Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Sistemas de recorrências lineares e suas aplicações

Cleuber Pereira Ramos
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

junho de 2018

Sistemas de recorrências lineares e suas aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Cleuber Pereira Ramos e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 17 de julho de 2018.

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
Prof. Dr. André Krindges
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

R175s Ramos, Cleuber Pereira.
Sistemas de recorrências lineares e suas aplicações / Cleuber Pereira Ramos. -- 2018
xiii, 43 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Moiseis dos Santos Cecconello.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Matemática discreta. 2. Equações lineares. 3. Sistemas matriciais. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Sistemas de recorrências lineares e suas aplicações"

Autor: Cleuber Pereira Ramos

defendida e aprovada em 15/06/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Moiseis dos Santos Cecconello
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor André Krindges
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor(a) Edgar Nascimento
Instituição : Instituto Federal de Mato Grosso – campus Cuiabá

Cuiabá, 15/06/2018.

ao meu filho.

Agradecimentos

Agradeço a minha família e amigos que acreditaram em mim, e as instituições que proporcionaram este curso.

Aos que aqui chegaram,

vale lembrar o ditado da persistência:

antes tarde do que nunca.

Ditado popular.

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar uma possível solução geral para sistemas de equações de recorrências lienares de ordem (m-1) relacionadas a equações de recorrências lineares de ordem m, através das teorias usuais de sistemas lineares e matrizes estudadas em álgebra linear e, consequentemente, a solução geral para equações de recorrências lineares de ordem m.

Palavras chave: Matemática discreta; equações lineares; sistemas matriciais.

Abstract

The objective of this dissertation is to present a possible general solution for systems of equations of order linear recurrences (m-1) related to linear recurrence equations of order m through the usual theories of linear systems and matrices studied in linear algebra, and consequently the general solution for equations of linear recurrences of order m.

Keywords: Discrete mathematics; linear equations; matrix systems.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Este trabalho tem por objetivo, oferecer material matemático referente as recorrências lineares estudadas até o presente momento.

Durante o curso pude observar algo que ame instigou ao estudo, a pesquisa do material pelo qual segue o conteúdo que será apresentado nesta dissertação.

Do conteúdo matemático desenvolvido até o momento, referente às soluções de recorrências lineares de primeira ordem, fui motivado a tentar encontrar soluções referente a um **sistema linear de recorrência de primeira ordem homogênea** e posteriormente o caso **não homogêneo**.

No entanto, tive que me debruçar novamente sob o conteúdo das recorrências lineares de primeira e segunda ordem, aprofundar melhor a compreensão das soluções encontradas e os teoremas referentes a esta teoria, (Carvalho e Morgado, 2015; Lima, 2014). E ainda revisar conteúdos, propriedades e teoremas sobre sistemas de equações e matrizes, com suas soluções (Santos, 2004).

Sendo assim, este trabalho tem por objetivo abordar os assuntos desenvolvidos nos livros até o presente momento em relação as equações de recorrências lineares, assunto do primeiro capítulo, e a intenção de ampliar o tema para os sistemas de equações de recorrências lineares, verificando se há alguma relação entre eles. E se há, de que forma esta relação matemática ocorre, assunto dos dois seguintes capítulos, e por último, um capítulo de exercícios contextualizados.

Capítulo 1

Recorrências

Neste capítulo serão apresentadas as formas introdutórias de equações de recorrências lineares, com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, sequências em que um termo qualquer é definido por uma expressão que envolve o termo anterior, com expoente destes termos igual a 1.

Conforme visto em Carvalho e Morgado (2015), "uma sequência é definida recursivamente se ela for dada por uma regra (recorrência) que permite calcular um termo qualquer por meio de um ou mais termos anteriores. Por exemplo, PAs (Progressões Aritméticas), PGs (Progressões Geométricas), fatorial, potências com expoentes com números naturais e a sequência de Fibonacci são definidas por recorrência".

1.1 Recorrência linear de 1^a ordem

Seja x_n uma sequência definida sobre os números reais, com $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a sequência x_n satisfaz a **recorrência linear de primeira ordem** quando temos

$$x_{n+1} = g(n)x_n + f(n) \tag{1.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com $g(n)$ e $f(n)$ aplicações conhecidas.

A sequência x_n que satisfaz a equação acima é chamada de solução fechada da recorrência linear.

Dizemos que a recorrência é **homogênea** quando $f(n) = 0$ para todo número natural n.

Em muitos casos é possível obter uma fórmula que determina a **solução** de uma dada equação de recorrência definida pela equação 1.1. A seguir, veremos como obter tais soluções:

Teorema 1. *(Carvalho e Morgado, 2015)*
Seja $g(n) = c$ e $f(n) = 0$. Então a solução da equação 1.1 é a sequência x_n cuja a fórmula é dada por

$$x_n = x_1 c^{n-1} \tag{1.2}$$

com $x_1 \in \mathbb{R}$.

Demonstração.
Substituindo f e g na equação 1.1 temos

$$x_{n+1} = cx_n.$$

Dessa forma, podemos ver que:

$$\begin{array}{lcl} x_2 & = & Cx_1 \\ x_3 & = & Cx_2 \\ x_4 & = & Cx_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1} & = & Cx_{n-2} \\ x_n & = & Cx_{n-1} \end{array}$$

e, fazendo o produto de todos os termos membro a membro, obtemos

$$x_2 x_3 x_4 \ldots x_{n-1} x_n = Cx_1 Cx_2 Cx_3 \ldots Cx_{n-2} Cx_{n-1}$$

cuja simplificação resulta em

$$x_n = \underbrace{CCC \ldots CC}_{n-1} x_1$$

ou seja

$$x_n = C^{n-1} x_1.$$

Veja que, por este processo, foi determinada uma fórmula geral para a solução da equação dada. A demonstração da validade desta fórmula é feita por indução finita em $n \in \mathbb{N}$.
Se $n = 1$ então $x_1 = C^{1-1}.x_1 = 1.x_1 = x_1$. O que se verifica a validade da fórmula para $n = 1$.

Suponha, por hipótese, que para $n = k$ a equação $x_k = C^{k-1}x_1$ é válida. Vamos então mostrar que a mesma é válida para $n = k + 1$.

$$x_{k+1} = Cx_k \overset{hip}{=} CC^{(k-1)}x_1 = C^k x_1 = C^k x_1$$

. O que demonstra a indução. □

Usando a fórmula anterior, podemos encontrar a solução fechada da recorrência $x_{n+1} = 3x_n$ com $x_1 = 2$.

Neste caso temos $C = 3$ e $x_1 = 2$, assim por 1.2,

$$x_n = 3^{n-1}.2 = 2.3^{n-1}.$$

Vejamos a seguir solução da equação 1.1 para o $g(n) \neq 0$.

Teorema 2. *(Carvalho e Morgado, 2015)*
Se $f(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a solução da equação 1.1 é a sequência x_n dada por

$$x_n = x_1 \left(\prod_{p=1}^{n-1} g(p) \right) \tag{1.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\quad p \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Demonstração.
Desde que $f(n) = 0$ então a equação 1.1 resulta em

$$x_{n+1} = g(n)x_n,$$

de onde temos que

$$\begin{aligned} x_2 &= g(1)x_1 \\ x_3 &= g(2)x_2 \\ x_4 &= g(3)x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= g(n-2)x_{n-2} \\ x_n &= g(n-1)x_{n-1} \end{aligned}$$

e, fazendo o produto de todos os termos membro a membro, obtemos

$$x_2x_3x_4\dots x_{n-1}x_n = g(1)x_1g(2)x_2g(3)x_3\dots g(n-2)x_{n-2}g(n-1)x_{n-1}$$

cuja simplificação resulta em

$$x_n = g(1)g(2)g(3)\dots g(n-2)g(n-1)x_1$$

ou seja

$$x_n = x_1\left(\prod_{p=1}^{n-1} g(p)\right).$$

Veja que, por este processo, foi determinada uma fórmula geral para a solução da equação dada. A demonstração da validade desta fórmula é feita por indução finita em $n \in \mathbb{N}$.

Suponha, por hipótese, que para $n = 1$, então $x_1 = x_1\left(\prod_{p=1}^{1-1} g(p)\right) = x_1\left(\prod_{p=1}^{0} g(p)\right) = x_1$.

O que se verifica a validade da fórmula para $n = 1$.

Suponha, por hipótese, que para $n = k$, a equação $x_k = x_1.\left(\prod_{p=1}^{k-1} g(p)\right)$ é válida. Vamos então mostrar que a mesma equação válida para $n = k+1$.

$$x_{k+1} = g(k)x_k \quad \overset{hip}{=} \quad g(k)\left[x_1\left(\prod_{p=1}^{k-1} g(p)\right)\right] = x_1\Big(g(1)g(2).....g(k-1)g(k)\Big) \Longleftrightarrow$$

$$x_{n+1} = x_1\left(\prod_{p=1}^{k} g(k)\right).$$

O que demonstra a indução. □

Usando a fórmula anterior, podemos encontrar a solução fechada da recorrência $x_{n+1} = n.x_n \quad \text{e} \quad x_1 = 2$.

$g(n) = n$ e $x_1 = 2$. Logo, por 1.3

$x_n = x_1\left(\prod_{p=1}^{n-1} g(p)\right) = 2\left(\prod_{p=1}^{n-1} p\right)$ =2.(1.2.3.....$(n-1)$)= $2(n-1)!$

Assim, $x_n = 2(n-1)!$.

Vejamos agora como solucionar Recorrência linear de 1^a ordem com $g(n) \neq 0$, constante, e $f(n) \neq 0$ do caso mais simples para o mais complexo.

Teorema 3. *(Carvalho e Morgado, 2015)*

Se $f(n) \neq 0$ e $g(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a solução da equação 1.1 é a sequência x_n dada por

$$x_n = x_1 + \sum_{p=1}^{n-1} f(p) \tag{1.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\quad p \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Demonstração.

