Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Estudo de vetores no ensino médio para resolução de problemas

Josimilson de Freitas Chalega

Orientadora: Prof^{a}. Dra. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

São José dos Campos

junho, 2018

Título: *Estudo de vetores no ensino médio para resolução de problemas*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
junho, 2018

Chalega, Josimilson de Freitas

Estudo de vetores no ensino médio para resolução de problemas, Josimilson de Freitas Chalega – São José dos Campos, 2018.

LXIX, 69f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Study of vectors in high school for problem solving

Geometria analítica; Vetores; Operações; Ensino Médio

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

JOSIMILSON DE FREITAS CHALEGA

ESTUDO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Presidente da banca: Profª. Dra. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

Banca examinadora:

Profa. Dra. Claudia Aline de Mesquita

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Prof. Dr. Marcos William da Silva Oliveira

Data da Defesa: 28 de junho de 2018

"A falta de estudo hoje é a certeza da miséria do seu futuro, inútil será sua vida"
Josimilson de Freitas Chalega

AGRADECIMENTOS

A Deus criador do Céu e da Terra na qual não sou nada sem sua misericórdia, obrigado Senhor por providenciar tudo e colocar pessoas maravilhosas na minha vida.

A minha Profª. Dra. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz, pela orientação, dedicação, paciência, incentivo, sabedoria e carinho, os quais foram fundamentais para a realização deste trabalho e servem de exemplo de como ser uma excelente professora mesmo sabendo que nesse processo sua família foi agraciada por Deus pelo nascimento de seu filho Rafael, obrigado.

Aos professores do PROFMAT – UNIFESP-SJC, que contribuíram com meu desenvolvimento e enriqueceram meus conhecimentos durante este percurso.

Aos colegas do PROFMAT da turma de 2016, pelo companheirismo, pelos momentos de estudo e aprendizado e, principalmente, pela amizade construída durante o curso, a qual espero que dure para sempre. Aprendi a admirar cada um de vocês!

Aos meus alunos, que mesmo sem saberem me ensinaram tanto e fizeram nascer em mim o sentimento de ser cada vez melhor como professor e como pessoa.

Ao Colégio Alcance COC e Escola Estadual Prof. João Cruz e suas respectivas equipes que me apoiaram e acreditaram que seria possível realizar este trabalho.

A todos que acompanharam e cujos nomes não aparecem, que me ajudaram, que me ensinaram e incentivaram, direta ou indiretamente, contribuindo assim, para que eu pudesse concluir mais esta etapa dos meus estudos; meu muito obrigado.

Finalmente à minha esposa Bruna que acompanhou todos os desafios, alegria e choro, nunca deixou de acreditar que eu iria conseguir, a minha filha Heloísa e ao meu filho Bernardo cuja presença é alegria e paz em minha vida todos os dias, sempre orando e me dando forças para vencer.

RESUMO

Apresenta-se, neste texto, uma proposta de introdução do estudo de vetores no Ensino Médio que é motivada pelo fato de que o tempo gasto com a apresentação de vetores para este nível é recompensado com maior facilidade na abordagem de alguns tópicos, na resolução de problemas e generalização dessas soluções. O conceito de vetor é introduzido tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos equipolentes) quanto algébrico (caracterizado por coordenadas) com abordagens condizentes com nível de Ensino Médio. São apresentados alguns exercícios para comparação da resolução de problemas sem uso de vetores e com o uso de vetores.

Palavras-chave: Vetores; Geometria Analítica; Operações; Ensino Médio.

ABSTRACT

This paper presents a proposal to introduce the study of vectors in High School that is motivated by the fact that the time spent with the presentation of vectors for this level is rewarded with greater ease in the approach of some topics, in the resolution of problems and generalization of these solutions. The concept of vector is introduced from both the geometric (collection of equipotential segments) and algebraic (characterized by coordinates) with approaches consistent with the level of High School. Some exercises are presented to compare the resolution of problems without the use of vectors and the use of vectors.

Keywords: Vectors; Analytical geometry; Operations; High school; Exercises.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos em que leciono matemática, tanto na rede pública como na particular, vivenciei muitas alegrias, como também dissabores, mas o tempo me fez perceber que o ensino/aprendizagem da matemática traz uma satisfação enorme, que é revelada no olhar arregalado dos alunos que parece dizer: como é possível fazer tantos cálculos e chegarmos tão perto do infinito.

Esta proposta que apresento é uma forma de facilitar o trabalho do professor , mostrando que com o uso de vetores, ele chegará ao mesmo resultado, utilizando-se de conceitos mais simples, e isto demonstraria o potencial dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, no sentido de levá-lo a descobrir qual seria a melhor maneira de resolver determinado problema.

O uso de vetores no Ensino Médio já ocorre em alguns tópicos da Física, entretanto este assunto não é abordado nas aulas de Matemática. Assim, este conteúdo fica sem uma apresentação mais didática e formal provinda da Geometria Analítica, parte da Matemática que se dedica ao estudo de conceitos geométricos euclidianos de forma algébrica e geométrica. O estudo de vetores tem papel fundamental em diversas áreas da ciências como Física, Astronomia entre outras, e seu aprendizado no Ensino Médio, em matemática, prepararia melhor os alunos para a continuação de seus estudos acadêmicos e facilitaria a absorção do conteúdo de Geometria Analítica.

Apresentaremos neste trabalho uma proposta de introdução do conceito de vetor tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos equipolentes) quanto algébrico (caracterizado por coordenadas) e forneceremos sugestões de abordagens condizentes com o currículo de Matemática para o Ensino Médio, conforme se observará nos exercícios propostos, no capítulo quatro da presente dissertação.

Embora os conteúdos aqui propostos não façam parte dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), eles constituem um instrumento complementar bastante importante para os alunos e os professores de Ensino Médio, que poderão utilizar esse material em atividades extracurriculares motivadoras ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Boa parte da construção dos vetores e de suas operações é de natureza primordialmente geométrica e algébrica. Temos como princípio que já pertençam ao conhecimento do aluno do Ensino Médio as noções de ângulos, retas, planos, comprimento de segmentos, distância de dois pontos, etc, o que justifica a não abordagem deste conteúdo aqui.

O texto está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1, um pouco da história de Wessel, no Capítulo 2 uma apresentação intuitiva de segmentos orientados, no Capítulo 3, trataremos sobre vetores e operações. O Capítulo 4 é composto por exercícios,que fazem parte do conteúdo proposto pelo currículo do Ensino Médio, acompanhados da resolução, com e sem o conceito de vetores. No capítulo 5 apresentamos uma reflexão sobre a aprendizagem com a resolução de problemas. O capítulo 6 é a conclusão.

O CONCEITO DE VETOR INTRODUZIDO POR WESSEL

Na pesquisa do professor da USP Oswaldo Rio Branco de Oliveira baseada nas referências [5], [6], [7], [16], [17] e [18] descrita no seu texto [5] encontramos informações sobre as ideias desenvolvidas por *Caspar Wessel*, cartógrafo, agrimensor e primeiro matemático (amador) norueguês de destaque, que trabalhou na triangulação da Dinamarca, desenvolvendo a primeira cartografia geral do país, sob observação da Academia Real. No ano de 1796 escreveu sua obra *Directionens* que foi lida no ano seguinte em um encontro na Academia Real. Nesta obra Wessel se deparou com problemas envolvendo polígonos planos e esféricos, e devido a estes problemas interpretou vetores como números complexos e definiu as operações usuais para vetores (adição e multiplicação por escalar) geometricamente.

Wessel enunciou a regra do paralelogramo para a soma de duas linhas retas (segmentos de reta), como, duas linhas retas (segmentos de reta) são somadas se as unimos de forma tal que a segunda linha começa onde a primeira termina e então passamos uma linha reta do ponto inicial ao ponto final das linhas reunidas.

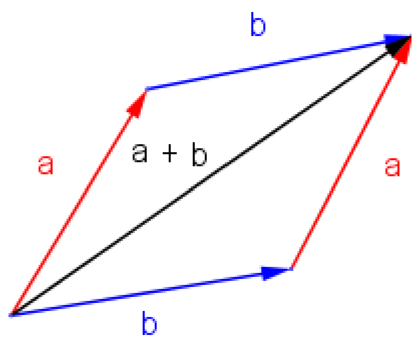


Figura 1: Linhas de Wessel

Na sequência de seu texto Oliveira afirma que é importante notar que Wessel pensou em representar segmentos orientadas como números complexos, porém, não o inverso. Olhando por este viés, a história nos mostra que também em Matemática, há sempre outra solução para problemas iguais, não é necessário termos um único caminho para a resolução de situações problema.

2

CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Os conceitos a seguir são vistos em livros de Geometria Analítica, e suas principais referências são [1], [4], [7] e [9].

2.1 EIXO

Uma reta, assim como uma rua, pode ser percorrida por um ponto em dois sentidos distintos, a Figura 2 representa uma reta, que podemos ver claramente os dois sentidos.

Figura 2: Reta

O sentido de uma reta nos dá uma relação de ordem entre os pontos desta reta, isto é, escolhido um sentido e dados quaisquer dois pontos da reta podemos dizer que um ponto é anterior, coincidente ou posterior ao outro.

Orientar uma reta é escolher um destes dois sentidos de percurso como sendo o positivo. Uma reta orientada é chamada **eixo**.

Figura 3: Eixo

2.2 SEGMENTOS ORIENTADOS

Sejam dois pontos A e B no espaço e considere o segmento entre eles. Escolhemos um desses pontos para ser a origem do segmento, e o outro ponto para ser a extremidade. Desta forma temos um segmento orientado, que é determinado por um par ordenado de pontos. O segmento orientado de origem A e extremidade B será denotado por AB. O segmento orientado de origem B e extremidade A, por sua vez será denotado por BA. Por um abuso de notação, será indicado apenas por segmento orientado.

A Figura 4 representa geometricamente o segmento orientado AB:

Figura 4: Segmento orientado AB

Dados dois segmentos orientados AB e CD , dizemos que o primeiro coincide com o segundo se, e somente se, $A = C$ e $B = D$ e escrevemos $AB = CD$

2.2.1 ***Segmento Nulo***

Consideramos segmentos orientados nulos aqueles cuja origem coincide com a extremidade, ou seja, correspondem a um par de pontos coincidentes (por exemplo, segmento orientado AA).

2.2.2 ***Segmento Oposto***

O segmento orientado oposto de AB é o segmento orientado BA, isto é, sendo A origem e B extremidade, troquemos a origem por B e a extremidade por A e teremos o segmento orientado BA que é o oposto do segmento orientado AB .

2.2.3 ***Módulo***

Primeiramente devemos estabelecer que um certo segmento orientado, não nulo, corresponderá a uma unidade de medida. Dado um segmento orientado AB existe um número real não negativo u, razão entre as medidas dos dois segmentos orientados AB e o segmento orientado estabelecido inicialmente. Dizemos que u é o comprimento do segmento orientado AB (com relação ao segmento orientado fixado inicialmente) ou módulo e denotamos por $|AB|$ conforme a Figura 5.

Figura 5: Módulo $|AB|$

2.2.4 ***Direção e Sentido***

A direção de um segmento orientado é dada pela reta que o contém: dois segmentos orientados têm a mesma direção quando as retas que os contém são paralelas ou coincidentes. No caso da Figura 6 os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção pois as retas que os contém são paralelas e os segmentos orientados AB e EF também têm a mesma direção, porque as retas que os contém são coincidentes, isto é, os pontos A, B, E e F são colineares.

Figura 6: Segmentos com mesma direção

Dois segmentos orientados AB e CD que estão sobre a mesma reta (Figura 7) têm o mesmo sentido quando induzem o mesmo sentido de percurso na reta que os contém. Para ser mais preciso dois segmentos orientados AB e CD tem o mesmo sentido quando um dos seguintes caos ocorrem:

i) C está entre A e B, e C está entre A e D;

ii) B está entre A e C e, C está entre B eD;

iii) A está entre B e C, e, C não está entre A e D.

A Figura 7 ilustra o caso (ii).

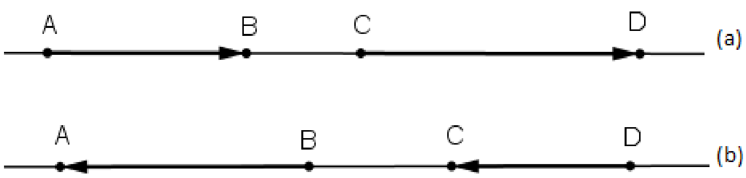


Figura 7: Segmentos orientados AB e CD com (a) o mesmo sentido (b) sentidos contrários

Se AB e CD são segmentos orientados paralelos e de mesmo comprimento, então AB e CD têm mesmo sentido caso os segmentos orientados AC e BD tenham interseção vazia ou quando $ABCD$ é um quadrilátero (Figura 8 (a)). No caso dos segmentos orientados AC e BD temos que $AC \cap BD \neq \emptyset$, dizemos que os segmentos orientados AB e CD têm sentidos contrários, com isso a Figura $ABCD$ não forma um paralelogramo(Figura 8 (b)).

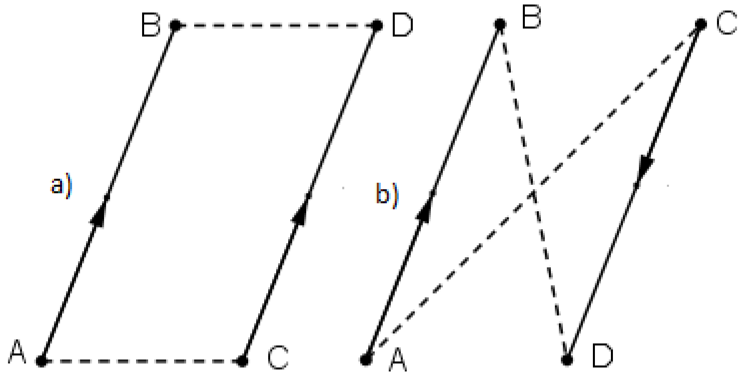


Figura 8: Segmentos orientados AB e CD com (a) o mesmo sentido (b) sentidos contrários

Assim dados dois segmentos orientados podemos comparar:

1. O comprimento/módulo, que é um número real não negativo;
2. A direção, que é determinada pelas retas que contém cada segmento orientado;
3. O sentido.

