UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Washington Luiz de França Júnior

Números complexos: uma proposta de ensino

Niterói - RJ
2013

WASHINGTON LUIZ DE FRANÇA JÚNIOR

Números complexos: uma proposta de ensino

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense.

Orientadora: Professora Cecília de Souza Fernandez

Niterói/RJ
2013

WASHINGTON LUIZ DE FRANÇA JÚNIOR

Números complexos: uma proposta de ensino

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Aprovada em 26 de março de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Professora Cecília de Souza Fernandez - Orientadora

UFF

Professor Paulo Roberto Trales

UFF

Professor Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira

IMPA

Niterói/RJ
2013

DEDICO ESTE MOMENTO IMPORTANTE ÀS PESSOAS MAIS IMPORTANTES NA MINHA VIDA! QUE DEUS SEMPRE ME DE MOTIVOS PARA MEUS PAIS SE ORGULHAREM DE MIM!

Primeiro, gostaria de agradecer à Deus pela vida e pela saúde todos os dias. Aos meus irmãos Alysson e Bruno pelo amor, carinho e amizade. À minha noiva Camila pelo amor e apoio durante meus estudos. Ao meu amigo Waldek pela amizade e companherismo. Aos meus colegas de turma, que juntos, conseguimos contornar as dificuldades. E por fim, minha Professora Orientadora Cecília S. Fernandez, que me proporcionou, através do seu conhecimento, experiência e didática, a realização do meu trabalho.

RESUMO

O aprendizado de conteúdos matemáticos nas escolas públicas e particulares do nosso país passa por diversas dificuldades. Isso se reflete na procura, cada vez menor, de jovens para os cursos de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática. Nosso país tem muita carência, tanto no ensino quanto na pesquisa, de profissionais nesta área do saber. Talvez a maneira como certos conteúdos matemáticos estão sendo apresentados, no Ensino Básico, seja um dos motivos para esta realidade.

Nosso trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino para um conteúdo matemático particular: números complexos. Geralmente este tema é apresentado ao aluno por uma equação do segundo grau, com discriminante negativo, para, em seguida, apresentar um número complexo como um número na forma $a + bi$, com a e b denotando números reais e $i = \sqrt{-1}$. Nossa proposta é de apresentar os números complexos como pares ordenados de números reais, com as operações de adição e multiplicação, que definiremos, obtendo uma nova estrutura algébrica.

Palavras chaves: Números complexos, Educação Básica, Ensino-aprendizagem.

Abstract

The learning of mathematical subjects in public and private schools of our country goes through many difficulties. This reflects on demanding, less and less, of youngs for both teaching and bachelor's undergraduate courses in Mathematics. Our country has a lack of professionals in this area, both in teaching and in research. Maybe the way how certain mathematical subjects have been presented, in basic education, is one of the reasons for this reality.

Our work aims to present a teaching proposal for a particular mathematical subject: complex numbers. Usually, this issue is presented to the student by a quadratic equation with negative discriminant and, then, a complex number is defined as a number in the form $a + bi$, with a and b being real numbers and $i = \sqrt{-1}$. Our proposal is to introduce complex numbers as ordered pairs of real numbers, with the operations of addition and multiplication, which will be defined, getting a new algebraic structure.

Keywords: Complex numbers, Basic Education, Teaching and learning.

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Primeiro dia de aula sobre números complexos em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio. O professor coloca no quadro uma equação do segundo grau, com discriminante negativo. Logo que ouve dos alunos que tal equação não tem solução, diz para a turma que existe um número que permite o prosseguimento dos cálculos. Mais especificamente, que a raiz quadrada de um número negativo tem solução.

Certamente muitos professores de Matemática do Ensino Médio iniciam suas aulas com essa abordagem ou de forma muito parecida. Afirmam que um número complexo é um número que aparece na forma $a+b.i$, com a e b denotando números reais e i denotando $\sqrt{-1}$. Afirmam também que foram criados para solucionar equações quadráticas com discriminante negativo. Em seguida, iniciam-se operações usando números complexos.

Será que essa forma de inciar a aula não gera no aluno mais dúvidas do que esclarecimentos? Será que essa forma permite ao aluno ter o completo entendimento do que há por trás em se escrever um número na forma $a + b.i$? Será que o aluno compreende como é possível o produto de dois números ter como resultado $\sqrt{-1}$?

Nesse trabalho entrevistou-se um grupo de 100 alunos que já terminaram o Ensino Médio, assim como um grupo de 30 professores que lecionam no mesmo segmento, para investigar as dificuldades de aprendizado do conteúdo. Ao mesmo tempo, neste trabalho, sugerimos que a definição de números complexos nas primeiras aulas seja feita por meio de pares ordenados, com suas operações de adição e multiplicação bem definidas, criando uma nova estrutura algébrica. Sugerimos também que, nas aulas, seja feito um relato histórico dos números complexos para um melhor entendimento do seu surgimento, e não simplesmente para resolver equações do segundo grau com discriminante negativo. Inclusive, os resultados dos questionários apontam uma relação direta entre os professores que iniciam suas aulas definindo um número complexo como da forma $a + b.i$ e como explicam o porquê do seu surgimento. Os poucos professores que afirmaram iniciar suas aulas por meio de pares ordenados, apontam para os alunos o real motivo de como e porque os números complexos surgiram.

No Capítulo 2 apresentamos as abordagens sobre números complexos em alguns livros didáticos do Ensino Médio e em alguns sítios da internet.

No Capítulo 3 apresentamos a possível realidade do ensino dos números complexos nas escolas. Fizemos um levantamento, por meio de questionários, sobre o ensino e a aprendizagem dos números complexos com alguns professores de escolas públicas e particulares das cidades de Niterói e do Rio de Janeiro.Também fizemos este levantamento com alunos que concluíram o Ensino Médio. Foram 100 alunos, sendo 50 deles que ingressaram nos cursos de Matemática ou Engenharia da UFF. Os 50 restantes são alunos que concluíram o Ensino Médio, mas que não ingressaram em cursos de graduação da área de Ciências Exatas. Os resultados destes questionários são apresentados e discutidos.

No Capítulo 4, apresentamos uma proposta de ensino para o tema de números complexos.

No Capítulo 5 fazemos nossas considerações finais, apresentando uma conclusão do trabalho realizado.

Capítulo 2

ALGUMAS ABORDAGENS ENCONTRADAS EM LIVROS DIDÁTICOS E *SITES* DA INTERNET

Nesse capítulo vamos apresentar como alguns autores de livros didáticos do Ensino Médio definem os números complexos, assim como em alguns textos sobre o mesmo assunto encontrados na Internet. Vale destacar que, após as definições e as introduções feitas por cada autor, os capítulos posteriores tratam da forma algébrica, das operações usuais de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação dos números complexos.

O primeiro livro analisado é do autor Manoel Paiva, no livro MATEMÁTICA PAIVA, volume 3. Ele inicia o tema com um problema concreto e mostra a insuficiência dos números reais para resolvê-lo. O problema traz duas caixas de água, uma em forma de cubo de aresta x, e outra em forma de paralelepípedo reto retângulo, de altura x e base com área $6m^2$. O volume da caixa cúbica deve ser $4m^3$ menor que o volume da segunda caixa. Com isso, encontra-se a equação $x^3-6x+4=0$, onde o autor usa um método conhecido como método de Tartaglia, para encontrar as soluções $x_1 = \frac{\sqrt[3]{-4+\sqrt{-16}}}{2}$ e $x_2 = \frac{\sqrt[3]{-4-\sqrt{-16}}}{2}$. Em seguida, o autor lembra ao aluno a não existência da raiz quadrada de um número negativo. Esse questionamento pode induzir ao aluno achar que o problema não tem solução real. Porém, no parágrafo seguinte, o autor apresenta uma solução $x=2$, que é proveniente das soluções encontradas acima. Ele afirma que encontrar essa solução real nos leva a admitir a existência de um número não real. Após a introdução, o livro apresenta um novo capítulo, dizendo que os matemáticos definiram o número i

com sendo unidade imaginária e, a partir daí, estabeleceram um número complexo como sendo um número na forma $a + bi$, sendo que $i^2 = -1$.

O segundo livro analisado é do mesmo autor do livro anterior. Paiva traz em seu livro MATEMÁTICA, TERCEIRA SÉRIE, ENSINO MÉDIO, uma motivação diferente. Afirma que os conjuntos numéricos estudados no Ensino Médio foram criados a partir das necessidades de se efetuar algumas operações impossíveis nos conjuntos já existentes. Como exemplo, cita a necessidade da criação do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ quando tentamos efetuar, por exemplo, a subtração $3-5$ no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Em seguida, cita a impossibilidade, no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, de calcular a raiz quadrada de números negativos e, por isso, foi criado um novo número, denominado de unidade imaginária, indicado pela letra i, tal que $i^2 = -1$. Afirma que, como consequência, surgiram os números complexos, que são números da forma $a + bi$, com a e b sendo números reais. Por fim, define o conjunto dos números complexos, indicado pelo símbolo $\mathbb{C}$, como sendo $\mathbb{C} = \{a + b.i$, com a e b reais$\}$. Após a definição do conjunto $\mathbb{C}$, apresenta alguns exemplos tais como $3+2i$ é um número complexo, onde 3 é a parte real e 2 é a parte imaginária, e $5i$ pode ser representado por $0+5i$, onde 0 representa a parte real e 5 a parte imaginária, antes de partir para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos, usando a forma algébrica.

No livro de Adilson Longen, COLEÇÃO MATEMÁTICA, UMA ATIVIDADE HUMANA, TERCEIRA SÉRIE, a introdução é feita através da parte histórica, destacando que no século XVI algumas equações de terceiro grau na forma $x^3 + a.x + b = 0$ não tinham solução, até que um matemático chamado Gerolamo Cardano apresentou a seguinte fórmula para essas equações:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{E}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{E}},$$

onde $E = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3$. Porém, começaram a surgir alguns problemas quando usava-se a fórmula de Cardano. Como exemplo deu a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Ao calcular o E, obtemos $E = -121$. Substituindo na fórmula, obtemos x $= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{121}}$. Em seguida, o autor cita que foi o matemático Bombelli que observou ser possível escrever $\sqrt{-121}$ da seguinte forma: $\sqrt{-121} = \sqrt{121.(-1)} = \sqrt{121}.\sqrt{-1}$. O autor afirmou que, embora parecesse estranho a ideia de existir a raiz quadrada de um número negativo, esse novo número representava perfeitamente a raiz de certas equações. Após esta introdução histórica, o autor parte para a definição de número complexo da seguinte maneira: número complexo é todo aquele que pode ser escrito na forma $a + b.i$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. Em seguida, o autor define as operações de números complexos, usando sempre a forma algébrica.

Para José Giovanni e José Bonjorno, autores do livro MATEMÁTICA, UMA NOVA ABORDAGEM, volume 3, a opção utilizada para o primeiro capítulo sobre números complexos foi a de apresentar um problema que levava a solução de uma equação do segundo grau. O problema consiste em dividir dois números cuja soma é 18 e o produto é 82, ou seja, resolver a equação $x^2 - 18x + 82 = 0$. Os autores resolveram esta equação, usando a fórmula de Bháskara, encontrando como soluções $x_1 = 9 + \sqrt{-1}$ e $x_2 = 9 - \sqrt{-1}$, destacando que o número $\sqrt{-1}$ não tem significado no conjunto dos números reais. Os autores detacaram que, por volta do século XVI, quando os matemáticos se depararam com esse tipo de equação (com discriminante negativo), simplesmente diziam que tais equações não tinham solução. No capítulo seguinte é que os autores explicam quando os números complexos passaram a ser aceitos pela comunidade matemática, quando se descobriu uma fórmula para solucionar equações do terceiro grau, obtendo raízes quadradas de números negativos, que geravam soluções reais. Em seguida, citaram que o número i foi criado para simbolizar $\sqrt{-1}$ e que $i^2 = -1$ e, a partir daí, definiram um número complexo como sendo um número na forma $a+bi$, colocando como exemplo as soluções do problema citado, onde $x_1 = 9+\sqrt{-1}$ e $x_2 = 9-\sqrt{-1}$ se transformavam respectivamente em $9 + i$ e $9 - i$.

José Luiz Pastore Mello, no livro MATEMÁTICA, CONSTRUÇÃO E SIGNIFICADO, faz uma abordagem parecida com a do livro MATEMÁTICA, UMA NOVA ABORDAGEM. Ele inicia dizendo que, na primeira metade do século XVI, foi descoberto por um matemático chamado Cardano, um método para resolver alguns tipos de equações de terceiro grau. Apresenta, como exemplo, a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, na qual uma das soluções encontradas pelo método citado apresentam raízes quadradas de números negativos, mas que geram uma solução real $x = 4$. O autor afirma que isso causou um impasse nos matemáticos, pois não compreendiam como era possível, a partir de uma solução não real, obter a solução $x = 4$. Conta também que alguns matemáticos decidiram prosseguir e investir nos tipos de números encontrados por Cardano, entre eles, Rafhael Bombelli, que desenvolveu uma teoria sobre os resultados encontrados. O autor afirma também que só a partir dos estudos de Bombelli, os números complexos passaram a ser mais aceitos entre os matemáticos. No parágrafo seguinte, José Luiz Pastore Mello escreve que os números complexos são usados na Engenharia (modelagem de circuitos elétricos e nos movimentos de líquidos e gases ao redor de obstáculos), na Geometria Fractal e nos Sistemas Dinâmicos (no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia). Após essa introdução, o autor define a unidade imaginária como o número i tal que $i^2 = -1$. A partir daí, define que todo número complexo apresenta a foma $a + b.i$ e, em seguida, apresenta as operações da adição, subtração, multiplicação e divisão.

