PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO EM MATEMÁTICA – PROFMAT

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: DETERMINAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES E OUTRAS APLICAÇÕES

JORGE MESSIAS DO NASCIMENTO FLEXA

MACAPÁ-AP

2017

CÁLCULO DIFERENCIAL A INTEGRAL: DETERMINAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES E OUTRAS APLICAÇÕES

JORGE MESSIAS DO NASCIMENTO FLEXA

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT – da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

MACAPÁ-AP

2017

CÁLCULO DIFERENCIAL A INTEGRAL: DETERMINAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES E OUTRAS APLICAÇÕES

JORGE MESSIAS DO NASCIMENTO FLEXA

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
UNIFAP
Presidente da Banca - Orientador

____

Prof. Ms. Carlos Alexandre Santana Oliveira
IFAP

____

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
UNIFAP

____

Prof. Dr. Erasmo Senger
UNIFAP

Avaliado em: _____/_________________/2017

Dedicatória

Dedico esse trabalho a todos os socialistas, lutadores sociais e trabalhadores que elevam sua consciência na luta cotidiana contra a exploração capitalista, na perspectiva de construção de uma sociedade justa e igualitária, livre de uma classe opressora e seus lacaios parasitas do suor alheio.

“Em algumas pessoas o talento parece menor do que é, pois elas sempre se impõem tarefas grandes demais.”

(Friedrich Nietzsche)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores do curso, à SBM, à UNIFAP, e em especial ao meu orientador Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

RESUMO

Para o desenvolvimento desse trabalho, optou-se por utilizar conceitos elementares sobre Cálculo Diferencial e Integral, acessíveis ao leitor com algum conhecimento em matemática, abordando, a partir destes, suas aplicações, principalmente na determinação de áreas e volumes. Desse modo, possibilitando a integração de vários conteúdos abordados no ensino médio com os conceitos do cálculo, ampliando as possibilidades de utilização de tais conhecimentos. Por outro lado, este trabalho tenta motivar os professores que atuam na docência com estes estudantes a fundamentar melhor o uso de algumas definições, bem como atender as demandas de alunos avançados e com interesse diversos, para além da limitação dos livros didáticos. Logo, torna-se relevante a apresentação das definições de Limite, Derivada e Integral, e de algumas de suas propriedades que nortearam o entendimento de como tais definições e propriedades podem ser utilizadas na resolução de problemas cotidianos, e também na compreensão de muitos outros conteúdos abordados nas disciplinas de matemática, física, e outras ciências.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral, Limite, Derivada, Integral, aplicações, áreas e volumes.

ABSTRACT

For the development of this work, it was decided to use elementary concepts on Differential and Integral Calculus, accessible to the reader with some knowledge in mathematics, approaching, from these concepts, their applications, mainly in the determination of areas and volumes. Thus, it is intended to allow the integration of various contents addressed in High School classes with the concepts of calculus, increasing the possibilities of using such knowledge. On the other hand, this work aims to motivate teachers to better justify the use of some definitions, as well as to meet the demands of advanced students and with diverse interest, beyond the limitation of textbooks. Therefore, it is important to present the definitions of Limits, Derivatives and Integrals, and some of its properties that guides the understanding on how such definitions and properties can be used in solving everyday problems, as well as understanding many other contents covered in Mathematics, Physics, and other sciences classes.

Keywords: Differential and Integral Calculus, Limit, Derivative, Integral, Applications, Areas and Volumes.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO:

É fato notório que ainda hoje, apesar do esforço e dedicação de muitos profissionais da educação em transformar a Matemática em uma ciência acessível e agradável aos estudantes, em particular no ensino médio, onde o grau de abstração exigido se eleva, vivemos sob a sombra de uma disciplina antipática, maculada pelo estereótipo da alienação à realidade, essencialmente teórica e inaplicável ao cotidiano dos estudantes, e essa visão precisa ser transformada.

> "Fala-se muito, hoje em dia, em inserir o ensino da Matemática em um contexto. Justamente porque muitos alunos consideram a Matemática muito difícil e abstrata, ouvimos pedidos para que ela se torne mais "concreta", ligada ao "quotidiano". Contudo, a Matemática é vista, ao mesmo tempo, como um saber abstrato por excelência e, justamente por isso, ajudaria a desenvolver o raciocínio e o pensamento lógico." (ROQUE, 2012)

Nesse contexto, torna-se latente a necessidade de aprofundarmos o debate sobre a eficiência e a qualidade da apresentação da disciplina nas escolas públicas, especialmente favorecendo a produção de novos conhecimentos e privilegiando a aplicação dos conteúdos trabalhados em sala de aula através de uma abordagem significativa, sempre que possível.

Também é fato que a escola faz parte da sociedade na qual está inserida, e é indissociável a sua prática da realidade social. Sendo assim, as ações desenvolvidas na escola devem expressar e refletir o momento histórico em que tal sociedade vive, bem como as demandas inerentes a ele. Sendo assim, é de suma importância para a assimilação e produção de conhecimentos matemáticos, o desenvolvimento crítico da clientela e, consequentemente, da própria sociedade, que se busquem alternativas que possibilitem maior interesse dos alunos, potencializem o seu desenvolvimento intelectual, diminuam o grau de insatisfação destes e, por fim, contribuam para uma reflexão crítica sobre a sociedade, convertendo tais indivíduos em seres produtivos e transformadores da própria realidade na qual estão inseridos.

