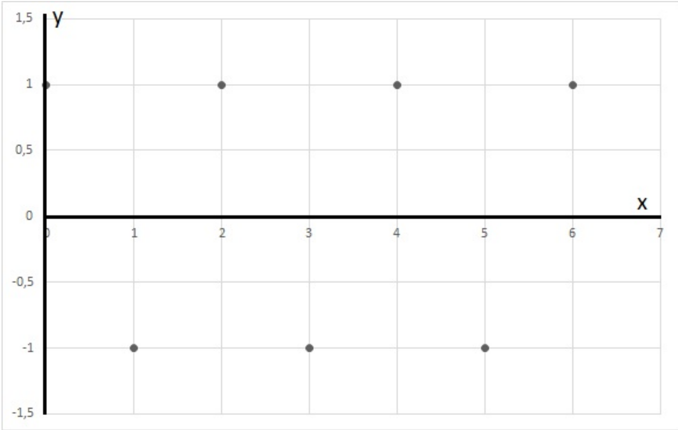


Figura 8: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = (-1)^x$

Funções como a do Exemplo 1.18, são ditas *periódicas*, e IEZZI [11] as define da seguinte forma:

Definição 1.19. *[11] Uma função $f : A \to B$ é periódica se existir um número real positivo $\boldsymbol{p}$ tal que:*

$$f(x) = f(x+p), \forall x \in A.$$

O menor valor positivo de $\boldsymbol{p}$ é chamado de período de f.

Algumas das funções periódicas mais utilizadas são as funções trigonométricas. Apresentaremos aqui apenas as três funções trigonométricas que são estudadas no Ensino Médio: a função seno, a função cosseno e a função tangente. A fim de facilitarmos nosso entendimento das funções trigonométricas, mostraremos, na Figura 9, a circunferência trigonométrica [1] , onde podemos observar alguns valores do seno, do cosseno e da tangente.

[1] Figura 9 disponível em: http://digitalview.orgfree.com/ctrigo/files/2.html

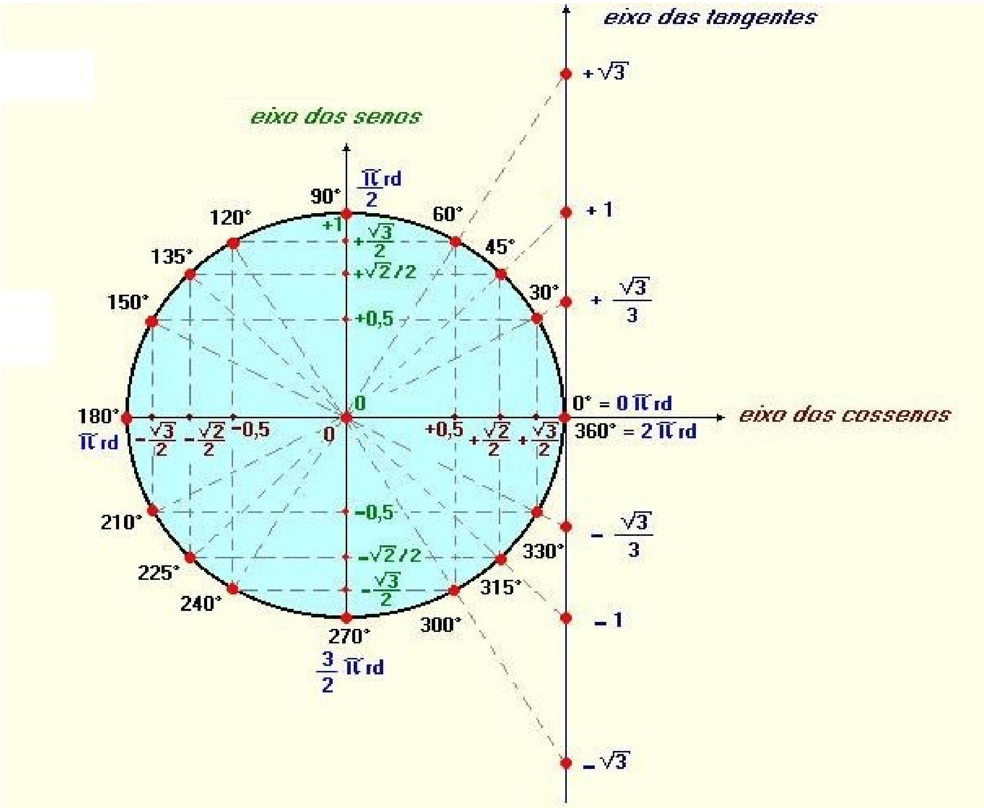


Figura 9: Circunferência trigonométrica

Funções Seno

Definição 1.20. *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$ são ditas funções seno.*

Iremos, primeiramente, conhecer a função seno básica com $a = 0, b = 1, c = 1$ e $d = 0$. Neste caso, $f(x) = sen(x)$. Transpondo os valores da Figura 9 para a Tabela 6, temos:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Tabela 6: Valores da função $y = sen(x)$.

Com os dados da Tabela 6, podemos plotar o gráfico da função seno básica.

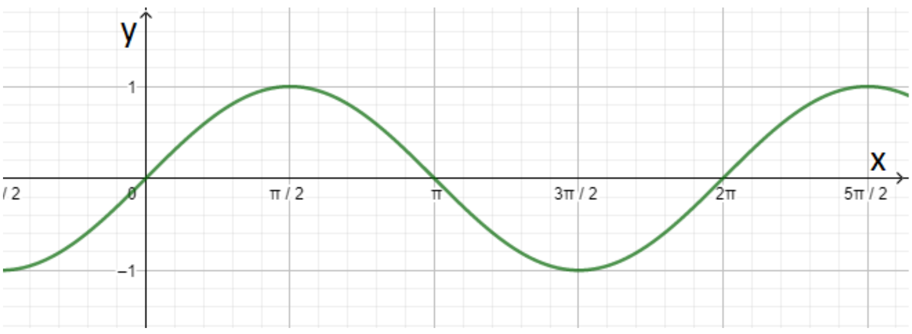


Figura 10: Função Seno Básica.

A curva apresentada na Figura 10 é chamada de senoide. Perceba que o período da função é 2π, o domínio e o contradomínio da função são os reais ($\mathbb{R}$). Porém a imagem desta função é o intervalo $[-1, 1]$. Isso pode ser notado, pois a imagem da função é o seno de um determinado ângulo, e sabe-se que o maior valor do seno é 1 e o menor valor do seno é -1.

Observe, agora, a função $f(x) = a + b \cdot sen(x)$. Vamos determinar os seus valores máximo e mínimo. Como podemos perceber na Figura 10, a função atinge seu valor mínimo em $\dfrac{3\pi}{2}$ e para toda abscissa que seja da forma: $\dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, e atinge seu valor máximo em $\dfrac{\pi}{2}$ e para toda abscissa que seja da forma: $\dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

O valor mínimo de $f(x) = a + b \cdot sen(x)$ será atingido para $x = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, pois $sen\left(\dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma,

$$f(\tfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi) = a + b \cdot sen(\tfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi)$$

$$f(\tfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi) = a + b \cdot (-1)$$

$$f(\tfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi) = a - b.$$

Logo o valor mínimo de uma função seno é dado por $a - b$.

O valor máximo de $f(x) = a + b \cdot sen(x)$ será atingido para $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, pois $sen\left(\dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = 1$

Dessa forma,

$$f(\tfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi) = a + b \cdot sen(\tfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi)$$

$$f(\tfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi) = a + b \cdot (1)$$

$$f(\tfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi) = a + b$$

Logo o valor máximo de uma função seno é dado por $a + b$.

Dessa forma, podemos afirmar que o conjunto imagem de uma função seno é:

$$Im = [a - b, a + b].$$

Observemos, agora, o período da função seno. Para determinarmos o período da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$, tomemos $cx + d = \alpha$. Para que $sen(\alpha)$ complete um período, é preciso que α varie entre 0 e 2π. Logo:

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq cx + d \leq 2\pi \Leftrightarrow -d \leq cx \leq -d + 2\pi$$

Observe agora as duas possibilidades para c, $c > 0$ e $c < 0$:

- se $c > 0$, temos que: $-\frac{d}{c} \leq x \leq \frac{-d+2\pi}{c}$, portanto $x \in [-\frac{d}{c}, \frac{-d+2\pi}{c}]$ e o período p é dado por: $\frac{-d+2\pi}{c} - (-\frac{d}{c}) = \frac{2\pi}{c}$.
- se $c < 0$, temos que: $-\frac{d}{c} \geq x \geq \frac{-d+2\pi}{c}$, portanto $x \in [\frac{-d+2\pi}{c}, -\frac{d}{c}]$ e o período p é dado por: $-\frac{d}{c} - (\frac{-d+2\pi}{c}) = -\frac{2\pi}{c}$.

Assim, o período p de uma função definida por $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$ é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{|c|}.$$

Funções Cosseno

Definição 1.21. *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$ são ditas funções cosseno.*

Como vimos para a função seno, primeiro iremos conhecer a função cosseno básica com $a = 0, b = 1, c = 1$ e $d = 0$. Assim, $f(x) = cos(x)$. Transpondo os valores da Figura 9 para a Tabela 7 temos:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Tabela 7: Valores da função $y = cos(x)$.

Com os dados da Tabela 7, podemos plotar o gráfico da função cosseno básica.

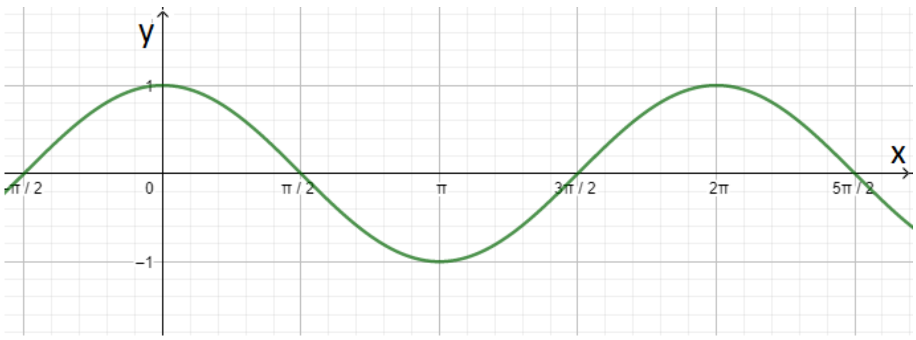


Figura 11: Função Cosseno Básica

A curva apresentada na Figura 11 é chamada de cossenoide. Note que o período da função é 2π, o domínio e o contradomínio da função são os reais ($\mathbb{R}$). Porém, a imagem desta função é o intervalo $[-1, 1]$. Isso pode ser notado, pois a imagem da função é o cosseno de um determinado ângulo, e sabe-se que o maior valor do cosseno é 1 e o menor valor do cosseno é -1.

Observe, agora, a função $f(x) = a + b \cdot cos(x)$. Vamos determinar os seus valores máximo e mínimo. Como podemos perceber na Figura 11, a função atinge seu valor mínimo em π e para toda abscissa que seja da forma: $\pi + k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, e atinge seu valor máximo em 0 e para toda abscissa que seja da forma: $0 + k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

O valor mínimo de $f(x) = a + b \cdot cos(x)$ será atingido para $x = \pi + k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, pois $cos(\pi + k \cdot 2\pi) = -1$.

Dessa forma,

$$f(\pi + k \cdot 2\pi) = a + b \cdot cos(\pi + k \cdot 2\pi)$$

$$f(\pi + k \cdot 2\pi) = a + b \cdot (-1)$$

$$f(\pi + k \cdot 2\pi) = a - b.$$

Logo o valor mínimo de uma função cosseno é dado por $a - b$.

O valor máximo de $f(x) = a + b \cdot cos(x)$ será atingido para $x = 0 + k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, pois $cos(0 + k \cdot 2\pi) = 1$.

Dessa forma,

$$f(0 + k \cdot 2\pi) = a + b \cdot cos(0 + k \cdot 2\pi)$$

$$f(0 + k \cdot 2\pi) = a + b \cdot (1)$$

$$f(0 + k \cdot 2\pi) = a + b.$$

Logo o valor máximo de uma função cosseno é dado por $a + b$.

Dessa forma, podemos afirmar que o conjunto imagem de uma função cosseno é:

$$Im = [a - b, a + b].$$

Observemos que, para o período da função cosseno, podemos utilizar o mesmo cálculo já feito para a função seno, pois, em ambos os casos, tomaremos $cx + d = \alpha$. Para que $cos(\alpha)$ complete um período, é preciso que α varie entre 0 e 2π. Logo, de forma análoga ao que fizemos para a função seno, concluímos que o período p da função cosseno é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{|c|}$$

Funções Tangente

Definição 1.22. *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a + b \cdot tg(cx + d)$, são ditas funções tangente.*

Assim como nas funções seno e cosseno, vamos determinar a função tangente básica, com $a = 0, b = 1, c = 1$ e $d = 0$, que é dada por: $f(x) = tg(x)$. Vamos observar os valores dados na Figura 9, e montar a Tabela 8.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Tabela 8: Valores da função $y = tg(x)$.

Com os valores obtidos na Tabela 8, podemos plotar o gráfico da função tangente básica.

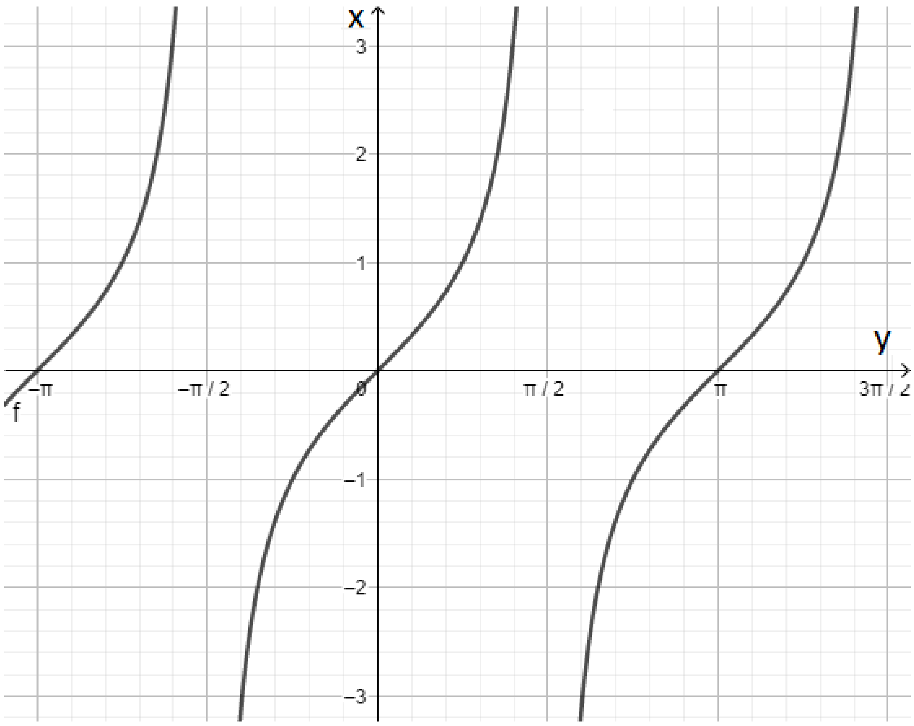


Figura 12: Função Tangente Básica

A curva apresentada na Figura 12 é chamada de tangentoide. Perceba que o período da função é π, que o domínio da função é $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$, pois não definimos $tg(x)$, se $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, o contradomínio da função são os reais ($\mathbb{R}$), e diferentemente das funções seno e cosseno, a imagem da função tangente é o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Pelo gráfico apresentado na Figura 12, podemos perceber que, quando a função se aproxima das abscissas $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ pela direita, o valor de $f(x)$ tende para $+\infty$. Já quando a função se aproxima das abscissas $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ pela esquerda, o valor de $f(x)$ tende para $-\infty$.

Assim, a imagem da função tangente, quando definida por $f(x) = a + b \cdot tg(cx + d)$, também será o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Porém, o período da função pode ser alterado dependendo dos valores dos coeficientes c e d. Tomando $\alpha = cx + d$, para que $tg(\alpha)$ complete um período, α precisa variar entre 0 e π, logo:

$$0 \leq \alpha \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq cx + d \leq \pi \Leftrightarrow -d \leq cx \leq \pi - d$$

Observe agora as duas possibilidades para c, $c > 0$ e $c < 0$.

- se $c > 0$, temos que: $-\frac{d}{c} \leq x \leq \frac{-d+\pi}{c}$, portanto $x \in [-\frac{d}{c}, \frac{-d+\pi}{c}]$ e o período p é dado por: $\frac{-d+\pi}{c} - (-\frac{d}{c}) = \frac{\pi}{c}$.
- se $c < 0$, temos que: $-\frac{d}{c} \geq x \geq \frac{-d+\pi}{c}$, portanto $x \in [\frac{-d+\pi}{c}, -\frac{d}{c}]$ e o período p é dado por: $-\frac{d}{c} - (\frac{-d+\pi}{c}) = -\frac{\pi}{c}$.

Assim o período p de uma função definida por $f(x) = a + b \cdot tg(cx + d)$ é dado por:

$$p = \frac{\pi}{|c|}$$

.

1.2.4 *Soluções gráficas de inequações*

Durante o 3º ano do Ensino Médio, o aluno é apresentado à Geometria Analítica, onde estuda o conceito de reta. Dentro do estudo de retas, é possível apresentar aos alunos uma forma gráfica de dar soluções de inequações lineares. Algumas literaturas do Ensino Médio trazem este assunto. IEZZI [11] propõe a resolução gráfica de inequações, após abordar todos os conteúdos inerentes à retas no Ensino Médio e então amplia este conceito, mostrando que toda reta divide o plano em dois semiplanos, e que cada um desses semiplanos pode ser representado por uma inequação polinomial do 1º grau, com uma ou duas incógnitas.

Inequações Lineares

Definição 1.23. *Uma inequação linear é toda sentença matemática da forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b,$$

com $x_1, \ldots, x_n$ sendo as incógnitas, e $a_1, \ldots, a_n$ e b sendo as constantes com $a_i \neq 0$ para pelo menos um $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Abordaremos apenas as inequações lineares com uma ou duas incógnitas, de modo que as representações gráficas também serão apresentadas apenas no $\mathbb{R}^2$.

Inequações lineares com uma incógnita

Vejamos como as retas determinam semiplanos. Apresentaremos alguns exemplo ilustrar.

Exemplo 1.24. *A equação $x - 3 = 0$ representa uma reta paralela ao eixo das ordenadas, que divide o plano em dois semiplanos.*

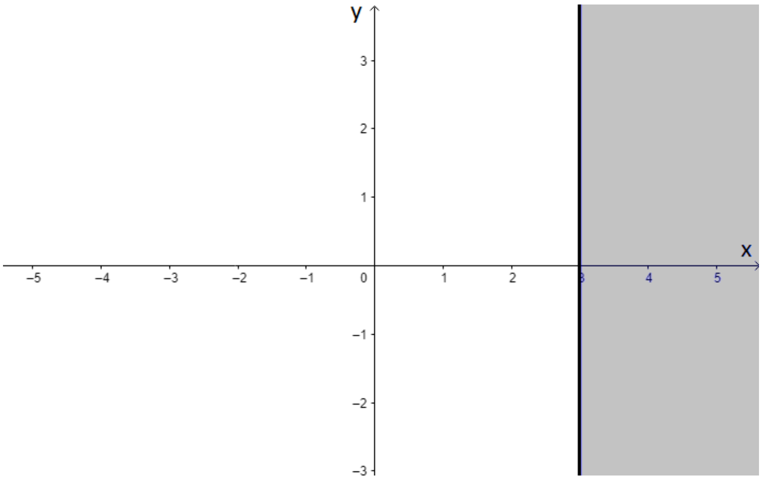


Figura 13: Representação no $\mathbb{R}^2$ da inequação $x - 3 \geq 0$.

Todos os pontos na parte demarcada possuem abscissa maiores ou iguais a 3 e estão em um mesmo semiplano. Logo $x \geq 3 \Leftrightarrow x - 3 \geq 0$ representa estes pontos.

Os pontos que não pertencem à parte demarcada, pertencem ao segundo semiplano e possuem abscissa menores ou iguais a 3. Estes pontos podem ser representados pela inequação $x \leq 3 \Leftrightarrow x - 3 \leq 0$.

Exemplo 1.25. *A equação $y + 2 = 0$ representa uma reta paralela ao eixo das abscissas, que divide o plano em dois semiplanos.*

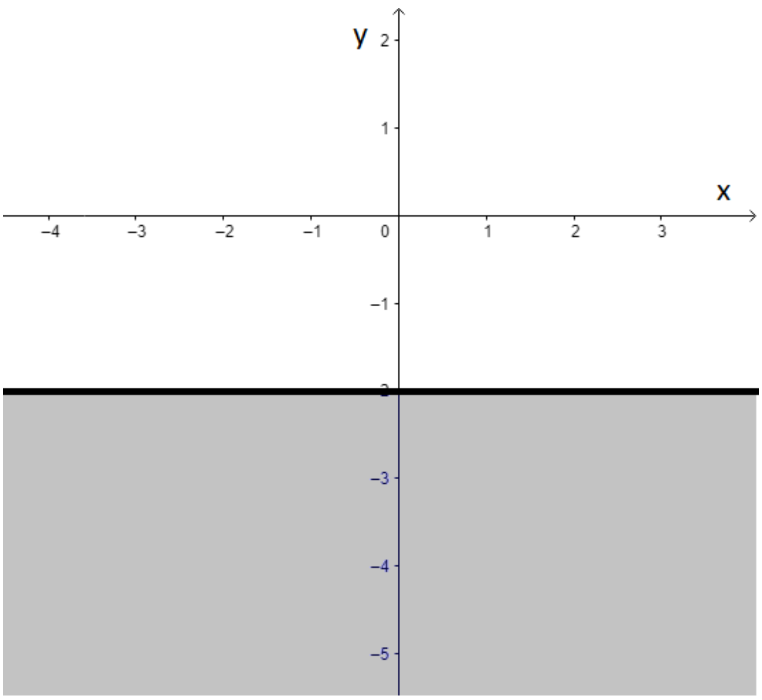


Figura 14: Representação no $\mathbb{R}^2$ da inequação $y + 2 \leq 0$.

Todos os pontos na parte demarcada possuem ordenadas menores ou iguais a -2 e estão em um mesmo semiplano. Logo, $y \leq -2 \Leftrightarrow y + 2 \leq 0$ *representa estes pontos.*

Os pontos que não pertencem à parte demarcada pertencem ao segundo semiplano e possuem ordenadas maiores ou iguais a -2. Estes pontos podem ser representados pela inequação $y \geq -2 \Leftrightarrow y + 2 \geq 0$.