2.2.5 *Abscissa*

Peguemos num eixo (e) um ponto O, como origem, ou seja, a abscissa da origem é O. Façamos uma associação de cada número real com cada ponto deste eixo da seguinte maneira. Associamos ao ponto P, tal que OP tenha mesmo sentido que o eixo, o número x_p equivalente à distância de P à origem O. E se o ponto P é tal que OP tenha sentido oposto ao eixo associamos a OP o número real negativo x_p, equivalente à distância de P à origem O com sinal negativo. O número x_p é chamado de abscissa do ponto P em relação a O.

Figura 9: A abcissa do ponto P é $x_p = +|OP| = |OP|$

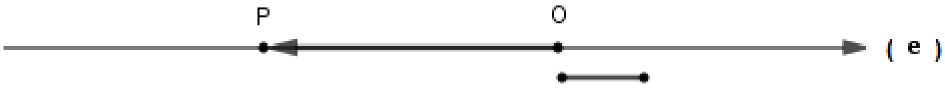


Figura 10: A abscissa do ponto P é $x_p = -|OP|$

2.2.6 ***Medida Algébrica de um Segmento Orientado***

A medida algébrica de um segmento orientado é a diferença entre as abscissas da extremidade e da origem do segmento orientado. Para um segmento orientado AB sobre um eixo orientado, denotamos a medida algébrica de AB por $\overline{AB}$. Então:

$$\overline{AB} = x_B - x_A$$

Exemplos:

E_1 : Determine a medida algébrica do segmento orientado $\overline{MN}$, sendo $x_M = (-4)$ e $x_N = (+3)$.

Solução: $\overline{MN} = x_N - x_M = +3 - (-4) = 3 + 4 = 7$

E_2 : A medida algébrica do segmento orientado $\overline{PQ}$ é igual a -15 unidades. Determine a abscissa do ponto P, sendo $x_Q = 4$.

Solução: $\overline{PQ} = x_Q - x_P \Longrightarrow -15 = 4 - x_P \Longrightarrow x_P = 19$

E_3 : Dados os pontos A de abscissa $6a - 1$ e B de abscissa $2a + 4$, determine a para que a medida algébrica do segmento orientado $\overline{AB}$ seja -3.

Solução:

$\overline{AB} = x_B - x_A$

$-3 = (2a + 4) - (6a - 1) \Longrightarrow -3 = -4a + 5 \Longrightarrow 4a = 8 \Longrightarrow a = \dfrac{8}{4} \Longrightarrow a = 2$

2.3 EQUIPOLÊNCIA DE SEGMENTOS ORIENTADOS

Segundo Delgado[1] os métodos algébricos da Geometria Cartesiana de Descartes e Fermat influenciaram enormemente o desenvolvimento da matemática, até que foram necessários métodos mais diretos e livres de coordenadas na geometria.

No ano de 1832, Giusto Bellavitis publicou um trabalho onde ele apresenta o conceito de *equipolência* entre segmentos que é, a noção intuitiva de vetor que conhecemos e que foi formalizada em 1844 por Hermann Grassmann no seu *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (Teoria de Extensão Linear, um novo ramo da Matemática).

2.3.1 *Relação de Equipolência*

Dois pontos distintos A e B do espaço determinam uma reta r. O segmento de reta r entre A e B é a parte da reta contido entre esses dois pontos. Podemos orientar esse segmento considerando que um dos pontos como origem e o outro como extremidade. O segmento orientado com origem A e extremidade B será indicado por AB. Os pontos serão, também, considerados como segmentos orientados (nulos). Assim, o segmento orientado AA (origem A e extremidade A) é um segmento orientado nulo.

Sejam AB e $A'B'$ segmentos orientados.

Definição: Diremos que o segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado $A'B'$ se $A = B$ e $A' = B'$, ou se AB e CD tem mesmo módulo, direção e sentido.

Como segmentos equipolentes têm mesma direção então temos duas possibilidades. No caso em que os segmentos orientados equipolentes estão sobre a mesma reta a noção intuitiva que podemos deslizar $A' = B'$ sobre essa reta tal maneira que A' coincida com A e B' coincida com B. No caso em que os segmentos orientados equipolentes estão sobre retas paralelas os segmentos AB, $B' = B'$, $B'A'$ e $A'A$ formam um paralelogramo, com na Figura 11.

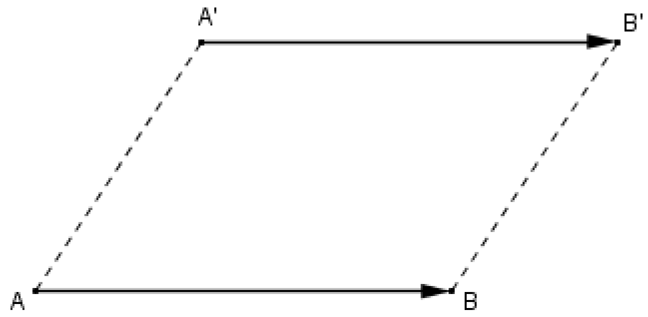


Figura 11: Paralelogramo

Observe que dois pontos (quando considerados como segmentos orientados) são sempre equipolentes. Podemos verificar facilmente que a relação de equipolência satisfaz às seguintes propriedades:

Reflexiva: todo segmento orientado é equipolente a si mesmo, $AB \sim AB$.

Simetria: se o segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado $A'B'$, então $A'B'$ é equipolente a AB, $AB \sim A'B'$, $A'B' \sim AB$.

Transitiva: se o segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado $A'B'$ e se $A'B'$ é equipolente ao segmento orientado $A''B''$, então AB é equipolente a $A''B''$, se $AB \sim A'B'$ e $A'B' \sim A''B''$,então $AB \sim A''B''$.

Devido às três propriedades citada acima, é usual dizer-se que a equipolência é uma relação de equivalência.

3

VETOR

Definição: O vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço que são equipolentes ao segmento orientado AB.

O vetor determinado por AB será indicado por $\overrightarrow{AB}$. É conveniente representar tanto o segmento orientado AB como o vetor $\overrightarrow{AB}$ por uma flecha com origem em A e extremidade em B. O leitor deve, entretanto, não se esquecer de que isto é um abuso de notação: o vetor $\overrightarrow{AB}$ é um conjunto de segmentos orientados.

Observemos que os segmentos orientados AB e CD representam o mesmo vetor se, e somente se, esses segmentos são equipolentes. Assim, um mesmo vetor pode ser representado por uma infinidade de segmentos orientados distintos. Na verdade, se AB é um segmento orientado e P é um ponto qualquer do espaço, então o leitor pode ver facilmente que existe um, e somente um, segmento orientado PQ, com origem em P, tal que PQ é equipolente a AB. Segue-se, assim, que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem exatamente um representante com origem em cada ponto do espaço.

Os vetores serão usualmente indicados por letras minúsculas com flechas em cima por exemplo $\vec{a}$. Os números reais serão indicados por letras minúsculas (sem flechas em cima).

Portanto, quando dizemos *vetor*, estamos referindo a certo conjunto de segmentos orientados equipolentes. Qualquer elemento do conjunto de segmentos orientados equipolentes entre si pode ser usado para indicar o vetor.

Assim $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ e $\vec{v}$ representam o mesmo conjunto de vetores equipolentes se, e somente se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} = \vec{v}$, ou seja, formam a mesma classe de equivalência, em particular AB e MN são equipolentes.

3.1 TIPOS DE VETORES

3.1.1 *Módulo de um vetor:*

Dado um vetor $\vec{u}$, todos os seus representantes têm o mesmo comprimento. O comprimento de qualquer um dos representantes de $\vec{u}$ chama-se *módulo* de vetor $\vec{u}$ indicado por $|\vec{u}|$

3.1.2 *Vetor nulo*

Vetor nulo é o conjunto formado por todos os segmentos orientados que tem origem e extremidade no mesmo ponto, ou seja, todos os representantes do vetor nulo são segmentos com origem e extremidade coincidentes. Indicamos o vetor nulo por $\vec{O}$.

3.1.3 *Vetor unitário*

Vetor unitário é um vetor de módulo igual a uma unidade. Portanto, $\vec{u}$ é um vetor unitário se, e somente se, $|\vec{u}| = 1$.

3.1.4 *Versor*

Versor de um vetor $\vec{v}$ ou de um eixo(e) é um vetor unitário com a mesma direção e o mesmo sentido do vetor ou do eixo.

3.1.5 *Vetor oposto*

Vetor oposto de um vetor dado $\overrightarrow{AB}$ é o vetor $\overrightarrow{BA}$, que tem o mesmo módulo, a mesma direção e o sentido contrário de $\overrightarrow{AB}$.

3.1.6 *Vetores colineares*

Dois vetores são colineares se tiverem a mesma direção. Os representante desses vetores pertencerem as retas paralelas ou coincidentes.

3.1.7 ***Vetores iguais***

Dois vetores são iguais se, e somente se, têm o mesmo módulo, mesma direção e o mesmo sentido.

As propriedades da igualdade de dois vetores são:

P_1: Todos os vetores nulos são iguais.

P_2: $\vec{v} = \vec{v}$, (Propriedade Reflexiva).

P_3: Se $\vec{v_1} = \vec{v_2} \Longrightarrow \vec{v_2} = \vec{v_1}$, (Propriedade Simétrica).

P_4: Se $\vec{v_1} = \vec{v_2}$ e $\vec{v_2} = \vec{v_3} \Longrightarrow \vec{v_1} = \vec{v_3}$, (Propriedade Transitiva).

3.2 OPERAÇÕES COM VETORES

As operações com vetores diferem extraordinariamente das operações com os números reais, pois também operamos com a direção. Para um melhor entendimento façamos a distinção entre grandezas vetoriais e grandezas escalares.

Grandezas escalares são as que ficam perfeitamente determinadas por números reais.

Grandezas vetoriais são grandezas determinadas por números reais e uma direção.

3.2.1 ***Adição de Vetores***

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ pretendemos definir. Tomemos um ponto A qualquer (Figura 12) e, com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representante do vetor $\vec{u}$. Utilizemos a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante de $\vec{v}$. O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por definição, o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$, isto é,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \text{ } ou \text{ } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

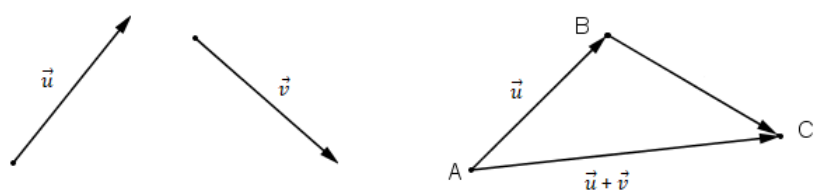


Figura 12: Soma de vetores

Propriedades da adição dos vetores:

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer, a adição admite as seguintes propriedades:

1. **Comutativa:** $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$,

   Demonstração: Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sejam $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. Então $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

   i. Suponhamos que os três pontos A, B e C não são colineares.

   Construindo-se o ponto D tal que $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$. Então, $\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{BD}$. Note que $ABCD$ forma um paralelogramo pois AB e CD são segmentos paralelos e de mesmo comprimento:assim $\overrightarrow{BD}$ é paralelo a $\overrightarrow{AC}$.

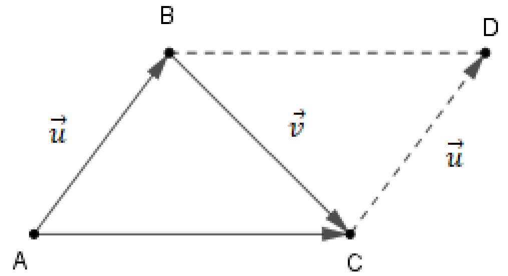
   

   Figura 13: Comutativa de vetores I

   ii. Supondo que os três pontos A, B e C são colineares, tomemos M fora da reta ABC.

   Seja N tal que $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$ e seja P tal que $\vec{u}=\overrightarrow{NP}$.

   Podemos concluir que $\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.

   Assim, temos que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$ são paralelos, de mesmo comprimento e possuem mesmo sentido.

   Logo $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MP}$, ou seja, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

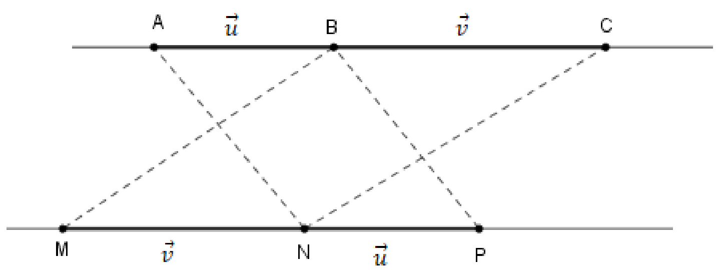
   

   Figura 14: Comutativa vetores II

2. **Associativa:** $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$,

   Demonstração: Sejam $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{CD}$

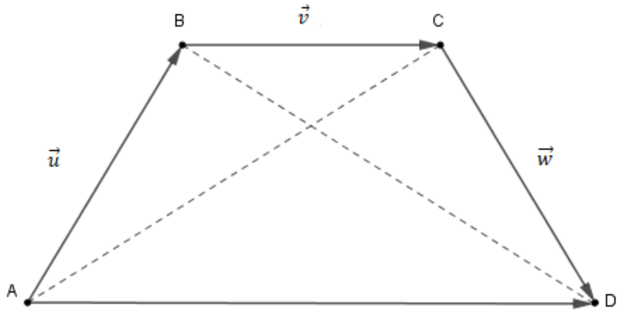


Figura 15: Associativa de vetores

Então $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ e $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

Por outro lado $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$ e $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

Logo, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\overrightarrow{AD}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

3. **Elemento neutro:** $\vec{u}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{u}=\vec{u}$,

   Demonstração: Seja o vetor $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$.

