Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Cristiano José Rocha Ferreira de Oliveira

Cálculo Diferencial: Uma Abordagem Histórico-Social e Possibilidades de Introdução no Ensino Médio

Catalão

2018

sibi
sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Cristiano José Rocha Ferreira de Oliveira

Título do trabalho: Cálculo Diferencial: Uma Abordagem Histórico-Social e Possibilidades de Introdução no Ensino Médio

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2] Data: 12 / 07 / 2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Cristiano José Rocha Ferreira de Oliveira

Cálculo Diferencial: Uma Abordagem Histórico-Social e Possibilidades de Introdução no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática
Orientadora: Prof. Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves

Catalão

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira, Cristiano José Rocha Ferreira de
Cálculo Diferencial: [manuscrito] : Uma Abordagem Histórico Social e Possibilidades de Introdução no Ensino Médio / Cristiano José Rocha Ferreira de Oliveira. - 2018.
64 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RC), Catalão, 2018.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui siglas, fotografias, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Cálculo Diferencial. 2. História da Educação Brasileira. 3. História da Educação Matemática. 4. História do Brasil. 5. Ensino Médio. I. Gonçalves, Dra. Tânia Maria Nunes, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás - UFG
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

PROFMAT

Defesa N° 10

Ata de Defesa da Dissertação

Em 22 de Junho de 2018, às 14 h 20 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves (orientadora), Dra. Fabiana Tristão de Santana, Dra. Marta Borges para, em sessão pública realizada por Webconferência no Bloco J - Sala 03, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação da Dissertação intitulado "Cálculo Diferencial: uma Abordagem Histórico-Social e Possibilidades de Introdução no Ensino Médio", de autoria de Cristiano José Rocha Ferreira de Oliveira, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo(a) presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que, em 20 min procedeu a apresentação da Dissertação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado: **(X) Aprovado** ou **( ) Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16 h 55 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Tânia Maria Nunes Gonçalves, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente.

Tânia Maria Nunes Gonçalves

Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Fabiana Tristão de Santana

Dra. Fabiana Tristão de Santana
UFRN/Escola de Ciências e Tecnologias – Natal

Marta Borges.

Dra. Marta Borges
UFG/IMTec

Cristiano J. R. F. de Oliveira

Cristiano José Rocha Ferreira de Oliveira
Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RC/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Cristiano José Rocha Ferreira de Oliveira graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia, atua como professor da rede pública do Estado de Minas Gerais.

Oreru Nhamandú Tupã Oreru

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio durante o curso. Aos meus alunos, a sala de aula é um lenitivo para as agruras da vida. Aos meus colegas do PROFMAT, em especial Seantclear e Saulo, o mútuo suporte foi decisivo na conclusão deste caminho. A Prof. Dra. Dylene Agda Souza de Barros, coordenadora do curso de matemática da Universidade Federal de Uberlândia, pela presteza de fornecer dados estatísticos relevantes para este trabalho. À CAPES pelo suporte financeiro. E a minha orientadora, Profa. Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves, pela paciência e apoio na conclusão desta dissertação.

Resumo

O desempenho ruim nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral dos alunos dos cursos de Ciências Exatas nas instituições de Ensino Superior tem sido uma constante no país. Uma quantidade significativa de alunos acumulam uma ou mais reprovações em Cálculo em seu histórico escolar, sendo, esta disciplina, um dos motores da evasão dos alunos no Ensino Superior. Nesse presente estudo, pretendemos abordar a história da Educação no Brasil de um ponto de vista socieconômico desde a chegada dos colonos até aos dias de hoje e ver como essa 'história' impactou no estudo da Matemática, e em particular, no estudo do Cálculo nos diferentes níveis de escolaridade, especificamente, a sua ausência na Educação Básica, mais precisamente, no Ensino Médio. Em uma análise sistemática e crítica dos pressupostos supracitados, concluiremos com uma proposta dos conteúdos de Cálculo que poderiam ser implementados no Ensino Médio ante todas as mazelas históricas da Educação Brasileira.

Palavras-chave

História do Brasil. História da Educação Brasileira. História da Matemática no Brasil. Cálculo Diferencial. Ensino Médio.

Abstract

The poor performance in Calculus and Integration courses of students of Exact Sciences in institutions of Higher Education has been a constant in the country. A significant number of students accumulates one or more failures in their educational history, being this discipline one of the drivers of student's evasion in higher education. In this present study, we intend to tackle the history of Education in Brazil from a socioeconomic point of view since the arrival of settlers to the present day and see how this 'history' impacted on the study of Mathematics, in particular, the study of Calculus at the different levels of schooling, specifically, its absence from Basic Education, more precisely, in High School. In a systematic and critical analysis of the above-mentioned assumptions, we will conclude with a proposal of the contents of Calculus that can be implemented in High School despite all the historical ills of Brazilian education.

Keywords

History of Brasil. History of Brazilian Education. History of Mathematics in Brazil. Differential Calculus. High School.

Lista de Figuras

1 Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros. 36
2 O Patriota 39
3 Evolução dos resultados do Brasil no Saeb (1995 a 2015) - Proficiências médias em Matemática 46
4 Consolidado do aproveitamento no 10 últimos semestres da disciplina Cálculo Diferencial e Integral 1 (GMA005) - Curso Licenciatura em Matemática/UFU 49
5 Reta tangente a $f(x)$ em x_0. 55
6 Noção de reta tangente a uma curva C em um ponto P. 56

Lista de Tabelas

1 Crescimento Populacional e Evolução da Escolarização no Brasil 19
2 Rendimento geral da educação, em números relativos, por 8 estados de três regiões distintas 20
3 Currículo do Ensino Secundário - Ciclo Fundamental, após Reforma Francisco Campos (1931) 26
4 Currículo do Ensino Secundário - Ciclo complementar - candidatos à matrícula no Curso Jurídico, após Reforma Francisco Campos (1931) . 27
5 Currículo do Ensino Secundário - Ciclo complementar - candidatos à matrícula nos cursos de Medicina, Farmácia e Odontologia, após Reforma Francisco Campos (1931) 27
6 Currículo do Ensino Secundário - Ciclo complementar - candidatos à matrícula nos cursos de Engenharia e Arquitetura, após Reforma Francisco Campos (1931) 28
7 Currículo do Ensino Secundário - 1° Ciclo – Curso Ginasial, após Reforma Capanema (1942) 29
8 Currículo do Ensino Secundário - 2° Ciclo – Curso Colegial, após Reforma Capanema (1942) 29
9 1° grau, após Resolução n.° 8/71 (1971) 31
10 2° grau, após Resolução n° 8/71 (1971) 31
11 1° grau, após resolução n.°6/86 (1986) 32
12 2° grau, após resolução n.°6/86 (1986) 33
13 Aproveitamento da disciplina Cálculo Diferencial e Integral 1 (GMA005) - Curso Licenciatura em Matemática/UFU 48

Sumário

1 Introdução **14**

2 A Educação no Brasil **16**

2.1 Períodos Colonial e Imperial 16

2.2 República 17

2.3 A Seletividade na Educação 20

2.4 O Período Militar 21

2.5 Período de Transição e Democracia 22

2.6 Currículos 25

3 Uma breve História da Matemática no Brasil **35**

3.1 O primeiro livro de Matemática escrito no Brasil 36

3.2 O processo de modernização do país com a vinda da família real 37

3.3 A primeira publicação de um trabalho de Matemática impresso no Brasil 37

3.4 Influência do Positivismo 38

3.5 A **2ª** República 40

4 Cálculo Diferencial **43**

4.1 Limite e Derivada 43

4.2 Problematização da Aprendizagem/Desempenho em Cálculo 45

4.3 Porque se estudar Cálculo no Ensino Médio? 50

5 Considerações Finais **57**

Apêndice A - "Míni" Livro de Cálculo Diferencial **63**

Anexo A - A escala de Matemática para o 3° ano do Ensino Médio **114**

1 Introdução

Após alguns anos lecionando no 3° ano do Ensino Médio, tendo mantido contato com boa parte de ex-alunos que ingressaram em cursos de Ciências Exatas da Educação Superior, notei que era costumeiro alguns desses alunos terem uma dificuldade de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, muitos até foram reprovados nessa disciplina, uma, duas ou mais vezes. Em algumas oportunidades, usaram as redes sociais para esclarecerem alguma dúvida comigo, por outras, se deslocaram até a escola para sanar as dúvidas pessoalmente.

Pregresso a este fato em minha linha do tempo, quando eu ainda era estudande de graduação em Matemática na Universidade Federal de Uberlândia, me lembro das salas de aula em que eram ofertados os cursos de Cálculo Diferencial e Integral para o ciclo básico das Ciências Exatas; estas salas, eram as maiores até então em toda universidade, pois havia a necessidade que comportasse um grande número de alunos dadas as reprovações sucessivas de distintos cursos do ciclo básico das Ciências Exatas.

Diante deste contexto, é importante estudar o ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil; busca-se aqui investigar o desenvolvimento da Educação no Brasil de um ponto de vista socioeconômico desde a época do colonos até aos dias de hoje, e por conseguinte, a evolução do estudo do Cálculo e o baixo rendimento dos alunos nesta disciplina.

A presente dissertação tem como objetivo geral: construir um panorama histórico e social do ensino da Matemática, assim como, a inserção do ensino de Cálculo neste contexto. Com relação aos objetivos específicos, pretende-se: analisar a história do Brasil e sua influência na Educação Brasileira e na Educação Matemática; analisar as mudanças curriculares do Ensino Básico ao longo do tempo; investigar a história da Matemática no país; e por último, elaborar um material contendo diretrizes curriculares mínimas abordando conceitos de Cálculo Diferencial direcionados para o público do Ensino Médio.

Deste modo, essa dissertação está dividida em quatro partes. Em um primeiro momento, foi feito um estudo da história da educação brasileira, desde os primórdios do país, durante a colonização, onde a educação era dirigida pelos jesuítas e destinada a um seleto grupo de pessoas dentro da elite rural da colônia até os dias de hoje, em que a oferta da educação se tornou praticamente universal. Dois livros foram essenciais para este estudo, "História da Educação Brasileira", de Otaiza de Oliveira Romanelli e "Da LDB (1996) ao novo PNE (2014-2024) por uma outra política educacional" de

Demerval Saviani. Em um segundo momento, há um breve estudo da história da matemática no país, neste capítulo foi de primordial importância o livro "Uma História Concisa da Matemática no Brasil" de Ubiratan D'Ambrosio. Na sequência, foi feito uma compilação do currículo educacional brasileiro, desde quando a educação começou a ter estrutura e organicidade nacionalmente, ou seja, a partir da década de 30 do século passado até os dias de hoje, onde aguarda-se a publicação da Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC) que norteará o currículo da matemática nos próximos anos. Por último, é investigado a necessidade do estudo de Cálculo no Ensino Médio. Também é ilustrado a abordagem de alguns autores acerca de conteúdos de Cálculo direcionado ao Ensino Médio.

2 A Educação no Brasil

2.1 Períodos Colonial e Imperial

Em um primeiro momento, a educação nestas terras foi iniciada pelos jesuítas, pertencentes à ordem da Igreja Católica denominada Companhia de Jesus, de disciplina rígida e militar e que tinha por principal objetivo combater a Reforma Protestante e os infiéis de toda sorte e difundir o catolicismo por todo o planeta [17]. Em paralelo a este fato, os paulistas, que através de suas bandeiras garantiram a colonização do país, eram inimigos dos jesuítas, o que acabou criando mais um empecilho na difusão da educação inaciana[1] no país. Paradoxalmente, o raro letramento nessas terras era demasiadamente estimado. Ser colonizador e alfabetizado era motivo de privilégios, como títulos de nobreza e cargos públicos. Em um país em colonização, exibições de erudição só não eram mais premiadas que os feitos militares. Assim a elite agrária copiava os padrões culturais da nobreza portuguesa, o que transformou essa sociedade latifundiária em uma sociedade aristocrática.

A educação jesuítica deixou uma forte impressão em nossa sociedade, sua concepção de educação reforçava a hieraquia e os privilégios de um pequeno grupo na sociedade, tratava a concepção de exploração de classe e a escravidão como algo usual e corriqueiro, e ainda, como peremptório para o progresso [2].

De caráter dogmático, a educação inaciana contribuiu para a formação intelectual clássica dos alunos, baseado pelo norte filosófico das teorias de Aristóteles e São Tomás de Aquino, com um método denominado *Radio Studiorum*, com um currículo de educação literária e humanística, com metodologias diversas, como provas, leitura, escrita, apresentações públicas e exames, com o objetivo não só da prática intelectual calcada na memória, mas também na interpretação [17]. Quanto ao currículo em si, pouco se sabe, todavia transbordava de apreço às letras em detrimento das ciências e do pensamento crítico, o resultado final desta educação era um letrado erudito [5].

Vale lembrar que a educação engendrada pelos jesuítas destoava da realidade da vida diária da colônia. Era insignificante no trabalho diário utilizado nas atividades de produção da colônia, baseada em uma economia agrária de mecanismos rudimentares, assim pouco contribuia no dia a dia da sociedade em construção. Desinteressante para os trabalhadores nas atividades de produção, ela cabia então àqueles que podiam se dar ao luxo do ócio intelectual [5].

[1] Relativo a Santo Inácio ou à Companhia de Jesus.

A escola era, a princípio, destinada aos filhos que não fossem primogênitos de um seleto estrato da sociedade, formado pelos latifundiários, donos das terras e dos engenhos. Os primogênitos recebiam apenas uma instrução suficiente para tomar a direção dos negócios da família. Quanto aos não primogênitos, poderiam seguir carreira religiosa ingressando na classe sacerdotal ou irem para a Europa, para terminarem seus estudos, donde retornariam letrados para a colônia. Para a população indígena e branca em geral (exceto as mulheres), reservava-se uma educação básica. Com o passar dos anos, a elite dominante percebeu a importância desta educação na construção das organizações do poder na colônia. Assim, os filhos desta aristocracia rural se tornaram políticos, representantes junto ao poder público [5].

Esta educação, direcionada para manter o *status quo* de uma sociedade aristocrática ruralista, nada mudou em suas fundações até a República. Permanecendo basicamente a mesma durante os períodos Colonial e Imperial.

Além do choque histórico entre paulistas e jesuítas, a concepção de educação jesuítica encontrou outro inimigo, o primeiro ministro de Portugal de 1750 a 1777, Marquês de Pombal, uma vez que este último era inspirado por ideais iluministas de uma educação laica. Pombal queria uma educação que atendesse aos interesses do Estado e não da fé, como a educação dos inacianos, queria uma educação que permitisse que Portugal competisse com os demais países da Europa, como uma metrópole capitalista, sendo assim, seria necessário acabar com a escravidão dos indígenas, permitindo que se casassem com portugueses. Pombal também queria formar uma classe burguesa e uma nobreza intelectualizada, para incentivar o desenvolvimento cultural, artístico e científico, com profissionais capacitados para assumir os cargos públicos [5].

Esse antagonismo de objetivos da educação culminou com a expulsão do Brasil da Companhia de Jesus em 1759. Assim, várias escolas jesuítas foram fechadas, porém foram mantidos vários colégios formadores de seus sacerdotes, bem como seminários que formavam o seu clero.

Com esta ruptura, a educação passou a ser administrada pelo Estado, pública e laica. A partir daí, o Estado começou a traçar diretrizes, planos e leis sobre a educação, bem como a cobrar impostos. Entretando, como já dito, as bases da educação permaneceram as mesmas até os primórdios da República.

2.2 República

[...]uma simples transferência de poderes dentro de uma mesma classe,

> (a independência) entregaria a direção da nova nação aos proprietários de terras de engenho e aos letrados [25].

Nem a independência do Brasil alterou o quadro da educação de imediato, até porque o que houve neste fato histórico foi a transferência de poder entre a elite [25]. Com isso nada muda no norte excludente em que foi fundada a educação no país.

Desde os tempos de Colônia, os letrados tiveram um papel importante ocupando os quadros administrativos e políticos no poder público. Em particular, as faculdades de Direito foram hegemônicas no preenchimento destes quadros em detrimento das outras faculdades já existentes, como as de Engenharia e de Medicina. Como consequência, conquistaram a preferência dos alunos egressos do Ensino Secundário. E também, um fato resultante disto, foi a influência no currículo e na estrutura das escolas secundárias, tornando o Ensino Secundário propedêutico, cuja função era preparar os alunos para o ingresso no ensino superior [5].

Nas décadas finais do século XIX novos estratos sociais começam a surgir graças ao fortalecimento do mercado interno impulsionado pela mineração. Com isso, essa nova classe social intermediária começa a buscar a escola como motor para a ascenção social, antes ocupada apenas pela oligarquia rural. Esta nova classe social, pequena burguesa, procura se ligar à classe dominante, a fim de serem recrutados para um trabalho distante do trabalho braçal e servil das camadas sociais inferiores. Assim, buscavam uma ocupação no campo administrativo e intelectual. Sucede então, que essa nova camada social que começa a ingressar na escola não favoreceu nenhuma mudança de norte nas fundações da educação, permanecendo com o seu velho viés, destinada às elites rurais [7].

Durante as primeiras décadas do século XX a industrialização começa a tomar corpo no país. Alguns fatores contribuiram para isso: durante a Primeira Guerra Mundial o país começou a ter dificuldades com as importações de produtos industrializados, logo surgiu a necessidade do desenvolvimento da indústria nacional. Com a crise de 1929, a economia brasileira conseguiu reagir graças ao mercado interno que em conjunto com a queda das exportações (principalmente café), resultou na transferência de renda do setor rural para o recém criado setor industrial.

A Revolução de 1930 foi precedida por uma série de conflitos insuflados pela disputa entre o velho sistema calcado na oligarquia rural e o sistema econômico industrial que começa a emergir. Após a Revolução de 1930, o processo de industrialização nacional se acelera, bem como a urbanização do país, o que acarretou novas exigências educacionais. Vale ressaltar que são mais de um século de atraso das revoluções industrial e

educacional ocorridas no Brasil em relação aos países desenvolvidos [5].

A urbanização crescente e o setor industrial em expansão, acarretou o aumento da demanda da educação, uma vez que a sociedade começa a enxergar a educação como um mecanismo de ascenção social. Paralelo a isto, o capitalismo industrial levou à luta de classes para dentro das escolas: a elite que controla o poder em conjunto com a velha aristocracia rural (mesmo porque o latifúndio e todo seu aparato cultural intrínseco persistiu), procura mecanismos para manter o caráter elitista e excludente da educação e, em contrapartida, há a pressão social pela democratização da educação. Como resposta, o estado expande o sistema educacional, aumentando suas vagas, ainda que de maneira insuficiente. E, em compensação, o perfil da educação excludente e de baixa qualidade foi mantido [5].

Como a estrutura do ensino no país não era suficiente para a implantação da educação profissional necessária para a mão de obra em uma crescente industrialização nacional, o governo optou, em conjunto com as indústrias pela criação de um sistema educacional paralelo, e assim foi criado o Serviço Nacional de Aprendizagem das Indústrias (SENAI), através do decreto-lei 4048, de 22 de janeiro de 1942. Quatro anos depois, foi criado em condições semelhantes o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial (SENAC), através do decreto-lei 8621, de 10 de janeiro de 1946 [5].

Na tabela 1 vemos que, embora houve o aumento do número de vagas nas escolas através do crescimento do número de matrículas, estes números se mantêm abaixo da demanda social, praticamente metade da população na faixa dos 5 aos 19 anos ainda se mantém fora da escola em 1970.

Tabela 1: Crescimento Populacional e Evolução da Escolarização no Brasil

Ano	População de 5 a 19 anos	Matrícula no Primário	Matrícula no Médio	Total de Matrículas	Taxa de Escolarização
1920	12.703.077	1.033.421 [1]	109.281 [1]	1.142.702 [1]	8.99
1940	15.530.819	3.068.269	260.202	3.328.471	21.43
1950	18.826.409	4.366.792	477.434	4.924.226	26.15
1960	25.877.611	7.458.002	1.177.427	8.635.429	33.37
1970	35.170.643	13.906.484	4.989.776	18.896.260	53.72

[1]Estimativas

Fonte: Fundação IBGE: Séries Estatísticas Retrospectivas, 1970.

2.3 A Seletividade na Educação

> O ensino pré-vocacional e profissional destinado às classes menos favorecidas, é em matéria de educação o primeiro dever do Estado. Cumpre-lhe dar execução a esse dever, fundando institutos de ensino profissional e subsidiando os de iniciativa dos Estados, dos Municípios e dos indivíduos ou associações particulares e profissionais [26].

O sistema educacional também persistia em sua seletividade de outras formas, com o Ensino Primário, de caráter profissionalizante, voltado para os pobres, e o Ensino Secundário, preâmbulo para o ingresso no Ensino Superior, para os ricos. Também cabe ressaltar a disparidade da qualidade da educação no aspecto geoeconômico, estados mais ricos tinham mais recursos e consequentemente uma melhor educação. Essa população mais pobre, que procurava a educação como forma de ascenção social, se depara com um sistema seletivo o suficiente para que poucos consigam o feito. Ou seja, ascendiam socialmente apenas os "mais capazes", e assim, com esse perfil de uma escola que atende aos valores das elites em detrimento das camadas mais populares, se mantinha o *status quo* da sociedade. Essa política educacional, construida ao longo do tempo com viés seletivo, é um dos pilares do fiasco da educação no país [5].

A Tabela 2 a seguir apresenta a disparidade da educação nas distintas regiões do país no período, nele também podemos ver a seletividade, que fica evidente no afunilamento que dá na passagem de um nível para outro.

Tabela 2: Rendimento geral da educação, em números relativos, por 8 estados de três regiões distintas

Estados	1ª série primária 1960	4ª série primária 1963	1ª série ginasial 1964	4ª série ginasial 1964	3ª série colegial 1970	Ingresso no curso superior
Piauí	1000	98	93	61	39	6
Sergipe	1000	74	72	43	34	9
Ceará	1000	85	80	54	38	10
Alagoas	1000	91	77	46	36	15
Rio G. do Sul	1000	394	134	92	58	47
Paraná	1000	221	165	89	68	48
Guanabara	1000	552	354	220	151	104
São Paulo	1000	390	258	141	112	125

Fonte:Estatísticas da Educação Nacional, 1960/1971, MEC.

Observe a disparidade entre os quatro estados da região nordeste e quatro estados das regiões sul e sudeste que constam na Tabela 2. No Piauí, de cada mil alunos que

ingressam na 1ª série primária, apenas seis chegam a ingressar no Ensino Superior. Em contrapartida, em São Paulo, de cada mil alunos que ingressam na 1ª série primária, cento e vinte e cinco ingressam no Ensino Superior, embora também seja um resultado aquém do esperado, é mais de vinte vezes o número de ingressantes no Ensino Superior do Piauí.

Cabe também ressaltar, que o caráter academicista e humanista permaneceu na educação durante todo este período, apesar do progresso econômico-social necessitar de uma educação científica-tecnológica, de maneira que a defasagem entre a educação e o desenvolvimento do país não só permaneceu, como se aprofundou. A disputa dos blocos pelo poder, quase sempre foi ganha por forças conservadoras, que se valeram do instrumento das leis para manterem a educação com esse viés discriminatório do ponto de vista social e de qualidade duvidosa, onde a concepção liberal-aristocrática da educação voltada para as carreiras liberais permaneceu em detrimento do ensino técnico e científico [5].

2.4 O Período Militar

O perfil político populista, de expansão industrial iniciado com Getúlio Vargas, permaneceu mais ou menos estável de 1930 a 1964, bem como o modelo de expansão do sistema educacional, com a educação quase sempre pendendo para o lado conservador. Com o governo de Juscelino Kubitschek a economia do país foi aberta para o capital estrangeiro. A partir daí, a pressão para que a economia fosse internacionalizada, norteada pelo capital internacional, resultou no golpe de 1964, com isso a população foi paulatinamente afastada dos círculos de decisões do país [5].

A crise educacional que já vinha se agravando com o crescimento da demanda por fatores como a crescente urbanização e o aumento da população, agora tem outro fator para ampliar a crise educacional, a demanda pelo sistema escolar agora também é ampliada nos últimos anos pela diversificação do emprego, resultante principalmente, da criação da indústria de base na década de 50. Com a entrada no país das transnacionais, a classe média agora almejava ocupar os cargos de alta hieraquia nessas empresas. Com esse agravamento da crise educacional, o governo militar buscou uma série de acordos de cooperação técnica e financeira com a agência norte-americana USAID (United States Agency for International Development) [14].

Esses acordos, de caráter tecnicista, tinham por objetivo reestruturar a educação no país com a finalidade de ser conveniente ao capital internacional, em especial, às grandes

corporações dos EUA. Com resistência de vários setores da sociedade, principalmente do movimento estudantil (apesar da União Nacional dos Estudantes (UNE) estar na clandestinidade desde 9 de novembro de 1964 com a Lei Nº 4.464, vulgo lei Suplicy, do ministro da educação Flávio Suplicy de Lacerda), que julgava que esses acordos culminariam com a privatização da educação pública no país [18].

Essa resistência levou o governo a criar em 1970 um Grupo de Trabalho para discutir o assunto e construir um modelo de reforma educacional. Várias mudanças na Educação Brasileira foram feitas baseadas nesses acordos, principamente no Ensino Superior, que era o foco principal da agência. Com relação à Educação Básica, por exemplo, o currículo foi reestruturado, as disciplinas Sociologia e Filosofia foram trocadas por OSPB (Organização Social e Política Brasileira) e EMC (Educação Moral e Cívica). O Ensino Primário e o Ensino Ginasial se fundiram, tornando-se o curso único Ensino Primário, de 8 anos de duração. Do mesmo modo, os cursos científico e clássico se tornaram um único curso, o Ensino Médio [27].

2.5 Período de Transição e Democracia

Ainda sobre a influência do regime militar, durante o período de transição à democracia houve poucas mudanças significativas, como por exemplo na composição do currículo descrito no próximo capítulo. O fato relevante foi a Constituição de 1988, aprovada pela Assembleia Nacional Constituinte em 22 de setembro de 1988 e promulgada em 5 de outubro de 1988. Uma seção inteira foi dedicada à educação. Nesta constituição, foi previsto o direito à educação como um direito de todos, como vemos em seu artigo 6°:

> São direitos sociais a educação , a saúde, o trabalho, o lazer, a segurança, a previdência social, a proteção à maternidade e à infância, a assistência aos desamparados, na forma dessa Constituição, com isso a União, Governo e Municípios se tornam responsáveis pela educação e também responsáveis a disseminar a todo território nacional. (ART. 6, Constituição Brasileira de 1988)

Reafirmado no artigo 205°:

> A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (ART. 205, Constituição Brasileira de 1988)

Durante o período do governo de Fernando Collor de Mello (1990-1992), a educação foi relegada, economicamente o país foi aberto para o capital financeiro internacional, não obstante, todas as políticas subsequentes estiveram subordinadas a este viés ultra-liberal[2] [28].

Já durante o período do presidente Fernando Henrique Cardoso (1995-2003), foi criado o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e de Valorização do Magistério (FUNDEF) através da emenda constitucional n°14 de setembro de 1996. Foi regulamentado pela Lei n.º 9.424, de 24 de dezembro de 1996, e também pelo Decreto nº 2.264, de junho de 1997. Sendo assim implantado nacionalmente, em 1º de janeiro de 1998, que na prática apenas visa regular e melhor distribuir os fundos de financiamento já existentes. Assim não amplia os recursos, não apresentando uma solução para uma mudança na educação em nosso país [6].

No primeiro mandato de Luiz Inácio Lula da Silva (2003-2007), o Ensino Fundamental passa a ter 9 anos obrigatórios de duração e se inicia aos 6 anos de idade. É também criado o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (FUNDEB) em substituição ao FUNDEF através da Emenda Constitucional n.° 53/2006 e regulamentado pela Lei n.° 11.494/2007 e pelo Decreto n.° 6.253/2007.

O FUNDEB apresenta avanços em relação ao FUNDEF, além da União aumentar a sua participação no fundo, ele passa a abranger toda a Educação Básica incluindo a Educação Infantil (creches e pré-escolas), o Ensino Médio, a Educação de Jovens e Adultos (EJA). O fundo inclui também os meios urbano e rural, as modalidades de Educação Especial, a Educação Indígena e a Educação Quilombola, bem como a Educação Profissional integrada ao Ensino Médio [6].