Nos Exemplos 1.24 e 1.25, mostramos a representação gráfica de inequações com apenas uma incógnita. Como são inequações lineares, as fronteiras dos semiplanos são determinadas por retas, que podem ser escritas como $x + 0y - 3 = 0$ no caso do Exemplo 1.24 e como $0x + y + 2 = 0$ no caso do Exemplo 1.25.

Agora, vamos analisar casos nos quais as retas não são paralelas a um dos eixos coordenados.

Exemplo 1.26. *Observemos que a equação* $r : x - y + 2 = 0$ *é uma reta que divide o plano* $\mathbb{R}^2$ *em dois semiplanos, conforme mostra a Figura 15.*

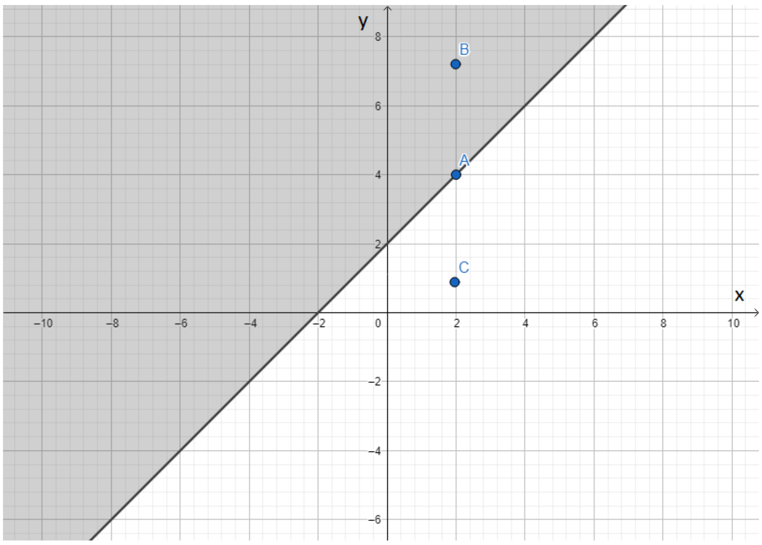


Figura 15: Representação no $\mathbb{R}^2$ da inequação $x - y + 2 \leq 0$.

Sendo o ponto $A(x_a, y_a)$ *um ponto qualquer sobre a reta* r*, o ponto* $B(x_b, y_b)$ *situado acima da reta* r *e o ponto* $C(x_c, y_c)$ *com* $x_a = x_b = x_c$, $y_a < y_b$ *e* $y_a > y_c$*, temos que:*

$$x_a - y_a + 2 = 0 \Leftrightarrow y_a = x_a + 2$$

Como $y_b > y_a$*, temos:*

$$y_b > x_a + 2 \Rightarrow y_b > x_b + 2 \Rightarrow x_b - y_b + 2 < 0$$

Assim podemos afirmar que todo ponto que satisfaz a inequação $x - y + 2 < 0$ *está situado no semiplano acima da reta* r.

Como $y_c < y_a$*, temos:*

$$y_c < x_a + 2 \Rightarrow y_c < x_c + 2 \Rightarrow x_c - y_c + 2 > 0$$

Assim podemos afirmar que todo ponto que satisfaz a inequação $x - y + 2 > 0$ *está situado no semiplano abaixo da reta r.*

Uma forma prática de determinar a inequação que representa um semiplano determinado por uma reta é escolher um ponto e substituir este ponto na equação. Vejamos esse fato no Exemplo 1.27:

Exemplo 1.27. *Tomemos a equação* $2x + 3y - 2 = 0$*, representada na Figura 16.*

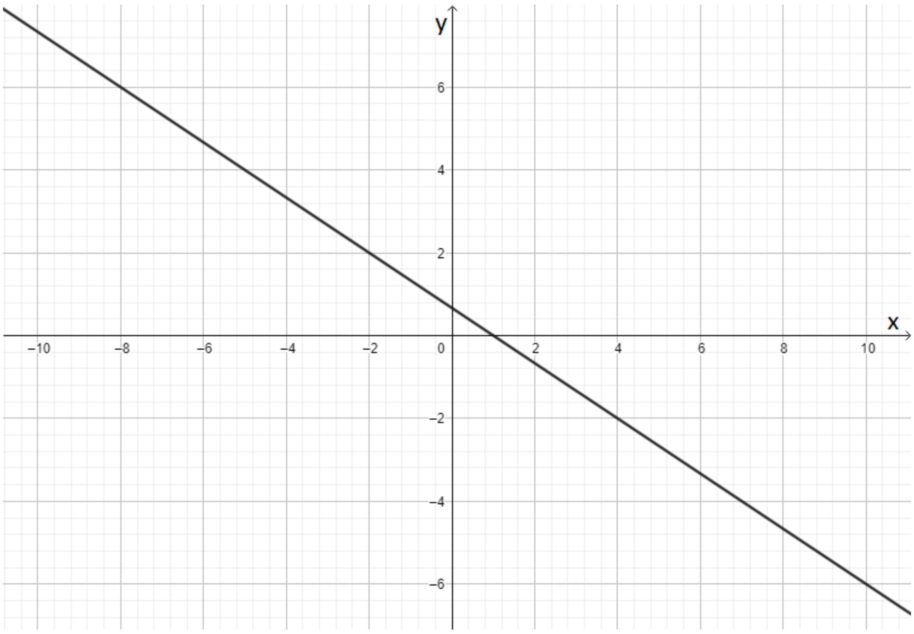


Figura 16: Representação no $\mathbb{R}^2$ da equação $2x + 3y - 2 = 0$

Para determinarmos as inequações dos semiplanos definidos pela reta, escolhemos um ponto qualquer que não pertença à reta. O mais simples e direto para se escolher é o ponto $O(0, 0)$.

Substituindo o ponto $O(0, 0)$ *na equação da reta temos:*

$$2x + 3y - 2 = 0$$

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$$

Como o ponto $O(0, 0)$ *esta situado abaixo da reta, podemos afirmar que o semiplano que contém o ponto O é representado pela inequação* $2x + 3y - 2 < 0$*. Assim, o semiplano acima da reta será representado pela inequação* $2x + 3y - 2 > 0$*.*

O conceito de inequações e sua resolução gráfica, serão aplicados nos problemas de Otimização.

2

CONCEITOS BÁSICOS DE OTIMIZAÇÃO

O ramo da Matemática Aplicada que trata da Otimização é chamado de **Pesquisa Operacional**, a PO, que se tornou conhecida durante a Segunda Guerra Mundial. Segundo SALLES NETO [19], a busca pelo melhor resultado já acontecia desde a antiguidade. O autor cita que, em 1781, Gaspard Monge [1] publicou um trabalho intitulado "Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais" (Memórias sobre a teoria das estacas e aterros), onde Monge trata sobre o melhor caminho para mover pedras de um lugar a outro. Em 1939, o russo L. V. Kantorovich [2], trabalhou com problemas envolvendo otimização na administração de organizações. Porém, até 1959, seus trabalhos não eram conhecidos. Assim, foram considerados os pioneiros da Pesquisa Operacional cientistas contratados pela Inglaterra e pelos EUA, para desenvolverem aprimoramentos na logística de guerra, atuando como pesquisa de operações militares.

Para SALLES NETO [19], a Pesquisa Operacional pode ser definida como *"Uma abordagem científica na tomada de decisões, ou um conjunto de métodos e modelos matemáticos aplicados à resolução de complexos problemas nas operações de uma organização, ou de um sistema real"*.

Já LEIGUS et. al [13] definem a Pesquisa Operacional como sendo *"uma ciência que objetiva fornecer ferramentas quantitativas aos processos de tomada de decisão."* Os autores também afirmam que *"Um estudo típico de Pesquisa Operacional agrega em sua teoria quatro ciências fundamentais: a Economia, a Matemática, a Estatística e a Computação."* Também trazem que *"Um estudo de caso de Pesquisa Operacional completo corresponde à realização de experimentos numéricos com modelos lógico-matemáticos."*

A Pesquisa Operacional pode ser subdividida em vários ramos, como os listados na tabela proposta por SALLES NETO [19].

Problemas de Otimização	Outros Ramos
Programação Linear	Teoria das Filas
Programação Inteira	Cadeias de Markov
Programação Dinâmica	Teoria dos Jogos
Programação Não-linear	Teoria dos Grafos
Programação Multi-objetivo	Metaheurísticas

Tabela 9: Ramos da Pesquisa Operacional [19].

[1] Gaspard Monge(1746 - 1818). Matemático francês, que criou a Geometria Descritiva, serviu como ministro da Marinha, e participou da reforma do sistema educacional francês, ajudando na fundação da École Polytechnique.

[2] Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912 — 1986). Matemático e economista russo de origem judaica, ganhador do Prêmio Nobel de Ciências Econômicas em 1975.

Independentemente do ramo da Pesquisa Operacional, o objetivo é encontrar uma solução viável para um problema. Mas, antes de tudo, é preciso levantar uma situação onde se fará necessária uma tomada de decisão, modelar o problema, pensar em uma solução e implementá-la. Todo este processo pode ser chamado de *Modelagem Matemática*. BASSANEZI [1] diz que:

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Para BASSANEZI [1], a modelagem matemática é feita em atividades intelectuais, que são:

(i) **Experimentação:** Atividade de obtenção dos dados.

(ii) **Abstração:** Formulação dos modelos matemáticos. Procura-se estabelecer:

   (a) Seleção de variáveis: definir claramente as variáveis inerentes ao problema.
   (b) Problematização ou formulação dos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando.
   (c) Formulação de hipóteses: formulações gerais que permitem deduzir manifestações empíricas específicas.
   (d) Simplificação: observar um problema que, com todos os seus detalhes, pode se tornar muito complexo, restringir e isolar o campo de estudo, tornando o problema viável, mas mantendo sua relevância.

(iii) **Resolução:** Utilizar os métodos matemáticos para solucionar o problema.

(iv) **Validação:** Verificar o resultado obtido, se ele é viável e aceitável para a situação real.

(v) **Modificação:** Modificar o modelo, as hipóteses ou as simplificações feitas no problema, caso a solução encontrada não seja ideal.

BASSANEZI [1], esquematiza as atividades intelectuais, conforme a Figura 17.

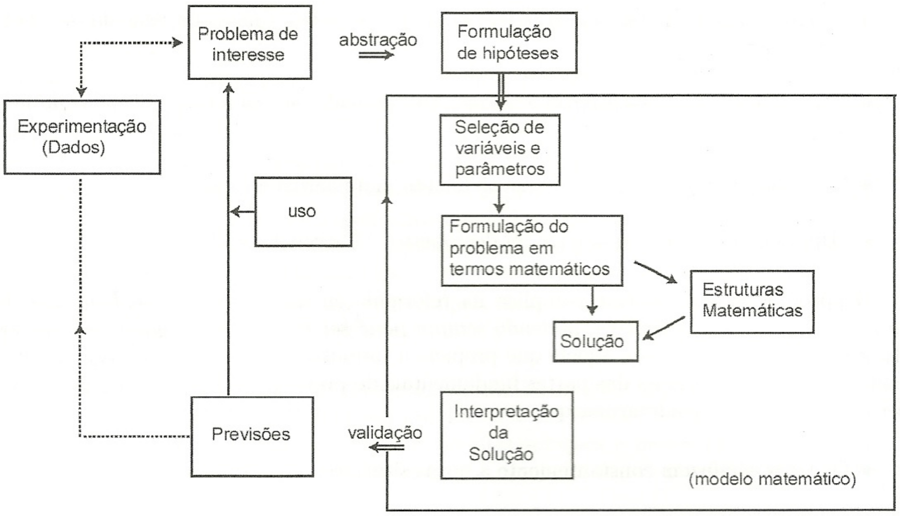


Figura 17: Divisão de Atividades Intelectuais [1].

Para cada tipo de problema aplica-se métodos de solução diferentes. Cada situação têm suas particularidades, que as tornam únicas. Porém, por meio da simplificação, pode-se enquadrar cada problema em um ramo da Pesquisa Operacional, e trabalhar com os métodos já estudados.

Trataremos, neste trabalho, de Problemas de Otimização na Programação Linear e Não-Linear.

Segundo FERREIRA [6], a palavra otimização tem como significado: *"Ato ou processo de otimizar, ou resultado deste ato ou processo."*. Ainda para FERREIRA [6], a palavra otimizar tem como significado: *"Tornar ótimo; Aproveitar, utilizar, ou realizar melhor, ou de forma mais produtiva."*.

Em outras palavras trabalhar com Otimização é buscar a solução ótima para determinado problema. Estes problemas podem ser de maximização ou de minimização. Por exemplo, problemas que envolvem aproveitar a maior área, obter o maior lucro são problemas de maximização. Já situações que envolvem encontrar o caminho mais curto, ter o menor custo, representam problemas de minimização.

Segundo SALLES NETO, após identificado o problema de otimização, para resolvê-lo temos de seguir três passos básicos:

(i) identificar ou definir as variáveis de decisão;

(ii) obter a função objetivo, ou seja, a função que queremos maximizar ou minimizar;

(iii) identificar as condicionantes (restrições) do problema.

Vamos verificar estes passos em problemas de Programação Linear e Não-Linear.

2.1 OTIMIZAÇÃO LINEAR

Os problemas de Otimização Linear são aqueles onde as funções objetivo e as restrições são lineares. Desta forma:

Otimizar:

$$Z = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeito a:

$$\left.\begin{array}{r}
g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
. \\
. \\
. \\
g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{array}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{array}\right. ,$$

em que:
n é o número de variáveis do problema;
m é o número de restrições do problema;
c_i é o coeficiente da variável x_i, na função objetivo;
a_{ij} é o coeficiente da variável x_i, nas restrições;
b_i é a constante da restrição i.

Vale ressaltar que, em problemas de Otimização, procura-se trabalhar com variáveis positivas. Logo, a não negatividade das variáveis também é uma restrição.

2.1.1 *Resolução Gráfica*

Em problemas de Otimização Linear que envolvem duas variáveis de decisão, pode-se determinar a solução ótima graficamente, como mostraremos no Exemplo 2.1.

Exemplo 2.1.

Observe o seguinte problema:

$$Max\ Z = 10x_1 + 4x_2$$

Sujeito a:

$$(a)\ x_1 \leq 6$$

$$(b)\ x_2 \leq 8$$

$$(c)\ x_1 + x_2 \leq 11$$

$$(d)\ x_1, x_2 \geq 0$$

Segundo LACHTERMACHER [12], para resolver um problema graficamente, primeiro é preciso estabelecer os eixos que irão representar as quantidades de x_1 e x_2. Depois, encontramos o conjunto de soluções viáveis, ou seja, determinar qual subárea do plano x_1x_2 é satisfeita por cada restrição. As restrições (a), (b) e (d) são de representação *imediata como podemos ver pela Figura 18. Já para a restrição (c), isolaremos a variável* x_2*, obtendo* $x_2 \leq 11 - x_1$*. Representaremos no plano* x_1x_2 *a equação da reta* $x_2 = 11 - x_1$*. Como temos uma inequação do tipo "menor igual", os pontos abaixo e sobre a reta satisfazem a restrição (c), como mostrado na Figura 19.*

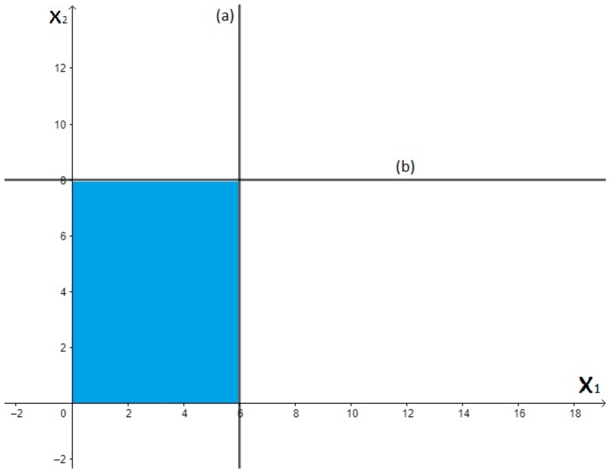


Figura 18: Representação do conjunto de soluções viáveis com as restrições (a), (b) e (d).

A região destacada na Figura 18, mostra o conjunto de soluções viáveis para o problema, sem considerarmos a restrição (c).

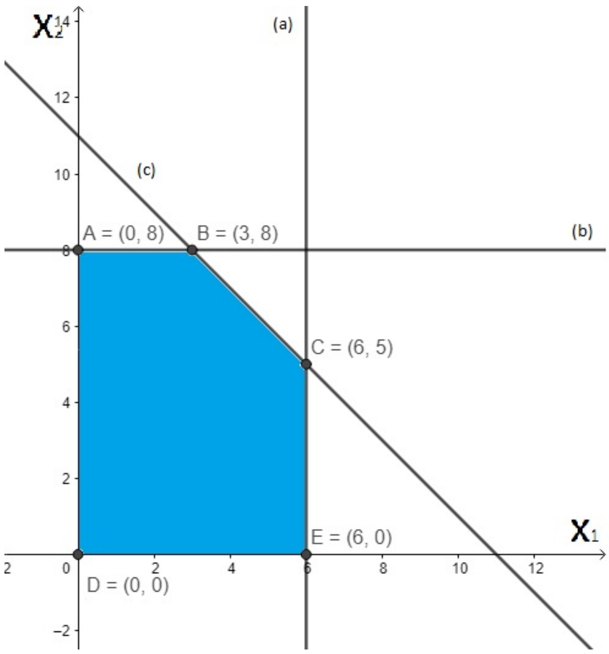


Figura 19: Representação do conjunto de soluções viáveis com as restrições (a), (b) (c) e (d).

Considerando a restrição (c), a região hachurada na Figura 19 representa o conjunto de soluções viáveis para o problema. Por exemplo, o ponto $(3, 7)$ *é uma solução viável, pois satisfaz todas as restrições (a), (b), (c) e (d). Substituindo o ponto* $(3, 7)$ *na função objetivo temos que* $z = 10 \times 3 + 4 \times 7 \Rightarrow z = 58$*. Mas, observe que, se utilizarmos o ponto* $(4, 6)$*, que também pertence ao conjunto de soluções viáveis, substituindo-o na função objetivo temos,* $z = 10 \times 4 + 4 \times 6 \Rightarrow z = 64$*, obtendo um valor maior para a* *função objetivo. Precisamos, agora, determinar dentro do conjunto de soluções viáveis, aquela que maximiza a função objetivo z.*

Uma forma de determinarmos a solução ótima é observarmos a função objetivo como a equação de uma reta. Desta forma,

$$Z = 10x_1 + 4x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{z}{4} - \frac{5x_1}{2}.$$

Percebe-se que o coeficiente linear desta reta é $\frac{z}{4}$. Logo, a solução ótima é determinada conforme a Figura 20.

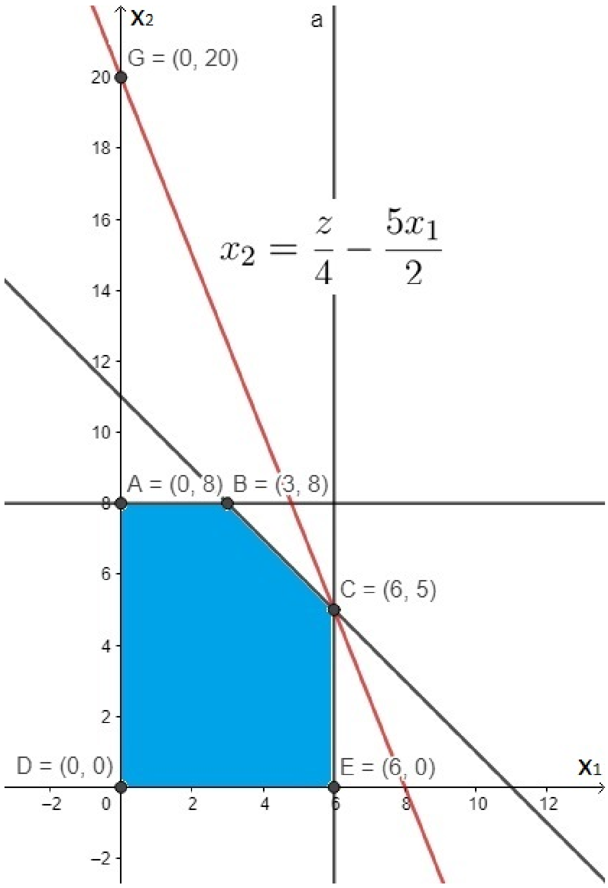


Figura 20: Representação da solução ótima para a função objetivo.

Podemos perceber que, sabendo o coeficiente angular da reta-objetivo, podemos determinar o ponto do conjunto de soluções viáveis que maximiza z. Neste caso, a solução ótima é o ponto $(6, 5)$, e o valor máximo de z é $z = 10 \times 6 + 4 \times 5 \Rightarrow z = 80$.

Com o mesmo processo descrito no Exemplo 2.1, podemos determinar a solução de um problema de minimização.

Em um problema de Otimização Linear com duas variáveis, podemos admitir que a solução ótima será um ponto da reta $z = Ax_1 + Bx_2$ onde A e B são coeficientes não nulos das variáveis. Observando a função objetivo como uma equação reduzida de uma reta, temos $x_2 = -\frac{Ax_1}{B} + \frac{z}{B}$. Para obtermos uma solução que maximize z precisamos determinar a reta que tenha intersecção com o conjunto das soluções viáveis e tenha o maior valor para $\frac{z}{B}$, e para obtermos a solução que minimize z, precisamos determinar a reta que tenha intersecção com o conjunto das soluções viáveis e tenha o menor valor para $\frac{z}{B}$. Assim, podemos sempre afirmar que a solução ótima, se existir, será um dos vértices da região que delimita o conjunto das soluções viáveis.

Todo problema de Otimização Linear que possui o conjunto de soluções viáveis não vazio, poderá ter uma única solução ótima, ter duas ou mais soluções ótimas, ou seja, soluções distintas que produzem um mesmo resultado na função objetivo, ou não ter uma solução ótima. Neste caso, dizemos que o problema é ilimitado e que o conjunto de soluções viáveis não é limitado. Um problema de Otimização Linear também pode vir a ter um conjunto de soluções viáveis vazio, sendo assim, um problema inviável.

2.1.2 *Solução Analítica*

LACHTERMACHER [12] diz que a solução gráfica deve ser utilizada apenas quando existirem duas ou, no máximo três variáveis. Porém, com três variáveis, a visualização é difícil. O autor diz que, para determinar a solução de um problema de Otimização Linear onde existem mais de três variáveis de forma analítica, deve-se proceder como mostra a Figura 21.