Solução geral:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + f(1) \\ x_3 &= x_2 + f(2) \\ x_4 &= x_3 + f(3) \\ &\;\;\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + f(n-1) \end{aligned}$$

somando as parcelas membro a membro,

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_n &= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n_1} + f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n-1) \quad \Longleftrightarrow \\ x_n &= x_1 + f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n-1) \quad \Longleftrightarrow \end{aligned}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{p=1}^{n-1} f(p).$$

Veja que, por este processo, foi determinada uma fórmula geral para a solução da equação dada. A demonstração da validade desta fórmula é feita por indução finita em $n \in \mathbb{N}$. Suponha, por hipótese, que para $n = 1$, então $x_1 = x_1 + \sum_{p=1}^{1-1} f(p) = x_1 + \sum_{p=1}^{0} f(p) = x_1$.

O que se verifica a validade da fórmula para $n = 1$.

Suponha, por hipótese, que para $n = k$, $x_k = x_1 + \sum_{p=1}^{k-1} f(p)$ é válida, então será válida para $n = k + 1$.

$$x_{k+1} = x_k + f(k) \quad \overset{hip}{=} \quad \left(x_1 + \sum_{p=1}^{k-1} f(p) \right) + f(k) \Longleftrightarrow$$

$$x_{k+1} = x_1 + \Big(f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(k-1) \Big) + f(k) = x_1 + \sum_{p=1}^{k} f(p).$$

O que demonstra a indução. □

Usando a fórmula anterior, podemos encontrar a solução fechada da recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$.

$f(n) = 2^n$, logo,

$x_n = x_1 + \sum_{p=1}^{n-1} f(p) = x_1 + \sum_{p=1}^{n-1} 2^p = x_1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1})$.

Note que no parênteses há uma soma de PG(progressão geométrica), com $a_1 = 2^1 = 2$ e $q = 2$.

Assim,

$x_n = x_1 + 2.\frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = x_1 + 2.(2^{n-1} - 1) = x_1 + 2^n - 2$.

Vejamos agora o caso mais complexo para as recorrências de primeira ordem, não homogênea, com $f(n) \neq 0$ e $g(n) \neq 0$, aplicações quaisquer com $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4. *(Carvalho e Morgado, 2015)*

Se a_n é uma solução não-nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$ em

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(n)}{g(n)a_n}. \tag{1.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Demonstração.

Da hipótese,

$x_n = a_n y_n \implies x_{n+1} = a_{n+1} y_{n+1} \implies a_{n+1} y_{n+1} = g(n) a_n y_n + f(n)$ I;

Mas de $x_{n+1} = g(n)x_n \implies a_{n+1} = g(n)a_n$ II.

Logo, substituindo II em I

$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + f(n) \iff y_{n+1} = y_n + \frac{f(n)}{g(n)a_n}$. $\square$

Observação: Veja que com este teorema se determina x_n explicitamente.

Da relação $x_n = a_n y_n \implies y_1 = \frac{x_1}{a_1}$

e finalmente a solução x_n

$$x_n = a_n y_n = a_n\left(\frac{x_1}{a_1} + \sum_{p=1}^{n-1} h(p)\right) \tag{1.6}$$

com $a_n = x_1 \prod_{p=1}^{n-1} g(p)$ e $h(p) = \frac{f(p)}{g(p).a_p}$.

Vejamos a solução fechada da recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 3$, com $x_1 = 3$ conforme teorema acima.

Se $x_{n+1} = 2x_n$ a solução particular é $a_n = 2^{n-1}$.

Assim,

$x_n = a_n y_n \quad \Longrightarrow \quad x_n = 2^{n-1} y_n \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} = 2^n y_{n+1}$.

Logo,

$x_{n+1} = 2x_n + 3 \quad \Longrightarrow$

$2^n y_{n+1} = 2.2^{n-1} y_n + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + 3.2^{-n}$.

A qual obtemos $f(n) = 3.2^{-n}$ e $x_1 = a_1 y_1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 = 2^0 y_1 \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 = 3$.

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + \sum_{p=1}^{n-1} f(p) = 3 + \sum_{p=1}^{n-1} 3.2^{-p} = 3 + 3.\sum_{p=1}^{n-1} 2^{-p} \\ &= 3 + 3(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ... + 2^{-(n-1)}) \end{aligned}$$

No parênteses, uma soma de PG com $a_1 = 2^{-1}$ e $q = 2^{-1}$.

Assim,

$y_n = 3 + 3\left(2^{-1}\dfrac{2^{-(n-1)} - 1}{2^{-1} - 1}\right) = 3 - 3(2^{-n+1} - 1) = 3 - 6.2^{-n} + 3 = 6 - 6.2^{-n}$.

e a solução será

$x_n = a_n y_n \quad \Longrightarrow \quad x_n = 2^{n-1}(6 - 6.2^{-n}) = 3.2.2^{n-1} - 3.2.2^{n-1-n} = 3.2^n - 3 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$.

1.2 Recorrência linear de segunda ordem

Seja x_n uma sequência definida sobre os números reais, com $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a sequência x_n satisfaz a **recorrência linear de segunda ordem** quando temos

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n) \tag{1.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com p e q constantes e $f(n)$ uma aplicação.

A sequência x_n que satisfaz a equação acima é chamada de solução da recorrência linear.

Dizemos que a recorrência é **homogênea** quando $f(n) = 0$ para todo número natural n.

Dentre as formas de recorrência de 2^a ordem abordadas, segue abaixo o estudo da solução dos casos da forma mais simples para a mais complexa. Será analisado neste texto a recorrência de 2^a ordem da forma $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=f(n)$ com p e q constantes e $f(n)$ uma aplicação.

Porém, falemos da associação do polinômio característico com a solução das recorrências lineares de segunda ordem.

Dada a equação 1.7, conforme Lima (2014), se nomeado $x_{n+1}=y_n \implies y_{n+1}=x_{n+2}=-qx_n-py_n$, transforma a equação no seguinte sistema

$$\begin{cases} x_{n+1}=0x_n+y_n \\ y_{n+1}=-qx_n-py_n \end{cases} \implies \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

onde $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix}$ é a matriz correspondente do sistema. Então o polinômio característico é dado por $P(\lambda)=det(A-\lambda.I)$ e I é a matriz identidade. Portanto, $P(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q$. Ou seja, λ é um autovetor associado a um respectivo autovalor associados que determinan a solução do sistema de forma unica, e assim a solução da equação de recorrência.

Veja então, que é desta forma que o **polinômio caracterísitico** está associado às soluções das recorrências de segunda ordem.

Segue abaixo os teoremas resultados referente a estas soluções para cada caso analisado.

Soluções das recorrências associadas ao polinômio Característico $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=f(n)$ com $p\neq 0$, $q\neq 0$, $p,q\in\mathbb{R}$ e $f(n)=0$

Teorema 5. *(Carvalho e Morgado, 2015)*
Se as raízes da equação $\lambda^2+p\lambda+q=0$ são λ_1 e λ_2, então $a_n=C_1.\lambda_1^n+C_2.\lambda_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, para quaisquer valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração.
Se a_n é solução, então:

$x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=$

$a_{n+2}+p.a_{n+1}+q.a_n=$

$(C_1\lambda_1^{n+2}+C_2\lambda_2^{n+2})+p.(C_1\lambda_1^{n+1}+C_2\lambda_2^{n+1})+q.(C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n)=$

$(C_1\lambda_1^{n+2}+p.C_1\lambda_1^{n+1}+q.C_1\lambda_1^n)+(C_2\lambda_2^{n+2}+p.C_2\lambda_2^{n+1}+q.C_2\lambda_2^n)=$

$C_1\lambda_1^n(\lambda_1^2+p.\lambda_1+q)+C_2\lambda_2^n(\lambda_2^2+p.\lambda_2+q)\overset{hip}{=}$

$C_1\lambda_1^n.0+C_2\lambda_2^n.0=0 \quad \forall \quad n\in\mathbb{N}.$ □

Teorema 6. *(Carvalho e Morgado, 2015)*

Se as raízes da equação $\lambda^2+p\lambda+q=0$ *são iguais,* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, *então* $a_n=C_1.\lambda^n+C_2.n.\lambda^n$ *é solução da recorrência* $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, *para quaisquer valores das constantes* C_1 *e* C_2.

Demonstração.

Oberserve que:

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda=\dfrac{-p}{2} \Longleftrightarrow 2\lambda+p=0.$

Assim,

$x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=$

$a_{n+2}+p.a_{n+1}+q.a_n \overset{hip}{=}$

$(C_1\lambda^{n+2}+C_2(n+2)\lambda^{n+2})+p.(C_1\lambda^{n+1}+C_2(n+1)\lambda^{n+1})+q.(C_1\lambda^n+C_2n\lambda^n)=$

$(C_1\lambda^{n+2}+p.C_1\lambda^{n+1}+q.C_1\lambda^n)+(C_2(n+2)\lambda^{n+2}+p.C_2(n+1)\lambda^{n+1}+q.C_2n\lambda^n)=$

$C_1\lambda^n(\lambda^2+p.\lambda+q)+C_2n\lambda^n(\lambda^2+p.\lambda+q)+C_2\lambda^{n+1}(2\lambda+p) \overset{hip}{=}$

$C_1\lambda^n.0+C_2n\lambda^n.0+C_2\lambda^{n+1}(2\lambda+p)=$

da observação,

$C_1\lambda^n.0+C_2n\lambda^n.0+C_2\lambda^{n+1}.0=0 \quad \forall \quad n\in\mathbb{N}.$ □

Teorema 7. *(Carvalho e Morgado, 2015)*

Se as raízes da equação $\lambda^2+p\lambda+q=0$ *são* λ_1 *e* λ_2, *com* $\lambda_1\neq\lambda_2$, *então todas as soluções da equação* $x_{n+2}+px_{n+1}+q.x_n=0$ *são da forma* $a_n=C_1.\lambda_1^n+C_2.\lambda_2^n$ *com* C_1 *e* C_2 *constantes.*

Demonstração.

Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$.

Determinando os valores C_1 e C_2

$$\begin{cases} C_1.\lambda_1+C_2.\lambda_2=y_1 \\ C_1\lambda_1^2+C_2\lambda_2^2=y_2 \end{cases} \Longrightarrow \quad C_1=\frac{\lambda_2y_1-y_2}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)} \text{ e } C_2=\frac{y_2-\lambda_1y_1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}$$

com $\lambda_2-\lambda_1\neq 0$ da hipótese e a_n é solução, então,

$y_n-a_n=y_n-C_1\lambda_1^n-C_2\lambda_2^n=z_n$ equivale a, ser comprovado, que $z_n=0$. Veja:

$$\begin{cases} z_{n+2}=y_{n+2}-C_1\lambda_1^{n+2}-C_2\lambda_2^{n+2} \\ pz_{n+1}=py_{n+1}-pC_1\lambda_1^{n+1}-pC_2\lambda_2^{n+1} \\ qz_n=qy_n-qC_1\lambda_1^n-C_2\lambda_2^n \end{cases} \Longrightarrow$$

$z_{n+2}+pz_{n+1}+qz_n=y_{n+2}+py_{n+1}+qy_n-C_1\lambda_1^n(\lambda_1^2+p\lambda_1+q)-C_2\lambda_2^n(\lambda_2^2+p\lambda_2+q)$

Note que, por hipótese

$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0, \quad \lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2^2 + p\lambda_2 + q = 0$

portanto $\quad z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0.$

O que garante $y_1 = C_1.\lambda_1^n + C_2.\lambda_2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veja ainda que

$z_n = y_n - a_n \quad \Longrightarrow \quad z_1 = y_1 - a_1 = 0$ e $z_2 = y_2 - a_2 = 0.$

Sendo assim,

$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 8. *(Carvalho e Morgado, 2015)*

Se as raízes da equação $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ são iguais, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, então todas as soluções da equação $x_{n+2} + a.x_{n+1} + b.x_n = 0$ são da forma $a_n = C_1.\lambda^n + C_2.n.\lambda^n$ e C_1 e C_2 constantes.

Demonstração.

Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$.

Determinando os valores C_1 e C_2

$$\begin{cases} C_1.\lambda + C_2.\lambda = y_1 \\ C_1.\lambda^2 + 2C_2.\lambda^2 = y_2 \end{cases} \Longrightarrow \quad C_1 = \frac{2y_1}{\lambda} - \frac{y_2}{\lambda^2} \text{ e } C_2 = \frac{y_2 - \lambda y_1}{\lambda^2}$$

com $\lambda \neq 0$.

a_n é solução, então $y_n - a_n = y_n - C_1\lambda^n - C_2 n\lambda^n = z_n$ equivale a, ser comprovado, que $z_n = 0$. Veja:

$$\begin{cases} z_{n+2} = y_{n+2} - C_1\lambda^{n+2} - C_2(n+2)\lambda^{n+2} \\ pz_{n+1} = py_{n+1} - pC_1\lambda^{n+1} - pC_2(n+1)\lambda^{n+1} \\ qz_n = qy_n - qC_1\lambda_1^n - C_2 n\lambda_2^n \end{cases} \Longrightarrow$$

$$z_{n+2}+pz_{n+1}+qz_n = y_{n+2}+py_{n+1}+qy_n - C_1\lambda^n(\lambda^2+p\lambda+q) - C_2 n\lambda^n(\lambda^2+p\lambda+q) - C_2\lambda^n(p\lambda+2)$$

por hipótese

$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0, \quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ e

$p\lambda + 2 = 0$, pois $\lambda = -\dfrac{p}{2}$

portanto

$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0.$

O que garante $y_1 = C_1.\lambda^n + C_2 n\lambda^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Veja ainda que

$z_n = y_n - a_n \quad \Longrightarrow \quad z_1 = y_1 - a_1 = 0$ e $z_2 = y_2 - a_2 = 0.$

Sendo assim,

$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$. $\square$

Vejamos alguns exemplos de resoluções apresentando soluções fechadas de recorrências lineares de 2^a ordem que recaem aos teoremas vistos acima.

1. Obter a solução fechada da recorrência de segunda ordem $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$.
   Equação do polinômio característico $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, resolvendo a equação do 2^o grau, obtemos
   $\lambda_1 = 1 \quad$ e $\quad \lambda_2 = 2$.
   Dessa forma, conforme teorema 7 a solução geral é
   $a_n = C_1.\lambda_1^n + C_2.\lambda_2^n \quad \Longrightarrow \quad a_n = C_1.1^n + C_2.2^n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = C_1 + C_2.2^n$.

2. A solução fechada da recorrência de segunda ordem $x_{n+2} - 3x_{n+1} = 0$, com $x_1 = 3$.
   Veja que esta recorrência, falta o termo qx_n. Assim poderíamos reduzi-la a $x_{n+1} - 3x_n = 0$, uma recorrência de primeira ordem e resolve-la pelo teorema 1.1.
   $x_{n+2} - 3x_{n+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} - 3x_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{n+1} = 3x_n$
   $x_n = 3^{n-1}.x_1 = \dfrac{x_1}{3}.3^n = \dfrac{3}{3}.3^n \quad \Longleftrightarrow \quad x_n = 3^n$.
   Ou ainda resolve-la como:
   Equação do polinômio característico $\lambda^2 - 3\lambda = 0$, solução da equação do 2^o grau
   $\lambda_1 = 0 \quad$ e $\quad \lambda_2 = 3$.
   Solulução geral é
   $a_n = C_1.0^n + C_2.3^n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = C_2.3^n$.
   $a_1 = C_2.3^1 = x_1 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad C_2 = 1 \quad \Longrightarrow a_n = 3^n$.

3. Veja a solução da recorrência $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0 \quad$ e $x_1 = x_2 = 2$.
   Equação do polinômio característico: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ com solução $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.
   Solução geral da Recorrência: $x_n = C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n$.
   Encontrando C_1 e C_2 conforme teorema acima:
   $C_1 = \dfrac{2y_1}{\lambda} - \dfrac{y_2}{\lambda^2} = \dfrac{2.2}{-3} - \dfrac{2}{(-3)^2} = -\dfrac{3.4}{3.3} - \dfrac{2}{9} = -\dfrac{14}{9}$
   e $C_2 = \dfrac{y_2 - \lambda y_1}{\lambda^2} = \dfrac{2-(-3)2}{(-3)^2} = \dfrac{8}{9}$.
   Solução final da Recorrência:

$$x_n = \frac{-14(-3)^n + 8(-3)^n}{9} = -\frac{6.(-3)^n}{9} = \frac{2.(-3)^n}{-3} = 2.(-3)^{n-1}.$$

ou seja,

$$x_n = 2.(-3)^{n-1} \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vejamos a resolução da equação 1.7, $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = f(n)$ com $f(n) \neq 0$, aplicação qualquer com $n \in \mathbb{N}$.

A solução desta equação é dada através do seguinte teorema:

Teorema 9. *(Carvalho e Morgado, 2015)*
Se a_n é uma solução da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + p.y_{n+1} + q.y_n = 0$.

Demonstração.
Se a_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então:
$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, e

$$\begin{cases} qx_n = qa_n + qy_n \\ px_{n+1} = pa_{n+1} + py_{n+1} \qquad \Longrightarrow \\ x_{n+2} = a_{n+2} + y_{n+2} \end{cases}$$

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n + a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n \qquad \Longleftrightarrow$$

$$f(n) = y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n + f(n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0 \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Definidas y_n e a_n soluções, recorremos a $x_n = a_n + y_n$, determinando assim a solução geral da recorrência linear de 2^a ordem.

Veja a solução da recorrência, $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = n + 4^n$.

Pelo teorema acima:

$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = 0$ possui polinômio característico $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, a soluções do polinômio é, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, e a solução particular é $y_n = C_1.2^n + C_2.4^n$.

Encontrar, a solução particular do outro membro da igualdade, $n + 4^n$.

A estratégia aqui abordada é verificar que forma de funções que se adequam a $n + 4^n$. Sendo assim, veja que aqui se aplicam, uma função do 1^o grau somada a uma função exponencial, ou seja, $An + B + C4^n$, que será chamada de a_n, $a_n = An + B + C4^n$ com A, B e C constantes a serem determinadas. Determinando A, B e C:

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} = & A(n+2) + B + C4^{(n+2)} = & An + 2A + B + 16C4^n \\ -5a_{n+1} = & -5[A(n+1) + B + C4^{n+1}] = & -5An - 5A - 5B - 20C4^n \\ \underline{\quad 6a_n =} & \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} & \underline{6An + 6B + 6C4^n} \end{array}$$

Somando os extremos dos membros:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = & \quad 2An - 3A + 2B + 2C4^n \\ n + 4^n = & \quad 2An - 3A + 2B + 2C4^n \end{aligned}$$

Desta última igualdade:

$2A = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad A = \dfrac{1}{2};$

$-3A + 2B = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3\dfrac{1}{2} + 2B = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B = \dfrac{3}{4} = 3.2^{-2};$

$2C = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad C = \dfrac{1}{2};$

logo,

$a_n = \dfrac{n}{2} + 3.2^{-2} + \dfrac{2^{2n}}{2} = 2^{-1}.n + 3.2^{-2} + 2^{2n-1}$ e por final,

$x_n = a_n + y_n = (2^{-1}.n + 3.2^{-2} + 2^{2n-1}) + (C_1.2^n + C_2.4^n).$

Veja o exemplo em que, $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 1 + 2^n$, com $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Encontrando y_n e posteriormente a_n:

Para $y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 0$, o polinônmio característico é $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ com solução nos complexos, $\lambda_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$, ao qual escrito na forma trigonométrica resulta em:

Para $\lambda_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \Longrightarrow \quad \rho = 1 \quad$ é $\quad \theta_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ e assim $\lambda_1 = cos\dfrac{2\pi}{3} + sen\dfrac{2\pi}{3}i.$

Para $\lambda_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \Longrightarrow \rho = 1 \quad$ é $\quad \theta_2 = \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{-2\pi}{3}$ e assim

$\lambda_2 = cos\dfrac{-2\pi}{3} + sen\dfrac{-2\pi}{3}i.$

$$\begin{aligned} \text{Solução } y_n = & \quad C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ = & \quad C_1[1^n(cos\frac{2\pi}{3} + sen\frac{2\pi}{3}i)]^n + C_2[1^n(cos\frac{-2\pi}{3} + sen\frac{-2\pi}{3}i)]^n \\ = & \quad C_1(cos\, n\frac{2\pi}{3} + sen\, n\frac{2\pi}{3}i) + C_2(cos\, n\frac{-2\pi}{3} + sen\, n\frac{-2\pi}{3}i). \end{aligned}$$

Encontrando a_n. Com $a_n = 1 + 2^n = An + B + C2^n$, assim,

$a_{n+2} = An + 2 + B + C2^{n+2} = An + 2A + B + 4C2^n$

$a_{n+1} = An + 1 + B + C2^{n+1} = An + A + B + 2C2^n$

$a_n = An + B + C2^n$

Somando os termos membro a membro da igualdade acima, resulta,

$1 + 2n = 0n + 1 + 1.2^n = 3An + 3A + 3B + 7C2^n \qquad \Longrightarrow$

$A = 0,\ B = \dfrac{1}{3}$ e $C = \dfrac{1}{7}$. Logo $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7}2^n.$

Solução geral:
$x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}2^n + C_1(cos\, n\frac{2\pi}{3} + sen\, n\frac{2\pi}{3}i) + C_2(cos\, n\frac{-2\pi}{3} + sen\, n\frac{-2\pi}{3}i).$

Capítulo 2

Sistemas de equações de recorrências lineares

Neste capítulo serão apresentadas as formas introdutórias de sistemas de equações de recorrências lineares, com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, sistema onde suas equações, são sequências em que um termo qualquer é definido por uma expressão que envolve o termo anterior, com expoente destes termos igual a 1.

2.1 Sistemas de equações de recorrências lineares de primeira ordem

Suponha o seguinte sistema linear $u_{n+1} = Au_n + F(x)$ a ser solucionado, encontrar uma fórmula fechada onde,

$u_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ não nula, $u_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ e $F(n) = \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}$.

$u_{n+1} = Au_n + F(x) \qquad \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + f_1(n) \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f_2(n) \end{cases} \tag{2.1}$$

com a, b, c, $d \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f_1(n)$ e $f_2(n) \in \mathbb{R}$.

Vejamos como proceder a resolução do sistema 2.1, abordando o tema da forma mais simples para a mais complexa.

2.1.1 Caso homogêneo

Façamos primeiro $f_1(n) = f_2(n) = 0$.

Então $u_{n+1} = Au_n + 0$ e assim,

$u_{n+1} = Au_n \quad \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Façamos a resolução do sistema 2.2 agora utilizando teorias de matrizes.

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Teorema 10.

Se o vetor $u_n \in \mathbb{R}^2$ *e* $A \in M_2$*, então* $u_n = A^{n-1}u_1$ *é solução da recorrência matricial* $u_{n+1} = Au_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por indução finita.

Para $n = 1, \quad u_1 = A^{1-1}u_1 = A^0u_1 = I_2u_1 = u_1$.

Fato que se verifica para $n = 1$.

Suponha que, por hipótese, que para n a equação $u_n = A^{n-1}u_1$ é válida, então será válida para $n + 1$.

$u_{n+1} = Au_n \overset{hip}{=} AA^{(n-1)}u_1 = A^nu_1 = A^nu_1 \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}$.

O que demonstra a indução. □

Sendo assim, $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, é a solução da equação 2.3.

A seguir veremos duas proposições que nos auxilia a explicitar a solução acima.

Segue da álgebra linear a seguinte teoria:

Corolário 11. *(Santos, 2004)*

Seja λ_1 *e* λ_2*, os autovalores encontrados do polinômio caraceterítico associado a matriz*

A, onde estes autovalores geram respectivamente os vetores v_1 e v_2, autovetores linearmente independentes(LI) do $\mathbb{R}^2$. Ainda $P_2 = [v_1 \quad v_2]$ é matriz quadrada de ordem 2 dos autovetores gerados por seus respectivos autovalores associados, P_2^{-1} a matriz inversa de P_2 e por final, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ a matriz diagonal de A. Se $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, então $D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{bmatrix}$ com $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. por indução finita.

Considerando já conhecido a definição do produto de matrizes quadradas.

Para $m = 1$, $\quad D^1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 \end{bmatrix}$. Fato que se verifica para $m = 1$.

Suponha, por hipótese, que para $m = k$, $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$ é válida, então será válida para $m = k + 1$.

$$D^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^1 \overset{hip}{=}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 12. *(Santos, 2004)*
Seja $A \in M_2$, D matriz diagonal de A e P matriz dos autovalores em D. Se $A = PDP^{-1}$, então $A^m = PD^mP^{-1}$, com $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. por indução finita.

Para $n = 1$, $\quad A^1 = (PDP^{-1})^1 = P^1D^1P^{(-1)1} = PD^1P^{-1}$, o que se verifica.

Suponha, por hipótese, que para $n = k$, $A^k = PD^kP^{-1}$ é válida, então será válida para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA \overset{hip}{=} (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^kIDP^{-1} = \\ &= P(D^kD)P^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

□

Note que foram cumpridas as propriedades usadas de matrizes.

Ainda, a solução de 2.3 explicitamente será:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} [v_1 \quad v_2]^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Veja a resolução por matrizes, de $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + 5y_n \end{cases}$, com $x_1 = y_1 = 1$.

Pelo teorema 10,

$u_n = A^{n-1}u_1 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculando os autovalores pelo corolário 11:

   $det(A - \lambda I) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow$

   $(1-\lambda)(5-\lambda) + 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$

   Cuja as soluções são: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.

2. Gerando os autovetores associados a estes autovalores:

   $\lambda_1 = 2$ para o $v_1 = (k_1, z_1)$:

   $\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 3 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -k_1 - z_1 = 0 \\ 3k_1 + 3z_1 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow$

   $k_1 = -z_1 \quad \Longrightarrow v_1 = (-1, 1).$

   $\lambda_2 = 4$ para o $v_2 = (k_2, z_2)$:

   $\begin{bmatrix} 1-4 & -1 \\ 3 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3k_2 - z_2 = 0 \\ 3k_2 + z_1 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow$

   $-3k_2 = z_1 \quad \Longleftrightarrow k_2 = -\dfrac{z_1}{3} \Longrightarrow v_2 = (-1, 3).$

   E assim encontra-se a matriz $P = [v_1 \quad v_2]$

   $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. Calculando P^{-1}.

   Será usado o método da matriz P, com a matriz identidade I a direita, escalonado, como se segue:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Assim $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Usando o teorema 12:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = PD^{n-1}P^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo produto duas a duas:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2^{n-1} & -4^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3.4^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-3-1}{2} \\ \frac{1+1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2^{n-1} & -4^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3.4^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E então a solução:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} - 4^{n-1} \\ -2^{n-1} + 3.4^{n-1} \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Caso não homogêneo

Façamos $f_1(n) \neq f_2(n) \neq 0$, a forma mais geral, aplicações com $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + f_1(n) \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f_2(n) \end{cases} \implies$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Onde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $A \in M_2$, e $F(n) = \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}$ com $F(n) \in \mathbb{R}^2$.

Definindo assim a equação $u_{n+1} = Au_n + F(n)$.

Teorema 13.

Sejam os vetores u_n, k_n, z_n e $F(n) \in \mathbb{R}^2$, ainda $A \in M_2$ e A uma matriz diagonizável. Se k_n é uma solução da equação $u_{n+1} - Au_n = F(n)$, então a substituição $u_n = k_n + z_n$ transforma a equação em $z_{n+1} - Az_n = 0$.

Demonstração.

Se k_n é solução de $u_{n+1} - Au_n = F(n)$, então $k_{n+1} - Ak_n = F(n)$, e ainda de $u_n = k_n + z_n$ $\implies \quad u_{n+1} = k_{n+1} + z_{n+1}$ e $Au_n = Ak_n + Az_n$.

Dessa forma,

$$\begin{cases} u_{n+1} = k_{n+1} + z_{n+1} \\ Au_n = Ak_n + Az_n \end{cases} \implies \quad u_{n+1} - Au_n = k_{n+1} - Ak_n + z_{n+1} - Az_n \quad \overset{hip}{\iff}$$

$$F(n) = F(n) + z_{n+1} - Az_n \quad \iff \quad z_{n+1} - Az_n = 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Veja a resolução do sistema $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + n^2 \\ y_{n+1} = 3x_n + 5y_n + n \end{cases}$ com $x_1 = y_1 = 1$.

Assim,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n^2 \\ n \end{bmatrix}.$$

Aplicando o teorema 13:

$$z_n = A^{n-1} z_1 \iff \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como visto em exercício anterior.

$$z_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} - 4^{n-1} \\ -2^{n-1} + 3.4^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Encontrando k_n da igualdade, $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^2 \\ n \end{bmatrix}$.