É fato que o FUNDEB não é suficiente para solucionar o problema da educação no país, as salas de aulas continuam lotadas, os baixos salários dos professores vigoram bem como suas respectivas altas quantidades de carga horária/aula para compensar essa débil remuneração, etc. Todavia ele representa um avanço significativo em relação ao FUNDEF.

No segundo mandato de Luiz Inácio Lula da Silva (2007-2011), foi instituído o Piso Salarial Profissional para os profissionais do magistério público através da Lei n.° 11.738, de 16 de julho de 2008. A lei também fixou limites para a jornada de trabalho

[2]O receituário liberal do Consenso de Washington do qual advogou Collor, retoma a "concepção ultra-liberal" que regula a vida econômica e social, inspiradas em doutrinas conclamadas no século XIX do "laissez faire, laissez passer"

docente, de forma que os professores devem passar no máximo dois terços (2/3) de sua carga horária em sala de aula e no mínimo um terço (1/3) da jornada de trabalho deve ser destinado às chamadas atividades extraclasse, como planejamento de aulas, reuniões pedagógicas, correção de atividades, etc [20].

A lei teve como resultado um avanço na composição salarial do magistério no país, embora tímido devido a resistência dos estados e municípios em se cumprir a lei. A forma proposta para a divisão da jornada do professor também representa uma melhora nas condições de trabalho, uma vez que reconhecendo as atividades extraclasse como componente da profissão do magistério, se diminuiu um pouco a alta carga de aulas necessárias para os professores suprirem os baixos salários [6].

No primeiro mandato de Dilma Vana Rousseff (2011-2014), com relação a Educação Básica, poucas mudanças pontuais e curriculares em dispositivos da LDB foram tomadas. Com a Lei n.°12.796, de 4 de abril de 2013, se ampliou a educação obrigatória para a faixa dos 4 aos 17 anos. Sendo assim, a Educação Básica obrigatória passou a abranger a pré-escola (4 e 5 anos de idade), Ensino Fundamental (6 aos 14 anos de idade) e Ensino Médio (15 aos 17 anos de idade) [6].

Com o processo de impeachment de Dilma Rousseff, ocorrido em 2016, temos a ascenção de um presidente não eleito, não tendo que prestar contas a sua base eleitoral, já pode-se vislumbrar a consequência desse processo. Com relação a Educação Básica, o presidente Michel Temer propõe em setembro de 2016, de maneira autoritária via medida provisória, a Reforma do Ensino Médio [10].

A reforma aponta para uma mudança curricular, diminuindo o conteúdo obrigatório e cria cinco ênfases em áreas específicas: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Formação Técnica e Profissional, donde aluno deverá fazer a sua escolha após a segunda metade do Ensino Médio. A lei garante o ensino de Língua Portuguesa e Matemática nos três anos do Ensino Médio [10].

A ampliação da carga horária também está presente na reforma, que passará das atuais 800 horas anuais, gradativamente, para 1400 horas, sendo previsto que até 2024, 50% das escolas de Ensino Médio estejam funcionando no regime integral.

O governo justifica a Reforma aprovada sem diálogo e a toque de caixa com base em maus resultados apresentados como por exemplo, em dispositivos de avaliação da educação como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), no qual houve uma redução da proficiência em Matemática comparando 1995 e 2015, de 5,3%, o mesmo ocorrendo com a Língua Portuguesa no mesmo período, no caso, uma redução de 8% [19].

O fato é que como diria Anísio Teixeira: "não há como prever sem prover", logo os resultados pífios encontrados são motivados pela falta de financiamento adequado para o funcionamento dos planos propostos para a Educação. E ainda, se valendo da lógica econômica que secunda o lugar da educação no bolo orçamentário, com a Proposta de Emenda Constitucional (PEC) 241, transformada na Emenda Constitucional n.° 95 de 15 de dezembro de 2016 o governo limita os gastos públicos nos próximos 20 anos, de maneira que as despesas e investimentos públicos ficam limitadas aos mesmos valores gastos no ano anterior, corrigidos pela inflação, medida pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) [21].

Isso faz com que esta emenda constitucional possa condenar o cumprimento das metas estabelecidas pelo último Plano Nacional de Educação (PNE), já que o PNE necessita de uma ampliação de investimentos para o cumprimento de suas metas.

2.6 Currículos

A Reforma Francisco Campos instituída através de seis decretos a partir de 1931 foi a primeira Reforma em âmbito nacional, deu corpo estrutural ao Ensino Médio, bem como ao Ensino Comercial e ao Ensino Superior. Com relação ao Ensino Médio, o foco deste trabalho, antes delegado aos estados sem quaisquer orientação nacional, quase sempre funcionava como um curso preparatório para o ingresso no curso superior. Com a reforma, o Ensino Secundário foi dividido em dois ciclos, o ciclo fundamental e o ciclo complementar, compostos sobre um regime seriado donde era peremptório a habilitação nestes cursos para o ingresso no Ensino Superior. O aumento em dois anos da duração do curso recebeu várias críticas, apontado como elitista pela sua duração prolangada, seu rígido sistema de avaliações e currículo de caráter enciclopédico, acabava por ser descabido para grande parte da população, cujo escopo da vida era em primeiro lugar a sobrevivência [5].

O currículo na Reforma Francisco Campos ficou organizado conforme as Tabelas 3, 4, 5 e 6 [11].

Tabela 3: Currículo do Ensino Secundário - Ciclo Fundamental, após Reforma Francisco Campos (1931)

Disciplinas/Séries	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Português	x	x	x	x	x
Francês	x	x	x	x	
Inglês		x	x	x	
Latim				x	x
Alemão [1]				x	x
História da Civilização	x	x	x	x	x
Geografia	x	x	x	x	x
Matemática	x	x	x	x	x
Ciências Físicas e Naturais	x	x			
Física			x	x	x
Química			x	x	x
História Natural			x	x	x
Desenho	x	x	x	x	x
Música (Canto Orfeônico)	x	x	x		

[1]Facultativo

Fonte: Decreto n° 19.890, de 18 de abril de 1931.

Observe, que pela Tabela 3, a Matemática está presente nos cinco anos do Ciclo Fundamental, no entanto, há uma presença excessiva do estudo de línguas no currículo, além do Português, temos Francês, Inglês, Latim e Alemão (optativa). O resultado é um currículo extenso tanto para a realidade social do país quanto para a estrutura da educação brasileira, que só após esta reforma começa a ganhar organicidade nacionalmente.

O ciclo complementar continuou com o foco preparatório para o Ensino Superior, com três opções de curso, conforme a área desejada (veja tabelas 4, 5, 6).

Tabela 4: Currículo do Ensino Secundário - Ciclo complementar - candidatos à matrícula no Curso Jurídico, após Reforma Francisco Campos (1931)

Disciplinas/Séries	1ª	2ª
Latim	x	x
Literatura	x	x
História da Civilização	x	
Noções de Economia e Estatística	x	
Biologia Geral	x	
Psicologia e Lógica	x	
Geografia		x
Higiene		x
Sociologia		x
História da Filosofia		x

Fonte: Decreto n° 19.890, de 18 de abril de 1931.

Observe, que pela Tabela 4, neste Ciclo não há a disciplina Matemática, apenas a disciplina Noções de Economia e Estatística, presente na 1ª série.

Tabela 5: Currículo do Ensino Secundário - Ciclo complementar - candidatos à matrícula nos cursos de Medicina, Farmácia e Odontologia, após Reforma Francisco Campos (1931)

Disciplinas/Séries	1ª	2ª
Alemão e Inglês	x	x
Matemática	x	
Física	x	x
Química	x	x
História Natural	x	x
Psicologia e Lógica	x	
Sociologia		x

Fonte: Decreto n° 19.890, de 18 de abril de 1931.

Já neste ciclo, conforme a Tabela 5, a disciplina Matemática está presente, mas apenas na 1ª série.

Tabela 6: Currículo do Ensino Secundário - Ciclo complementar - candidatos à matrícula nos cursos de Engenharia e Arquitetura, após Reforma Francisco Campos (1931)

Disciplinas/Séries	1ª	2ª
Matemática	x	x
Física	x	x
Química	x	x
História Natural	x	x
Geofísica e Cosmografia	x	
Psicologia e Lógica	x	
Sociologia		x
Desenho		x

Fonte: Decreto n° 19.890, de 18 de abril de 1931.

Neste último ciclo, ligado às carreiras da área de Exatas, é o único no qual a disciplina Matemática está presente nos dois anos do curso.

Nota-se que, embora Francisco Campos [33] tenha escrito que "[...] a finalidade exclusiva do Ensino Secundário não há de ser a matrícula nos cursos superiores; o seu fim, pelo contrário, deve ser a formação do homem para todos os grandes setores da atividade nacional, [...]", o que ocorre é que o Ciclo Fundamental tem o claro objetivo de dar uma formação geral e o Ciclo Complementar se configura enquanto um curso propedêutico.

Com a Reforma Capanema em 1942 [30], o currículo do Ensino Médio foi reorganizado em 2 ciclos: o ciclo ginasial com 4 anos de duração e o ciclo colegial, de 3 anos, este último com duas opções de curso, Clássico e Científico. Sob a influência do Estado Novo, a Reforma Capanema buscou enaltecer os conteúdos nacionalistas e de uma maneira geral revalorizou o conteúdo humanístico no currículo [13].

O currículo na Reforma Capanema ficou organizado conforme as Tabelas 7 e 8.

Tabela 7: Currículo do Ensino Secundário - 1° Ciclo – Curso Ginasial, após Reforma Capanema (1942)

Disciplinas/Séries	1ª	2ª	3ª	4ª
Português	x	x	x	x
Francês	x	x	x	x
Inglês		x	x	x
Latim	x	x	x	x
Trabalhos Manuais	x	x		
Geografia do Brasil			x	x
Matemática	x	x	x	x
Ciências Naturais			x	x
História Geral	x	x		
História do Brasil			x	x
Geografia Geral	x	x		
Desenho	x	x	x	x
Música (Canto Orfeônico)	x	x	x	x

Fonte: Decreto-lei n° 4.244 de 9 de abril de 1942.

Observe que embora a Matemática esteja presente nos quatro anos do curso Ginasial, o currículo permanece com apreço excessivo pelo estudo de línguas.

Tabela 8: Currículo do Ensino Secundário - 2° Ciclo – Curso Colegial, após Reforma Capanema (1942)

(a) Curso Clássico

Disciplinas/Séries	1ª	2ª	3ª
Português	x	x	x
Francês [1]			
Inglês [1]			
Latim	x	x	x
Grego			
Geografia do Brasil			x
Matemática	x	x	x
Espanhol	x	x	
História Geral	x	x	
História do Brasil			x
Geografia Geral	x	x	
Física		x	x
Química		x	x
Biologia			x
Filosofia			x

(b) Curso Científico

Disciplinas/Séries	1ª	2ª	3ª
Português	x	x	x
Francês	x	x	
Inglês	x	x	
Geografia do Brasil			x
Matemática	x	x	x
Espanhol	x		
História Geral	x	x	
História do Brasil			x
Geografia Geral	x	x	
Física	x	x	x
Química	x	x	x
Biologia		x	x
Filosofia			x
Desenho		x	x

[1] Facultativo

Fonte: Decreto-lei n° 4.244 de 9 de abril de 1942.

O segundo Ciclo, agora dividido em duas opções de curso, Clássico e Científico, constam com a presença de Matemática nos três anos de ambos os cursos, todavia o perfil enciclopédico, de cultura geral, permanece nos dois cursos, há pouco diferença entre eles, com pouca diversificação entre as disciplinas mesmo entre as séries distintas, o objetivo disto é preparar os alunos para o ingresso no Ensino Superior.

Em 1971, durante o Regime Militar, o currículo é novamente reformulado, com um núcleo comum obrigatório que abrangerá as matérias: Comunicação e Expressão, Estudos Sociais e Ciências. Fora do núcleo comum, temos também Educação Física, Educação Artística, Educação Moral e Cívica, Programa de Saúde e Ensino Religioso, este último obrigatório para os estabelecimentos oficiais e facultativo para o aluno.

Nesta nova reformulação estabelece-se que da 1ª série até no máximo a 5ª série, os conteúdos seriam tratados predominantemente como atividades e que da 6ª série até a 8ª série como áreas de estudo, e no 2° grau seriam tratados predominantemente como disciplinas. Estes conceitos foram assim descritos conforme a Resolução n.° 8/71, de 1^0 de dezembro de 1971 [12]:

> Nas atividades, a aprendizagem far-se-á principalmente mediante experiências vividas pelo próprio educando no sentido de que atinja, gradativamente, a sistematização de conhecimentos. (ART. 4, § 1, da Resolução n.° 8/71, de 1 de dezembro de 1971)

> Nas áreas de estudo, formadas pela integração de conteúdos afins, as situações de experiência tenderão a equilibrar-se com os conhecimentos sistemáticos para configuração da aprendizagem. (ART. 4, § 2, da Resolução n.° 8/71, de 1 de dezembro de 1971)

> Nas disciplinas, a aprendizagem se desenvolverá predominantemente sobre conhecimentos sistemáticos. (ART. 4, § 3, da Resolução n.° 8/71, de 1 de dezembro de 1971)

O currículo dessa nova reformulação ficou organizado conforme as Tabelas 9 e 10.

Tabela 9: 1° grau, após Resolução n.° 8/71 (1971)

Matérias/Séries	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
Comunicação e Expressão [1]	x	x	x	x	x			
Integração Social [1]	x	x	x	x	x			
Iniciação às Ciências [3]	x	x	x	x	x			
Língua Portuguesa [1]						x	x	x
Estudos Sociais [2]						x	x	x
Matemática [3]						x	x	x
Ciências [3]						x	x	x

[1]Núcleo Comunicação e Expressão
[2]Núcleo Estudos Sociais
[3]Núcleo Ciências
Fonte: Resolução n.° 8, de 1 de dezembro de 1971.

Observe que apenas na 6ª série a Matemática passa a ser tratada individualmente no currículo.

Tabela 10: 2° grau, após Resolução n° 8/71 (1971)

Matérias/Séries	1ª	2ª	3ª	4ª
Língua Portuguesa [1]	x	x	x	x
Literatura Brasileira [1]	x	x	x	x
História [2]	x	x	x	x
Geografia [2]	x	x	x	x
Organização Social e Política Brasileira [2]	x	x	x	x
Matemática [3]	x	x	x	x
Ciências Físicas e Biológicas [3]	x	x	x	x

[1]Núcleo Comunicação e Expressão
[2]Núcleo Estudos Sociais
[3]Núcleo Ciências
Fonte: Resolução n.° 8, de 1 de dezembro de 1971.

A Matemática está presente nas quatro séries do 2° grau, no entanto, nota-se um currículo com baixo apreço à Ciência e de caráter pouco crítico. O resultado é uma educação de conhecimento básico com o objetivo de formar mão de obra barata para o mercado de trabalho.

No período de transição ao regime democrático o currículo foi novamente reformulado com vistas a pressão popular sobre a baixa produtividade do ensino, conforme o Parecer n.° 785/85, de 6 de novembro de 1986. Assim, com vistas sobre este parecer, a

resolução n.°6 de 26 de novembro de 1986 reformula o núcleo comum para os currículos do ensino do 1° e 2° graus, de maneira que o núcleo comum será obrigatório nos currículos plenos de 1° e 2° graus e abrangerá as seguintes matérias: Português (Língua e Literatura), Estudos Sociais (Geografia, História, e Organização Social e Política do Brasil), Ciências (Ciências Físicas e Biológicas) e Matemática [16].

Fora do núcleo comum também são exigidos Educação Física, Educação Artística, Educação Moral e Cívica, Programas de Saúde e Ensino Religioso, sendo este último obrigatório para estabelecimentos oficiais e facultativo para os alunos. O ensino de uma Língua Estrangeira é obrigatório para o 2° grau e recomendado para o 1° grau. Recomenda-se também a inclusão do estudo de Filosofia no currículo do 2°.

O currículo reformulado no período de transição ao regime democrático ficou organizado conforme as Tabelas 11 e 12 a seguir.

Tabela 11: 1° grau, após resolução n.°6/86 (1986)

Matérias/Séries	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
Português [1] [4]	x	x	x	x	x	x	x	x
Matemática [1] [4]	x	x	x	x	x	x	x	x
Estudos Sociais [1] [2]	x	x	x	x	x			
Ciências [1] [3]	x	x	x	x	x			
Geografia [4]						x	x	x
História [4]						x	x	x
Organização Social e Política do Brasil [4]						x	x	x
Ciências Físicas e Biológicas [4]						x	x	x
Língua Estrangeira Moderna [4] [5]						x	x	x

[1]Tratadas predominantemente como atividades nas séries iniciais (I-V)
[2]Sob a forma de História e Geografia ou com a integração de ambas
[3]Sob a forma de Iniciação
[4]Sob a forma de áreas de estudo ou disciplinas nas séries finais (VI-VIII)
[5]Optativa
Fonte: Resolução n.° 6, de 26 de novembro de 1986.

Conforme a resolução, em seu artigo 7°, a Matemática e Português ganham peso no currículo: "Dar-se-á, no currículo, especial relevância ao ensino de Português e Matemática de modo a assegurar-se sua presença em todos os períodos letivos".

Tabela 12: 2° grau, após resolução n.°6/86 (1986)

Matérias/Séries	1ª	2ª	3ª	4ª
Língua Portuguesa [1]	x	x	x	x
Literatura [1]	x	x	x	x
Matemática [1]	x	x	x	x
História [1]	x	x	x	x
Geografia [1]	x	x	x	x
Física [1]	x	x	x	x
Química [1]	x	x	x	x
Biologia [1]	x	x	x	x
Língua Estrangeira Moderna [1]	x	x	x	x
Filosofia [1] [2]	x	x	x	x

[1]Sob a forma de disciplina
[2]Optativa
Fonte: Resolução n.° 6, de 26 de novembro de 1986.

A Reforma Francisco Campos (1931) foi a primeira imposta a todo território nacional, deu organicidade ao Ensino Secundário, estabeleceu definitivamente o currículo seriado, a frequência obrigatória, criou dois ciclos, um Fundamental e outro Complementar, tornando obrigatório a conclusão de ambos para o ingresso no Ensino Superior. A Matemática esteve presente em todas as séries do ciclo Fundamental, mas no ciclo Complementar, esteve presente em todas as séries apenas no ciclo destinado à matrícula nos cursos de Engenharia e Arquitetura.

Com a Reforma Capanema (1942), a Matemática esteve presente em todas as séries do Ensino Secundário, inclusive com os conceitos de Cálculo inclusos no curso Científico, mas foi retirada do currículo após as mudanças engendradas pelo governo militar [1], a Matemática também foi relativizada neste processo, perdendo a presença em todas as séries do Ensino Secundário. Nota-se que apenas após as mudanças curriculares de 1986 a Matemática tem sua importância reconhecida e se firma em todas as séries do Ensino Secundário até os dias de hoje.

Com a lei n.°11.684, de 2 de junho de 2008, são incluídas em todas as séries do Ensino Médio as disciplinas de Filosofia e Sociologia, permanecendo esta base curricular até os nossos dias [22].

Agora, com a Reforma do Ensino Médio aprovada, transformada na lei n.°13.415, de 15 de dezembro de 2016, mudanças estão a caminho. A Reforma encaminha a adoção progressiva da escola em tempo integral e também uma flexibilização do currículo. Ela encaminha que o currículo deverá ter uma uma parte que será comum e obrigatória a

todas as escolas (Base Nacional Comum Curricular/BNCC) e a outra parte que será flexível. A BNCC (do Ensino Médio em processo de discussão e ainda não aprovada) trata sobre os direitos e objetivos de aprendizagem nas seguintes áreas de conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Com a flexibilização do currículo, as disciplinas obrigatórias nos três anos do Ensino Médio serão Língua Portuguesa e Matemática. O tempo restante deverá ser dedicado ao aprofundamento acadêmico nas áreas eletivas ou aos cursos técnicos. As áreas eletivas, de acordo com a lei são: I - Linguagens e suas Tecnologias; II - Matemática e suas Tecnologias; III - Ciências da Natureza e suas Tecnologias; IV - Ciências Humanas e Sociais Aplicadas; V - Formação Técnica e Profissional [23].

3 Uma breve História da Matemática no Brasil

A princípio, a enorme distância da colônia em relação a Portugal fez com que praticamente não houvessem registros das produções matemáticas no país. Logo, houve uma hegemonia da Matemática produzida em Portugal. Apenas após sua independência, o Brasil começou a participar do progresso da Matemática [17].

Durante a conquista e o princípio da colonização destas terras não há relatos que identificam a Matemática entre os nativos, não que essa matemática não existisse, mas a questão é que no processo colonizatório do Brasil praticamente não houve troca cultural, uma vez que o que de fato ocorreu foi o extermínio das culturas indígenas através da imposição dos padrões culturais vingentes na Europa [6].

Hoje, por meio da Etnomatemática, podemos visualizar a Matemática intrínseca nos processos de contagem, classificação, ordenação e de inferência indígena. Segundo Ubiratan D'Ambrósio,

> Resquícios de sistemas de numeração e a riqueza das figuras geométricas que intervém na decoração, são indicadores de uma organização de conhecimentos sobre quantificação, classificação, ordenação e outras categorias que caracterizam o conhecimento matemático [17].

Durante os primórdios da colonização, a Matemática usada no dia a dia era uma mistura da Matemática prática européia egressa dos colonizadores com a Matemática indígena.

Agora, com relação ao currículo de Matemática praticado pelos jesuítas há uma lacuna, até pelo fato de não haver um estudo a respeito. O fato é que boa parte dos inacianos que vieram para o Brasil eram professores de matemática e, quando não eram, vários destes tinham bom conhecimento de matemática.

Houve padres matemáticos que se radicaram no país com conhecimento suficiente para estudos aprofundados. Podemos destacar o Padre Antônio Vieira, que viveu entre 1608 e 1697, e também o Padre Valentin Stancil, que viveu entre 1621 e 1705, ambos estudaram o movimento dos planetas e dos cometas. Padre Valentin publicou um livro acerca dos movimentos dos planetas denominado *Legatus Uranius*; Isaac Newton utilizou os resultados observados de Valentin em seu trabalho intitulado "Princípia" [17].

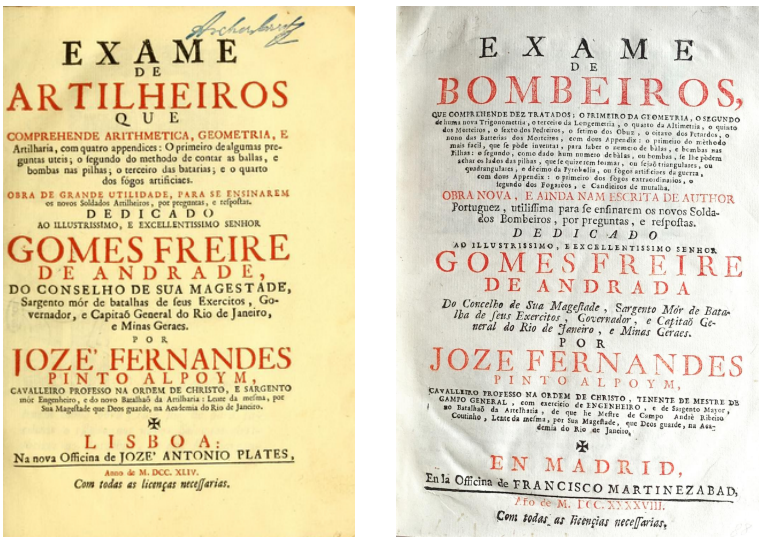
Outro padre matemático, este nascido no Brasil, em Santos, foi Bartolomeu Gusmão, que viveu entre 1685 e 1724, o mesmo completou seus estudos em Portugal, onde foi nomeado lente de Matemática na Universidade de Coimbra. Bartolomeu, que estudava os balões, abandonou a sua cátedra para se dedicar inteiramente a este estudo. A

Matemática se fez presente ainda neste período, fortemente representada na construção civil e no comércio, afinal era necessário a construção de cidades, estradas, pontes e ferrovias [17].

3.1 O primeiro livro de Matemática escrito no Brasil

José Fernandes Pinto Alpoim, militar e engenheiro, nascido em 1700 em Portugal mudou-se para o Rio de Janeiro em 1738, onde permaneceu até o fim de sua vida, em 1765. Alpoim foi responsável por várias obras, dentre elas a reforma do Aqueduto da Carioca (tida como a obra arquitetônica de maior porte empreendida no Brasil durante o período colonial), igrejas, conventos e mosteiros.

Alpoim também foi o autor do primeiro livro de matemática escrito no país, denominado "Exame de artilheiros", a ideia do livro nasceu para dar suporte à necessidade da formação de artilheiros para defender a colônia. Na capa do livro (Figura1) podemos ver parte do que compreende o seu conteúdo: "Compreende aritmética, geometria e artilharia". Quatro anos após a publicação deste livro, outra obra de Alpoim foi publicada, denominada "Exame de Bombeiros", em 1748, novamente motivado pela necessidade da formação de material humano na colônia.


EXAME
DE
ARTILHEIROS
QUE
COMPREHENDE ARITHMETICA, GEOMETRIA, E
Artilharia, com quatro appendices: O primeiro de algumas preguntas uteis; o segundo do methodo de contar as ballas, e bombas nas pilhas; o terceiro das baterias; e o quarto dos fogos artificiaes.
OBRA DE GRANDE UTILIDADE, PARA SE ENSINAREM os novos Soldados Amilheiros, por preguntas, e respostas.
DEDICADO
AO ILLUSTRISSIMO, E EXCELLENTISSIMO SENHOR
GOMES FREIRE
DE ANDRADE,
DO CONSELHO DE SUA MAGESTADE,
Sargento mór de batalhas de seus Exercitos, Governador, e Capitaõ General do Rio de Janeiro, e Minas Geraes.
POR
JOZE' FERNANDES
PINTO ALPOYM,
CAVALLEIRO PROFESSO NA ORDEM DE CHRISTO, E SARGENTO mór Engenheiro, e do novo Batalhaõ da Artilharia: Leute da mesma, por Sua Magestade que Deos guarde, na Academia do Rio de Janeiro.
LISBOA:
Na nova Officina de JOZE' ANTONIO PLATES,
Anno de M. DCC. XLIV.
Com todas as licenças necessarias.

EXAME
DE
BOMBEIROS,
QUE COMPREHENDE DEZ TRATADOS; O PRIMEIRO DA GEOMETRIA, O SEGUNDO de huma nova Trigonometria, o terceiro da Longemetria, o quarto da Altimetria, o quinto dos Minerios, o sexto dos Pedreiros, o setimo dos Obuzes, o oitavo dos Petardos, o nono das Baterias dos Morteiros; com dous Appendix: o primeiro do methodo mais facil, que se pode inventar, para saber o numero de balas, e bombas nas Pilhas: o segundo, como dado hum numero deballas, ou bombas, se lhe podem dar nos lados das pilhas, que le quizerem formar, ou feja triangulares, ou quadrangulares, e decimo da Pyrobolia, ou fogos artificiaes da guerra, com dous Appendix: o primeiro dos fogos extraordinarios, o segundo dos Foguetes, e Candeas de mutalia.
OBRA NOVA, E AINDA NAM ESCRITA DE AUTHOR Portuguez, utilissima para se enfinarem os novos Soldados Bombeiros, por preguntas, e respostas.
DEDICADO
AO ILLUSTRISSIMO, EXCELLENTISSIMO SENHOR
GOMES FREIRE
DE ANDRADA
Do Concelho de Sua Magestade, Sargento Mór de Batalha de seus Exercitos, Governador, e Capitaõ General do Rio de Janeiro, e Minas Geraes.
POR
JOZE FERNANDES
PINTO ALPOYM,
CAVALLEIRO PROFESSO NA ORDEM DE CHRISTO, TENENTE DE MESTRE DE CAMPO GENERAL, com exercicio de ENGENHEIRO, e de Sargento Mayor, no Batalhaõ da Artilharia; de que he Mestre de Campo André Ribeiro Coutinho, Leute da mesma, por Sua Magestade, que Deos guarde, na Academia do Rio de Janeiro.
EN MADRID,
En la Officina de FRANCISCO MARTINEZABAD,
Año de M. DCC. XXXVIII.
Com todas as licenças necessarias.