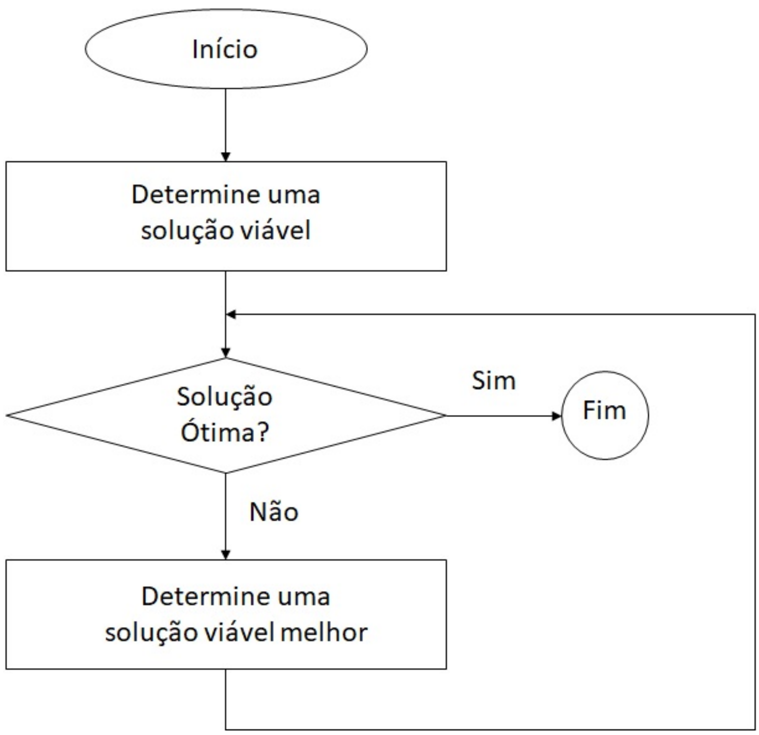


Figura 21: Fluxo de resolução analítica.

Aplicando o procedimento descrito na Figura 21 em um problema, mostraremos como determinar a solução ótima de forma analítica.

Observemos o Exemplo 2.2:

Exemplo 2.2.

Maximizar

$$Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

Sujeito a:

$$(a)\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 16$$

$$(b)\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$$(c)\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 8$$

$$(d)\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 4$$

$$(e)\ x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Segundo HILLIER [10], é mais conveniente trabalhar com equações do que com desigualdades. Assim, o primeiro passo é converter as restrições que são de desigualdade em equações equivalentes, para isso são utilizadas as variáveis de folga. Mostraremos o exemplo dado por HILLIER [10]:

> $x_1 \leq 4$.
> A variável de folga para esta restrição é
> $x_3 = 4 - x_1$,
> a qual é exatamente a folga entre os dois lados da desigualdade. Portanto,
> $x_1 + x_3 = 4$.
> A constante original $x_1 \leq 4$ se mantém sempre que $x_3 \geq 0$.
> Consequentemente, $x_1 \leq 4$ é inteiramente equivalente ao conjunto de restrições
> $x_1 + x_3 = 4$
> e
> $x_3 \geq 0$,
> assim, estas restrições mais convenientes são usadas em seu lugar.

Utilizando este conceito de variável de folga, determinaremos as restrições mais convenientes para o Exemplo 2.2.

As variáveis x_4, x_5, x_6 e x_7 serão as variáveis de folga. Vale ressaltar que, para que o conceito de variável de folga seja válido, precisamos manter a condição de não-negatividade, ou seja, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$. Assim as equações equivalentes às restrições serão:

$$x_4 = 16 - x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_5 = 8 + x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_6 = 8 - x_1 - x_2 + x_3$$

$$x_7 = 4 - x_1 + x_2 + x_3.$$

Desta forma, o problema inicial pode ser reescrito como:

$$Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$x_4 = 16 - x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_5 = 8 + x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_6 = 8 - x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_7 = 4 - x_1 + x_2 + x_3.$$

Neste caso é fácil propor uma solução inicial viável. A mais trivial é escolhermos $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Isso implica em $Z = 0$, o que provavelmente não é a solução ótima. Já que o objetivo é maximizar Z, é perceptível que qualquer incremento em uma da variáveis x_1, x_2 e x_3 acarretará um aumento em Z. Para escolhermos qual variável vamos incrementar primeiro, vamos observar em qual variável um incremento em seu valor, proporcione um maior aumento em Z. Neste caso iniciaremos com a variável x_1, pois possui o maior coeficiente. Reescrevendo as equações considerando $x_2 = x_3 = 0$, podemos determinar um intervalo para x_1, observando a condição de não-negatividade das variáveis.

$$x_4 = 16 - x_1 \Rightarrow x_1 \leq 16$$
$$x_5 = 8 + x_1 \Rightarrow x_1 \geq -8$$
$$x_6 = 8 - x_1 \Rightarrow x_1 \leq 8$$
$$x_7 = 4 - x_1 \Rightarrow x_1 \leq 4.$$

Analisando as restrições para x_1, podemos concluir que $x_1 \in [0, 4]$. Como o objetivo é de maximizar Z, escolheremos o maior valor possível. Então tomamos $x_1 = 4$. Mantendo $x_2 = x_3 = 0$, temos $x_4 = 12, x_5 = 12, x_6 = 4$ e $x_7 = 0$.

Como quando $x_1 = 4$ e $x_2 = x_3 = 0$ temos $x_7 = 0$, vamos trocar a restrição onde temos x_7, isolada na equação, por x_1.

$$x_7 = 4 - x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x_1 = 4 + x_2 + x_3 - x_7$$

Substituindo x_1 nas outras equações temos:

$$Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$Z = 4(4 + x_2 + x_3 - x_7) + 2x_2 + x_3$$
$$Z = 16 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_7 + 2x_2 + x_3$$
$$Z = 16 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_7$$

$$x_4 = 16 - x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 16 - (4 + x_2 + x_3 - x_7) - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 16 - 4 - x_2 - x_3 + x_7 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 12 - 2x_2 - 2x_3 + x_7$$

$$x_5 = 8 + (4 + x_2 + x_3 - x_7) - x_2 - x_3$$

$$x_5 = 12 - x_7$$

$$x_6 = 8 - (4 + x_2 + x_3 - x_7) - x_2 + x_3$$

$$x_6 = 8 - 4 - x_2 - x_3 + x_7 - x_2 + x_3$$

$$x_6 = 4 - 2x_2 + x_7$$

$$x_1 = 4 + x_2 + x_3 - x_7.$$

Assim, temos novas equações para o problema:

$$Z = 16 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_7$$

$$x_4 = 12 - 2x_2 - 2x_3 + x_7$$

$$x_5 = 12 - x_7$$

$$x_6 = 4 - 2x_2 + x_7$$

$$x_1 = 4 + x_2 + x_3 - x_7.$$

Novamente, usaremos uma solução trivial, atribuindo valor 0 para todas as variáveis do lado direito das equações. Assim, encontramos $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$ e $x_7 = 0$. Com esses valores temos que $Z = 16$. Percebe-se que o valor de Z aumentou. Porém observando $Z = 16 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_7$, se incrementarmos valores em x_2 o valor de Z aumentará. Logo a solução ainda não é a solução ótima. Assim, precisaremos repetir os passos anteriores. Porém, agora, isolando x_2 em uma das equações. Para determinarmos em qual equação, tomaremos $x_3 = x_7 = 0$, e assim teremos:

$$x_4 = 12 - 2x_2 \Rightarrow x_2 \leq 6$$

$$x_5 = 12$$

$$x_6 = 4 - 2x_2 \Rightarrow x_2 \leq 2$$

$$x_1 = 4 + x_2 \Rightarrow x_2 \geq -4.$$

Analisando as restrições para x_2, percebemos que $x_2 \in [0, 2]$. Como o objetivo é maximizar Z, tomamos $x_2 = 2$. Assim, substituindo nas equações e mantendo $x_3 = x_7 = 0$, temos $x_4 = 8, x_5 = 12, x_6 = 0$ e $x_1 = 6$. Como $x_6 = 0$ nesta equação que isolaremos x_2, obtemos:

$$x_6 = 4 - 2x_2 + x_7 \Rightarrow x_2 = \frac{4 - x_6 + x_7}{2}.$$

Substituindo x_2 nas outras equações, encontramos:

$$Z = 16 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_7$$

$$Z = 16 + 6\left(\frac{4 - x_6 + x_7}{2}\right) + 5x_3 - 4x_7$$

$$Z = 16 + 12 - 3x_6 + 3x_7 + 5x_3 - 4x_7$$

$$Z = 28 + 5x_3 - 3x_6 - x_7$$

$$x_4 = 12 - 2\left(\frac{4 - x_6 + x_7}{2}\right) - 2x_3 + x_7$$

$$x_4 = 12 - 4 + x_6 - x_7 - 2x_3 + x_7$$

$$x_4 = 8 - 2x_3 + x_6$$

$$x_5 = 12 - x_7$$

$$x_1 = 4 + \left(\frac{4 - x_6 + x_7}{2}\right) + x_3 - x_7$$

$$x_1 = \frac{8 + 4 - x_6 + x_7 + 2x_3 - 2x_7}{2}$$

$$x_1 = \frac{12 + 2x_3 - x_6 - x_7}{2}.$$

Assim, temos novas equações para o problema:

$$Z = 28 + 5x_3 - 3x_6 - x_7$$

$$x_4 = 8 - 2x_3 + x_6$$

$$x_5 = 12 - x_7$$
$$x_2 = \frac{4 - x_6 + x_7}{2}$$
$$x_1 = \frac{12 + 2x_3 - x_6 - x_7}{2}.$$

Utilizando a solução trivial, atribuindo valor 0 para todas as variáveis do lado direito das equações, encontramos $x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 8, x_5 = 12, x_6 = 0$ e $x_7 = 0$. Com esses valores, temos que $Z = 28$. Note que o valor de Z aumentou. Porém, observando $Z = 28 + 5x_3 - 3x_6 - x_7$, se incrementarmos o valor de x_3, o valor de Z aumentará. Logo a solução ainda não é a solução ótima. Precisaremos repetir novamente os passos anteriores. Isolando agora a variável x_3 em uma das equações. Para determinarmos em qual tomamos $x_6 = x_7 = 0$, onde teremos:

$$x_4 = 8 - 2x_3 \Rightarrow x_3 \leq 4$$
$$x_5 = 12$$
$$x_2 = 2$$
$$x_1 = \frac{12 + 2x_3}{2} \Rightarrow x_3 \geq -6.$$

Analisando as restrições para x_3, percebemos que $x_3 \in [0, 4]$. Como o objetivo é maximizar Z, tomamos $x_3 = 4$. Assim, substituindo nas equações e mantendo $x_6 = x_7 = 0$, temos $x_4 = 0, x_5 = 12, x_2 = 2$ e $x_1 = 10$. Como $x_4 = 0$ nesta equação que isolaremos x_3, obtemos:

$$x_4 = 8 - 2x_3 + x_6 \Rightarrow x_3 = \frac{8 - x_4 + x_6}{2}.$$

Substituindo x_3 nas outras equações, temos:

$$Z = 28 + 5\left(\frac{8 - x_4 + x_6}{2}\right) - 3x_6 - x_7$$
$$Z = 28 + 20 + \left(\frac{-5x_4 + 5x_6}{2}\right) - 3x_6 - x_7$$
$$Z = 48 + \left(\frac{-5x_4 + 5x_6 - 6x_6}{2}\right) - x_7$$
$$Z = 48 - \left(\frac{5x_4 + x_6}{2}\right) - x_7$$

$$x_5 = 12 - x_7$$

$$x_2 = \frac{4 - x_6 + x_7}{2}$$

$$x_1 = \frac{12 + 2\left(\frac{8 - x_4 + x_6}{2}\right) - x_6 - x_7}{2}$$
$$x_1 = \frac{12 + 8 - x_4 + x_6 - x_6 - x_7}{2}$$
$$x_1 = \frac{20 - x_4 - x_7}{2}.$$

Assim, temos novas equações para o problema:

$$Z = 48 - \left(\frac{5x_4 + x_6}{2}\right) - x_7$$
$$x_5 = 12 - x_7$$
$$x_3 = \frac{8 - x_4 + x_6}{2}$$
$$x_2 = \frac{4 - x_6 + x_7}{2}$$
$$x_1 = \frac{20 - x_4 - x_7}{2}.$$

Observamos que, para qualquer variável presente em Z, se aumentarmos o valor dessa variável o valor de Z diminuirá. Logo, chegamos à solução ótima. Fazendo $x_4 = x_6 = x_7 = 0$, obtemos os valores para as variáveis x_1, x_2 e x_3:

$$x_1 = 10, x_2 = 2 \text{ e } x_3 = 4 \ .$$

Assim, substituindo os valores encontrados na função objetivo do problema inicial, proposto no Exemplo 2.2 e em suas restrições, temos:

$$\begin{array}{ccc}
Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 & \longrightarrow & Z = 4 \cdot 10 + 2 \cdot 2 + 4 = 48 \\
x_1 + x_2 + x_3 \leq 16 & \longrightarrow & 10 + 2 + 4 = 16 \leq 16 \\
-x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 & \longrightarrow & -10 + 2 + 4 = -4 \leq 8 \\
x_1 + x_2 - x_3 \leq 8 & \longrightarrow & 10 + 2 - 4 = 8 \leq 8 \\
x_1 - x_2 - x_3 \leq 4 & \longrightarrow & 10 - 2 - 4 = 4 \leq 4 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \longrightarrow & x_1 = 10, x_2 = 2, x_3 = 4 \geq 0.
\end{array}$$

Pode se perceber que o procedimento feito com o Exemplo 2.2 é o mesmo proposto na Figura 21. Apesar de trabalhoso, o conceito envolvido é relativamente simples, o que torna possível a aplicação deste método junto a alunos do Ensino Médio.

2.2 OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR

Como o nome diz, os problemas de Otimização Linear possuem função objetivo e restrições lineares. A Programação Linear é extremamente utilizada em vários ramos, e se aplica à inúmeras situações reais. Porém, nem sempre os fenômenos naturais são possíveis de serem representados por funções lineares. Nestes casos, as restrições ou a função objetivo são modeladas por uma função não-linear, embora algumas vezes pode-se reformular problemas não-lineares para um formato linear.

Segundo HILLIER [10], a forma geral de um problema de Otimização Não-Linear é, basicamente, determinar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, de modo a:

$$\text{Maximizar ou Minimizar } f(x)$$

Sujeito a:

$$g_i(x) \leq b_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$
$$x \geq 0$$

Onde:

$f(x)$ e os $g_i(x)$ são funções dadas das n variáveis.

Para HILLIER [10], *"Não existe algoritmo disponível que resolva cada problema específico que se ajuste a esse formato."*. Porém, para alguns casos específicos que são recorrentes, existem métodos que possibilitam a resolução.

LACHTERMACHER [12] mostra três problemas, todos de Otimização Não-Linear, porém bem diferentes entre eles:

Problema 1 $Max \sqrt{x_1 + x_2} + x_3$
Sujeito a:
$e^{x_1} + x_2 + x_3 \leq 43$
$x_1, x_2 \leq 30$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Problema 2 $Min\ sen(x_1^2) + 3cos(x_2^3)$
Sujeito a:
$x_1 + \sqrt[3]{x_2} \geq 26$
$7x_1 + 4x_2^4 \geq 53$
$x_1, x_2 \geq 0$

Problema 3 $Max\ Log(x_1) + x_2 \frac{x_3}{4} + x_4^2$
Sujeito a:
$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 50$
$x_1 + 2x_2x_3x_4 \leq 30$
$3x_1 + \sqrt{x_3} \leq 12$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Todos os problemas acima são de Otimização Não-Linear, pois a função objetivo ou uma das restrições não são lineares. Como já visto, para um problema de otimização ser linear tanto, a função objetivo quanto as restrições devem ser lineares. Os problemas propostos por LACHTERMACHER [12] são de Otimização Não-Linear. Porém, cada um deles possui uma forma distinta de resolução.

Para exemplificar um problema de Otimização Não-Linear, vamos apresentar um outro problema proposto por LACHTERMACHER [12]:

Exemplo 2.3. *[12]*

Maximizar $Z = 2x_1 + 8x_2$
Sujeito a:
$x_1 \leq 5$
$4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 144$
$x_1, x_2 \geq 0.$

Neste exemplo a não-linearidade está na restrição $4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 144$. Como a função objetivo é linear, LACHTERMACHER [12] indica que, para determinar a solução ótima, podemos utilizar a mesma metodologia de um problema de otimização linear. Primeiramente iremos representar o conjunto de soluções viáveis na Figura 22.

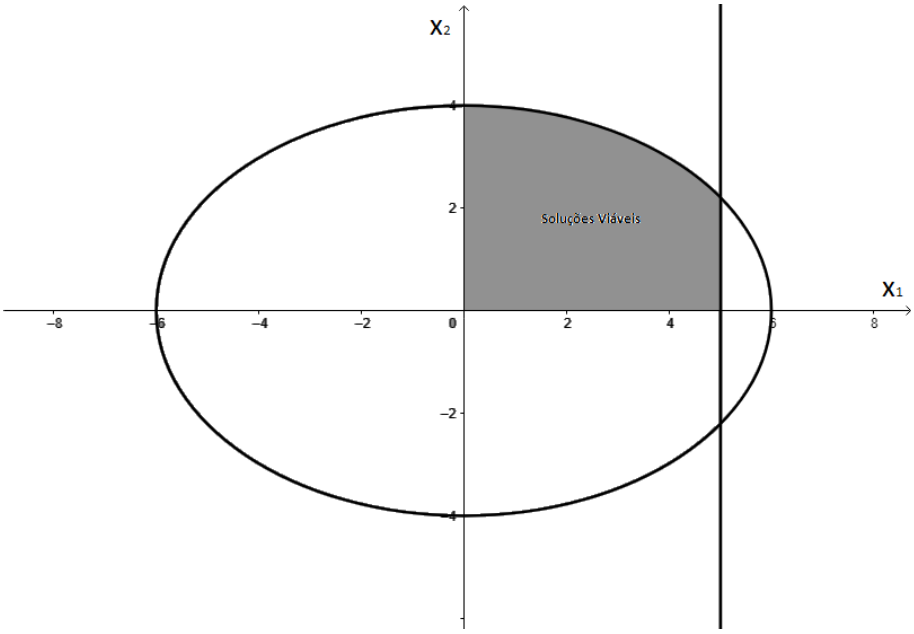


Figura 22: Conjunto de soluções viáveis do Exemplo 2.3.

Se incrementarmos a função objetivo Z, até que a reta tangencie a área do conjunto de soluções viáveis, encontraremos a solução ótima, conforme mostra a Figura 23.

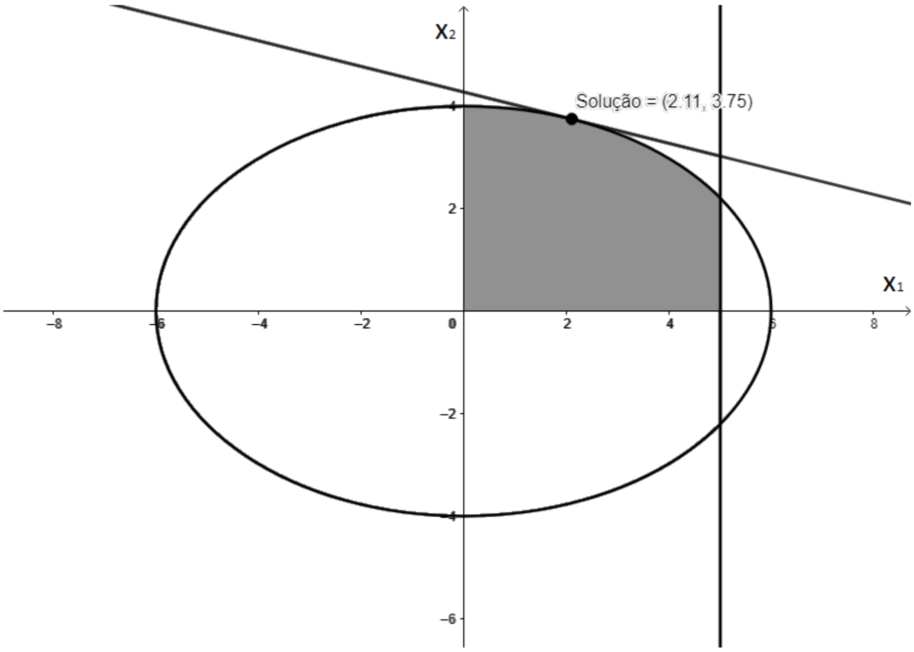


Figura 23: Solução ótima do Exemplo 2.3.

Podemos perceber que, pelo fato de a função objetivo ser linear com duas variáveis, quando podemos representar as restrições no plano, podemos determinar graficamente a solução ótima, assim como nos problemas lineares. Porém, no caso de se ter mais variáveis, esta representação se torna bem mais complexa.

No caso de problemas de Otimização Não-Linear com funções mais complexas e com mais de duas variáveis, os métodos de se determinar a solução ótima são um pouco mais complexos e de difícil aplicação para alunos do Ensino Básico. Por esse motivo não apresentaremos estes problemas neste trabalho. HILLIER [10] e LACHTERMACHER [12] apresentam os mais comuns e mostram as formas de solução de problemas de programação quadráticas, convexas e côncavas.

3

OTIMIZAÇÃO NO ENSINO BÁSICO - PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos algumas propostas de aulas para os assuntos levantados no Capítulo 1. O intuito é sugerir atividades que sejam realizadas em aproximadamente 100 minutos (2 horas-aulas).

3.1 MMC E MDC

É comum que, ao se tratar de MMC e MDC com os alunos, sejam-lhes ensinadas as técnicas para calcular estes valores, sendo uma das mais ensinadas a da fatoração. Depois, o aluno repete esta técnica com números aleatórios para aprender a usar tal ferramenta. Conforme o aluno se habitua a calcular os MMCs e MDCs, parte-se para os problemas com os quais ele aprende onde usar a ferramenta. SILVA[21] traz os seguintes problemas que exemplificam esta situação, que apresentamos nos Exemplos 3.1 e 3.2.

Exemplo 3.1. *[21]*

> *Uma indústria de tecidos fabrica retalhos de mesmo comprimento. Após realizarem os cortes necessários, verificou-se que duas peças restantes tinham as seguintes medidas: 156 centímetros e 234 centímetros. O gerente de produção, ao ser informado das medidas, deu a ordem para que o funcionário cortasse o pano em partes iguais e de maior comprimento possível. Como ele poderá resolver essa situação?*

Primeiramente, para determinar o tamanho em que o funcionário irá cortar os tecidos, precisamos saber o maior número que divide simultaneamente 156 e 234, ou seja, determinar o MDC (156, 234). Utilizaremos o método da fatoração:

$$\begin{array}{r|r} 156 & \mathbf{2} \\ 78 & 2 \\ 39 & \mathbf{3} \\ 13 & \mathbf{13} \\ 1 & - \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 234 & \mathbf{2} \\ 117 & \mathbf{3} \\ 39 & 3 \\ 13 & \mathbf{13} \\ 1 & - \end{array}$$

$MDC(156, 234) = 2 \times 3 \times 13 \Rightarrow MDC(156, 234) = 78.$

Assim pode-se dividir o tecido de $156cm$ em dois de $78cm$ e o tecido de $234cm$ em três de $78cm$, ficando com 5 peças de tecido medindo $78cm$.