   Podemos escrever $\vec{O}=\overrightarrow{PP}$. Assim, $\vec{u}+\vec{O}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP}=\overrightarrow{OP}=\vec{u}$.

   Também podemos escrever $\vec{O}=\overrightarrow{OO}$. Assim, $\vec{O}+\vec{u}=\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}=\vec{u}$

4. **Elemento oposto:** Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$ qualquer o vetor $\overrightarrow{BA}$, vetor oposto de $\overrightarrow{AB}$, é o elemento oposto da adição. De fato, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ resulta no vetor $\overrightarrow{AA}$ que é o vetor nulo.

3.2.2 ***Subtração de dois vetores***

O vetor $\vec{u}+(\overrightarrow{-v})$ escreve-se $\vec{u}-\vec{v}$, é chamado **diferença** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ [9].

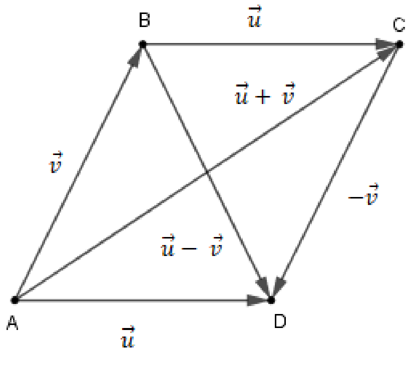


Figura 16: Subtração de vetores

Observemos que no paralelogramo $ABCD$ determinado pelos vetores $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ na figura 16, verifica-se que a soma $\vec{u}+\vec{v}$ é representado por uma das diagonais que é o vetor $\overrightarrow{AC}$, enquanto a diferença $\vec{u}-\vec{v}$ pela outra diagonal que é o vetor $\overrightarrow{BD}$.

3.2.3 *Notação de ponto*

Depois de vermos as propriedades da soma de vetores, vejamos que podemos operar os vetores usando a notação de pontos.

Considere um ponto O como sendo origem, no entanto cada ponto denotará o vetor origem em O e extremidade neste ponto. Escreveremos operações envolvendo pontos e vetores, por exemplo, considere A um ponto e $\vec{u}$ um vetor, então a expressão $A + \vec{u}$ significa $\overrightarrow{OA} + \vec{u}$.

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ então se escrevemos B representando $\overrightarrow{OB}$ e A representando $\overrightarrow{OA}$ temos que $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Seguem as seguintes propriedades.

P_1: $A + \vec{O} = A$
P_2: $A - A = \vec{O}$
P_3: $(A + \vec{v}) - \vec{v} = A$
P_4: $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Longrightarrow A = B$
P_5: $A + \vec{u} = A + \vec{v} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{v}$
P_6: $A + \overrightarrow{AB} = B$

A grande vantagem desta escrita é que podemos operar com vetores de uma forma ainda mais semelhante da que operamos com números.

Por exemplo, segue da relação de equipolência (paralelogramo) que se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Podemos recuperar este resultado fazendo as seguintes operações com vetores.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$
$\Longrightarrow \vec{O} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$
$\Longrightarrow \vec{O} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$\Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$
$\Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
A utilização de pontos fica ainda mais simples de ser compreendidas.
Veja:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
$\Longrightarrow B - A = D - C$
$\Longrightarrow B - A - B = D - C - B \quad (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$
$\Longrightarrow -A = D - C - B$
$\Longrightarrow -A + C = D - C - B + C$
$\Longrightarrow C - A = D - B$

Simplesmente, $B - A = D - C \Longrightarrow C - A = D - B$

3.2.4 *Multiplicação de um número Real por um Vetor*

Dado um $\vec{v} \neq \vec{O}$ e um número real qualquer $\alpha \neq 0$, chama-se *produto do numero real α pelo $\vec{v}$*, o vetor $\alpha \cdot \vec{v}$ tal que:

1. **módulo:** $|\alpha \cdot \vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$, isto é, o comprimento $\alpha \cdot \vec{v}$ é igual ao comprimento $\vec{v}$ multiplicado por $|\alpha|$;
2. **direção:** $\vec{v} \neq \vec{O}$ é paralelo a $\vec{v}$
3. **sentido:** $\vec{v} \neq \vec{O}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$, e contrário se $\alpha < 0$.

Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{O}$, então $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{O}$ A Figura 17 representa o vetor $\vec{v}$ e alguns de seus múltiplos.

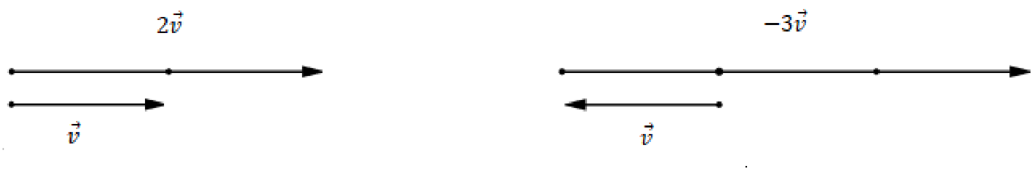


Figura 17: Múltiplos de vetores

3.6.1 **Propriedades da multiplicação por um número real:**
Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

1. **Comutativa:** $a \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot a$
2. **Associativa:** $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$
3. **Distributiva em relação à adição de escalares:** $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
4. **Distributiva em relação à adição de vetores:** $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$
5. **Identidade:** $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot 1 = \vec{v}$

3.2.5 *Ângulo entre dois vetores*

O ângulo entre os vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo θ formado por duas semirretas OA e OB de mesma origem O, onde $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ (θ em radianos) ou $0° \leq \theta \leq 180°$

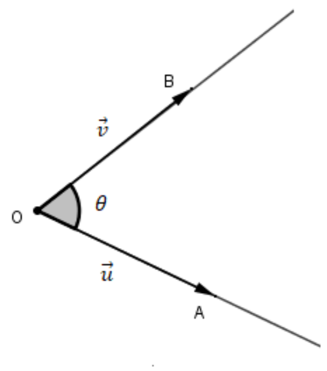


Figura 18: Ângulo entre dois vetores

Observações:

1. Se $\theta = \pi$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos contrários.

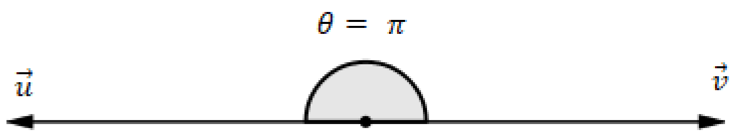


Figura 19: Ângulo raso entre dois vetores

2. Se $\theta = 0$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e mesmo sentido.

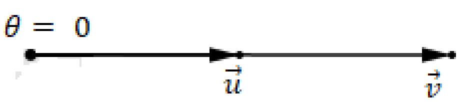


Figura 20: Ângulo nulo de dois vetores

3. Se $\alpha > 0$ então o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o mesmo ângulo entre $\vec{u}$ e $\alpha\vec{v}$

4. O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é suplementar dos ângulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é θ então o ângulo entre $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é $\pi - \theta$.

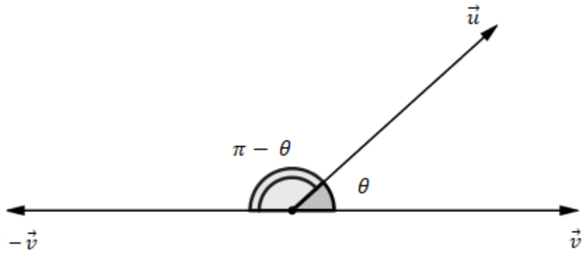


Figura 21: Ângulo suplementar entre dois vetores

3.2.6 ***Vetores ortogonais***

Se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais e indicamos isto por $\vec{u} \perp \vec{v}$.

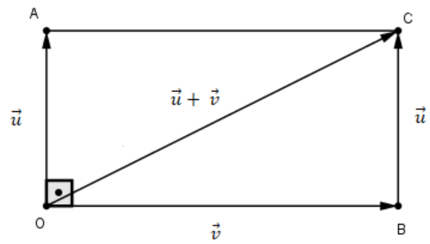


Figura 22: Vetores ortogonais

Exercícios Resolvidos:

1.Seja o paralelogramo $ABCD$ da Figura 22 é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Determinar:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$
c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$
e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$

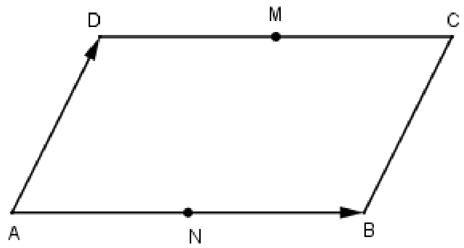


Figura 23: Paralelogramo $ABCD$

Solução:
a) Como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, temos que
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = C - B + B - A = C - A = \overrightarrow{AC}$
b) Como $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, temos que
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = A - B + B - C = A - C = \overrightarrow{CA}$
c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = C - A - (C - B) = B - A = \overrightarrow{AB}$

d) Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NM}$, temos que
$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = N - A + M - N = M - A = \overrightarrow{AM}$
e) Como $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN}$, temos que
$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = D - M + N - D = N - M = \overrightarrow{MN}$

2. Dados os pontos A, B, C e D, provar que:
$(B - A) - (D - C) = (B - D) - (A - C)$.
Solução:
$(B - A) = (B - D) - (A - D)$
$(D - C) = (D - A) - (C - A)$ fazendo a subtração dos dois membros temos,
$(B - A) - (D - C) = [(B - D) - (A - D)] - [(D - A) - (C - A)]$
$(B - A) - (D - C) = (B - D) - A + D - D + A - (C - A)]$ usando a lei do cancelamento vem que
$(B - A) - (D - C) = (B - D) - (A - C)$ c.q.d.

3. No triângulo ABC, $(X - A) = (B - X)$. Exprimir $(X - C)$ em função de $(A - C)$ e de $(B - C)$.
Solução:

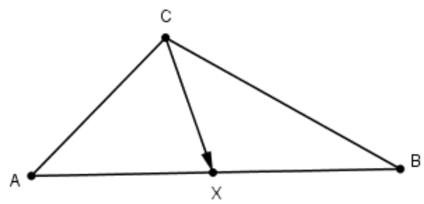


Figura 24: Triângulo ABC

Temos: $(X - A) = (X - C) - (A - C)$ e $(B - X) = (B - C) - (X - C)$
Então, se $(X - A) = (B - X)$, segue-se que
$(X - C) - (A - C) = (B - C) - (X - C) \Longrightarrow (X - C) + (X - C) = (B - C) + (A - C) \Longrightarrow 2(X - C) = (B - C) + (A - C) \Longrightarrow (x - C) = \frac{1}{2} \cdot [(B - C) + (A - C)]$ ou podemos escrever
$(X - C) = \dfrac{(B - C) + (A - C)}{2}$

4. Prove que as diagonais de um paralelogramo interceptam-se nos pontos médios.
Solução:

$(B - A) = (C - D) = \vec{v}$
$(D - A) = (C - B) = \vec{u}$
Temos ainda que:
$(C - A) = \vec{u} + \vec{v}$
$(B - D) = \vec{v} - \vec{u}$

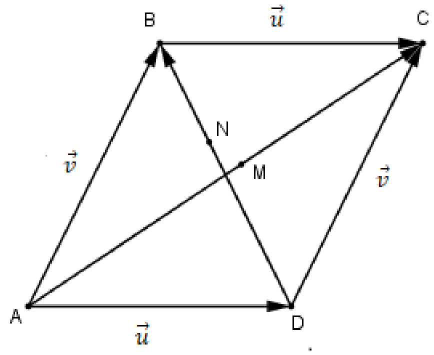


Figura 25: Paralelogramo $ABCD$

Seja M o ponto médio da diagonal AC, e N o ponto médio da diagonal DB. Provemos que $(M - N) = \vec{0}$, ou seja, que M coincide com N.

$(M - A) = \frac{1}{2} \cdot (C - A) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \Longrightarrow M = A + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

$(N - D) = \frac{1}{2} \cdot (B - D) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) \Longrightarrow N = D + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$

Subtraindo membro a membro as igualdades acima, vem:

$(M - N) = (A - D) + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u} = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$.

Logo, $M = N$, M coincide com N, é nesse ponto que as diagonais do paralelogramo se interceptam.

Exercícios propostos:

1. Seja o vetor $\vec{u} = (B - A)$ e X um ponto qualquer do espaço mostre que:
$(B - A) = (B - X) - (A - X)$.

2. O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e tem a metade da sua medida. Prove que $(M - C) = \frac{1}{2} \cdot (A - C)$ e $(N - C) = \frac{1}{2} \cdot (B - C)$, pois m e N são ponto médios dos lados AB e BC respectivamente.

3. Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, é paralelo às bases e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

3.3 EXPRESSÃO ANALÍTICA DE UM VETOR

3.3.1 *Introdução ao plano cartesiano*

Nesta subseção apresentaremos uma importante ferramenta matemática que se mostrará útil em diversas situações. Trata-se do plano cartesiano, denominado assim em homenagem ao matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650), responsável pela criação e divulgação de método que, hoje, conhecemos como Geometria Analítica ([8]).

O primeiro passo é desenhar duas retas concorrentes perpendiculares no plano. A reta horizontal chamada de abscissa que também será chamada de "eixo x" e a reta vertical chamada de ordenada também chamada de "eixo y".

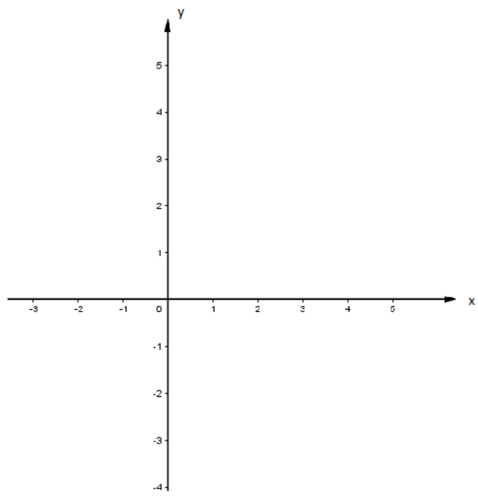


Figura 26: Plano cartesiano

Em seguida, marcamos pontos equidistantes ao longo de cada um desses eixos (veja a Figura 25).