Onde $F(n) = \begin{bmatrix} n^2 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} An^2 + Bn + C \\ Dn^2 + En + F \end{bmatrix}$.

$$F(n+1) - AF(n) = \begin{bmatrix} A(n+1)^2 + B(n+1) + C \\ D(n+1)^2 + E(n+1) + F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} An^2 + Bn + C \\ Dn^2 + En + F \end{bmatrix}$$

$$\iff$$

$$\begin{bmatrix} n^2 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Dn^2 + (2A + E)n + (A + B + F) \\ (-3A - 4D)n^2 + (2D - 3B - 4E)n + (-3C + D + E - 4F) \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esta igualdade, encontramos os parâmetros A, B, C, D, E e F, ao qual nos apresenta:

$$k_n = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}n^2 - \frac{29}{9}n - \frac{131}{27} \\ n^2 + \frac{8n}{3} + \frac{41}{9} \end{bmatrix}.$$

E finalmente a solução geral do sistema:

$$u_n = k_n + z_n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} - 4^{n-1} - \frac{4}{3}n^2 - \frac{29}{9}n - \frac{131}{27} \\ -2^{n-1} + 3.4^{n-1} + n^2 + \frac{8n}{3} + \frac{41}{9} \end{bmatrix}.$$

2.2 Sistemas de equações de recorrências lineares de segunda ordem

Façamos a resolução do sistema onde as equações são equações de recorrências de segunda ordem da forma

$$\begin{cases} x_{n+2} = ax_{n+1} + by_{n+1} + ex_n + fy_n + F_1(n) \\ y_{n+2} = cx_{n+1} + dy_{n+1} + gx_n + hy_n + F_2(n) \end{cases} \tag{2.5}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $F_1(n), F_2(n)$ aplicações conhecidas e $n \in \mathbb{N}$.

De acordo com o sistema dado, vejamos como solucionar o sistema dado.

2.2.1 Caso homogêneo

Seja $F_1(n) = F_2(n) = 0$, assim o sistema dado 2.5, recai em um sistemas de equações homogêneas, como se segue abaixo.

$$\begin{cases} x_{n+2} = ax_{n+1} + by_{n+1} + ex_n + fy_n \\ y_{n+2} = cx_{n+1} + dy_{n+1} + gx_n + hy_n \end{cases} \tag{2.6}$$

a qual abordaremos da seguinte forma para a resolução.

Teorema 14.

Toda equação de recorrência linear homogênea de ordem 2, da forma $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$, se reduz a um sistema de equações de recorrências de primeira ordem através de (2-1) interações recorrentes, a, b, $c \in \mathbb{R}$ e não nulos.

Demonstração.

Se atribuirmos $x_{n+1} = y_n$, então $x_{n+2} = y_{n+1}$.

Fato que nos permite reescrever a equação na forma de um sistemas de equações da seguinte forma,

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + y_n \\ y_{n+1} = -cx_n - by_n \end{cases}.$$

O que demonstra o proposto. □

Teorema 15.

Se o vetor $u_n \in \mathbb{R}^4$ *e* $A \in M_4$*, então* $u_n = A^{n-1}u_1$ *é solução da recorrência matricial* $u_{n+1} = Au_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por indução finita.

Para $n = 1$, $\quad u_1 = A^{1-1}u_1 = A^0u_1 = I_4u_1 = u_1$. $\quad$ Fato que se verifica para $n = 1$.

Suponha que, por hipótese, que para n a equação $u_n = A^{n-1}u_1$ é válida, então será válida para $n + 1$.

$u_{n+1} = Au_n \overset{hip}{=} AA^{(n-1)}u_1 = A^nu_1 = A^nu_1 \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}$.

O que demonstra a indução. □

Corolário 16. *(Santos, 2004)*

Seja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$ *e* λ_4*, os autovalores encontrados do polinômio caraceterítico associado a matriz* A*, onde estes autovalores geram respectivamente os vetores* $v_1, v_2, v_3,$ *e* v_4*, autovetores linearmente independentes(LI) do* $\mathbb{R}^4$*. Ainda* $P_4 = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$ *é matriz quadrada de ordem* 4 *dos autovetores gerados por seus respectivos autovalores associados,* P_4^{-1} *a matriz inversa de* P_4 *e por final,* $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$ *a matriz diagonal de* A*.*

$$Se\ D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix},\ então\ D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^m \end{bmatrix}$$

com $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. por indução finita.

Considerando já conhecido a definição do produto de matrizes quadradas.

Para $m = 1$, $\quad D^1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^1 \end{bmatrix}.$

Fato que se verifica para $m = 1$.

Suponha, por hipótese, que para $m = k$, $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^k \end{bmatrix}$ é válida, então será válida para $m = k + 1$.

$$D^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}^{k} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}^{1} \overset{hip}{=}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{k+1} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Usando as proposições imediatas anteriores, podemos reescrever a equação 2.6:

Seja $k_n = x_{n+1}$ e $l_n = y_{n+1}$, assim $k_{n+1} = x_{n+2}$ e $l_{n+1} = y_{n+2}$.

Substituíndo estas novas variáveis no sistema **??** e reescrevendo o sistema, teremos

$$\begin{cases} x_{n+1} = k_n \\ y_{n+1} = l_n \\ k_{n+1} = ak_n + bl_n + ex_n + fy_n \\ l_{n+2} = ck_n + dl_n + gx_n + hy_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + 0y_n + k_n + 0l_n \\ y_{n+1} = 0x_n + 0y_n + 0k_n + l_n \\ k_{n+1} = ax_n + by_n + ek_n + fl_n \\ l_{n+2} = cx_n + dy_n + gk_n + hl_n \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ k_{n+1} \\ l_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & e & f \\ c & d & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ k_n \\ l_n \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Sendo assim, pelo teorema 15, podemos apresentar a solução fechada para a equação acima:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ k_n \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & e & f \\ c & d & g & h \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ k_1 \\ l_1 \end{bmatrix}.$$

Ainda, explicitamente pelo Corolário 16, onde D é a matriz diagonizável de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & e & f \\ c & d & g & h \end{bmatrix}$ e λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 autovalores determinados em A, com seus respectivos autoveres v_1, v_2, v_3 e v_4.

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ k_n \\ l_n \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4] \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^n \end{bmatrix} [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]^{-1}.$$

2.2.2 Caso não homogêneo

Vejamos os resultados a partir de $F_1(n) \neq F_2(n) \neq 0$. Note que aqui está o caso mais generalizado das $F(n)s$.

Seguindo a linha de raciocínio de 2.1.2. Conhecida a solução k_n da recorrência particular de u_n, podemos enunciar:

Teorema 17.

Sejam os vetores u_n, k_n, z_n e $F(n) \in \mathbb{R}^4$, ainda $A \in M_4$ e A uma matriz diagonizável. Se k_n é uma solução da equação $u_{n+1} - Au_n = F(n)$, então a substituição $u_n = k_n + z_n$ transforma a equação em $z_{n+1} - Az_n = 0$.

Demonstração.

Se k_n é solução de $u_{n+1} - Au_n = F(n)$, então $k_{n+1} - Ak_n = F(n)$, e ainda de $u_n = k_n + z_n$ $\Longrightarrow \quad u_{n+1} = k_{n+1} + z_{n+1}$ e $Au_n = Ak_n + Az_n$.

Dessa forma,

$$\begin{cases} u_{n+1} = k_{n+1} + z_{n+1} \\ Au_n = Ak_n + Az_n \end{cases} \Longrightarrow \quad u_{n+1} - Au_n = k_{n+1} - Ak_n + z_{n+1} - Az_n \quad \overset{hip}{\Longleftrightarrow}$$

$$F(n) = F(n) + z_{n+1} - Az_n \quad \Longleftrightarrow \quad z_{n+1} - Az_n = 0 \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Então conhecidas as soluções k_n e z_n, podemos explicitar u_n através de $u_n = k_n + z_n$.

Capítulo 3

Sistemas de equações de recorrência linear de ordem m

O conteúdo que se segue abaixo, leva em consideração todos os conceitos, operações e propriedades em relação a sistemas lineares e matrizes, generalizando a teoria vista no capítulo 2, para ordem m.

Teorema 18.
Se o vetor $u_n \in \mathbb{R}^m$ e $A \in M_m$, então $u_n = A^{n-1}u_1$ é solução fechada da recorrência matricial $u_{n+1} = Au_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por indução finita.
Para $n = 1$, $\quad u_1 = A^{1-1}u_1 = A^0 u_1 = I_m u_1 = u_1.\quad$ Fato que se verifica.
Suponha que, por hipótese, que para n a equação $u_n = A^{n-1}u_1$ é válida, então será válida para $n+1$.
$u_{n+1} = Au_n \overset{hip}{=} AA^{(n-1)}u_1 = A^n u_1 = A^n u_1 \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$

O que demonstra a indução. □

Corolário 19. *(Santos, 2004)*
Seja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, os autovalores encontrados do polinômio caraceterítico associado a matriz A, onde estes autovalores geram respectivamente os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, autovetores linearmente independentes(LI) do $\mathbb{R}^n$. Ainda $P_n = [v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n]$ é matriz quadrada de ordem n dos autovetores gerados por seus respectivos autovalores associados, P_n^{-1} a

matriz inversa de P_n e por final, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ *a matriz diagonal de A. Se*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \textit{ então } D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

com m e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. por indução finita.

Considerando já conhecido a definição do produto de matrizes quadradas.

$$\text{Para } m = 1, \quad D^1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^1 \end{bmatrix}.$$

Fato que se verifica para $m = 1$.

Suponha, por hipótese, que para $m = k$, $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$ é válida, então será

válida para $m = k + 1$.

$$D^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^1 \overset{hip}{=}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{k+1} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Teorema 20. *(Santos, 2004)*

Seja $A \in M_n$, D matriz diagonal de A e P matriz dos autovalores em D. Se $A = PDP^{-1}$, então $A^m = PD^mP^{-1}$, com $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. por indução finita.