Figura 1: Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros.

Fonte: http://arquivohistoricomadeira.blogspot.com e https://www.abebooks.com/signed-first-edition/Exame-bombeiros-comprehende-dez-tratados-ALPOIM.

3.2 O processo de modernização do país com a vinda da família real

Durante o segundo período do império, ocorreu a fuga da família imperial para o Brasil, em fins de novembro de 1807, a corte portuguesa e toda sua comitiva composta por 15 mil pessoas, fugia das tropas de Napolelão que estavam a caminho de Lisboa, deixando tesouros como as pratarias das igrejas (derretidas pelo exército de Jean-Andoche Junot, general francês à frente das tropas de Napoleão) e os 60 mil volumes da biblioteca real para trás. Após uma breve passagem em Salvador, na Bahia, a família real chegou ao Rio de Janeiro em 8 de março de 1808.

Com a família real presente no país começou a transformação: houve a necessidade da criação de uma infraestrutura para a cidade comportar a corte e toda a aristocracia que com ela veio, ruas foram alargadas para dar passagem aos novos equipamentos de transporte, foram criados o Banco do Brasil, a Escola Militar, a Escola Naval, o Jardim Botânico, a Biblioteca Real, o Observatório Astronômico, etc. Tendo Dom João VI decretado liberdade de comércio e manufatura e a abertura dos portos, põe de fato o fim ao período colonial brasileiro. Essa modernização do país alcançou o seu ápice econômico e social durante o reinado de Pedro II [24].

3.3 A primeira publicação de um trabalho de Matemática impresso no Brasil

Através da Imprensa Régia, fundada em maio de 1808, e única tipografia no Brasil até o ano de 1821 em consonância com a criação, em 1810, do curso de Matemática da Academia Real Militar, situada no Rio de Janeiro, surgiu a possibilidade de publicações científicas no país. Assim, foi publicado na revista intitulada "O Patriota" (Figura2) o primeiro trabalho impresso de Matemática no Brasil intitulado "A variação dos triângulos esféricos", de Manuel Ferreira de Araújo Guimarães. Há uma divergência entre historiadores se Araújo Guimarães, nascido na Bahia em 1777, era formado pela Academia Real da Marinha ou pela Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. O fato é que Araújo Guimarães foi um dos primeiros docentes do curso de Matemática da Academia Militar do Rio de Janeiro. Foi também membro da junta diretora da Imprensa Régia, com várias traduções de livros matemáticos publicados no Brasil [17].

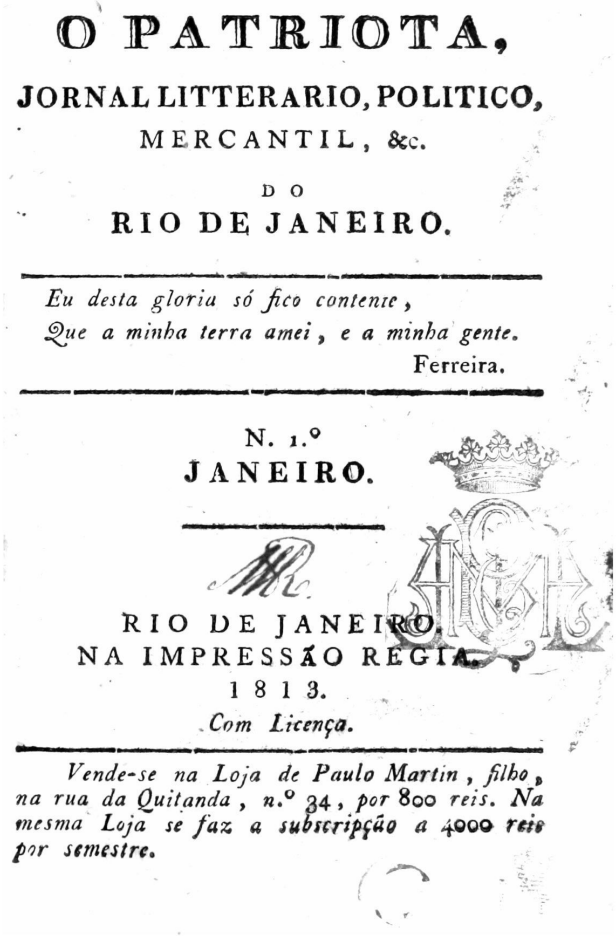
Há uma estreita ligação entre a educação matemática e as escolas militares criadas durante o império. Com a criação da Real Academia Militar, criada por carta régia datada de 4 de dezembro de 1810, do futuro rei D. João VI, e assim, pouco depois foi criado o primeiro curso de Ciências Físicas, Matemáticas e Naturais, com duração de 4 anos. A Real Academia Militar, através de sucessivas mudanças, deu origem à Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Em 1842, houve a criação do grau de Doutor em Ciências Matemáticas, por meio do Decreto 140, de 9 de março de 1842. Com a tese "Dissertação sobre o modo de indagar novos astros sem auxílio de observação direta", Joaquim Gomes de Sousa (1824-1864), foi o primeiro a adquirir o grau. Sua tese aborda a estabilidade de sistemas de equações diferenciais. Daí, entre 1848 e 1918, foram apresentadas um total de 28 teses de doutorado à Real Academia Militar, sendo a última apresentada por Theodoro Augusto Ramos, intitulada "Sobre as Funções de Variáveis Reais", considerada um marco relevante da pesquisa matemática no Brasil [17].

3.4 Influência do Positivismo

O positivismo é uma corrente de pensamento filosófico, sociológico e político que surgiu na França no início do século XIX, fomentado pelo desenvolvimento sociológico do Iluminismo, das crises sociais da Idade Média e do advento da sociedade industrial, marcada pela Revolução Francesa. O positivismo, teve como principais idealizadores John Stuart Mill e seu discípulo, Auguste Comte. Segundo Comte, o único conhecimento válido é o conhecimento científico e o único método capaz de produzir conhecimento verdadeiro é o método das Ciências Naturais. Os positivistas acreditam que a ciência é a salvação da humanidade [31].

Assim, o positivismo "é, portanto, uma filosofia determinista que professa, de um lado o experimentalismo sistemático e, de outro, considera anticientífico todo estudo das causas finais. Assim, admite que o espírito humano é capaz de atingir verdades positivas ou da ordem experimental, mas não reconhece as questões metafísicas, não verificadas pela observação e pela experiência" [31].

Cabe ressaltar que o positivismo, de maneira geral, norteou a Academia Militar, bem como todo o império e a República, tendo como influência central o filósofo francês Auguste Comte (1748-1867). A própria frase contida na bandeira do Brasil "Ordem e Progresso" é uma referência positivista, egressa da divisa comteana "O Amor por princípio e a Ordem por base; o Progresso por meta", representando as aspirações a uma sociedade justa, fraterna e progressista. O livro "Elementos de Aritmética", de



O PATRIOTA,

JORNAL LITTERARIO, POLITICO,

MERCANTIL, &c.

DO

RIO DE JANEIRO.

Eu desta gloria só fico contente,
Que a minha terra amei, e a minha gente.
Ferreira.

N. 1.º
JANEIRO.

RIO DE JANEIRO.
NA IMPRESSÃO REGIA.
1813.
Com Licença.

Vende-se na Loja de Paulo Martin, filho, na rua da Quitanda, n.º 34, por 800 reis. Na mesma Loja se faz a subscripção a 4000 reis por semestre.

Figura 2: O Patriota

Fonte:https://digital.bbm.usp.br/handle/bbm/6817

João José Luiz Vianna, é um exemplo de publicação de inspirações positivistas adotado pelo Ginásio Nacional no Colégio Militar, na Escola Militar do Rio de Janeiro, na Escola Naval e em diversas outras instituições [17].

Durante a virada do século XX, em especial na Escola de Engenharia do Rio de Janeiro, graças à influência européia da Matemática mais atualizada, o pensamento positivista começa a perder força. Em 1925, a Academia Brasileira de Ciências aproveita a visita de Albert Einstein à Argentina e faz um convite para uma passagem ao Brasil. Este convite acirrou os ânimos no Brasil, os positivistas tentaram desqualificar Einstein na imprensa e com rápida resposta da corrente modernizadora da ciência, o positivismo declinou e abriu-se um novo momento para a ciência no país [17].

3.5 A 2ª República

O grande impulso na Matemática ocorrido no Brasil, aconteceu após o movimento político de 1930, tendo Getúlio Vargas à frente. Vargas modernizou o sistema político, econômico e social do país, que na República Velha havia a centralização do poder entre os partidos políticos e também uma economia baseada no café com a aliança política entre São Paulo e Minas Gerais, denominada "café com leite", onde a presidência era revezada por um político paulista e um mineiro. Com a intenção de dar cabo na constituição e com a subsequente morte de quatro soldados paulistas (Martins, Miragaia, Dráusio e Camargo) num confronto com tropas federais em maio de 1932 a sociedade paulista passou a apoiar os movimentos contrários a Vargas, precipitando assim a Revolução Constitucionalista, encerrada poucos meses depois [17].

É importante lembrar que, com a perda do poder político do Estado de São Paulo após a tomada de poder de Getúlio Vargas, o Estado passou a focar no crescimento econômico. Assim, foi criada em 1933 a Universidade de São Paulo (USP), através da reunião de várias escolas de Ensino Superior existentes. A criação da USP deu um impulso na Matemática no Brasil, no processo de contratação de novos professores, houve um acordo de que para a modernização da educação, as novas vagas deveriam ser preenchidas por professores oriundos do exterior, preferencialmente, egressos de universidades européias. Assim, para a subseção da Matemática, optou-se preferencialmente pela contratação de professores italianos, como por exemplo, Luigi Fantappié (1901-1956), com ele, o curso de Cálculo Diferencial e Integral foi modernizado, tornando-se um curso de Análise Matemática [17].

Destaca-se a importância de Theodoro Augusto Ramos, nascido em São Paulo em 26 de junho de 1895 e morto no Rio de Janeiro em 5 de dezembro de 1937, matemático, que foi de vital importância para o desenvolvimento da ciência brasileira no século XX, além de estar relacionado à fundação da USP. Theodoro, em 1931, foi membro da comissão criada pelo Ministro da Educação e Saúde Pública, Doutor Francisco Campos, cujo norte era formular uma proposta para a reforma do Ensino de Engenharia no Brasil e em 1934 foi nomeado Diretor de Ensino Superior, do Ministério da Educação. Foi um dos primeiros a introduzir o curso de Cálculo Vetorial em uma escola de engenharia, ajudando a modernizar os currículos e o Ensino da Matemática [17].

Em 1945, foi contratado pela USP o matemático francês André Weil (1906-1998), um dos matemáticos mais brilhantes do século XX, seu campo de pesquisa abordava Geometria Algébrica, Teoria dos Números e Teoria dos Grupos. Foi fundador do grupo

Bourbaki, um grupo de matemáticos que utilizavam o mesmo pseudônimo Nicolas Bourbaki, o grupo tinha por objetivo da fundamentação da Matemática através da Teoria dos Conjuntos, o grupo lutou por mais rigor e simplicidade, criando uma nova terminologia e conceitos ao longo dos tempos. Pouco tempo após a chegada de Weil ao Brasil foi fundada a Sociedade Matemática de São Paulo no dia 7 de abril de 1945, em uma sessão solene, onde Weil compôs a mesa desta sessão. A Sociedade existiu até 1972 quando por dificuldades financeiras e também pelo fato de seus membros migrarem para uma nova sociedade de âmbito nacional chegou a seu término. A sociedade publicou 77 artigos em seu periódico, denominado Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo [17].

Paralelamente a isto, no Rio de Janeiro, em 1949 foi fundado o Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), que foi o primeiro centro de pesquisas financiado pelo governo federal. A expansão dos centros de pesquisas continua fora do eixo Rio-São Paulo, assim temos a Escola de Engenharia de São Carlos (com seu departamento de matemática) e em Rio Claro, em 1958 foi criada a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras e dentro dela o seu departamento de Matemática. Além disso também foi criado o Instituto de Pesquisas em Matemática em Recife, a Universidade Federal de Minas Gerais, o Instituto Tecnológico Aeronáutico, etc. [17].

De forma simultânea, os órgãos de fomento a pesquisa, tiveram um relevante papel no impulso do desenvolvimento da ciência no país.

Criado em 15 de janeiro de 1951 pela Lei n.° 1.310, durante o governo de Eurico Gaspar Dutra, o Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq), teve e tem um importante papel no progresso científico brasileiro, com o seu financiamento a pesquisas científicas e tecnológias através de bolsas e auxílios. Apesar de manter a sigla, a partir de 1974, o órgão foi renomeado para Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

No mesmo ano, foi criado a CAPES (Campanha de Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior, hoje conhecida como Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal do Ensino Superior).

Vale lembrar que o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) foi criado enquanto primeira unidade de pesquisa do CNPq, em 15 de outubro de 1952. Hoje é um centro de pesquisa Matemática de reconhecimento mundial, tendo sido responsável em grande parte, pelo desenvolvimento contemporâneo da Matemática no país [32].

Muito do que se foi construído de Matemática no Brasil se deve aos Colóquios Brasileiros de Matemática, organizados pelo IMPA. Para se ter uma ideia, o primeiro coló-

quio ocorreu em 1957, com apenas 49 participantes, o 31° Colóquio (o último realizado, em 2017), na sua solenidade de abertura, estavam presentes cerca de 800 estudantes e profissionais da Matemática. Os Colóquios são realizados de forma ininterrupta, desde o primeiro em 1957, a cada dois anos [32].

4 Cálculo Diferencial

4.1 Limite e Derivada

Embora seja comum ouvirmos dizer que o Cálculo foi inventado por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, esse argumento é um excesso de simplificação dos fatos. Segundo Richard Courant, "o Cálculo tem sido uma luta intelectual dramática que durou 2500 anos". Em contrapartida, sabe-se que os trabalhos de Newton e Leibniz foram o divisor de águas que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as derivadas e as integrais [8].

De todos os conceitos do Cálculo, o mais fundamental é o conceito de limite, uma vez que os principais conceitos do Cálculo, como derivada, continuidade, integral, convergência/divergência, são definidos tendo por base o limite. Segundo Thomas, "[...] limite é o que distingue no nível mais básico, o Cálculo da Álgebra, Geometria e o resto da Matemática". O curioso aqui, é que o registro histórico é exatamente o oposto, os conceitos modernos de derivadas e integrais ganharam forma antes dos limites. As noções de limite demoraram a se estabelecer, sendo por séculos confusas, vagas, baseadas em uma noção intuitiva geométrica e subjetiva. O infinito, por exemplo, já foi filosoficamente tomado como "números infinitamente grandes e infinitamente pequenos e outras entidades matemáticas". A definição moderna de limites é recente, surgiu há menos de 150 anos atrás [8].

Historicamente, o primeiro registro da necessidade do uso de limites (por volta de 450 a.C.) foi para a resolução dos quatro paradoxos de Zenão de Eleia, filósofo pré-socrático. Dicotomia, é o nome do primeiro paradoxo, nele Zenão propõe que se um objeto se move a uma distância finita entre dois pontos fixos em uma série infinita de intervalos de tempo durante o qual o movimento irá ocorrer (o tempo necessário para se mover metade da distância, na sequência o tempo necessário para se mover metade da distância restante, etc.). Segundo a conclusão de Zenão, o movimento espacial não existe, logo o mundo seria estático! Uma aplicação dos conceitos de limite hoje resolve os paradoxos propostos por Zenão [8].

O genial matemático Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), com o objetivo de demonstrar fórmulas para algumas áreas e volumes, encontrou várias séries infinitas, como não possuia o conceito formal de limite, recorreu a argumentos rebuscados acerca do assunto, que na prática já incorporavam alguns detalhes técnicos do que se sabe hoje sobre limite [8].

A ideia de derivada surgiu e se desenvolveu motivados por problemas ligados à tangente. Arquimedes e Apolônio de Tiana (262-190 a.C.) desenvolveram métodos distintos para encontrar retas tangentes a algumas curvas. Mas os gregos ficaram por aí, não percebendo nenhuma correlação ou mesmo a importância destes resultados [35].

Após um longo período de tempo, motivado pelo surgimento da Geometria Analítica, o interesse por tangentes e curvas renasce e assim os tópicos de Cálculo passam a ser desenvolvidos. Nesse momento da história, vários matemáticos desenvolveram algoritmos matemáticos algébricos afim de descobrir retas tangentes a diversas curvas. É certo que em algum momento crítico, o limite deveria ser utilizado, mas não o foi, esses matemáticos encontravam outros caminhos para solucionar os seus problemas sem os limites, ficando esses ausentes de fundamentos rigorosos [35].

Mesmo Newton, não reconheceu a importância do limite a princípio. Para séries infinitas, por exemplo, fez uso da seguinte analogia: "se fosse possível executar operações algébricas em polinômios, então seria possível fazer o mesmo com o número infinito de termos de uma série infinita". Com relação a derivadas, ele encontrou um processo muito próximo, o qual chamou de *flúxions* a curvas. Entretanto, em seu trabalho denominado *Principia Mathematica* (1687), Newton foi o primeiro a dar o devido reconhecimento ao limite. Disse que o limite deve ser o ponto de partida para problemas de tangência, quadratura e afins. Chegou a formular uma definição de limite que serviu de semente para a definição moderna: "Quantidades, e as razões de quantidades, os quais em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade, e antes do final daquele tempo se aproximam entre si por qualquer dada diferença, tornam-se iguais no final" [8].

Segundo Newton, a base fundamental para o estudo de curvas e outros tópicos relacionados ao Cálculo era o movimento. Em seu tratado sobre *flúxions* (1666), ele tomou uma partícula descrevendo uma curva com duas linhas que se movimentam, representando o sistema de coordenadas. A velocidade horizontal e a velocidade vertical eram os fluxões de x e y associadas ao fluxo do tempo. E x e y eram os *fluents*. Ou seja, em linguagem moderna, seria a derivada de x em relação ao tempo, ou simplesmente $x'(t)$, de maneira análoga, a derivada de y em relação ao tempo, ou simplesmente $y'(t)$. Com o tempo, prevaleceu a notação criada por Leibniz [8].

Já Leibniz, tinha uma fundamentação bem diferente de Newton em seu Cálculo Diferencial, ele pensou nas variáveis x e y enquanto grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos, introduzindo dx e dy como a diferença entre esses valores sucessivos. Leibniz, sabia o que representava o coeficiente angular

de uma reta tangente, ainda que não tenha usado como definição de derivada [8].

Leibniz deu uma enorme contribuição ao Cálculo, com as notações, as fórmulas básicas de derivadas e integrais e também com o teorema fundamental do Cálculo. Isso permitiu a solução de problemas de geometria até então não resolvidos, bem como um avanço significativo para a Ciência e suas aplicações [8].

Um fato curioso acerca da história do Cálculo, é a disputa e troca de acusações entre Newton e Leibniz. Isso gerou uma discussão apimentada no meio científico sobre quem teria o papel mais relevante no desenvolvimento do Cálculo. A contenda foi tamanha a ponto de dividir o Reino Unido (em defesa de Newton) com o resto da Europa (em defesa de Leibniz) [8].

As definições modernas de limites e derivadas [8], surgiram graças ao matemático Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Com o objetivo de apresentar para seus alunos uma exposição clara e rigorosamente correta do Cálculo, ele encontrou erros no programa de outro matemático, Joseph Louis Lagrange. Logo, construiu o seu curso do zero, de maneira que suas notas de aula acabaram por se tornar seus livros. Cauchy usou limites como base para as introduções precisas à continuidade e convergência, a derivada, a integral, e o resto do Cálculo. Cauchy em seu livro Resumo das Lições Dadas na Escola Politécnica Sobre o Cálculo Infinitesimal (1823), afirma que a derivada é:

> O limite de $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ quando i se aproxima de 0. A forma da função que serve como limite da razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá da forma da função proposta $y = f(x)$. Para indicar sua dependência, dá-se à nova função o nome de função derivada.

Agora que fizemos uma breve introdução histórica sobre o surgimento dos conceitos de limite e derivada até às suas definições mais modernas dadas por Cauchy, vejamos a seguir os desempenhos em Matemática na Educação Básica e em Cálculo no Ensino Superior. Relativamente a este último, veremos alguns dos motivos responsáveis por esses maus resultados.

4.2 Problematização da Aprendizagem/Desempenho em Cálculo

É certo que o mau resultado apresentado no ensino de Cálculo Diferencial está relacionado a amplos fatores, dentro destes, o próprio malfadado desempenho da apren-

dizagem da Matemática em geral no país (vide Figura 3, que traz os resultados do Saeb para a Matemática de 1995 a 2015), cujos fatores que propiciam estes resultados são vários e não desconexos da realidade sócio-econômica e submetida ao espectro das políticas aplicadas pelas elites que controlam o país ao longo do tempo. Estes são os mesmos fatores já citados anteriormente durante o breve relato sobre a história da educação brasileira. Os resultados subsequentes da aprendizagem de Matemática sofrem também as consequências de uma educação seletiva e excludente onde uma pequena parcela dos alunos consegue de fato um conhecimento Matemático suficiente, fazendo com que a matemática se torne um clube para poucos.

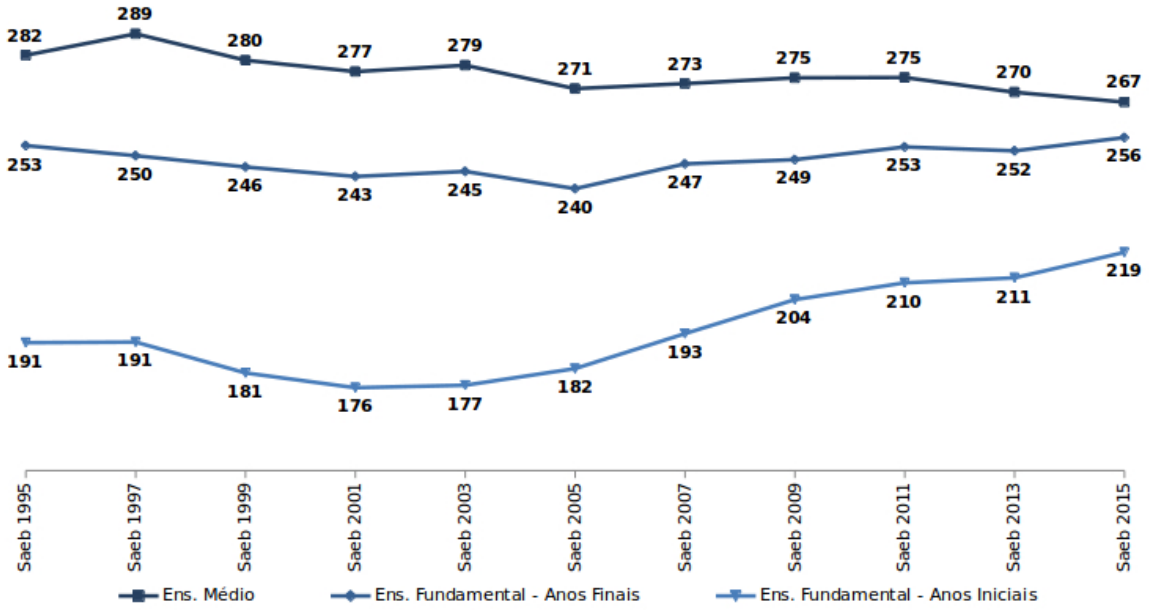


Figura 3: Evolução dos resultados do Brasil no Saeb (1995 a 2015) - Proficiências médias em Matemática.[3]

Fonte: Diretoria de Avaliação da Educação Básica – DAEB/INEP.

Ao passo que paulatinamente, ao longo da história, a educação começa a ser notada como um fator de ascenção social, de uma vida distante da necessidade iminente e dura da sobrevivência em meio à fome e miséria social sempre presentes em nosso país. Aos

[3]O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), instituído em 1990, é composto por um conjunto de avaliações externas em larga escala e tem como principal objetivo realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de alguns fatores que possam interferir no desempenho do estudante, fornecendo um indicativo sobre a qualidade do ensino ofertado. A escala de proficiência para o Ensino Médio de Matemática é dividida em 10 níveis (conforme Anexo A), a pontuação considerada adequada para a Matemática no Ensino Médio seria 350, o resultado de 2015, muito aquém do esperado, está inserido no nível 2 [34].

que conseguem galgar esta escada, mormente são aventados a pecha de meritocracia, como se houvesse lugar ao sol para todos com o sistema vingente. O fato é que, não desmerecendo os esforços pessoais, o acaso é muito mais relevante para um resultado positivo nesse sentido. As probabilidades são ínfimas para a ascensão das camadas inferiores da população, embora houvesse de uma maneira geral se ampliado ao passar dos anos. Esta educação que foi conduzida na maioria das vezes, conforme a correlação de forças políticas do momento, para manter o *status quo* da sociedade, usando para isto a seletividade em seu processo. A evasão escolar ao longo das séries e, principalmente na passagem de níveis, denota isso claramente.

Podemos também salientar que quase sempre tivemos uma educação de caráter humanista e, em vários pontos da história, avesso ao pensamento crítico e ao conhecimento científico. Nesses termos, a ampla presença humanista na grade curricular em vários momentos da história do país se deu em uma perspectiva de pouca criticidade ao ambiente histórico e social no qual se inserem. Em contrapartida, o conhecimento técnico e científico é dado em doses homeopáticas, cujo intuito é formar uma mão de obra barata, acrítica, de conhecimento mínimo necessário para suprir a necessidade do quadro de recursos humanos de quintal dos países industrializados, que é onde estamos inseridos, fornecedores de insumos, de *commodities*, de mão de obra barata, e dependentes do uso de tecnologias exteriores ao nosso país.

Nos curtos períodos em que a correlação de forças no comando do país propiciaram que avancemos econômica, tecnológica, sócia e educacionalmente, a ponto de vislumbrarmos um caminho independente e soberano no planeta, nossas velhas elites egressas das aristocracias rural, industrial e financeira, retomam o poder em conluio com interesses do grande capital internacional assoreando o que se conquistou e condenando os anos vindouros.

Tabela 13: Aproveitamento da disciplina Cálculo Diferencial e Integral 1 (GMA005) - Curso Licenciatura em Matemática/UFU

Semestre	n^0 de alunos	aprovados	reprovados por nota	reprovados por falta	total de reprovados	outros [1]
2013/1	33	8	21	0	21	4
2013/2	24	2	6	15	21	1
2014/1	24	5	6	11	17	2
2014/2	41	17	7	16	23	1
2015/1	19	9	5	5	10	0
2015/2	23	11	10	2	12	0
2016/1	22	14	3	5	8	0
2016/2	34	12	13	8	21	1
2017/1	18	10	3	4	7	1
2017/2	25	10	9	5	14	1
Total	263	98	83	71	154	11

[1]Trancamento
Fonte: Coordenação do curso de Matemática/UFU.

É fato que o curso de Cálculo Diferencial e Integral tem amargado maus resultados de maneira geral. A Tabela 13 é uma amostra do que encontramos nos cursos de cálculo ao redor do país. Na tabela, vemos que do total de alunos matriculados nos últimos dez semestres na disciplina de cálculo do curso Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Uberlândia (UFU), foram reprovados um grande número (58,6%) comparado com o número de aprovados (37,3%) (vide Figura 4) descortina que há um sério imbróglio por aqui. É preciso buscar caminhos que solucionem essa falha.

Com o objetivo de buscar soluções para reduzir a evasão e a reprovação das disciplinas básicas (e aí se inclui Cálculo) comuns aos cursos de Engenharia e também ao Bacharelado em Ciência e Tecnologia (BC&T) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), o curso BC&T fez a opção de aplicar uma avaliação de sondagem para as turmas ingressantes do primeiro semestre de 2016. Essa avaliação continha conteúdos básicos de Matemática: Sistemas, Funções, Expressões Numéricas, Frações, Radiciação, Potenciação, Equações e Produtos Notáveis. De maneira que os alunos que não obtivessem bons resultados foram convidados a participar de um curso de nivelamento envolvendo esses conteúdos [36].