No livro de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO, volume 3, a introdução é muito parecida com a do autor José Luiz Pastore Mello. Smole e Diniz apresentam uma equação do segundo grau, com discriminante negativo. Afirmam que os matemáticos antigos tinham dificuldade em admitir a existência da raiz quadrada de um número negativo, até a descoberta de um método para solucionar equações do terceiro grau, encontrando soluções não reais, que deram origem à soluções reais. Em seguida, elas citam o prosseguimento dos estudos desses novos números pelo matemático Rafael Bombelli, juntamente com os resultados e notações que outros matemáticos puderam desenvolver a partir do que já havia sido obtido. Após o breve relato histórico, as autoras apresentam outra equação do segundo grau, $x^2 - 6x + 13 = 0$, encontrando como soluções $x_1 = 3+\sqrt{-4}$ e $x_2 = 3-\sqrt{-4}$. Em seguida, definem que $\sqrt{-4} = 2i$, ou seja, as duas soluções encontradas são $x_1 = 3+2i$ e $x_2 = 3-2i$. A partir daí, as autoras partem para a definição de um número complexo. Elas definem um número complexo como sendo um par ordenado (a, b), que pode ser escrito na forma $a + bi$, onde a e b são reais e i é chamado de unidade imaginária. Vale ressaltar que apenas na definição incial faz-se referência a um número complexo como par ordenado. Em seguida, apresentam as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão dos números complexos.

Este último livro citado faz apenas uma pequena referência ao par ordenado para tratar de um número complexo, não mostrando como ele pode ser escrito na forma $a + b.i$. Todos os outros livros analisados, até o momento, apresentam um número complexo como sendo um número na forma $a + bi$, onde a e b denotam números reais, e i denota $\sqrt{-1}$. Porém, as autoras acima se preocuparam em citar que a aparição dos números complexos não se deu da necessidade de resolver equações do segundo grau com discriminantes negativos, e sim na tentativa de solucionar equações de terceiro grau, diferentemente do modo como usualmente é abordado nas escolas, nas primeiras aulas sobre o tema. Após a abordagem incial, todos os livros analisados concentram seus esforços nas operações usuais com números complexos na forma $a + bi$, com exemplos resolvidos e exercícios.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Gegenszajn e Roberto Périgo, autores do livro MATEMÁTICA, volume único, fizeram uma introdução diferente dos autores anteriores. Primeiro fizeram um breve relato histórico de como os matemáticos dos séculos anteriores se depararam com o fato das soluções não reais encontradas no método de resolução de equações de terceiro grau geravam raízes reais. Porém, dessa vez os autores apresentam uma introdução aos complexos, diferente dos demais, definindo inicialmente as seguintes operações com pares ordenados:

adição: (a,b) + (c,d) = (a + b,c + d);

subtração: (a,b) - (c,d) = (a - c, b - d);

$$\text{multiplicação: (a,b) . (c,d) = (ac - bd,ad + bc).}$$

Em seguida, destacaram que o par ordenado (0,1), chamado de unidade imaginária, multiplicado por ele mesmo, resulta em -1. Logo após, representam o par ordenado (0,1) pela letra i, concluindo que $i^2 = -1$. No capítulo seguinte, os autores afirmam que o conjunto dos números complexos é o conjunto dos pares ordenados (x, y), onde x e y são reais, e que $x = (x, 0)$, $y = (0, y)$. Por meio da multiplicação de pares ordenados, concluem que todo par ordenado (x, y) pode ser escrito como $(x, 0) + (0, y).(0, 1)$, ou seja, $(x, y) = x + y.i$, caracterizando a forma algébrica de um número complexo. Por fim, os autores têm a preocupação de demonstrar, através de pares ordenados, todas as propriedades necessárias para que esse novo conjunto seja um corpo. Só após essa apresentação é que os autores caracterizarem que todo número complexo (a, b) pode ser escrito na forma $a + bi$, conforme mostrado acima, e iniciam as atividades com as operações usuais, usando a forma algébrica.

No livro MATEMÁTICA, CONTEXTO E APLICAÇÕES, do Luiz Dante, o autor afirma no capítulo inicial que os complexos são números em que as operações de adição e multiplicação devem existir, de forma que possibilitem a extração de raiz quadrada de número negativo. No mesmo capítulo, o autor afirma que uma boa definição de número complexo é a apresentada por Gauss e reforçada por Hamilton em 1837, em forma de pares ordenados, o que se assemelha muito com a forma apresentada no livro do Iezzi e autores. São as mesmas preocupações em definir as operações de números complexos, usando pares ordenados e com a estrutura algébrica criada a partir dessas definições. O autor também apresenta a mesma estratégia, mostrando que um número complexo, escrito em forma de par ordenado, pode ser escrito na forma algébrica e, somente a partir desse ponto, inicia as operações com complexos na forma algébrica.

Por fim, no livro FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR, VOLUME 6, do autor Gelson Iezzi, o primeiro capítulo traz a definição de um número complexo. Primeiro, o autor define o produto cartesiano $\mathbb{R}\text{x}\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ como sendo

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\}.$$

Depois, o autor toma dois elementos (a,b) e (c,d), de $\mathbb{R}^2$, para apresentar a igualdade, a adição e a multiplicação entre pares ordenados, como:

$$\text{igualdade: (a,b) = (c,d) quando a = c e b = d;}$$

$$\text{adição: (a,b) + (c,d) = (a + b,c + d);}$$

$$\text{multiplicação: (a,b) . (c,d) = (ac - bd,ad + bc).}$$

A partir das definições, denomina de conjunto dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação. Após alguns exemplos numéricos de como efetuar as três operações, o autor parte para provar todas as propriedades válidas dentro do corpo do números complexos.

Vale destacar a preocupação do autor em mostrar porque o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais passa a ser considerado subconjunto do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Primeiro, define o conjunto R^* como o subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por todos os pares ordenados cujo o segundo termo é igual a zero. Em seguida, considera a aplicação f que associa cada número $x \in \mathbb{R}$ ao par ordenado $(x, 0) \in R^*$, mostrando que f é uma aplicação bijetora. Mostra também que a aplicação f conserva as operações de adição e multiplicação em R^*. Sem entrar em detalhes, o autor afirma que, devido a aplicação bijetora $f : \mathbb{R} \to R^*$ conservar as operações de adição e multiplicação, podemos dizer que $\mathbb{R}$ e R^* são isomorfos. E devido ao isomorfismo, operar com os pares da forma (x,0) nos leva a resultados análogos aos obtidos operando com o real x, justificando a igualdade x = (x,0), para todo x $\in \mathbb{R}$. Por fim, destaca que 0 = (0,0), 1 = (1,0) e $\mathbb{R} = R^*$ para afirmar que o conjunto dos números reais passa a ser considerado subconjunto do conjunto dos números complexos.

Agora, vejamos o que a literatura *on-line* nos traz sobre o assunto. Primeiro tratemos do *site Wikipédia*, um dos mais conhecidos e o primeiro da lista quando procuramos por números complexos na Internet. Inicialmente, no primeiro capítulo, este *site* traz um comentário de que os matemáticos não admitiam a existência da raiz quadrada de um número negativo, até a criação dos números complexos. Não cita nada a respeito de como surgiram, e, simplesmente, define um número complexo como sendo da forma $a+b.i$, com a e b reais. Define também i como unidade imaginária, e que $i^2 = -1$. São nos capítulos seguintes que o *site* traz a história do surgimento desses números e cita que o par ordenado (a, b) representa o número complexo $a + b.i$, porém sem mostrar as operações com pares ordenados que geraram essa forma algébrica. Sempre fazendo uso das duas formas (par ordenado e algébrica), inicia a definição de adição, subtração e multiplicação entre esses números.

Diferentemente do *Wikipédia*, o *site Brasilescola.com* faz uma breve introdução sobre o assunto, trazendo um relato histórico, dizendo que o matemático Cardano foi o primeiro a admitir a existência dos números complexos e que posteriormente Gauss desenvolveu essa ideia. O *site* traz uma afirmação dizendo que o conjunto dos números complexos é o conjunto de maior cardinalidade, pois é o conjunto que contém todos os demais. Vale ressaltar que o site traz apenas conteúdos inerentes ao Ensino Fundamental e Médio, e por isso, dentro desse universo, faz tal afirmativa, que aliás está errada pois $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$ (cf. [14], pag. 41). Em seguida, divide o assunto em módulos, onde o primeiro é justamente a definição de um número complexo. Sua abordagem é exatamente como Dante e Iezzi fizeram, trabalhando com pares ordenados, definindo qual par representa a unidade imaginária, representada pela letra i e, a partir desse ponto, apresentando as operações envolvidas nesse contexto.

O *site infoescola.com* começa o tema dizendo que o conjunto dos números complexos é o conjunto dos pares ordenados, onde estão bem definidas as operações de adição, multiplicação e igualdade. Também diz que todo número real a será representado pelo par ordenado $(a, 0)$, e que o par (0,1) será chamado de unidade imaginária e será representado pela letra i. Em seguida, faz a operação de multiplicação do par (0,1) por ele mesmo, obtendo -1 como resposta, ou seja, $i^2 = -1$. No capítulo seguinte, o *site* afirma que o par (a, b) pode ser escrito na forma $a + b.i$ (o *site* não traz essa passagem) e, a partir desse ponto, passa a definir as operações entre os números complexos usando a forma algébrica. Vale ressaltar que, em nenhum momento, o site trouxe um relato histórico ou a motivação de como foram descobertos os complexos.

Ao procurar o tema na Internet, também encontramos vídeo aulas, como no site *youtube.com, link http://www.youtube.com/watch?v=pOCUumUAkhA*. Neste site, o professor inicia a aula lembrando ao aluno os conjuntos numéricos usuais do Ensino Médio, e em seguida afirma que $\sqrt{-1}$ não pertence a nenhum conjunto anteriormente relacionado, sendo assim um número não real, e sim um número complexo. É interessante observar que o professor não faz nenhuma menção aos complexos, antes de definir que $\sqrt{-1}$ é um complexo, ou seja, esse número foi classificado em um conjunto em que não se sabe nada a respeito dele. O professor também afirma que todos os números reais podem ser representados sobre a reta real, isso não acontecendo com os números complexos. A próxima parte da aula é um breve relato de como iniciou-se o estudo sobre esses números e coloca que o matemático Cardano propôs um problema onde o número 10 deveria ser dividido em duas partes, de forma que o produto das partes fosse 40. Ao resolver o sistema associado ao problema, o professor encontrou uma equação do segundo grau, com discriminante negativo. Disse também, que o aluno deveria prosseguir com os cálculos mesmo diante da raiz quadrada de número negativo. Usando a propriedade que $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}\ .\ \sqrt{b}$, sugeriu que o aluno desmembrasse a raiz do discriminante negativo como $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\ .\ \sqrt{-1}$, definindo $\sqrt{-1}$ como unidade imaginária. Dessa forma, obteve dois números que satisfazem o problema proposto por Cardano. A partir desse momento da aula, passou a representar todos os números complexos no plano cartesiano e, por fim, apresentou as operações de adição, subtração e multiplicação que estão definidas para os números complexos.

Capítulo 3

O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NAS ESCOLAS

Uma parte deste trabalho consistiu na aplicação de questionários, cujo objetivo é o de investigar o conhecimento, tanto por professores como por alunos, sobre os números complexos.Na metodologia usada, alunos e professores responderam questionários diferenciados. Foram entrevistados 30 professores, que foram selecionados de escolas públicas e particulares das cidades de Niterói e Rio de Janeiro. E foram entrevistados 100 alunos, sendo que 50 finalizaram o Ensino Médio e 50 são dos cursos de Matemática ou Engenharia da Universidade Federal Fluminense. Vamos começar apresentando os resultados dos questionários que foram aplicados aos professores. Nossa apresentação será de questão por questão. No fim do questionário, apresentaremos uma análise dos dados obtidos, também questão por questão.

3.1 PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO DAS REDES PÚBLICAS E PRIVADAS

Questão 1: A escola em que ensina é da rede pública ou particular?

Temos que 52% dos professores entrevistados fizeram parte da rede pública, enquanto 48% fizeram parte da rede particular.

Questão 2: Na sua escola, números complexos fizeram parte do programa?

Tivemos 100% dos professores entrevistados afirmando que números complexos fazem parte do programa da escola que lecionam.

Questão 3: Em caso afirmativo, você chega a lecionar a matéria?

Aproximadamente 90% dos professores entrevistados afirmaram que lecionam a matéria.

Questão 4: Você acha importante ensinar números complexos no Ensino Médio? Por que?

Cerca de 50% dos entrevistados disseram achar importante ensinar números complexos no Ensino Médio para que o aluno saiba calcular raiz quadrada de um número negativo ou que o aluno saiba resolver qualquer tipo de equação. 18% disseram achar importante para ampliar o conhecimento matemático do aluno. Outros 18% disseram achar importante porque é pré-requisito nos cursos de Exatas nas faculdades e 5% afirmaram achar importante saber pelo menos a definição. Por fim, 9% disseram não achar importante porque o ENEM não vem cobrando este assunto.

Questão 5: Você sabe ou conhece algumas aplicações de números complexos?

Cerca de 55% dos entrevistados afirmaram não saber ou conhecer alguma aplicação de números complexos. Tivemos 18% dizendo conhecer alguma aplicação, mas sem especificar qual e 27% disseram que a aplicação que conhecem é na Física, especialmente em Eletricidade.

Questão 6: Como é a sua abordagem sobre esse tema com seus alunos? Em outras palavras, na sua primeira aula, qual a motivação inicial para a matéria?

Tivemos 70% dos professores entrevistados afirmando que inicialmente abordam o tema resolvendo uma equação do segundo grau, com discriminante negativo, para em seguida, apresentar que um número complexo é um número na forma $a + bi$, com $i = \sqrt{-1}$. 14% afirmaram que iniciam suas aulas falando da história dos números complexos e do desenvolvimento dos conjuntos numéricos. Por fim, 6% dos entrevistados afirmaram que iniciam suas aulas falando das aplicações de números complexos, enquanto 10% não lecionam.

Questão 7: Até qual parte da matéria você ensina números complexos?