Desse modo, a proposta de trabalho com o Cálculo Diferencial e integral, torna-se relevante pois possibilita, em primeiro lugar, a conexão de vários conteúdos abordados durante a vida acadêmica dos estudantes no ensino médio, tais como geometria, geometria analítica, funções, entre muitos outros. Além disso, abre o leque para tratarmos da questão da interdisciplinaridade, uma vez que nos inserimos na resolução de problemas da física, química, biologia, etc.

O uso do Cálculo como ferramenta para resolução de problemas, muitos deles com aplicações diretas na vida cotidiana, estimula a reflexão e o debate, uma vez que pode possibilitar o entendimento significativo das questões apresentadas, bem como sua relação direta com a realidade, tornando assim, o conhecimento como ferramenta importante para compreensão do mundo à sua volta e base para transformação da visão do educando, e de sua relação com a Matemática, desta vez aplicada e integrada ao cotidiano.

Neste sentido, os dados numéricos e algébricos que a primeira vista podem não fazer muito sentido, devem ser desmistificados, tratados como informações concretas, que trazem em si uma abordagem analítica da realidade, para que se possa compreender minimamente o que os números nos "falam".

Assim, este trabalho foi construído tendo em vista dois objetivos principais, em primeiro lugar, fornecer ao aluno de ensino médio a possibilidade de interagir com uma ferramenta, o Cálculo Diferencial e Integral, revolucionária no âmbito da matemática, capaz de elevar sua capacidade de interagir, e compreender as mais diversas nuances científicas abordadas nos cursos regulares e avançados e, em segundo lugar, estimular o professor que trabalha com a docência da educação básica em nível médio à inquietação, à pratica de relacionar conteúdos, de aproveitar as potencialidades dos alunos mais avançados, de poder resgatar os que possuem maior dificuldade com uma prática significativa, e por fim, desenvolver a consciência que não se pode, nem se deve permanecem refém dos livros didáticos e dos conteúdos mastigados e pré-estabelecidos como matriz curricular única.

Por fim, é importante frisar que este trabalho aborda a temática escolhida de maneira leve, com uma metodologia que não se pretende cientificista, tampouco faz uso do rigor matemático, pelo contrário, tenta ser acessível, com uma abordagem menos técnica, para mostrar que é possível, com a utilização dos conhecimentos mais elementares da Matemática, compreender, interpretar e analisar os temas aqui apresentados, numérica, gráfica e analiticamente, visando uma boa compreensão do assunto.

Assim, esta dissertação está disposta em cinco partes distintas. A primeira parte refere-se à introdução, capítulo 1, na qual se faz uma apresentação sintetizada do trabalho e se estabelece uma relação entre os saberes matemáticos e o debate proposto. A segunda parte, capítulo 2, busca fazer uma breve contextualização histórica do desenvolvimento do Cálculo Diferencial Integral, bem como de conteúdos que serão aqui correlacionados a este, na perspectiva de estabelecer a importância desta interação ao longo da história e os avanços decorrentes da evolução no modo de interagir das ciências. A terceira parte, capítulo 3, capítulo 4 e capítulo 5, já inserindo o conteúdo abordado, busca estabelecer definições e propriedades básicas de limites, derivadas e integrais, muitas vezes de forma intuitiva, de modo a proporcionar uma base mínima para que possamos apresentar as aplicações, e também estimular a compreensão que tanto a demonstração de algumas propriedades quanto a própria definição de tais conceitos, não depende de pré-requisitos sofisticados para que se inicie um estudo do tema. A quarta parte, capítulo 6, pretende, através da abordagem de problemas, apresentar a possibilidade de interação do Cálculo Diferencial e Integral com diversos conteúdos abordados no ensino médio, em particular com a geometria, na determinação de áreas e volumes, além de outras aplicações. Na quinta parte, capítulo 7, apresentam-se as conclusões do trabalho, com as quais não se pretende firmar verdade absolutas, nem tampouco certezas relativas, e sim instigar o debate com base nos argumentos apresentados, tentando contribuir na melhoria do currículo e metodologia praticados em sala de aula, na rede pública de ensino, e mais especificamente, nas turmas de educação básica em nível médio.

2. CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA:

O ensino da Matemática pode ser abordado de modo mais eficiente se, além de relacionado com os problemas do cotidiano, o aluno possa perceber de que maneira a Matemática se desenvolveu através da história e continua se desenvolvendo, entender quais foram os problemas que se apresentaram diante da humanidade para que soluções fossem exigidas com muita criatividade e desejo de suplantar barreiras na linha evolutiva, em que momento histórico tais avanços aconteceram e quais suas consequências no modo de vida e na estrutura da sociedade contemporânea.

O que não significa dizer que o professor de Matemática deva converte-se em um historiador, e sim, na medida de suas possibilidades, pesquisar, eventualmente, fatos e o contexto histórico inerentes aos assuntos a serem abordados, na perspectiva de instigar a curiosidade do aluno.