As duas questões relacionadas ao tópico de Funções obtiveram um índice de erro de 69,98% de erros por questão respondida e 54,5% de questões não respondidas.

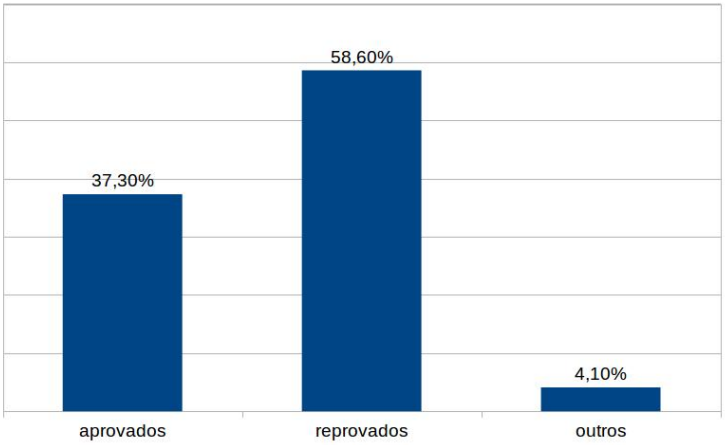


Figura 4: Consolidado do aproveitamento no 10 últimos semestres da disciplina Cálculo Diferencial e Integral 1 (GMA005) - Curso Licenciatura em Matemática/UFU

Fonte: Coordenação do curso de Matemática/UFU.

Evidenciou-se um alto desvio padrão entre elas, de 30,71 e foi considerado que este alto desvio padrão é resultado de uma das questões aplicadas ser algébrica e a outra gráfica. O fato aqui é o de que a questão com maior índice de erro (82,60%) foi a de menor índice de respostas. Essa questão é relacionada a interpretação gráfica de funções, ou seja, o tópico acerca do gráfico de funções no Ensino Médio não é proficiente em seus resultados, de modo que esta dificuldade dos alunos na construção e análise dos gráficos de funções, se refletem nas disciplinas do primeiro período do BC&T, como Pré-Cálculo, Cálculo I e Vetores e Geometria Analítica [36].

O estudo acima endossa esta dissertação, no sentido de que o ensino de Matemática não é eficiente no Ensino Médio, em particular, no tópico sobre gráficos de funções, pelo fato de os conceitos básicos do Cálculo Diferencial estarem ausentes da matriz curricular do Ensino Básico.

Assim, os problemas supracitados, de ordens política, social e econômica que se refletem na sala de aula em geral, afetando a educação matemática e, por consequência, o aprendizado de Cálculo, temos também o fato de que alguns conceitos não são construídos como deveriam no Ensino Médio. Por exemplo, o comportamento de uma função no infinito pode não ficar claro sem o aporte dos conceitos de Cálculo.

Nesse sentido em específico, uma proposta plausível para a melhora do desempenho nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, seria a introdução de alguns de seus conceitos na Educação Básica, especificamente a partir do Ensino Médio, onde começa-se a se trabalhar com funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, modulares e tri-

gonométricas. A compreensão do comportamento dessas funções ganha profundidade com a presença do Cálculo, sendo possível entender mais claramente e construir gráficos que não seriam possíveis sem esses conceitos. E não apenas isto, a ausência destes conceitos abrem uma lacuna no entendimento do gráfico de funções.

Assim, no Apêndice A deste trabalho construiu-se um "míni" livro de Cálculo Diferencial contendo os conteúdos de Cálculo que se acha que devem ser introduzidos no Ensino Médio. A ideia por detrás do míni livro é que este sirva como diretriz para o Ensino de Cálculo: o material aqui apresentado precisará ser complementado de modo a torná-lo mais didático e assim facilitar a assimilação dos seus conteúdos. Pode ser que ele pareça difícil para a compreensão dos alunos do Ensino Médio, mas aqui a ideia é a de que o conteúdo deve ser aprofundado conforme o desenvolvimento particular de cada turma em específico, cada sala de aula, uma experiência, todavia, sem deixar de pontuar em todas as turmas os conceitos mais simples de serem entendidos. Para facilitar o entendimento dos conceitos de Cálculo, estes podem ser introduzidos com o uso de funções polinomiais.

A seguir discutimos porque achamos que se deve estudar o Cálculo no Ensino Médio e porque a sua introdução até hoje não deu certo. Também mostramos como alguns de seus tópicos podem ser introduzidos de forma mais didática.

4.3 Porque se estudar Cálculo no Ensino Médio?

Segundo Machado [3], quase todas as tentativas de se ensinar Cálculo no Ensino Médio não deram certo: "pois essas tentativas não passaram de uma mera antecipação do modo como o Cálculo é ensinado na universidade, e o problema é que nem na universidade o curso de Introdução ao Cálculo funciona bem. Como poderia funcionar no Ensino Médio? (SIC)".

O autor ressalta que o aluno não poderia ir bem na disciplina de Cálculo no Ensino Médio, uma vez que ele sabe menos e sugere que o Cálculo poderia ser dado através de seu conjunto de ideias fundamentais a partir do Ensino Fundamental, e não apenas no Ensino Médio. Machado define "ideia fundamental" do seguinte modo:

> Primeiro eu consigo explicar qualquer ideia fundamental, e consigo explicar sua importância, recorrendo apenas à linguagem cotidiana, à linguagem do senso comum. Se eu tiver de recorrer a linguagem técnica para explicar a ideia, ou sua importância, é porque ela não é fundamental. Ela pode ser importante, mas não fundamental.

> Segundo, nenhuma ideia fundamental está isolada. Ela está sempre ligada a muitas outras ideias, tanto da sua área como de outras áreas também.
>
> Terceiro, toda ideia fundamental transborda uma disciplina específica: nenhuma ideia fundamental cabe numa disciplina só. Quero dizer: uma ideia fundamental não só articula uma disciplina qualquer, internamente, como também transborda para outras disciplinas. Alguns exemplos: energia, mapa, narrativa. Mapas, por exemplo, são uma ideia fundamental na geografia, mas você não pode ver um plano cartesiano como uma espécie de mapa? [3]

Segundo Ávila [1], "o Cálculo vem desempenhando um papel de grande importância em todo desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo do ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual".

Ávila afirma que é possível ensinar a disciplina de Cálculo no Ensino Médio: "desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos". Reforça ainda que é possível introduzir a noção de reta tangente a uma curva e derivada de uma função em uma única aula. Ainda nos diz que um curso de Cálculo deveria ser permeado de aplicações. Como no caso da derivada, que daria suporte aos professores de Física no ensino do movimento uniformemente variado: "o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea" [1]. Salienta ainda que é importante a introdução do conceito de integral no curso, através de aplicações, de maneira intuitiva, "baseado nas ideias, nas técnicas e aplicações" [1].

Sobre o problema do currículo extenso da Matemática no Ensino Médio, Ávila afirma que a reforma feita na década de 60 sobrecarregou o currículo com excessivos formalismos e assim permanece até hoje, mesmo o currículo tendo passado por mudanças nos últimos anos. Como exemplo, cita o currículo do estudo de funções, se gasta muito tempo para introduzir os conceitos de contradomínio, função inversa, função composta, função injetiva, função sobrejetiva, e os resultados são pífeos para esse tempo e esforço aplicado. Além disso, muitas vezes este conceitos nem são utilizados no decorrer da disciplina, o autor afirma que "É antipedagógico introduzir conceitos que não estejam sendo utilizados no desenvolvimento da disciplina" [1]. Ainda em relação ao argumento de que o currículo da Matemática é extenso, Ávila diz que "A ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportam a inclusão do Cálculo

é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados" [1].

Foi a evolução do próprio Cálculo que fez com que as funções fossem concebidas como vemos hoje. O problema não seria encontrar espaços para introduzir o Cálculo nos currículos, mas sim reorganizá-los em uma melhor distribuição e organização de seus tópicos. Segundo Ávila, "Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que se gasta, no 2° grau, ensinando formalismo e terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com ensino de noções básicas de Cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa" [1].

Como vemos, o Cálculo já foi estudado no Ensino Médio. Embora já estudado em algumas escolas, foi introduzido formalmente no currículo escolar logo após a Reforma Capanema, que reformulou o Ensino Médio, criando nos três últimos anos duas opções de curso: o clássico e o científico, era neste último que os alunos estudavam vários conceitos de Cálculo.

A partir da década de 50 [15], o movimento "Matemática Moderna" surge e começa a influenciar as diretrizes curriculares do ensino da Matemática no país. Segundo Ávila, "a tônica dessa modernização foi uma ênfase excessiva no rigor e no formalismo das apresentações, à custa, inclusive, de retirar dos antigos programas tópicos importantes no ensino, como a Geometria e o Cálculo" [1]. E lá se foram os conceitos de Cálculo no Ensino Médio.

Algumas pessoas afirmam que o ensino de Cálculo não havia dado certo. E porque não deu certo? Provavelmente porque suas diretrizes pedagógicas eram meramente propedêuticas, vale lembrar que vestibulares como a FUVEST cobravam o estudo de Cálculo em seus exames. Com um número de vagas insuficientes para o aluno egresso do Ensino Médio, a educação que era direcionada para a aprovação em exames de admissão em cursos superiores não passaria de um "decoreba" de um monte de técnicas, sacrificando assim o processo de aprendizagem. Logo, para que se tenha sucesso no ensino de Cálculo é necessário que o aluno compreenda os seus conceitos básicos no processo educacional.

É preciso se ensinar Cálculo no Ensino Médio. É relevante que o aluno já inicie os estudos de cálculo na educação básica para quando ingressar no ensino superior esteja mais preparado e tenha um melhor desempenho nesta disciplina.

Mas não apenas por isso, afinal nem todos os egressos do Ensino Médio cursarão áreas que contenham esta disciplina, no quadro atual da educação brasileira, muitos ainda nem sequer ingressarão em uma faculdade. A importância do Cálculo é trans-

disciplinar, uma vez que seu desenvolvimento está diretamente ligado ao progresso da própria humanidade. Esta ferramenta permitiu que a ciência progredisse como nunca, sua flexibilidade fez com que pudesse ser aplicado em diversos estudos, em diversas áreas, da propagação de epidemias à expansão de gases, da flutuação dos lucros ao movimeto dos planetas, e por aí vai [37].

Estudar Cálculo no Ensino Básico é mais do que uma atualização do currículo da Matemática, é solucionar uma injustiça pedagógica, histórica. É modernizar o currículo, com uma área da Matemática de profunda influência no dia a dia da humanidade.

A ideia do conceito de limite não é algo sobrenatural, cujo entendimento seja algo impossível ao aluno do Ensino Médio. Mantendo a ordem teórica construída no ensino de Cálculo, torna-se mais fácil aprofundar os conceitos no Ensino Superior.

Assim, de modo a tornar mais fácil a assimilação de conceitos de Cálculo, por exemplo, de acordo com Fernando Trotta, no livro Matemática Aplicada [9] destinado ao Ensino Médio, os conceitos de limite e derivada são introduzidos a partir de dez exercícios que abordam conceitos de física. Consideremos o primeiro exercício [9]:

1. Uma partícula caminha sobre uma trajetória qualquer obedecendo à função horária:

$$s(t) = 3t^2 - 5t + 2 \ (s \text{ em metros, } t \text{ em segundos})$$

   (a) Qual a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $[2; 4]$?

   (b) Qual a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $[2; 3]$?

   (c) Qual a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $[2; 2, 1]$?

   (d) Qual a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $[2; (2+\Delta t)]$, com $\Delta t \neq 0$?

   (e) Como você interpretaria fisicamente a velocidade média da partícula no item anterior, quando Δt tende a zero?

   (f) Qual a velocidade da partícula no instante $t = 2$?

   Resolução

   (a) $V_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \dfrac{30 - 4}{2} = 13 \ m/s$

   (b) $V_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \dfrac{14 - 4}{1} = 10 \ m/s$

(c) $V_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(2,1) - s(2)}{2,1 - 2} = \dfrac{4,73 - 4}{0,1} = 7,3\ m/s$

(d) $V_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(2 + \Delta t) - s(2)}{\Delta t} = \dfrac{7\Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t} = (7 + 3\Delta t)\, m/s.$
O autor ressalta que com o Δt como incógnita, engloba os ítens anteriores, assim no item (a), por exemplo, temos que: $\Delta t = 2$ e $V_m = 7 + 3\Delta t \Rightarrow V_m = 7 + 3 \cdot 2 = 13\ m/s$.

(e) *Nesse item o autor introduz empiricamente a noção de limite e derivada juntos. O autor resolve a pergunta como segue.*
No item anterior obtivemos a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $[2, (2 + \Delta t)]$, com $\Delta t \neq 0$.
Quando Δt tende a zero, o segundo extremo do intervalo de tempo tende a 2 e o referido intervalo tende a $[2, 2]$, que é "um intervalo de amplitude nula", caracterizando o instante $t = 2$.
Logo, fisicamente quando Δt tende a zero, a velocidade média tenderá para a velocidade instantânea da partícula para $t = 2$; esta velocidade será denotada com $v(2)$.

(f) Pelo exposto no item anterior, concluímos que $v(2)$ é o valor para o qual tende a expressão $V_m = 7 + 3\Delta t$, quando Δt tende a zero. E é fácil ver que, quando Δt tende a zero $V_m = 7 + 3\Delta t$ tenderá a 7. Logo, $v(2) = 7\ m/s$.

Na sequência, utilizando como recurso os exercícios 1, 4, 6 *e* 8, *previamente resolvidos, o autor introduz a notação de limites e constrói a definição de derivada. Para ilustrarmos o que autor fez, considere a resolução do item (f) no exercício* 1. *Assim, quando* $\Delta t \to 0$ *isso implica que* $(7 + 3\Delta t) \to 7$, *isto sugere que a sentença pode ser escrita com a notação de limites:* $\lim\limits_{\Delta t \to 0} 7 + 3\Delta t = 7$.

Em seguida define a derivada como segue.

Seja uma função real f definida em um intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$, e seja $a \in I$; diremos que a função f é derivável no ponto $x = a$ se existir e for igual a um número real o limite [9]:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Quando a função f for derivável no ponto a, o referido limite será indicado por $f'(a)$ e será chamado de derivada da função f no ponto a.

Nilson José Machado, no livro "Matemática por Assunto 9 - Noções de Cálculo", fez a opção de introduzir alguns conceitos de Cálculo, com ênfases às noções de Derivada e

Integral, sem introduzir o conceito de limite. Dessa forma, o autor afirma que desobriga-se de maiores compromissos com a formalização, que após essa "visão geral, podemos estar melhor preparados para uma abordagem mais rigorosa dos fundamentos desta disciplina" [4]. O autor introduz o conceito de Derivada através da taxa de variação em um ponto, sendo que a ideia fundamental aqui é a de que uma curva pode ser aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto, sendo a reta tangente neste ponto a que melhor se aproxima do gráfico de uma função $y = f(x)$ para valores próximos deste ponto.

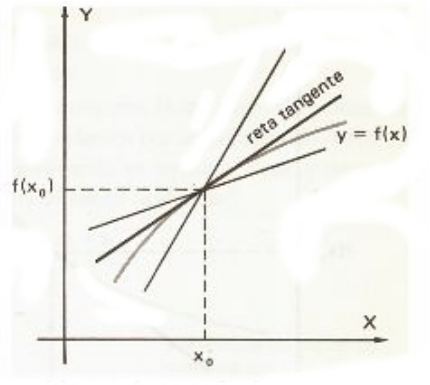


Figura 5: Reta tangente a $f(x)$ em x_0.

Fonte: Matemática por Assunto 9 – Noções de Cálculo, pág. 25.

O autor propõe a compreensão do significado de reta tangente de modo intuitivo através da observação das figuras.

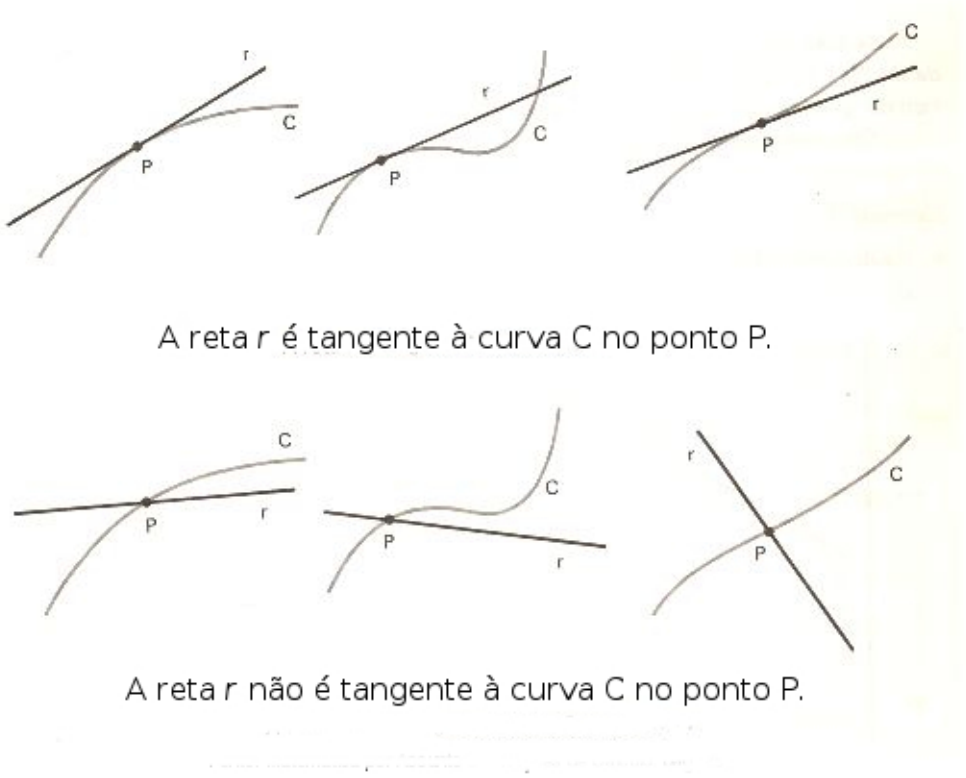


Figura 6: Noção de reta tangente a uma curva C em um ponto P.

Fonte: Matemática por Assunto 9 – Noções de Cálculo, pág. 25.

Em seguida, o autor conclui que essa taxa de variação de $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_0 é também chamada de derivada de $f(x)$ no ponto de abscissa x_0 e seu valor indica a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto considerado.

5 Considerações Finais

Neste estudo, foi observado que há vários fatores que influenciam a qualidade da educação no país. A Matemática, e em especial o Cálculo, não se apartam deste processo.

Temos nossas raízes históricas calcadas em uma desigualdade social que inibe as massas das classes sociais de menor poder aquisitivo ascenderem socialmente e intelectualmente. A educação está inclusa neste processo e, embora com o passar do tempo fosse vista como um caminho para a ascensão para uma vida mais digna, mecanismos de exclusão ainda permanecem no sistema educacional. São cláusulas sociais que impõem uma alta evasão da Educação Básica e uma oferta de vagas no Ensino Superior muito aquém da demanda egressa do Ensino Médio.

Outro fator que influencia na qualidade da educação é a ausência do estudo de Cálculo na Educação Básica. Conceitos como limites e derivadas poderiam ser introduzidos no Ensino Médio. Percebe-se que há uma ranhura, por exemplo, na noção de construção de gráficos de funções, uma vez que o aluno do Ensino Médio, na maioria dos casos, estuda apenas gráficos de funções polinomiais e trigonométricas contínuas, tendo como o domínio o conjunto dos reais. E, quando muito, estuda o gráfico de uma função descontínua em apenas um intervalo limitado. Não há uma noção sólida do comportamento da função quando ela tende ao infinito. Não se conceituam assíntotas.

A ausência do estudo de Cálculo é também obstáculo a outros conceitos. O método para se determinar a velocidade instantânea teria um caminho muito mais simples e compreensível com o estudo da derivada.

Os resultados mostram que, conceitos de Cálculo já foram estudados na Educação Básica, oficialmente foi incluído no currículo após os desdobramentos da Reforma Capanema, que dividiu o Ensino Médio em duas opções: curso científico e curso clássico. Os conceitos de Cálculo foram inseridos no 3° ano do curso científico, que como a própria nomenclatura do curso sugere, tinha por objetivo uma ênfase nas ciências exatas e tecnológicas, uma demanda de ocasião econômica, dado o momento de industrialização vivido pelo país após a década de 30 [5].

Oficialmente os conceitos de Cálculo permaneceram no currículo até próximo do remate da década de 60, quando através de nova reforma foram retirados do recém renomeado "Ensino Colegial".

Não sabemos ainda o que constará no novo currículo de Matemática do Ensino Médio em consonância com a reforma do Ensino Médio em andamento, até porque, a

sua condução não foi democrática e, até o presente momento, a BNCC para o Ensino Médio não está pronta e, portanto, não podemos concluir que o Cálculo estará ou não presente no currículo básico do Ensino Médio.

Vivemos tempos sombrios, em que não estão garantidos recursos suficientes para que a educação melhore nos próximos anos, haja vista a emenda Constitucional 95/2016 [21], que limita o crescimento dos gastos do governo federal a correção da inflação.

Esta dissertação aponta que, independente da maneira que se faça a opção da abordagem do Cálculo no Ensino Médio, sua ausência acarreta transtornos na aprendizagem no Ensino Superior. Pode-se resolver todas as mazelas sociais e educacionais do Brasil, no entanto, se o Cálculo continuar fora do currículo da Educação Básica, os problemas ulteriores relativos ao seu aprendizado permanecerão. Ou seja, a introdução dos conceitos de Cálculo no Ensino Médio é uma condição necessária para a melhora de sua aprendizagem no Ensino Superior, embora não seja uma condição suficiente.

Some a este fato sua relevância no âmbito da sociedade moderna não sendo uma ciência acabada, mas participa do progresso da humanidade, o que reforça a tese de que esta disciplina não pode ficar de fora do currículo escolar.

Por se achar a introdução do Cálculo no Ensino Médio tão importante, elaborou-se um míni livro, que se encontra no Apêndice A, sobre os seus conteúdos. É importante frisar que este livro funciona como guia para o Ensino de Cálculo: esse deverá ser complementado com vários exercícios didáticos.

Espera-se que este trabalho suscite o debate acerca da relevância da presença dos conceitos fundamentais de Cálculo Diferencial no currículo da educação básica.

Referências

1 Ávila, g., *O ensino de Cálculo no* 2^0 *grau*, Revista do Professor de Matemática, SBM, vol. 18 (1991).

2 Conceição, j.l.m., *Jesuítas na educação brasileira: dos objetivos e métodos até a sua expulsão*. Disponível em: <http://educacaopublica.cederj.edu.br/revista/artigos/jesuitas-na-educacao-brasileira-dos-objetivos-e-metodos-ate-a-sua-expulsao>, (2017).

3 Machado, n.j., *Cálculo no ensino médio: já passou da hora.* Disponível em: <https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/comment-page-1/>,(2015).

4 Machado, n.j., Matemática por assunto 9, Editora Scipione (1988).

5 Romanelli, o.o., História da Educação no Brasil, Editora Vozes (1983).

6 Saviani, d., O Legado Educacional Do Século XX No Brasil, Editora Autores Associados (2006).

7 Saviani, d., Da Ldb - 1996 ao Novo Pne 2014-2024: Por Uma Outra Politica Educacional, Editora Autores Associados (2016).

8 Thomas, g.b., Cálculo - Volume 1, Editora Pearson (2008).

9 Trotta, f., Matemática Aplicada 3, Editora Moderna (1980).

10 Medida Provisória n° 746, *Reformulação Ensino Médio*. Disponível em: <https://www.congressonacional.leg.br/materias/medidas-provisorias/-/mpv/126992>,(2016).

11 Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html>,(1931).

12 Resolução nº 8, de 1 de dezembro de 1971. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/reben/v25n1-2/0034-7167-reben-25-02-0176.pdf>,(1971).

13 Zotti, s.a, *O ensino secundário nas reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema: um olhar sobre a organização do currículo escolar*. Disponível em:

<http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe4/individuais-coautorais/eixo01/Solange%20Aparecida%20Zotti%20-%20Texto.pdf>.

14 Pina, f., *O ACORDO MEC-USAID: ações e reações (1966-1968)*. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/93369/pina_f_me_assis.pdf?sequenc>,(2011).

15 Fischer, m.c.b, *Práticas de ontem e de hoje: heranças do movimento da matemática moderna na sala de aula*. Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC26580527072T.doc>.

16 Resolução nº 6/86. Disponível em: <http://www.histedbr.fe.unicamp.br/navegando/fontes_escritas/7_Gov_Militar/resolu%E7%E3o%206-1986%20reformula%20o%20n%FAcleo%20comum%20para%20os%20curr%EDculos.pdf>,(1986).

17 D'Ambrosio, u., Uma História Concisa da Matemática no Brasil, Editora Vozes (2008).

18 Lei nº 4.464. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-4464-9-novembro-1964-376749-norma-pl.html>,(1964).

19 Exposição de motivos, Medida Provisória n° 746, *Reformulação Ensino Médio*. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/medpro/2016/medidaprovisoria-746-22-setembro-2016-783654-exposicaodemotivos-151127-pe.html>,(2016).

20 Lei nº 11.738. Disponível em: <https://presrepublica.jusbrasil.com.br/legislacao/93436/lei-11738-08>,(2008).

21 Emenda Constituicional nº 95. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/emecon/2016/emendaconstitucional-95-15-dezembro-2016-784029-publicacaooriginal-151558-pl.html>, (2016).

22 Lei nº 11.684. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/2008/lei-11684-2-junho-2008-575857-publicacaooriginal-99168-pl.html>,(2008).

23 Lei nº 13.415. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/2017/lei-13415-16-fevereiro-2017-784336-publicacaooriginal-152003-pl.html>,(2016).

24 Gomes, l., 1808, Editora Planeta (2007).

25 Costa, j.c., Pequena História da República, Editora Civilização Brasileira (1972).

26 Constituição Brasileira de 1937, artigo nº129. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/consti/1930-1939/constituicao-35093-10-novembro-1937-532849-publicacaooriginal-15246-pl.html>,(1937).

27 Lei nº 5.692. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html>,(1971).

28 Sobrinho, b.l; Batista, p.n.; Outros, Em defesa do interesse nacional, Editora Paz e Terra (1994).

29 Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm>, (1988).

30 Decreto-lei N° 4.244, de 9 de abril de 1942. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html>,(1942).

31 Júnior, j.r., O que é Positivismo, Editora Brasiliense (1982).

32 IMPA. Disponível em: <http://https://impa.br>, (2018).

33 Exposição de Motivos do Decreto N° 21.241, de 4 de abril de 1932. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-21241-4-abril-1932-503517-publicacaooriginal-81464-pe.html>,(1932).

34 INEP. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>, (2017).

35 O nascimento do Cálculo. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm>,(2008).

36 Santana, s.t.; Ferraz, g.c.m.;Júnior, j.j.o. , Avaliação de Sondagem e Curso de Reforço como Medidas para Diminuir os Índices de Reprovação e Evasão nas Disciplinas Básicas do BC&T. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/3/anais/anais.html>,(2016).

37 Devlin, k., O Gene da Matemática, Editora Record (2004).

Apêndice A - Tópicos de Cálculo Diferencial

1 Introdução

Uma das áreas mais relevantes da Matemática, o Cálculo Diferencial e Integral foi criado para buscar soluções de problemas envolvendo retas tangentes e cálculo de áreas. Seus primeiros conceitos começaram a ser construídos há mais de 2 milênios. A partir daí, com a evolução e formalização de seus conceitos, foi ganhando força ao longo da história com importantes matemáticos, como Arquimedes, Newton, Leibniz, Cauchy, etc. Suas aplicações têm contribuído sobremaneira para o progresso da ciência e por consequência, para o progresso da própria humanidade [2].

O aporte do Cálculo permitiu que a ciência avançasse rumo a patamares nunca antes estudados. Segundo Devlin, foi permitido que os matemáticos estudassem os seguintes tópicos:

> [...]o movimento dos planetas e a queda dos corpos na terra, o funcionamento das máquinas, o fluxo dos líquidos, a expansão dos gases, forças físicas tais como o magnetismo, a eletricidade, o voo, o crescimento das plantas e animais, a propagação das epidemias e a flutuação dos lucros. A Matemática tornou-se o estudo dos números, da forma, do movimento, da mudança e do espaço [1].