50% dos entrevistados afirmaram que ensinam até radiciação de números complexos. 35% afirmaram que ensinam até operações na forma polar e apenas 5% ensinam até operações na forma algébrica. Os outros 10% não lecionam a matéria.

Questão 8: O que você acha do ENEM não constar esse tópico?

50% dos entrevistados concordam que o ENEM não cobre porque acham que a maioria das escolas públicas não ensinam ou quando o fazem, ensinam muito pouco. 25% disseram que não concordam porque acham que se o ENEM cobrasse, as escolas seriam obrigadas a lecionar a matéria. 18% acham indiferente enquanto 7% concordam que o ENEM não cobre o assunto porque acham que a prova foi feita para nivelar o ensino e números complexos é difícil para o aluno.

ANÁLISE SOBRE O QUESTIONÁRIO:

Questão 1. Tivemos um percentual dividido entre os professores da rede pública e da rede particular, o que nos permite uma análise mais equilibrada do questionário.

Questão 2. Nessa questão, todos os professores afirmaram que números complexos constam no programa da escola.

Questão 3. Apenas 10% dos professores afirmaram que não lecionam a matéria, ou seja, temos um universo razoável de professores para análise.

Questão 4. O resultado importante nessa questão é que 50% dos professores acham importante ensinar números complexos para que o aluno saiba resolver qualquer tipo de equação, incluindo as de segundo grau, que apresentam discriminante negativo. Em seguida, veremos que esse resultado é coerente com os resultados encontrados nas outras questões.

Questão 5. A maioria dos professores afirmaram não saber ou conhecer alguma aplicação de números complexos. Acreditamos que a qualidade de aula sobre números complexos passa pelo conhecimento do professor, inclusive nas suas aplicações para motivar e estimular os alunos.

Questão 6. Esse é um dos resultados mais importantes para esse trabalho. 70%

dos professores afirmaram que iniciam suas aulas de números complexos apresentando uma equação do segundo grau, com discriminante negativo para justificar o ensino dos números complexos. E podemos ter um percentual ainda maior, pois 14% dos entrevistados afirmaram que iniciam suas aulas falando da parte histórica, mas não se sabe se após essa abordagem histórica, apresentam números complexos na forma $a + b.i$, onde a e b são números reais e i $= \sqrt{-1}$.

Questão 7. A maioria dos professores, cerca de 85%, afirmaram que ensinam até operações de números complexos na forma polar incluindo radiciação. Podemos levantar o seguinte questionamento: Se os professores afirmam que ensinam toda ou quase toda matéria, será que a dificuldade que os alunos têm sobre sobre números complexos não está na forma como o assunto está sendo abordado/iniciado?

Questão 8. A maior parte dos professores acham que o ENEM não deve cobrar porque as escolas, principalmente as públicas, não ensinam ou ensinam mal a matéria, e isso prejudicaria o aluno. Fica o questionamento: Se fosse bem ensinado, se os livros didáticos trouxessem uma melhor abordagem para o assunto, será que esse percentual de 50% diminuiria? Em contra partida, 25% dos professores acham que o ENEM deveria incluir no programa de prova para forçar as escolas a ensinar ou melhorar o ensino, pois acham que o ensino do tema não existe ou é fraco porque o ENEM não cobra em suas provas.

3.2 ALUNOS QUE CONCLUÍRAM O ENSINO MÉDIO, MAS QUE NÃO INGRESSARAM EM CURSOS DE EXATAS

Questão 1: A escola em que estudou é da rede pública ou particular?

Temos que 50% dos alunos entrevistados fizeram parte da rede pública, assim como os outros 50% fizeram parte da rede particular.

Questão 2: Na sua escola, números complexos fizeram parte do programa?

Aproximadamente 90% dos entrevistados afirmaram que o estudo dos números complexos fez parte do programa da escola onde concluíram o Ensino Médio, e cerca de 10% dos entrevistados disseram que números complexos não fizeram parte do programa.

Questão 3: Você sabe o que é um número complexo?

Cerca de 25% dos alunos entrevistados responderam não saber o que é um número complexo, enquanto que cerca de 60% disseram apenas que números complexos são números na forma $a + b.i$. Tivemos também 10% dos entrevistados dizendo que números complexos são números para calcular raízes de números negativos. Os 5% restantes apresentaram respostas variadas.

Questão 4: Você acha importante aprender números complexos no ensino médio? Por que?

Aproximadamente 32% disseram não achar importante, sem explicitar algum argumento ou não tinham opinião formada. 12% dos entrevistados responderam que não acham importante porque não sabem aplicação alguma, enquanto 24% responderam que não acham importante porque não cai nos vestibulares. Por outro lado, 32% dos alunos disseram achar importante aprender números complexos no Ensino Médio.

Questão 5: Você sabe ou conhece aplicações de números complexos?

Aproximadamente 67% dos alunos entrevistados disseram não conhecer nenhuma aplicação dos números complexos, enquanto 33% disseram saber alguma de números complexos, mas não mencionaram qual

Questão 6: Você lembra de que forma o professor abordou, iniciou esse tema com sua turma?

62% dos entrevistados disseram não saber ou não lembrar como foi a abordagem inicial do professor sobre esse tema. Cerca de 32% disseram que a primeira aula foi com o professor ensinando que um número complexo é um número na forma $a+b.i$. 6% dos entrevistados disseram que a primeira aula foi o professor ensinando que números complexos são números que usam a letra i, que representa a raiz quadrada de -1.

Questão 7: Você lembra ou sabe até qual parte da matéria números complexos foi dado?

Lembrando que cerca de 10% dos alunos entrevistados disseram não ter visto números complexos na escola, aproximadamente 62% dos entrevistados disseram não saber ou não lembrar até que parte da matéria aprenderam. 10% disseram que seu professor foi até divisão de números complexos usando a forma algébrica. Outros 18% disseram ter ido até a forma polar e potenciação de complexos.

Questão 8: O que você acha do ENEM não constar esse tópico?

30% dos entrevistados disseram concordar em números complexos não ser conteúdo nas provas de ENEM porque não é ensinado, muito pouco ensinado ou mal ensinado na maioria das escolas do país. Para 10% dos entrevistados, não deve ser cobrado porque acreditam que este conteúdo não tem aplicação no cotidiano das pessoas. 25% acham que não deve ser cobrado, mas não apresentaram um motivo específico. Cerca de 13% dos entrevistados são indiferentes, enquanto 22% acham que deve ser cobrado.

ANÁLISE SOBRE O QUESTIONÁRIO:

Questão 1. Encontramos um mesmo percentual entre os alunos da rede pública e particular, o que nos possibilita não ficarmos restritos a um tipo de escola.

Questão 2. Cerca de 90% afirmaram ter tido algum tipo de contato com a matéria. Isso nos possibilita ter um universo bem razoável para análise, assim como também aponta uma realidade por parte de algumas escolas que já não incluem o conteúdo em seu programa.

Questão 3. Podemos destacar o seguinte dado interessante: a porcentagem de alunos que afirmaram não saber o que é um número complexo (25%) é maior do que a porcentagem dos que disseram não ter visto o tema no Ensino Médio (10%). Isso significa que uma parte dos alunos teve algum contato com o conteúdo, mas não aprenderam absolutamente nada. 60% dos alunos disseram que números complexos são números na forma $a + b.i$ e 10% dos alunos disseram que números complexos são números para calcular raízes de números negativos. Esses dados são relevantes para o objetivo desse trabalho. Fica o questionamento se os 60% citados acima sabem de fato o que representa um número na forma $a+b.i$, e o que proporciona um número complexo ser apresentado dessa forma. E a situação fica mais grave quando incluímos os 10% que disseram que são números para calcular raiz quadrada de número negativo. É de grande valia ponderar se, o método que geralmente é aplicado nas escolas hoje em dia, tem sido eficaz no objetivo de ensinar ao aluno números complexos. Observamos que temos 100% de respostas diferentes do que se realmente espera de um aluno sobre a definição de um número complexo.

Questão 4. Diversas respostas foram apresentadas e com uma frequência muito parecida. O que leva a que 32% achem que não é importante aprender números complexos no Ensino Médio? É a indiferença sobre o assunto ou a forma como aprenderam? Lembremos ainda que $\frac{1}{4}$ dos entrevistados não tiveram essa aula, conforme resultado apresentado na Questão 2. O resultado mostra que 12% não acha importante porque não sabem ou acham que não tem aplicação alguma. Um dado importante é que 24% responderam que não acham importante porque não cai nos vestibulares. Mas por que esse conteúdo não é exigido na principal prova do país? Sabemos que nem todas as escolas, públicas ou particulares do Brasil, incluem o conteúdo em seus programas ou conseguem ensinar a matéria. Será que a inclusão dos números complexos no edital da prova do ENEM não seria um fator de mudança, tanto na presença do conteúdo em seus programas, quanto na abordagem das aulas? Por fim, temos 32% dos alunos dizendo achar importante aprender números complexos no Ensino Médio, pois acreditam que o conteúdo tem alguma aplicação importante, ou que será cobrado nos vestibulares que farão. Certamente estão se referindo a algumas faculdades ou universidades que ainda não adotaram o ENEM como forma de ingresso. Os dados acima reforçam um conflito, pois no mesmo universo entrevistado, encontramos escolas que não lecionam o tema porque não é cobrado no ENEM, mas ao mesmo tempo, alunos que afirmam a necessidade do tema para obterem êxito nas provas de outros concursos e vestibulares.

Questão 5. 67% disseram não conhecer nenhuma aplicação dos números complexos. Observe que essa porcentagem é maior do que o dobro da porcentagem dos alunos que disseram ser importante aprender números complexos (32%), pois acreditam que tenha alguma aplicação. Isso significa que, apesar desse último grupo achar importante, uma parte razoável desconhece alguma aplicação. Mais uma vez, podemos avaliar o quanto isso é reflexo da forma como o conteúdo vem sendo lecionado ao longo dos anos. Por outro lado, 33% disseram saber alguma aplicação de números complexos. Surgiu apenas uma resposta, em que o aluno afirmou que a aplicação é para solucionar a fórmula de Bháskara quando encontramos raiz quadrada de um número negativo. Outro questionamento que podemos fazer é perguntar o percentual desses 33%, que disseram saber alguma aplicação, também pensam que a aplicação é apenas para resolver problemas com raízes quadradas de números negativos, ou seja, que números complexos servem apenas para resolver equações de segundo grau com discriminante negativo.

Questão 6. As respostas desta questão são importantes para reavaliar a forma como o conteúdo é ensinado nas escolas. Temos 62% dos entrevistados afirmando não saber ou não lembrar como foi a abordagem inicial do professor sobre esse tema. Se a maioria não sabe ou não lembra a respeito do conteúdo, alguma proposta de mudança deve ser feita. Aproximadamente 32% dos alunos entrevistados afirmaram que a primeira aula foi com o professor ensinando que um número complexo é um número na forma $a + b.i$. De forma geral, essa é a abordagem inicial que a maioria dos professores tem adotado em suas primeiras aulas. Por isso, é importante pensarmos que existe a possibilidade de parte dos 62% acima citados ter tido essa primeira aula da forma usual. Ainda temos 6% dos entrevistados afirmando que a primeira aula foi o professor ensinando que números complexos são números que usam a letra i, representando a raiz quadrada de -1.

Questão 7. O objetivo desta questão é tentar entender, de maneira geral, como o aluno viu a continuidade da matéria, após as primeiras aulas. Apesar de uma parte lembrar, de forma concreta, até onde seu professor ensinou (operações com complexos ou potenciação), o que se torna alarmante é a maioria, aproximadamente 62% dos alunos entrevistados, não lembrar nada do desenvolvimento da matéria, ou até qual parte seu professor conseguiu ensinar. Provavelmente esse fato é mais uma consequência do método utilizado, pela maior parte dos professores, para suas aulas sobre o tema.

Questão 8. Aproximadamente $\frac{1}{3}$ dos alunos entrevistados disseram que concordam que o ENEM não contemple números complexos, pelo fato de acreditarem que grande parte das escolas de Ensino Médio do país não lecione o conteúdo. Podemos então pensar que se o conteúdo fosse cumprido em todas as escolas e as aulas sobre os números complexos fossem mais motivadoras, essa parte dos entrevistados concordaria com a presença da matéria na prova. Outra parte, cerca de 10% dos entrevistados, acredita que não deve ser cobrado porque acha que números complexos não têm aplicações cotidianas, e como o ENEM privilegia conteúdos onde possa haver uma contextualização, não teria sentido constar no programa da prova. 25% dos entrevistados acham que não deve ser cobrado, mas não apresentaram um motivo específico, enquanto 22% dos entrevistados acham indiferente. Por fim, 22% acham que deve ser cobrado, também sem definir um motivo específico. Diante de todos esses dados, fica a seguinte dúvida: caso o ENEM adotasse o conteúdo em sua prova, manter a abordagem, da forma como ainda é praticada nas escolas, traria benefícios aos alunos?

3.3 ALUNOS QUE INGRESSARAM EM CURSOS DE GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA OU ENGENHARIA NA UFF

Questão 1: A escola em que estudou é da rede pública ou particular?

50 alunos participaram dessa parte do questionário, onde 52% são da rede pública e 48% são da rede particular.

Questão 2: Na sua escola, números complexos fizeram parte do programa?

80% dos alunos entrevistados responderam que números complexos fizeram parte do programa, enquanto 20% responderam que não.

Questão 3: Você sabe o que é um número complexo?

O questionário apresentou 55% dos entrevistados afirmando que um número complexo é um número na forma $a + b.i$. 12% disseram que um número complexo é um número formado por uma parte real e outra imaginária. 8% disseram que são números onde $i^2 = -1$. 6% afirmaram que números complexos são números para se calcular raiz quadrada de um número negativo. Por fim, 2% disseram que é um número capaz de realizar operações impossíveis no conjunto dos reais. Os 17% restantes afirmaram que não sabem ou não lembram o que é um número complexo.

Questão 4: Você acha importante aprender números complexos no Ensino Médio? Por que?