Para $n = 1$, $\quad A^1 = (PDP^{-1})^1 = P^1D^1P^{(-1)1} = PD^1P^{-1}$, o que se verifica.

Suponha, por hipótese, que para $n = k$, $A^k = PD^kP^{-1}$ é válida, então será válida para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA \overset{hip}{=} (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^kIDP^{-1} = \\ &= P(D^kD)P^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

□

Sendo assim, podemos dizer que, dada a matriz A diagonizável, então

$$A^n = [v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_m]\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^n \end{bmatrix}[v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_m]^{-1}.$$

Teorema 21.

Sejam os vetores u_n, k_n e $z_n \in \mathbb{R}^m$, ainda $A \in M_m$ e A uma matriz diagonizável. Se k_n é uma solução da equação $u_{n+1} - Au_n = F(n)$, então a substituição $u_n = k_n + z_n$ transforma a equação em $z_{n+1} - Az_n = 0$.

Demonstração.

Se k_n é solução de $u_{n+1} - Au_n = F(n)$, então $k_{n+1} - Ak_n = F(n)$, e ainda de $u_n = k_n + z_n$ $\implies \quad u_{n+1} = k_{n+1} + z_{n+1}$ e $Au_n = Ak_n + Az_n$.

Dessa forma,

$$\begin{cases} u_{n+1} = k_{n+1} + z_{n+1} \\ Au_n = Ak_n + Az_n \end{cases} \implies \quad u_{n+1} - Au_n = k_{n+1} - Ak_n + z_{n+1} - Az_n \quad \overset{hip}{\iff}$$

$$u_{n+1} - Au_n = k_{n+1} - Ak_n + z_{n+1} - Az_n \quad u_{n+1} - Au_n = k_{n+1} - Ak_n + z_{n+1} - Az_n \quad \iff$$

$$F(n) = F(n) + z_{n+1} - Az_n \quad \iff \quad z_{n+1} - Az_n = 0 \quad \forall \quad n,\ m \in \mathbb{N}.$$

□

Teorema 22.

Toda equação de recorrência linear homogênea de ordem m, da forma $x_{n+m} + ax_{n+(m-1)} + \ldots + bx_{n+(m-(m-1))} + cx_{n+(m-m)} = 0$, se reduz a um sistema de equações de recorrências de primeira ordem através de (m-1) interações recorrentes, com $m > 1$ e $m \in \mathbb{N}$, a, b, $\ldots$, $c \in \mathbb{R}$ e não nulos.

Demonstração. Demonstração por indução finita em m.

Para $m = 2 \quad \implies \quad x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$.

Se $x_{n+1} = y_n \quad \implies \quad x_{n+2} = y_{n+1} \quad \implies \begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + y_n \\ y_{n+1} = -cx_n - by_n \end{cases}.$

O que se verifica para $m = 2$.

Suponha que, por hipótese, que para $m = z$ a proposição $x_{n+z} + ax_{n+(z-1)} + \ldots + bx_{n+(z-(z-1))} + cx_{n+(z-z)} = 0$ seja válida, com z interações, vejamos se é válida a proposição para $z+1$ interações.

Dada a equação $x_{n+(z+1)} + ax_{n+z} + \ldots + bx_{n+(z-(z-1))} + cx_{n+(z-z)} = 0$.

Se $x_{n+z} = y_{n+(z-1)} \quad \Longrightarrow \quad x_{n+(z+1)} = y_{n+z} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x_{n+z} = y_{n+(z-1)} \\ y_{n+z} + ay_{n+(z-1)} + \ldots + by_{n+(z-z)} + cx_{n+(z-z)} = 0 \end{cases}.$$

Que da hipótese, o sistema anteior, possui exatamente $(z-1)$ interações a serem executadas. Sendo assim, faltando apenas mais 1 interação recorrente.

O que resulta em, $(z-1)+1 = z$ interações, gerando o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + 0y_n + \ldots - t_n + 0k_n \\ y_{n+1} = 0x_n + 0y_n + \ldots + 0t_n - k_n \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ t_{n+1} = 0x_n + 0t_n + \ldots + k_n + 0y_n \\ k_{n+1} = -dx_n - ct_n + \ldots - bk_n + 0y_n \end{cases} \qquad \square$$

Capítulo 4

Aplicações

Este capítulo está dedicado a algumas aplicações sobre o conteúdo desenvolvido nesta dissertação. Estará exposto alguns exercícios bem usuais que aparecem em muitos dos livros usados sobre o assunto. E ainda alguns não tão usuais.

1. Suponha que numa cultura existam, inicialmente, 120 células e que cada célula produz 2 filhas ao se dividir (Diniz, 2011). Quantas células existirão na décima geração? E na vigésima?

   Resolução:

   Na 10^a Condição inicial: $x_1 = 120, \quad C = 2 \quad$ e $\quad n = 10.$

   $x_n = C^{n-1}.x_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{10} = 2^{10-1}.120 = 2^9.2^3.3.5 = 2^{12}.3.5 \quad \Longleftrightarrow$

   $x_{10} = 2^{12}.3.5.$

   Na 20^a Condição inicial: $x_1 = 120, \quad C = 2 \quad$ e $\quad n = 20,$

   $x_n = C^{n-1}.x_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{20} = 2^{20-1}.120 = 2^{19}.2^3.3.5 = 2^{22}.3.5 \quad \Longleftrightarrow$

   $x_{20} = 2^{22}.3.5$

2. Analises quimicas mostram que substâncias radioativas decaem exponenciamente. Um determinado percentual da massa se desintegra em uma unidade de tempo; o tempo que leva para metade da massa decair é chamado de meia-vida.

   Embora não seja radioativo, o mercúrio metálico presente na lâmpada fluorescente na forma gasosa é uma substância tóxica aos seres humanos e ao meio ambiente. Considerando Q_0 como sendo a quantidade inicial de mercúrio no ambiente de meia-vida, aproximadamente, de 2 meses, podemos determinar a quantidade Q_n remanescente a cada período de dois meses. Assim, dado Q_0, a quantidade inicial e n um número natural par, usando um processo recursivo, podemos escrever:

$$Q_2 = \frac{1}{2}Q_0$$
$$Q_4 = \frac{1}{2}Q_2$$
$$Q_6 = \frac{1}{2}Q_4$$
$$\ldots$$
$$Q_n = \frac{1}{2}Q_{n-2}$$

Veja que estas contas recaem em 1.2, onde $C = \dfrac{1}{2}$ e $n - 1 = \dfrac{n}{2}$

Solução: $Q_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} Q_0$.

3. Num processo de engenharia genética, usam-se duas células de uma mesma geração para se obter uma nova célula. Sabendo que numa cultura experimental existem 2.024 células, quantas deverão existir após ser aplicado o procedimento 5 vezes, sucessivamente.

   Resolução:

   Condição inicial. Se observado que $g_0 = 2024$,
   $g_1 = \dfrac{2024}{2} + 2024 = \dfrac{3}{2}2024 = \dfrac{3}{2}g_0$;

   $g_2 = \dfrac{g_1}{2} + g_1 = \dfrac{3}{2}g_1 = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}g_0\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 g_0,$

   Note que estas ocorrências recaem em 1.2 onde $C = \dfrac{3}{2}$ e $n = 5 + 1$.

   $$x_n = C^{n-1}.x_0 \iff x_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^{(5+1)-1}.2024 = \left(\frac{3}{2}\right)^5.2024.$$

   Portanto no 5^o procedimento haverá $\left(\dfrac{3}{2}\right)^5.2024$ células na cultura.

4. A Torre de Hanói com 3 hastes: Considere já conhecido e razoavelmente difundido entre as brincadeiras matemáticas.

   O jogo tem por objetivo transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor. Qual o número mínimo de jogadas(J_n) para n discos onde $n \in \mathbb{N}$?

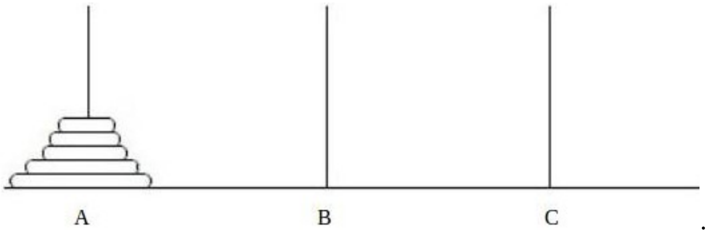

Figura 4.1: Hastes

Considere as hastes A, B e C, com os discos inicialmente na haste A; Para $n = 1$, obtem-se uma jogada, pra haste A ou B. $J_1 = 1$; Para $n = 2$, retire o primeiro disco colocando-o numa das hastes. Suponha que seja haste B, então, coloque o segundo disco, o maior, na haste C, e em seguida o disco da haste B para a C. Resolvido esta situação com 3 jogas, ou ainda, $J_2 = 2J_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3$; Para $n = 3$, primeiro disco para uma das hastes, que seja a B, **jogada 1**, o segundo disco para haste C, **jogada 2**, o primeiro disco da haste B mova para a C, **jogada 3**, o último disco, da haste A para a B, **jogada 4**, o disco menor da haste C para a A, **jogada 5**, o disco intermediário da haste C em cima do maior que está na haste B, **jogada 6**, e por último o menor disco que está na haste A para a haste B. Problema resolvido. $J_3 = 2J_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7$. Ou seja, a jogada posterior(J_n) é o dobro da jogada anterior(J_n) somada a uma jogada. Sendo assim, uma recorrência da forma $J_n = 2J_{n-1} + 1$.

Resolução:

Conforme equação 1.2, a solução particular de $J_{n+1} = 2J_n$ é $a_n = 2^{n-1}$.