Não há como dissociar a evolução do estudo do Cálculo e a qualidade de vida ganha pela humanidade, sua relevância no dia a dia contrasta com a sua ausência no currículo da Educação Básica. O caminho da ciência é o caminho da dignidade humana e está diretamente ligado à nossa soberania enquanto povo, enquanto nação.

Essa apostila é uma modesta contribuição para o estudo de Cálculo no Ensino Médio. A ordem dos conceitos de Cálculo a serem estudados é basicamente a mesma ordem que ganhou forma no Ensino Superior, estando ausente a última parte, relativa ao estudo das integrais, de forma que a presença dos conceitos ligados a Limites e Derivadas sirvam de alicerce seguro para o estudo do Cálculo Integral.

A formalização e a escrita matemática mais rigorosa também foi minimamente preservada, para que o aluno descortine essa beleza sublime esconsa em suas entrelinhas. A ideia é que os conceitos aqui presentes possam ser introduzidos conforme o progresso de cada turma, de forma que os conceitos mais importantes sejam trabalhados em todas as classes.

Dentro do estudo de limites, foram selecionados os seguintes conceitos a serem abordados neste míni livro: limite de uma função em um ponto, limites laterais, limites no infinito, limites de funções importantes (funções seno, cosseno, tangente, cotangente, exponencial e logarítmica), limite fundamental da função seno, propriedades dos limites, indeterminações, assíntotas e continuidade [3], [4], [5], [6], [7].

Com relação ao estudo de derivadas, foram selecionados os seguintes conceitos a serem abordados: derivadas em um ponto, derivadas laterais, regras de derivação, derivadas de ordem superior, aplicações das derivadas (pontos críticos, crescimento e decrescimento de uma função, testes da 1^a e da 2^a derivada, regra de l'Hôpital) e esboço do gráfico de funções [3], [4], [5], [6], [7].

Note que os conceitos de Cálculo introduzidos neste míni livro de forma alguma se encontram apresentados na forma mais didática para o aluno: o que se pretende com este míni livro é fornecer de maneira relativamente sucinta o currículo do Cálculo, ou seja, este míni livro serve mais como guia sobre os conteúdos a serem abordados no Ensino Médio. Assim, cada tópico aqui apresentado, em sala de aula deverá ser expandido, ser apresentado de forma menos formal e com o auxílio de vários exemplos concretos. Portanto, para o leitor que queira usar este míni livro, deverá usá-lo apenas como guia.

2 Limites de funções

Inicialmente, abordaremos o conceito de limite de uma função em um ponto usando exemplos. Posteriormente formalizaremos este conceito. Em seguida, introduziremos as noções de limites laterais, limites no infinito, limites infinitos e limites infinitos no infinito. Nesta seção também veremos limites de funções importantes. Finalmente, enunciaremos as propriedades de limites.

2.1 Limite de uma função em um ponto

Para a introdução do conceito de limite, considere a análise das funções a seguir e o comportamento de seus gráficos com a aproximação de x para o valor 2 tanto por valores inferiores como superiores a 2. Verificamos que se os valores para os quais a função se aproxima, à medida que x tende para 2 tanto por valores inferiores como por valores superiores a 2, forem iguais, então esse valor corresponde ao limite da função à medida que x tende para 2.

Exemplo 2.1 *Na Figura 1 está ilustrado o gráfico da função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ x+2, & x > 2. \end{cases}$$

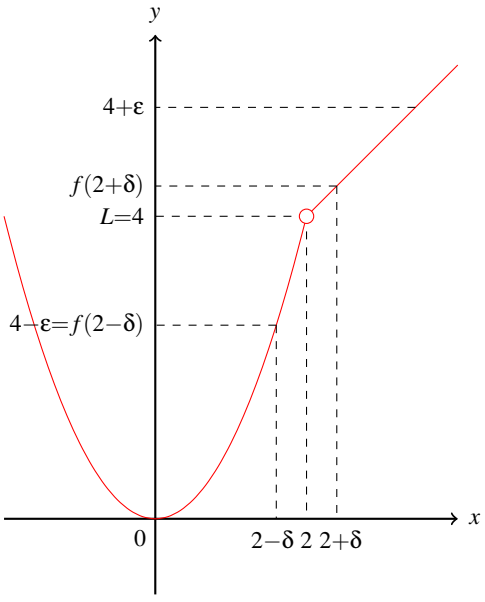


Figura 1: Gráfico da função $f(x)$.

Observe que para todo intervalo do eixo y contendo $L = 4$, podemos representar esse intervalo por $(4-b, 4+b)$ com $b > 0$, é possível encontrar um intervalo no eixo x contendo $x = 2$, representado por $(2-a, 2+a)$ com $a > 0$, de tal forma que todas as imagens de $x \in (2-a, 2+a)$ estejam no intervalo $(4-b, 4+b)$, isto é, $f(x) \in (4-b, 4+b)$.

Note que b pode ser tão pequeno quanto se queira e ainda assim será possível encontrar um valor $a > 0$ atendendo a condição de que se $x \in (2-a, 2+a)$ então $f(x) \in (4-b, 4+b)$. Quando isso acontece, dizemos que $f(x)$ tende para 4 à medida que x tende para 2.

Na notação clássica os termos a e b usados acima são designados por δ e ε respectivamente, e $x \in (2-\delta, 2+\delta)$ é o mesmo que $2-\delta < x < 2+\delta$ ou $|x-2| < \delta$. Da mesma forma a expressão $f(x) \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$ é o mesmo que $4-\varepsilon < f(x) < 4+\varepsilon$ ou $|f(x)-4| < \varepsilon$.

Os intervalos $(2-\delta, 2+\delta)$ e $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$ são chamados de vizinhança de $x = 2$ e $y = 4$, respectivamente.

Exemplo 2.2 *Neste exemplo considera-se o gráfico da função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ 2, & x = 2, \\ x+2, & x > 2, \end{cases}$$

conforme ilustrado na Figura 2.

Ao contrário do Exemplo 2.1, a função aqui está definida para $x = 2$. Conforme o exemplo anterior, a função tende para $L = 4$ à medida que x tende para 2, apesar de $f(2)$ ser igual a 2. Assim de igual modo, para todo o $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para todo o $x \in D_f$, tem-se que

$$2-\delta < x < 2+\delta \quad \Longrightarrow \quad 4-\varepsilon < f(x) < 4+\varepsilon.$$

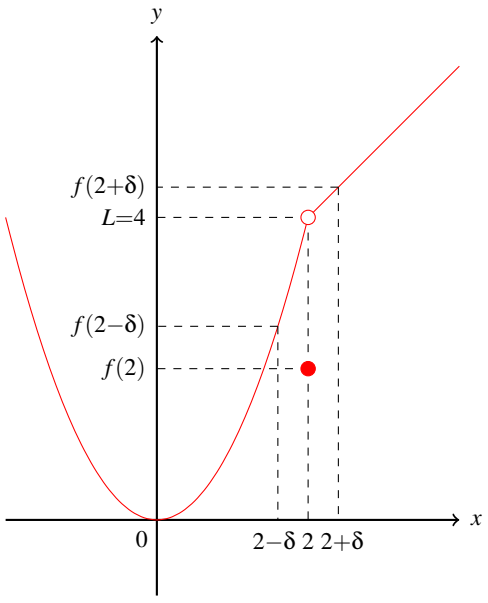


Figura 2: Gráfico da função $f(x)$.

Nos Exemplos 2.1 e 2.2 o limite existe e o seu valor é $L = 4$, apesar de $f(2)$ não existir no Exemplo 2.1 e de $f(2)$ ser diferente do limite. A noção de limite não se preocupa com o que se passa com a função num dado ponto, mas sim com o que se passa na vizinhança desse mesmo ponto.

Exemplo 2.3 *Neste exemplo a Figura 3 ilustra o gráfico da função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ x+2, & x \geq 2. \end{cases}$$

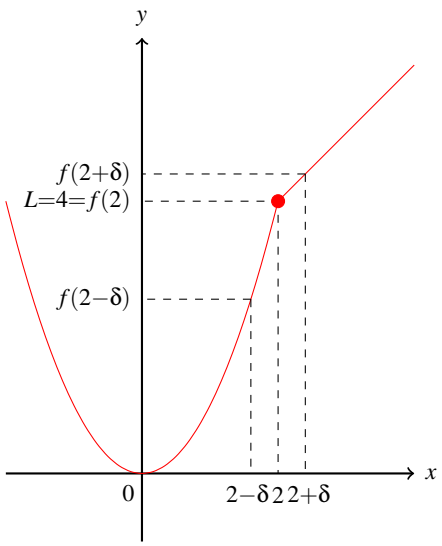


Figura 3: Gráfico da função $f(x)$.

Aqui o valor do limite $L = 4$ é igual ao valor da função no ponto $p = 2$.

Nos casos em que o limite em um ponto é igual ao valor da função nesse ponto, $L = f(p)$, diz-se que a função f é **contínua** no ponto p.

Exemplo 2.4 *Neste exemplo a Figura 4 representa o gráfico da função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$$

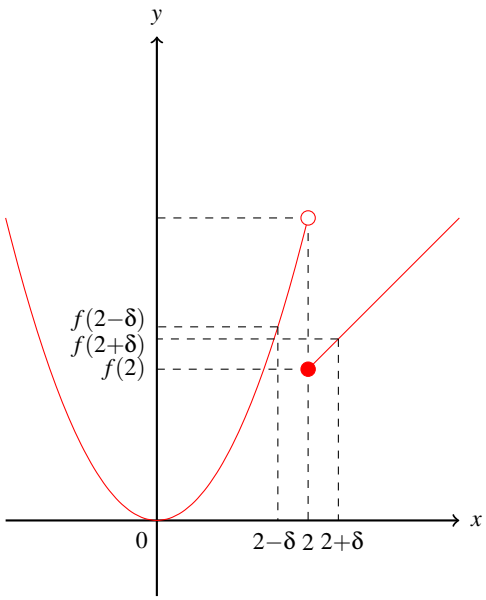


Figura 4: Gráfico da função $f(x)$.

Esta função aproxima-se de 4 à medida que x tende para 2 por valores inferiores a 2, e de 2 à medida que x tende para 2 por valores superiores a 2. Como os limites da função à medida que x tende para 2 por valores inferiores e superiores a 2 não são iguais, então o limite da função não existe no ponto $x = 2$.

Destes exemplos, vemos que o mais importante é o que acontece na vizinhança de $x = 2$ e não propriamente o que acontece no próprio ponto $x = 2$. A definição de limite que se segue resume todas as situações de limites apresentadas nos exemplos anteriores.

Definição 2.5 *Seja* $f(x)$ *uma função definida em um intervalo aberto* (a,b)*, que contenha o ponto* x_0*, exceto talvez o próprio ponto* x_0*. Então diz-se que o limite de* $f(x)$ *quando x tende a* x_0 *é L, denotado por*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se para qualquer $\varepsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ *tem-se que*

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A expressão "x tende a x_0*" e "*$f(x)$ *tende a L" podem ser denotadas por* $x \to x_0$ *e* $f(x) \to L$*, respectivamente.*

2.2 Limites Laterais

Considere a função descrita no Exemplo 2.4 e observe na Figura 5 que

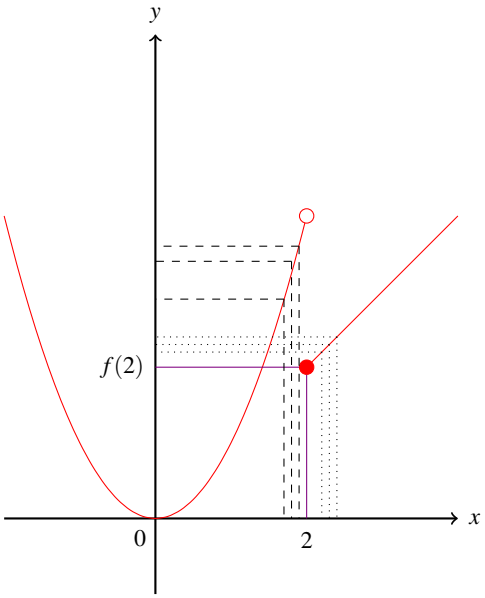


Figura 5: Gráfico da função $f(x)$.

- à medida que x se aproxima de 2 por valores inferiores a 2, o valor da função $f(x)$ tende a 4, representado simbolicamente por

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

- à medida que x se aproxima de 2 por valores superiores a 2, o valor da função $f(x)$ tende a 2, representado simbolicamente por

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2.$$

O que acabamos de ver são exemplos de **limites laterais**, ou seja, os limites de uma função à esquerda e à direita de um ponto; a seguir definimos, respectivamente, cada um desses limites.

Definição 2.6 *Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo $]a,x_0[$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 pela esquerda ($x \to x_0^-$) é igual a L ($f(x) \to L$), ou seja,*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L,$$

se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para $x < x_0$ e x suficientemente perto de x_0 temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x_0 - \delta < x < x_0$.

Definição 2.7 *Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo $]x_0,b[$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 pela direita ($x \to x_0^+$) é igual a L ($f(x) \to L$), ou seja,*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L,$$

se para qualquer $\varepsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$ *tal que para* $x > x_0$ *e* x *suficientemente perto de* x_0 *temos que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $x_0 < x < x_0 + \delta$*.*

Usando a definição de limite e as definições de limites laterais é possível demonstrar o seguinte teorema sobre limite.

Teorema 2.8 *Sejam* $f(x)$ *uma função,* x_0 *um número real e os intervalos* (a, x_0) *e* (x_0, b)*, ambos contidos em* D_f*. Temos que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

2.3 Limites no Infinito

Definição 2.9 *Seja* $f(x)$ *uma função definida em um intervalo aberto* $]a, +\infty[$*. Diz-se que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $A > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $x > A$*.*

Definição 2.10 *Seja* $f(x)$ *uma função definida em um intervalo aberto* $]-\infty, b[$*. Diz-se que*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $B < 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $x < B$*.*

Usando estas definições é possível demonstrar os seguintes resultados.

Teorema 2.11 *Seja* n *um número inteiro positivo e* $c \in \mathbb{R}$ *uma constante, então*

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^n} = 0,$

(b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^n} = 0.$

Exemplo 2.12 *Vamos calcular o seguinte limite:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3x^4}.$$

De acordo com o teorema 2.11, temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3x^4} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$$

.

2.4 Limites Infinitos

Definição 2.13 *Sejam $f(x)$ uma função, I um intervalo aberto e $a \in I$, de modo que $f(x)$ esteja definida em I, exceto possivelmente em $x = a$. Diz-se que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Definição 2.14 *Sejam $f(x)$ uma função, I um intervalo aberto e $a \in I$, de modo que $f(x)$ esteja definida em I, exceto possivelmente em $x = a$. Diz-se que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se para todo $B < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < B$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Usando as definições acima é possível demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.15 *Se n é um inteiro positivo e $c \in \mathbb{R}$ uma constante, então*

(a) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{c}{x^n} = +\infty$,

(b) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{c}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & n \text{ par}, \\ -\infty, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$

Exemplo 2.16 *Vamos determinar o limite*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{5x^3}.$$

Usando o teorema 2.15, obtemos que este limite é igual a $-\infty$.

2.5 Limites Infinitos no Infinito

Definição 2.17 *Seja $f(x)$ uma função definida em $(a, +\infty)$. Diz-se que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

se para todo $A > 0$, existe um $B > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $x > B$.

Definição 2.18 *Seja $f(x)$ uma função definida em $(-\infty, b)$. Diz-se que*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

se para todo $A < 0$, existe um $B < 0$ tal que $f(x) < A$ sempre que $x < B$.

Definição 2.19 *Seja $f(x)$ uma função definida em $(a, +\infty)$. Diz-se que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

se para todo $A < 0$, existe um $B > 0$ tal que $f(x) < A$ sempre que $x > B$.

Definição 2.20 *Seja $f(x)$ uma função definida em $(-\infty, b)$. Diz-se que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

se para todo $A > 0$, existe um $B < 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $x < B$.

Usando as definições acima, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 2.21 *Se n é um número inteiro positivo e $c \in \mathbb{R}$ uma constante, então*

(a) $\lim_{x\to+\infty} cx^n = +\infty,$

(b) $\lim_{x\to-\infty} cx^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ par}, \\ -\infty, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$

Exemplo 2.22 *Sejam $f(x) = 7x^6$ e $g(x) = 6x^7$. Vamos calcular os limites de $f(x)$ e $g(x)$ à medida que x tende para $-\infty$. Usando o teorema 2.21, obtemos que*

$$\lim_{x\to-\infty} 7x^6 = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} 6x^7 = -\infty.$$

2.6 Limites de Funções Importantes

Vamos relembrar os gráficos das funções trigonométricas básicas, da função exponencial e da função logarítmica.

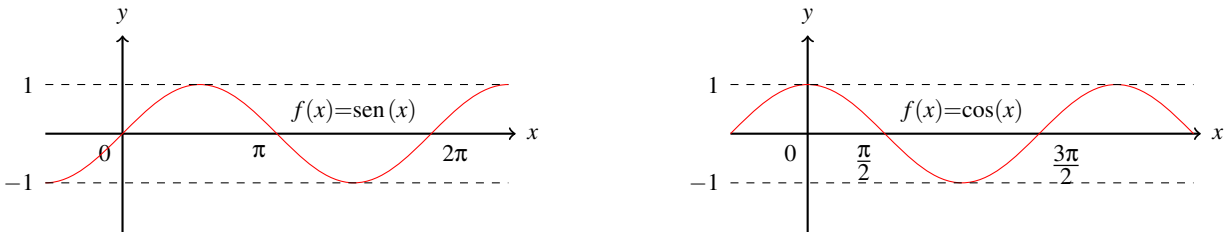


Figura 6: Funções seno e cosseno.

As funções seno e cosseno são funções periódicas de período 2π cujas imagens oscilam entre os valores -1 e 1. Estas funções estão definidas de $-\infty$ ate $+\infty$, isto é, em toda a reta real, como é possível verificar na Figura 6. Portanto, os limites

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen}(x), \quad \lim_{x\to\pm\infty} \cos(x),$$

não existem.

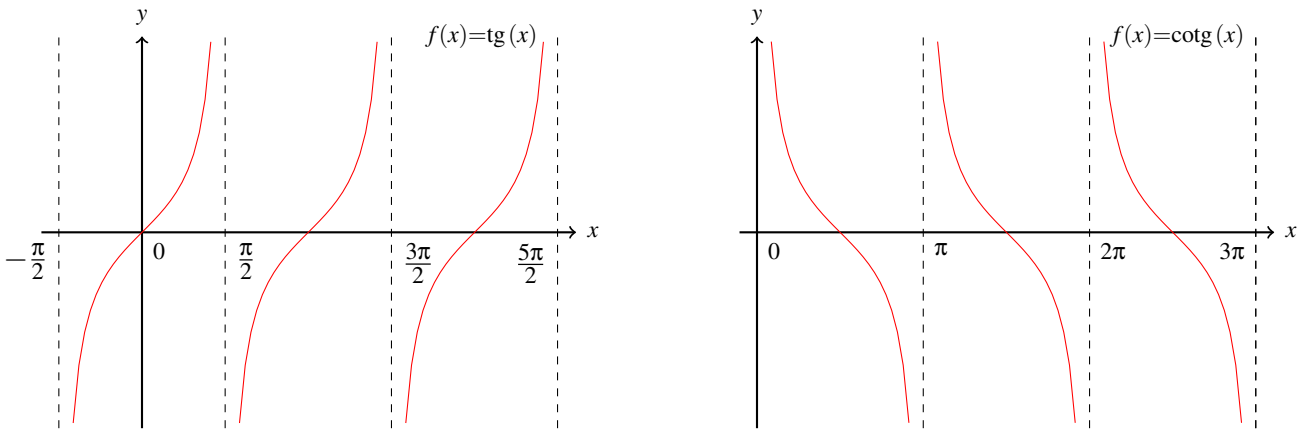


Figura 7: Funções tangente e cotangente.

As funções tangente e cotangente também são funções periódicas, mas estas repetem-se todos os π. Além disso, as funções tangente e cotangente não estão definidas para um número infinito de pontos. Os pontos para os quais a tangente não está definida são

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e no caso da cotangente são

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por esse motivo é interessante calcular os limites laterais dessas funções nesses pontos. Assim, no caso da função tangente, olhando para o gráfico podemos ver que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}(x) = -\infty.$$

Como a função tangente é periódica, o mesmo acontece em todos os outros pontos para os quais a função não se encontra definida.

Olhando o gráfico da função cotangente, podemos observar que

$$\lim_{x \to \pi^-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pi^+} \operatorname{cotg}(x) = +\infty.$$

Como foi mencionado anteriormente a função cotangente é periódica, e por essa razão, obtemos os mesmos limites em todos os outros pontos onde a função não se encontra definida.

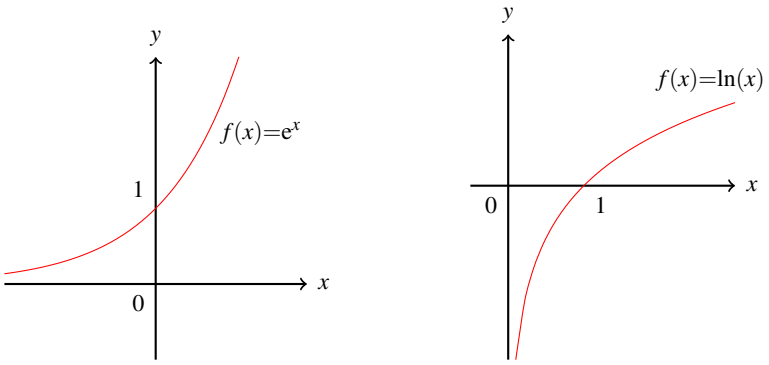


Figura 8: Funções exponencial e logarítmica.

Observando o gráfico da função exponencial podemos ver quais são os seus limites à medida que x tende para mais e menos infinito. Assim,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

Quanto à função logarítmica, esta tem por domínio $]0,+\infty[$. Logo faz sentido ver o comportamento desta à medida que x tende para 0 pela direita e para mais infinito. Assim de acordo com o gráfico

$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

2.7 Limite Importante: $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Nesta seção vamos mostrar sem grande rigor que

$$\lim_{\theta\to0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Este limite é muito importante, é usado em diversas demonstrações de resultados importantes do Cálculo. Nesta apostila iremos usar este limite para determinar a derivada de $\operatorname{sen}\theta$ pela definição.

Considere o círculo trigonométrico centrado na origem e com raio 1, conforme ilustrado na Figura 9.

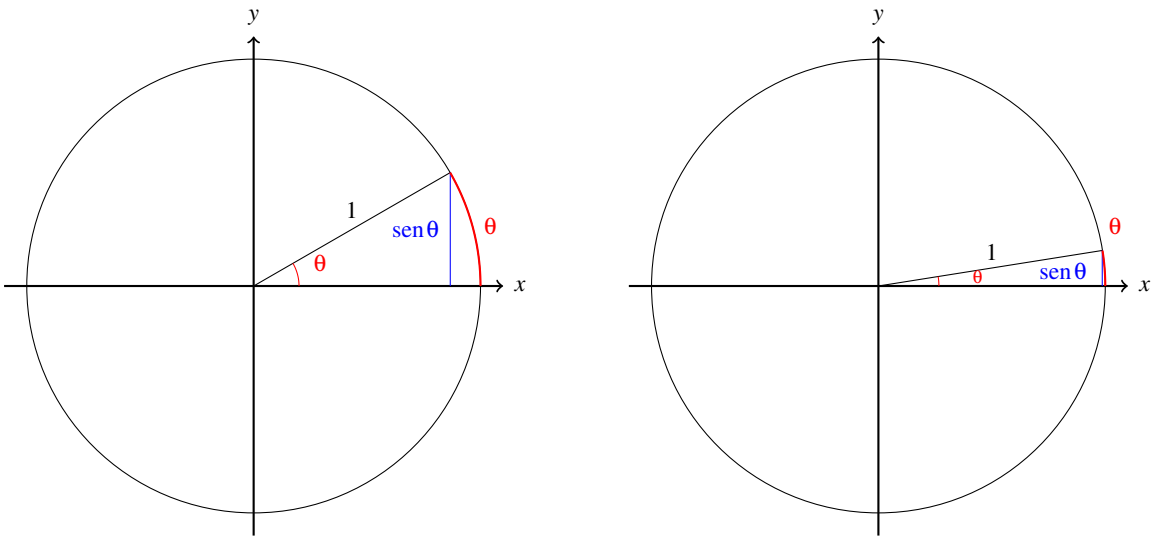


Figura 9: Círculo trigonométrico.

Da trigonometria temos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}.$$

Como a hipotenusa é igual a 1, então $\operatorname{sen}\theta =$ cateto oposto, que na Figura 9 corresponde à linha azul. Visto que na Figura 9 está representado o círculo trigonométrico, então o comprimento de arco representado a vermelho é igual a θ (isto somente é verdade quando o ângulo é medido em radianos). Sendo assim, $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ é a razão entre o cateto oposto do triângulo e o comprimento de arco. Podemos ver, na figura 9, que à medida que θ se aproxima de 0, o comprimento do cateto oposto, $\operatorname{sen}\theta$, se aproxima do comprimento de arco, θ, e portanto o valor da razão aproxima-se de 1 à medida que θ tende para 0, ou seja,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Note que aqui só mencionamos o caso à medida que θ se aproxima de 0 por valores superiores, mas o mesmo acontece à medida que θ aproxima 0 por valores inferiores.

2.8 Propriedades dos Limites

Até ao presente momento, só vimos as definições de limites e limites laterais, e os limites de algumas funções. Vejamos agora as propriedades de limites.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Se os limites $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ existem (onde x_0 pode ser um ponto, ou $+\infty$, ou $-\infty$), então temos que

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$,

2. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

3. $\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$,

4. $\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$,

5. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, caso $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,

6. $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n$, com n inteiro positivo,

7. $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, se n for par, supomos que $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$,

8. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$,

9. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$,

10. $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, onde n e um número inteiro.

Estas propriedades podem ser demonstradas usando as definições de limites.

Antes de prosseguir vale a pena mencionar o que acontece aos resultados de algumas destas propriedades quando os limites de $f(x)$ e/ou de $g(x)$ são iguais a $\pm\infty$. Nas seguintes tabelas resumimos isso.

Tabela 1: Limite da soma de funções

$\ell, m \in \mathbb{R}$ constantes

se $f(x)$ tende para	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
e						
$g(x)$ tende para	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
então $f(x)+g(x)$ tende para	$\ell+m$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

Conforme podemos ver na Tabela 1, se uma das funções tiver por limite $+\infty$ e a outra por limite $-\infty$, então diz-se que o limite não está determinado: o que temos é uma *indeterminação* $\infty - \infty$. Iremos ver na próxima seção como resolver limites com este tipo de indeterminação.

De acordo com a Tabela 2, se uma das funções tiver por limite 0 e a outra por limite $\pm\infty$, então diz-se que o limite não está determinado e temos uma indeterminação do tipo $0\times\infty$. Veremos na próxima seção como "levantar a indeterminação" deste tipo de indeterminação.

Tabela 2: Limite do produto de funções

$\ell, m \in \mathbb{R}$ constantes

se $f(x)$ tende para	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
e									
$g(x)$ tende para	m	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
então $f(x)+g(x)$ tende para	$\ell \cdot m$	$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Tabela 3: Limite do quociente de funções

$\ell, m \in \mathbb{R}$ constantes

se $f(x)$ tende para	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
e											
$g(x)$ tende para	$m \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	$m > 0$	$m = 0$	$m < 0$	$m > 0$	$m = 0$	$m < 0$	$\pm\infty$
então $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tende para	$\dfrac{\ell}{m}$	0	$\pm\infty$	?	$+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	?

Na Tabela 3 podemos verificar que se ambas as funções forem simultaneamente iguais a 0 ou simultaneamente iguais a $\pm\infty$, então o limite não está determinado: teremos indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Na próxima seção mostraremos como resolver estes tipos de indeterminações. As indeterminações que vimos aqui não são as únicas, existem outras que também veremos na próxima seção.