36% dos entrevistados disseram achar importante aprender números complexos no Ensino Médio para um melhor desempenho na faculdade. 12% disseram importante para terem mais conhecimento da Matemática, enquanto 6% acham importante para terem mais conhecimento de todos os números que existem. 4% acham importante porque cai nos vestibulares, 4% porque permitem realizar alguns cálculos, enquanto 4% disseram não achar importante porque não cai nos vestibulares. Por fim, 30% disseram que sim, enquanto 4% disseram que não, ambos sem um motivo específico.

Questão 5: Você sabe ou conhece algumas aplicações de números complexos?

Tivemos 66% dos entrevistados afirmando saber alguma aplicação de números complexos, sendo que 24% disseram que números complexos se aplica em eletricidade, 2% em notas musicais, enquanto os outros 40% não especificaram qual. 34% afirmaram não conhecer nenhuma aplicação.

Questão 6: Você lembra de que forma o professor iniciou esse tema com sua turma?

56% disseram não lembrar de como foi a abordagem do professor nas primeiras aulas de números complexos, enquanto 30% afirmaram que o professor iniciou as aulas dizendo que um número complexo é um número na forma $a + bi$. Tivemos ainda 8% dos entrevistados afirmando que o professor iniciou as aulas apresentando equações do segundo grau com discriminantes negativos, fazendo $i^2 = -1$, enquanto 6% disseram que o professor iniciou as aulas explicando o desenvolvimento dos conjuntos numéricos que são abordados no ensino médio, até os complexos.

Questão 7: Você lembra até qual parte da matéria foi dado?

62% dos alunos entrevistados disseram que não lembram até qual parte da matéria foi dado, enquanto 26% disseram que viram até a forma polar. 6% disseram que as aulas foram até radiciação e, por fim, 6% disseram que foram até as operações na forma algébrica $a + b.i$.

Questão 8: O que você acha do ENEM não constar esse tópico?

56% dos entrevistados disseram que não concordam que o ENEM não apresente números complexos em seu programa de prova. 22% concordam, porque números complexos não é ensinado em todas as escolas do país e 8% concordam pois acham desnecessário aprender números complexos no Ensino Médio, enquanto 6% dos entrevistados concordam pois nem todos usarão números complexos em seus cursos no ensino superior. Por fim, 4% disseram não concordar, pois se o ENEM cobrasse na sua prova o tema, forçaria as escolas, principalmente as públicas, a melhorar o ensino desse tópico.

ANÁLISE SOBRE O QUESTIONÁRIO:

Questão 1. Tivemos quase o mesmo percentual entre os alunos entrevistados das redes pública e particular.

Questão 2. A maioria, 80%, afirmaram que o estudo de números complexos fez parte do programa na escola que cursaram o Ensino Médio, o que nos dá um universo razoável de alunos para análise.

Questão 3. Tivemos aqui mais tentativas de se explicar o que é um número complexo em relação aos alunos entrevistados que não ingressaram em algum curso superior de Exatas. Porém, o número de alunos que afirmaram que um número complexo é um número na forma $a + bi$, com uma parte real e outra imaginária, também foi alto: 65%. Assim como na Questão 3 da Seção 4.2, temos respostas afirmando que um número complexo é um número onde $i^2 = -1$ e que são números para se calcular raiz quadrada de número negativos também foram citados. Mais uma vez, em 100% dos casos, foram apresentadas respostas diferentes do que se espera de um aluno sobre a definição de um número complexo.

Questão 4. Se somarmos todas as porcentagens de respostas que acham que números complexos devem ser ensinados no Ensino Médio, encontraremos 92%, ou seja, apenas 8% acham que não é importante, sendo 4% porque não é cobrado nos vestibulares e 4% sem um motivo específico. Esses percentuais obtidos são coerentes com o público entrevistado, pois se tratam de alunos que têm a Matemática como ferramenta de estudo.

Questão 5. Tivemos 64% dos entrevistados afirmando ter algum conhecimento das aplicações de números complexos. Esse número é aproximadamente o dobro do número de alunos entrevistados que afirmaram saber algum conhecimento e que não são dos cursos de Exatas (33%), o que também é coerente em função dos objetivos dos dois grupos de alunos em questão. Nesse momento, é válido levantar a mesma dúvida apresentada no questionário anterior em relação o quanto desses 64% acreditam que a aplicação de números complexos está apenas em resolver equações do segundo grau com discriminantes negativos. Porém, desse grupo, já se sabe que 24% dos entrevistados conhece que números complexos são aplicados em Física, mais especificamente, em Eletricidade.

Questão 6. Esta questão também apresentou um percentual elevado (56%) de alunos que não lembram como foi a abordagem inical do professor nas primeiras aulas de números complexos no Ensino Médio, assim como na Questão 6, da Seção 4.2. Outro dado parecido é o percentual de alunos (30%) que foram entrevistados e que afirmaram que a abordagem do professor foi ensinando que um número complexo é um número na forma $a + bi$, com a e b denotando números reais e $i = \sqrt{-1}$. Em relação aos dados apresentados, fica a dúvida: quanto dos 56% dos entrevistados que afirmaram não lembrar de como foi a primeira aula de números complexos foram apresentados à forma tradicional $a + bi$?

Questão 7. É importante destacar que o percentual apresentado na Questão 7 da Seção 4.2 foi o mesmo encontrado nesse questionário. 62% afirmaram não lembrar até qual parte da matéria os professores ensinaram. Tivemos 32% afirmando que foi ensinado até a forma polar ou radiciação de números complexos, enquanto os 6% restantes afirmam ter tido aula até operações de números complexos na forma algébrica.

Questão 8. 58% acham que o ENEM deveria cobrar números complexos em sua prova. O que vale ressaltar nesse dado foram os argumentos apresentados. Como esse questionário foi aplicado à alunos de Engenharia ou Matemática, seus cursos envolvem conhecimentos de Matemática. Portanto, de maneira resumida, a maioria criticou o nível de prova do ENEM, dizendo que se trata de uma prova superficial de Matemática, e que a cobrança dos números complexos forçaria as escolas a desenvolver melhor o conteúdo, permitindo que cheguem ao curso superior com mais conhecimento. Por outro lado, cerca de 28% concordam que não seja cobrado porque não é ensinado em todas as escolas do país ou que nem todos usarão esse conhecimento ao chegar no curso superior. Por fim, 8% concordam porque acham desnecessário aprender números complexos no ensino médio. 6% disseram que não concordam, sem apresentar argumentos.

Capítulo 4

Uma proposta de ensino de números complexos

4.1 O ensino da Matemática e as três competências

Nossa prática docente nos permite propor o desenvolvimento de três competências para se ensinar Matemática: motivação, formalização e aplicação.

Motivar significa estimular ou despertar interesse. Acreditamos que o professor do Ensino Básico deve conhecer não só o significado matemático dos conceitos, mas também o seu desenvolvimento histórico e as controvérsias a eles associadas, as quais podem ajudá-lo a compreender melhor as dificuldades dos seus alunos. Assim para motivar os alunos, o professor pode apresentar um pouco da história do conceito que vai ensinar. De fato, segundo a M.M.A.(Mathematical Association of America), o conhecimento da história da Matemática mostra aos alunos que ela é uma importante conquista humana, geralmente desenvolvida de forma intuitiva e experimental a partir da necessidade de se resolver problemas nas mais diversas áreas do saber. Uma outra maneira de se motivar os alunos é propor uma questão desafio ou situação-problema sobre as ideias fundamentais do conteúdo que será ensinado.Tentar responder uma tal questão, buscando respostas razoáveis, pode ser desafiador e servir de motivação para os alunos. Para nós, uma questão desafio ou uma situação-problema é qualquer pergunta ou problema para os quais os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas para respondê-las, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à resposta correta.

Formalizar significa realizar de acordo com as regras ou oficializar. No caso da Matemática, oficializamos um conceito por meio de uma definição e oficializamos um resultado através de uma demonstração.

Definir significa dar o significado preciso de. No caso dos dicionários, um conceito é explicado em termos de um segundo, e este, em termos do primeiro. É a definição em círculo vicioso. No caso da Matemática, definir um conceito significa explicá-lo em termos de outros conceitos já definidos. Desse modo, um certo conceito, digamos C, é definido em termos dos conceitos C_1, C_2, ..., C_n, todos eles já definidos. Portanto, cada um dos conceitos C_1, C_2, ..., C_n, foi definido em termos de outros conceitos, até chegarmos nos chamados conceitos primitivos. Os conceitos primitivos começaram a ser usados por Aristósteles, na obra *Analytica Posteriora*, e consistem em conceitos aceitos sem definição. A partir dos conceitos primitivos, todos os demais conceitos de uma teoria são definidos. Estes são chamados conceitos derivados. A definição dos conceitos derivados deve ser clara e precisa. Infelizmente, em muitos livros didáticos de Matemática do Ensino Básico, muitas definições são apresentadas de forma ambígua, dificultando o entendimento do assunto por parte do aluno. E pior do que isso é o fato de que muitos professores não fazem uma leitura crítica dos livros, por eles mesmos adotados, perpetuando possíveis falhas nas definições apresentadas nestes textos.

Demonstrar significa comprovar a veracidade de forma precisa e inequívoca ou a falsidade de uma afirmação. O resultado da demonstração é o que chamamos de prova. Uma prova que demonstre a veracidade de uma afirmação consiste em um encadeamento de deduções que mostram que o resultado afirmado é uma consequência lógica e indiscutível de resultados matemáticos já aceitos como verdadeiros. Para o caso da demonstração, também aceitam-se algumas afirmações sem demonstração com o propósito de demonstrar, a partir dessas, todas as outras. Essas afirmações aceitas sem demonstração são chamadas de axiomas. Uma prova que demonstre a falsidade de uma afirmação, em geral, consiste na apresentação de um contra-exemplo. Um contra-exemplo é um exemplo onde o que é afirmado não acontece. Infelizmente, muitos professores de Matemática omitem as demonstrações de resultados em suas aulas.

Aplicar siginifica empregar ou usar. Devemos aplicar um conceito ou conteúdo matemático por meio de exemplos e, posteriormente, por meio de exercícios. Cabe observar que os exercícios devem ser propostos em ordem de dificuldade, para os alunos não desanimarem. Em nosso entendimento, é muito importante aplicar o conteúdo ensinado em tópicos diferentes dentro da própria Matemática e, também, em assuntos de outras áreas do saber. De fato, o professor deve ensinar de modo que os alunos percebam que existe uma conexão entre diferentes conteúdos matemáticos e que, principalmente, a Matemática é uma ferramenta importante no desenvolvimento de outras áreas, como a Física, Economia, Engenharias e computação e, mais recentemente, nas Ciências da Saúde, como a Biologia e Medicina. Sabemos, entretanto, que é frequentemente difícil alcançar esta etapa no planejamento de uma aula, talvez por falta de uma bibliografia adequada ou por falta de tempo do professor em aprender sobre estas aplicações. De qualquer forma, acreditamos fortemente que, ao atingirmos esta etapa, estaremos fechando o ciclo do esquema proposto a seguir:

$$\text{motivação} \Longrightarrow \text{formalização} \Longrightarrow \text{aplicação},$$

ou seja, estaremos sempre motivando os alunos a aprenderem mais e mais sobre Matemática. É claro que não esperamos que todo aluno do Ensino Médio opte por uma carreira na área de Ciências Exatas e da Terra. Mas, acreditamos que se um indivíduo de qualquer sociedade dominar seu idioma ou dialeto, tanto de forma oral como escrita, e tiver conhecimentos básicos de Matemática, ele poderá se inserir melhor dentro de sua comunidade.

Terminamos esta seção observando que nas suas conferências americanas de 1893, por ocasião do Congresso de Matemática de Chicago, Felix Klein (1849 - 1925), um dos mais notáveis matermáticos alemães dos fins dos séculos XIX, exprimiu a sua visão central sobre o ensino de Matemática afirmando que:

no ensino é não só admissível, como absolutamente necessário, ser menos abstrato no início, manter uma constante abertura às aplicações , e fazer os refinamentos gradualmente à medida que o estudante se torna capaz de os compreender.

Abaixo, apresentamos um esquema da organização da proposta didática sugerida neste trabalho

4.2 UMA PROPOSTA DE ENSINO

Como vimos no Capítulo 2, alguns livros e alguns *sites* da Internet pesquisados não oferecem material bibliográfico suficiente para que o professor possa preparar sua aula, baseado em nossa proposta didática. Como nosso objeto de estudo são os números complexos, nosso objetivo é propor uma bibliografia sobre o assunto, que possa servir de auxílio para o professor abordar o conteúdo, segundo o modelo da proposta didática apresentada.

4.2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

A resolução de equações sempre foi um desafio para os matemáticos. Durante vários séculos, este foi um dos objetivos de vários matemáticos. À medida que os resultados iam surgindo, novos horizontes iam aparecendo. Por volta de 1600 a.C., surgiram os primeiros problemas envolvendo equações lineares, mas sua solução geral só é citada por volta de 300 a.C. na obra *Os elementos*, de Euclides. Em seguida, surgiram novos desafios, associados principalmente à Geometria, e com isso, às equações quadráticas. A existência de números negativos nas soluções dessas equações era geralmente descartada pelos matemáticos egípcios e babilônios, mas sendo formalizada posteriormente no século V, por um matemático indiano chamado Brahmagupta. Enquanto os Hindus resolviam as equações quadráticas pelo método de completar quadrados, Bháskara finalmente encontrou uma solução geral, resolutiva para esse tipo de equação, por volta do século X, atualmente conhecida como fórmula de Bháskara. Vale ressaltar que a forma tradicional $ax^2 + bx+c = 0$ se deve a François Viéte (1540 - 1603), matemático francês que introduziu a simbologia das letras para facilitar as operações.