Então,

$J_n = a_n y_n \quad \Longrightarrow \quad J_n = 2^{n-1} y_n \quad \Longrightarrow \quad J_{n+1} = 2^n y_{n+1}$.

Aplicando o teorema 4,

$J_{n+1} = 2J_n + 1 \quad \Longrightarrow$

$2^n y_{n+1} = 2.2^{n-1} y_n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$.

Sendo $f(n) = 2^{-n}$ e $x_1 = a_1 y_1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = 2^0 y_1 \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 = 1$.

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} = \\ &= 1 + (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ... + 2^{-(n-2)} + 2^{-(n-1)}) \end{aligned}$$

No parênteses, uma soma de PG com $a_1 = 2^{-1}$ e $q = 2^{-1}$.

Assim,

$y_n = 1 + \left(2^{-1}.\dfrac{2^{1-n}-1}{2^{-1}-1}\right) = 1 - 1(2^{1-n}-1) = 2 - 2^{1-n}.$

e a solução será

$J_n = a_n y_n \quad \Longrightarrow \quad J_n = 2^{n-1}.(2 - 2^{1-n}) \quad \Longrightarrow$

$J_n = 2^n - 1 \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$

Até aqui, foi determinado uma fómula fechada para esta contagem,J_n.

Vejamos se esta fórmula encontrada é válida para a equação de recorrência.

Façamos a demonstração por indução finita.

(i) Para $n = 1$; $J_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ ok.

(ii) Se por hipótese $J_n = 2^n - 1$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, então será válida para $n + 1$. Veja; $J_{n+1} = 2J_n + 1 \overset{hip}{=} 2.(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} + 2 + 1 = 2^{n+1}$.

O que confirma a veracidade da fórmula encontrada.

5. Determine o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano.

   Resolução:

   Inicialmente, tomaremos x_n como sendo o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano. Veja que um círculo divide o plano em duas regiões, ou seja, $x_1 = 2$. Se traçarmos mais um círculo, de modo que gere uma quantidade máxima de regiões, veremos que esta ocorrência gera mais duas novas regiões, ou seja, $x_2 = x_1 + 2.1 = 4$. Continuando o processo, traçando-se mais um círculo nas mesmas condições do enunciado, veremos que este gera mais quatro novas regiões, ou seja, $x_3 = x_2 + 2.2 = 8$. Assim, quando traçarmos o círculo $n+1$, este intersecta, os n círculos já existentes, em $2n$ pontos, gerando $2n$ novas regiões. E assim, ficando caracterizado recurssivamente a maneira de contar a quantidade máxima de regiões, $x_{n+1} = x_n + 2n$ com $x_1 = 2$.Veja que é o caso da recorrência anterior onde, $f(n) = 2n$ e $x_1 = 2$, logo,

   $x_n = x_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 + 2 + 4 + 6 + ... + 2(n-1) =$

   $2 + 2(1 + 2 + 3 + ... + (n-1)) = 2 + 2\dfrac{(n-1)n}{2} = 2 + n^2 - n = n^2 - n + 2.$

   Portanto $\quad x_n = n^2 - n + 2, \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}.$

6. Resolva $x_{n+1} = 2x_n + 1$, sendo que $x_1 = 2$.

Resolução:

Para a equação $x_{n+1} = 2x_n$, a solução é dada pela equação 1.2. Solução $a_n = 2^{n-1}$.

Do teorema 4:

$x_n = 2^{n-1}y_n \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} = 2^n y_{n+1}$, substituindo estes resultados na equação principal, temos

$2^n y_{n+1} = 2.2^{n-1}y_n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$.

Calculando y_n,

$x_1 = 2^{1-1}y_1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = 2^0 y_1 \Longleftrightarrow \quad y_1 = 2$

O que recai em 1.3.

$y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$, onde $f(n) = 2^{-n}$.

Esta solução particular fica:

$y_n = y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ... + 2^{-(n-1)} \quad \Longleftrightarrow$

$y_n = 2 + 2^{-1}.\dfrac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1} \quad \Longleftrightarrow$

$y_n = 2 - 2^{1-n} + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y_n = 3 - 2^{1-n}$.

Solução final:

$x_n = 2^{n-1}y_n \quad \Longleftrightarrow \quad x_n = 2^{n-1}(3 - 2^{1-n}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_n = 3.2^{n-1} - 1$.

7. A recorrência de Fibonacci: Quantos pares de coelhos nascem ao longo de um ano, a partir de um par inicial? Considerações, todos os meses cada par de coelhos dá a luz a um novo par de coelhos, que é fértil a partir do segundo mês e considerando ainda que não há mortes durante o processo.
   - Mês 1: 1 casal;
   - Mês 2: 1 casal;
   - Mês 3: 2 casais. O anterior e o que nasceu;
   - Mês 4: 3 casais. Os anteriores, 2, e outro nascido, 1, casal do primeiro casal;
   - Mês 5: 5 casais. Os anteriores, 3, outro nascido do primeiro casal e mais um nascido do segundo casal;

   . . . : . . .
   - Mês n: ? casais. Os anteriores, e outro casal do primeiro casal;

   Veja como se segue numa tabela:

Tabela 4.1: Nascimento de coelhos.

Mês	N^o casais mês anterior	N^o casais mês recém-nascidos	Total
1^0	0	1	1
2^0	1	0	1
2^0	1	1	2
3^0	2	1	3
4^0	3	2	5
5^0	5	3	8
...	...	...	...
n^0	anterior	anterior ao anterior	soma

ou seja, por observação, o mês seguinte é o mês anterior somado ao mês anterior do anterior. Se atribuído F_n como a quantidade de coelhos daquele período, então $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ com $F_1 = F_2 = 1$. E, assim, a famosa fórmula de **Fibonacci**. Observe que esta recorrência é de 2^a ordem, de forma que sua resolução será pelo Teorema 5. Resolução:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$$

Polinômio característico $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, resolvendo a equação do 2^o grau, obtemos

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Dessa forma, a solução geral é

$$a_n = C_1.\lambda_1^n + C_2.\lambda_2^n \quad \Longrightarrow \quad a_n = C_1.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Calculando C_1 e C_2 já. Por conveniência, com $a_0 = F_1 = 1$ e $a_1 = F_2 = 1$:

$$\begin{cases} a_0 = C_1.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \\ a_1 = C_1.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema se obtêm:

$$C_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

E por fim, a solução do problema:

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Por curiosidade, observe que apesar de C_1 e C_2 não serem naturais, a_n **é** natural $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

8. Suponha, a torcida do Corintians migra 10% ao mês para a torcida do são paulo. A torcida do São Paulo 20% ao mês para a torcida corintiana. Sabendo que inicialmente a torcida dos dois times respectivamente são de x_1 e y_1 de pessoas. Descreva

a função fechada desta relação.

Seja respectivamente x_{n+1} e y_{n+1} a quantidade de torcedores corintianos e saopaulinos do mês sequinte;

Veja que os torcedores corintianos do mês seguinte serão $x_{n+1} = 0,9x_n + 0,2y_n$ e saopaulinos $y_{n+1} = 0,8x_n + 0,1y_n$. Ou seja, caso este que recai no teorema 5

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,9x_n + 0,2y_n \\ y_{n+1} = 0,8x_n + 0,1y_n \end{cases}, \text{ com } x_1 \text{ e } y_1 \in \mathbb{N}.$$

$a = 0,9,\ b = 0,2,\ c = 0,8$ e $d = 0,1$.

$0,9 \neq -0,1$ e $0,9.0,1 \neq 0,2.0,8$.

$p = (0,9 + 0,1) = 1 \neq 0$ e $q = (0,9.0,1 - 0,2.0,8) = -0,07 \neq 0$

$x_{n+2} - (0,9 + 0,1)x_{n+1} + (0,9.0,1 - 0,2.0,8)x_n = 0 \quad \Longleftrightarrow$

$x_{n+2} - x_{n+1} - 0,7x_n = 0$.

Que pode ser resolvido pelo teorema 5,

Polinômio característico $\lambda^2 - \lambda - 0,7 = 0$ com solução $\lambda_1 = \dfrac{5 - 4\sqrt{2}}{10}$ e $\lambda_2 = \dfrac{5 + 4\sqrt{2}}{10}$.

Encontrando as constantes C_1 e C_2:

$$C_1 = \frac{x_1(\lambda_2 - a) - by_1}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{x_1\left(\frac{5+4\sqrt{2}}{10} - 0,9\right) - 0,2y_1}{\frac{5-4\sqrt{2}}{10}\left[\frac{5+4\sqrt{2}}{10} - \left(\frac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)\right]} \quad \Longleftrightarrow$$

$$C_1 = \frac{-20x_1 - 30\sqrt{2}x_1 + 40y_1 + 25\sqrt{2}y_1}{28}.$$

$$C_2 = \frac{by_1 - (\lambda_1 - a)x_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{0,2y_1 - \left(\frac{5-4\sqrt{2}}{10} - 0,9\right)x_1}{\frac{5+4\sqrt{2}}{10}\left[\frac{5+4\sqrt{2}}{10} - \left(\frac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)\right]} \quad \Longleftrightarrow.$$

$$C_2 = \frac{40y_1 - 20x_1 + 30\sqrt{2}x_1 - 25\sqrt{2}y_1}{28}.$$

Calculando y_n,

$$\begin{aligned} y_n = &\ \frac{x_{n+1} - 0,9x_n}{0,2} = \frac{10x_{n+1} - 9x_n}{2} = \\ = &\ C_1\lambda_1^n(-2 - 2\sqrt{2}) + C_2\lambda_2^n(-2 + 2\sqrt{2}) = \\ = &\ C_1\left(\frac{5 - 4\sqrt{2}}{10}\right)^n(-2 - 2\sqrt{2}) + C_2\left(\frac{5 + 4\sqrt{2}}{10}\right)^n(-2 + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Solução do sistema $x_n = C_1\left(\dfrac{5 - 4\sqrt{2}}{10}\right)^n + C_2\left(\dfrac{5 + 4\sqrt{2}}{10}\right)^n$ e

$y_n = C_1\left(\dfrac{5 - 4\sqrt{2}}{10}\right)^n(-2 - 2\sqrt{2}) + C_2\left(\dfrac{5 + 4\sqrt{2}}{10}\right)^n(-2 + 2\sqrt{2})$.