Dessa forma, podemos representar cada ponto do plano $P(x, y)$, que será chamado de **par ordenado**. O primeiro valor desse par é chamado de **abscissa**, e representa a quantidade relativa à primeira variável. O segundo valor desse par é chamado de **ordenada**, e representa a quantidade relativa à segunda variável. Juntas, as variáveis x e y são chamadas de **coordenadas** do ponto P. Por exemplo o ponto (4, 2) esse ponto deverá estar situado no encontro entre a reta que é paralela ao eixo y e passa pelo ponto 4 do eixo x, com a reta que é paralela ao eixo x e passa pelo ponto 2 do eixo y (Figura 26)

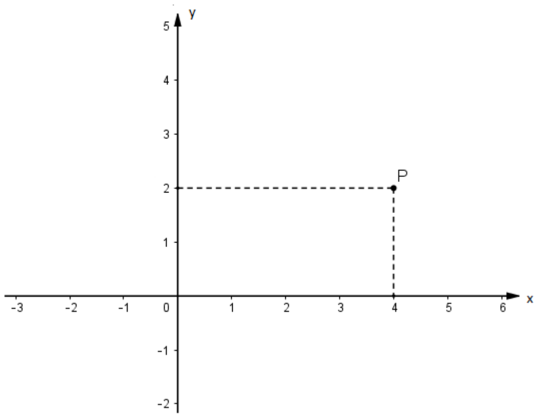


Figura 27: Coordenadas do ponto P(4, 2)

Um **plano cartesiano**, também chamado **plano coordenado**, é exatamente a introdução de coordenadas em um plano, feita como a Figura 26.

3.4.1 *Vetores em coordenadas*

No dia a dia a base mais utilizada é formada pelo encontro de dua retas concorrentes perpendicularmente(sendo uma horizontal e a outra vertical), essa base também chamada de **ortonormais**.

Segundo Winterle [9] uma base $\vec{i}$, $\vec{j}$ é dita ortonormal se os seus vetores forem ortogonais e unitários, isto é se $\vec{i} \perp \vec{j}$ e $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

Essa base determina o sistema cartesiano ortogonal xOy. Os vetores ortogonais e unitários, neste caso, são simbolizados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Eles podem ser representados pelos segmentos orientados com origem em O e extremidade em $(1,\ 0)$ e $(0,\ 1)$, respectivamente. Portanto, $\vec{i} = (0,\ 1)$ e $\vec{j} = (0,\ 1)$.

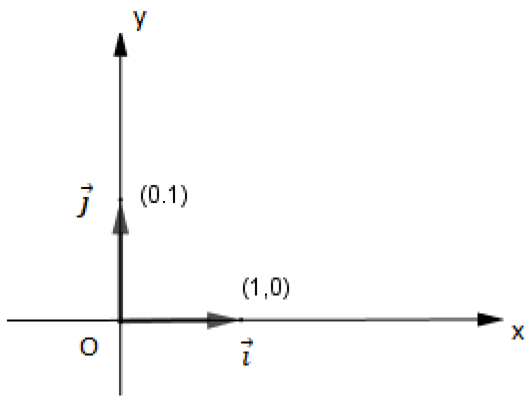


Figura 28: Base ortonormais

A partir de agora, usaremos somente esta base.

Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer do plano, existe uma só uma dupla de números x e y tal que:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Os números x e y são componentes de $\vec{v}$. A primeira componente x é chamada de abscissa de $\vec{v}$ e a segunda componente y é a ordenada de $\vec{v}$.

O vetor $\vec{v}$ na Figura 28 será também representado por $\vec{v} = (x,\ y)$.

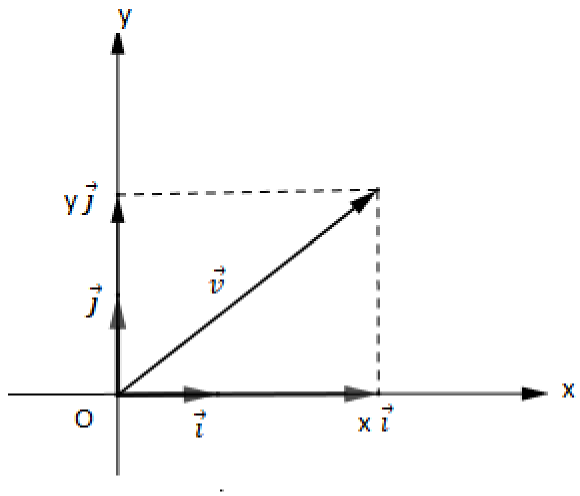


Figura 29: Base de um vetor

Vetor no plano é um par ordenado $(x,\ y)$ de números reais e se representa por:

$\vec{v} = (x,\ y)$ que é a expressão analítica de $\vec{v}$

Por exemplo, em vez de escrever $\vec{v} = 3 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}$, pode-se escrever $\vec{v} = (3,\ -5)$.

Observação

Assim, para exemplificar, quando nos referimos a um ponto P(x, y) ver Figura 29, ele pode ser identificado como o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{i} + y \cdot O\vec{j}$, sendo $O(0,\ 0)$ a origem do sistema.

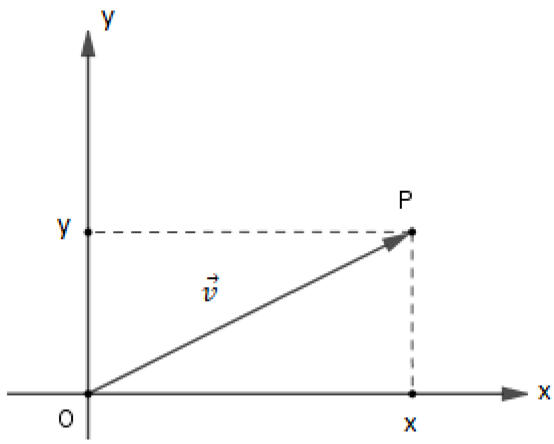


Figura 30: Coordenadas de um vetor

Desta forma, o plano pode ser considerado como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores.

3.5.1 *Igualdade*

Dois vetores $\vec{u} = (x_1,\ y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se , $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e escreve-se $\vec{u} = \vec{v}$

Exemplos

1. Os vetores $\vec{u} = (3,\ 5)$ e $\vec{v} = (3,\ 5)$ são iguais.
2. Se o vetor $\vec{u} = (x + 1,\ 4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5,\ 2y - 6))$, de acordo com a definição de igualdade dos vetores, $x + 1 = 5$ e $2y - 6 = 4$ ou $x = 4$ e $y = 5$. Assim, se $\vec{u} = \vec{v}$, então $x = 4$ e $y = 5$.

3.5.2 *Operações*

Sejam os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1,\ y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ e $a \in \mathbb{R}$, isto quer dizer que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j}\\ \overrightarrow{v} &= x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j}\end{aligned}$$

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j}) + (x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j})$

   Como a soma de vetores é associativa e o produto escalar distributivo em relação à soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2) \overrightarrow{i} + (y_1 + y_2) \overrightarrow{j}$, na notação de par ordenados temos:

   $$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

2. $a \cdot \overrightarrow{u} = a \cdot (x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j})$

   Como a soma de vetores tem a propriedade distributiva em relação à adição de vetores $a \cdot \overrightarrow{u} = a \cdot x_1 \overrightarrow{i} + a \cdot y_1 \overrightarrow{j}$, na notação de par ordenados temos:

   $$a \cdot \vec{u} = (ax_1,\ ay_1)$$

Portanto, para somar dois vetores, soma-se as suas coordenadas correspondentes, e para multiplicar um vetor por um número (Real), multiplica-se cada componente do vetor por este número.

Exemplo:

1. Dados os vetores $\vec{u} = (4,\ 1)$ e $\vec{v} = (2,\ 6)$, calcular $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u}$, assim temos:

a) $\vec{u}+\vec{v}=(4,\ 1)+(2,\ 6)=(4+2,\ 1+6)=(6,\ 7)$

b) $2\vec{u}=2\cdot(4,\ 1)=(2\cdot 4,\ 2\cdot 1)=(8,\ 2)$

2. Determinar o vetor $\vec{x}$ na igualdade $3\vec{x}+2\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{x}$, sendo dados $\vec{u}=(3,\ -1)$ e $\vec{v}=(8,\ 4)$

   solução:

   $3\vec{x}+2\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{x}$

   $3\vec{x}-\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{v}-2\vec{u}$

   $2\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{v}-2\vec{u}$

   $2\vec{x}=\frac{1}{2}(8,\ 4)-2(3,\ -1)$

   $2\vec{x}=(4,\ 2)-(6,\ -2)=(4-6,\ 2-(-2))$

   $2\vec{x}=(-2,\ 4)$

   $\vec{x}=\frac{(-2,\ 4)}{2}$

   $\vec{x}=(-1,\ 2)$

3. Encontrar a e b (números reais quaisquer) tais que:

   $\vec{v}=a\vec{u}+b\vec{w}$, sendo $\vec{v}=(10,\ 2)$, $\vec{u}=(3,\ 5)$ e $\vec{w}=(-1,\ 2)$

   Solução:

   Substituindo os vetores na igualdade acima temos

   $(10,\ 2)=a(3,\ 5)+b(-1,\ 2)$

   $(10,\ 2)=(3a,\ 5a)+(-b,\ 2b)$

   $(10,\ 2)=(3a-b,\ 5a+2b)$

   Da condição de igualdade de dois vetores, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 3a-b=10 \\ 5a+2b=2 \end{cases} \tag{1}$$

   cuja a solução é $a=2$ e $b=-4$.

3.6 VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

Inúmeras vezes um vetor é representado por um segmento orientado que não parte da origem de uma sistema cartesiano. Consideremos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1,\ y_1)$ e extremidade em $B(x_2,\ y_2)$.

De acordo com o sistema cartesiano, os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ têm expressões analíticas :
$\overrightarrow{OA} = (x_1,\ y_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_2,\ y_2)$
Por outro lado o triângulo OAB da Figura 30 vem:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

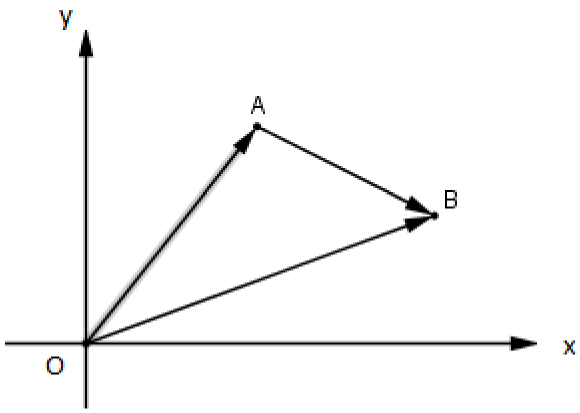


Figura 31: Vetor definido por AB

donde $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ou: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ isto é, as componentes de $\overrightarrow{AB}$ são obtidas subtraindo-se das coordenadas da extremidade B as coordenadas da origem A. Razão pela qual também se escreve $\overrightarrow{AB} = B$ - A.

É importante lembrar que um vetor tem infinitos representantes que são os segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido. E dentre os infinitos representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$, "um representante de destaque" é o vetor que tem origem $O(0,\ 0)$ e extremidade em $P(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ ver na Figura 30:

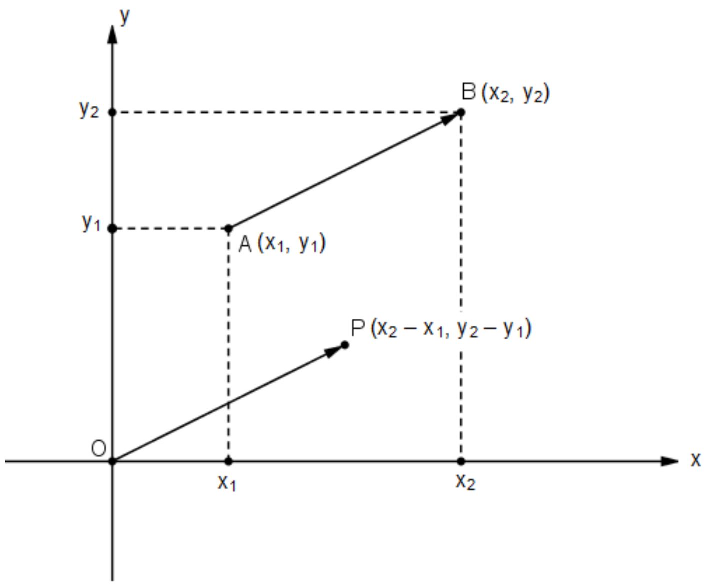


Figura 32: Representante de um mesmo vetor

O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é também chamado vetor posição ou representante natural de $\overrightarrow{AB}$.

É importante assinalar que as componentes do vetor $\overrightarrow{AB}$, calculadas por meio de B - A, são sempre as mesmas componentes do representante $\overrightarrow{OP}$ com origem no início do sistema. Este detalhe fica claro na Figura 32 onde os segmentos orientados equipolentes AB, CD e OP representam o mesmo vetor $(3,\ 1)$

Na Figura 32 fica claro que o fato de os segmentos orientados ocuparem posições diferentes, é irrelevante. O que importa, é que eles tenham o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentindo para representarem o mesmo valor.