Pelo início do século XIV, equações do segundo grau já eram resolvidas sem grandes dificuldades, e constantemente associadas a problemas geométricos. Com isso, ao encontrar discriminantes negativos, simplesmente diziam que tais problemas não tinham solução. Por exemplo, um dos problemas surgidos nessa época foi de determinar as medidas de um retângulo de forma que seu perímetro tenha medida 20 unidades de comprimento e sua área, 40 unidades de área. Definindo como x e y as dimensões do retângulo, algebricamente o problema se traduz no sistema $x + y = 10$ e $x.y = 40$, que nos leva a equação $x^2 - 10x + 40 = 0$. Nesse período, os matemáticos já tinham o conhecimento dos métodos para resolução de equações do segundo grau, entre eles, a fórmula de Bháskara, que consiste em $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, um dos métodos mais conhecidos e aplicados pelos alunos do nono ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Aplicando o método, chegamos às soluções $x_1 = 5+\sqrt{-15}$ e $x_2 = 5-\sqrt{-15}$, ou seja, observamos que os resultados obtidos satisfazem a equação algébrica acima, já que a soma das raízes é igual a 10, enquanto seu produto, 40. Porém, é um problema que teve origem na Geometria.

E como as duas dimensões procuradas são números que trazem raízes quadradas de números negativos, os matemáticos afirmavam que tal problema geométrico não tinha solução.

Os problemas geométricos não se resumiam em resoluções de equações quadráticas. Problemas relacionados ao volume de sólidos nos remetem a resolução de equações cúbicas, e nesse período, se intensificou a busca por soluções de equações de terceiro grau. Alguns matemáticos já haviam descoberto soluções para tais equações em situações particulares, mas foi Niccolo Tartaglia (1499 - 1557) que conseguiu desenvolver um método para equações da forma $x^3+px^2 = q$, a princípio, sem demonstrá-lo. Aliás, esse método proporcionou a Tartaglia vencer um desafio com outro matemático, chamado Antônio Maria Fior. Este último ficou sabendo dos conhecimentos de Tartaglia e o propôs que cada um elaborasse problemas para que o outro resolvesse. Fior propôs cerca de 30 problemas, onde a maioria exigia conhecimentos para solucionar equações cúbicas, conhecimento esse já desenvolvido por Tartaglia. Esse desafio ficou conhecido entre os matemáticos da época, entre eles, Girolamo Cardano (1501 - 1576), que na época escrevia um livro chamado *O Ars Magna*, que trazia alguns conhecimentos para cálculos com raízes cúbicas e racionalizações de tais radicais. Cardano viu em Tartaglia a possibilidade de enriquecer sua obra com o método que ele desenvolveu sobre equações cúbicas. Depois de muita insistência, Cardano quebrou a promessa que havia feito a Tartaglia (caso Tartaglia o ensinasse tal método, colocaria em seu livro os créditos do conhecimento ao primeiro), e conseguiu publicar o Ars Magna em 1545 que, para época, passou a ser um livro de muito impacto, referência e de grande importância para os demais matemáticos.

Logicamente para publicar todos os resultados obtidos, Cardano teve que ter o trabalho para demonstrá-los, assim como fez com equações completas da forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, reduzindo-as para formas mais adequadas, com objetivo de usar o método de Tartaglia. Ele também conseguiu reduzir essas equações completas para a forma $x^3 + px = q$, onde o termo quadrático não aparecesse. Substituindo x por $y - \frac{a}{3}$ na equação completa acima, obtemos:

$$(y-\frac{a}{3})^3 + a.(y-\frac{a}{3})^2 + b.(y-\frac{a}{3}) + c = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$y^3 + (\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b).y + (\frac{-a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c) = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$y^3 + (b - \frac{a^2}{3}).y + (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c) = 0.$$

Chamando

$$p = -(b - \frac{a^2}{3})$$

e

$$q = -(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c) = 0$$

obtemos

$$y^3 - py - q = 0,$$

com p e q positivos.

Sabemos que

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2.v + 3u.v^2 + v^3,$$

ou seja,

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0.$$

Chamando

$$(u+v) = y, 3u.v = p, u^3 + v^3 = q$$

obtemos a equação

$$y^3 - py - q = 0.$$

Se $p = 3u.v$, então $\frac{p^3}{27} = u^3.v^3$. Dessa forma, $q = u^3 + v^3$ e $\frac{p^3}{27} = u^3.v^3$ representam a soma e o produto de uma equação quadrática da forma

$$x^2 - q.x + \frac{p^3}{27} = 0,$$

onde as raízes são

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

e

$$v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}.$$

Com isso, se y = (u + v), então

$$y = (\frac{q}{2} + (\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} + (\frac{q}{2} - (\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}.$$

Em cada capítulo de seu livro, Cardano apresenta vários problemas, envolvendo soluções de equações de segundo e terceiro graus e, sempre que possível, fazendo associações à Geometria. Em algumas soluções, foram encontradas raízes quadradas de números negativos que, quando associadas à Geometria, eram automaticamente ignoradas. Mas ainda sim, essa descoberta trazia um enorme desconforto para Cardano, pois ele pensava como era possível soluções de problemas práticos envolverem raízes de números negativos. Inicialmente ele afirmava que esses números eram tão sutis quanto inúteis, mas a sua inquietação e preocupação despertou a necessidade e a curiosidade em outros matemáticos de explorar melhor a ideia.

Foi um matemático contemporâneo de Cardano, chamado Rafael Bombelli (1526 - 1572), que deu continuidade ao estudo de raízes quadradas de números negativos. Bombelli foi o primeiro matemático a acreditar na existência dos números imaginários. Em seu livro, apresentou um problema de equação cúbica, reduzindo à forma $x^3 + px^2 = q$ para que pudesse aplicar o método de Tartaglia/Cardano, encontrando três soluções distintas, uma delas real e as outras, com raízes quadradas de números negativos. Daí pensou: como poderia um mesmo problema, trazer soluções reais e não reais?

O problema consistia em resolver a equação $x^3 - 15x = 4$. Usando o método já conhecido para essa forma, encontra-se $x = (2 - \sqrt{-121})^{\frac{1}{3}} + (2 + \sqrt{-121})^{\frac{1}{3}}$ como solução. Porém Bombelli sabia previamente que a equação acima tinha três soluções reais. Isso representava que as raízes quadradas de números negativos passavam a ter uma legitimidade, pois admitindo a sua existência, era possível encontrar raízes reais para o problema, usando soluções não reais. Observe que $x = 4$ é uma das raízes da equação acima, pois $4^3 - 15.4 = 64 - 60 = 4$. As outras duas raízes encontradas são $(-2 + \sqrt{3})$ e $(-2 - \sqrt{3})$. Observe que $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$, ou seja, teremos $(2 + \sqrt{-1}) = (2 + \sqrt{-121})^{\frac{1}{3}}$ e $(2 - \sqrt{-1}) = (2 - \sqrt{-121})^{\frac{1}{3}}$. Substituindo em x no método citado no parágrafo acima, temos que:

$$x = (2 - \sqrt{-121})^{\frac{1}{3}} + (2 + \sqrt{-121})^{\frac{1}{3}} = (2 - \sqrt{-1}) + (2 + \sqrt{-1}) = 4.$$

Isso mostra que o método tem como solução uma raiz quadrada de número negativo, que em seguida, dá origem a uma solução real $x = 4$.

A partir desse ponto e baseado na experiência acima, Bombelli passou a investir seus estudos em como desenvolver operações com os números que trazem raízes quadradas de números negativos. Com os resultados desenvolvidos por Bombelli, os matemáticos que o sucederam passaram a incluir os números não reais em seus trabalhos e cálculos. O que foi produzido passou a ser muito importante à medida que os resultados foram sendo aproveitados por outros matemáticos, de forma que o estudo dos números complexos passasse a ganhar mais força e espaço na resolução de equações.

Passou-se um pouco mais de um século para que os números complexos passassem a ser mais aceitos de forma que os resultados e notações obtidas fossem de grande valia para o desenvolvimento do assunto. Por exemplo, Albert Girard (1590 - 1633), matemático Belga, associou o número de raízes de uma equação com seu grau e estabeleceu uma relação entre os coeficientes da equação e suas raízes, admitindo que as raízes pudessem ser reais ou não. Aliás, sua notação de raiz é a usada normalmente, nos dias de hoje. Ele também foi o primeiro a introduzir o símbolo $\sqrt{-1}$. Por fim, foi o primeiro matemático a citar, sem formalidade ou prova rigorosa, o teorema fundamental da álgebra.

Outro matemático, René Descartes (1595 - 1650), já admitia a existência de raízes não reais em seus cálculos, introduzindo assim o termo imaginário para esses números. Dando continuidade à linha de pensamento adotada entre equações e raízes feita por Girard, fez uma citação, abordando de forma informal, o Teorema Fundamental da Álgebra. Ele disse que: *Qualquer equação pode ter tantas raízes distintas (valores das quantidades desconhecidas) quanto o número de dimensões da quantidade desconhecida na equação.* Suponhamos, por exemplo, $x = 2$ ou $x - 2 = 0$, e novamente $x = 3$ ou $x - 3 = 0$. Multiplicando as equações $x - 2 = 0$ e $x - 3 = 0$, temos $x^2 - 5x + 6 = 0$. Esta é uma equação que x tem valor dois e, ao mesmo tempo, tem valor três. Se após, nós fizermos $x - 4 = 0$ e multiplicarmos por $x^2 - 5x + 6 = 0$, teremos $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, outra equação, em que x tendo três dimensões, terá também três valores, que serão 2, 3 e 4. Descartes foi o primeiro matemático a introduzir os termos real e imaginário em 1637.

Vale destacar que nesse momento já existe uma ideia forte de relacionar o grau de uma equação e a quantidade de raízes. O estudo dos números complexos foi sendo desenvolvido à medida que outros matemáticos encontravam teoremas, que de maneira direta ou indireta, influenciavam ou davam sustentação a futuros resultados. Além de Girard e Descartes, já citados anteriormente, outros matemáticos tiveram grande importância nesse desenvolvimento. W.G.Leibniz(1646-1716), matemático alemão, e um dos criadores do cálculo, cita: (os números imaginários são como um recurso elegante e maravilhoso para a inteligência humana). Ele levantou a questão se todo polinômio real admite fatores lineares e quadráticos reais. Esse questionamento teve grande importância, a ponto de os matemáticos da época concordarem ou discordarem, tentando provar ou dando contra exemplos, respectivamente. Inicialmente Leibniz acreditava não ser possível tal fatoração, usando nos fatores envolvidos números complexos, já que se usasse números reais, essa conclusão seria trivial. Ele encontrou como fatoração do polinômio $x^4 + a^4$, sendo a um número real, $(x + a\sqrt{-1})\ .(x - a\sqrt{-1})\ .\ (x + a\sqrt{-(-1)})\ .\ (x - a\sqrt{-(-1)})$, afirmando que o produto de quaisquer dois fatores dessa fatoração não gerava um polinômio quadrático de coeficientes reais.

Inicialmente Leonhard Euller(1707 - 1783), matemático suiço e Nicholas Bernoulli(1687 - 1759), tinham opiniões contrárias a respeito da afirmação de Leibinz. Bernoulli apresentou uma solução para o mesmo problema apresentado por Leibinz, fatorando $x^4 + a^4$ como $(x^2 + ax\sqrt{2} + a^2).(x^2 - ax\sqrt{2} + a^2)$, ou seja, mostrando que era possível fatorar o polinômio acima usando apenas fatores quadráticos com coeficientes reais. Euller, que em 1777, foi o primeiro a usar o símbolo i para representar o número $\sqrt{-1}$, foi mais além: afirmou que qualquer polinômio de coeficientes reais, de grau arbitrário poderia ser decomposto da mesma forma. Bernoulli achou que corrigiu esta afirmação, mostrando que a equação $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = 0$, que apresenta como raízes $1 + \sqrt{2 + \sqrt{-3}}$, $1 - \sqrt{2 + \sqrt{-3}}$, $1 + \sqrt{2 - \sqrt{-3}}$, $1 - \sqrt{2 - \sqrt{-3}}$, acreditando ser um contra-exemplo. Em seguida, porém, Euller observou que se um número complexo $(a + b\sqrt{-1})$ era raiz de um polinômio com coeficientes reais, então $(a - b\sqrt{-1})$ também era raiz. Além disso, ele mostrou que o produto $(x - (a + b\sqrt{-1})).(x - (a - b\sqrt{-1}))$ gera um polinômio quadrático de coeficientes reais, o que reforça ser positivo o questionamento inicial de Leibinz, e que vai de encontro o que Bernoulli havia apresentado como contra exemplo.

O questionamento nesse momento passou a ser se era possível fazer essa decomposição para qualquer equação. Euller, reforçando mais ainda suas contribuições, conseguiu provar ser válido a afirmação que fez acima para equações com grau menor ou igual a 6. Mas a dúvida ainda persistia e era preciso estender a validade para equações com grau maior que 6. O que se buscava nesse ponto é se toda equação com coeficientes reais apresenta solução, ou seja, se é possível fatorar qualquer polinômio real usando fatores lineares com números complexos. E o Teorema Fundamental da Álgebra prova que isso é possível.

Atualmente, podemos encontrar o Teorema Fundamental da Algébra enunciado da seguinte forma: *Todo polinômio não constante de coeficientes reais apresenta uma raiz complexa.*

Esse teorema teve um grande impacto na Matemática, pois significava que era preciso estender a ideia do universo numérico, porque representa a legitimidade dos números complexos. Este teorema mostra a *necessidade da extensão do conjunto dos números reais para o conjunto dos números complexos.* Equivalentemente, mostra que o corpo dos números complexos é algebricamente fechado e, portanto, um polinômio de grau n, com coeficientes complexos, e em particular reais, tem n soluções não necessariamente distintas no corpo dos números complexos.

Inicialmente Jean D'alembert(1717 - 1783), matemático francês, havia tentado demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, porém foi Carl Gauss (1777 - 1855), matemático alemão, um dos grandes nomes da Matemática, com diversas contribuições na área, que deu a prova do teorema em sua tese de doutorado.