Use C_1 e C_2 encontrados para descrever a solução explicitamente por completo.

Ou podemos resolver este problema pelo teorema 10 e 11.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,9x_n + 0,2y_n \\ y_{n+1} = 0,8x_n + 0,1y_n \end{cases} \implies \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,8 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema 10: $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$

Calculando os autovalores:

$$det(A - \lambda I) = 0 \iff det\left(\begin{bmatrix} 0,9-\lambda & 0,2 \\ 0,8 & 0,1-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \iff$$

$$(0,9-\lambda)(0,1-\lambda) - 0,16 = 0 \iff \lambda^2 - \lambda - \frac{7}{100} = 0.$$

Soluções: $\lambda_1 = \dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}$ e $\lambda_2 = \dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}$.

Gerando os autovetores associados a estes autovalores:

$\lambda_1 = \dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}$ para o $v_1 = (k_1, z_1)$:

$$\begin{bmatrix} 0,9 - \left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right) & 0,2 \\ 0,8 & 0,1 - \left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{2\sqrt{2}+2}{5}\right) & 0,2 \\ 0,8 & \left(\dfrac{2\sqrt{2}-2}{5}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2\sqrt{2}+2}{5}\right)k_1 + \dfrac{2}{10}z_1 = 0 \\ \dfrac{8}{10}k_1 + \left(\dfrac{2\sqrt{2}-2}{5}\right)z_1 = 0 \end{cases} \implies$$

$$z_1 = (-2-2\sqrt{2})k_1 \implies v_1 = (1, -2-2\sqrt{2}).$$

$\lambda_2 = \dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}$. para o $v_2 = (k_2, z_2)$:

$$\begin{bmatrix} 0,9 - \left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right) & 0,2 \\ 0,8 & 0,1 - \left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{2-2\sqrt{2}}{5}\right) & 0,2 \\ 0,8 & \left(\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{5}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2-2\sqrt{2}}{5}\right)k_2 + \dfrac{2}{10}z_2 = 0 \\ \dfrac{8}{10}k_2 + \left(\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{5}\right)z_2 = 0 \end{cases} \implies$$

$$z_2 = (2\sqrt{2}-2)k_2 \quad \implies \quad v_2 = (1, 2\sqrt{2}-2).$$

E assim encontra-se a matriz $P = [v_1 \quad v_2]$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (-2-2\sqrt{2}) & (2\sqrt{2}-2) \end{bmatrix}.$$

Calculando P^{-1}.

Será usado o método da matriz P, com a matriz identidade I a direita, escalonado, como se segue:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ (-2-2\sqrt{2}) & (2\sqrt{2}-2) & 0 & 1 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{-\sqrt{2}+2}{4} & -\dfrac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 1 & \dfrac{\sqrt{2}+2}{4} & \dfrac{\sqrt{2}}{8} \end{array}\right).$$

Assim $P^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} & -\dfrac{\sqrt{2}}{8} \\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{2}}{8} \end{bmatrix}.$

Usando o corolário 1:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = PD^{n-1}P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (-2-2\sqrt{2}) & (2\sqrt{2}-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right)^{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} & -\dfrac{\sqrt{2}}{8} \\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{2}}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)^{n-1} & \left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right)^{n-1} \\ (-2-2\sqrt{2})\left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)^{n-1} & \left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right)^{n-1}(2\sqrt{2}-2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} & -\dfrac{\sqrt{2}}{8} \\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{2}}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\dfrac{-10-15\sqrt{2}}{14}\right)\left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)^n + \left(\dfrac{15\sqrt{2}-10}{14}\right)\left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right)^n & \left(\dfrac{40+25\sqrt{2}}{7}\right)\left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)^n + \left(\dfrac{40-25\sqrt{2}}{7}\right)\left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right)^n \\ \left(\dfrac{40+25\sqrt{2}}{28}\right)\left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)^n + \left(\dfrac{40-25\sqrt{2}}{28}\right)\left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right)^n & \left(\dfrac{-65\sqrt{2}-90}{14}\right)\left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)^n + \left(\dfrac{-90+65\sqrt{2}}{14}\right)\left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} =$$

Resolvendo os cálculos, resulta em:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{-30\sqrt{2}x_1-20x_1+40y_1+25\sqrt{2y_1}}{28}\right)\left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)^n + \left(\dfrac{40y_1-20x_1+30\sqrt{2}x_1-25\sqrt{2}y_1}{28}\right)\left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right)^n \\ \left(\dfrac{-30\sqrt{2}x_1-20x_1+40y_1+25\sqrt{2y_1}}{28}\right)\left(\dfrac{5-4\sqrt{2}}{10}\right)^n(-2-2\sqrt{2}) + \left(\dfrac{40y_1-20x_1+30\sqrt{2}x_1-25\sqrt{2}y_1}{28}\right)\left(\dfrac{5+4\sqrt{2}}{10}\right)^n(-2+2\sqrt{2}) \end{bmatrix}.$$

Note que estão determinados C_1 e C_2.

9. Vejamos uma possível solução fechada para o problema da recorrência dos números poligonais, deduzido conforme Rosa (2017), onde se deduz a equação de recorrência $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$.

   Resolução:

   Vejamos uma equivalência a fórmula dada.

   $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} \iff a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n.$

   Conforme teorema 15:

   se $a_{n+2} = y_{n+1} \implies a_{n+3} = y_{n+2} \implies \begin{cases} a_{n+2} = y_{n+1} \\ y_{n+2} = 3y_{n+1} - 3a_{n+1} + a_n \end{cases};$

   se $a_{n+1} = k_n$ e $y_{n+1} = t_n \implies a_{n+2} = k_{n+1}$ e $y_{n+2} = t_{n+1} \implies$

$$\begin{cases} a_{n+1} = k_n \\ y_{n+1} = t_n \\ k_{n+1} = t_n \\ t_{n+1} = 3t_n - 3k_n + a_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0a_n + 0y_n + k_n + 0t_n \\ y_{n+1} = 0a_n + 0y_n + 0k_n + t_n \\ k_{n+1} = 0a_n + 0y_n + 0k_n + t_n \\ t_{n+1} = a_n + 0y_n - 3k_n + 3t_n \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ y_{n+1} \\ k_{n+1} \\ t_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ y_n \\ k_n \\ t_n \end{bmatrix} . \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ y_n \\ k_n \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ y_1 \\ k_1 \\ t_1 \end{bmatrix} ..$$

Note que este sistema possui uma linha identica a outra, ou seja, é uma sistema **linearmente dependente(LD)**.

Determinando os autovalores para a matriz encontrada,

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$. através de $(A - \lambda I)v = \bar{0}$.

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Determinando os respectivos autovetores:

Para $\lambda_1 = 0 \Longrightarrow v_1 = (z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4,\,)$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow z_4 = 0,\ z_3 = 0.$$

Da 4^a linha, z_3 e z_4 determinados, então $z_1 = 0$. E por final $z_2 \in \mathbb{R}$.

Portanto $v_1 = (0,\, z_2,\, 0,\, 0)$. Se $z_2 = 1 \quad \Longrightarrow v_1 = (0,\, 1,\, 0,\, 0)$.

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \Longrightarrow v_2 = v_3 = v_4 = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo $\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right]$ por escalonamento

chegamos em $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

o que nos leva a: $x_1 = x_4$, $x_2 = x_4$, e $x_3 = x_4$

e assim, $v_2 = v_3 = v_4 = (x_4,\, x_4,\, x_4,\, x_4,)\ x_4 \in \mathbb{R}$.

Portanto, se $x_4 = 1 \quad \Longrightarrow v_2 = v_3 = v_4 = (1,\, 1,\, 1,\, 1)$.

Dessa forma podemos escrever $P = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao tentarmos encontrar P^{-1}, vemos que o $det\, P = 0$, fato que garante que P^{-1} não exite. E sendo assim, podemos dizer que esta recorrência não possui uma solução fechada.

Considerações finais

Neste trabalho é apresentada as resoluções usuais das recorrências lineares vistas na maioria dos livros e trabalhos sobre o assunto, e que por consequente, resoluções de sistemas de equações de recorrências lineares, onde podemos apresentar alguns teoremas pelos quais podemos resolver, por consequência, equações de recorrências lineares de ordem m, através de relacionamento entre as equações de recorrências lineares com sistemas de equações de recorrências lineares onde neste universo das matrizes, podendo assim obtermos através das propriedades de matrizes uma possível solução da recorrência dada.

Assim, dada a equação de recorrência de ordem m, reescrevemos esta equação para um sistemas de equações usando os teoremas elaborados e generalizados do capítulo 2, e caso a matriz A gerada do sistema for diagonizável, podemos apresentar explicitamente a solução fechada da equação de recorrência linear de ordem m.

Referências Bibliográficas

Carvalho, P. e Morgado, A. (2015). *Matemática discreta*. SBM, R. Janeiro, 2 edição.

Diniz, G. L. (2011). *Equações de diferenças e sistemas com aplicações biológicas*, volume 54. SBMAC, S. Carlos/SP.

Lima, E. L. (2014). *Álgebra linear*. IMPA, R.Janeiro.

Rosa, M. A. (2017). A importância das relações de recorrência para melhoria do ensino-aprendizagem da matemática discreta. Dissertação de Mestrado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.

Santos, R. J. (2004). *Um curso de geometria analítica e álgebra linear*. Imprensa Universitária UFMG, B. Horizone.