$\overrightarrow{OP} = P - O = (3,\ 1) - (0,\ 0) = (3,\ 1)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,\ 4) - (2,\ 3) = (3,\ 1)$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (0,\ 6) - (-3,\ 5) = (3,\ 1)$

$\overrightarrow{EF} = F - E = (9,\ 3) - (6,\ 2) = (3,\ 1)$

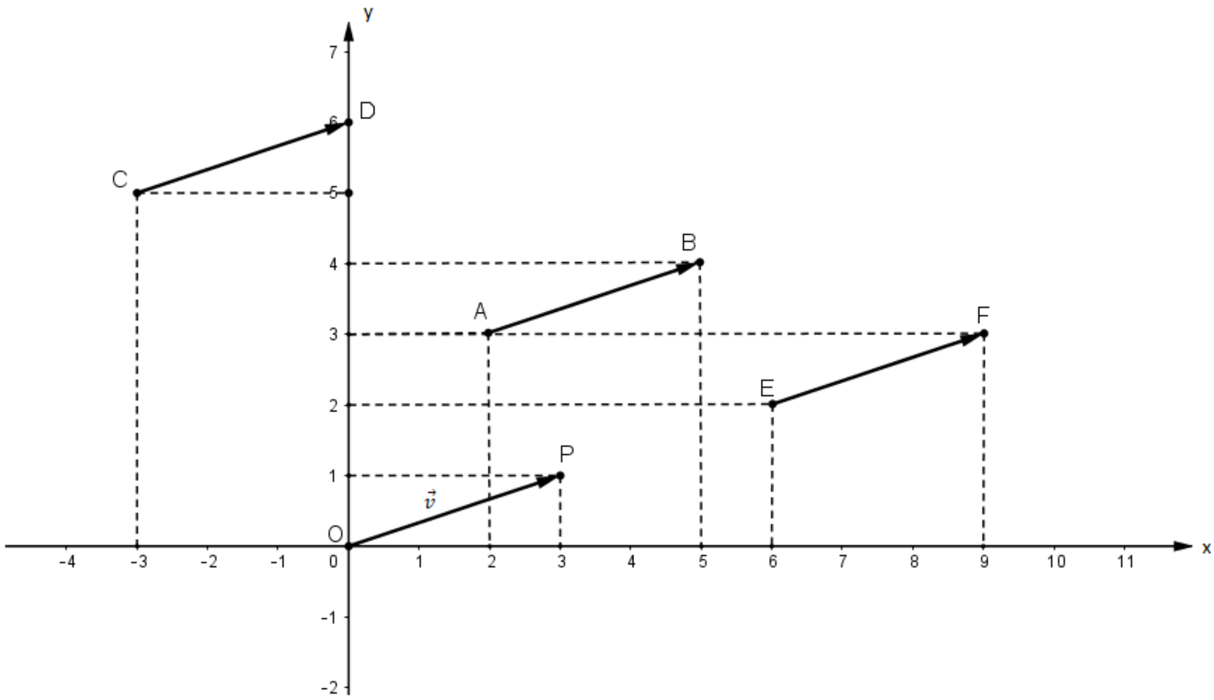


Figura 33: Vetores equipolentes

Por outro lado, sempre que tivermos

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v} = B - A$

podemos também concluir que

$B = A + \vec{v}$ ou $B = A + \overrightarrow{AB}$

isto é, o vetor $\vec{v}$ "transporta"o ponto inicial A para o ponto extremo B.

Retomando a Figura 32, onde $\vec{v} = (3,\ 1)$, tem-se

$P = O + \vec{v} = (0,\ 0) + (3,\ 1) = (3,\ 1)$

$B = A + \vec{v} = (2,\ 3) + (3,\ 1) = (5,\ 4)$

$D = C + \vec{v} = (-3,\ 5) + (3,\ 1) = (0,\ 6)$

$F = E + \vec{v} = (6,\ 2) + (3,\ 1) = (9,\ 3)$

Exemplo:

1. Dados os pontos $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ -1)$ e $C(-2,\ 4)$,determinar $D(x,\ y)$ de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

   solução:

   $\overrightarrow{CD} = D - C = (x,\ y) - (x,\ y) = (x+2,\ y-4)$

   $\overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ -1) - (-1,\ 2) = (3+1,\ -1-2)$

   logo

   $(x+2,\ y-4) = \frac{1}{2}(4,\ -3)$

   pela condição de igualdade de dois vetores:

   $x + 2 = 2$ e $y - 4 = -\frac{3}{2}$ um sistema cuja solução é $x = 0$ e $y = \frac{5}{2}$

   Por conseguinte:

   $D(0,\ \frac{5}{2})$

2. Sendo $A(-2,\ 4)$ e $B(4,\ 1)$ extremidade de um segmento, determinar os pontos F e G que dividem AB em três segmentos de mesmo comprimento.

   solução:

   $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

   Mas $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,\ 1) - (-2,\ 4) = (6,\ -3)$

   e

   $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(6,\ -3) = (2,\ -1)$

   e

   $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

   $F - A = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

   $F = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

   $F = (-2,\ 4) + (2,\ -1) = (0,\ 3)$

   análogo temos que:

   $\overrightarrow{FG} = G - F = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = F + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (0,\ 3) + (2,\ -1) = (2,\ 2)$

   $G = (2,\ 2)$

3.6.1 *Ponto Médio*

Seja o segmento de extremos $A(x_A,\ y_A)$ e $B(x_B,\ y_B)$. Sendo $M(x_M,\ y_M)$ o ponto médio de AB, podemos expressar de forma vetorial como:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

ou

$(x_M - x_A,\ y_M - y_A) = (x_B - x_M,\ y_B - y_M)$

daí temos que:

$x_M - x_A = x_B - x_M \quad \text{e} \quad y_M - y_A = y_B - y_M$

Resolvendo em relação a x e y, temos

$2x_M = x_A + x_B \quad \text{e} \quad 2y_M = y_A + y_B$

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Portanto:

$\mathbf{M} = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2},\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

Exemplo:

O ponto médio do segmento de extremos $A(-6, 3)$ e $B(4,\ 1)$ é:

solução:

$\mathbf{M} = \left(\dfrac{-6+4}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right) = (-1,\ 2)$

3.6.2 *Paralelismo de dois Vetores*

Temos que, se dois vetores $\vec{u} = (x_1,\ y_1)$ e $\vec{v} = (x_2,\ y_2)$ são paralelos, existe um número real a tal que $\vec{u} = a \cdot \vec{v}$, ou seja,

$(x_1,\ y_1) = a \cdot (x_2,\ y_2)$

ou

$(x_1,\ y_1) = (a \cdot x_2,\ a \cdot y_2)$

que pela condição de igualdade resulta em

$x_1 = a \cdot x_2$ e $y_1 = a \cdot y_2$

onde:

$\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}\ (= a)$

Esta é a condição de paralelismo de dois vetores, isto é, dois vetores são paralelos quando suas componentes forem *proporcionais*.

Exemplo

Os vetores $\vec{u} = (-6,\ -9)$ e $\vec{v} = (8,\ 12)$ são paralelos pois
$\dfrac{-6}{8} = \dfrac{-9}{12}$

Observações

1. Considera-se o vetor nulo $\vec{0} = (0,\ 0)$ é paralelo a qualquer vetor.
2. Se uma das componentes for nula, a componente correspondente de um vetor paralelo também nula.

3.6.3 ***Módulo de um vetor***

Seja o vetor $\vec{v} = (x,\ y)$. Pelo teorema de Pitágoras, vem:
$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

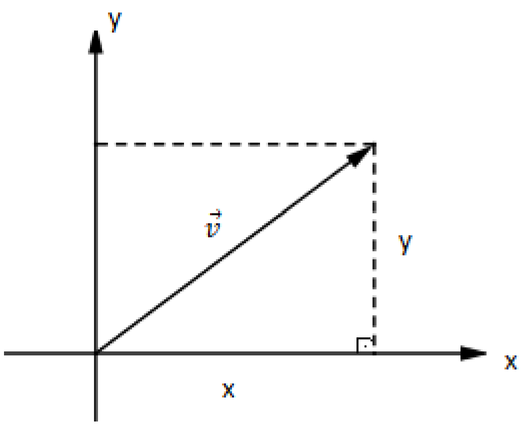


Figura 34: Módulo de um vetor

Exemplo:
Se $\vec{v} = (-3,\ 2)$, então o valor do $|\vec{v}|$ é de:
$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ u.c. (unidades de comprimento)

Observações

1. **Distância entre dois pontos e módulo do vetor**

Conforme a definição de módulo de vetor, o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ é a distância entre os pontos A e B. Desta forma, se
$d(A,\ B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$
como $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A,\ y_B - y_A)$, temos:
$d(A,\ B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

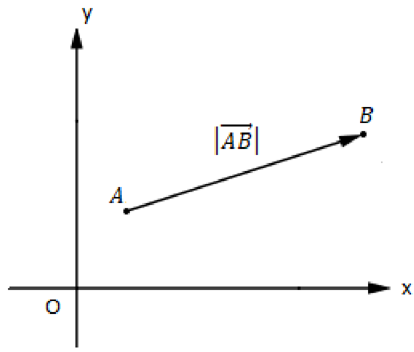


Figura 35: Distância entre A e B

2. **Vetor Unitário**

Dado um vetor $\vec{v}$ diferente do vetor nulo, podemos obter dois vetores paralelos a $\vec{v}$ e unitários: $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e seu oposto $-\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Exemplo:
O versor de $\vec{v} = (6,\ -8)$ é:

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{u}=\frac{(6,\ -8)}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}$$

$$\vec{u}=\frac{(6,\ -8)}{\sqrt{25}}$$

$$\vec{u}=\frac{(6,\ -8)}{10} = \left(\frac{6}{10}, \frac{-8}{10}\right)$$

O versor é, na verdade, um vetor unitário, pois

$$\left|\left(\frac{6}{10}, \frac{-8}{10}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{-8}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{100} + \frac{64}{100}} = \sqrt{\frac{100}{100}}=\sqrt{1} = 1$$

3.6.4 *Vetores ortogonais*

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores ortogonais também representados por $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Seja C o ponto tal que $AOBC$ forme um retângulo.

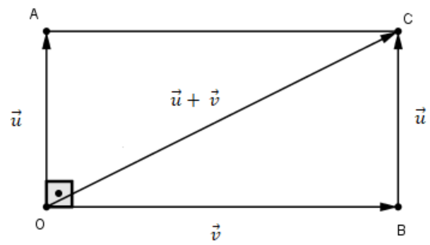


Figura 36: Vetores ortogonais

Neste caso, o triângulo OBC permite escrever:

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$

.

Escrevendo as coordenadas $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ a expressão anterior revela que

$$\begin{aligned}
(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \\
(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \\
2x_1x_2 + 2y_1y_2 &= 0 \\
x_1x_2 + y_1y_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Assim podemos concluir que $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são ortogonais se, e somente se,

$$\boxed{x_1x_2 + y_1y_2 = 0}$$

O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.

3.6.5 *Área do paralelogramo e do triângulo*

Demonstração da área do paralelogramo, consequentemente a área do triângulo, que nos auxiliara na resolução de exercício.

Área do paralelogramo da Figura 36 é dado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

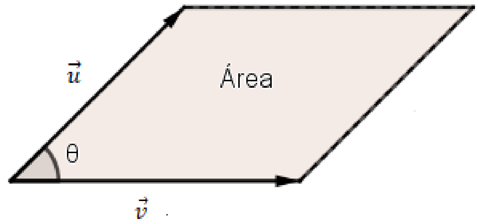


Figura 37: Área do paralelogramo

$$\vec{u} = (x_1,\ y_1)$$

$$\vec{v} = (x_2,\ y_2)$$

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

Demonstração:

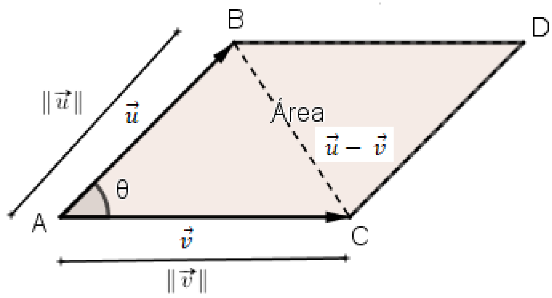


Figura 38: Área do triângulo ABC

Temos que área do triângulo ABC da Figura 37 é dado por: $A = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot sen\ \theta$
como $\theta \in [0,\ \pi]$ então $sen\ \theta \geq 0$ e portanto $sen\ \theta = \sqrt{1 - cos^2\theta}$
Assim

$$A = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sqrt{1 - cos^2\theta}$$

$$A = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot cos^2\theta}$$

Pela lei dos cossenos temos:
$(\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot cos\theta$
ou seja
$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot cos\theta = \frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$
Substituindo na expressão da área temos
$A = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \left(\frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]\right)^2}$
Considerando $\vec{u} = (x_1,\ y_1)$ e $\vec{v} = (x_2,\ y_2)$, teremos:

$$A = \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x_1^2 + y_1^2) - \left(\frac{1}{2}[x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2]\right)^2}$$
$$A = \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x_1^2 + y_1^2) - \left(\frac{1}{2}[2x_1x_2 + 2y_1y_2)]\right)^2}$$
$$A = \sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2 - (x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2)}$$

Assim,

$$A = \sqrt{x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2}$$
$$A = \sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}$$
$$A = |x_1y_2 - x_2y_1|$$
$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Logo podemos perceber que a área do triângulo é a metade da área do paralelogramo, ou seja, a área do triângulo é dada por:

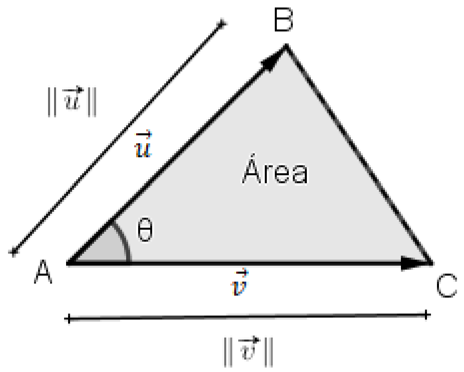


Figura 39: Área do triângulo ABC

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |x_1y_2 - x_2y_1|$$

3.6.6 ***Baricentro***

Considere um triângulo de vértices ABC sendo $M,\ N$ e P os pontos médios dos lados $BC,\ CA$ e AB respectivamente (Figura 38). Seja G o baricentro desse triângulo.