Terminamos observando que Jean Argand (1768 - 1822), matemático suíço, associou os números complexos a uma representação geométrica no plano, e por isso deu uma enorme contribuição. Para que Argand pudesse representar geometricamente um número complexo no plano, ele precisou usar a representação algébrica definida por Willian Hamilton (1805 - 1865), matemático irlandês, que definiu um número complexo como um par ordenado de números reais, representação usada nos dias de hoje. Ele observou que o sinal de adição encontrado na forma $a+b.i$ não define uma soma de dois elementos de mesma dimensão. Estabelece que a soma dos pares $(a, 0)$ com $(0, b)$ representa o número complexo $a + b.i$. Para isso, define as operações de adição e multiplicação entre pares ordenados como $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

4.2.2 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Pela análise feita em alguns livros de Matemática do Ensino Médio (Capítulo 2) e pelo questionário aplicado aos professores que atuam no Ensino Médio (Capítulo 4), concluímos que há uma forma comum em relação à abordagem das primeiras aulas sobre o conteúdo, onde calcular raízes quadradas de números negativos justifica os estudos, e um número complexo é definido como sendo $a + b.i$, com a e b denotando número reais e i denotando $\sqrt{-1}$, sem mostrar a estrutura que permite essa apresentação.

Neste trabalho sugerimos uma abordagem diferente da maioria das abordagens apresentadas no Capítulo 2. Vamos começar com a definição, que segue as ideias de Hamilton.

Definimos *corpo dos números complexos* como o conjunto $\mathbb{C} = \{(x, y); x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}\}$, com as operações de adição e multiplicação assim definidas: se $z = (x; y)$ e $w = (a; b)$ pertencem a $\mathbb{C}$, então

$$z + w = (x + a; y + b) \quad (1)$$

e

$$z.w = (x.a - y.b; x.b + y.a). \quad (2)$$

Os elementos de $\mathbb{C}$ são chamados de *números complexos*. Denotamos o número complexo $(0; 0)$ simplesmente por 0 e o número complexo $(1; 0)$ simplesmente por 1. Para cada $z = (x; y) \in \mathbb{C}$, definimos

$$-z = (-x; -y)$$

e

$$z^{(-1)} = (x/(x^2 + y^2); y/(x^2 + y^2))$$

se $z \neq 0$.

O número z^{-1} também é denotado por $\frac{1}{z}$ ou $1/z$.

Proposição 1. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:
(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$ *(associatividade da adição)*
(b) $z + w = w + z$ *(comutatividade da adição)*
(c) $0 + z = z$ *(elemento neutro)*
(d) $z + (-z) = 0$ *(elemento oposto)*
(e) $z.(w.t) = (z.w).t$ *(associatividade da multiplicação)*

(f) $z.w = w.z$ *(comutatividade da multiplicação)*
(g) $1.z = z$ *(elemento unidade)*
(h) $z.z^{-1} = 1$ *(elemento inverso)*
(i) $z.(w+t) = z.w+z.t$ *(distributividade da multiplicação em relação à adição).*

Tendo definido as operações de adição e de multiplicação em $\mathbb{C}$, definimos as operações de subtração e divisão, da maneira usual: dados $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z - w = z + (-w)$$

e

$$z/w = zw^{-1}$$

se $w \neq 0$.

Além disso, a potenciação também é definida da maneira usual:

$$z^0 = 1, z^n = z...z(\text{n vezes}) \text{ e } z^{-n} = z^{-1}...z^{-1}(\text{n vezes})$$

se $z \neq 0$ $(n \geq 1)$.

Decorre da Proposição 1 que diversas propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para os números complexos. Por exemplo, a soma e o produto de duas frações $\frac{z_1}{w_1}$ e $\frac{z_2}{w_2}$ de números complexos podem ser obtidos pelas fórmulas

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = (z_1.w_2 + z_2.w_1)/(w_1.w_2)$$

e

$$z_1/w_1.z_2/w_2 = (z_1.z_2)/(w_1w_2).$$

Um conjunto no qual estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas na Proposição 1 é chamado um *corpo*. Por essa razão é que chamamos $\mathbb{C}$ de corpo dos números complexos. Como vimos $\mathbb{C}$ é, como conjunto, o $\mathbb{R}^2$. Na Geometria Analítica, o conjunto $\mathbb{R}^2$ apresenta também duas operações: uma adição e uma multiplicação por escalar. Neste contexto, $\mathbb{R}^2$ denota uma estrutura algébrica, chamada em Matemática de espaço vetorial. Para os leitores interessados em ler sobre o assunto, indicamos [22].

Já que $\mathbb{C}$ é $\mathbb{R}^2$ como conjunto, um número complexo (x, y) pode ser representado graficamente como o ponto do plano cartesiano de abscissa x e ordenada y, ou como o vetor que liga a origem a este ponto (Figura 4.1). Neste contexto, chamamos o plano cartesiano de plano complexo, o eixo dos x de eixo real e o eixo dos y de eixo imaginário.

Vejamos agora a interpretação geométrica para a adição de dois números complexos. Se $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ são dois números complexos, então $z + w$ é

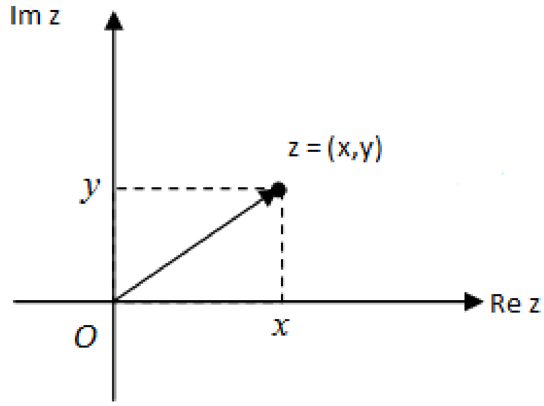

Figura 4.1: Representação gráfica de um número complexo

representado, geometricamente, pela diagonal do paralelogramo determinado pelos vetores que representam os números complexos z e w (Figura 4.2). Esta é a chamada regra do paralelogramo, apresentada em Geometria Analítica. Para o leitor interessado em ler sobre o assunto, indicamos [8].

O leitor que teve a oportunidade de ter estudado no Ensino Médio o assunto, certamente lembra de ter visto os números complexos como sendo os números da forma

$$x + yi$$

onde x e y são números reais e i é um algarismo imaginário que satisfaz a estranha igualdade $i^2 = -1$. Vejamos como obter tal representação dos números complexos. Primeiramente, denotamos o número complexo $(x;\ 0)$, com $x \in \mathbb{R}$, simplesmente por x. Note que isto está de pleno acordo com o que já fizemos com o elemento neutro 0 e o elemento unidade 1 $[0 = (0;\ 0)$ e $1 = (1;\ 0)]$. Em outras palavras fazemos a seguinte convenção:

$$x = (x; 0) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Dessa forma, passamos a ver $\mathbb{R}$ como um subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja, todo número real é considerado um número complexo. A princípio a inclusão $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ pode gerar uma certa ambiguidade: dados $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, o que entendemos por $x + a$ e

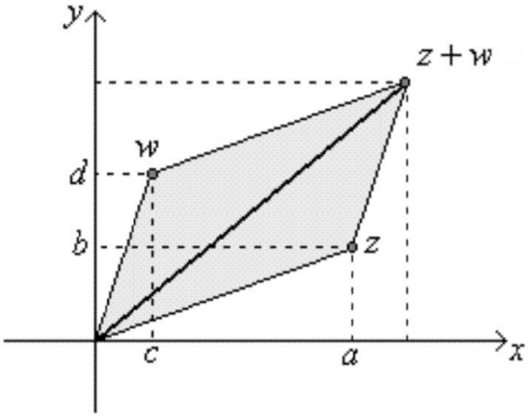

Figura 4.2: Soma de dois vetores

$x.a$? A soma e o produto dos números reais x e a ou a soma e o produto dos números complexos x e a ? A resposta é que tanto faz, uma vez que os valores são os mesmos. De fato,

$$(x; 0) + (a; 0) = (x + a; 0) = x + a$$

e

$$(x; 0)(a; 0) = (xa - 0.0; x.0 + 0.a) = (xa; 0) = x.a,$$

por (1) e (2) e nossa convenção (3). Agora, note que $(0; 1)^2$ = (0; 1).(0; 1) = (-1; 0) = -1, ou seja, o número -1 possui uma raiz quadrada em $\mathbb{C}$! O número complexo (0; 1) é denotado por i e é chamado algarismo imaginário. Assim, temos a propriedade básica do algarismo imaginário:

$$i^2 = 1. \qquad (4)$$

Finalmente, dado um número complexo qualquer $z = (x;y)$, temos

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = (x; 0) + (y; 0)(0; 1),$$

isto é,

$$z = x + yi. \qquad (5)$$

Logo, o par (x,y) e a expressão em (5) representam o mesmo número complexo. A expressão $x + yi$ é chamada a *forma algébrica* de z; essa é a forma na qual os números complexos são usualmente denotados.

Sempre que tomarmos um número complexo na forma $z = x + yi$ assumiremos implicitamente que x e y são números reais.

Observamos que com a forma algébrica não precisamos nos preocupar em memorizar as definições de $z + w$ e $z.w$ dadas em (1) e (2). De fato, basta usarmos algumas das propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{C}$ já apresentadas: se $z = x + yi$ e $w = a + bi$ são números complexos, então

$$z + w = (x + yi) + (a + bi) = x + a + yi + bi = (x + a) + (y + b)i$$

e

$$z.w = (x + yi)(a + bi) = xa + yia + xbi + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i.$$

4.2.3 NÚMEROS COMPLEXOS E TRIGONOMETRIA

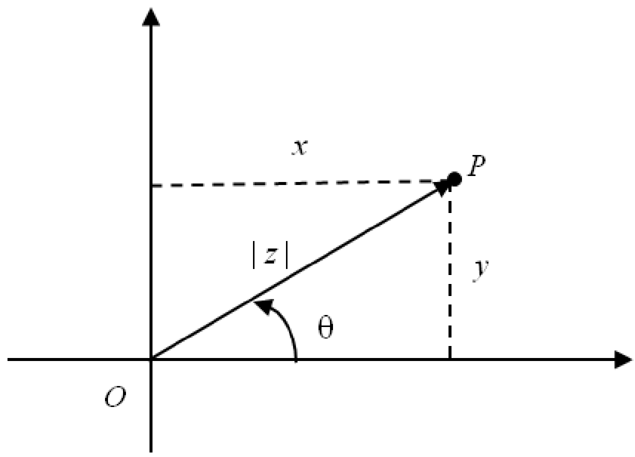

Figura 4.3: Módulo de um número complexo

O *valor absoluto (ou módulo)* de um número complexo $z = x + yi$ é definido por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Graficamente, o número real $|z|$ nos dá o comprimento do vetor correspondente a z no plano complexo (Figura 4.3). Mais ainda, $|z - w|$ é a distância entre os pontos do plano que representam z e w.

O *conjugado* de um número complexo $z = x + yi$ é definido por

$$\overline{z} = x - yi.$$

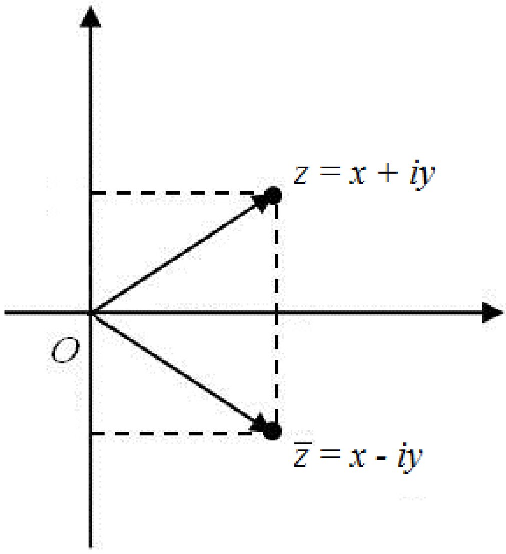

Figura 4.4: Conjugado de um número complexo

Graficamente $\overline{z}$ é o ponto do plano complexo obtido através da reflexão de z em relação ao eixo real (Figura 4.4).

Consideremos um número complexo $z = x + yi$, não nulo. Seja Θ o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário (figura 4.3). Como $\cos\,\Theta = x\ /\ |z|$ e $\text{sen}\ \Theta = y\ /\ |z|$, temos que

$$z = |z|\ (\cos\,\Theta + i.\text{sen}\ \Theta).$$

Assim, sempre é possível representar z na forma

$$z = |z|\ (\cos\,\Theta + i.\text{sen}\ \Theta) \qquad (6)$$

que é chamada uma *representação polar* de z. Se $\Theta \in \mathbb{R}$ satisfaz (6), dizemos que Θ é um argumento de z. Assim Θ_0 é um argumento de z. Entretanto, qualquer Θ_0 da forma $\Theta_0 + 2.k.\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também satisfaz (6). Em particular, z possui infinitos argumentos. Por outro lado, se Θ satisfaz (6) então $\cos\,\Theta = \cos\,\Theta_0$ e $\text{sen}\Theta = \text{sen}\ \Theta_0$, o que implica $\Theta = \Theta_0 + 2.k.\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim o conjunto arg z de todos os argumentos de z é dado por

$$\text{arg z} = \{\Theta_0 + 2.k.\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Por exemplo,

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + \text{i.sen}\pi/4) \text{ e } 1 + i = \sqrt{2}(\cos(-7\pi)/4 + i.\text{sen}(-7\pi)/4)$$

são representações polares de número $1+i$; note que arg $(1+i) = \{\pi/4 + 2.k.\pi$: $k \in \mathbb{Z}\}$. O único argumento de z que pertence ao intervalo (-π,π] é chamado *argumento principal* de z e é denotado por Arg z. Por exemplo,

$$\text{Arg } i = \pi/2 \text{ , Arg (-1 - i) = -}3\pi/4 \text{ , Arg (-2)} = \pi.$$

A identidade

$$z = |z| \, (\cos \text{Arg } z + i.\text{sen Arg } z) \qquad (7)$$

é chamada *a forma polar* de z.