Exemplo 3.2. *[21]*

> *Um médico, ao prescrever uma receita, determina que três medicamentos sejam ingeridos pelo paciente de acordo com a seguinte escala de horários: remédio A, de 2 em 2 horas, remédio B, de 3 em 3 horas e remédio C, de 6 em 6 horas. Caso o paciente utilize os três remédios às 8 horas da manhã, qual será o próximo horário onde coincidirá a ingestão dos três remédios?*

Para este exercício, primeiramente devemos ver de quanto em quanto tempo coincidirão os horários dos três remédios, ou seja, determinar os múltiplos de 2, de 3 e de 6 que coincidem, o que é simplesmente determinar o $MMC(2,3,6)$. Calcularemos da forma mais convencional, por meio da fatoração simultânea:

$$\begin{array}{ccc|l} 2, & 3, & 6 & 2 \\ 1, & 3, & 3 & 3 \\ \cline{4-4} 1, & 1, & 1 & 2 \quad \times \quad 3 \quad = \quad 6 \end{array}$$

Como o $MMC(2,3,6) = 6$, a cada 6 horas os remédios serão tomados juntos. Como o paciente ingeriu os remédios juntos às 8h, basta adicionarmos 6:

$$8 + 6 = 14.$$

Logo, o paciente voltará a tomar os remédios A, B e C juntos às 14 horas.

No Exemplo 3.1, o comando da questão diz para determinar o maior comprimento possível. Podemos ver que este problema já leva o aluno a pensar em maximização. Já o Exemplo 3.2 não é tão explícito, mas leva o aluno a pensar no menor intervalo de tempo em que os eventos coincidirão, ou seja, um problema de minimização.

Estes tipos de problemas levam o aluno a procurar a melhor solução. Em ambos os casos, pode-se encontrar soluções que satisfazem a premissa do problema, mas que não seja a solução esperada,ou seja, que não seja a solução ótima.

Vejamos uma proposta de plano de aula para tratar de MDC e MMC.

3.1.1 *Plano de aula: MMC e MDC*

Assunto:

MMC e MDC

Público alvo:

6^o ano do Ensino Fundamental

Objetivo:

Proporcionar uma prática onde os alunos utilizem os conceitos de MMC e MDC.

Duração:

2 horas-aula

Pré-requisito:

Conhecimento de métodos para determinar MMC e MDC

Desenvolvimento:

Dividir a sala em grupos com 4 ou 5 alunos.

1ª Atividade: Dividir um retângulo em quadrados

Objetivo: Aplicar o conceito de MDC em um problema geométrico.

Entregue a cada grupo uma folha de papel cartão ou paraná, cortada em formato retangular com dimensões 72cm por 90cm, e folhas coloridas de papel sulfite e proponha aos alunos o seguinte:

Iremos cobrir este papel com o menor número possível de quadrados que cubra toda a superfície do papel. Não deverá sobrar espaço no papel sem ser coberto e os quadrados devem ter a mesma dimensão. Faça quadrados de cores diferentes.

É interessante mostrar um exemplo do que se pretende para os alunos. Não forneça aos alunos as dimensões do papel. Deixe que surja deles a ideia de medir o papel para determinar o número de quadrados e a dimensão deles. Permita os alunos pensarem e discutirem de que forma poderão determinar a dimensão deste quadrado. Provavelmente alguns grupos não usarão o MDC. Observe se, o que estão propondo irá funcionar. Não intervenha caso seja uma solução plausível. É interessante pedir que os grupos expliquem as soluções que encontraram, e, por fim, mostre como determinar o tamanho do quadrado utilizando o MDC.

Explicar que como se pretende cobrir a folha com quadrados, o lado destes quadrados deve dividir as duas dimensões da folha e, como queremos o maior quadrado possível, o lado do quadrado deve ser o maior número que divida as duas dimensões da folha. Por isso, surge o cálculo do $MDC(72, 90)$ para determinarmos o lado do quadrado.

$$\begin{array}{r|l} 72 & \mathbf{2} \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & \mathbf{3} \\ 3 & \mathbf{3} \\ 1 & - \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & \mathbf{2} \\ 45 & \mathbf{3} \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & 5 \\ 1 & - \end{array}$$

Assim, $MDC(72, 90) = 2 \times 3 \times 3 = 18$.

Logo, os lados dos quadrados deverão medir $18cm$. Para determinar quantos quadrados serão necessários, pode-se usar um conceito primitivo de área, primeiro imaginando quantos quadrados caberão em uma direção e quantos caberão na outra direção. Em uma caberá $72 \div 18 = 4$ e, na outra, $90 \div 18 = 5$, como mostra a Figura 24.

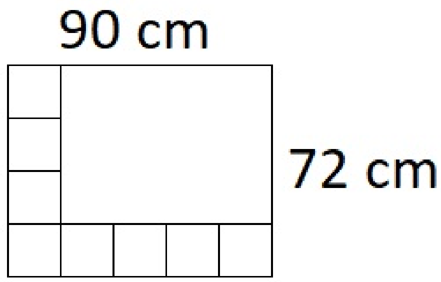


Figura 24: Disposição dos quadrados sobre a folha.

Então, teremos 4 linhas com 5 quadrados cada, ou seja, $4 \times 5 = 20$. Portanto, precisaremos de 20 quadrados de lados medindo $18cm$.

2ª Atividade: Estrelas no retângulo

Objetivo: Aplicar o conceito de MMC em um problema geométrico.

Fazer aos alunos a seguinte proposta:

Iremos fazer ao redor da folha de papel paraná marcas vermelhas, azuis e verdes. As marcas vermelhas serão feitas de 4 em 4 centímetros, as marcas azuis serão feitas de 12 em 12 centímetros, e as marcas verdes de 9 em 9 centímetros. Quando as três marcas coincidirem, cole uma estrela no lugar das marcas. Porém, o grupo deve determinar quantas estrelas irão precisar, antes de fazer as marcas, e pegá-las com o professor.

Dê um tempo para que os alunos determinem a quantidade de estrelas que irão precisar. Para isso eles precisarão determinar o MMC entre 4, 9 e 12 e dividir o perímetro do retângulo pelo MMC encontrado. Desta forma:

$$
\begin{array}{ccc|l}
4, & 9, & 12 & 2 \\
2, & 9, & 6 & 2 \\
1, & 9, & 3 & 3 \\
1, & 3, & 1 & 3 \\
\hline
1, & 1, & 1 & \quad 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36\ .
\end{array}
$$

Então, a cada $36cm$, as marcas se encontrarão. O perímetro do retângulo é $72 + 72 + 90 + 90 = 324cm$. Dividindo pelo intervalo obtemos $324 \div 36 = 9$ estrelas. Logo cada grupo irá precisar de 9 estrelas.

Recursos:

Papel cartão ou paraná, folhas de papel coloridas.

Avaliação:

Observar a participação dos alunos durante as atividades, solicitar aos alunos uma auto-avaliação, propor lista de exercícios.

Sugestão de exercícios:

Exemplo 3.3. *(EPCAR-2001 - Adaptada) Uma abelha rainha dividiu as abelhas de sua colmeia nos seguintes grupos para exploração ambiental: um composto de 288 batedoras e outro de 360 engenheiras. Sendo você a abelha rainha e sabendo que cada grupo deve ser dividido em equipes constituídas de um mesmo e maior número de abelhas possível, em quantos grupos de quantos membros você redistribuiria suas abelhas?*

Para determinar o número de abelhas em cada grupo, basta determinar o $MDC(288, 360)$.

$$
\begin{array}{r|l}
288 & \mathbf{2} \\
144 & \mathbf{2} \\
72 & \mathbf{2} \\
36 & 2 \\
18 & 2 \\
9 & \mathbf{3} \\
3 & \mathbf{3} \\
1 & -
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
360 & \mathbf{2} \\
180 & \mathbf{2} \\
90 & \mathbf{2} \\
45 & \mathbf{3} \\
15 & \mathbf{3} \\
5 & 5 \\
1 & -
\end{array}
$$

$$MDC(288, 360) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$$

Assim, cada grupo terá 72 abelhas. Para determinarmos quantos grupos serão, basta efetuarmos as divisões $288 \div 72 = 4$ e $360 \div 72 = 5$. Logo, teremos 4 grupos de abelhas batedoras e 5 grupos de abelhas engenheiras, totalizando 9 grupos de abelhas com 72 abelhas cada.

Exemplo 3.4. *(Concurso Correios - 2011 - Adaptada) O piso de uma sala retangular, medindo 352cm por 416cm, será revestido com ladrilhos quadrados, de mesma dimensão, inteiros, de forma que não fique espaço vazio entre ladrilhos vizinhos. Serão escolhidos ladrilhos de modo que tenham a maior dimensão possível. Na situação apresentada, determine a medida em centímetros do lado do ladrilho que deverá ser utilizado.*

Para determinar o tamanho do ladrilho, devemos pensar que a medida do lado deste deve dividir as duas dimensões da sala, e, como ele deve ser o maior possível, deve ter medida igual ao $MDC(352, 416)$.

352	**2**	416	**2**
176	**2**	208	**2**
88	**2**	104	**2**
44	**2**	52	**2**
22	**2**	26	**2**
11	11	13	13
1	-	1	-

$$MDC(352, 416) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$

Logo, deverão ser utilizados ladrilhos quadrados de lado medindo $32cm$.

Exemplo 3.5. *(UFMG - Adaptada) Numa república hipotética, o presidente deve permanecer 4 anos em seu cargo; os senadores, 6 anos e os deputados, 3 anos. Nessa república a cada quantos anos as eleições para esses três cargos ocorrerão simultaneamente?*

Para determinar a frequência com que estas eleições ocorrem simultaneamente, devemos determinar os múltiplos do tempo em que cada eleição ocorre, e ver qual deles são comuns aos três cargos.

Iremos utilizar uma outra maneira de se determinar o $MMC(4, 6, 3)$. Esta maneira é uma forma de fácil compreensão para alunos do Ensino Fundamental, pois não envolve a fatoração em termos primos. Basta determinar os múltiplos de cada número.

M(3) = 3, 6, 9, **12**, 15, 18, ...
M(4) = 4, 8, **12**, 16, 20, 24, ...
M(6) = 6, **12**, 18, 24, 30, 36, ...

$$MMC(3, 4, 6) = 12.$$

Portanto, as eleições para presidente, senadores e deputados desta república, ocorrem simultaneamente a cada 12 anos.

Exemplo 3.6. *(EPCAR - Adaptada) Um relógio A bate a cada 15 minutos o outro relógio B bate a cada 25 minutos e um terceiro relógio C a cada 40 minutos. Qual é, em horas, o menor intervalo de tempo decorrido entre duas batidas simultâneas dos três relógios ?*

Para determinarmos o intervalo em que os relógios baterão simultaneamente, basta determinarmos o MMC entre 15, 25 e 40.

$$
\begin{array}{lll|l}
15, & 25, & 40 & 2 \\
15, & 25, & 20 & 2 \\
15, & 25, & 10 & 2 \\
15, & 25, & 5 & 3 \\
5, & 25, & 5 & 5 \\
1, & 5, & 1 & 5 \\
\hline
1, & 1, & 1 & \quad 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 600\ .
\end{array}
$$

$$MMC(15,25,40) = 600.$$

Logo, os relógios baterão simultaneamente a cada 600 minutos. Porém, o exercício pede a resposta em horas. Como 1 hora são 60 minutos, basta dividirmos $600 \div 60 = 10$, e temos a resposta em horas. Portanto, os relógios batem juntos a cada 10 horas.

3.2 PERÍMETRO E ÁREA DE UMA FIGURA PLANA

No 6º ano do Ensino Fundamental, é apresentado aos alunos os conceitos de perímetro e de área, iniciando-se com sua simples determinação, geralmente com o auxílio de malhas quadriculadas. São desenvolvidas atividades para o aluno perceber, por exemplo, que podemos calcular a área de um retângulo multiplicando a “quantidade de quadrados de um lado” pela “quantidade de quadrados do outro lado”, e também atividades onde o aluno é levado a medir com o auxilio de um régua o perímetro de algumas figuras. Os Exemplos 3.7 e 3.8 são propostos por BONJORNO [2], que trata sobre perímetro de figuras planas.

Exemplo 3.7. *[2]*

> *Uma praça retangular tem 92,4 m de comprimento e sua largura é de $\frac{1}{3}$ da medida do comprimento. Uma menina dá 5 voltas completas no seu contorno.*
>
> *a) Quantos quilômetros a menina andou no total?*
> *b) Se, em média, cada passo da menina mede 60 cm, quantos passos ela deu, aproximadamente, nessa caminhada?*

Para resolver esta atividade, o aluno precisará, primeiramente, determinar a largura (l) da praça, da seguinte maneira:

Como o comprimento (c) é de 92,4m e a largura é um terço deste comprimento, teremos $l = \frac{1}{3} \cdot c$. Assim, $l = \frac{c}{3}$, então $l = \frac{92{,}4}{3} \Rightarrow l = 30,8m$.

Sabendo as dimensões da praça devemos, agora, determinar o seu perímetro.

$$Perímetro = 92,4 + 92,4 + 30,8 + 30,8 = 246,4m.$$

Para responder o item a, como a menina deu 5 voltas ao redor da praça, ela percorreu o perímetro 5 vezes. Assim:

$$Total\ percorrido = 5 \times 246,4 = 1232m.$$

Como o exercício pede a resposta em quilômetros, a menina andou, no total, 1,232 km.

Já o item b pede para determinarmos quantos passos a menina deu. Para isso, devemos converter a medida do passo para metros ou o total percorrido para cm. Assim $60cm = 0,6m$.

Agora, para determinarmos a quantidade de passos dados pela menina, basta efetuarmos a divisão: $1232 \div 0,6 = 2053,333...$.

Assim, a menina deu, aproximadamente, 2054 passos.

Exemplo 3.8. *[2] "Um quadro tem a forma de um hexágono regular de lado 90 cm. Quantos metros de madeira são necessários, para colocar uma moldura nesse quadro?"*

Esta é uma questão bem simples. Para chegarmos ao resultado, basta determinarmos o perímetro do quadro, que, como é um hexágono, possui 6 lados. Assim:

$$Perímetro = 6 \cdot 90 = 540cm.$$

Como o exercício pede a resposta em metros, serão necessários 5,4 m de madeira para colocar a moldura no quadro.

Em relação à área, BONJORNO [2] propõe os exercícios que trazemos nos Exemplos 3.9 e 3.10 .

Exemplo 3.9. *[2]*

A figura representa o piso da sala de uma casa.

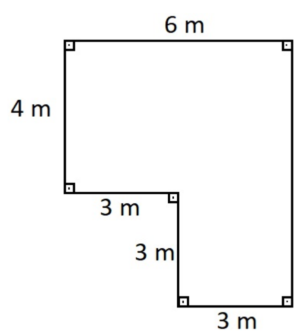


Figura 25: Planta do piso da sala.

a) Qual é a área dessa sala?

b) Quantos reais serão gastos para cobrir esse piso com madeira, se o metro quadrado de madeira colocada custa R$ 52,00?

Para resolvermos o item *a* do Exemplo 3.9, primeiramente, iremos dividir o piso da sala em um retângulo e em um quadrado. Teremos:

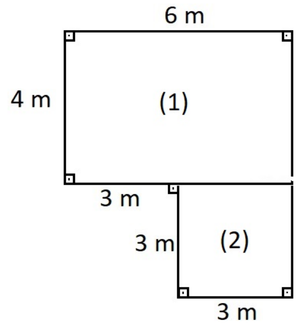


Figura 26: Piso da sala dividido.

A área do piso da sala será a soma da área (1) com a área (2):

$$A_1 = 6 \cdot 4 = 24m^2$$

$$A_2 = 3 \cdot 3 = 9m^2.$$

Assim, temos:

$$A_{total} = A_1 + A_2 = 24m^2 + 9m^2 \Rightarrow A_{total} = 33m^2.$$

Para resolvermos o item *b*, já que 1m quadrado de madeira colocada custa R$ 52,00, o gasto total será de:

$$33 \cdot R\$52,00 = R\$1716,00.$$

Logo, para cobrir o piso da sala, serão gastos R$ 1716,00.

Exemplo 3.10. *[2]*

> *Para anunciar a venda de sua casa em um jornal, Hélio desenhou uma planta mostrando a área interna da casa. Na planta, cada quadradinho representa um quadrado de 50 cm × 50 cm. Se Hélio está pedindo R$ 650,00 por metro quadrado construído, quanto custará a casa?*

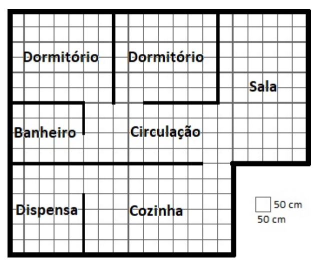


Figura 27: Planta da casa

Para determinar o valor da casa, primeiramente, o aluno deverá calcular a área da casa. Para isso, pode-se contar os quadrados da planta, e multiplicar pela área de um.

Como o quadradinho tem dimensões 50 cm × 50 cm, a área de um deles é 2500 cm^2, como o exercício pede a resposta em metros, 2500 cm^2 = 0,25 m^2.

Dividindo a planta em dois retângulos e utilizando métodos de multiplicar a largura pelo comprimento, para contar os quadradinhos da planta encontramos o total de 290 quadrados. Assim:

$$Área = 290 \cdot 0,25m^2 = 72,5m^2.$$

Como o valor do metro quadrado é de R$ 650,00, para determinar o valor da casa, basta efetuarmos a multiplicação:

$$Valor = \frac{R\$650,00}{m^2} \cdot 72,5m^2$$

$$Valor = R\$47125,00.$$

Os exercícios dos Exemplos 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10 apresentam problemas contextualizados de perímetro e área, mas não apresentam a ideia de máximo ou mínimo, na literatura do 6º ano do Ensino Fundamental, os exercícios de perímetros e áreas geralmente são semelhantes a estes que apresentamos. Caso o professor queira utilizar os conceitos de área e perímetro para trabalhar a ideia de maximização ou minimização, pode-se propor exercícios que utilizem os dois conceitos. Propomos um plano de aula para tratar desta ideia.

3.2.1 *Plano de aula: Perímetro e Área*

Assunto:

Área e perímetro de figuras planas

Público alvo:

6º ano do Ensino Fundamental

Objetivo:

Proporcionar uma prática onde os alunos possam trabalhar os conceitos de máximos e mínimos por meio de atividades com perímetro e áreas.

Duração:

2 horas-aulas

Pré-requisito:

Determinação de área e perímetro de figuras planas.

Desenvolvimento:

Dividir os alunos em grupos de 4 membros. Para cada grupo, entregar palitos de mesmo tamanho, que podem ser de fósforos ou de dentes.

1ª Atividade: Retângulos de palitos (Atividade inspirada na proposta por GAVINA [7]).

Objetivo: Ao fim desta primeira parte da atividade, é esperado que os alunos percebam que, dado um perímetro fixo, a maior área se apresenta quando os lados do retângulo são iguais, ou seja, no quadrado.

Pedir aos alunos para construírem diversos retângulos com os palitos e anotarem a quantidade de palitos usados e a dimensão dos retângulos (largura e comprimento) e o números de palitos.

Faça as seguintes perguntas:

a) Liste os números de palitos utilizados em ordem crescente.

Uma resposta possível é 4, 6, 8, 10, 12, ...

b) O que você percebeu em relação aos números encontrados?

Espera-se que o aluno perceba que os números são sempre pares, ou que não é possível aumentar apenas um palito para formar um retângulo, ou que não é possível formar um retângulo com um número ímpar de palitos.

Pedir aos alunos que tomem 20 palitos e que formem todos os retângulos possíveis utilizando os 20 palitos. É importante anotarem as dimensões dos retângulos.

Eles devem conseguir motar os seguintes retângulos.

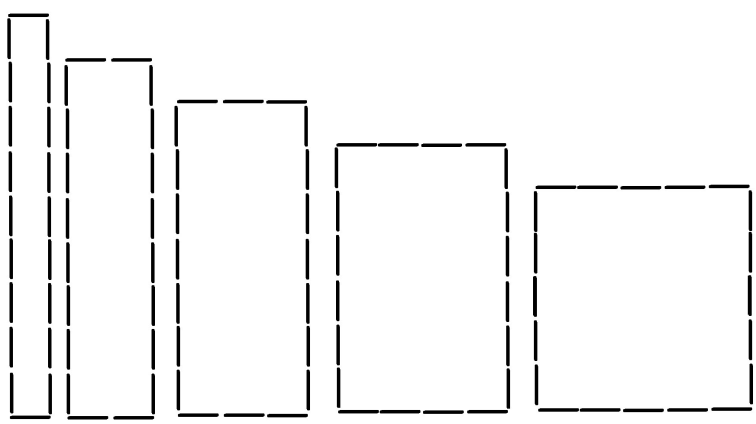


Figura 28: Quadrados possíveis com 20 palitos.

Pedir aos alunos para que calculem as áreas dos retângulos encontrados, e responderem a pergunta:

c) Qual dos retângulos tem maior área e qual tem menor área?

Os alunos encontraram que o retângulo 5×5 possui maior área com $25ua$ e o que possui menor área é o retângulo 1×9 com área de $9ua$.

Pedir para que repitam o mesmo procedimento com uma quantidade diferente de palitos, e responderem as perguntas:

d) Independente da quantidade de palitos, sempre é possível formar um quadrado?

Espera-se que os alunos percebam que nem sempre se pode formar um quadrado.

e) Liste as quantidades com as quais foram possíveis formar um quadrado. O que você percebe nestes números?

4, 8, 12, 16, 20, ...

Espera-se que os alunos percebam que estas quantidades são sempre múltiplas de 4.

f) Observando as quantidades fixas de palitos, descreva os retângulos com maior área.

Espera-se que encontrem algo do tipo:

- 8 palitos: A maior área é a do retângulo 2×2, $4ua$.
- 10 palitos: A maior área é a do retângulo 2×3, $6ua$.
- 12 palitos: A maior área é a do retângulo 3×3, $9ua$.
- 14 palitos: A maior área é a do retângulo 4×3, $12ua$.
- 16 palitos: A maior área é a do retângulo 4×4, $16ua$.
- 18 palitos: A maior área é a do retângulo 5×4, $20ua$.
- 20 palitos: A maior área é a do retângulo 5×5, $25ua$.

g) O que você pode dizer sobre os retângulos com maior área?

Espera-se que o aluno perceba que as maiores áreas são as dos quadrados e que, no caso onde não é possível montar um quadrado, as maiores áreas se apresentam quando as dimensões dos retângulos estão próximas uma da outra.

2ª Atividade: Retângulos a partir de quadrados (Atividade inspirada na proposta por GAVINA [7]).

Objetivo: Ao fim desta atividade, é esperado que os alunos percebam que, dada uma área fixa, o quadrilátero com menor perímetro que contém esta área é o quadrado.