Finalmente, vamos calcular limites de funções, mas sem recorrer ao uso das definições: usaremos os Teoremas 2.11, 2.15 e 2.21, os limites das funções vistas na seção 2.6 e as propriedades de limites.

Exemplo 2.23 *Para determinar* $\lim_{x\to 2} 3x^2+2x-1$ *usam-se as propriedades 1., 2., 3., 9. e 10. de limites. Assim,*

$$\lim_{x\to 2} 3x^2+2x-1 = \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 2x - \lim_{x\to 2} 1 = 3\lim_{x\to 2} x^2 + 2\lim_{x\to 2} x - 1 = 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 15.$$

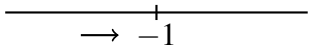
Exemplo 2.24 *Para determinar* $\lim_{x\to-\infty} 2x^3-7$ *empregam-se as propriedades 1. e 2. e o Teorema 2.21. Portanto,*

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3-7 = 2\cdot(-\infty)-7 = -\infty.$$

Exemplo 2.25 *Para calcular* $\lim_{x\to-1^-} \frac{4x-1}{x+1}$ *usam-se as propriedades 1., 2., 3., 5. e 9. Assim obtemos*

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{4x-1}{x+1} = \frac{4\cdot 1-1}{-1+1} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

Aqui vale a pena falarmos um pouco sobre o denominador 0^-*. A expressão* $\frac{3}{0}$ *dá infinito, agora o que precisamos de saber é se é mais ou menos infinito. Como estamos interessados em calcular o limite à medida que x se aproxima de* -1 *por valores inferiores,*



então obtemos que $x+1$ aproxima-se de 0 por valores negativos, daí a simbologia 0^-. Como 3 é positivo e 0^- é negativo, então $\frac{3}{0^-} = -\infty$. Se não estiverem convencidos que $x+1$ se aproxima de 0 por valores negativos à medida que x tende para -1, basta pegar um número inferior e proximo a -1, por exemplo, -2 e substituir em $x+1$. Isto dá-nos -1, que é um número negativo.

Exemplo 2.26 *Para determinar $\lim_{x\to -4} \frac{2x-3}{x+4}$ precisaremos usar o resultado do Teorema 2.8, dado que $\frac{2x-3}{x+4}$ não está definida em $x=-4$. Além disso, usaremos as mesmas propriedades que no exemplo anterior. Assim,*

$$\lim_{x\to -4^-} \frac{2x-3}{x+4} = \frac{-11}{0^-} = +\infty \quad e$$

$$\lim_{x\to -4^+} \frac{2x-3}{x+4} = \frac{-11}{0^+} = -\infty,$$

portanto de acordo com o Teorema 2.8 $\lim_{x\to -4} \frac{2x-3}{x+4}$ não existe. Note que o coeficiente de x em $x+4$ é positivo e portanto $x+4$ é negativo à esquerda de -4 e positivo à direita de -4.

Exemplo 2.27 *Para calcular $\lim_{x\to 2} \sqrt{3x^2+4}$ usam-se as propriedades 1., 2., 3., 7. e 10. Assim obtemos*

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{3x^2+4} = \sqrt{3\cdot \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + 4} = 4.$$

Exemplo 2.28 *Para calcular o limite da função $f(x) = \ln(x)\mathrm{e}^{-x}$ à medida que x tende para mais infinito, começamos por usar a propriedade 5. e em seguida substituimos x por $+\infty$. Logo*

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x)\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = \frac{\lim_{x\to +\infty} \ln(x)}{\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Obtivemos uma indeterminação: iremos ver mais adiante como resolver este tipo de limite.

Exemplo 2.29 *Sejam $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$ e $\lim_{x\to 3} g(x) = 3$, usando as propriedades de limites, determine*

$$(a) \quad \lim_{x\to 3}[4\cdot f(x) + 3\cdot g(x)], \quad (b) \quad \lim_{x\to 3} f(x)\cdot g(x), \quad (c) \quad \lim_{x\to 3}[f(x)]^3.$$

(a) Assim para resolver este limite usam-se a segunda propriedade na primeira igualdade e a terceira propriedade na segunda igualdade. Assim,

$$\lim_{x\to 3}[4\cdot f(x) + 3\cdot g(x)] = \lim_{x\to 3} 4\cdot f(x) + \lim_{x\to 3} 3\cdot g(x) = 4\cdot \lim_{x\to 3} f(x) + 3\cdot \lim_{x\to 3} g(x) = 4\cdot 5 + 3\cdot 3 = 29.$$

(b) Para este limite, usam-se a propriedade 7 na primeira igualdade e a propriedade 4 na segunda igualdade. Portanto,

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{f(x)\cdot g(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 3} f(x)\cdot g(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 3} f(x)\cdot \lim_{x\to 3} g(x)} = \sqrt{5\cdot 3} = \sqrt{15}.$$

(c) Neste limite, usa-se a propriedade 6 na primeira igualdade. Logo

$$\lim_{x\to 3}[f(x)]^3 = [\lim_{x\to 3} f(x)]^3 = 5^3 = 125.$$

O seguinte resultado pode ser facilmente demonstrado fazendo uma fatoração e recorrendo às propriedades de limites.

Teorema 2.30 *Seja* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *um polinômio de grau n, então*

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n.$$

2.9 Indeterminações

Aquando da aplicação das propriedades de limites no cálculo de limites é possível que estes não possam ser determinados. Isto ocorre quando obtemos uma das seguintes situações:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0\times\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Estas são conhecidas como *indeterminações*. Nesta seção veremos como é possível "levantar" cada uma destas indeterminações.

2.9.1 Indeterminação $\frac{0}{0}$

Para melhor explicar como se resolve este tipo de indeterminação vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 2.31 *Seja* $f(x) = x^2 - 1$ *e* $g(x) = 2x - 2$*, vamos determinar* $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$*. Assim, temos que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x-2} = \frac{1^2-1}{2\cdot 1 - 2},$$

que é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$*. O que está acontecendo aqui é que ambos, o numerador e o denominador, têm um fator em comum:* $x-1$*. Fatorando* x^2-1 *obtemos o seguinte limite:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Exemplo 2.32 *Neste exemplo para levantar a indeterminação não poderemos proceder do mesmo modo que no exemplo anterior. Considere*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

Nesta expressão o numerador e denominador não possuem um fator em comum, mas no entanto ambos são nulos para o valor $x = \frac{\pi}{2}$*. Para levantar esta indeterminação, precisaremos de usar um resultado que precisa da noção de derivada; esse resultado é conhecido como a* ***regra de l'Hôpital****. Como ainda não vimos derivadas, adiaremos a resolução deste limite para mais tarde.*

2.9.2 Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Aqui também usaremos exemplos para ilustrar como se resolve este tipo de indeterminação.

Exemplo 2.33 *Considere o limite*

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\frac{5x}{x^2-9}}{\frac{2}{x-3}}. \tag{1}$$

Calculando os limites do numerador e do denominador,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5x}{x^2-9} = \frac{15}{0^+} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{2}{x-3} = \frac{2}{0^+} = +\infty,$$

obtemos uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$*. Se simplificarmos a expressão em (1) obtemos*

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5x(x-3)}{2(x^2-9)},$$

que e uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$*. A razão pela qual estamos obtendo a indeterminação* $\frac{0}{0}$ *é porque o numerador e o denominador têm um fator em comum: eliminando esse fator,* $x-3$*, ficamos com*

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5x}{x+3} = \frac{5}{2}.$$

Neste exemplo vimos que é possível transformar uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ para uma do tipo $\frac{0}{0}$. Na realidade todas as indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ podem sempre ser transformadas em umas do tipo $\frac{0}{0}$, pois se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0,$$

e portanto,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}},$$

que é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Exemplo 2.34 *Considere o limite*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2}.$$

Este limite dá-nos a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$*. Aqui para desfazer esta indeterminação teremos que usar a regra de l'Hôpital, portanto deixaremos a resolução deste limite para quando tivermos estudado derivadas.*

2.9.3 Indeterminação $\infty - \infty$

Vejamos com o auxílio de exemplos como se levanta a indeterminação de $\infty - \infty$.

Exemplo 2.35 *Considere*

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to 0^+} f(x) + g(x).$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty,$$

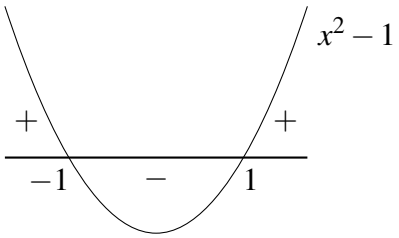
então obtemos uma indeterminação $\infty - \infty$. Para resolver este limite temos que simplificar a expressão $f(x)+g(x)$. Assim,

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)+(x^2-1)}{(x^2-1)(x+1)}$$

produz uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Nesta nova expressão existe um fator em comum entre o numerador e o denominador: $(x+1)$. Fatorando o limite dá-nos

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)+(x^2-1)}{(x^2-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)(1+(x-1))}{(x+1)(x^2-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

Porque é que x^2-1 tende para 0^- quando x tende para -1^+? Vejamos o gráfico de x^2-1.



De acordo com o gráfico podemos ver que à direita de -1, x^2-1 é negativo, portanto à medida que x se aproxima de -1 pela direita, x^2-1 aproxima-se de 0 por valores negativos.

Podemos ver que neste exemplo que transformamos a indeterminação $\infty - \infty$ em $\frac{0}{0}$. Em termos gerais a indeterminação do tipo $\infty - \infty$ pode ser transformada em uma do tipo $\frac{0}{0}$. De fato, se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty,$$

então

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0,$$

e portanto,

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} + \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \times \frac{1}{g(x)}}$$

passa a ser uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Exemplo 2.36 *Vejamos outro tipo de função cujo limite dá uma indeterminação do tipo* $\infty - \infty$. *Seja* $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$. *Para resolver este limite precisamos reescrever a expressão do seguinte modo*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

que depois de simplificada dá-nos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}.$$

Este limite dá uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. *Dividindo o numerador e o denominador por x obtemos*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=1.$$

2.9.4 Indeterminação $0\times\infty$

Vejamos agora como resolver a indeterminação $0\times\infty$ com o auxílio do seguinte exemplo.

Exemplo 2.37 *Considere*

$$\lim_{x\to0^+}x\ln(x).$$

Este limite produz a indeterminção do tipo $0\times\infty$. *Se reescrevermos a expressão como segue*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}},$$

obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ *que pode ser resolvida usando a regra de l'Hôpital.*

Na realidade os limites que produzem indeterminações do tipo $0\times\infty$ podem sempre ser transformados, de modo a produzir indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que por sua vez podem ser resolvidos usando a regra de l'Hôpital. Assim, se $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ e $\lim_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$, então

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\quad\text{e}\quad\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

dão indeterminações dos tipos $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$, respectivamente. Note que nem sempre as duas transformações podem ser usadas indiferentemente. Veremos isso após termos visto a regra de l'Hôpital.

2.9.5 Indeterminações dos tipos 0^0, ∞^0 e 1^∞

As formas indeterminadas 0^0, ∞^0 e 1^∞ podem ser resolvidas como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.38 *Vamos calcular* $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$. *Substituindo x por* $+\infty$ *dá-nos uma indeterminação do tipo* ∞^0.

Portanto para resolver o limite, precisamos transformar a sua expressão. Considere $y=x^{\frac{1}{x}}$. *Aplicando o logaritmo natural a y obtemos*

$$\ln(y)=\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{x}\ln(x).$$

O que temos que fazer agora é calcular o limite de $\ln(y)$ *à medida que x tende para* $+\infty$*. Isto dá-nos uma indeterminação do tipo* $\frac{\infty}{\infty}$*. Usando a regra de l'Hôpital, que veremos mais adiante, obtemos que*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(y) = 0. \tag{2}$$

O que queríamos, no entanto, era $\lim_{x\to+\infty} y$*. Para o obtermos, basta aplicarmos a função exponencial à resposta do limite em (2). Assim, o limite é*

$$e^0 = 1.$$

2.10 Assíntotas

Algumas funções aproximam de retas à medida que x tende para mais ou menos infinito, ou para um ponto onde as funções não estejam definidas: a estas retas chamamos de **assíntotas**. Existem três tipos de assíntotas: **verticais**, **horizontais** e **oblíquas**.

Definição 2.39 *Diz-se que a reta* $x = a$ *é uma* ***assíntota vertical*** *do gráfico da função* $f(x)$*, se pelo menos uma das afirmações abaixo for verdadeira:*

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$,
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$,
3. $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$,
4. $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

Para achar as assíntotas verticais de uma função precisamos estudar o comportamento da função à medida que x de aproxima de pontos onde a função não está definida. Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 2.40 *Para verificarmos se a função* $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$ *possui assíntotas verticais, precisamos numa primeira fase de determinar o domínio dessa função. A função* f *está definida para todos os números reais exceto* $x = 3$*,* $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$*. Logo precisamos estudar o comportamento da função à medida que esta se aproxima de* 3 *pela esquerda e pela direita. Assim temos que*

$$\lim_{x\to3^-} \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to3^+} \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Portanto, $x = 3$ *é uma assíntota vertical do gráfico de* f *(ver Figura 11).*

Exemplo 2.41 *Considere a função* $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4x}$*. O domínio de* f *é* $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0,4\}$*. Como* f *não está definida para* $x = 0$ *e* $x = 4$*, precisamos de estudar o comportamento de* f *à medida que x se aproxima de 0 e de 4. Assim como*

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x^2-5x+4}{x^2-4x} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to0^+} \frac{x^2-5x+4}{x^2-4x} = \frac{4}{0^-} = -\infty,$$

então $x=0$ é uma assíntota vertical. Vejamos o que acontece à medida que x tende para 4. Este limite

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x}$$

produz uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Simplificando a expressão obtemos

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-4)}{x(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x}=\frac{3}{4}.$$

Portanto, $x=4$ não é uma assíntota vertical (ver Figura 10.

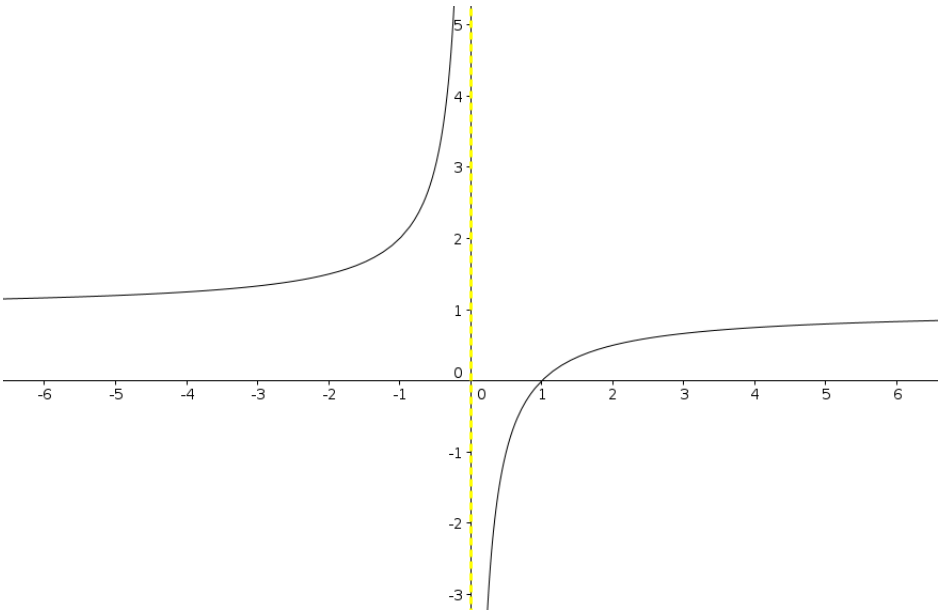


Figura 10: Gráfico da função $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4x}$ e sua assíntota.

Definição 2.42 *Diz-se que a reta $y=b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico da função $f(x)$, se pelo menos uma das afirmações abaixo for verdadeira:*

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$,
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$.

Para achar as assíntotas horizontais precisamos de estudar o comportamento da função à medida que x tende para mais ou menos infinito.

Continuação do Exemplo 2.40 *Para determinarmos se $f(x)=\frac{1}{(3-x)^2}$ possui assíntotas horizontais, precisamos estudar o seu comportamento à medida que x tende para mais ou menos infinito. Assim temos*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(3-x)^2}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(3-x)^2}=0,$$

logo $y=0$ é uma assíntota horizontal. Na Figura 11 podemos ver o gráfico da função assim como as suas assíntotas (o eixo dos x coincide com a assíntota horizontal).

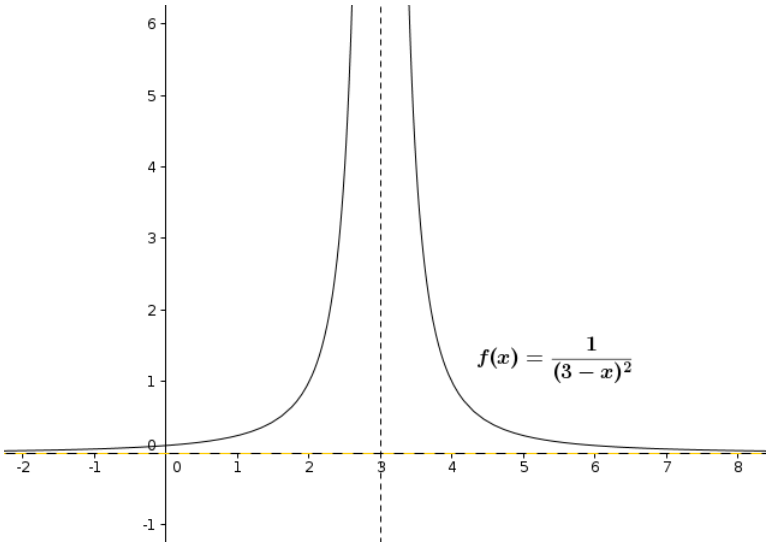


Figura 11: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$ e suas assíntotas.

Exemplo 2.43 *Vamos estudar o comportamento da função* $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}$ *à medida que x tende para mais ou menos infinito. Assim,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}$$

produz uma indeterminaçaão do tipo $\frac{\infty}{\infty}$*. Para desfazer esta indeterminação basta colocar x em evidencia no numerador e no denominador do seguinte modo*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(2)}{x\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}}.$$

Como x está indo para $+\infty$*, tanto o numerador como o denominador serão positivos. Assim, cancelando os x, o limite igual a* 2*. Fazendo o mesmo para o limite*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{2+x^2}},$$

obtemos o limite igual a -2*, visto que o numerador será negativo e o denominador positivo (porque* x^2 *é sempre positivo). Portanto,* $y = 2$ *e* $y = -2$ *são assíntotas horizontais do gráfico de* $f(x)$ *(veja a Figura 12).*

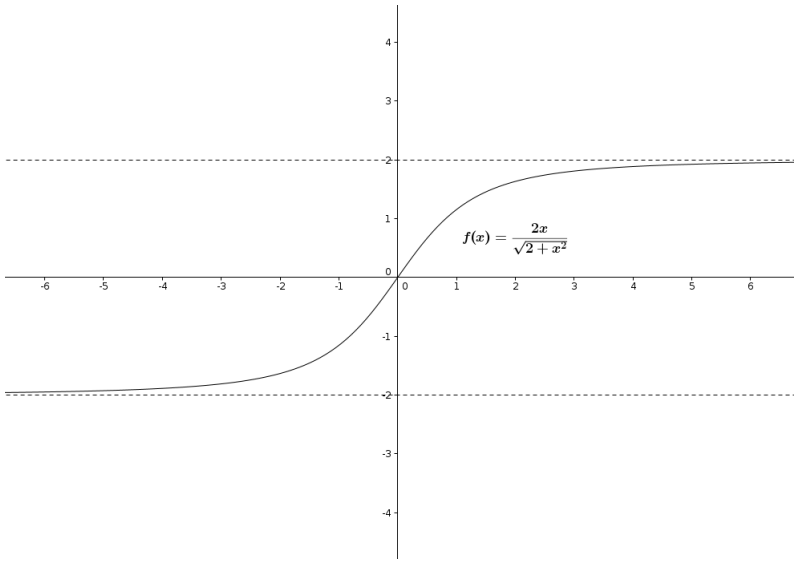


Figura 12: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2+x^2}}$.

Definição 2.44 *Diz-se que a reta $y = ax + b$ é uma **assíntota oblíqua** do gráfico da função $f(x)$, se pelo menos uma das afirmações abaixo for verdadeira:*

1. $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (mx+b)] = 0$,
2. $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx+b)] = 0$.

Usando os limites nos itens 1. e 2. da Definição 2.44 podemos determinar m e b. Assim,

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx.$$

Os valorres m e b satisfazem as equações dos itens 1. e 2. da Definição 2.44. Note que o m deve ser sempre calculado antes do b, pois b depende de m. Se na equação da reta $y = mx + b$, o m calculado for igual a 0, então obtemos uma assíntota horizontal.

Exemplo 2.45 *Considere a função $f(x) = \frac{3x^4}{x^3+3}$. Vamos verificar se $f(x)$ possui assíntotas oblíquas. Assim,*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3x^4}{x^3+3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4}{x^4+3x} = 3$$

e

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^4}{x^3+3} - 3x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 3x^4 - 9x}{x^3+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9x}{x^3+3} = 0.$$

Portanto, $y = 3x$ é uma assíntota oblíqua. Fazendo o mesmo limite, mas agora à medida que x tende para menos infinito, obtemos exatamente a mesma assíntota (veja Figura 13). Na realidade esta função apresenta outra assíntota: uma assíntota vertical, $x = -\sqrt[3]{3} \approx -1.44$.

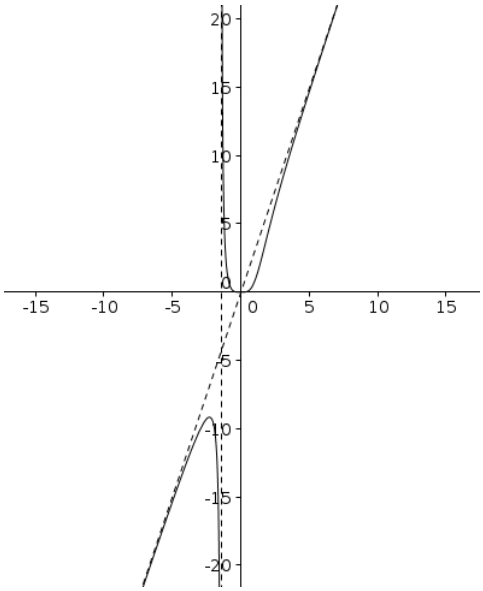


Figura 13: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{3x^4}{x^3+3}$.

3 Continuidade

No Exemplo 2.4 apareceu a noção de continuidade. Vejamos agora a seguir a sua definição.

Definição 3.1 *Uma função $f(x)$ é **contínua em um ponto x_0** se, e somente se, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Esta definição pode ser usada para averiguar se uma função é contínua em um ponto. Para isso determinamos

1. se $f(x_0)$ existe,
2. se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, e finalmente,
3. se os resultados dos itens 1. e 2. são iguais, isto é, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemplo 3.2 *Para verificar se as seguintes funções são contínuas no ponto $x = 1$, usamos os três passos indicados acima. Se pelo menos um deles não for satisfeito, então a função não é contínua nesse ponto.*

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \\ 4, & x = 1 \end{cases}$

Assim, para

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ *temos que* f *não está definida no ponto* $x = 1$*, ou seja,* $f(1)$ *não existe. Portanto,* f *não é contínua em* $x = 1$ *(veja Figura 14);*

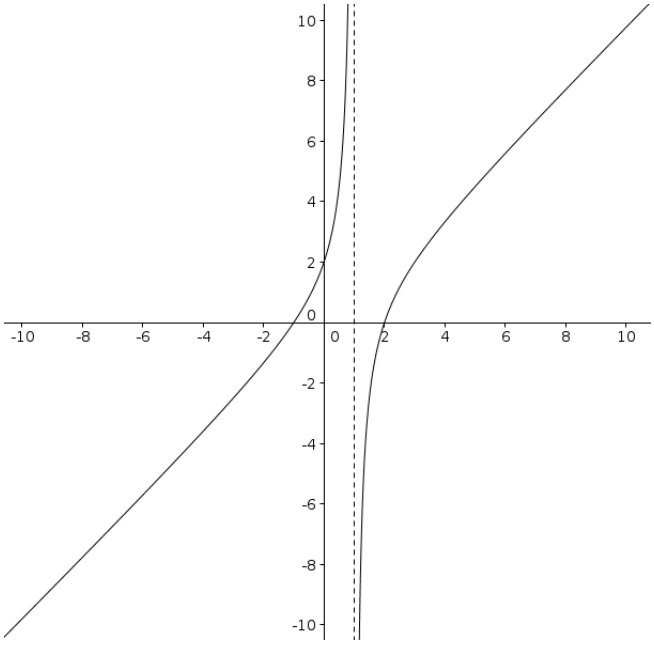


Figura 14: Gráfico da função $f(x)$.

(b) para $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ *temos que* $g(1) = 2$*.*

No entanto, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ *não existe, logo g não é contínua em* $x = 1$ *(veja Figura 15);*

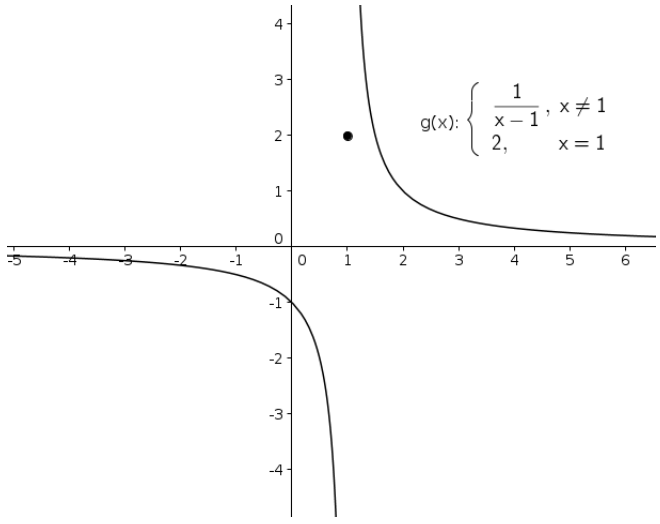


Figura 15: Gráfico da função $g(x)$.

(c) para $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$ *temos que* $h(1) = 4$.

Também temos que $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+2 = 1+2 = 3$. *No entanto,* $h(1) \neq \lim_{x\to 1} h(x)$*, portanto* $h(x)$ *não é contínua em* $x = 1$ *(veja Figura 16).*

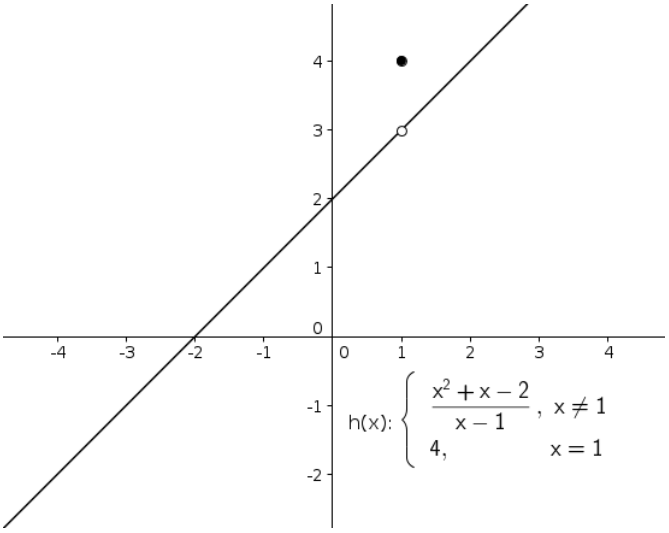


Figura 16: Gráfico da função $h(x)$.

4 Derivadas

A derivada de uma função real, $y = f(x)$, mede a taxa de variação de y com respeito à variação de x. Com o auxílio de um exemplo, iremos introduzir a noção de derivada de uma função em um ponto usando a noção de reta tangente a uma função em um ponto.