Já apresentamos a interpretação geométrica da adição de dois números complexos. A seguir, com o auxílio das representações polares, vamos obter a interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos. Inicialmente, tomemos z e w dois números complexos, ambos com módulo igual a 1. Então,

$$\begin{aligned} z &= \cos\theta + i.\text{sen } \theta \\ w &= \cos\phi + i.\text{sen } \phi, \end{aligned}$$

onde $\theta \in arg\ z$ e $\phi \in arg\ w$. Note que z e w são representados geometricamente por pontos no círculo unitário. Como

$$\begin{aligned} i.z &= i.(\cos\theta + \text{i.sen } \theta) \\ &= -sen\theta + i.cos\theta \\ &= cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) + i.sen(\theta + \tfrac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

segue que multiplicar z por i significa realizar em z uma rotação no sentido anti-horário de $\frac{\pi}{2}$. Agora,

$$z.w = (\cos\phi + i.\text{sen } \phi).z = \cos\phi.z + \text{sen } \phi.i.z,$$

mostrando que o vetor que representa $z.w$ é a soma (diagonal do paralelogramo determinado pelos vetores $cos\phi.z$ e $sen\phi.i.z$) dos vetores perpendiculares $cos\phi.z$ e $sen\phi.i.z$. Note que o ângulo de z com $z.w$ é ϕ. Concluímos, assim, que multiplicar dois números complexos z e w, com módulo 1, significa geometricamente, dar a um deles uma rotação no sentido anti-horário de ângulo igual ao ângulo do outro (Figura 4.5).

No caso de dois números complexos não necessariamente com módulo igual a 1, digamos z_1 e w_1, podemos escrever

$$z_1 = |z_1|.z$$

e

$$w_1 = |w_1|.w,$$

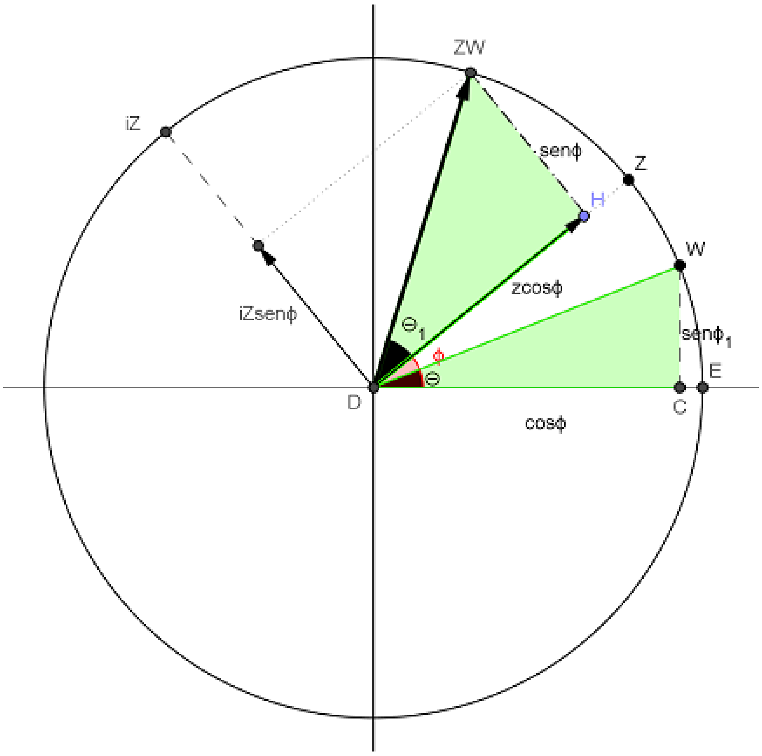

Figura 4.5: Representação geométrica do produto de dois números complexos

onde z e w são números complexos de módulo igual a 1. Note que z e z_1 têm um mesmo argumento θ, assim com w e w_1 têm um mesmo argumento ϕ. Logo,

$$z_1.w_1 = |z_1|.|w_1|.z.w,$$

mostrando que o produto de dois números complexos z_1 e w_1 tem valor absoluto $|z_1|.|w_1|$ e tem $\theta + \phi$ como um argumento. Assim, concluímos que

$$z_1.w_1 = |z_1|.|w_1|\text{cos } (\theta + \phi) + i.\text{sen}(\theta + \phi). \qquad (8)$$

Seja

$$z = |z| \ (\cos \Theta + \text{i.sen } \Theta)$$

uma representação polar de um número complexos não nulos z. Como $\overline{z} = |z|(cos\theta - i.sen\theta)$ e $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, segue que

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos \Theta \text{ - } i.\text{sen } \Theta). \qquad (9)$$

De (8) obtemos que

$$z^n = |z|^n.[\cos(\mathrm{n}\Theta) + i.\mathrm{sen}\ (\mathrm{n}\Theta)] \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \qquad (10)$$

No caso em que $|z| = 1$, a igualdade (10) nos diz que

$$(cos\Theta + i.sen\Theta)^n = \cos(\mathrm{n}\Theta) + i.\mathrm{sen}(\mathrm{n}\Theta). \qquad (11)$$

Esta igualdade é conhecida como *fórmula de De Moivre.*

Dado um número complexo w e um número natural $n \geq 1$, dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz n-ésima de w se

$$z^n = w.$$

Se w= 0 é claro que $z = 0$ é a única solução da equação $z^n = w$. Logo, o número 0 possui uma única raiz n-ézima que é o próprio 0. Provaremos a seguir que se $w \neq 0$ então existem exatamente n soluções distintas da equação $z^n = w$. Mais ainda, vamos apresentar a forma de cada uma dessas n soluções distintas.

Teorema 1. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Todo número complexo não nulo w possui exatamente n raízes n-ézimas complexas distintas, a saber,

$$\sqrt[n]{w} = [\cos(\tfrac{Arg(w)+2k\pi}{n}) + \mathrm{i.sen}(\tfrac{Arg(w)+2k\pi}{n})] \qquad (12)$$

onde k = 0,1,2,...,n-1.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, denotemos por z_k o número complexo dado em (12). Escreva $w = |w|.(\cos\ a + i.\mathrm{sen}\ a)$, onde $a = \mathrm{Arg}\ w$. Nós estamos procurando todos os números complexos $z = |z|.(\cos\ b + i.\mathrm{sen}\ b)$ para os quais é verdade que

$$z^n = \mathrm{w}.$$

Pela fórmula (10), a equação acima se transforma em $|z|^n.[\cos\ (nb) + i.\mathrm{sen}\ (nb)] = |w|.(\cos\ a + i.\mathrm{sen}\ a)$, o que equivale a dizer que

$$|z|^n = |w|,\ \cos\ (nb) = \cos\ a \text{ e } \mathrm{sen}\ (nb) = \mathrm{sen}\ a.$$

A primeira condição é satisfeita precisamente quando $|z| = \sqrt[n]{|w|}$, enquanto as duas últimas são satisfeitas quando $nb = a + 2\mathrm{k}\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $b = \frac{a+2k\pi}{n}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, as raízes n-ésimas de w são os números n_k para $k \in \mathbb{Z}$. Fazendo $k = 0, 1, ..., n-1$ obtemos distintas raízes n-ésimas de w. Entretanto os demais valores de k nos dão apenas repetições das raízes z_0, z_1, ..., z_{n-1}. De fato, tome $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário. Escreva $k = q.n + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < n$. Como

$$\tfrac{a+2k\pi}{n} = \tfrac{a+2.(qn+r)\pi}{n} = \tfrac{a+2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

vemos que $z_k = z_r \in \{z_0, z_1, ..., z_{n-1}.\}$ Isto finaliza a prova do teorema.

A raiz n-ésima de w obtida fazendo $k = 0$ em (12) é chamada a *raiz n-ésima principal de w*. A notação $\sqrt[n]{|w|}$ é reservada para esta raiz. Note que esta notação é coerente com a notação $\sqrt[n]{|w|}$ que indica a única raiz real positiva de $|w|$. Portanto

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\ [\cos(\tfrac{Arg(w)}{n}) + \text{i.sen}(\tfrac{Arg(w)}{n})].$$

Como a única raiz n-ésima do zero é o próprio zero, convencionamos que $\sqrt[n]{0} = 0$. O símbolo $\sqrt{w}$ também é usado em lugar de $\sqrt[2]{w}$.

Observe que todas as n-raízes de w possuem o mesmo módulo, a saber, $\sqrt[n]{|w|}$. Logo, elas são representadas por n pontos sobre a circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{|w|}$. Além disso, estes pontos estão igualmente espaçados ao longo desta circunferência devido à relação de seus argumentos. Como exemplo, consideremos as raízes cúbicas de 1. Pelo Teorema 1, elas são os números

$$z_k = 1.[\cos(\tfrac{2k\pi}{3}) + \text{i.sen}(\tfrac{2k\pi}{3})] \text{ para } k = 0,1,2.$$

Calculando, obtemos $z_0 = 3$, $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$. Temos que z_0, z_1 e z_2 dividem a circunferência de centro (0,0) em três partes congruentes.(figura 4.6).

A seguir vamos aplicar a forma polar dos números complexos na Trigonometria. Mais precisamente, vamos usar a forma polar dos números complexos para apresentar demonstrações das fórmulas de soma de arcos e arcos duplos e triplos de seno e cosseno. Veremos que as demonstrações ficam bem mais simples do que as demonstrações apresentadas na Trigonometria.

a) $cos(a + b)$ e $sen(a + b)$, com a e b números reais.

Fixe a e b números reais. Sejam $z = (\cos a + i.\text{sen } a)$ e $w = (\cos b + i.\text{sen } b)$. Temos, pela interpretação geométrica do produto de dois números complexos,

$$z.w = cos(a + b) + i.sen(a + b).$$

Por outro lado,

$$\begin{gathered} z.w = (\cos a + \text{isen } a).(\cos b + i.\text{sen } b) = \\ = (\cos a.\cos b + i.\text{sen } b.\cos a + i.\text{sen } a.\cos b + i^2.\text{sen } a.\text{sen } b) = \\ = [(\cos a.\cos b - \text{sen } a.\text{sen } b) + i.(\text{sen } a.\cos b + \text{sen } b.\cos a)]. \end{gathered}$$

Comparando as expressões conclui-se que

$$cos(a + b) = \cos a.\cos b - \text{sen } a.\text{sen } b$$

e

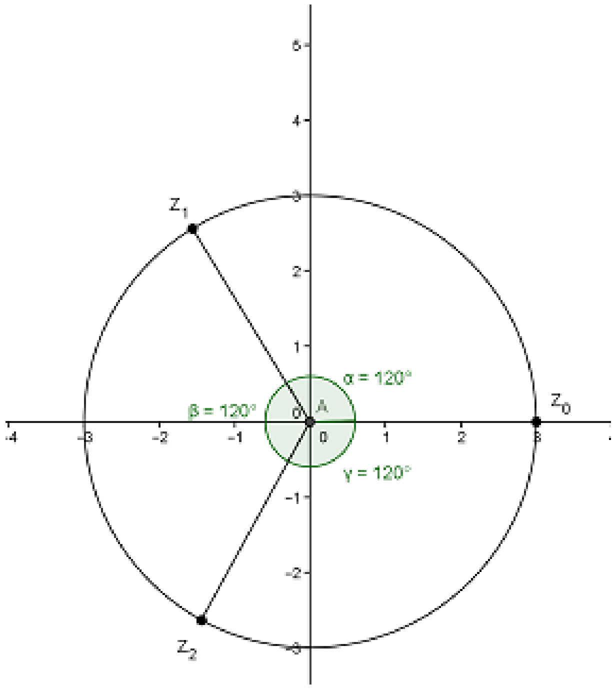

Figura 4.6: z_0, z_1 e z_2 dividindo a circunferência de centro (0,0) em três partes congruentes

$$sen(a+b) = \text{sen } a.\text{cos } b + \text{sen } b.\text{cos } a.$$

b) cos $(2a)$ e sen $(2a)$, sendo a um número real.

Fixe a um número real. Seja z = (cos a +i.sen a). Então, pela interpretação geométrica do produto de dois números complexos, temos que

$$z^2 = (\text{cos } (2a) + i.\text{sen } (2a)).$$

Por outro lado,

$$z^2 = (\text{cos } a + i.\text{sen } a)^2 =$$
$$= (cos^2 \text{ a} + 2.i.\text{sen } a \text{ cos } a + i^2.sen^2 a) =$$
$$= [(cos^2 \text{ } a \text{ - } sen^2 \text{ } a) + 2.i.\text{sen } a \text{ cos } a)].$$

Comparando as expressões conclui-se que

$$cos(2a) = cos^2 a \text{ - } sen^2 a$$

e

$$\text{sen}(2a) = 2.\text{sen } a.\text{cos } a.$$

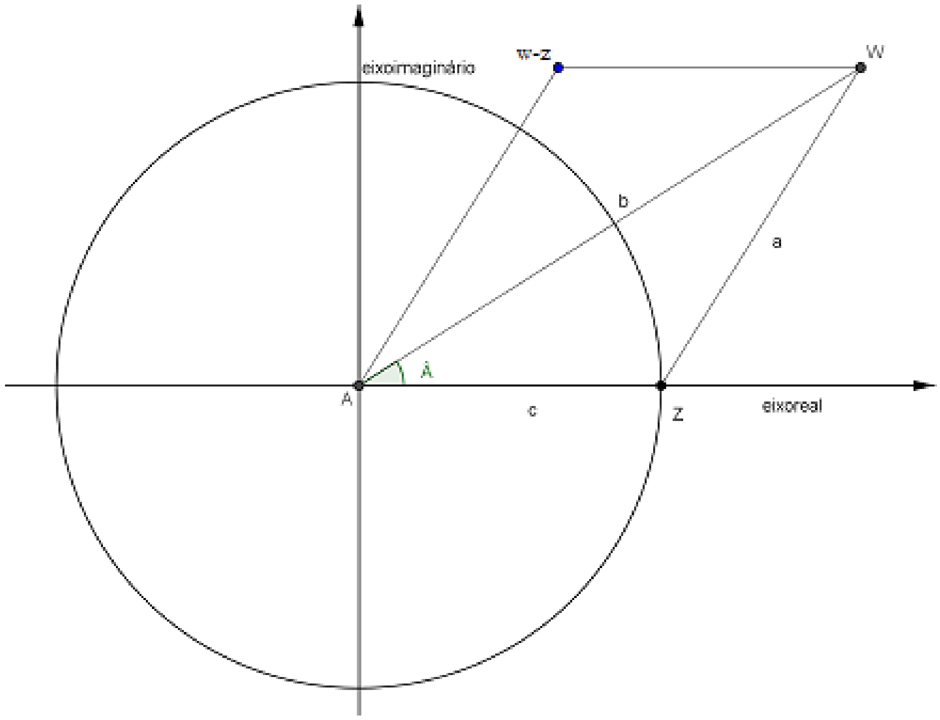

Figura 4.7: demonstração da lei dos cossenos

c) Lei dos Cossenos

Lembremos que a lei dos cossenos é uma relação entre os lados e um dos ângulos de um triângulo qualquer. Mais precisamente, em um triângulo ABC tem-se que

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ - 2bc cos } \hat{A},$$

onde a, b e c são os lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Para facilitar a visualização da demonstração usa-se um triângulo obtusângulo fazendo coincidir o vértice A com a origem de um sistema cartesiano e AB com o eixo OX. Sejam z = C o número complexo representado por B e $w = b$(cos Â + i.sen Â) o número complexo representado por C, conforme a figura 4.7.