Distribua aos alunos quadrados de mesma dimensão. Podem ser de cartolina, de papel cartão ou de madeira, preferencialmente de materiais resistentes, pois os alunos irão manipulá-los. Mas caso não seja possível, podem ser de papel sulfite. Entregue cerca de 30 quadrados por grupo.

Peça para que os alunos peguem um quadrado e montem todos os retângulos possíveis. Depois repita os procedimentos com 2 quadrados, 3, e assim sucessivamente. Os alunos devem anotar quantos quadrados foram utilizados e as dimensões dos retângulos(largura e comprimento).

É esperado que os alunos percebam que é possível construir:

- com 1 quadrado, apenas 1 retângulo (1×1),
- com 2 quadrado, apenas 1 retângulo (2×1),
- com 3 quadrado, apenas 1 retângulo (3×1),
- com 4 quadrados, são 2 retângulos (4×1) e (2×2),
- com 5 quadrados, apenas 1 retângulo (5×1),
- com 6 quadrados, são 2 retângulos (6×1) e (2×3),
- com 7 quadrados, apenas 1 retângulo (7×1),
- com 8 quadrados, são 2 retângulos (8×1) e (2×4),
- com 9 quadrados, são 2 retângulos (9×1) e (3×3),
- com 10 quadrados, são 2 retângulos (10×1) e (2×5),
- com 11 quadrados, apenas 1 retângulo (11×1),
- com 12 quadrados, são 3 retângulos (12×1), (6×2) e (4×3),
- com 13 quadrados, apenas 1 retângulo (13×1),
- com 14 quadrados, são 2 retângulos (14×1) e (7×2),
- com 15 quadrados, são 2 retângulos (15×1) e (5×3)
- com 16 quadrados, são 3 retângulos (16×1), (8×2) e (4×4),
- com 17 quadrados, apenas 1 retângulo (17×1),
- com 18 quadrados, são 3 retângulos (18×1), (9×2) e (6×3),
- com 19 quadrados, apenas 1 retângulo (19×1),

- com 20 quadrados, são 3 retângulos (20×1), (10×2) e (5×4),
- com 21 quadrados, são 2 retângulos (21×1) e (7×3)
- com 22 quadrados, são 2 retângulos (22×1) e (11×2)
- com 23 quadrados, apenas 1 retângulo (23×1),
- com 24 quadrados, são 4 retângulos (24×1), (12×2), (8×3) e (6×4),
- com 25 quadrados, são 2 retângulos (25×1) e (5×5)
- com 26 quadrados, são 2 retângulos (26×1) e (13×2)
- com 27 quadrados, são 2 retângulos (27×1) e (9×3)
- com 28 quadrados, são 3 retângulos (28×1), (14×2) e (7×4),
- com 29 quadrados, apenas 1 retângulo (19×1),
- com 30 quadrados, são 4 retângulos (30×1), (15×2), (10×3) e (6×5).

Após construírem todos os retângulos e anotarem, peça para que os alunos respondam as perguntas:

h) O que você percebeu em relação às quantidades de quadrados que podem formar apenas um retângulo?

Espera-se que os alunos percebam que estas quantidades são números primos, que só possuem como divisores 1 e ele mesmo.

i) O que você percebeu em relação às quantidades de quadrados que podem formar o maior número de retângulos?

Espera-se que os alunos percebam que estas quantidades são números que possuem mais divisores, pois:

Divisores de 30 são 30, 15, 10, 6, 5, 3, 2 e 1.

Divisores de 24 são 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2 e 1.

Quanto mais divisores o número tenha, mais retângulos são possíveis de serem construídos.

Peça para os alunos determinarem o perímetro dos retângulos e observarem em relação aos retângulos com mesma área e responderem as questões:

j) Observando os retângulos formados por uma quantidade de quadrados que puderam formar 3 ou mais retângulos, dentre os com mesma área, diga os que possuem o menor perímetro.

Espera-se que os alunos encontrem os retângulos de menor perímetro da seguinte maneira:

Com 12 quadrados o retângulo (4×3), com 16 quadrados o retângulo (4×4), com 18 quadrados o retângulo (6×3) com 20 quadrados o retângulo (5×4), com 24 quadrados o retângulo (6×4), com 28 quadrados o retângulo (7×4), com 30 quadrados o retângulo (6×5).

k) Observando os casos do item **(j)**, o que você percebe em relação as dimensões dos retângulos com menor perímetro?

Espera-se que os alunos percebam que as dimensões onde o perímetro é menor são as que possuem valores mais próximos dentre os retângulos de mesma área.

Após os alunos terminarem a atividade, converse com eles sobre o que perceberam, como deve ser o retângulo para quando fixado o perímetro obtermos a maior área e, fixada uma área, obtermos esta área no retângulo de menor perímetro possível.

Recursos:

Palitos de fósforo ou dentes e quadrados.

Avaliação:

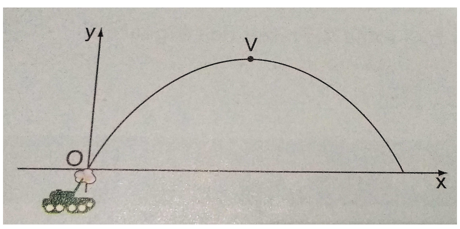
Observar a participação dos alunos durante as atividades observando grupo a grupo se os alunos compreenderam o objetivo da atividade. Solicitar aos alunos uma auto-avaliação.

3.3 FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Ao se tratar de máximos e mínimos de funções polinomiais do 2º grau, são comuns exercícios que envolvam laçamentos de projéteis, lucro, custo, determinação de áreas entre outros assuntos. Também demostram o cálculo das coordenadas do vértice do gráfico da função e solicita-se que os alunos façam vários exercícios com o objetivo de apenas determiná-los. Mas é sempre importante contextualizar o assunto. Essa contextualização geralmente é feita por meio de situações-problema como as trazidas por IEZZI [11], que apresentamos no Exemplo 3.11 e no Exemplo 3.12.

Exemplo 3.11. *[11]*

Uma bala é atirada de um canhão (como mostra a figura) e descreve uma parábola de equação $y = -3x^2 + 60x$ (sendo x e y medidos em metros).



> *Determinar:*
> *a) a altura máxima atingida pela bala;*
> *b) o alcance do disparo.*

Determinando o item (a)

Como $a = -3 < 0$, a parábola tem um ponto de máximo. O valor máximo é dado por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{3600}{-12} = 300$$

Assim, a altura máxima atingida é 300 m.

Determinando o item (b)

A bala toca o solo quando $y = 0$, isto é:

$$-3x^2 + 60x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 20$$

Observe que $x = 0$ representa o ponto inicial do disparo. Então, o alcance do disparo é de 20 m.

Exemplo 3.12. *[11]*

> *Um fazendeiro quer aproveitar uma área plana ao lado de sua casa para fazer um jardim, com formato retangular. Deseja cercá-lo e quer usar os* 40 *m de um rolo de tela que possui. Determine as dimensões do retângulo para que a área cercada seja a máxima, no caso de:*
> *a) cercar os quatro lados do retângulo;*
> *b) aproveitar uma parede da casa e cercar os outros três lados do retângulo.*
> *Em qual dos dois casos ele consegue um jardim maior?*

No item (a), para cercar os quatro lados do jardim, podemos dizer que teremos dois lados medindo x e dois lados medindo y, o que nos dá a equação

$$2x + 2y = 40 \Rightarrow x + y = 20.$$

Para determinarmos a área do jardim, basta multiplicar x por y; $A = xy$.

Agora, de posse do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 20 \quad \Rightarrow y = 20 - x & (1) \\ \quad A = xy & (2) \end{cases}$$

Basta substituir (1) em (2), e então obteremos a função área:

$$A = x(20 - x) \Rightarrow A = 20x - x^2.$$

A função obtida é uma função quadrática com $a = -1 < 0$, que, portanto, tem um valor máximo, que é dado por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{400}{-4} = 100.$$

Assim, quando cercar os quatro lados do retângulo, a maior área possível para o jardim será de 100 m^2.

No item (b), como será aproveitada a parede, basta cercar três lados. Assim, será necessário determinar dois lados medindo x e um lado medindo y, o que resulta em $2x + y = 40$.

Para determinarmos a área do jardim, basta multiplicar x por y; $A = xy$.

Agora de posse do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 40 & \Rightarrow y = 40 - 2x \quad (3) \\ A = xy & \qquad\qquad\qquad\quad (4) \end{cases}$$

Basta substituir (3) em (4), e então obteremos a função área.

$$A = x(40 - 2x) \Rightarrow A = 40x - 2x^2.$$

A função obtida é uma função quadrática com $a = -2 < 0$, que, portanto, tem um valor máximo, que é dado por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1600}{-8} = 200.$$

Assim, quando cercar os três lados do retângulo a maior área possível para o jardim será de 200 m^2.

Logo, podemos concluir que, no item (b), o jardineiro consegue construir um jardim com área maior.

O primeiro problema é direto, onde o aluno já tem a função e precisa apenas determinar o vértice para saber a altura máxima. Já no segundo problema, o aluno precisará determinar a função e, depois, determinar o ponto de máximo.

Propomos um plano de aula sobre Funções Polinomiais do 2º grau.

3.3.1 *Plano de aula: Função Polinomial do 2º grau*

Assunto:

Funções Quadráticas

Público alvo:

1º ano do Ensino Médio

Objetivo:

Proporcionar uma prática onde os alunos utilizem os conceitos de máximos e mínimos de funções quadráticas.

Duração:
2 horas-aulas
Pré-requisito:
Determinação do vértice de uma parábola.
Desenvolvimento:
Dividir os alunos em grupos de 4 ou 5 alunos.

1ª Atividade: Problemas geométricos para serem solucionados com funções quadráticas.

Objetivo: Espera-se que, solucionando estes dois primeiros problemas, o aluno desenvolva estratégias para modelar e solucionar um problema geométrico, que seu desenvolvimento, o leve a uma função quadrática. .

Propor aos alunos estes dois problemas:

Exemplo 3.13. *(Puc - Campinas - SP - adaptada) Na figura a seguir, tem-se um quadrado inscrito em outro quadrado. Pode-se calcular a área do quadrado interno, subtraindo-se da área do quadrado externo as áreas dos 4 triângulos. Feito isso, verifica-se que A é uma função da medida x.*

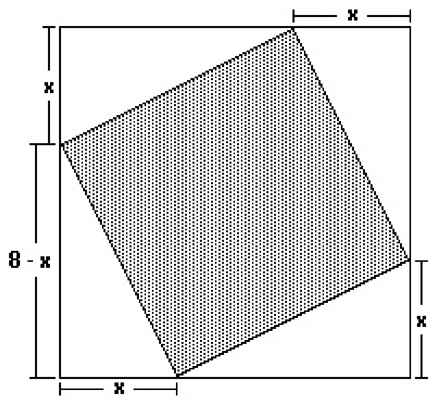


Figura 29: Quadrado inscrito em outro quadrado.

Determine o valor mínimo de A.

Observando a Figura 29, percebe-se que o lado do quadrado externo é $(8-x)+x=8$. Assim, a área deste quadrado (A_1) será, $A_1 = 8^2$ logo $A_1 = 64$.

A área de um cada um dos triângulos (A_2) é dada por $A_2 = \dfrac{x(8-x)}{2}$. portanto $A_2 = \dfrac{8x - x^2}{2}$.

Para determinarmos a área do quadrado inscrito (A), basta fazer como indica o enunciado, $A = A_1 - 4 \cdot A_2$.

Desta forma temos que:

$$A = 64 - 4\left(\frac{8x - x^2}{2}\right)$$

$$A = 64 - 16x + 2x^2.$$

Assim, percebemos que a função A, é quadrática com $a = 2 > 0$. Portanto, possui um valor mínimo, determinado por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-256}{8} = 32.$$

Conclui-se, então, que $A = 32ua$.

Exemplo 3.14. *Marcos quer construir uma sala anexa a sua casa. Ele possui material suficiente para construir 120 metros de muro, e pretende construir esta sala de forma retangular com a maior área possível.*

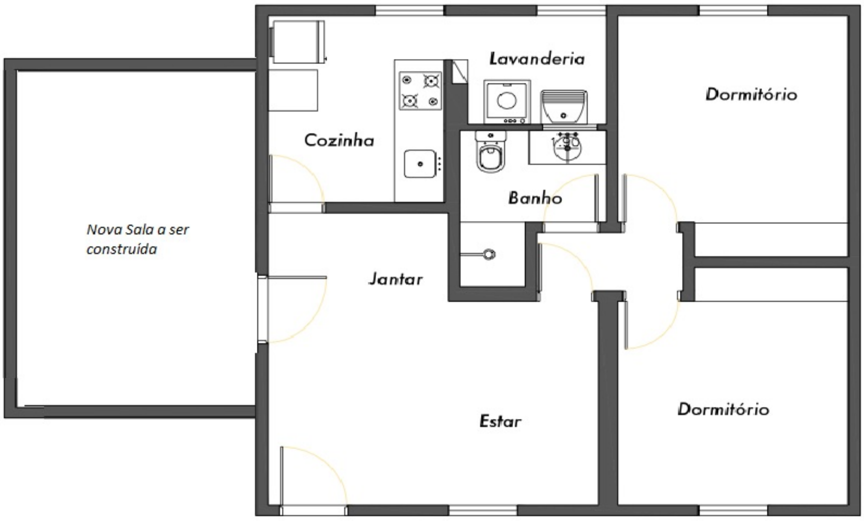


Figura 30: Planta casa onde será construída uma nova sala.

Qual será a área desta nova sala?

Observando a Figura 30, vemos que será necessário construir três lados do retângulo, dois com medidas necessariamente iguais e outro com possibilidade de ter medida diferente. O perímetro destes três muros deve ser de 120 m. Assim, podemos equacionar o problema da seguinte forma:

$$2x + y = 120.$$

Para determinarmos a área total da sala (A), basta calcularmos a área do retângulo de base x e altura y, chegando à seguinte equação:

$$A = xy.$$

Com estas duas equações, para determinarmos a área (A) em função apenas de uma incógnita, basta resolvermos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 120 \quad \Rightarrow y = 120 - 2x & (1) \\ \quad A = xy & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos a função:

$$A = x(120 - 2x) \Rightarrow A = 120x - 2x^2.$$

A função obtida é uma função quadrática com $a = -2 < 0$, que, portanto, tem um valor máximo, que é determinado por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{14400}{-8} = 1800.$$

Assim a sala que será construída poderá ter uma área máxima de 1800 m^2.

Aguardar que os alunos resolvam os problemas. Após isso, pedir para que os grupos apresentem as soluções que encontraram, comente as soluções e aponte os erros cometidos, caso haja.

2ª Atividade: Retângulo inscrito em um triângulo (Atividade baseada no problema apresentado por MENDES [15]).

Objetivo: Interpretar e modelar um problema geométrico, utilizar o conceito de vértice de uma parábola.

Entregar a cada grupo um triângulo retângulo cortado em papel cartão com os lados medindo 10 cm, 24 cm e 26 cm .

Dar aos alunos o seguinte comando:

"Vocês precisam determinar um retângulo que tenha a maior área possível, que possa ser desenhado dentro do triângulo que vocês receberam. Dois lados deste retângulo deverão ficar sobre os catetos do triângulo."

Deixar os alunos proporem formas de resolução. Acompanhe os alunos dando dicas sobre como proceder, mas procure deixar que eles cheguem a uma conclusão. Ao concluírem, peça para os grupos apresentarem as soluções que encontraram.

Uma forma de solucionar este problema é a seguinte:

Observe a figura:

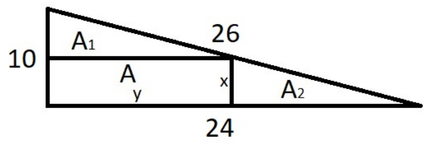


Figura 31: Retângulo inscrito no triângulo.

Na Figura 31, temos uma representação do que os alunos precisaram fazer. Podemos ver que as áreas destacadas A_1, A e A_2 podem ser determinadas da seguinte maneira:

$$A_1 = \frac{(10-x)y}{2}$$

$$A_2 = \frac{(24-y)x}{2}$$

$$A = xy.$$

A área total do triângulo é $A_t = \dfrac{10 \cdot 24}{2}$ assim $A_t = 120\ cm^2$

A área total também pode ser determinada por $A_t = A_1 + A_2 + A$, obtendo, assim:

$$A_t = A_1 + A_2 + A$$

$$120 = \frac{(10-x)y}{2} + \frac{(24-y)x}{2} + xy$$

$$240 = 10y - xy + 24x - xy + 2xy$$

$$120 = 5y + 12x.$$

Como pretendemos determinar a área máxima do retângulo, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 120 = 5y + 12x \quad \Rightarrow y = \dfrac{120-12x}{5} & (3) \\ A = xy & (4) \end{cases}$$

Substituindo (3) em (4) obtemos:

$$A = x\left(\frac{120-12x}{5}\right)$$

$$A = \frac{120x - 12x^2}{5}$$

$$A = 24x - \frac{12x^2}{5}.$$

Temos que A é uma função quadrática com $a = -\frac{12}{5} < 0$. Portanto, ela possui um valor máximo, dado por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{576}{-4 \cdot \frac{12}{5}} = 576 \cdot \frac{5}{48} = 60.$$

Assim, a área máxima do retângulo será de 60 cm^2. Mas, neste caso, é importante também determinar as dimensões do retângulo. Para determinarmos a dimensão x do retângulo, basta determinarmos o x_v da função A. Assim:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{2 \cdot \frac{-12}{5}} = 24 \cdot \frac{5}{24} = 5.$$

Logo, o lado x do retângulo terá medida de 5cm. Para determinarmos a medida y do retângulo, basta substituir x na equação (3). Desta forma:

$$y = \frac{120 - 12x}{5} = \frac{120 - 12 \cdot 5}{5} = \frac{120 - 60}{5} = 12.$$

Portanto, o lado y do retângulo medirá 6 cm.

Então, o retângulo terá dimensões 5×12 e terá área de 60 cm^2.

Vale ressaltar que, ao modelarmos este problema, chegamos a um sistema de equações que pode ser interpretado como um problema de Otimização Não-Linear, observe:

$$\begin{cases} 120 = 5y + 12x \quad \Rightarrow y = \dfrac{120 - 12x}{5} & (3) \\ A = xy & (4) \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema na forma de um problema de Otimização Não-Linear, temos:

Maximizar:

$$A = xy$$

Sujeito à:

$$5y + 12x \leq 120$$
$$x, y \geq 0$$

Em um momento oportuno é válido mostrar isso aos alunos. Observar que ao dar continuidade a seus estudos, aquilo que é abordado no Ensino Médio, será visto sob outra perspectiva no Ensino Superior.

Recursos:

Papel cartão ou paraná.

Avaliação:

Observar a participação dos alunos durante as atividades, solicitar aos alunos uma auto-avaliação e propor lista de exercícios.

Sugestões de exercícios:

Exemplo 3.15. *(Enem 2009 - adaptada) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.*

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em reais, arrecadado por dia com a venda do álcool, qual será o valor máximo arrecadado por dia neste posto? Qual o valor do desconto para se ter este valor?

Para determinar o valor máximo que poderá ser arrecadado, precisamos entender que o valor arrecadado (V) é dado pelo produto da quantidade vendida (Q) pelo preço do litro (P).

Sabemos que, a cada x centavos de desconto, a quantidade vendida aumenta em 100 litros, portanto podemos dizer que $Q = 10000 + 100x$.

Sabemos também que o litro é vendido à R$ 1,50. Mas, aplicando x centavos de desconto, o preço é $P = 1,5 - 0,01x$.

Agora, para determinarmos o valor arrecadado basta fazermos $V = P \times Q$. Assim:

$$V = (1,5 - 0,01x) \cdot (10000 + 100x)$$
$$V = 15000 - 100x + 150x - x^2$$
$$V = 15000 + 50x - x^2.$$

Logo, a função V é quadrática com $a = -1 < 0$. Logo, possui um valor máximo, que é determinado por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{50^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 15000}{-4} = 15625.$$

Assim, podemos concluir que o valor máximo arrecadado por dia neste posto será de R$ 15.625,00.

Já para determinarmos, o valor do desconto que proporciona a arrecadação máxima, basta determinarmo o x_v, da seguinte forma:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2 \cdot (-2)} = -\frac{50}{-4} = 12,5.$$

Assim, concluímos que, para o posto ter a maior arrecadação possível, deverá dar um desconto de R$ 0,125.

Exemplo 3.16. *(UERJ - adaptada) Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por R$ 2,00. A partir daí, o preço de cada fruta decresce R$*

0,02 por dia. Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta por dia.

a) Expresse o ganho do fruticultor com a venda das frutas como função do dia de colheita.

b) Determine o dia da colheita de maior ganho para o fruticultor e o ganho neste dia.

Observemos a tabela:

	dia 1	dia 2	dia 3	...	dia n + 1
Valor (R$)	2	$2 - 0,02 \cdot 1$	$2 - 0,02 \cdot 2$	...	$2 - 0,02 \cdot n$
Quantidade	80	80+1	80+2	...	80 + n

Tabela 10: Período de Colheita.

Para responder o item (a), vamos observar a Tabela 10. Percebemos que o valor de cada fruta cairá obedecendo à função $V = 2 - 0,02n$, e a quantidade colhida pelo fruticultor obedecerá a função $Q = 80 + n$. O ganho será determinado pelo produto do valor pela quantidade. Assim:

$$G = V \cdot Q$$

$$G = (2 - 0,02n)(80 + n)$$

$$G = 160 + 0,4n - 0,02n^2.$$

Portanto, o ganho do fruticultor é expresso por $G = 160 + 0,4n - 0,02n^2$.

Para responder o item (b), devemos observar que G é uma função quadrática com $a = -0,02 < 0$. Portanto possui um valor máximo, que é determinado por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0,4^2 - 4 \cdot (-0,02) \cdot 160}{4 \cdot -0,02} = 162.$$

Também precisamos determinar o dia em que ocorre o ganho máximo, que é dado por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0,4}{2(-0,02)} = 10.$$

Perceba que determinamos o n que gera o ganho máximo. Observando a Tabela 10, percebemos que o dia da colheita é dado por $Dia = n + 1$. Assim o ganho máximo ocorre no 11º dia.

Logo, o ganho máximo é de R$162,00, e ocorre no 11º dia de colheita.

3.4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Durante o 2º ano do Ensino Médio, os alunos são apresentados às funções trigonométricas, que são muito utilizadas para representar fenômenos periódicos. As funções seno e cosseno possuem valores máximos e mínimos. Alguns exercícios encontrados na literatura exploram este ponto. IEZZI [11] apresenta alguns exercícios que mostraremos nos Exemplos 3.17 e 3.18.