Exemplo 4.1 *Considere a função* $f(x) = -x^2+6$ *e dois pontos do gráfico da função,* $A(2,2)$ *e* $B(x,-x^2+6)$*. Note que B é um ponto arbitrário de* $f(x)$*. Existe uma única reta que passa simultaneamente por A e B cuja inclinação é definida por*

$$m' = \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{(-x^2+6)-(-2^2+6)}{x-2} = \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -x-2.$$

Se tomarmos o limite de m' *à medida que x se aproxima de 2 por valores inferiores ou superiores a 2, então a inclinação da reta secante AB se aproxima da inclinação da reta t, tangente a* f *no ponto A. Na Figura 17 podemos ver justamente isso, à medida que x se aproxima de 2 por valores inferiores, ou seja B se aproxima de A pela esquerda, a reta secante AB se aproxima da reta t, tangente a* f *no ponto A. Assim, o limite*

$$\lim_{x\to 2} m' = \lim_{x\to 2} -x-2 = -4,$$

corresponde à inclinação da reta tangente t. A este limite chamamos de ***derivada de f em 2*** *e representamos por* $f'(2)$.

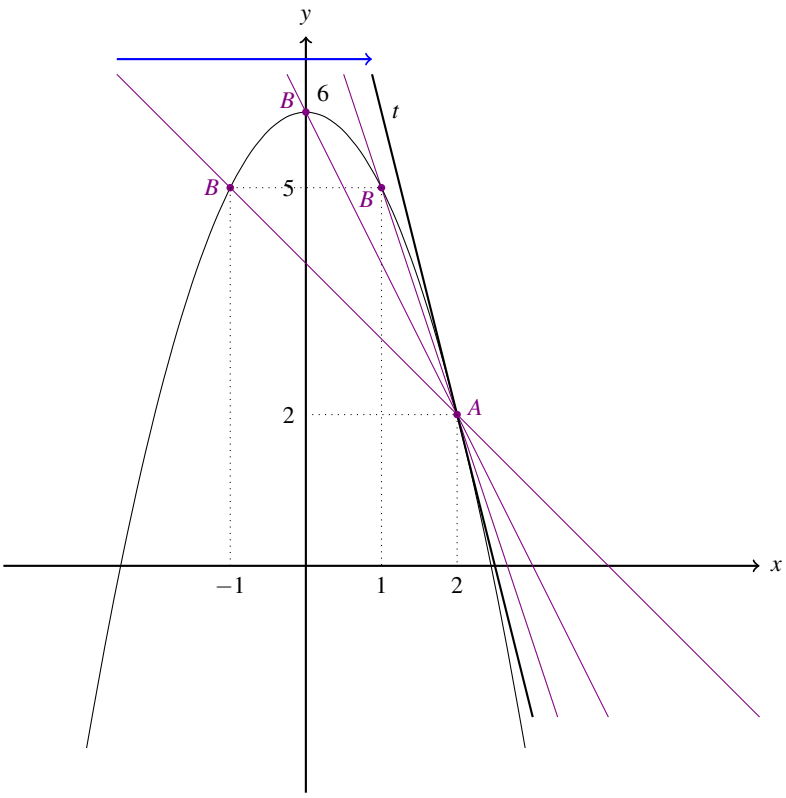


Figura 17: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 6$, das retas secantes AB e da reta tangente t.

A seguir fazemos uma generalização do que foi exposto no Exemplo 4.1. Seja f uma função qualquer. Considere dois números distintos, x e u e pontos do gráfico de f, $X(x, f(x))$ e $U(u, f(u))$.

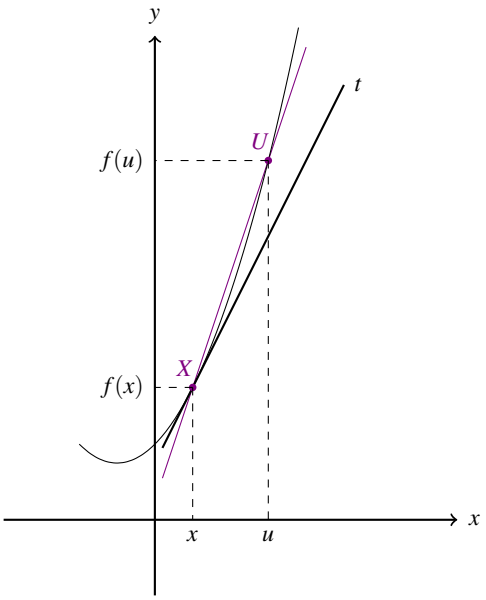


Figura 18: Gráfico da função $f(x)$, da reta secante XU e da reta tangente t.

Existe uma única reta que passa por X e U (ver Figura 18) com inclinação (ou declive, ou gradiente) definida como segue

$$m' = \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = \frac{\text{variação em } y}{\text{variação em } x}. \tag{3}$$

Fixando o x e deixando o u tender para x, ter-se-á que o ponto U tenderá para o ponto X e como no Exemplo 4.1 a reta secante XU tenderá para a reta tangente a f em x, t. Note que u pode aproximar-se de x por valores superiores ou por valores inferiores a x, mas nunca u pode ser igual a x pois para $u = x$ obtemos uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Assim,

$$\lim_{u \to x} m' = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

corresponde à inclinação da reta tangente a f em x.

Definição 4.2 *Seja f uma função e m' a inclinação da reta secante XU como definido em (3). Se m' possui um limite finito à medida que u tende para x, então diz-se que f é* ***diferenciável em x*** *e que o número*

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \tag{4}$$

é denominado a ***derivada de f em x****. Ao processo de calcular $f'(x)$ chamamos de* ***diferenciação****. Diz-se que f é diferenciável, se f for diferenciável em x para todo o x em D_f.*

Portanto em termos geométricos, se f é diferenciável em x, então à medida que u tende para x a reta XU desloca-se ao encontro da reta tangente t (ver Figura 18). Assim, $f'(x)$ mede a inclinação da reta tangente a f em x, t.

Para o cálculo de algumas derivadas, a definição de derivada dada por (4) não é a mais apropriada. Seja $h = u - x$, a distância entre u e x , então quando $u \to x$, $h \to 0$ e $u = x + h$. Assim, a definição de derivada, (4), pode ser reescrita como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5}$$

Exemplo 4.3 *Dada a parábola de equação $f(x) = x^2 - x - 6$, vamos determinar*

(a) a inclinação da reta tangente à curva $f(x)$ no ponto (x_1, x_2);

(b) a equação da reta tangente à curva $f(x)$ no ponto $P(2, -4)$.

(a) Para obtermos a inclinaçcão da reta tangente a f em (x_1, x_2) usa-se a Equação (3). Assim temos que

$$\begin{aligned} m' &= \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= \frac{x^2 - x - 6 - x_1^2 + x_1 + 6}{x - x_1} \\ &= \frac{(x - x_1)(x + x_1) - (x - x_1)}{x - x_1} \\ &= \frac{(x - x_1)(x + x_1 - 1)}{x - x_1} \\ &= x + x_1 - 1. \end{aligned}$$

Calculando agora o limite de m' à medida que x tende para x_1, temos que

$$\lim_{x \to x_1} m' = \lim_{x \to x_1} x + x_1 - 1 = 2x_1 - 1.$$

Logo a inclinação da reta tangente a f em (x_1, x_2) é $2x_1 - 1$.

(b) A equação de uma reta é dada por $y - f(x_1) = m(x - x_1)$, onde $(x_1, f(x_1))$ é um ponto da reta e m é a inclinação da reta (também conhecida como coeficiente angular da reta). Como estamos interessados em calcular a reta tangente a f em $P(2, -4)$, basta substituir x_1 por 2 e $f(x_1)$ por -4 na equação da reta. Logo usando a inclinação da reta calculada no item anterior obtemos

$$y - (-4) = (2 \cdot 2 - 1)(x - 2),$$

que simplificando obtemos a equação procurada

$$y = 3x - 10,$$

conforme Figura 19.

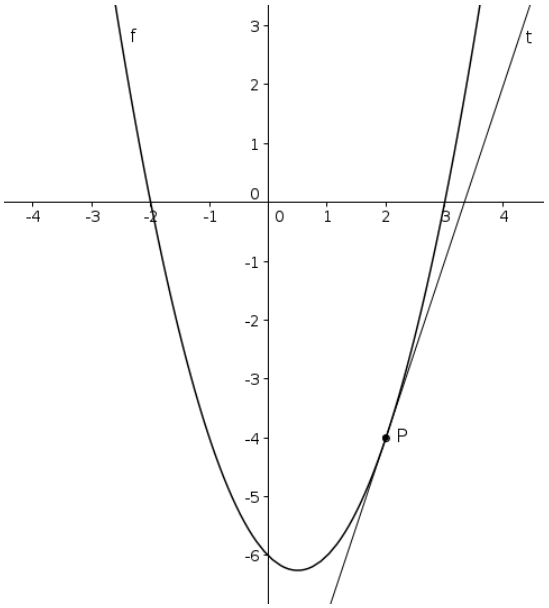


Figura 19: Gráfico da função $f(x)$ e da reta tangente à $f(x)$ no ponto $P(2,-4)$.

Exemplo 4.4 *Dada a função $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$, vamos determinar $f'(-1)$ pela definição de derivada. Assim, pela definição temos*

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+3x-2-(2(-1)^2+3(-1)-2)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+3x+1}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{(2x+1)(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} 2x+1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Como já foi mencionado na definição de derivada de uma função f em um ponto, esta pode ser representada por $f'(x)$, mas existem outras notações: estas são $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ e $D_x f(x)$.

Exemplo 4.5 *Dada a função real $f(x) = x^3 - 2x$, vamos determinar $f'(x)$. Usando a definição de derivada*

obtemos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{u\to x} \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \\
&= \lim_{u\to x} \frac{u^3-2u-(x^3-2x)}{u-x} \\
&= \lim_{u\to x} \frac{u^3-x^3-2(u-x)}{u-x} \\
&= \lim_{u\to x} \frac{(u-x)(u^2+ux+x^2)-2(u-x)}{u-x} \\
&= \lim_{u\to x} \frac{(u-x)(u^2+ux+x^2-2)}{u-x} \\
&= \lim_{u\to x} u^2+ux+x^2-2 \\
&= 3x^2-2.
\end{aligned}
$$

4.1 Derivadas Laterais

Considere a seguinte função

$$
f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ x+2 & x > 2, \end{cases}
$$

representada na Figura 20.

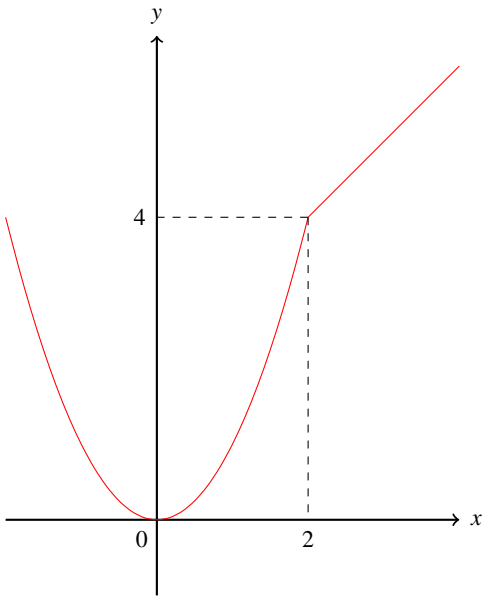


Figura 20: Gráfico da função $f(x)$.

Vejamos se $f(x)$ admite derivada em $x=2$. Para isso, calcularemos os limites

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}.$$

Se estes limites existirem e forem iguais, então dir-se-á que $f(x)$ possui derivada em $x=2$. Assim,

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}1=1 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}x+2=4.$$

Como estes dois limites não são iguais, então

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

não existe e, portanto, $f(x)$ não possui derivada em $x=2$.

Definição 4.6 *Sejam $f(x)$ uma função real de variável real e x um ponto em D_f. Então diz-se que*

(a) f é diferenciável à esquerda de x se

$$\lim_{u\to x^-}\frac{f(u)-f(x)}{u-x}$$

*existe e é finito. Este limite é chamado de **derivada lateral à esquerda de x**, representada por $f'(x^-)$;*

(b) f é diferenciável à direita de x se

$$\lim_{u\to x^+}\frac{f(u)-f(x)}{u-x}$$

*existe e é finito. Este limite é chamado de **derivada lateral à direita de x**, representada por $f'(x^+)$;*

(c) se as derivadas laterais existem e são iguais em x, temos que a função é diferenciável x e o seu valor é igual ao das derivadas laterais,

$$f'(x)=f'(x^-)=f'(x^+).$$

Exemplo 4.7 *Considere a função definida por*

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, & x<1,\\ \\ 3x-4, & x\geq 1,\end{cases}$$

vamos determinar $f'(1^+)$ e $f'(1^-)$. Usando a definição obtemos

$$\begin{aligned}f'(1^+)&=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-4-(-1)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1^+}\frac{3(x-1)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1^+}3\\ &=3\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^-1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1-2x-(-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-2(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} -2 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Como $f'(1^+) \neq f'(1^-)$*, então* f *não é diferenciável em* $x = 1$.

Até ao presente momento, vimos como determinar a derivada de uma função usando a definição de derivada. Na próxima seção apresentaremos regras de derivação que nos permitirão determinar as derivadas sem recorrer ao uso da definição.

4.2 Regras de Derivação

As Tabelas 4 e 5 apresentam algumas regras de derivação e derivadas de funções, respectivamente. Estas podem ser demonstradas usando a definição de derivada. Aqui iremos demonstrar apenas algumas derivadas e regras de derivação.

Tabela 4: Regras de derivação

$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x)\neq 0$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
$f(g(x))'$	$f'(g(x))g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Das regras de derivação iremos demonstrar apenas a regra do produto. Assim, usando a definição de

Tabela 5: Resumo de derivadas de funções

Função	Derivada
b	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

derivada e propriedades de limites, obtemos

$$\begin{aligned}
(f(x)\cdot g(x))' &= \lim_{u\to x}\frac{f(u)\cdot g(u)-f(x)\cdot g(x)}{u-x}\\
&= \lim_{u\to x}\frac{f(u)g(u)-f(x)g(u)+f(x)g(u)-f(x)g(x)}{u-x}\\
&= \lim_{u\to x}\left(\frac{f(u)-f(x)}{u-x}\cdot g(u)+f(x)\cdot\frac{g(u)-g(x)}{u-x}\right)\\
&= \lim_{u\to x}\frac{f(u)-f(x)}{u-x}\cdot\lim_{u\to x}g(u)+\lim_{u\to x}f(x)\cdot\lim_{u\to x}\frac{g(u)-g(x)}{u-x}\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

□

Vamos agora demonstrar que a derivada de x^n é nx^{n-1}. Assim, usando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{u\to x}\frac{u^n-x^n}{u-x}\\
&= \lim_{u\to x}\frac{(u-x)(u^{n-1}+u^{n-2}x+u^{n-3}x^2+\cdots+u^2x^{n-3}+ux^{n-2}+x^{n-1})}{u-x}\\
&= \lim_{u\to x}u^{n-1}+u^{n-2}x+u^{n-3}x^2+\cdots+u^2x^{n-3}+ux^{n-2}+x^{n-1}\\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

O caso da demonstração da derivada de $\operatorname{sen} x$ é mais complicado. Além de usarmos a definição de derivada, para esta demonstração também precisaremos da identidade

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1. \tag{6}$$

Assim, pela definição temos

$$(\operatorname{sen} x)'=\lim_{u\to x}\frac{\operatorname{sen} u-\operatorname{sen} x}{u-x}. \tag{7}$$

Para podermos resolver este limite precisamos de transformar o numerador. Para tal considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} u=a+b, \\ x=a-b. \end{cases} \tag{8}$$

Substituindo u e x por (8) no numerador do limite e simplificando, este transforma-se em

$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a-\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a=2\operatorname{sen} b\cos a. \tag{9}$$

Resolvendo o sistema (8) para a e b e substituindo estes em (9), obtemos

$$2\operatorname{sen} b\cos a=2\operatorname{sen}\left(\frac{u-x}{2}\right)\cos\left(\frac{u+x}{2}\right).$$

Assim,

$$\operatorname{sen} u-\operatorname{sen} x=2\operatorname{sen}\left(\frac{u-x}{2}\right)\cos\left(\frac{u+x}{2}\right)$$

e portanto, o limite (7) fica igual a

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)' &= \lim_{u\to x}\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{u-x}{2}\right)\cos\left(\frac{u+x}{2}\right)}{u-x} \\ &= \lim_{u\to x}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u-x}{2}\right)\cos\left(\frac{u+x}{2}\right)}{\frac{u-x}{2}} \\ &= \lim_{u\to x}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u-x}{2}\right)}{\frac{u-x}{2}}\cdot\lim_{u\to x}\cos\left(\frac{u+x}{2}\right) \\ &= \cos x.\end{aligned}$$

Note que na terceira igualdade usamos a identidade (7). □

Usaremos as informações nas Tabelas 4 e 5 para resolver os seguintes exemplos.

Exemplo 4.8 *Vamos determinar a derivada das seguintes funções:*

$$\textit{(a) } f(x)=2x^3-4x^2+x, \quad \textit{(b) } g(x)=\frac{1}{x^2}, \quad \textit{(c) } h(x)=\sqrt{x}.$$

(a) Assim, $f'(x)=3\cdot 2x^{3-1}-2\cdot x^{2-1}+1\cdot x^{1-1}=6x^2-8x+1$.

(b) Para calcular esta derivada vamos reescrever $g(x)$ *como segue* $g(x)=x^{-2}$. *Assim, temos que* $g'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$.

(c) Aqui também vamos reescrever $h(x)$. Assim para $h(x) = x^{\frac{1}{2}}$, temos $h'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Usando a definição de derivada, podemos demonstrar a seguinte regra de derivação para funções compostas.

Teorema 4.9 (Regra da Cadeia) *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais tal que $Im(g) \subset D(f)$. Se existem $f'(g(x_0))$ e $g'(x_0)$, então $f \circ g$ é derivável em x_0 e $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.*

Exemplo 4.10 *Vamos usar a regra da cadeia para calcular a derivada das seguintes funções compostas:*

$$(a)\ h(x) = \sqrt{x^2+2}, \quad (b)\ h(x) = \cos(x^2) \quad e \quad (c)\ h(x) = (x^4-1)^{40}.$$

(a) Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2+2$, então $h(x) = f(g(x))$. Como $x^2+2 > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, então pela regra da cadeia temos que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ e portanto,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2}(g(x))^{-\frac{1}{2}} g'(x) \\ &= \frac{1}{2}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}}(2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}. \end{aligned}$$

(b) Sejam $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2$, então $h(x) = f(g(x))$. Como $Im(g) = \mathbb{R}_0^+ \subset D(f) = \mathbb{R}$ e, f e g são ambas diferenciáveis em $g(x)$ e x, respectivamente, então pela regra da cadeia $h'(x) = f'(g(x))(g'(x))$ e logo

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\operatorname{sen}(g(x))g'(x) \\ &= -\operatorname{sen}(x^2)(2x) \\ &= -2x\operatorname{sen}(x^2). \end{aligned}$$

(c) Sejam $f(x) = x^{40}$ e $g(x) = x^4 - 1$, então $h(x) = f(g(x))$. Como $Im(g) = [-1, +\infty[\subset D(f) = \mathbb{R}$ e, f e g são ambas diferenciáveis em $g(x)$ e x, respectivamente, então pela regra da cadeia temos que $h'(x) = f'(g(x))(g'(x))$, portanto

$$\begin{aligned} h'(x) &= 40(g(x))^{39} g'(x) \\ &= 40(x^4-1)^{39}(4x^3) \\ &= 160x^3(x^4-1)^{39}. \end{aligned}$$

Para determinarmos as fórmulas das derivadas de $e^{u(x)}$, $\ln u(x)$, $a^{u(x)}$ e $\log_a u(x)$, usaremos a regra da cadeia e as fórmulas na Tabela 5. Assim,

$$\frac{d}{dx}e^{u(x)} = u'(x)e^{u(x)} \tag{10}$$

e

$$\frac{d}{dx}\ln u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{11}$$

Para determinarmos a derivada de $a^{u(x)}$, considere $a^{u(x)} = \mathrm{e}^{\ln a^{u(x)}} = \mathrm{e}^{u(x)\ln a}$. Usando a regra da cadeia e a Equação (10), obtemos a derivada de $a^{u(x)}$. Assim,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{u(x)\ln a} = u'(x)\ln a\,\mathrm{e}^{u(x)\ln a} = u'(x)\ln a\,\mathrm{e}^{\ln a^{u(x)}} = a^{u(x)}\ln a\,u'(x).$$

Quanto à derivada de $\log_a u(x)$, considere $\log_a u(x) = \log_a \mathrm{e}^{\ln u(x)} = \ln u(x)\log_a \mathrm{e}$. Usando a regra da cadeia e a Equação (11), obtemos a derivada de $\log_a u(x)$. Logo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u(x)\log_a \mathrm{e} = \frac{u'(x)}{u(x)}\frac{\ln e}{\ln a} = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}.$$

Exemplo 4.11 *Considere $f(x) = 2x+4$. A sua inversa é*

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}.$$

Usando a regra de derivação na Tabela 4, temos que a derivada de f^{-1} é

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 4.12 *Considere $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x}$. Vamos determinar a sua derivada usando a regra de derivação na Tabela 4. Assim, para começar vamos determinar $f(x)$. Seja*

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\sqrt[4]{x} \\ 2y &= \sqrt[4]{x} \\ (2y)^4 &= x. \end{aligned}$$

Logo, temos que $f(x) = 16x^4$. A derivada de f^{-1} é

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{16\cdot 4\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{x}\right)^3} = \frac{1}{8\sqrt[4]{x^3}}.$$

4.3 Derivadas de ordem superior

O processo de derivação pode ser repetido para uma determinada função, caso a derivada da função seja derivável em cada ponto do seu domínio. O processo de derivação pode ser novamente repetido sobre as derivadas de uma função desde que estas sejam deriváveis em cada ponto de seus domínios. Este processo de repetição da derivação, chamamos de **derivadas de ordem superior**. As derivadas são representadas como segue:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f', \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f'', \quad \ldots \quad , \quad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = f^{(n)}.$$

Exemplo 4.13 *Seja $f(x) = -3x^5 + 4x^2 - 2$. Vamos determinar a derivada de ordem 3 de f. Assim, temos que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= -15x^4 + 8x, \\ f''(x) &= -60x^3 + 8, \\ f'''(x) &= -180x^2. \end{aligned}$$

Exemplo 4.14 *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{x}$. *Vamos determinar* $f^{(n)}(x)$. *Assim, temos que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}, \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

4.4 Aplicações das Derivadas

As derivadas podem ser usadas de diversas formas para estudar uma dada função. Comecemos por ver como a derivada de uma função pode ser usada para determinar se esta é crescente ou decrescente num dado intervalo.

Proposição 4.15 *Seja* $f(x)$ *uma função contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* $]a,b[$, *então*

(a) se $f'(x) > 0$ *para qualquer* $x \in]a,b[$, *então* f *é crescente em* $]a,b[$,

(b) se $f'(x) < 0$ *para qualquer* $x \in]a,b[$, *então* f *é decrescente em* $]a,b[$, *e*

(c) se $f'(x) = 0$ *para qualquer* $x \in]a,b[$, *então* f *é constante em* $]a,b[$.

Exemplo 4.16 *Seja* $f(x) = -x^2 + x$. *Vamos estudar a variação desta função usando a sua derivada. Assim, como*

$$f'(x) = -2x + 1,$$

temos que

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -2x+1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}, \\ f'(x) > 0 &\iff -2x+1 > 0 \iff x < \frac{1}{2}, \\ f'(x) < 0 &\iff -2x+1 < 0 \iff x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com a Proposição 4.15, $f(x)$ *é crescente de* $-\infty$ *até* $\dfrac{1}{2}$ *e decrescente de* $\dfrac{1}{2}$ *até* $+\infty$.

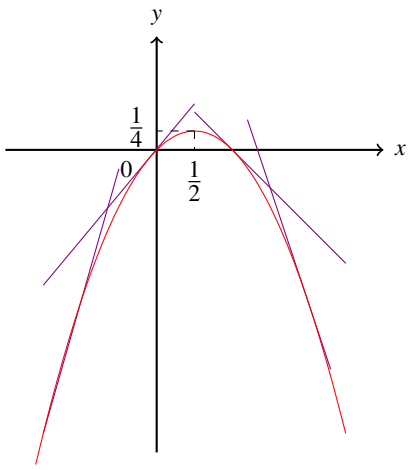


Figura 21: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + x$.

Conforme a Figura 21, podemos ver que no intervalo onde a função é crescente, as tangentes à curva têm inclinação positiva e que no intervalo onde a função decresce, as tangentes à curva têm inclinação negativa. Isso não é surpreendente, visto que as inclinações dessas retas tangentes são dadas pela derivada da função nos pontos tangentes.

Definição 4.17 *Dizemos que c é um **ponto crítico** de uma função f, com c pertencente ao domínio de f,*

(a) se f não é derivável em $x = c$, ou

(b) se f é derivável em c com $f'(c) = 0$.

Exemplo 4.18 *Vamos determinar os intervalos em que a função $f(x) = x^3 - 6x$ é crescente ou decrescente. Além disso, vamos determinar se a função possui pontos críticos. Calculando a derivada de $f(x)$ e igualando a zero iremos obter os pontos críticos. Assim, os pontos críticos são*

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \iff \quad & 3x^2 - 6 = 0 \\ \iff \quad & x = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

O gráfico da derivada de $f(x)$ é uma parábola, $f'(x) = 3x^2 - 6$, conforme ilustrado na Figura 22.

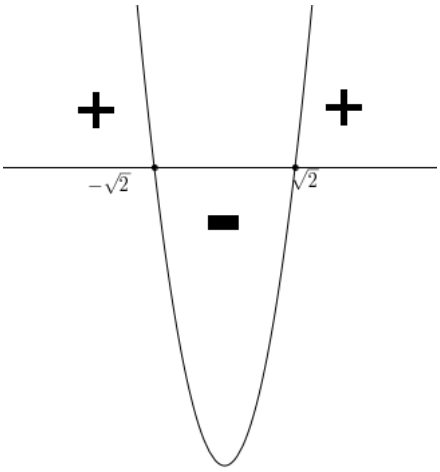


Figura 22: sinais de $f'(x)$.

Da Figura 22 podemos verificar que a função $f(x)$ é crescente para $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$, pois $f'(x) > 0$, e $f(x)$ é decrescente para $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, visto que $f'(x) < 0$.

Exemplo 4.19 *Neste exemplo vamos estudar a variação da função $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3$, ou seja, os intervalos de crescimento e decrescimento. Temos que $f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x(x+2)(x-1)$.*

A Tabela 6 está resumido o sinal da função $f'(x)$. Assim, da tabela podemos ver que a função decresce para $x \in]-\infty, -2[\cup]0, 1[$ e cresce para $x \in]-2, 0[\cup]1, +\infty[$.

Tabela 6: Estudo do sinal de $f'(x)$

x		-2		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{23}{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$

As funções podem possuir máximos ou mínimos locais; estes são pontos em que $f(c) > f(x)$ para todo o x em uma vizinhança de c ou $f(c) < f(x)$ para todo o x em uma vizinhança de c, respectivamente. Com o uso de derivadas é possível determinar se uma função possui máximos ou mínimos locais. Aqui iremos ver dois testes envolvendo derivadas que nos permitem determinar máximos e mínimos.

Teorema 4.20 (Teste da primeira derivada) *Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $]a,b[$ e $c \in]a,b[$. Além disso, suponha que $f(x)$ é derivável em $]a,b[$, exceto talvez em um ponto c. Então*

(a) se $f'(x) > 0$, $\forall x < c$ e $f'(x) < 0$, $\forall x > c$, temos que f tem um máximo local em c;

(b) se $f'(x) < 0$, $\forall x < c$ e $f'(x) > 0$, $\forall x > c$, temos que f tem um mínimo local em c.

De acordo com o Teste da primeira derivada, precisamos de estudar o comportamento do sinal da derivada em torno dos pontos onde $f'(x) = 0$. Esses pontos são os pontos críticos como vimos na Definição 4.17. Vejamos um exemplo da aplicação do Teste da primeira derivada.