Em se tratando de nossa temática especificamente, nos deparamos diante da necessidade de compreender o processo que tem o Cálculo Diferencial e Integral como culminância, mas sem perder de vista as relevantes contribuições científicas acumuladas ao longo do processo até sua concepção, e mais ainda, entender que não estamos diante de uma ciência pronta e acabada, que a história nos mostra que a necessidade associada à criatividade tem impulsionado a humanidade num contínuo processo evolutivo, então vejamos:

Os antigos egípcios e babilônios já possuíam sistemas numéricos avançados para sua época, bem como um vasto conhecimento em geometria, que embora possam parecer rudimentares para os dias de hoje, são em suma, os alicerces da produção do conhecimento em diversas áreas. Há fortes indícios que no caso dos egípcios, por exemplo, havia uma motivação em especial voltada à demarcação de terrenos, necessária sempre nos períodos posteriores às cheias do rio Nilo, hipótese encontrada nos escritos de Heródoto.

Mas é notado o fato que grandes matemáticos, principalmente os gregos, começaram a trazer contribuições importantíssimas para a formalização de todo conhecimento acumulado na antiguidade, com destaque para Tales de Mileto, Arquimedes, Pitágoras, entre outros, mas foi efetivamente com Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C. que de fato, a matemática passa a assumir uma forma mais precisa, formal e com rigor científico. A sua obra “Os elementos”, é sem dúvida, o primeiro tratado científico de grande relevância na história da humanidade, e cuja validade ainda se verifica nos dias de hoje, tanto é assim que nossa geometria clássica é simplesmente chamada de “Geometria Euclidiana”.

Além da inestimável, e inquestionável relevância de seu conteúdo, a obra de Euclides era permeada por outro elemento importantíssimo, talvez seu grande legado, que foi o método axiomático-dedutivo no qual, a partir de alguns fatos aceitos como evidentes, alguns até de forma intuitiva, e definições decorrentes destes, são demonstradas suas implicações.

No livro XII de “Os Elementos”, Euclides aborda a questão de áreas e volumes usando, inicialmente, o chamado método da exaustão de Eudoxo, também presente no trabalho de Arquimedes para áreas delimitadas por arcos e círculos, nesse caso, o método consiste basicamente na inscrição de sucessivos polígonos inscritos na circunferência, de modo que o número de lados destes polígonos cresça indefinidamente, a ponto de suas áreas se aproximares cada vez mais da área do círculo.

Embora muito difundida, e com incalculáveis aplicações, a geometria euclidiana, e as teorias correlatas para o cálculo de áreas, passaram por um longo processo de amadurecimento, até que a partir do século XVII, com Leibniz, Newton, Fermat, Descartes, e outros, com o surgimento do método cartesiano, do Cálculo Diferencial e Integral, da posterior formalização do conceito de função, é que finalmente a geometria alçou novos voos.

Com o Cálculo Diferencial e Integral de Leibniz e Newton, a geometria avançou para além do cálculo de áreas de polígonos como quadrados, retângulos e triângulos. Pode avançar, por exemplo na determinação de áreas contidas entre curvas dos gráficos de funções, com o Cálculo Diferencial e Integral, pode-se avançar para além do cálculo do volume de paralelepípedos e pirâmides, tornou-se possível a determinação do volume de vários sólidos em revolução de curvas.

No entanto, os voos alçados foram ainda maiores que esses, a utilização do Cálculo atingiu questões como taxas de variação, determinação de tangentes, além de aplicações diretas na física, economia, engenharias, e muitas outras áreas do conhecimento.

> “Hoje, olhando em retrospecto, é difícil subestimar o papel do Cálculo para o desenvolvimento científico e tecnológico da sociedade moderna. Suas ideias e resultados mostraram-se e continuam sendo fundamentais ao desenvolvimento de áreas tão díspares quanto Física, Economia, Computação e Biologia, para não falar de aplicações, diretas ou indiretas, às várias engenharias.” (NETO, 2015)

3. LIMITE:

Primeiramente trataremos a noção de limite de forma intuitiva, para posteriormente formalizarmos a noção aqui abordada. Em geral, essa palavra é usada no cotidiano quando estamos nos referindo a algo que pode ser atingido, que pode ser igualado, mas que não pode ser superado ou ultrapassado, segundo (PAIVA, 1995).

Por exemplo, podemos dizer que uma prova tem um tempo limite para ser resolvida, um elevador possui um limite de carga que suporta, um automóvel pode atingir uma velocidade limite.

A partir dessa noção podemos vislumbrar o fato de que embora o limite possa ser um ponto que não possa ser atingido de maneira direta, ainda assim podemos nos aproximar dele tanto quando quisermos, de modo a termos como desprezível a distância que nos separa deste ponto. Tal fato pode ser ilustrado através da seguinte questão:

Questão 01: Imagine que um sapo deseja atravessar uma rodovia cuja largura é de 10 metros. Imagine também que a cada salto ele consegue atingir exatamente a metade da distância que falta para chegar ao outro lado, ou seja, atingirá 5 metros no primeiro salto, mais 2,5 metros no segundo salto, mais 1,25 metros no terceiro salto, e assim por diante. Então pergunta-se, quantos saltos ele dará até atingir o seu objetivo?