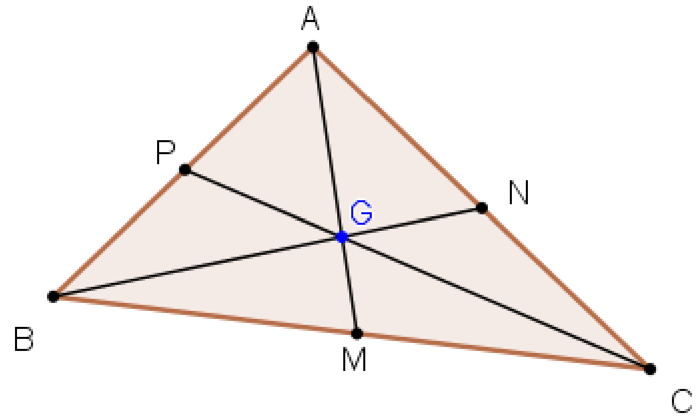


Figura 40: Baricentro do triângulo ABC

TEOREMA: O baricentro de qualquer triângulo intercepta as suas medianas na razão $r = \frac{2}{3}$.

Demonstração:

Se M é ponto médio de BC e N é ponto médio de AC então:
$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad (I) \\ \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \quad (II) \end{cases}$

Se G é o baricentro do triângulo, então G pertence ao segmento de reta AM. Isso significa que A,G e M são colineares. Das propriedades de múltiplo escalar de um vetor, essa última afirmação significa que existe um número real α tal que $\overrightarrow{AG} = \alpha \cdot \overrightarrow{AM}$. Logo:

$$\overrightarrow{AG} = \alpha \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow G = A + \alpha \cdot \overrightarrow{AM}\, (III)$$

Da mesma forma, podemos observar que:
$\overrightarrow{BG} = \beta \cdot \overrightarrow{BN} \Rightarrow G = B + \beta \cdot \overrightarrow{BN}\, (IV)$
Das equações vetoriais (III) e (IV), temos que:
$A + \alpha \cdot \overrightarrow{AM} = B + \beta \cdot \overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\alpha \cdot \overrightarrow{AM} + \beta \cdot \overrightarrow{BN} \quad (V)$
Substituindo (I) e (II) em (V) e sabendo que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$,temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} &= -\alpha \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right) + \beta \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \alpha + \beta\right) \cdot \overrightarrow{BC} + \left(-\alpha - \frac{1}{2} \cdot \beta\right) \cdot \overrightarrow{AC}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha - \beta\right) \overrightarrow{BC} = \left(1 - \alpha - \frac{1}{2} \cdot \beta\right) \overrightarrow{AC}$$

Como os vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplo escalar um do outro a única possibilidade é que $\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha - \beta\right) = 0$ e $\left(1 - \alpha - \frac{1}{2} \cdot \beta\right) = 0$. Ou seja,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot \beta = 1 \end{cases}$$

Esse sistema linear apresenta única solução, a saber, $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$. Com isso, fica demonstrado que G divide essas medianas na razão de $\frac{2}{3}$.

COROLÁRIO: Considere o triângulo dado acima. Sabendo que os vértices do triângulo são $A\left(x_1, y_1\right), B\left(x_2, y_2\right)$ e $C\left(x_3, y_3\right)$. Mostre que as coordenadas do baricentro $G\left(x_g, y_g\right)$ são dadas por:

$$\begin{cases} x_g = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y_g = \frac{y1+y_2+y_3}{3} \end{cases}$$

Demonstração:

Do teorema acima temos que:

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow \left(x_g - x_1, y_g - y_1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{x_2+x_3}{2} - x_1, \frac{y_2+y_3}{2} - y_1\right)$

Utilizando o conceito de igualdade de vetores, encontramos: $\begin{cases} x_g = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y_g = \frac{y1+y_2+y_3}{3} \end{cases}$

4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A seguir, é proposta uma sequência de 12 exercícios resolvidos usando conceitos de Geometria Analítica, para serem aplicados no currículo de matemática no Ensino Médio, posteriormente ou paralelamente a uma abordagem do conceito de vetores.

Desta forma o aluno fica exposto a duas diferentes formas de resolução do mesmo exercício, o que amplia horizontes para o aluno que tem facilidade com os conceitos e ideias matemáticas, e pode facilitar o entendimento daquele aluno que não tem o mesmo pensamento lógico, o que poderia lhe causar algum desconforto com soluções um pouco mais longas e menos concretas.

Exercício 1. *Dados os pontos* $A = (2,\ 6)$ *e* $B = (-4,\ 0)$*, determine o ponto médio.*

Resolução comum:

Suponha que M é um ponto na reta determinada por A e B que tem a mesma distância de A e de B. O coeficiente angular desta reta é $(6-0)/(2-(-4)) = 1$ e portanto uma equação desta reta é $y = 6 + x - 2$. Assim, M é um ponto de coordenadas $(x, x+4)$ que tem mesma distância de A e B. Ou seja,

$$\begin{aligned}
d(A,M) &= d(B,M)\\
\sqrt{(x-2)^2 + (x+4-6)^2} &= \sqrt{(x-(-4))^2 + (x+4)^2}\\
(x-2)^2 + (x+4-6)^2 &= (x-(-4))^2 + (x+4)^2\\
x^2 - 4x + 4 + x^2 - 4x + 4 &= 2(x^2 + 8x + 16)\\
-8x + 8 &= 16x + 32\\
-x + 1 &= 2x + 4\\
-3 &= 3x\\
x &= -1.
\end{aligned}$$

Portanto, o ponto médio tem coordenadas $(-1, 3)$.

Resolução com vetores:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} \Longrightarrow M - A = B - M \Longrightarrow 2M = A + B \Longrightarrow M = \dfrac{A+B}{2}$

$M = \dfrac{(2,\ 6) + (-4,\ 0)}{2}$

$M = \dfrac{(2 + (-4),\ 6 + 0)}{2}$

$M = \dfrac{(-2,\ 6)}{2}$

$M = (-1,\ 3)$

Logo o ponto médio é $M = (-1,\ 3)$

Observação: Outra forma de concluir, sem o uso de vetores, que as coordenadas do ponto médio de A e B são as médias das coordenadas de A e de B é observando que o triângulo retângulo de lado AB e lados paralelos aos eixos de coordenadas e o triângulo de lado AM e lados paralelos aos eixos são semelhantes com razão 2.

Exercício 2. *Sendo* $A(2,1)$, $B(5,2)$ *e* $C(6,5)$ *vértices consecutivos de um paralelogramo* $ABCD$. *Determine as coordenadas do vértice* D.

Resolução comum:

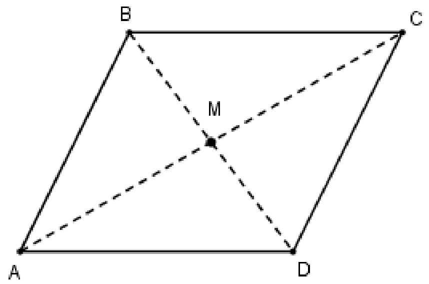


Figura 41: Paralelogramo $ABCD$

Baseado na observação anterior, temos que as coordenadas do ponto médio entre A e C é:

$$M_x = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$M_y = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo o ponto médio entre AC é $M = (4,\ 3)$

Temos que no paralelogramo o ponto médio entre BD é igual ao ponto médio entre AC, sendo assim, o ponto médio de $AD = (4,\ 3)$ logo:

$M_x = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{5 + x_D}{2} \Leftrightarrow 5 + x_D = 8 \Leftrightarrow x_D = 3$

$M_y = \dfrac{y_B + y_D}{2} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{2 + y_D}{2} \Leftrightarrow 2 + y_D = 6 \Leftrightarrow y_D = 4$

portanto as coordenadas do ponto $D = (3,\ 4)$

Resolução com vetores:

O vetor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Longrightarrow B - A = C - D$

$B - A = C - D$

$D = C + A - B$

$D = (6,5) + (2,1) - (5,2)$

$D = (6 + 2 - 5,\ 5 + 1 - 2)$

$D = (3,\ 4)$

portanto as coordenadas do ponto D são $(3,\ 4)$

Exercício 3. *Um treinador de futebol ao projetar um treino usando um programa de computador, usa os lados do campo, que tem formato retangular, como eixos do plano cartesiano. Ele pretende colocar dois cones: o 1º cone localizado no ponto $A(2,\ 4)$ e o segundo cone no ponto $B(-1,\ 8)$. Determine a distância entre as dois cones.*

Resolução comum:

$$
\begin{aligned}
d(A,\ B) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\\
d(A,\ B) &= \sqrt{(-1-2)^2 + (8-4)^2}\\
d(A,\ B) &= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}\\
d(A,\ B) &= \sqrt{9+16}\\
d(A,\ B) &= \sqrt{25}\\
d(A,\ B) &= 5
\end{aligned}
$$

Resolução com vetores:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 8) - (2,\ 4) = (-1-2,\ 8-4) = (-3,\ 4)$

$d(A,\ B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

$d(A,\ B) = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$

$d(A,\ B) = \sqrt{9+16}$

$d(A,\ B) = \sqrt{25}$

$d(A,\ B) = 5$

Nos dois próximos exercícios usaremos a fórmula abaixo na resolução comum.

Pois no ensino médio é conhecida a fórmula para calcular a área de um triângulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ por $\dfrac{|D|}{2}$ em que

$$
D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{array}
$$

$$
= \Big(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1\Big) - \Big(x_3y_2 + x_1y_3 + x_2y_1\Big).
$$

Exercício 4. *Determine a área do triângulo ABC cujas coordenadas são $A(5,2)$, $B(3,4)$ e $C(2,1)$.*

Resolução comum:

Calculando a área pela fórmula $S = \dfrac{|D|}{2}$ temos

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}$$

$$= (20 + 3 + 4) + (-8 - 5 - 6) = 27 - 19 = 8.$$

Logo área é $S = \dfrac{|D|}{2} = \dfrac{|8|}{2} = \dfrac{8}{2} = 4.$

Resolução com vetores:
Sejam os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tais que,
$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 4) - (5,\ 2) = (3 - 5,\ 4 - 2) = (-2,\ 2)$
$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ 1) - (5,\ 2) = (2 - 5,\ 1 - 2) = (-3,\ -1)$
temos a determinante:

$$\mathrm{D}(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{cc} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{array} = (-2)\cdot(-1) - ((-3)\cdot 2) = 2 + 6 = 8.$$

Logo área é $S = \dfrac{|D|}{2} = \dfrac{|8|}{2} = \dfrac{8}{2} = 4.$

Exercício 5. *Verificar se os pontos $A(5, 2)$, $B(4, 3)$ e $C(2, 1)$ são colineares.*

Resolução comum:

Caso os pontos sejam colineares então a área formada pelo triângulo de vértices nestes pontos é nula e caso não sejam então a área é diferente de zero. Ou seja, se obtermos valor zero ou diferente de zero para a área do triângulo com vértices nos pontos dados podemos dizer se estes pontos são colineares ou não. Veja que

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}$$

$$= (15 + 4 + 4) - (6 + 5 + 8) = 23 - 19 = 4 \neq 0.$$

Logo não são colineares.

Resolução com vetores:

Os três pontos são colineares se as retas determinada por A e B e por A e C forem paralelas coincidentes. Ora existem duas possibilidade: elas podem ser concorrentes ou paralelas coincidentes. Em termos de vetores, se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ forem múltiplos temos que as retas são paralelas coincidentes e os pontos serão colineares e se não forem múltiplos temos o caso contrário.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,\ 3) - (5,\ 2) = (4 - 5,\ 3 - 2) = (-1,\ 1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ 1) - (5,\ 2) = (2 - 5,\ 1 - 2) = (-3,\ -1)$

Como $\dfrac{-1}{-3} \neq \dfrac{1}{-1}$ os vetores não são múltiplos e portanto os pontos não são colineares.

Exercício 6. *Dados os pontos $P(x, 2)$, $A(4, -2)$ e $B(2, -8)$, calcular o número real x de modo que o ponto P seja equidistante de A e B.*

Resolução comum:

$$\begin{aligned} d(P,\ A) &= \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(4 - x_P)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{(4 - x_P)^2 + 16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P,\ B) &= \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(2 - x_P)^2 + (-8 - 2)^2} = \sqrt{(2 - x_P)^2 + 100} \end{aligned}$$

como, $d(P,\ A) = d(P,\ B)$ temos que:

$$\sqrt{(4 - x_P)^2 + 16} = \sqrt{(2 - x_P)^2 + 100}$$

$$(4 - x_P)^2 + 16 = (2 - x_P)^2 + 100$$

$$16 - 8x_P + x_P^2 + 16 = 4 - 4x_P + x_P^2 + 100$$

$$-8x_P + 4x_P = 104 - 32$$

$$-4x_P = 72$$

$$x_P = \frac{-72}{4}$$

$$x_P = -18$$

Resolução com vetores:

Considere o triângulo de vértices A, B e P. Seja M o ponto médio entre A e B. Veja que os triângulos de vértices A, M e P e de vértices B, M e P são congruentes pois os segmentos AP e BP tem mesmo comprimento, os segmentos AM e BM também e MP é um lado comum. Sendo assim o ângulo AMP é igual ao ângulo BMP, e portanto, são ângulos retos. Com isso temos que os vetores $\overrightarrow{MP}$ e $\overrightarrow{AM}$ (ou $\overrightarrow{AB}$) são ortogonais.