Exemplo 3.17. *[11]*

> *Em uma pequena roda-gigante, a altura (em metros) em que um passageiro se encontra no instante t (em segundos) é dada pela lei:*
> $h(t) = 6 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$, *para* $t \in [0, 270]$.
> *a) No inicio do passeio, a que altura se encontra o passageiro?*
> *b) Qual a altura mínima que esse passageiro atinge no passeio?*
> *c) Qual a altura máxima que esse passageiro atinge no passeio?*

Resolução do exemplo 3.17.

Item a)
O início do passeio se dá no instante *t=0*. Logo, a altura é dada por:

$$h(t) = 6 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$$

$$h(0) = 6 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} \cdot 0\right)$$

$$h(0) = 6 + 4 \cdot sen\,(0)$$

$$h(0) = 6.$$

Logo, a altura no início do passeio é de 6 metros.

Item b)
A altura mínima se dará quanto tivermos o menor valor para $h(t) = 6 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$. Isso ocorre quando para $sen\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = -1$. Então, teremos:

$$h = 6 + 4 \cdot (-1)$$

$$h = 6 - 4$$

$$h = 2$$

Logo a altura mínima atingida é de 2 metros.

Item c)

A altura máxima se dará quanto tivermos o maior valor para $h(t) = 6 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$. Isso ocorre quando $sen\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = 1$. Então, teremos:

$$h = 6 + 4 \cdot (1)$$

$$h = 6 + 4$$

$$h = 10$$

Logo a altura máxima atingida é de 10 metros.

Exemplo 3.18. *[11]*

> *Um artigo publicado em um caderno de economia prevê que as exportações de um certo país (em milhões de dólares), no ano de* $2010 + x$ *, em que* $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 19, 20\}$*, serão dadas pela lei:*
>
> $$f(x) = 400 + 18 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$
>
> *Suponha que isso realmente ocorra, determine:*
>
> *a) O valor das exportações desse país nos anos de 2010, 2015 e 2020, em milhões de dólares?*
>
> *b) Quantas vezes, entre 2010 e 2030, f atingirá seu valor mínimo e qual é esse valor?*

Resolução do Exemplo 3.18.

Item a)

Como o ano é dado por $2010 + x$, para determinarmos o valor no ano de 2010 devemos calcular $f(0)$. Logo,

$$f(x) = 400 + 18 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$

$$f(0) = 400 + 18 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 0\right)$$

$$f(0) = 400 + 18 \cdot cos\,(0)$$

$$f(0) = 400 + 18 \cdot 1$$

$$f(0) = 418.$$

Então, em 2010, o valor da exportação foi de 418 milhões de dólares.

Para determinarmos o valor no ano de 2015, devemos calcular $f(5)$. Logo,

$$f(x) = 400 + 18 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$

$$f(5) = 400 + 18 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 5\right)$$

$$f(5) = 400 + 18 \cdot cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$f(5) = 400 + 18 \cdot \frac{1}{2}$$

$$f(5) = 400 + 9$$

$$f(5) = 409.$$

Então, em 2015, o valor da exportação foi de 409 milhões de dólares.

Para determinarmos o valor no ano de 2020, devemos calcular $f(10)$. Logo,

$$f(x) = 400 + 18 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$

$$f(5) = 400 + 18 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 10\right)$$

$$f(5) = 400 + 18 \cdot cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$f(5) = 400 + 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(5) = 400 - 9$$

$$f(5) = 391$$

Então em 2020 o valor das exportações foi de 391 milhões de dólares.

Item b)

Primeiramente, vamos determinar o valor mínimo da função. Este valor ocorrerá quando o valor de $cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$ for mínimo, ou seja,-1. Então teremos:

$$f_{mínimo} = 400 + 18 \cdot (-1)$$

$$f_{mínimo} = 400 - 18$$

$$f_{mínimo} = 382.$$

Logo, o valor mínimo das exportações é 382 milhões de dólares.

Para sabermos quantas vezes a função atingirá o valor mínimo, precisamos analisar para quais valores de arco o cosseno será -1. Sabemos que $cos(\pi) = -1$. Logo, determinando para todos os arcos cujo o seno é -1, temos $cos(\pi + k \cdot 2\pi) = -1; k \in \mathbb{Z}$. Então :

$$cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = cos(\pi + k \cdot 2\pi); k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 2k); k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 0) = 2(2013)$$

$$k = 1 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 2) = 9(2019)$$

$$k = 2 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 4) = 15(2025)$$

$$k = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 6) = 21(2031)$$

Como $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 19, 20\}$, $x = 21$ não convém. Logo, a função atingirá seu valor mínimo 3 vezes.

As funções trigonométricas apresentam naturalmente os conceitos de máximo e mínimo. Nos Exemplos 3.17 e 3.18, parte da solução é determinar os pontos de máximo ou mínimo. Apresentaremos aqui uma sugestão de plano de aula para funções trigonométricas com o foco em máximos e mínimos.

3.4.1 *Plano de aula: Funções trigonométricas*

Assunto:

Funções Trigonométricas.

Público alvo:

2^o ano do Ensino Médio.

Objetivo:

Proporcionar uma prática onde os alunos utilizem os conceitos de máximos e mínimos de funções trigonométricas.

Duração:

2 horas-aulas

Pré-requisito:

Circulo trigonométrico.

Desenvolvimento:

Atividade: Máximos e mínimos de uma função trigonométrica.

Objetivo: Espera-se que, com esta atividade, o aluno possa compreender que, dada uma função trigonométrica do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(x)$ *ou* $g(x) = a + b \cdot cos(x)$*, seus valores estarão compreendidos no intervalo* $[a - b; a + b]$*, ou seja,* $Im(f) = Im(g) = [a - b, a + b]$*.*

Primeiramente, apresente aos alunos a função $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$. Mostre por meio de um circulo trigonométrico o comportamento da função. Desenhar no quadro ou mostrar em um *software* ajuda os alunos a compreenderem tal comportamento.

A utilização de um *software* como o GeoGebra[1] facilita muito esta etapa. PEDROSO [17], propõe um roteiro para a construção de um círculo trigonométrico com as funções seno e cosseno. Descrevemos aqui o passo a passo que o autor utilizou para a construção:

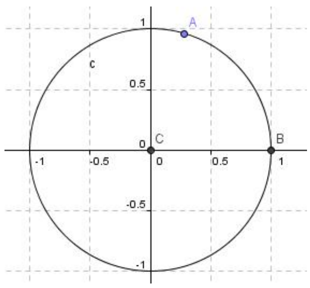
1 Abrir o programa GeoGebra.

2 No menu "Exibir", selecione "Eixos" e "Malha".

3 Na parte inferior da tela, há uma barra de comandos denominada "Entrada". Digite nela a equação $x^2 + y^2 = 1$. Essa é a equação de um círculo de raio 1.

4 Agora, clique em "Novo Ponto" e, em seguida, clique sobre a circunferência feita no passo 3. Esse é o ponto A.

5 Clique novamente em "Novo Ponto" e crie os pontos B (intersecção da circunferência com o eixo das abscissas, coordenadas (1, 0)) e C (origem dos plano cartesiano, coordenadas (0, 0)). Observe a figura abaixo:



6 Clique no botão "Ângulo" e, em seguida, clique sobre os pontos B, C e A.

7 Construa o segmento de reta AC, selecionando a opção "segmento de reta definido por dois pontos" e clique sobre os pontos A e C.

Iremos marcar, agora, os segmentos cujas medidas são $sen\alpha$ e $cos\alpha$.

8 Digite na entrada: $(cos(\alpha), 0)$. Essas são as coordenadas do ponto D.

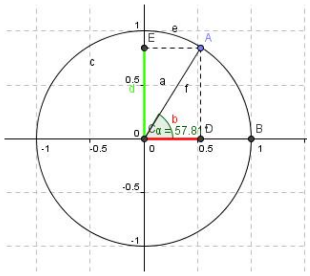
9 Crie um segmento de reta com extremos em C e D. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto D e, em propriedades, escolha a cor vermelha e mude a espessura do segmento para 5. Selecione "Mover" e mova o ponto A, observe o que ocorre com a medida do ângulo a e observe o que ocorre com as coordenadas do ponto D.

[1] GeoGebra é um *software* de matemática com distribuição livre, e esta disponível para várias plataformas em www.geogebra.org .

10 Digite na entrada: $(0, sin(\alpha))$. Essas são as coordenadas do ponto E.

11 Crie um segmento de reta com extremos em C e E. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto E e, em propriedades, escolha a cor verde e mude a espessura do segmento para 5.

12 Crie os segmentos AE e AD. Em Propriedades, escolha o "Estilo das linhas" como "pontilhado". Observe a figura:



O que construímos até agora, permite que analisemos o que acontece com os valores de seno e cosseno para ângulos que estejam variando entre 0º e 360º. Aqui se pode discutir com os alunos o que acontece com o seno e cosseno para ângulos maiores do que uma volta e para ângulos obtidos no sentido horário. Pode-se visualizar também os ângulos em quadrantes diferentes, mas que têm mesmo valor de seno ou cosseno (basta, por exemplo, na figura acima, prolongar os segmento AE, marcar a intersecção com a circunferência, criando assim, o ponto A' e marcar o ângulo BCA').

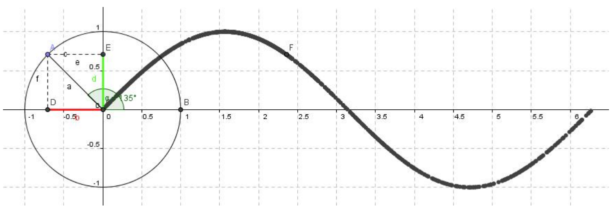
Iremos agora analisar o comportamento do seno e do cosseno do ângulo alfa construindo seus respectivos gráficos.

13 Na "Entrada", digite o ponto de coordenadas: $(a, sin(\alpha))$. Esse será o ponto F.

14 Mova o ponto A e observe o que acontece com o ponto F.

15 Para visualizar o gráfico da função seno, clique com o botão direito sobre o ponto F e selecione "Exibir rastro". Mova o ponto A.

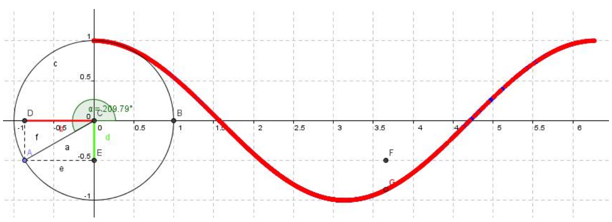
Aqui é importante discutir com os alunos que o ângulo mostrado no ciclo está medido em graus, mas no eixo horizontal, está medido em radianos.



16 Desabilite o "rastro" para o ponto F.

17 Crie o ponto de coordenadas: $(a, cos(\alpha))$. Esse é o ponto G.

18 Repita os passos 14 e 15 e observe agora o gráfico da função cosseno.



Construído o modelo proposto por PEDROSO [17], mostre aos alunos o comportamento das funções seno e cosseno, aponte os valores máximos e mínimos obtidos pelas funções, mostre que o período da função é 2π, e que, neste caso estamos observando apenas as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$, mas que estas funções podem ser apresentadas da forma $f(x) = a + b \cdot sen(mx + n)$ ou $f(x) = a + b \cdot sen(mx + n)$. É importante conhecer as funções básicas para facilitar a compreensão das mais elaboradas.

Para que os alunos possam compreender as funções completas, faça por etapas. Primeiramente, proponha aos alunos as seguintes funções:

$$f_1(x) = 3sen(x) \text{ e } g_1(x) = 2cos(x).$$

Organize junto aos alunos em uma tabela alguns possíveis valores para x, os valores de $f(x) = sen(x)$ e os valores para $f_1(x) = 3sen(x)$.

x	$f(x) = senx$	$f_1(x) = 3senx$	x	$f(x) = senx$	$f_1(x) = 3senx$
0	0	0	π	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	3	$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
			2π	0	0

Tabela 11: Valores de $f(x) = sen(x)$ e $f_1 = (x)3sen(x)$.

Plote com os alunos os valores encontrados em um gráfico:

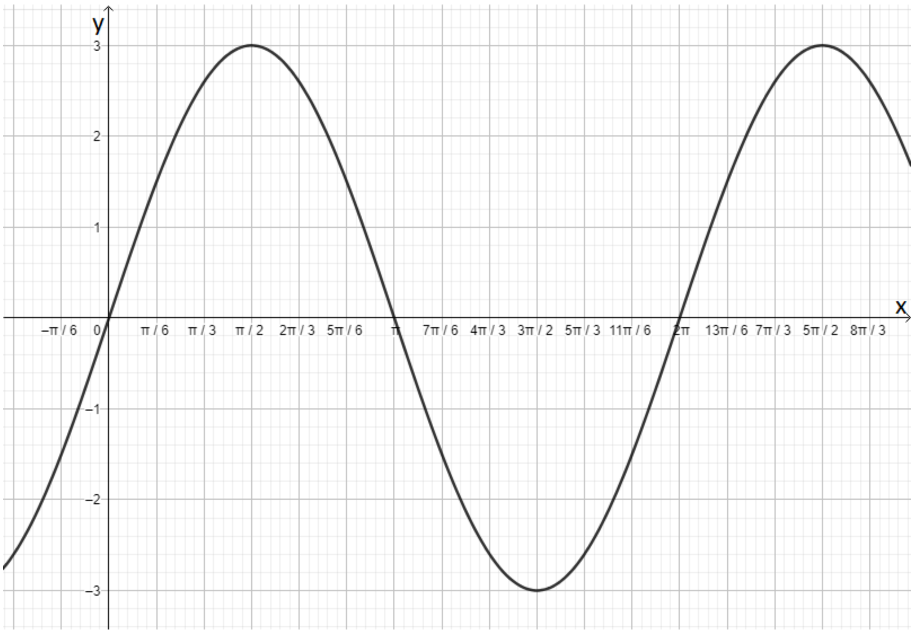


Figura 32: Gráfico da função $f_1(x) = 3sen(x)$.

Mostre aos alunos que o valor máximo da função $f_1(x) = 3sen(x)$ é o valor máximo da $f(x)$ multiplicado por 3. Generalize para o caso da função $f(x) = b \cdot sen(x)$, onde o valor máximo será o valor máximo da $f(x)$ multiplicado por b. Dado por $b \cdot 1$. Assim, o valor máximo de uma função do tipo $f(x) = b \cdot sen(x)$ será b.

Pegunte aos alunos sobre o valor mínimo. É esperado que eles cheguem à conclusão de que o valor mínimo de uma função do tipo $f(x) = b \cdot sen(x)$ será $-b$, já que o raciocínio é análogo ao para descobrir o valor máximo.

Peça aos alunos que repitam o processo para a função $g_1(x) = 2cos(x)$. Solicite que montem a tabela, o gráfico e que cheguem a uma generalização para os valores máximos e mínimos de uma função do tipo $g(x) = b \cdot cos(x)$.

Após os alunos terminarem este processo, proponha a eles duas novas funções:

$$f_2(x) = -2 + 3sen(x) \text{ e } g_2(x) = 1 + 2cos(x).$$

Explique que, para obtermos os valores para esta função, basta adicionarmos -2, aos resultados obtidos para a função $f_1(x) = 3sen(x)$, e represente na tabela os valores encontrados:

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x) = -2 + 3senx$	x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x) = -2 + 3senx$
0	0	0	-2	π	0	0	-2
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-\left(\frac{3\sqrt{2}+4}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	1	3	1	$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3	-5
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-\left(\frac{3\sqrt{2}+4}{2}\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$
				2π	0	0	-2

Tabela 12: Valores de $f(x) = sen(x)$ e $f_1(x) = 3sen(x)$ e $f_2(x) = -2 + 3sen(x)$.

Plote com os alunos os valores encontrados em um gráfico:

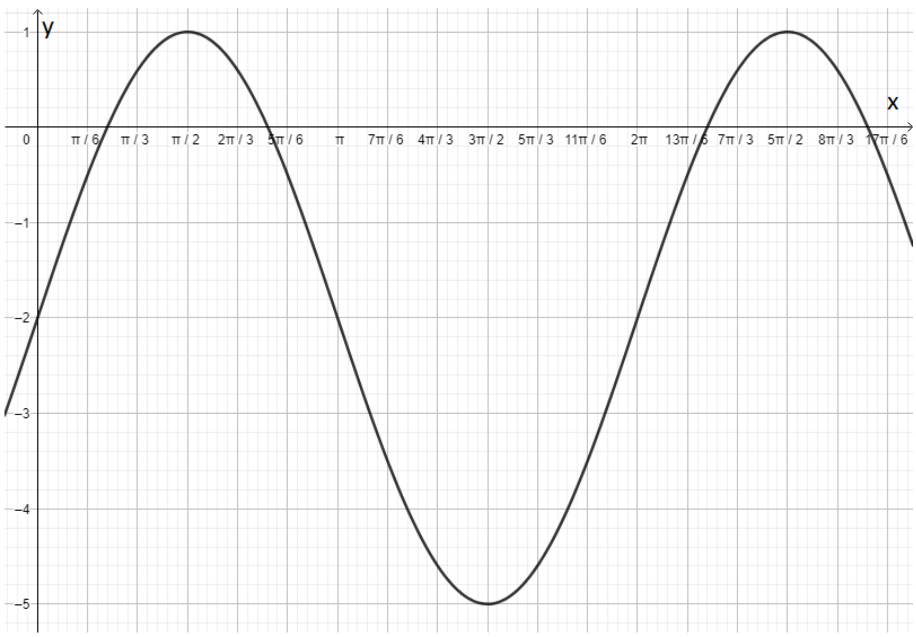


Figura 33: Gráfico da função $f_2(x) = -2 + 3sen(x)$.

Mostre aos alunos que o valor máximo da função $f_2(x) = -2 + 3sen(x)$ é o valor máximo da $f(x)$ multiplicado por 3 e adicionando -2. Generalize para o caso da função $f(x) = a + b \cdot sen(x)$, onde o valor máximo será o valor máximo da $f(x)$ multiplicado por b e adicionando a. Dado por $a + b \cdot 1$. Assim, o valor máximo de uma função do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(x)$ será $a + b$.

Pegunte aos alunos sobre o valor mínimo. É esperado que eles cheguem à conclusão de que o valor mínimo de uma função do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(x)$ será $a - b$, já que o raciocínio é análogo ao para descobrir o valor máximo.

Peça aos alunos que repitam o processo para a função $g_2(x) = 1 + 2cos(x)$. Solicite que montem a tabela, o gráfico e que cheguem a uma generalização para os valores máximos e mínimos de uma função do tipo $g(x) = a + b \cdot cos(x)$.

Ao fim desta atividade, os alunos deverão compreender que, dada uma função trigonométrica do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(x)$ ou $g(x) = a + b \cdot cos(x)$, seus valores estarão compreendidos no intervalo $[a - b, a + b]$.

Recursos:

Software GeoGebra e projetor.

Avaliação:

Observar a participação dos alunos durante as atividades. Solicitar aos alunos uma autoavaliação e propor uma lista de exercícios.

Sugestões de exercícios:

Exemplo 3.19. *(Ufpb 2011- Adaptada) Com o objetivo de aumentar a produção de alimentos em certa região, uma Secretaria de Agricultura encomendou a uma equipe de agrônomos um estudo sobre as potencialidades do solo dessa região. Na análise da temperatura do solo, a equipe efetuou medições diárias, durante quatro dias consecutivos, em intervalos de uma hora.*

As medições tiveram início às 6 horas da manhã do primeiro dia (t = 0). Os estudos indicaram que a temperatura T, medida em graus Celsius, e o tempo t, representando o número de horas decorridas após o início das observações, relacionavam-se através da expressão:

$$T(t) = 26 + 5cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Com base nessas informações, determine:

a) A temperatura do solo, às 6 horas da manhã do primeiro dia.

b) O valor máximo que a função T(t) atinge e o horário em que este valor é atingido.

c) O valor mínimo que a função T(t) atinge e o horário em que este valor é atingido.

Resolução do Exemplo 3.19.

a) Para determinarmos a temperatura do solo às 6 horas da manhã do primeiro dia, basta calcularmos $T(0)$. Assim:

$$T(t) = 26 + 5cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$T(0) = 26 + 5cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 0 + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$T(0) = 26 + 5cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$T(0) = 26 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$T(0) = 26 - 2,5$$

$$T(0) = 23,5.$$

Logo, a temperatura às 6 horas da manhã foi de 23,5 graus Celsius.

b) Comparando a função $T(t) = 26 + 5cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}\right)$ com $g(x) = a + b \cdot cos(x)$, percebemos que $a = 26$ e $b = 5$. Desta forma, o valor máximo será:

$$T_{max} = a + b \Rightarrow T_{max} = 26 + 5 \Rightarrow T_{max} = 31.$$

Para determinarmos o horário, temos que lembrar que o maior valor para o cosseno é 1, que ocorre para arcos iguais a $2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, precisamos resolver a equação $cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}\right) = 1$, ou seja:

$$\tfrac{\pi}{12}t + \tfrac{4\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow t = 24k - 16 \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, atribuindo valores para k, teremos:

$k = 0$	$\Rightarrow$	$t = -16$	que nos dá:	-16 + 6h = -10h que não convém
$k = 1$	$\Rightarrow$	$t = 8$	que nos dá:	8h + 6h = 14 horas
$k = 2$	$\Rightarrow$	$t = 32$	que nos dá:	1d + 8h + 6h = 14 horas do 2º dia
$k = 3$	$\Rightarrow$	$t = 56$	que nos dá:	2d + 8h + 6h = 14 horas do 3º dia.
$k = 4$	$\Rightarrow$	$t = 80$	que nos dá:	3d + 8h + 6h = 14 horas do 4º dia.

Logo, podemos concluir que a temperatura máxima do solo é de 31 ºC e é atingida sempre as 14 horas.

c) Observando a função $T(t) = 26 + 5cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}\right)$ e comparando com $g(x) = a + b \cdot cos(x)$, percebemos que $a = 26$ e $b = 5$. Desta forma, o valor mínimo será:

$$T_{min} = a - b \Rightarrow T_{min} = 26 - 5 \Rightarrow T_{min} = 21.$$

Para determinarmos o horário, temos que lembrar que o menor valor para o cosseno é -1, que ocorre para arcos iguais a $2k\pi + \pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, precisamos resolver a equação $cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}\right) = -1$, ou seja:

$$\tfrac{\pi}{12}t + \tfrac{4\pi}{3} = 2k\pi + \pi \Rightarrow t = 24k - 4, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, atribuindo valores para k, teremos:

$k=0 \;\Rightarrow\; t=-4$ que nos dá: -4 + 6h = 2 horas do 1º dia
$k=1 \;\Rightarrow\; t=20$ que nos dá: 20h + 6h = 2 horas do 2º dia
$k=2 \;\Rightarrow\; t=44$ que nos dá: 1d + 20h + 6h = 2 horas do 3º dia
$k=3 \;\Rightarrow\; t=68$ que nos dá: 2d + 20h + 6h = 2 horas do 4º dia.

Logo, podemos concluir que a temperatura minima do solo é de 21 ºC e é atingida sempre às 2 horas.