Obviamente, pelo próprio enunciado que determina que, seja qual for a distância restante o sapo só saltará a metade dela, por menor que ela seja, então logicamente ele jamais atingirá o objetivo almejado. No entanto, após uma quantidade excessiva de saltos, que denotaremos por infinitos saltos, a distância existente entre o sapo e o ponto de destino será tão pequena a ponto de podermos desprezar o seu valor. Além disso, como poderemos entender mais adiante, o somatório das distâncias atingidas em todos estes infinitos saltos será de exatamente 10 metros. Por hora, apenas concluiremos que esse somatório trata-se de uma progressão geométrica infinita, cujo primeiro termo é 5 e cuja razão é $1/2$, de modo que o somatório é expresso pela fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, ou seja:

$$S_\infty = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

Por outro lado, será de grande utilidade a expansão do conceito intuitivo de limite aplicado às funções, uma vez que nos depararemos com situações similares, onde certas funções não são definidas para todos os valores possíveis em suas variáveis, ou mais diretamente ainda quando possuem alguma restrição de domínio, como por exemplo quando há a impossibilidade de determinação da divisão por zero presente na função, como é o caso da função a seguir:

Exemplo 01: Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$$

Tal função pode ser definida para todo x desde que o denominador $x-3 \neq 0$, ou seja, para todo $x \neq 3$. Por outro lado, quando $x = 3$, temos que o numerado $x^2 - 9$ também assume o valor 0, tornando indefinido o valor da imagem desta função em $f(3)$. Em outras palavras, dizemos que a função não está definida para o valor do domínio de $x = 3$, e o que enseja nossa curiosidade é exatamente saber o que acontece com a função quando o valor de x se aproxima de 3 tanto quando desejarmos.

A tabela abaixo, tenta descrever o comportamento da função nas proximidades de $x = 3$ pela esquerda:

x	0	1	2	2,5	2,75	2,9	2,99	2,999
$f(x)$	3	4	5	5,5	5,75	5,9	5,99	5,999

A tabela abaixo, tenta descrever o comportamento da função nas proximidades de $x = 3$ pela direita:

x	6	5	4	3,5	3,25	3,1	3,01	3,001
$f(x)$	9	8	7	6,5	6,25	6,1	6,01	6,001

O que nos leva a supor, de maneira empírica, que conforme o valor de x se aproxima de 3, o valor de $f(x)$ se aproxima de 6.

No entanto, se fatorarmos o numerador da equação definida na função, teremos:

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$$

O que mais uma vez nos leva a acreditar que conforme aproximamos de 3 o valor de x, o valor de $f(x)$ se aproxima de 6. Denotaremos essa conclusão da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

Esta notação é lida da seguinte forma: "o limite de $\frac{x^2-9}{x-3}$ quando x tende a 3 é igual à 6".

De modo geral, formalizar a noção intuitiva de limites consiste em determinar com rigor como as funções se comportam quando nos aproximamos de certos valores do domínio, definidos ou não nesta função.

Tal formalização foi feita por Isaac Newton (1642-1727), físico e matemático inglês, e por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filósofo e matemático alemão, contemporâneos, e cujos trabalhos ocorreram de maneira independente quase que concomitantemente. E vale ressaltar que, embora com abordagens distintas, chegaram basicamente às mesmas conclusões que definem os pilares do Cálculo Diferencial e Integral.

Consideraremos a função definida por $f(x)$ num intervalo aberto I, contendo um valor a do domínio, podendo não ser definida somente em a. Chamaremos de L ao limite da função $f(x)$ quando x se aproxima de a e usaremos a seguinte notação:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

Usaremos também as letras gregas ε e δ (épsilon e delta, respectivamente), para representar números reais que indiquem, respectivamente, o quão perto de $f(x)$ o limite L está, e o quão perto de a está um determinado valor de x. Desse modo podemos dizer que supor tais proximidades nos levam a concluir que $|f(x) - L|$ e $|x - a|$ tratam-se de valores pequenos, mais genericamente, tão pequenos quanto necessitarmos que sejam.

Observe a figura abaixo:

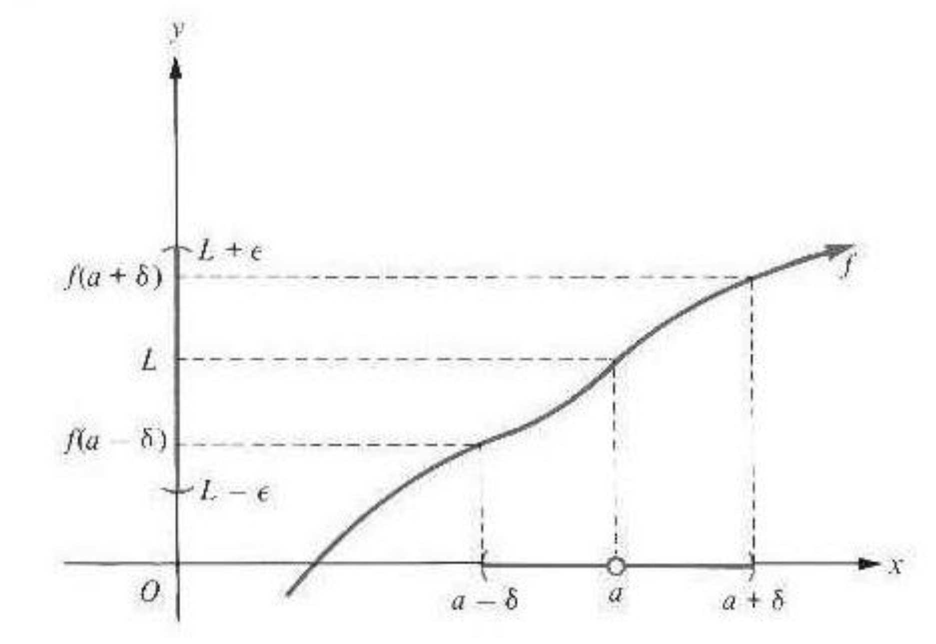


FIGURA 01: Limite de $f(x)$ quando x tende a a

Definição 01: Dizer que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L, significa argumentar que para qualquer que seja o número positivo ε, tão pequeno quanto desejarmos, sempre existirá um número positivo δ, suficientemente pequeno, de modo que tenhamos $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$, ou seja, dadas essas condições descritas anteriormente dizemos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

O que equivale dizer que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

3.1. PROPRIEDADES BÁSICAS DE LIMITES:

Considerando como prévio o conhecimento das condições de existência dos limites a partir dos limites laterais, e da definição de continuidade de funções, bem como as implicações decorrentes desta, enunciaremos de maneira sucinta:

Função contínua: Uma função f será contínua em a se, e somente se, atende as seguintes condições:

1 - $f(a)$ é definida na função;

2 - $\lim_{x \to a} f(x)$ ∃;

3 - $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Condição de existência de limites: Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ∃ (o limite de $f(x)$, quando x tende a a existe) se, e somente se:

1 - $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ∃ (o limite de $f(x)$, quando x tende a a pela direita existe);

2 - $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ∃ (o limite de $f(x)$, quando x tende a a pela esquerda existe);

3 - $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Sendo assim, apresentaremos algumas propriedades básicas relevantes, a partir das condições descritas na definição de limite, com algumas demonstrações:

Para tanto usaremos as notações $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$:

Propriedade 01: Seja k uma constante qualquer: O limite de uma constante é a própria constante:

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Demonstração: Nos cabe demonstrar que para qualquer ε positivo, existe um δ positivo tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k - k| < \varepsilon, \forall a, a \in \mathbb{R}$$

Pois bem, essa implicação é logicamente verdadeira para qualquer que seja o valor de δ, uma vez que, por definição, basta tomarmos qualquer $\varepsilon > 0$. Portanto $\lim_{x\to a} k = k$.

Propriedade 02: O limite da função identidade é o próprio valor de a:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

Propriedade 03: Um fator constante pode ser deslocado para fora do limite:

$$\lim_{x\to a}[k.f(x)] = k \lim_{x\to a} f(x) = kL$$

Propriedade 04: O limite da soma é a soma dos limites: o limite da diferença é a diferença dos limites:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$$

Demonstração: A partir da demonstração da propriedade adição, assumiremos a validade para a propriedade da subtração de maneira análoga. Mais uma vez nos cabe demonstrar que para qualquer ε positivo, existe um δ positivo tal que:

$$|[f(x) + g(x)] - [L + M]| < \varepsilon \; sempre \; que \; 0 < |x - a| < \delta$$

Usando a desigualdade triangular temos que:

$$|[f(x) + g(x)] - [L + M]| = |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

Fazendo:

$$|f(x) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad e \quad |g(x) - M| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Garantimos que:

$$|f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon$$

Sendo $\frac{1}{2}\varepsilon$ um número positivo, podemos garantir a existência de δ_1 e δ_2, tais que:

$$|f(x) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon \ \ sempre\ que\ 0 < |x - a| < \delta_1\ e,$$

$$|g(x) - M| < \frac{1}{2}\varepsilon \ \ sempre\ que\ 0 < |x - a| < \delta_2$$

Sendo $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$, segue que $0 < |x - a| < \delta$ torna válida as condições $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$, portanto:

$$|[f(x) + g(x)] - [L + M]| < \varepsilon$$

Propriedade 05: O limite do produto é o produto dos limites:

$$\lim_{x \to a}[f(x).\, g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right].\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = LM$$

Propriedade 06: Seja $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$: O limite do quociente é o quociente dos limites:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Propriedade 07: Seja n um número inteiro positivo:

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n$$

Propriedade 08: Para $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0$, e n um número inteiro positivo ou para $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L < 0$, e n um número inteiro positivo ímpar: O limite da raiz enésima é a raiz enésima do limite:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Propriedade 09: O limite do módulo é o módulo do limite:

$$\lim_{x \to a}|f(x)| = \left|\lim_{x \to a} f(x)\right| = |L|$$

Propriedade 10: Se h é uma função tal que $h(x) = f(x)$ para todos os valores de x em algum intervalo ao redor de a, excetuando $x = a$:

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Propriedade 11: Limites no infinito: Se n é um número inteiro positivo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Propriedade 12: Limites infinitos: Se n é um número inteiro positivo:

$$(i) \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$(ii) \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & se\ n \text{ é } par \\ -\infty, & se\ n \text{ é } ímpar \end{cases}$$

Obviamente que existem muitas outras propriedades decorrentes da definição de Limite, bem como incontáveis desdobramentos associados à estas, no entanto, abordaremos de maneira oportuna tais nuances, dentro do contexto das aplicações que pretendemos alcançar.