$\overrightarrow{AM} = M - A = (3,\ -5) - (4,\ -2) = (-1,\ -3)$
$\overrightarrow{PM} = M - p = (3,\ -5) - (x,\ 2) = (3 - x,\ -7) = 0$
Como $\overrightarrow{AM} = (-1,\ -3)$ e $\overrightarrow{MP} = (3 - x,\ -7)$ são ortogonais temos:
$(-1) \cdot (3 - x) + (-3) \cdot (-7) = 0$
$-3 + x + 21 = 0$
$x = -18$

Exercício 7. *Calcular o perímetro do triângulo ABC, sabendo que $A(1,3)$, $B(7,3)$ e $C(7,11)$.*

Obs.: Neste exercício a diferença de resolução é apenas com relação a notação.
Resolução comum:
$d(A,\ B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$d(A,\ B) = \sqrt{(7-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$
$d(A,\ C) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
$d(A,\ C) = \sqrt{(7-1)^2 + (11-3)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$
$d(B,\ C) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
$d(B,\ C) = \sqrt{(7-7)^2 + (11-3)^2} = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$
Portanto o perímetro do triângulo ABC é $6 + 10 + 8 = 24$

Resolução com vetores:
$\overrightarrow{AB} = B - A = (7,\ 3) - (1,\ 3) = (7 - 1,\ 3 - 3) = (6,\ 0)$
$d(A,\ B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36 + 0} = \sqrt{36} = 6$
$\overrightarrow{AC} = C - A = (7,\ 11) - (1,\ 3) = (7 - 1,\ 11 - 3) = (6,\ 8)$
$d(A,\ C) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$
$\overrightarrow{BC} = C - B = (7,\ 11) - (7,\ 3) = (7 - 7,\ 11 - 3) = (0,\ 8)$
$d(B,\ C) = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{0 + 64} = \sqrt{64} = 8$
Portanto o perímetro do triângulo ABC é $6 + 10 + 8 = 24$

Exercício 8. *Determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB em três partes iguais, sabendo que $A(-1,\ 7)$ e $B(11,\ -8)$.*

Resolução comum:

C divide o segmento AB na razão de $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{1}{2}$

$$x_C = \frac{x_A + r \cdot x_B}{1+r} = \frac{(-1) + \frac{1}{2} \cdot (11)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = 3$$

$$y_C = \frac{y_A + r \cdot y_B}{1+r} = \frac{(7) + \frac{1}{2} \cdot (-8)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{6}{2}}{\frac{3}{2}} = 2$$

portanto as coordenadas do ponto C são $(3,\ 2)$

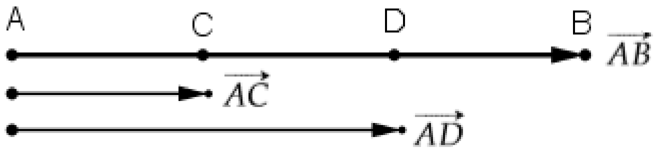
D divide o segmento AB na razão 2

$$x_D = \frac{x_A + r \cdot x_B}{1+r} = \frac{(-1) + 2 \cdot 11}{1+2} = \frac{21}{3} = 7$$

$$y_D = \frac{y_A + r \cdot y_B}{1+r} = \frac{(7) + 2 \cdot (-8)}{1+2} = \frac{-9}{3} = -3$$

portanto as coordenadas do ponto D são $(7,\ -3)$

Resolução com vetores:



$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$C - A = \frac{1}{3} \cdot (B - A) \Longrightarrow C = \frac{B - A}{3} + A \Longrightarrow C = \frac{B - A + 3A}{3} \Longrightarrow C = \frac{B + 2A}{3} \Longrightarrow C = \frac{(11,\ -8) + 2 \cdot (-1,\ 7)}{3} \Longrightarrow C = \frac{(11 - 2,\ -8 + 14)}{3} \Longrightarrow C = \frac{(9,\ 6)}{3} \Longrightarrow C = (3,\ 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$D - A = \frac{2}{3} \cdot (B - A) \Longrightarrow D = \frac{2 \cdot (B - A)}{3} + A \Longrightarrow D = \frac{2B - 2A + 3A}{3} \Longrightarrow D = \frac{2B + A}{3} \Longrightarrow D = \frac{2 \cdot (11,\ -8) + (-1,\ 7)}{3} \Longrightarrow D = \frac{(22 - 1,\ -16 + 7)}{3} \Longrightarrow D = \frac{(21,\ 9)}{3} \Longrightarrow D = (7,\ 3)$$

Exercício 9. *Obter as coordenadas do baricentro do triângulo ABC. Dados* $A(x_1,\ y_1)$*,* $B(x_2,\ y_2)$ *e* $C(x_3,\ y_3)$*.*

O baricentro, é o ponto de intersecção das medianas, que divide cada uma delas em duas partes que estão na razão de 2 para 1, no sentido do vértice para o ponto médio oposto.

Resolução comum:

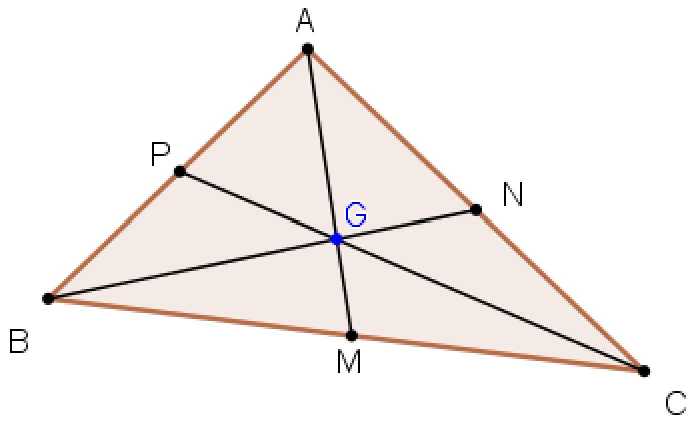


Figura 42: Baricentro do triângulo ABC

Portanto, sendo M o ponto médio do lado BC, temos:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM}$$

Projetando esses segmentos sobre os eixos Ox e Oy, temos;
em Ox: $x_G - x_A = \dfrac{2}{3} \cdot (x_M - x_A)$
em Oy: $y_G - y_A = \dfrac{2}{3} \cdot (y_M - y_A)$
então:
$x_G - x_1 = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{x_2 + x_3}{2} - x_1\right)$ e $x_G - y_1 = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{y_2 + y_3}{2} - y_1\right)$
Daí decorre que:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Resolução com vetores:
Mostre que as coordenadas do baricentro $G(x_G,\ y_G)$ são dadas por:
$\begin{cases} x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{cases}$
Demonstração: Do sistema acima temos que:
M é o ponto médio entre BC, ou seja, $M = \dfrac{(x_2 + x_3,\ y_2 + y_3)}{2}$
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow G - A = \frac{2}{3} \cdot (M - A) \Rightarrow (x_G - x_1,\ y_G - y_1) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x_2+x_3}{2} - x_1,\ \frac{y_2+y_3}{2} - y_1\right)$
Utilizando o conceito de igualdade de vetores, encontramos:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y_G = \frac{y1+y_2+y_3}{3} \end{cases}$$

Exercício 10. *Provar que os ponto médios dos lados do quadrilátero de vértices $A(a,\ b)$, $B(c,\ d)$, $C(e,\ f)$ e $D(g,\ h)$ são vértice de um paralelogramo.*

Resolução comum:

1) Aplicando a fórmula do ponto médio determinemos $M,\ N,\ P\ e\ Q$:

$$\mathbf{M} = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$
$$\mathbf{N} = \left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right)$$
$$\mathbf{P} = \left(\frac{e+g}{2}, \frac{f+h}{2}\right)$$
$$\mathbf{Q} = \left(\frac{a+g}{2}, \frac{b+h}{2}\right)$$

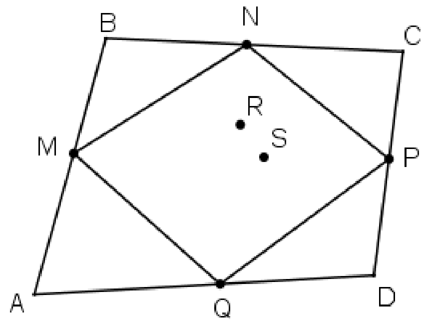


Figura 43: Paralelogramo $ABCD$

2) Provemos que as diagonais do quadrilátero $MNPQ$ se cortam ao meio, isto é, os seus pontos médios, R e S são coincidentes:

$$R = \begin{cases} x_R = \dfrac{x_N + x_Q}{2} = \dfrac{\frac{c+e}{2} + \frac{a+g}{2}}{2} = \dfrac{a+c+e+g}{4} \\ y_R = \dfrac{y_N + y_Q}{2} = \dfrac{\frac{d+f}{2} + \frac{b+h}{2}}{2} = \dfrac{b+d+f+h}{4} \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} x_S = \dfrac{x_M + x_P}{2} = \dfrac{\frac{a+c}{2} + \frac{e+g}{2}}{2} = \dfrac{a+c+e+g}{4} \\ y_S = \dfrac{y_M + y_P}{2} = \dfrac{\frac{b+d}{2} + \frac{f+h}{2}}{2} = \dfrac{b+d+f+h}{4} \end{cases}$$

$R = S \Longrightarrow MNPQ$ é um paralelogramo

Resolução com vetores:

Seja $ABCD$ um quadrilátero e sejam $M,\ N,\ P\ e\ Q$ os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente.

Sabendo que $MNPQ$ é um paralelogramo se e só se $MN \equiv QP$, basta verificar que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{QA} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DA}$

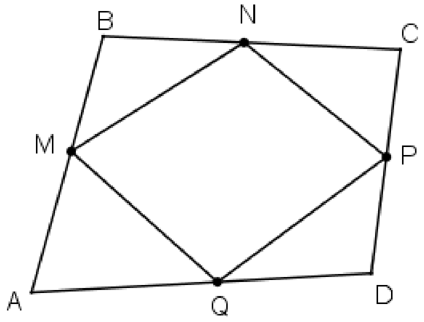


Figura 44: Paralelogramo $ABCD$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \cdot (B - A + C - B) = \frac{1}{2} \cdot (C - A) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

Analogamente

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{2} \cdot (D - C + A - D) = \frac{1}{2} \cdot (A - C) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA}$

Portanto $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$.

Semelhantemente provamos que $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.

Exercício 11. *Demonstrar o teorema da base média de um triângulo qualquer:*

Seja o triângulo ABC, cujas coordenadas são dadas por:

$A = (x_A,\ y_A),\ B = (x_B,\ y_B)$ *e* $C = (x_C,\ y_C)$

Sejam M e N os pontos médios respectivos dos lados AB e AC então

$\overline{MN} // \overline{BC}$ *e* $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$.

Resolução comum:

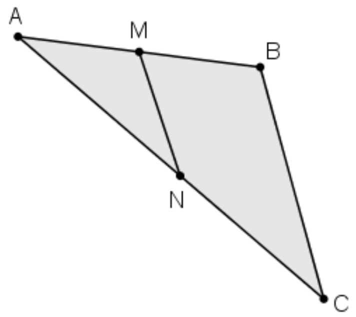


Figura 45: Triângulo ABC

O coeficiente angular da reta que passa por BC pode ser calculado por:

i. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$

Como M é o ponto médio de AB, temos que:

$M_x = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $M_y = \frac{y_A + y_B}{2}$

Para o ponto N, que é o ponto médio de AC, temos que:

$N_x = \frac{x_A + x_C}{2}$ e $N_y = \frac{y_A + y_C}{2}$

O coeficiente angular da reta que passa por MN é dado pro:

ii. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\dfrac{(y_A + y_B)}{2} - \dfrac{(y_A + y_C)}{2}}{\dfrac{(x_A + x_B)}{2} - \dfrac{x_A + x_C}{2}} = \frac{\dfrac{y_B - y_C}{2}}{\dfrac{x_B - x_C}{2}} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

Como as relações i e ii são iguais, temos que os coeficientes angulares das retas que passam por MN e BC são iguais, logo essas retas são paralelas.

A distância entre os pontos B e C é dada por:

$$d(B,\ C) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

E a distância entre os pontos M e N é dada por:

$$d(M,\ N) = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

$$d(M,\ N) = \sqrt{\left[\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) - \left(\frac{x_A + x_C}{2}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) - \left(\frac{y_A + y_C}{2}\right)\right]^2}$$

$$d(M,\ N) = \sqrt{\left(\frac{x_B - x_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_C}{2}\right)^2}$$

$$d(M,\ N) = \sqrt{\frac{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}{4}}$$

$$d(M,\ N) = \frac{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}}{2} = \frac{d(B,\ C)}{2}$$

Desta forma, fica demonstrado que:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

Resolução com vetores:

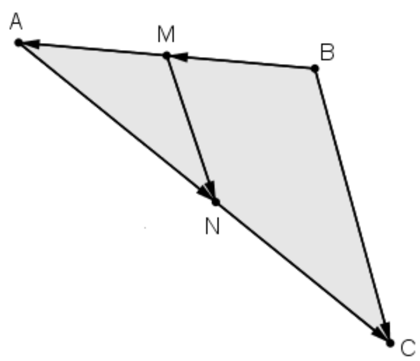


Figura 46: Triângulo ABC

Por hipótese

$$(1)\ \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} \Longrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{2}$$

$$(2)\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC} \Longrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$$

Pela álgebra vetorial temos:

$$(3)\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$$
$$(4)\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

Assim podemos substituir as relações (1) e (2) na relação (3) e obter

$\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}{2} = \dfrac{A - B + C - A}{2} = \dfrac{C - B}{2} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}$.

O fato de $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}$ quer dizer que $\overline{MN}//\overline{BC}$ e $\overline{MN} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

Exercício 12. *Dados $A(-2,\ 4)$ e $B(3,\ -1)$, vértices consecutivos de um quadrado, determine os outros dois vértices.*

Resolução comum:

O coeficiente angular de AB é:

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1 - 4}{3 - (-2)} = \dfrac{-5}{5} = -1$

A reta AB é perpendicular a reta BC sendo assim o coeficiente angular de BC é 1, temos que a equação da reta BC é:

$y - y_B = m \cdot (x - x_B)$

$y - (-1) = 1 \cdot (x - 3)$

$y = x - 4$

A distância entre $AB = BC$ por ser um quadrado.

$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

Substituindo os pontos A, B e $y = x - 4$, teremos:

$\sqrt{(3 - (-2))^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (x - 4 - (-1))^2}$

$\sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (x - 3)^2}$

$50 = x^2 - 6x + 9 + x^2 - 6x + 9$

$2x^2 - 12x - 32 = 0$ simplificando a equação temos:

$x^2 - 6x - 16 = 0$ fatorando $(x - 8)(x + 2) = 0$ sendo assim os valores de x são:

$x = 8$ ou $x = -2$

Para $x = 8,\ y = 8 - 4 = 4$ o ponto C tem coordenadas $(8,\ 4)$

Para $x = -2,\ y = -2 - 4 = -6$ o ponto C tem coordenadas $(-2,\ -6)$

Para determinar as coordenadas do vértice D faremos pelo ponto médio.