Exemplo 4.21 *Vamos determinar se $f(x) = x^3 - 9x + 1$ tem máximos ou mínimos locais. Para começar temos que procurar os pontos críticos da função. Resolvendo $f'(x) = 0$, obtemos*

$$3x^2 - 9 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3},$$

os pontos críticos. Estudando o sinal da derivada em torno desses pontos críticos, obtemos a informação resumida na Tabela 7.

Tabela 7: Estudo do sinal de $f'(x)$

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$6\sqrt{3}+1$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}+1$	$\nearrow$

Assim, da Tabela 7 podemos verificar que $f(x)$ possui um máximo local em $-\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}+1$, e um mínimo local em $\sqrt{3}$, $-6\sqrt{3}+1$.

Vejamos agora o outro teste envolvendo derivadas que nos permite determinar se uma dada função possui máximos ou mínimos.

Teorema 4.22 (Teste da segunda derivada) *Seja $f(x)$ uma função derivável em um intervalo aberto I e $c \in I$ um ponto crítico de f. Se $f''(x)$ existe, e*

(a) $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c, caso contrário

(b) se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

Exemplo 4.23 *Vamos aplicar o Teste da segunda derivada para encontrar os máximos ou mínimos locais da função $f(x) = x^3 - x^2 - 8x$. Começamos por calcular os pontos críticos. Assim, calculando as soluções de $f'(x) = 0$, obtemos dois pontos críticos*

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \Longleftrightarrow (3x+4)(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{4}{3}.$$

Calculando a segunda derivada nos pontos críticos, obtemos

$$f''(2) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = (6x-2)|_{x=2} = 10$$

e

$$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\frac{4}{3}} = (6x-2)|_{x=-\frac{4}{3}} = -10.$$

Como $f''(2) > 0$ e $f''\left(-\frac{4}{3}\right) < 0$, então $f(x)$ tem um mínimo local em $x = 2$, $f(2) = -12$, e um máximo local em $x = -\frac{4}{3}$, $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{176}{27}$, respectivamente.

As derivadas também nos permitem estudar o sentido da curvatura do gráfico de uma função. Vamos tentar intuitivamente achar uma relação entre o sinal da segunda derivada de uma função em um dado intervalo com o sentido da sua curvatura.

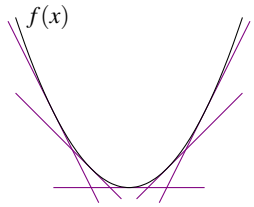


Figura 23: Gráfico da função $f(x)$ e algumas de suas retas tangentes.

Considere a função $f(x)$ com a concavidade voltada para cima como ilustrado na figura 23. Se olharmos as retas tangentes da esquerda para a direita vemos que as inclinações destas estão crescendo, ou seja, $f'(x)$ está crescendo, o que implica que $f''(x) > 0$[1]. Assim, para uma função $f(x)$ com a concavidade voltada para cima, $f'(x)$ é crescente e $f''(x) > 0$.

Vamos agora considerar uma função $f(x)$ com a concavidade voltada para baixo, conforme ilustrado na figura 24.

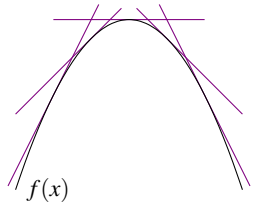


Figura 24: Gráfico da função $f(x)$ e algumas de suas retas tangentes.

Olhando para as retas tangentes da esquerda para a direita vemos que as inclinações destas estão decrescendo, ou seja, $f'(x)$ está decrescendo, o que implica que $f''(x) < 0$[2]. Assim, para uma função $f(x)$ com a concavidade voltada para baixo, $f'(x)$ é decrescente e $f''(x) < 0$.

Portanto, podemos resumir isto como segue.

Proposição 4.24 *Se $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ e duas vezes diferenciável em (a,b), então*

(a) $\forall x \in (a,b)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ *tem a concavidade voltada para cima em* (a,b),

(b) $\forall x \in (a,b)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ *tem a concavidade voltada para baixo em* (a,b).

[1] Se $f'(x)$ está crescendo em um intervalo $]a,b[$, então isto significa que para $x < u$, onde $x,u \in]a,b[$, $f'(u) - f'(x) > 0$, logo como $u - x > 0$, temos que $\frac{f'(u)-f'(x)}{u-x} > 0$, ou seja, $f''(x) > 0$.

[2] Se $f'(x)$ está decrescendo em um intervalo $]a,b[$, então isto significa que para $x < u$, onde $x,u \in]a,b[$, $f'(u) - f'(x) < 0$, logo como $u - x > 0$, temos que $\frac{f'(u)-f'(x)}{u-x} < 0$, ou seja, $f''(x) < 0$.

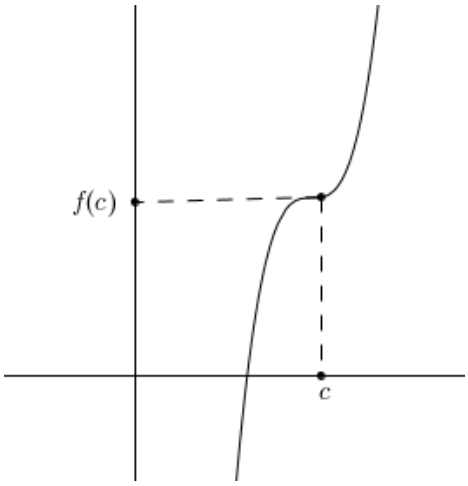


Figura 25: Ponto de inflexão: $(c, f(c))$.

Nos seguintes exemplos vamos determinar o sentido da curvatura e os pontos de inflexão.

Exemplo 4.25 *Considere $f(x) = (x-2)^3$. Vamos começar por determinar a primeira e segunda derivada de $f(x)$. Assim, $f'(x) = 3(x-2)^2$ e $f''(x) = 6(x-2)$. Resolvendo $f''(x) = 0$, obtemos que em $x = 2$ temos um ponto de inflexão. Fazendo o estudo do sinal da segunda derivada, podemos determinar o sentido da curvatura.*

Tabela 8: Estudo do sinal de $f''(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	P.I.	$\cup$

Note que aqui o símbolo $\cap$ significa concavidade voltada para baixo, P.I. significa ponto de inflexão e $\cup$ significa concavidade voltada para cima. Assim, a função tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 2[$ e voltada para cima em $]2, +\infty[$.

Exemplo 4.26 *Considere $f(x) = x^4 - 2x^2$. Para fazer o estudo do sentido da curvatura vamos começar por determinar os pontos de inflexão e em seguida fazer o estudo do sinal da segunda derivada. Assim, $f'(x) = 4x^3 - 4x$ e $f''(x) = 12x^2 - 4$. Resolvendo $f''(x) = 0$, obtemos os pontos de inflexão em $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e em $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Segundo a tabela 9*

Tabela 9: Estudo do sinal de $f''(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

temos que $f(x)$ tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$ *e tem a concavidade voltada para baixo em* $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$.

Podemos ver a regra de l'Hôpital, regra essa que nos permite levantar indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Corolário 4.27 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis perto de $x=a$, $f(a)=g(a)=0$ e $g'(a)\neq 0$, então*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\Longrightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

Este corolário é conhecido como a **regra de l'Hôpital**.

Note que este corolário também é aplicável para $a=\pm\infty$ e pode ser usado para levantar indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Além disso, se f e g são n vezes diferenciáveis perto de $x=a$, se $f^{(j)}(x)$, $g^{(j)}(x)$ tendem para zero à medida que x tende para a, para $j=1,...,n-1$, e se $g^{(n)}(x)\neq 0$ perto de $x=a$, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=\ell\Longrightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

Podemos agora levantar as indeterminações dos exemplos 2.32, 2.34 e 2.37.

Continuação do Exemplo 2.32 *O limite*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$$

produz uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Usando a regra de l'Hôpital obtemos que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\operatorname{sen}x}{1}=-1.$$

Continuação do Exemplo 2.34 *O limite*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}$$

produz uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Usando a regra de l'Hôpital obtemos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x^2}=+\infty.$$

Continuação do Exemplo 2.37 *O limite*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

dá uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Usando a regra de l'Hôpital obtemos

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0^+}-x=0.$$

5 Esboço do gráfico de uma função

Neste momento já estamos equipados para representar o gráfico de funções. Para construirmos o gráfico de uma função, é importante em uma primeira fase determinar

(i) o domínio;

(ii) os pontos de interseção com os eixos;

(iii) os pontos de descontinuidade;

(iv) as simetrias do gráfico (em relação à origem e ao eixo dos y);

(v) as assíntotas do gráfico;

(vi) os intervalos de crescimento e decrescimento, os máximos e mínimos relativos (locais);

(vii) o sentido da concavidade do gráfico, os pontos de inflexão.

Por vezes ainda temos que calcular as coordenadas de mais alguns pontos do gráfico. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.1 *Para esboçar o gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, vamos determinar todas as informações da lista acima.*

(a) ***Domínio***
A função $f(x)$ é um polinômio e portanto tem por domínio $\mathbb{R}$.

(b) ***Pontos de interseção com os eixos***
Resolvendo $f(x) = 0$ obtemos as interseções com o eixo dos x. Assim,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3.$$

Para obter a interseção com o eixo dos y, basta substituir $x = 0$ em $y = f(x)$, logo $y = -6$.

(c) ***Pontos de descontinuidade***
A função $f(x)$ é um polinômio e, portanto, não tem pontos de descontinuidade.

(d) ***Simetrias do gráfico***
Para determinar as simetrias do gráfico de $f(x)$, basta determinar se $f(x)$ é par ou ímpar. Portanto,

$$f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 11(-x) - 6 = -x^3 - 6x^2 - 11x - 6$$

e daqui concluimos que $f(x)$ não é par nem ímpar, pois $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, respectivamente. Se $f(x)$ fosse par, então $f(x)$ teria uma simetria em relação ao eixo dos y e se $f(x)$ fosse ímpar, então $f(x)$ teria uma simetria em relação à origem.

(e) ***Assíntotas do gráfico***

Dado que $f(x)$ está definida para $\mathbb{R}$, então $f(x)$ não possui assíntotas verticais. Vejamos se $f(x)$ possui assíntotas horizontais. Para isso precisamos de estudar o comportamento da função à medida que x tende para $\pm\infty$. Assim,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3-6x^2+11x-6=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^3-6x^2+11x-6=+\infty.$$

Logo $f(x)$ não possui assíntotas horizontais. Finalmente, como

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty,$$

então $f(x)$ também não possui assíntotas oblíquas.

(f) ***Variação da função***

Aqui vamos determinar os intervalos de crescimento e decrescimento, os máximos e mínimos, os pontos de inflexão de $f(x)$, e estudar o sentido da curvatura do gráfico da função. Para começar vamos calcular a primeira e segunda derivada de $f(x)$,

$$f'(x)=3x^2-12x+11, \quad f''(x)=6x-12.$$

Resolvendo $f'(x)=0$ obtemos os pontos críticos. Este são

$$2+\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad e \quad 2-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Resolvendo $f''(x)=0$ obtemos os pontos de inflexão: em $x=2$ temos um ponto de inflexão. A seguinte tabela resume as informações que procuramos.

Tabela 10: Estudo dos sinais de $f'(x)$ e $f''(x)$

x	$-\infty$	1		$2-\frac{\sqrt{3}}{3}$		2		$2+\frac{\sqrt{3}}{3}$		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow\cap$ $-$	$\nearrow\cap$ 0	$\nearrow\cap$ $+$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$ Máx	$\searrow\cap$ $+$	0	$\searrow\cup$ $-$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ Mín	$\nearrow\cup$ $-$	$\nearrow\cup$ 0	$\nearrow\cup$ $+$

Agora podemos desenhar precisamente o gráfico da função $f(x)$.

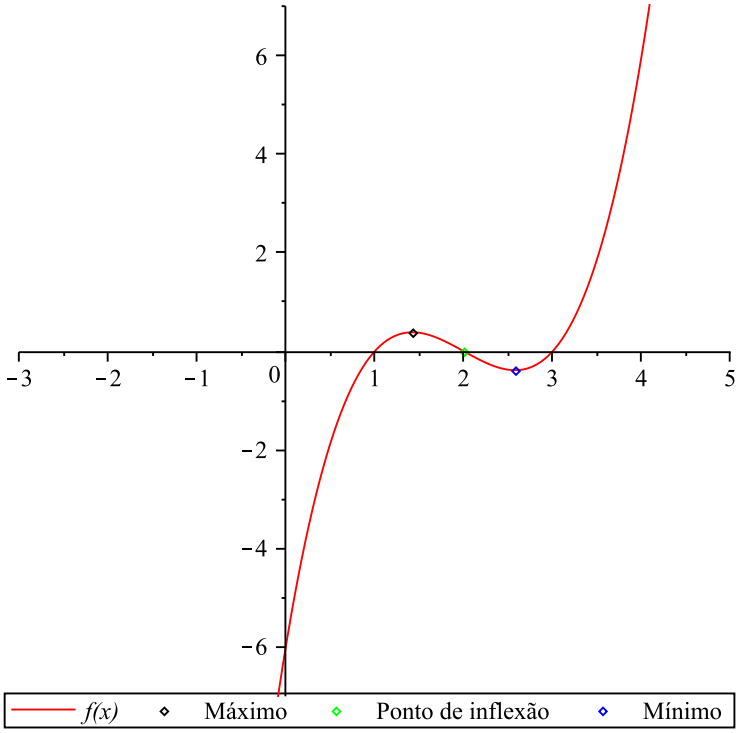


Figura 26: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Exemplo 5.2 *Vamos proceder neste exemplo exatamente do mesmo modo que no exemplo anterior. Considere a função* $g(x) = \frac{x^3}{x^2-9}$.

(a) ***Domínio***

Dado que $g(x)$ *é uma fração, o seu denominador tem que ser diferente de zero. Este é nulo para* $x = \pm 3$*, portanto o domínio de* $g(x)$ *é* $\mathbb{R}\backslash\{-3,3\}$.

(b) ***Pontos de interseção com os eixos***

Resolvendo $g(x) = 0$ *obtemos as interseções com o eixo dos x. Assim,*

$$\frac{x^3}{x^2-9} = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Para obter a interseção com o eixo dos y, basta substituir $x = 0$ *em* $y = g(x)$*, logo* $y = 0$.

(c) ***Pontos de descontinuidade***

A função $g(x)$ *é uma função racional e portanto, é descontínua nos pontos onde não está definida. Conforme vimos anteriormente,* $g(x)$ *não está definida para* $x = \pm 3$*, logo* $g(x)$ *é descontínua em* $x = -3$ *e* $x = 3$.

(d) ***Simetrias do gráfico***

Para determinar as simetrias do gráfico de $g(x)$*, precisamos verificar se* $g(x)$ *é par ou ímpar. Portanto,*

$$g(-x) = \frac{(-x)^3}{-x)^2 - 9} = -\frac{x^3}{x^2-9} = -g(x).$$

Como $g(-x) = -g(x)$, a função é ímpar e portanto, tem uma simetria em relação à origem.

(e) ***Assíntotas do gráfico***

Como $g(x)$ não está definida para $x = -3$ e $x = 3$, precisamos determinar o comportamento de $g(x)$ à medida que x se aproxima destes valores pela direita e pela esquerda. Assim,

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{-27}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x\to -3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{-27}{0^-} = +\infty,$$

logo temos uma assíntota vertical em $x = -3$. Fazendo o mesmo para $x = 3$, temos que

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{27}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{27}{0^+} = +\infty,$$

e portanto, $g(x)$ tem uma assíntota vertical em $x = 3$. Vejamos se $g(x)$ possui assíntotas horizontais. Para isso precisamos de estudar o comportamento da função à medida que x tende para $\pm\infty$. Assim,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = +\infty.$$

Logo $f(x)$ não possui assíntotas horizontais. Finalmente, como

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-9x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{9}{x^2}} = 1 = \quad e$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-9} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 9x}{x^2-9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x}{x^2-9} = 0,$$

então $y = x$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de $g(x)$.

(f) ***Variação da função***

Aqui vamos determinar os intervalos de crescimento e decrescimento, os máximos e mínimos, os pontos de inflexão de $g(x)$, e estudar o sentido da curvatura do gráfico da função. Para começar vamos calcular a primeira e segunda derivada de $g(x)$,

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2-9) - x^3(2x)}{(x^2-9)^2} = \frac{x^4 - 27x^2}{(x^2-9)^2} \quad e$$

$$g''(x) = \frac{(4x^3 - 54x)(x^2-9)^2 - (x^4 - 27x^2)2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4} = \frac{18x^3 + 486x}{(x^2-9)^3}.$$

Resolvendo $g'(x) = 0$ obtemos os pontos críticos. Este são

$$-3\sqrt{3}, \quad 0 \quad e \quad 3\sqrt{3}.$$

Resolvendo $g''(x) = 0$ obtemos os pontos de inflexão: em $x = 0$ temos um ponto de inflexão. A seguinte tabela resume as informações que procuramos.

Tabela 11: Estudo dos sinais de $g'(x)$ e $g''(x)$

x	$-\infty$	$-3\sqrt{3}$		-3		0		3		$3\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	S. S.	$-$	0	$-$	S. S.	$-$	0	$+$
$g''(x)$	$-$	$-$	$-$	S. S.	$+$	0	$-$	S. S.	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$\nearrow \cap$ $-$	$-\frac{9\sqrt{3}}{2}$ Máx	$\searrow \cap$ $-$	S. S.	$\searrow \cup$ $+$	0	$\searrow \cap$ $-$	S. S.	$\searrow \cup$ $+$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$ Mín	$\nearrow \cup$ $+$

Agora podemos desenhar precisamente o gráfico da função $g(x)$.

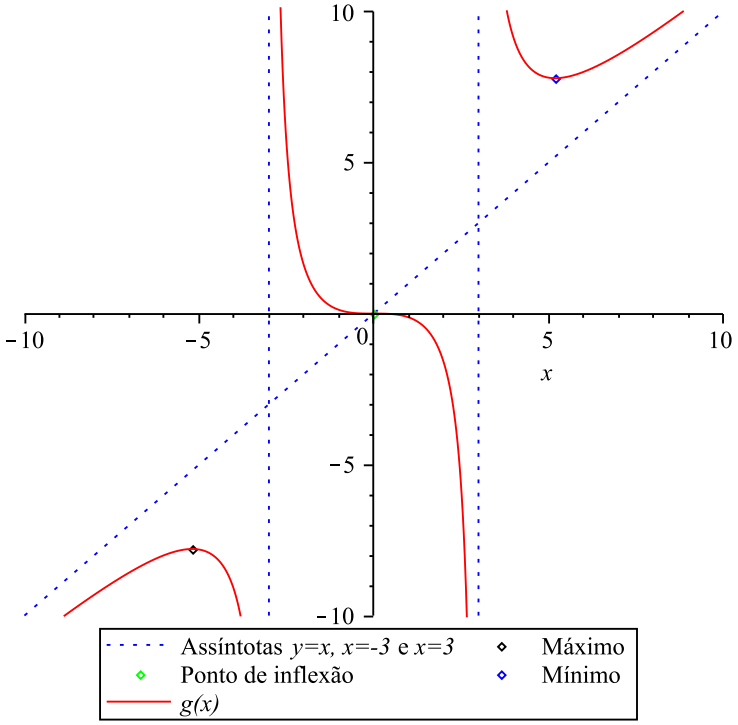


Figura 27: Gráfico da função $g(x) = \frac{x^3}{x^2-9}$.

Referências

[1] DEVLIN, K., O Gene da Matemática, Editora Record (2004).

[2] EVES, H., *O século XXVIII e a exploração do Cálculo*, Introdução à História da Matemática, Editora Unicamp (2004).

[3] FLEMMING, D.M., Cálculo A, Editora Pearson (2006).

[4] GUIDORIZZI, H.L., Um curso de Cálculo - Volume 1, Editora LTC (2001).

[5] NETO, A.C.M., Fundamentos de Cálculo, Editora SBM (2015).

[6] STEWART, J., Cálculo - Volume 1, Cengage (2013).

[7] THOMAS, G.B., Cálculo - Volume 1, Editora Pearson (2008).

Anexo A - A Escala de Matemática para o 3° ano do Ensino Médio

A escala de Matemática para o 3º ano do Ensino Médio

(continua)

MATEMÁTICA – 3º ANO DO ENSINO MÉDIO		
Nível		Descrição do nível
1	225-250	**Espaço e forma** Não existem itens âncora para esse nível. **Grandezas e medidas** Não existem itens âncora para esse nível. **Números e operações; álgebra e funções** Não existem itens âncora para esse nível. **Tratamento de informações** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de associar uma tabela de até duas entradas a informações apresentadas textualmente ou em um gráfico de barras ou de linhas.
2	250-275	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano localizados no primeiro quadrante. **Grandezas e medidas** Não existem itens âncora para esse nível. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer os zeros de uma função dada graficamente. Também é bem provável que os alunos determinem: o valor de uma função afim, dada sua lei de formação; um resultado utilizando o conceito de progressão aritmética. **Tratamento de informações** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de associar um gráfico de setores a dados percentuais apresentados textualmente ou em uma tabela.

(continuação)

MATEMÁTICA – 3º ANO DO ENSINO MÉDIO		
Nível		Descrição do nível
3	275-300	**Espaço e forma** Não existem itens âncora para esse nível. **Grandezas e medidas** Não existem itens âncora para esse nível. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer: o valor máximo de uma função quadrática representada graficamente; em um gráfico, o intervalo no qual a função assume valor máximo. Também podem ser capazes de determinar: por meio de proporcionalidade o gráfico de setores que representa uma situação com dados fornecidos textualmente; o quarto valor em uma relação de proporcionalidade direta a partir de três valores fornecidos em uma situação do cotidiano; um valor reajustado de uma quantia a partir de seu valor inicial e do percentual de reajuste. Além disso, é provável que resolvam problemas utilizando operações fundamentais com números naturais. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.
4	300-325	**Espaço e forma** Não existem itens âncora para esse nível. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de resolver problemas envolvendo área de uma região composta por retângulos a partir de medidas fornecidas em texto e figura. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de função a partir de valores fornecidos em um texto. Além disso, podem ser capazes de determinar: a lei de formação de uma função linear a partir de dados fornecidos em uma tabela; a solução de um sistema de duas equações lineares; um termo de progressão aritmética, dada sua forma geral; a probabilidade da ocorrência de um evento simples. Também é provável que resolvam: problemas utilizando proporcionalidade direta ou inversa, cujos valores devem ser obtidos a partir de operações simples; problemas de contagem usando princípio multiplicativo. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.

(continuação)

MATEMÁTICA – 3º ANO DO ENSINO MÉDIO		
Nível		Descrição do nível
5	325-350	**Espaço e forma** Não existem itens âncora para esse nível. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar medidas de segmentos por meio da semelhança entre dois polígonos. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar: o valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada; o percentual que representa um valor em relação a outro; o valor de uma expressão algébrica; a solução de um sistema de três equações sendo uma com uma incógnita, outra com duas e a terceira com três incógnitas. Também é provável que sejam capazes de resolver problema envolvendo: divisão proporcional do lucro em relação a dois investimentos iniciais diferentes; operações, além das fundamentais, com números naturais; a relação linear entre duas variáveis para a determinação de uma delas; probabilidade de união de eventos. Além disso, é provável que os alunos sejam capazes de avaliar o comportamento de uma função representada graficamente, quanto ao seu crescimento. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.
6	350-375	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano e localizados em quadrantes diferentes do primeiro. É provável também que consigam associar um sólido geométrico simples a uma planificação usual dada. Além disso, há uma grande probabilidade de que resolvam problemas envolvendo Teorema de Pitágoras, para calcular a medida da hipotenusa de um triângulo pitagórico, a partir de informações apresentadas textualmente e em uma figura. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar: a razão de semelhança entre as imagens de um mesmo objeto em escalas diferentes; o volume de um paralelepípedo retângulo, dada sua representação espacial. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar os zeros de uma função quadrática, a partir de sua expressão algébrica. Além disso, é provável que resolvam problemas de porcentagem envolvendo números racionais não inteiros. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.

(continuação)

MATEMÁTICA – 3º ANO DO ENSINO MÉDIO		
Nível		**Descrição do nível**
7	375-400	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar: a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, por meio de razões trigonométricas, fornecendo ou não as fórmulas; com o uso de do teorema de Pitágoras, a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo não pitagórico. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar a área de um polígono não convexo composto por retângulos e triângulos, a partir de informações fornecidas na figura. Além disso, é provável que consigam resolver problemas: por meio de semelhança de triângulos sem apoio de figura; envolvendo perímetros de triângulos equiláteros que compõem uma figura. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer gráfico de função a partir de informações sobre sua variação descritas em um texto; os zeros de uma função quadrática em sua forma fatorada; gráfico de função afim a partir de sua representação algébrica; a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos; as raízes de um polinômio apresentado na sua forma fatorada. Além disso, é provável também que os alunos sejam capazes de determinar os pontos de máximo ou de mínimo a partir do gráfico de uma função; o valor de uma expressão algébrica envolvendo módulo; o ponto de interseção de duas retas; a expressão algébrica que relaciona duas variáveis com valores dados em tabela ou gráfico; a maior raiz de um polinômio de 2º grau. Também é provável que os alunos sejam capazes de resolver problemas: para obter valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada; que envolvam uma equação de 1º grau que requeira manipulação algébrica; envolvendo um sistema linear, dadas duas equações a duas incógnitas; usando permutação; utilizando probabilidade, envolvendo eventos independentes. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.

(continuação)

MATEMÁTICA – 3º ANO DO ENSINO MÉDIO		
Nível		Descrição do nível
8	400-425	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer a proporcionalidade dos elementos lineares de figuras semelhantes. Também é provável que sejam capazes de determinar: uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o Teorema de Pitágoras; a equação de uma circunferência, dados o centro e o raio; a quantidade de faces, vértices e arestas de um poliedro por meio da relação de Euler. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo, com apoio de figura. Podem também ser capazes de associar um prisma a uma planificação usual dada. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar a área da superfície de uma pirâmide regular; o volume de um paralelepípedo, dadas suas dimensões em unidades diferentes; o volume de cilindros. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer: o gráfico de uma função trigonométrica da forma y=sen(x); um sistema de equações associado a uma matriz. Também é provável que sejam capazes de determinar: a expressão algébrica associada a um dos trechos do gráfico de uma função definida por partes; o valor máximo de uma função quadrática a partir de sua expressão algébrica e das expressões que determinam as coordenadas do vértice; a distância entre dois pontos no plano cartesiano. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema: usando arranjo; envolvendo a resolução de uma equação do 2º grau sendo dados seus coeficientes. Além disso, existe uma grande probabilidade de que sejam capazes de interpretar o significado dos coeficientes da equação de uma reta, a partir de sua forma reduzida. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.

(conclusão)

MATEMÁTICA – 3º ANO DO ENSINO MÉDIO		
Nível		Descrição do nível
9	425-450	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer a equação que representa uma circunferência, dentre diversas equações dadas. Também é provável que sejam capazes de determinar o centro e o raio de uma circunferência a partir de sua equação geral. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problemas envolvendo relações métricas em um triângulo retângulo que é parte de uma figura plana dada. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar o volume de pirâmides regulares. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema envolvendo: áreas de círculos e polígonos; semelhança de triângulos com apoio de figura na qual os dois triângulos apresentam ângulos opostos pelos vértices; envolvendo cálculo de volume de cilindro. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de uma função exponencial do tipo $f(x)=10x+1$; o gráfico de uma função logarítmica dada a expressão algébrica da sua função inversa e seu gráfico. Também é provável que sejam capazes de determinar a expressão algébrica correspondente a uma função exponencial, a partir de dados fornecidos em texto ou gráfico; a inversa de uma função exponencial dada, representativa de uma situação do cotidiano; inclinação ou coeficiente angular de retas a partir de suas equações; um polinômio na forma fatorada, dadas as suas raízes. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.
10	450-475	**Espaço e forma** Não existem itens âncora para esse nível. **Grandezas e medidas** Não existem itens âncora para esse nível. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar a solução de um sistema de três equações lineares, a três incógnitas, apresentado na forma matricial escalonada. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.

Fonte: INEP