4. A DERIVADA:

Antes de entrarmos na definição de Derivada, abordaremos alguns problemas clássicos que podem ser resolvidos com a aplicação dos conceitos de Limite apresentados anteriormente, em seguida mostraremos como a resolução de tais problemas está intimamente ligada à definição que gostaríamos de introduzir. O primeiro problema abordado diz respeito a taxa de variação e o segundo a determinação de reta tangente a uma curva:

Taxa de variação:

Consideremos uma função f tal que $y = f(x)$. Para calcularmos a taxa de variação de y por unidade de variação de x, usaremos o seguinte artifício: por exemplo, quando x variar de x_1 para x_2, enquanto y varia de $y_1 = f(x_1)$ para $y_2 = f(x_2)$, denotaremos a variação em x como Δx (delta x), onde $\Delta x = x_2 - x_1$, da mesma forma, denotaremos a variação em y como Δy (delta y), onde $\Delta y = y_2 - y_1$. A partir daí definimos a Taxa de Variação Média de y em relação a x como sendo a razão:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Sendo assim, se minimizarmos a variação em x, de modo que Δx se aproxime de 0, e uma vez que $x_2 = x_1 + \Delta x$, podemos definir a Taxa de Variação Instantânea como sendo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Exemplo 02: Considerando uma partícula que se move de acordo com a função $s = f(t)$, onde $f(t) = 5t^2 + t$. Calcularemos a velocidade (em m/s) da partícula no instante $t = 3$ segundos:

Uma vez que a velocidade média é obtida como:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Podemos determinar a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 3$ segundos, da seguinte forma:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(3 + \Delta t) - f(3)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[5(3 + \Delta t)^2 + (3 + \Delta t)] - [5(3)^2 + 3]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{45 + 30\Delta t + \Delta t^2 + 3 + \Delta t - 45 - 3}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{31\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (31 + \Delta t) = 31 m/s$$

Reta tangente:

Considerando um ponto $P(x_1, y_1)$ pertencente ao gráfico de uma função f, de modo que $y_1 = f(x_1)$, determinaremos, em primeiro lugar, a inclinação da reta tangente ao gráfico da função, em P, da seguinte forma:

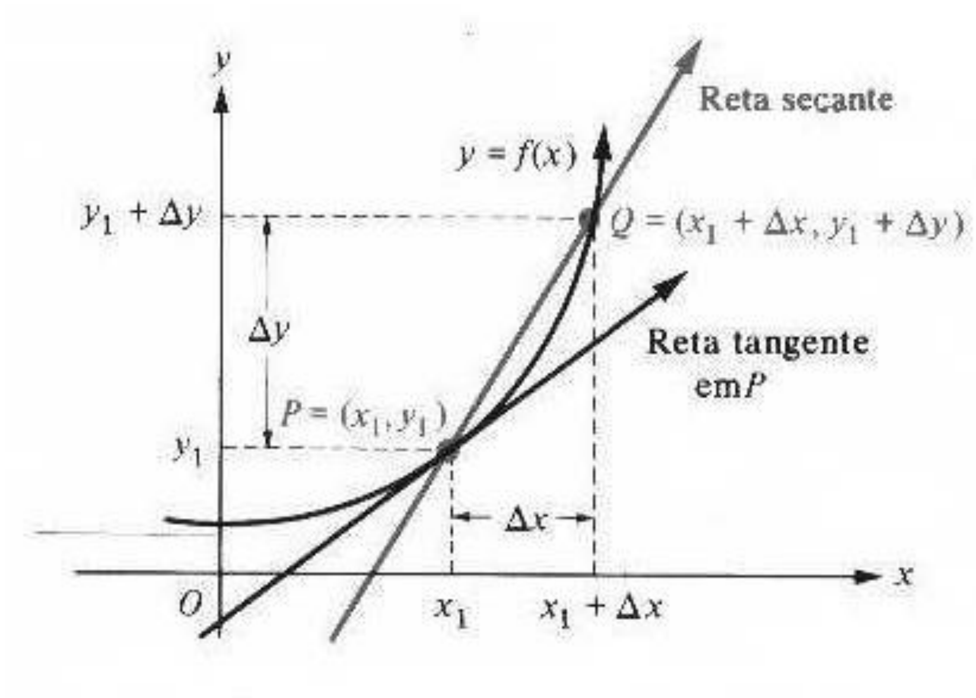


FIGURA 02: Reta secante e reta tangente à curva

Observe que o ponto $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ junto com o ponto P, determinam uma reta, contendo o segmento $\overline{PQ}$, que é secante a curva, ou seja, secante ao gráfico da função f. Sendo $m = \tan\theta$ o coeficiente angular da reta secante ao gráfico, onde θ é o ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo horizontal, podemos determiná-lo, observando o triângulo retângulo cujos catetos são Δx e Δy, e a hipotenusa é o segmento $\overline{PQ}$, tendo em vista que $\tan\theta$ é definida como sendo a razão entre o cateto oposto (CO) ao ângulo de inclinação (Δy) e o cateto adjacente (CA) ao mesmo ângulo (Δx), da seguinte forma:

$$m = \tan\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Mas observemos que, se fizermos Δx tender a 0, o ponto Q se aproxima de P de modo a tender a ele, ao passo que a reta secante tenderá a reta tangente ao ponto P. Em outras palavras, enquanto Δx tende a 0, inclinação da reta secante tende a inclinação da reta tangente tal que:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Exemplo 03: Encontraremos a equação da reta tangente à curva $y = \frac{2}{x}$ no ponto $P(2,1)$ dessa curva:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{2 + \Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2 - (2 + \Delta x)}{2 + \Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(2 + \Delta x)}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2 + \Delta x} = -\frac{1}{2}$$

Desse modo, a equação da reta tangente ao ponto $P(2,1)$ é dada por:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2), \quad ou\ seja, \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Tais limites, como o que envolveu a determinação de uma taxa de variação, ou como o que estabeleceu a inclinação da reta tangente, são tão comuns, e com tantas aplicações que se fez necessária a definição de uma função especial, derivada da função original a partir da aplicação desse limite. Para tanto, denominaremos como “quociente de diferença” o quociente do tipo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Definição 02: Dada uma função f, chamaremos de derivada de f a função f', definida da seguinte forma:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Uma vez que o limite exista, a derivada da função existe e pode ser indicada com o uso das seguintes notações:

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Todas gozam do mesmo significado, no que pese que há de se tomar cuidado para não confundir a notação com um quociente direto.

4.1. PROPRIEDADES BÁSICAS E REGRAS DE DERIVAÇÃO:

Esse tópico não tem a pretensão de abarcar toda a gama de propriedades e regras decorrentes da definição de derivada, apenas norteará um caminho para as infinitas possibilidades de suas aplicações. Apresentaremos aqui algumas regras e propriedades, e também algumas demonstrações.

Propriedade 01: Derivada da função constante:

$$f(x) = k$$

$$\frac{d}{dx}[k] = 0 \quad ou \quad f'(x) = 0 \quad ou\ ainda \quad D_x[k] = 0$$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

De modo geral, será adotada a notação f' para denotar a derivada, de modo a padronizar o texto, sem nenhuma diferenciação em termos de precisão na escolha, apenas uma opção particular, substituída por qualquer uma das outras notações sempre que necessário.

Propriedade 02: Derivada da função identidade:

$$f(x) = x$$

$$f'(x) = 1$$

Propriedade 03: Regra da potência:

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Propriedade 04: Derivada do produto de uma constante por uma função:

$$g(x) = kf(x)$$

$$g'(x) = kf'(x)$$

Propriedade 05: Derivada da soma (diferença):

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Demonstração:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

A derivada da diferença é análoga à soma.

Propriedade 06: Derivada do produto de duas funções:

$$h(x) = f(x). g(x)$$

$$h'(x) = f(x). g'(x) + f'(x). g(x)$$

Propriedade 07: Derivada do quociente de duas funções (para $g(x) \neq 0$):

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$h'(x) = \frac{g(x). f'(x) - f(x). g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Propriedade 08: Derivada da função seno:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

Propriedade 09: Derivada da função cosseno:

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

Propriedade 10: Regra da cadeia:

Considerando a composição de fog de modo que:

$$y = f\big(g(x)\big) \quad e \quad u = g(x), \qquad então \qquad y = f(u)$$

$$y'(x) = f'(u).g'(x)$$

Ou ainda,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Propriedade 11: Regra de L'Hôpital (para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$):

Sejam,

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Então,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.2. DIFERENCIAL:

Seja f uma função tal que $y = f(x)$, nos interessa considerar as possibilidades de variação da variável x. Por exemplo, quando x varia de x_1 para x_2, podemos definir que nessa variação, a variável sofreu um acréscimo denotado por Δx, assim definido:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Consequentemente, tal variação em x acarreta uma variação em y, denotada por Δy, assim definida:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Sendo f uma função derivável definimos a diferencial da variável x, denotada como dx, da seguinte forma:

$$dx = \Delta x$$

Da mesma forma, definimos a diferencial da variável y, denotada como dy, da seguinte forma:

$$dy = f'(x).dx$$

O que devemos observar aqui é que quanto menor for o nosso Δx, menor será a diferença $\Delta y - dy$, o que significa que quanto mais Δx se aproxima de zero, Δy torna-se aproximadamente igual a dy.