$\dfrac{A + C}{2} = \dfrac{B + D}{2} \Longrightarrow D = A + C - B$, para $C = (8,\ 4)$

$D = (-2,\ 4) + (8,\ 4) - (3,\ -1) = (3,\ 9)$

então um quadrado possível é com os vértices $C = (8,\ 4)$ e $D = (3,\ 9)$

O outro temos:

$\dfrac{A + C}{2} = \dfrac{B + D}{2} \Longrightarrow D = A + C - B$, para $C = (-2,\ -6)$

$D = (-2,\ 4) + (-2,\ -6) - (3,\ -1) = (-7,\ -1)$

o outro quadrado possível é com os vértices $C = (-2,\ -6)$ e $D = (-7,\ -1)$

Resolução com vetores:

Temos que:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -1) - (-2, 4) = (5, -5)$

Se C é o vértice consecutivo a B, sabemos que $\overrightarrow{BC}$ é ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ (já que $ABCD$ é um quadrado).

Basta então fazer $\overrightarrow{BC} = (5, 5)$ ou $\overrightarrow{BC} = (-5, -5)$ (note que em ambos os casos temos $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$).

Além disso, considerando D como o vértice consecutivo a C, temos que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (já que $ABCD$ é um quadrado).

Para o primeiro caso, teremos:

$C = B + \overrightarrow{BC} = (3, -1) + (5, 5) = (8, 4)$

$D = A + \overrightarrow{AD} = (-2, 4) + (5, 5) = (3, 9)$

Para o segundo caso, teremos:

$C = B + \overrightarrow{BC} = (3, -1) + (-5, -5) = (-2, -6)$

$D = A + \overrightarrow{BC} = (-2, 4) + (-5, -5) = (-7, -1)$

5 UMA REFLEXÃO SOBRE A APRENDIZAGEM COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Em nossa vida há sempre várias formas de se ver as situações problemas que o cotidiano nos apresenta, e com elas devemos aprender, porque a evolução e o crescimento passam pela resolução de problemas, então na Matemática, não poderia ser diferente.

[6]A busca por desenvolver nos alunos a capacidade de apreender o processo de aprender, é um aspecto fundamental para que ocorram as mudanças educacionais, e para que sejam estimuladas as diferentes pesquisas nesta área. Segundo Bachelard (A formação do espírito científico, 1996, p. 18), "para um espírito científico, todo conhecimento é uma resposta a uma pergunta. Se não existe pergunta não pode haver conhecimento científico. Nada vem sozinho, nada é dado. Tudo é construído."(apud CHARNAY, Roland 1996, p. 36). A história da Matemática, em sua complexa evolução e em suas revoluções alicerça, de forma adequada, a citação de Bachelard. A matemática têm se constituído como resposta a perguntas traduzidas em outros tantos problemas. Essas perguntas têm apresentado variações em suas origens e em seus contextos: problemas de ordem familiar/pessoal (divisão de terras, cálculos de créditos); problemas estreitamente vinculados com outras ciências (astronomia, física); especulações relativas a "objetos" pertinentes à própria matemática; necessidade de estruturar elementos já existentes, entre outras situações.

[6]Não se faz necessário afirmar que a atividade de resolução de problemas pertence à própria base da elaboração da ciência matemática, afinal, "fazer matemática é resolver problemas!", não há como mudar este enunciado real. Toda vez que se dá início à resolução de um problema, é preciso ter em mente, que se está diante de uma situação que pressupõe mudança. Entretanto, nenhuma elaboração é realizada sem dificuldade. Os problemas oferecem resistência com frequência; quase sempre as soluções são parciais, mesmo quando ideias geniais provocam avanços fantásticos, os quais, muitas vezes, não obtêm reconhecimento imediato.

De acordo com A. Dahan Dalmedico e J. Peiffer (Une historie des mathématiques, Paris, Le Seuil, 1986, p.9) " No uso frequente de textos originais e também no de obras gerais, soma de saberes historicamente acumulados neste domínio, temos descoberto um esquema complexo e difuso feito de conjecturas, de dúvidas, de gafes, de modelos concorrentes, de brilhantes intuições e também de momentos de axiomatização e sínteses."

Estas considerações bastante esquemáticas sobre a origem do conhecimento matemático e relativas às condições de sua elaboração podem encontrar reflexos sobre a questão da aprendizagem Matemática no contexto escolar, pois as ferramentas ou noções elaboradas em uma determinada época ocorrem, com efeito, em um dado contexto cultural, histórico, social e econômico, que não é, muitas vezes, aquele em que vivem os atuais alunos. Vale destacar que são os problemas que lhes deram origem (e os que demandaram continuidade), aqueles que têm dado sentido à matemática produzida nesta geração. Possivelmente, esta é uma das grandes lições que os estudiosos matemáticos precisam levar em consideração.

Para construir o sentido...

[6]Um dos objetivos principais (e ao mesmo tempo uma das maiores dificuldades) do ensino da matemática é que aquilo que se ensine esteja carregado de significado, tenha sentido para os alunos.

Segundo G. Brousseau (1983 – nº42, p. 170), o sentido de um conhecimento matemático se define não só pela coleção de situações em que este conhecimento é realizado como teoria matemática; não só pela coleção de situações em que o sujeito o encontrou como meio de solução, mas também pelo conjunto de concepções que rejeita, de erros que evita, de economias que procura, de formulações que retoma, entre outros.

Vale ressaltar que a construção da significação de um conhecimento deve ocorrer em dois níveis:

- Nível "externo": qual é o campo de utilização deste conhecimento e quais são os seus limites?

- Nível "interno": como e para que funciona tal ferramenta?

Desta maneira, a questão essencial do ensino da matemática é fazer com que os conhecimentos ensinados tenham sentido para o aluno. O educando deve ser capaz não só de repetir ou refazer, mas também de ressignificar situações novas, de realizar adaptações, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas.

Num primeiro momento, são desvendadas as noções matemáticas como ferramentas para resolver problemas, situação que permitirá aos alunos construir o sentido. Em seguida, estas ferramentas poderão ser estudadas por si mesmas. Para que o aprendente chegue em suas próprias conclusões na solução de um problema são necessários alguns passos: compreensão do problema, decifrando a incógnita e o que está condicionado para descobri-la; busca pela conexão entre a incógnita com os demais dados do problema; retomada e reconhecimento de problemas semelhantes e definição de passos a serem utilizados para encontrar a solução; chegada a um plano para a sua resolução; execução do plano traçado e por fim, análise da solução obtida (Polya, 1995).

Estratégias de aprendizagem

Sendo assim, cabe ao professor a escolha de uma estratégia de aprendizagem, a qual (ao menos implicitamente) é influenciada por múltiplas variáveis: o ponto de vista do professor a respeito da disciplina ensinada (o que é a matemática?, o que é fazer matemática?), sua perspectiva sobre os objetivos gerais do ensino e sobre os objetivos que considera específicos da matemática, sua observação a respeito dos alunos (possibilidades, expectativas, dificuldades), a imagem que possui frente às demandas da instituição de ensino (explícitas, implícitas e supostas), à demanda social (incluindo, também, dos pais dos alunos), entre outros aspectos.

A fim de descrever alguns modelos de aprendizagem, é possível estabelecer um apoio na ideia de "contrato didático", tal como Brousseau o definiu:

"O conjunto de comportamentos (específicos) do professor que não são esperados pelo aluno, e o conjunto de comportamentos do aluno que não são esperados pelo professor, são os que regulam o funcionamento da aula e as relações professor-aluno-conhecimento, definindo assim os papéis de cada um e a repartição das tarefas: quem pode fazer o quê? Quem deve fazer o quê?, Quais são as finalidades e os objetivos?"

Diante disso, uma situação de ensino pode ser observada por meio das relações que se movimentam entre três pólos: professor, aluno e conhecimento, analisando-se a distribuição dos papéis de cada um; o projeto individual de cada sujeito; as regras do jogo (o que é permitido, o que é que realmente se propõe, o que é esperado, o que se deve fazer ou dizer para "mostrar que se sabe"). Esquematicamente podem ser descritos três modelos de referência:

1. Modelo normativo (centralizado no conteúdo): trata-se de transmitir, de comunicar um conhecimento aos alunos.

2. Modelo iniciativo (centralizado no aluno): para começar, pergunta-se ao aluno a respeito de seus interesses, suas motivações, suas próprias necessidades, o meio que o rodeia.

3. Modelo aproximativo (centralizado na construção do conhecimento do aluno): propõe-se partir de modelos, de concepções existentes no aluno e coloca-las à prova para melhorá-las, modificá-las ou construir novas.

É possível perceber que nenhum professor utiliza exclusivamente um dos modelos, pois o ato pedagógico (em toda sua complexidade) utiliza elementos de cada um deles, porém, apesar de tudo, cada professor faz uma escolha, consciente ou não e de maneira privilegiada, de um deles. O estudo destes modelos fornece um bom instrumento para a análise das situações didáticas e de reflexão para os professores em formação. "Um problema não acaba na conferência da resposta, porque exige a discussão das soluções, a análise dos dados e, finalmente, uma revisão e o questionamento da própria situação inicial". O fato de investigar o problema, seguindo os passos acima citados, pode se tornar um hábito para o aluno, e sua capacidade de interpretação poderá ser beneficiada.

Percebe-se que, adotando esta postura, professor e aluno estarão envolvidos em um processo que visa desenvolver constantemente o senso-crítico de ambos, tornando-os questionadores e sujeitos que lidariam com maior facilidade para com situações adversas do cotidiano. As atividades de resolução de problemas devem ter um espaço para debate, visando que cada aluno conheça a opinião do colega e que não prevaleça somente o que o professor diz, como normalmente acontece nas aulas de Matemática. Incentivar os alunos a pensar, não aumenta apenas o rendimento na disciplina de Matemática, mas os capacita para a investigação em outras áreas e os desenvolve como pessoas que não têm medo de tentar e de tomar decisões.

Pode-se considerar que, se por um lado, a resolução de problemas é o processo que permite atribuir sentido e significado ao fazer matemático na escola, o que determinará a ampliação da capacidade reflexiva do aluno, em grande parte, serão o planejamento e a condução do processo da aula. Assim, a mudança da visão da Matemática (como uma disciplina na qual se reproduzem modelos ou se executam exercícios) para uma outra, marcada pela investigação, pela possibilidade de diálogo e de aprendizagem significativa é uma decisão didática em profunda relação com aquilo que se acredita que seja ensinar e aprender Matemática (SMOLE, 2008).

O grande desafio é tornar possível a matemática para todos, hoje em dia os docentes tem afastado os alunos de si e da matemática, com isso o aluno se desespera quando olha para o problema e já vai admitindo que não sabe resolver, sem se quer verificar suas habilidades e domínio de seu raciocínio lógico, buscar outras formas de resolução é ensinar caminhos diferentes, é desenvolver suas próprias estratégia para resolver o problema que é proposto.

6 CONCLUSÃO

O trabalho aqui apresentado é uma proposta de análise das possibilidades de como o professor de Matemática poderá contribuir com o processo de ensino e aprendizagem,fazendo dele um momento mais simples e concreto para o aluno,lançando mão do conceito de vetores, parte do currículo de Física no Ensino Médio, trazendo-o pra a Matemática, considerando que este componente curricular oferece a alternativa de promover aos alunos um melhor aproveitamento em muitos tópicos da referida disciplina, a partir da utilização dos conhecimentos relacionados ao conceito de vetor.

O cotidiano escolar mostra que o currículo básico de Matemática para o Ensino Médio é amplo e a carga horária, em geral, não é compatível com o tanto a ser ensinado em três anos de Ensino Médio. Sendo assim, a sugestão aqui exposta não é a de acrescentar um novo conteúdo ao currículo de Matemática, no último ano da Educação Básica, mas sim de promover uma reflexão de como o professor desta disciplina pode contribuir com o ensino de vetores e, a partir daí, com a resolução de problemas. Inclusive, vale destacar que alguns dos tópicos de Matemática estudados pelos alunos no 3º ano do Ensino Médio podem ser vistos sob a ótica dos vetores.

Sendo assim, é necessário reafirmar que o estudo dos vetores pode ser expandido e, desta forma,contribuir para o estudo de distâncias entre dois pontos, distância entre planos, estudo das propriedades de figuras espaciais, entre outras possibilidades. Sendo assim, razões não faltam para que o discente, no Ensino Médio, venha a ter também a possibilidade de resolver problemas sob a ótica do estudo de vetores. E assim, conhecer mais maneiras de resolução de exercícios provindos da geometria analítica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] DELGADO, Jorge; Frensel, Katia; Crissaff, Lhaylla ***Geometria analítica*** Coleção PROFMAT, Editora SBM 2013.

[2] IEZZI, Gelson ***Fundamentos da Matemática Elementar 7*** *(Geometria Analítica)*, Atual Editora São Paulo.

[3] LIMA, Elon L. ***Geometria analítica e Álgebra Linear***, Editora SBM, 2ª edição, Rio de Janeiro 2011.

[4] LORETO, Ana Célia da Costa; Loreto Jr., Armando Pereira ***Vetores e Geometria analítica-Teoria e Exercícios e Álgebra Linear***, 4ª edição 2014 Editora LCTE.

[5] OLIVEIRA, Oswaldo Rio Branco; **A descoberta matemática de Wessel** Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo Setembro de 2016 `http://www.ime.usp.br/~oliveira`

[6] PARRA, Cecilia ***Didática da matemática reflexões psicopedagógicas*** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

[7] RIHGETTO, Armando ***Vetores e Geometria Analítica***, Instituto Brasileiro de Edições Científicas LTDA, São Paulo 1982.

[8] REMAT (Revista Eletrônica da Matemática) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul.A utilização de Resolução de Problemas como estratégia pedagógica no ensino da Matemática no Ensino Básico

`https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/u49fw5fm9u0.pdf`

[9] WINTERLE, Paulo ***Vetores e Geometria analítica***, Editora Makron Books 2007.