Exemplo 3.20. *(Vunesp-SP) Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em ºC) do solo em uma determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às três horas da manhã do primeiro dia (t = 0) e terminou 72 horas depois (t = 72). Os dados puderam ser aproximados pela função* $H(t) = 15 + 5sen\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right)$*, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação e H(t) a temperatura (em ºC) no instante t.*

a) Resolva a equação $sen\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$ *, para* $t \in [0, 24]$.

b) Determine a temperatura máxima atingida e o horário em que essa temperatura ocorreu no primeiro dia da observação.

Resolução do Exemplo 3.20.

a) Para resolvermos a equação, devemos observar que o valor do seno é igual a 1 para arcos do tipo $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, temos que:

$$sen\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 24k - 12.$$

Como $t \in [0, 24]$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos que:

$k=0 \;\Rightarrow\; t=-12$ que não convém
$k=1 \;\Rightarrow\; t=12$
$k=2 \;\Rightarrow\; t=36$ que não convém.

Assim, a solução da equação $sen\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$, para $t \in [0, 24]$, é $t = 12$.

b) Comparando a função $H(t) = 15 + 5sen\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right)$ com $f(x) = a + b \cdot senx$, percebemos que $a = 15$ e $b = 5$. Portanto, o valor máximo da função $H(t)$ é dado por:

$$H_{max} = a + b \Rightarrow H_{max} = 15 + 5 \Rightarrow H_{max} = 20.$$

Para determinarmos o horário em que a temperatura máxima ocorreu no primeiro dia de observação, devemos resolver justamente a equação do item (a), pois a função terá seu valor máximo no primeiro dia de observação quando $sen\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$, para $t \in [0, 24]$.

Portanto, t deverá ser 12. Como $t = 0$ equivale às 3 horas da manhã, $t = 12$ é equivalente às 15 horas do 1º dia.

Assim, a temperatura máxima do solo será de 20 ºC e foi atingida às 15 horas no primeiro dia.

Exemplo 3.21. *(UFPB 2012 - adaptada) Um especialista, ao estudar a influência da variação da altura das marés na vida de várias espécies em certo manguezal, concluiu que a altura A das marés, dada em metros, em um espaço de tempo não muito grande, poderia ser modelada de acordo com a função:*

$$A(t) = 1,6 - 1,4sen\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Nessa função, a variável t representa o tempo decorrido, em horas, a partir da meia-noite de certo dia. Determine o intervalo de variação da altura das marés.

Resolução do Exemplo 3.21.

Determinar o intervalo das alturas das marés é descobrir a maior e a menor altura que a maré atinge.

Para isso vamos comparar a função $A(t) = 1,6 - 1,4sen\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ com $f(x) = a + b \cdot sen(x)$. Assim, percebemos que $a = 1,6$ e $b = -1,4$. Então:

$$A_{max} = a + b \Rightarrow A_{max} = 1,6 + (-1,4) \Rightarrow A_{max} = 0,2$$

$$A_{min} = a + b \Rightarrow A_{min} = 1,6 - (-1,4) \Rightarrow A_{min} = 3.$$

Analisando os resultados obtidos, é fácil perceber que temos algo estranho, pois o valor encontrado como mínimo é maior que o valor encontrado como máximo. É importante discutir com o aluno o motivo de tal inversão. Explique que, pelo fato de termos $b < 0$, isso faz com que a função seno se inverta e o ponto que antes era o valor máximo passe a ser o mínimo e vice e versa. Se possível, mostre aos alunos isso no *software* GeoGebra.

Agora, podemos responder que o intervalo dos valores que a maré atinge é $[0,2; 3]$.

3.5 INEQUAÇÕES LINEARES

As inequações são apresentadas aos alunos no Ensino Fundamental e revisitada no 1º ano do Ensino Médio. Porém durante o 3º ano do Ensino Médio, é trabalhada a Geometria Analítica. Quando estudar a reta, é interessante tratar a resolução gráfica de inequações do 1º grau. IEZZI [11] trata deste tema e apresenta alguns exercícios que apresentamos nos Exemplos 3.22 e 3.23.

Exemplo 3.22. *[11] "Represente graficamente o conjunto solução do sistema:* $\begin{cases} 3x + y > 3 \\ 2x - 2y > 0 \end{cases}$ *."*

Solução do Exemplo 3.22

Primeiramente, vamos determinar as retas que representam o limite dos semiplanos definidos por cada inequação do sistema.

Da 1ª inequação, obtemos a seguinte equação reduzida de reta, $3x + y > 3 \Rightarrow y > 3 - 3x$, que substituiremos por $r : y = 3 - 3x$.

Da 2ª inequação, obtemos a seguinte equação reduzida de reta, $2x - 2y > 0 \Rightarrow y < x$, que substituiremos por $s : y = x$.

Plotando as retas r e s no plano cartesiano, obtemos:

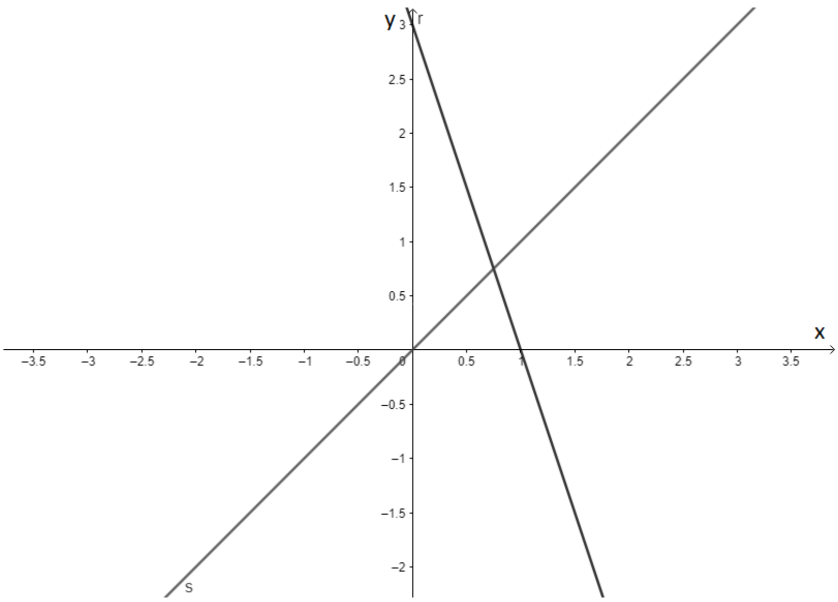


Figura 34: Representação das retas r e s.

Fazendo o teste com o ponto $(0, 0)$ para verificar qual parte do semiplano cada inequação representa, temos:

1ª inequação: $3x + y > 3$, substituindo $(0, 0)$, temos $3 \cdot 0 + 0 > 3 \Rightarrow 0 < 3$. Logo, o semiplano representado pela 1ª inequação é o que não contém o ponto $(0, 0)$.

2ª inequação: $2x - 2y > 0$, substituindo $(0, 1)$, pois o ponto como $(0, 0) \in s$ não é conveniente usá-lo, assim temos $2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 > 0 \Rightarrow -2 > 0$. Logo o semiplano representado pela 2ª inequação é o que não contém o ponto $(0, 1)$.

Marcando estas regiões no plano, temos:

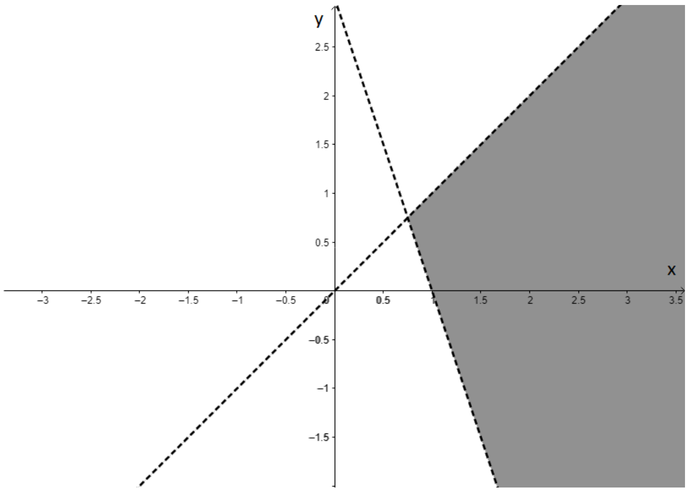


Figura 35: Representação da solução do sistema do Exemplo 3.22.

Assim, a solução do sistema são os pontos da região destacada do plano.

Exemplo 3.23. *[11] "Escreva a inequação de primeiro grau que represente a região assinalada."*

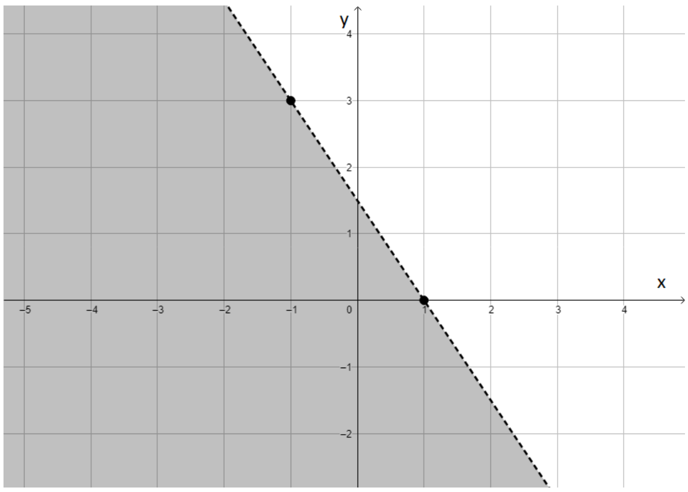


Figura 36: Região do Exemplo 3.23

Primeiramente, iremos definir a equação da reta que limita a região do semiplano. Por ser uma reta, pode ser representada pela equação reduzida $y = ax + b$. Substituindo os pontos em destaque, $(1, 0)$ e $(-1, 3)$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 1 + b \\ 3 = a \cdot (-1) + b \end{cases}$$

Efetuando a adição entre as equações, temos:

$$3 = 2b \Rightarrow b = \frac{3}{2}.$$

Substituindo b na 1ª equação, temos:

$$0 = a + b \Rightarrow 0 = a + \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}.$$

A equação reduzida da reta é $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$, e a equação geral da reta é $3x + 2y = 3$.

Substituindo o ponto $(0,0)$ que pertence a região que queremos representar, temos:

$$3x + 2y = 3 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \neq 3 \Rightarrow 0 < 3$$

.

Assim a região destacada pode ser representada pela inequação $3x + 2y < 3$.

Os Exemplos 3.22 e 3.23, apresentam exercícios de inequações com conceitos que são pré-requisitos para a resolução de problemas de programação linear de forma gráfica. Apresentaremos um plano de aula para trabalhar este conceito com os alunos do Ensino Médio.

3.5.1 *Plano de aula: Inequações Lineares*

Assunto:

Resolução gráfica de inequações.

Público alvo:

3º ano do Ensino Médio.

Objetivo:

Proporcionar uma prática onde os alunos utilizem os conceitos de inequações e introduzir problemas de Otimização Linear.

Duração:

2 horas-aulas

Pré-requisito:

Funções afim, inequações lineares e representação gráfica de uma inequação linear.

Desenvolvimento:

1ª Atividade: Apresentando a ideia de um problema de Otimização Linear.

Objetivo: Construir junto aos alunos a solução de um problema de Otimização Linear, passando pela interpretação do problema, sua modelagem e a determinação da solução.

Proponha aos alunos o seguinte problema apresentado por LACHTERMACHER [12]:

Exemplo 3.24. *A indústria Alumilâminas S/A iniciou suas operações em janeiro de 2001 e já vem conquistando espaço no mercado de laminados brasileiro, tendo contratos fechados de fornecimento para todos os três tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessura fina, média ou grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas: uma localizada em São Paulo e a outra no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas de lâminas médias e 28 toneladas de lâminas grossas. Devido à qualidade dos produtos da Alumilâminas S/A, há uma demanda extra para cada tipo de lâmina. A fábrica de São Paulo tem um* *custo de produção de R$ 100.000,00 para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 2 toneladas de lâminas grossas por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de R$ 200.000,00 para uma produção de 2 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 7 toneladas de lâminas grossas. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender os pedidos ao menor custo possível?*

Dê tempo para os alunos lerem o problema e fazerem uma primeira análise. Depois, faça uma leitura junto aos alunos, procurando comentar os pontos importantes do prolema.

Faça as seguintes perguntas aos alunos, anotando as respostas no quadro.

a) O que o problema quer que calculemos? O que devemos determinar?

Espera-se que os alunos apontem que o objetivo do problema é determinar os dias que cada fábrica irá operar.

b) O que precisamos considerar para determinar os dias que cada fábrica irá operar?

Espera-se que os alunos apontem os dados do problema, o custo de produção, capacidade de cada fábrica e a quantidade que precisa ser produzida.

Caso os alunos apresentem alguma dificuldade, conduza com os seguintes questionamentos:

- Quantas fábricas a empresa possui?

- Qual a capacidade de cada uma?

- Qual o custo de cada uma?

- Quanto a empresa precisa produzir?

É importante que fique claro, para os alunos, que são duas fábricas que irão produzir, a de São Paulo e a do Rio de Janeiro. E que cada fábrica tem suas características:

Fábrica SP	Fábrica RJ
Custo de produção diário	Custo de produção diário
R$ 100.000,00	R$ 200.000,00
Pode produzir diariamente	Pode produzir diariamente
Lâmina Fina 8 t	Lâmina Fina 2 t
Lâmina média 1 t	Lâmina média 1 t
Lâmina grossa 2 t	Lâmina grossa 7 t

O aluno deve perceber que a empresa precisa produzir, no mínimo, 16 t de lâmina Fina, 6 t de lâmina média e 28 t de lâmina grossa.

c) Como podemos escrever matematicamente o nosso problema?

Procure mostrar aos alunos que precisamos determinar os dias que cada fábrica irá trabalhar. Então, isso é o que não sabemos, ou seja, a incógnita do problema. É importante que eles percebam que cada fábrica irá produzir por um número de dias, e que estes não precisam ser necessariamente iguais e, por fim, podemos representar esses valores desconhecidos .

Provavelmente, os alunos apontaram para chamá-los de x e y, pois esta é a forma como geralmente as incógnitas são chamadas no Ensino Básico.

Então, podemos dizer que:

- Número de dias em que a fábrica de São Paulo irá produzir $= x$.

- Número de dias em que a fábrica do Rio de janeiro irá produzir $= y$.

Vamos, agora, pensar de que forma devemos determinar estas incógnitas. Os alunos precisam perceber que o objetivo é produzir a quantidade necessária com o menor custo possível. O custo de cada fábrica será calculado com relação a quantos dias irá produzir, e o custo total é a soma do custo de São Paulo com o custo do Rio de Janeiro, e este custo total precisa ser mínimo (Para simplificar os cálculos, iremos representar R$ 100.000,00 apenas como 100 e R$ 200.000,00 apenas como 200). Assim, o objetivo é :

$$\textit{Minimizar: } C_t = x \cdot 100 + y \cdot 200.$$

Determinado o objetivo, precisamos verificar as restrições. Converse com os alunos sobre a não negatividade das incógnitas e que, para entregar a quantidade de lâminas necessárias, a fábrica necessariamente precisa produzir. Logo, as incógnitas não podem ser negativas, pois não faz sentido dias negativos.

Assim, uma restrição pode ser escrita como:

$$x, y \geq 0.$$

As outras restrições estão relacionadas com a capacidade de produção para cada tipo de lâmina. Comente com os alunos que, quanto mais dias produzir, mais lâminas teremos, porém maior custo também. Veja caso por caso:

- Lâminas finas

  São Paulo pode produzir 8t, Rio de Janeiro 2t e precisamos de no mínimo 16t.

  Assim, temos:

$$x \cdot 8 + y \cdot 2 \geq 16.$$

- Lâminas médias

  São Paulo pode produzir 1t, Rio de Janeiro 1t e precisamos de no mínimo 6t.

Assim, temos:

$$x \cdot 1 + y \cdot 1 \geq 6.$$

- Lâminas grossas

São Paulo pode produzir 2t, Rio de Janeiro 7t e precisamos de no mínimo 28t.

Assim, temos:

$$x \cdot 2 + y \cdot 7 \geq 28.$$

Discuta com os alunos se concordam com o que fizemos, questione sobre o que encontramos, que tipo de expressão matemática temos aqui. Espera-se que comentem sobre as inequações e sua representação gráfica.

Agora, vamos organizar nosso objetivo e as restrições para, então, partirmos para a solução:

Minimizar:

$$C_t = x \cdot 100 + y \cdot 200$$

Sujeito à:

$$\begin{gathered} 8x + 2y \geq 16 \\ x + y \geq 6 \\ 2x + 7y \geq 28 \\ x, y \geq 0. \end{gathered}$$

Mostre aos alunos que, como temos restrições que envolvem x e y, teremos alguns valores que não poderão ser utilizados. Então, precisamos visualizar as possibilidades para os valores de x e y. Como as restrições são inequações, podemos representá-las no plano, e analisar a região que elas delimitarão.

Para isso, vamos, primeiramente, observar as retas que limitam o semiplano definido por cada restrição.

$$\begin{array}{lllll} 8x + 2y \geq 16 & \longrightarrow & 8x + 2y = 16 & \longrightarrow & r_1 : y = 8 - 4x \\ x + y \geq 6 & \longrightarrow & x + y = 6 & \longrightarrow & r_2 : y = 6 - x \\ 2x + 7y \geq 28 & \longrightarrow & 2x + 7y = 28 & \longrightarrow & r_3 : y = 4 - \frac{2x}{7} \end{array}$$

De posse das retas, ajude os alunos a recordarem como representar as inequações no plano e determinar a região que interessa ao problema.

A Figura 37 mostra tal região:

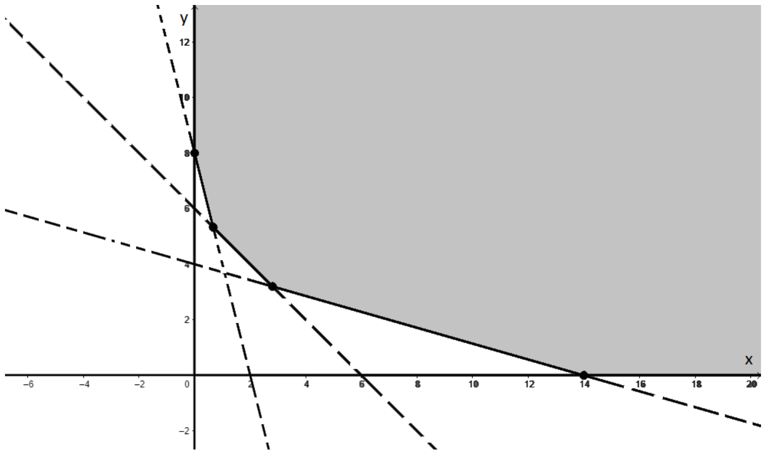


Figura 37: Região determinada pelas restrições.

É interessante mostrar aos alunos que a região é um polígono, chamado de polígono das soluções viáveis.

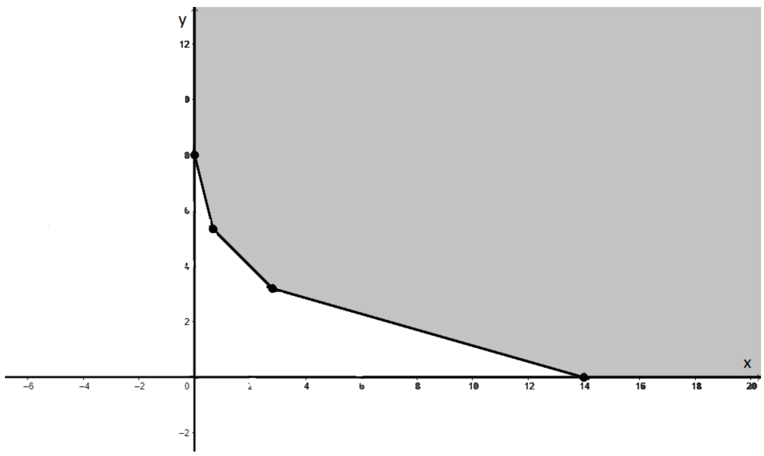


Figura 38: Polígono das soluções viáveis.

Mostre aos alunos que qualquer ponto do polígono é solução para o problema. Escolha um, e mostre que é válido:

Tomando o ponto $(6,8)$, podemos ver que é uma solução, pois satisfaz as restrições:

$$\begin{array}{rclcrclcl} 8x+2y & \geq & 16 & \longrightarrow & 8\cdot 6+2\cdot 8 & = & 64 & \geq & 16 \\ x+y & \geq & 6 & \longrightarrow & 6+8 & = & 14 & \geq & 6 \\ 2x+7y & \geq & 28 & \longrightarrow & 2\cdot 6+7\cdot 8 & = & 68 & \geq & 28 \\ x,y & \geq & 0 & \longrightarrow & 6;8 & \geq & 0. & & \end{array}$$

Porém, será que esta é a melhor solução, é a que nos dará o custo mínimo? Veja o custo para esta solução:

$$C_t = x\cdot 100 + y\cdot 200 \longrightarrow C_t = 6\cdot 100 + 8\cdot 200 \Rightarrow C_t = R\$2.200.000,00.$$

Peça aos alunos para testarem outros pontos e verificar se o custo é maior ou menor do que o encontrado.

Pergunte aos alunos o que podemos fazer para determinar o menor custo.

Vamos analisar a função objetivo: $C_t = x \cdot 100 + y \cdot 200$, observe que por ser linear, a função é a equação de uma reta,cujo a equação reduzida é $r : y = \frac{C_t}{200} - \frac{x}{2}$.

Observe que a interseção desta reta com o eixo das ordenadas é no ponto $C = (0, \frac{C_t}{200})$. Assim, quanto maior for C_t, mais alto no eixo das ordenadas estará o ponto C.

Para observarmos isso, vamos dizer que o custo C_t é zero, e plotar a reta resultante no plano com as soluções possíveis. Observe:

$$100x + 200y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x.$$

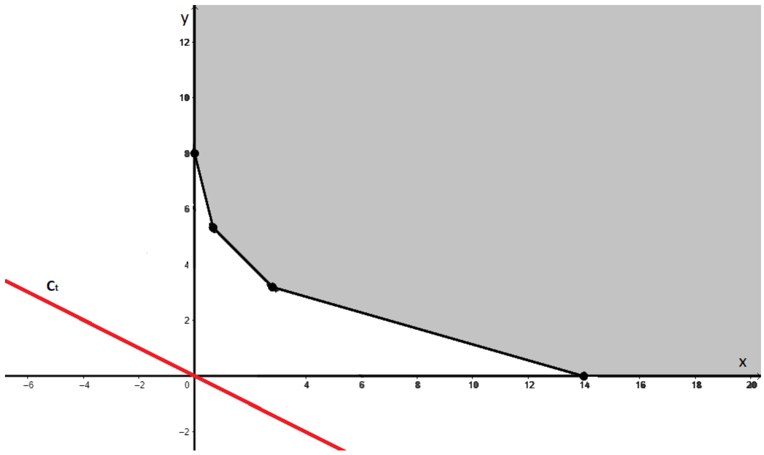


Figura 39: Reta da função objetivo no mesmo plano que o polígono de soluções viáveis.