Então, $|w - z|^2$ = (w - z)$\overline{(w - z)}$ = (w - z)($\overline{w}$ - $\overline{z}$) = w.$\overline{w}$ + z.$\overline{z}$ - (z.$\overline{w}$ + w.$\overline{z}$).

Como

(1) $w.\overline{w} = |w|^2 = b^2$,

(2) $z.\overline{z} = |z|^2 = c^2$,

(3) $z.\overline{w} = c(cos0 + i.sen0).b$[cos (-Â) + i.sen (-Â)] = $b.c$(cos Â - i.sen Â) e
$w.\overline{z} = b$(cos Â + i.sen Â).c(cos 0 + i.sen 0) = $b.c$(cos Â + i.sen Â),

temos

$$z.\overline{w} + w.\overline{z} = b.c(2.\text{cos } \hat{A}) = 2.b.c.\text{cos } \hat{A}.$$

Assim,

$$a^2 = b^2 \text{ - } c^2 \text{ - } 2.b.c.\cos \hat{\text{A}}.$$

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A definição de números complexos por meio de pares ordenados permite ao professor construir, juntamente com seus alunos, uma estrutura algébrica nova, apenas usando as operações de igualdade, adição e multiplicação dos pares ordenados. Uma vez definido como realizar essas três operações, vamos associar que todo número real k pode ser representado pelo par ordenado $(k, 0)$, e que os pares em que a segunda coordenada é diferente de zero não tem representação no conjunto dos números reais.

É importante destacar que desse modo, o professor poderá mostrar que o número real (-1) tem raiz quadrada nessa nova estrutura criada, não necessariamente sendo um número real, como os alunos estão acostumados a ver. O aluno encontra um número real quando calcula a raiz quadrada de um número real positivo, por exemplo, $\sqrt{9} = 3$. Mas o mesmo não acontece quando lidamos com raízes quadradas de números negativos. Considerando que o aluno já tenha o conhecimento das operações com pares ordenados, o professor pode apresentar a seguinte operação:

$$(0, 1).(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0)$$

que representa o número real (-1). Dessa forma, existe um objeto matemático (que pertence ao $\mathbb{R}^2$), não necessariamente um número real, que multiplicado por ele mesmo tem como resultado (-1). Como se trata da construção de uma estrutura nova e diferente para os alunos, a definição dos termos e a nomenclatura usada passam a ter importância destacada. Em seguida, o professor poderá representar o par (0,1) pela letra i, e que esse par será chamado de unidade imaginária. Dessa forma, a operação acima, se reduz em $i^2 = i.i =$ (-1). Com essa abordagem, pode-se ainda reforçar a ideia de que quando encontramos uma equação do segundo grau, com discriminante negativo, não encontramos raízes reais.

Apesar de o trabalho sugerir que a abordagem de números complexos seja feita por meio de pares ordenados, não significa que o professor tenha que abolir a forma algébrica. Pelo contrário, a forma $a + b.i$ é uma forma comumente usada na Matemática. O que se propõe é que a definição seja feita com uso de pares ordenados, permitindo ao aluno entender o que significa $a + b.i$. Assim, o par ordenado (a, b) pode ser escrito da seguinte forma:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1).$$

Como o par $(a, 0)$ representa o número real a, da mesma forma que o par ordenado $(b, 0)$ representa o número real b, e que o par (0,1) será representado pela letra i, o par (a, b) poderá ser escrito na forma $(a + b.i)$. Dessa forma, fica claro para o aluno que operações de números complexos na forma algébrica representam as operações já bem definidas com pares ordenados, no $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, multiplicar os números complexos (3 + 4i) e (2 - 5i) representa a multiplicação dos pares (3,4) e (2,-5), respectivamente. A forma algébrica passa a ser apenas uma questão de escrita, de como expressar o resultado final.

Vale a pena ressaltar que com essa abordagem, a consistência das operações e nomenclaturas usadas nos permite chegar a forma algébrica sem imposições ou quebras de verdades matemáticas, diferentemente de como acontece quando se faz uso da abordagem tradicional, citada no início do capítulo. Durante todo o Ensino Médio, o aluno trabalha com a ideia de que não é possível encontrar solução real para raiz quadrada de um número negativo. E, de acordo com a proposta desse trabalho, não criamos nenhum tipo de conflito, pois baseado na experiência que o aluno tem do que seja um número (principalmente na relação que ele faz com quantidade), se torna muito difícil para ele compreender como é possível um número elevado ao quadrado ser igual a (-1). Com a abordagem proposta, o aluno entende claramente que esse elemento, que tem essa propriedade, não é um número real, e sim um elemento do $\mathbb{R}^2$.

Podemos considerar também os benefícios que a abordagem proposta traz para os alunos que pretendem, ao sair do Ensino Médio, ingressar em um curso superior da área de Exatas. A qualidade das aulas no Ensino Médio reflete diretamente no desempenho do aluno ao ingressar e começar a estudar em uma universidade. Um exemplo disso é que podemos destacar que alguns cursos que envolvem diretamente a Matemática, como o curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, as Engenharias, e outros cursos, criaram em seus primeiros períodos disciplinas de nivelamento para minimizar as dificuldades trazidas do Ensino Médio e até Ensino Fundamental. Como analisado no Capítulo 2, os livros que propõem o ensino dos números complexos com uso de pares ordenados trazem uma formalidade importante e necessária para os alunos, em especial para aqueles que seguirão um curso da área de Exatas. A maioria das propriedades são demonstradas, e as que não são demonstradas ficam como exercício, proporcionando um melhor aprendizado do conteúdo. Um curso superior, como o de Matemática, por exemplo, traz exatamente essa realidade da formalização dos resultados obtidos. Fazer com que o aluno tenha essa experiência possibilita uma maior familiarização com o rigor necessário ao ingressar no Ensino Superior. Mesmo que o aluno ainda não saiba os passos iniciais para uma demonstração, mas compreende a necessidade desse procedimento. Daí, dependendo da educação Matemática que o aluno tido, pode promover um maior entendimento das suas necessidades em futuras disciplinas, diminuindo as dificuldades encontradas durante o curso e, consequentemente, a chance de abandonar a universidade.

Com a preocupação de demonstrar as propriedades e resultados obtidos (preservando o grau de formalidade exigida para o Ensino Médio), o professor pode proporcionar ao aluno esse diferencial citado no parágrafo acima. Trazendo como exemplo o livro analisado do Luiz Dante, no qual são demonstradas as propriedades encontradas no conjunto dos números complexos, tais como comutatividade da adição e multiplicação, existência do elemento neutro aditivo e multiplicativo, inverso aditivo e multiplicativo entre outros. Mesmo que o aluno não tenha ainda a maturidade matemática para compreender tal necessidade, ele poderá colher frutos dessa experiência em um futuro curso na área de Exatas.

Por fim, podemos também levantar um questionamento a respeito de como os livros didáticos de Matemática apresentam os diagramas que mostram a relação de inclusão entre os conjuntos dos números reais e complexos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Em relação ao conjunto dos números complexos, seus elementos são pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e nesse caso quando dizemos que um número real $\alpha \in \mathbb{C}$, vale destacar que estamos nos referindo ao par ordenado $(\alpha, 0)$.

A mesma ideia vale para as operações de adição e multiplicação entre um número real e um complexo. Os livros analisados que optam pela abordagem direta dos números complexos por meio da forma algébrica não têm a preocupação em ressaltar que os dois elementos envolvidos na operação não são do mesmo tipo, da mesma natureza, como observamos na página 43 desse trabalho Para exemplificar, tomaremos a operação: $\frac{1}{2} + (5 + 3i)$. Neste caso, estamos realizando a adição de 2 pares ordenados: $(\frac{1}{2}, 0) + (5, 3) = (\frac{1}{2} + 5, 3 + 0) = (\frac{7}{2}, 3)$, que pode ser representado pela forma $\frac{7}{2} + 3i$. Se optarmos pela passagem direta, faremos $\frac{1}{2} + (5 + 3i) = (\frac{1}{2} + 5) + 3i = \frac{7}{2} + 3i$, ou seja, estamos efetuando uma operação de adição entre dois elementos de dimensões diferentes.

De uma forma geral, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a operação $\alpha + (a, b)$ no conjunto dos números complexos indica $(\alpha, 0) + (a, b) = (\alpha + a, b)$, enquanto a operação $\alpha.(a, b)$ indica $(\alpha, 0).(a, b) = (\alpha.a - 0.b, \alpha.b + 0.a) = (\alpha.a, \alpha.b)$. Com isso, quando um livro afirma que todo número real é um número complexo ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), seria importante destacar que esse número real pode ser escrito na forma de par ordenado, onde a segunda coordenada é igual a zero.

Diante dos resultados obtidos nos questionários aplicados é que o presente trabalho propõe uma mudança na forma de ensinar números complexos nas escolas.

Além de propor a definição de números complexos por pares ordenados, propomos que se faça uma motivação histórica ao tema, assim como uma aplicação, que pode ser na própria Matemática. Como a maioria das aplicações de números complexos envolvem conhecimentos matemáticos avançados para o público alvo o qual este trabalho se destina, propomos aplicar os números complexos na Trigonometria.

Com nossa proposta, esperamos estar contribuindo para a melhoria do ensino do tema nas escolas.

Capítulo 6

BIBLIOGRAFIA

[1] ABREU, Estela dos Santos; TEIXEIRA, José Carlos Abreu. *Apresentação de trabalhos monográficos de conclusão de curso.* 8 ed. Niterói: EDUFF, 2005.
[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* 2 ed. São Paulo: Edgar Blucher, 2003.
[3] CARMO, Manfredo P.; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Edurado. *Trigonometria. Números complexos.* 3ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1992. (Coleção do Professor de Matemática).
[4] CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. *História dos números complexos.* Instituto de Matemática e Estatística da USP. Setembro, 2001.
[5] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações - Volume 3.* São Paulo: Ática, 2010.
[6] DE OLIVEIRA, Oswaldo Rio Branco. *Teorema Fundamental da Álgebra.* Novembro, 2011.
[7] EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática.* 2 ed. São Paulo: Unicamo, 2002.
[8] FACCHINI, Walter. *Matemática para escola de hoje.* São Paulo: FTD, 2006
[9] FERNANDEZ, Cecília de Souza; DOS SANTOS, Raphael Antunes. *O Teorema Fundamental da Álgebra.* V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFPB. Outubro, 2010.
[10] FERNANDEZ, Cecília de Souza; BERNARDES JR, Nilson da Costa. *Introdução às funções de uma variável complexa.* 2ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008. (Coleção Textos Universitários).
[11] GIOVANNI, José Ruy; Bonjorno, José Roberto; Giovanni JR, José Ruy. *Matemática fundamental: uma nova abordagem.* São Paulo: FTD, 2002.
[12] HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção PROFMAT).
[13] JÚNIOR, Ulício Pinto. *A história dos números complexos: das quantidades*

sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Cardano. Dissertação de Mestrado, UFRJ. Março, 2009.
[14] KAPLANSKY, Irving. *Set theory and metric spaces.* 2 ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1977.
[15] KLEIN, Felix. *Matemática elementar de um ponto de vista superior - Volume 1 - primeira parte: Aritmética.* Tradução de Tiago Pedro e Suzana Metello de Nápoles. Lisboa: Sociedade portuguesa de Matemática, 2009.
[16] LONGEN, Adilson. *Matemática: Uma atividade humana, Ens. Médio.* volume 3: Livro do professor. Curitiba: Base Editora, 2003.
[17] MACHADO, Armando. *Números complexos.* Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, 2004.
[18] MELLO, José Luiz pastore. *Matemática, volume único: Cosntrução e significado.* São Paulo: Moderna, 2005.
[19] MILIES, César Polcino. *Breve história da Álgebra abstrata.* Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2004.
[20] PAIVA, Manoel. *Matemática/Manoel Paiva.* 1 ed. São Paulo: Moderna, 2004.
[21] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_complexo.* Acesso em: 24 set.2012.
[22] RIGHETTO, Armando. *Vetores e Geometria Analítica.* 4 ed. São Paulo: Instituto Brasileiro do Livro Científico, 1985.
[23] SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez. *Matemática: Ensino Médio - Volume 3.* 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
[24] *http://www.brasilescola.com/matematica/numeros-complexos.htm.* Acesso em: 24 set.2012.
[25] *http://www.infoescola.com/matematica/numeros-complexos.* Acesso em 24 set.2012.
[26] *www.youtube.com/watch?v=pOCUumUAkhA.* Acesso em 25 set.2012.