Mostre aos alunos que, se atribuirmos outro valor para C_t, como $C_t = 100$, teremos outra reta paralela à primeira. Observe:

$$100x + 200y = 100 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

E, para qualquer valor que atribuirmos à C_t, teremos retas paralelas à primeira. Assim, para determinarmos a melhor solução, esta deve pertencer a esta reta. Logo basta verificarmos uma reta que tenha pelo menos 1 ponto em comum com a região onde temos soluções possíveis.

O aluno irá perceber que, conforme a reta se aproxima da região das soluções possíveis, maior será o valor de C_t. Logo a melhor solução é aquela na qual a reta atinge o ponto mais inferior possível. Observe a Figura 40.

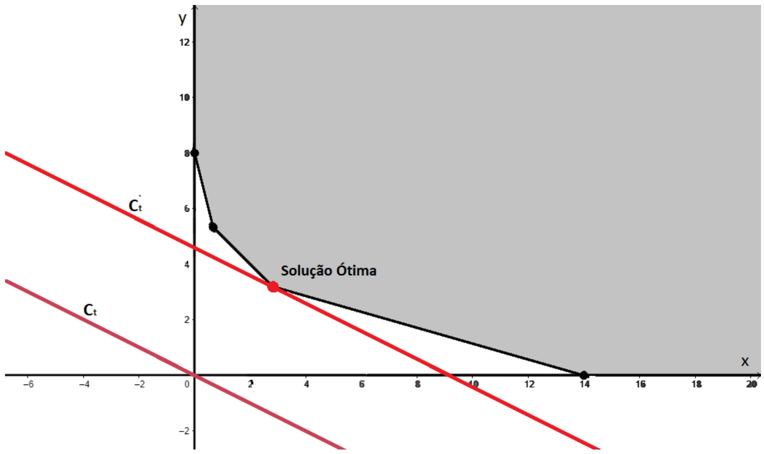


Figura 40: Solução ótima.

Neste caso, a solução ótima é o ponto $\left(\frac{14}{5}, \frac{16}{5}\right)$. Este ponto satisfaz todas as restrições. Observe:

$$\begin{array}{rcl}
8x+2y & \geq & 16 \longrightarrow 8\cdot\frac{14}{5}+2\cdot\frac{16}{5} = \frac{144}{5} = 28,8 \geq 16\\
x+y & \geq & 6 \longrightarrow \frac{14}{5}+\frac{16}{5} = \frac{30}{5} = 6 \geq 6\\
2x+7y & \geq & 28 \longrightarrow 2\cdot\frac{14}{5}+7\cdot\frac{16}{5} = \frac{140}{5} = 28 \geq 28\\
x,y & \geq & 0 \longrightarrow \frac{14}{5}, \frac{16}{5} \geq 0
\end{array}$$

Já o custo de produção é dado por:

$$C_t = x\cdot 100 + y\cdot 200 \Rightarrow C_t = \frac{14}{5}\cdot 100 + \frac{16}{5}\cdot 200 \Rightarrow C_t = 920.$$

Logo, o custo de produção é de R$ 920.000,00.

Assim, podemos dizer que, para conseguir atender a demanda ao menor custo, a fábrica de São Paulo deverá produzir por $\frac{14}{5} = 2,8$ dias. Mais precisamente, 2 dias, 19 horas e 12 minutos, e a fábrica do Rio de Janeiro deverá produzir por $\frac{16}{5} = 3,2$ dias. Mais precisamente, 3 dias, 4 horas e 48 minutos. E a empresa Alumilâminas S/A terá um custo de R$ 920.000,00.

Para a plotagem dos gráficos, a visualização por parte do aluno é bastante facilita se o professor puder utilizar algum *software*, como o GeoGebra.

2ª Atividade: Aprimorando a técnica de solução gráfica de um problema de Otimização Linear.

Objetivo: Desenvolver nos alunos a capacidade de interpretar, modelar e resolver um problema de Otimização Linear com duas variáveis.

Depois de explicar aos alunos o procedimento, peça para se dividirem em grupos de até 4 alunos, e proponha mais um exercício, que mostramos no Exemplo 3.25. Neste momento, o ideal é deixar os alunos tentarem fazer sozinhos, mas passe pelos grupos e verifique se estão conseguindo modelar e resolver o problema.

Exemplo 3.25. *(Problema adaptado do proposto por LACHTERMACHER [12])*

A empresa Serra Serra Serrador fabrica dois tipos de madeiras compensadas (placas de aglomerados). Os dados abaixo resumem a produção em horas por unidade em cada uma das três operações de produção, o tempo máximo disponível em cada operação e o lucro unitário de cada placa:

	Operações em horas			*Lucro por unidade*
Aglomerado	*I*	*II*	*III*	
Placa A	*2*	*2*	*4*	*R$ 40,00*
Placa B	*10*	*3*	*2*	*R$ 30,00*
Tempo máximo disponível	*90*	*40*	*60*	-

Quantas unidades de cada placa de aglomerado devem ser produzidas, de maneira a otimizar o lucro da Serraria?

Para resolver este problema, vamos, primeiramente definir as variáveis: x será a quantidade produzida da Placa A, e y a quantidade produzida da Placa B.

Agora, vamos definir a função objetivo. Como queremos otimizar o lucro, este deve ser o maior possível. Assim:

$$Maximizar : L = 40x + 30y.$$

O próximo passo é definir as restrições do problema, que, neste caso, são as horas disponíveis para cada operação de produção.

Para a operação I, temos 90 horas disponíveis. Assim:

$$2x + 10y \leq 90.$$

Para a operação II, temos 40 horas disponíveis. Assim:

$$2x + 3y \leq 40.$$

Para a operação III, temos 60 horas disponíveis. Assim:

$$4x + 2y \leq 60.$$

Logo, o problema pode ser definido por:

$$
\begin{aligned}
Maximizar: L &= 40x + 30y \\
\text{Sujeito a:} & \\
2x + 10y &\leq 90 \\
2x + 3y &\leq 40 \\
4x + 2y &\leq 60 \\
x, y &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Definidas a função objetivo e as restrições, vamos plotar as restrições no plano, determinando a região com as soluções viáveis.

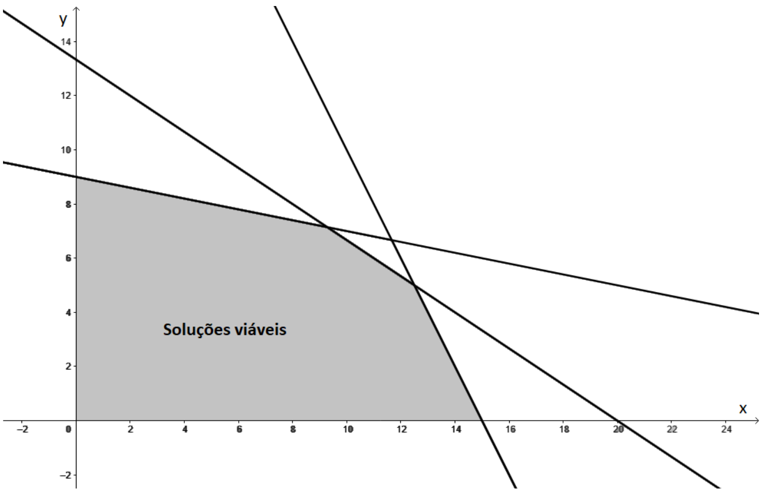


Figura 41: Soluções viáveis definidas pelas restrições.

A região em destaque na Figura 41 é o polígono das soluções viáveis. Plotaremos a reta da função objetivo, e vamos incrementando até determinarmos a solução ótima.

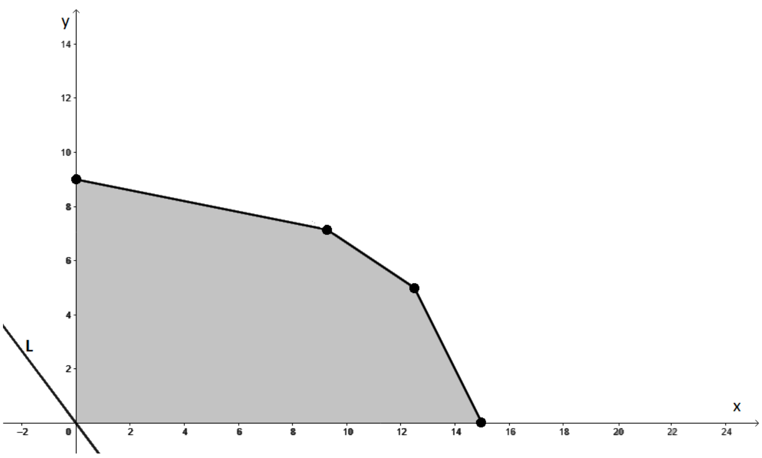


Figura 42: Polígono das soluções viáveis.

Traçando retas paralelas a reta L, determinaremos a solução ótima.

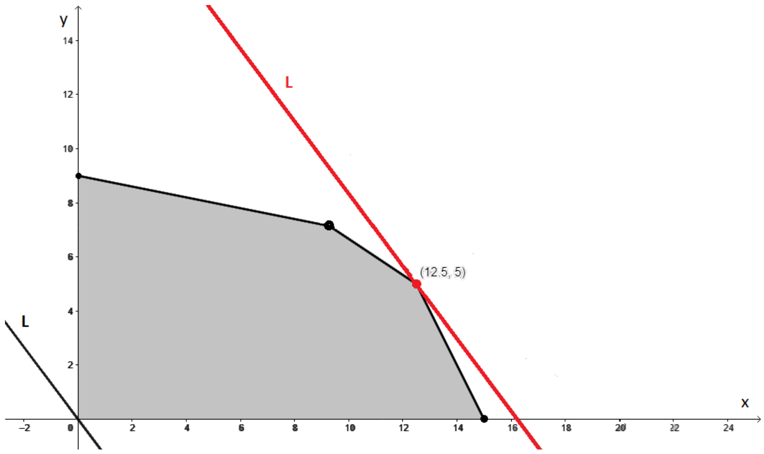


Figura 43: Solução Ótima.

Desta forma, determinamos a solução ótima, em que $x = 12,5$ e $y = 5$, e o lucro da serralheria será $L = 40x + 30y \Rightarrow L = 40 \cdot 12,5 + 30 \cdot 5 \Rightarrow L = 650$

Assim para otimizar a produção a serralheria deve produzir 12,5 Placas A e 5 Placas B, e terá um lucro de R$ 650,00.

Com estes exercícios, os alunos poderão ter uma ideia da Otimização Linear, e conhecer um pouco de sua vasta aplicação.

Avaliação:

Observar a participação dos alunos durante as atividades, solicitar aos alunos uma autoavaliação e propor que resolva o exercício do Exemplo 3.26 individualmente.

Sugestão de exercício:

Exemplo 3.26. *(Problema proposto por HERNANDEZ[9]) A comissão organizadora da formatura do 3º ano promoveu grandes ações para levantar dinheiro para uma festa, e contou com a ajuda de outros colegas. Dentre as atividades propostas, uma delas era fazer e vender bombons nos intervalos da escola, e um grupo de amigas decidiu assumir a tarefa. Elas sabiam fazer dois tipos de bombons: tradicionais e trufados. Para fazer cada bombom tradicional, elas gastavam 7 minutos e, para os trufados eram necessários 16 minutos. O gasto para fazer um tradicional é de R$ 0,40 e um trufado é de R$ 1,60. Para fazer os bombons, foram investidos R$ 48,00 para compra dos ingredientes e 126 unidades de papel decorativo para embalar os bombons. Sabendo que elas possuem um tempo na semana de 9 horas para fazer os bombons, que os bombons tradicionais conterão 3 papeis decorativos e os trufados terão apenas 1 papel decorativo, e que os bombons tradicionais serão vendidos por R$ 2,00 e os trufados por R$ 3,50, quantos bombons tradicionais e trufados devem ser feitos para ter o maior lucro possível, sendo que todas unidades produzidas serão vendidas?*

Resolução do Exemplo 3.26:

Primeiramente, determinamos as variáveis e a função objetivo:

A quantidade produzida de bombons tradicionais será representada por x, e a quantidade produzida de bombons trufados será representada por y. Como o gasto com o bombom tradicional é de R$ 0,4 e ele é vendido à R$ 2,00 tem-se um lucro de R$ 1,60, já com o bombom trufado o gasto é de R$ 1,60 e ele é vendido à R$ 3,50, o lucro é de R$ 1,90. Assim, a função objetivo será:

$$Maximizar : L = 1,6x + 1,9y$$

Quanto às restrições, temos o tempo, de 9 horas ou 540 minutos; o gasto, que foi de R$ 48,00; e a quantidade de embalagens, que são 126. Assim, as inequações das restrições serão:

$$\begin{aligned} 7x + 16y &\leq 540 \\ 0,4x + 1,6y &\leq 48 \\ 3x + 1y &\leq 126 \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Plotando as inequações das restrições no plano, temos:

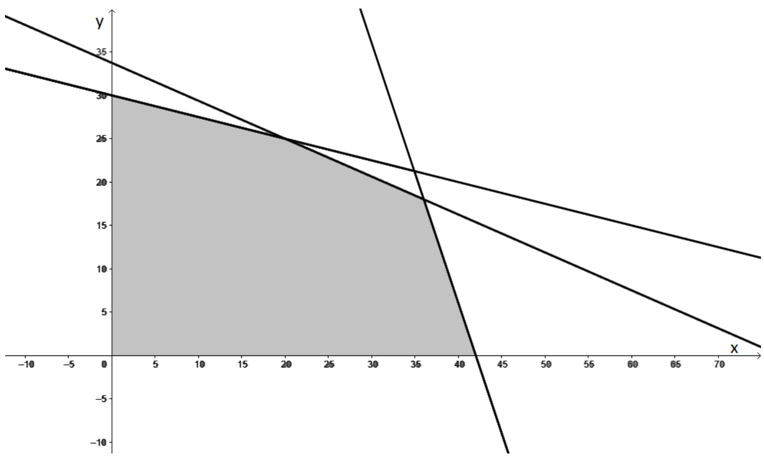


Figura 44: Restrições.

Assim, definimos o polígono com as soluções viáveis:

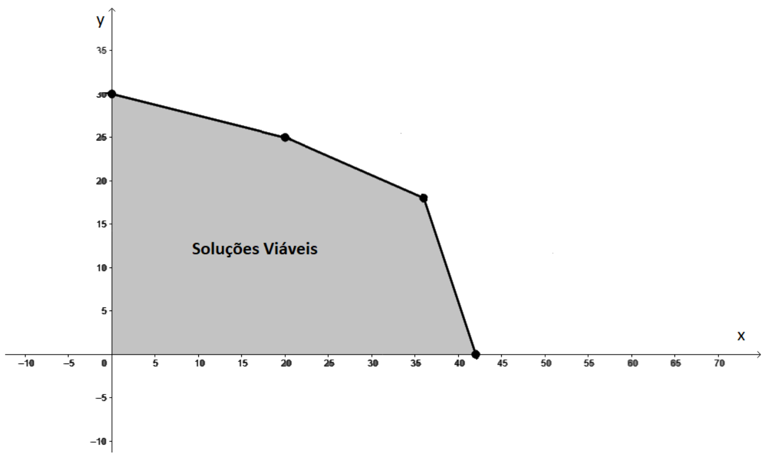


Figura 45: Polígono das soluções viáveis.

Traçando a reta da função objetivo, podemos determinar a solução ótima:

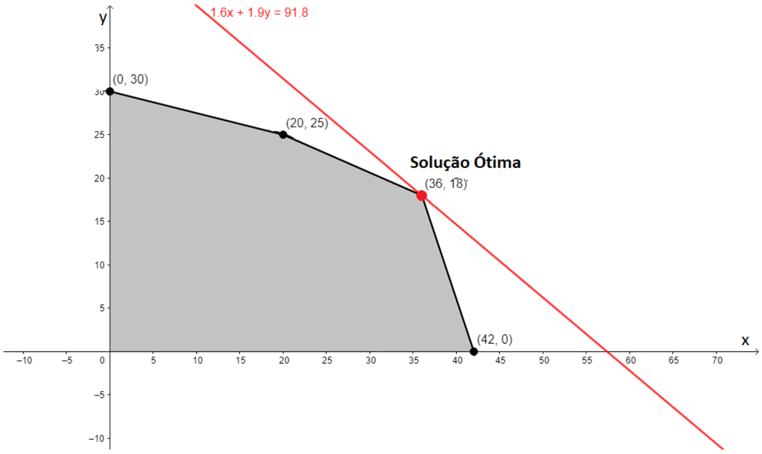


Figura 46: Solução Ótima.

Assim, podemos perceber que a solução ótima é dada por $x = 36$ e $y = 18$, e que para determinarmos o lucro máximo, substituiremos na função objetivo:

$$L = 1,6x + 1,9y \Rightarrow L = 1,6 \cdot 36 + 1,9 \cdot 18 \Rightarrow L = 91,8.$$

Logo, as alunas deverão fazer 36 bombons tradicionais e 18 bombons trufados para terem um lucro de R$ 91,80.

4 CONCLUSÕES

Este trabalho teve por objetivo fazer uma breve explanação do Ensino Básico brasileiro, mostrando por meio dos documentos oficiais, como a BNCC[3], BNCC - Ensino Médio [4], as Diretrizes Curriculares [5] e o Currículo Oficial do Estado de São Paulo [20], o que é esperado no ensino da Matemática para alunos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Os documentos mostram que a contextualização é fundamental para aproximar o educando do objetivo do ensino.

Também levantamos os assuntos da Matemática recomendados pelo Currículo Oficial do Estado de São Paulo [20], em que julgamos ser possível de se tratar de máximos e mínimos. Fizemos uma breve apresentação destes assuntos tendo como base a literatura direcionada ao Ensino Básico. Os assuntos tratados no Ensino Fundamental foram múltiplos e divisores, com foco no mínimo múltiplo comum, no máximo divisor comum, no perímetro e na área de figuras planas. No Ensino Médio, selecionamos as funções polinomiais do segundo grau, as funções trigonométricas e as soluções gráficas de inequações.

Abordamos também a Otimização Linear, focando na resolução gráfica de problemas com duas variáveis e na resolução analítica, apresentando uma ferramenta onde é possível resolver problemas com três ou mais variáveis, utilizando apenas conceitos simples de equações lineares. Também apresentamos a Otimização Não-Linear, apresentando a forma de resolução gráfica, para problemas que se assemelham aos da Otimização Linear.

Enfim, propomos planos de aulas para o Ensino Fundamental e Médio, onde o objetivo é apresentar aos alunos a ideia de máximos e mínimos, procurando apresentar a Otimização de maneira sucinta nas atividades voltadas para o Ensino Fundamental e nas de funções quadráticas e trigonométricas, que são voltadas para alunos do Ensino Médio, e aprofundando o conceito de otimização na atividade voltada para os alunos do 3º ano do Ensino Médio, onde a otimização é abordada como aparece na literatura voltada para o estudo da Pesquisa Operacional.

As atividades propostas são sugestões nas quais o professor pode tratar deste tema de forma crescente, respeitando o amadurecimento cognitivo e fisiológico do aluno, procurando compreender que, para cada etapa do estudo, é possível introduzir a ideia de otimização, mesmo que não explicitamente, preparando o aluno para entender o processo de tomada de decisões, que é vastamente aplicado no cotidiano de várias áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática 2.ed., Contexto, São Paulo, (2004).

[2] BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES, Ayrton; Matemática: fazendo a diferença. São Paulo, FTD, (2006) (Coleção Fazendo a Diferença).

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – BNCC versão final. Brasília, DF, (2017).

`http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf`

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular Ensino Médio – BNCC. Brasília, DF, (2018).

`http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf`

[5] BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica; Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC; SEB; DICEI, (2013).

`http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192`

[6] FERREIRA, Aurelio Buarque de Holanda. Aurélio Júnior: dicionário escolar da língua portuguesa. Curitiba: Positivo, (2011).

[7] GAVINA, Maria Alice; LOPES, Sérgio Augusto Amaral; Perímetro e Área. 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste. 1ª edição, Rio de Janeiro, SBM (2016).

`https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_Perimetro-e-area.pdf`

[8] GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR., José Ruy; BONJORNO, José Roberto. *Matemática Fundamental: uma nova abordagem.* FTD, São Paulo, (2002).

[9] HERNANDEZ, Vinicius Valdivia, *Otimização Linear como ferramenta de integração de saberes no Ensino Médio*, Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São

Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) São José dos Campos, (2017) .

https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150870391

[10] HILLIER, Frederick. S.; LIEBERMAN, Gerald J. Introdução à Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro: Editora Campus Ltda./ São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, (1988).

[11] IEZZI, Gelson et al. *Matemática: volume único.* Atual, São Paulo, (1998).

[12] LACHTERMACHER, Gerson. Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões: modelagem em Excel 2.ed., Elsevier, Rio de Janeiro, (2004).

[13] LEIGUS, Alisson; FENERICH, Amanda Trojan; MORAIS, Márcia de Fátima; *Aplicações da Pesquisa Operacional*, III Encontro de Engenharia de Produção Agroindustrial - FECILCAM - Campo Mourão, PR. (2009).

http://www.fecilcam.br/anais/iii_eepa/pdf/3_02.pdf

[14] LIMA, Elon Lages. Números e funções reais. SBM, Rio de Janeiro (2014) (Coleção PROFMAT).

[15] MENDES, Alex Fernandes, *Problemas de otimização : uma proposta para o Ensino Médio*, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, (2015).

[16] MUNIZ NETO, Antonio Caminha, Geometria. SBM, Rio de Janeiro (2013) (Coleção PROFMAT).

[17] PEDROSO, Leonor Wierzynski , *Construção dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno com a utilização do software Geogebra.*

http://leonormat.pbworks.com/w/page/16389458/Geogebra%3A%20fun%C3%A7%C3%B5es%20seno%20e%20cosseno

[18] PINTO, Márcio Antônio Mota. *MMC e MDC: abordagem e resolução de problemas*, Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. **55f** São Luis, (2015).

[19] SALLES NETO, Luiz Leduíno de. *TÓPICOS DE PESQUISA OPERACIONAL PARA O ENSINO MÉDIO*, Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda - Pólo Universitário do Sul Fluminense - UFF - Volta Redonda, R, (2006).

http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/leduino.pdf

[20] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria

Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo : SE, 2012.72 p.

www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf

[21] SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Aplicações do MMC e do MDC "; Brasil Escola.

https://brasilescola.uol.com.br/matematica/aplicacoes-mmc-mdc.htm