Exemplo 04: Seja $y = 3x^2 - 2$, calculemos Δy e dy para $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}001$:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

$$= f(2 + 0{,}001) - f(2)$$

$$= [3(2{,}001)^2 - 2] - [3.2^2 - 2]$$

$$= 10{,}012003 - 10 = 0{,}012003$$

Por outro lado:

$$dy = f'(x).dx$$

$$= 6x.dx$$

$$= 6.2.0{,}001 = 0{,}012$$

Observamos que a diferença:

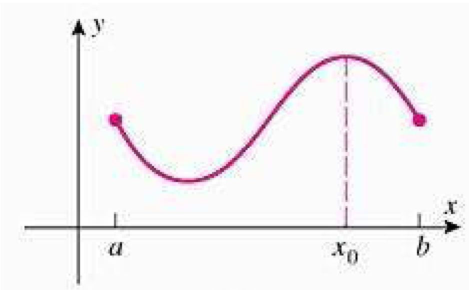
$$\Delta y - dy = 0{,}012003 - 0{,}012 = 0{,}000003$$

Poderia ser ainda menor se adotássemos um valor menor para Δx.

4.3. MÁXIMOS E MÍNIMOS:

Os valores de máximos e mínimos, extremos relativos e absolutos, de uma função são bem fáceis de ser percebidos graficamente, o que torna sua determinação e aplicação bem acessíveis. Então vejamos:

Dizemos que uma função tem máximo relativo em $x = x_0$, se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x próximo de x_0 em um determinado intervalo. Analogamente, dizemos que uma função tem mínimo relativo em $x = x_0$, se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x próximo de x_0 em um determinado intervalo.



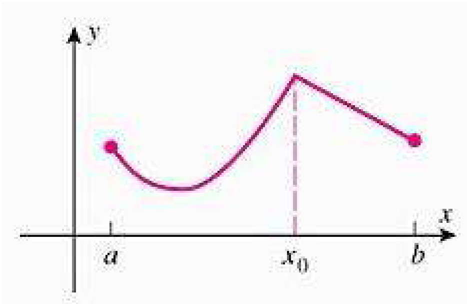


FIGURA 03: Pontos críticos

Como podemos observar na figura acima, temos duas possibilidades para visualizar a ocorrência de máximos relativos em $x = x_0$.

De maneira geral, diremos que uma função tem máximo absoluto em $x = x_0$, se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x que pertence ao domínio da função. Analogamente, diremos que uma função tem mínimo absoluto em $x = x_0$, se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x que pertence ao domínio da função.

Também podemos perceber que nos pontos de localização desses extremos, denominados pontos críticos, ocorrem duas possibilidades, ou temos uma reta tangente ao ponto na curva paralela ao eixo das abscissa, ou não existe nenhuma reta tangente ao ponto na curva, como atesta (FLEMMING, 2000). Em outras palavras, como vimos anteriormente que a derivada da função define o coeficiente angular da reta tangente a um determinado ponto, temos que em um ponto crítico de uma função f pode ocorrer $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não é definida. Facilitando assim a identificação dos valores máximos e mínimos da função.

Vale lembrar que qualquer função contínua f, em um intervalo fechado $[a, b]$, admite um máximo absoluto e um mínimo absoluto neste intervalo.

5. A INTEGRAL:

Como os conceitos de Limite e Derivada são pouco trabalhados em nível médio, o conceito de Integral quase nunca é conhecido pelo estudante da educação básica, além disso, vale relembrar que a proposta do trabalho não consiste em fornecer um tratado sobre o Cálculo, e sim instigar o início de uma relação de proximidade, de familiarização do estudante com seus princípios básicos. Nesse sentido trataremos esse capítulo da maneira mais sucinta possível, de modo a fornecer somente uma definição geral, apresentar a integral definida como ferramenta para resolver o problema do cálculo de áreas, e algumas propriedades básicas que nos possibilitem desenvolver algumas aplicações, no mais, para que não se torne algo repetitivo, introduziremos um eventual conceito novo apenas na resolução dos problemas aplicados, conforme se demonstre a necessidade para tanto, portanto não discutiremos de maneira mais direta a questão das técnicas de integração, então vejamos:

Trataremos primeiro de conceituar a Integral Indefinida:

Definição 03: Dada uma função $f(x)$, chamaremos a função $F(x)$ de uma primitiva de $f(x)$ em um intervalo I, se $\forall x \in I$, temos:

$$F'(x) = f(x)$$

Consequentemente, se $F(x)$ de uma primitiva de $f(x)$ e k é uma constante qualquer, a função $H(x) = F(x) + k$, também será uma primitiva de $f(x)$, como vemos:

$$H'(x) = [F(x) + k]' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Sendo assim, $F(x) + k$ é chamada de integral indefinida de $f(x)$ e será denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

Por isso, o processo de integração também é chamado de antidiferenciação.

5.1. PROPRIEDADES BÁSICAS DE INTEGRAÇÃO:

Propriedade 01: Seja c uma constante:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

Propriedade 02:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Propriedade 03:

$$[\int f(x)dx]' = f(x)$$

Propriedade 04:

$$\int dx = x + k$$

Propriedade 05: Seja n um número racional tal que $n \neq -1$:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

5.2. INTEGRAL DEFINIDA E O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO:

Nesta unidade, primeiro utilizaremos o conceito de integral definida apenas com o intuito de enunciar a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, sobre a área determinada sob uma curva, sem para tanto, nos preocuparmos com a justificativa teórica ou demonstração do mesmo.

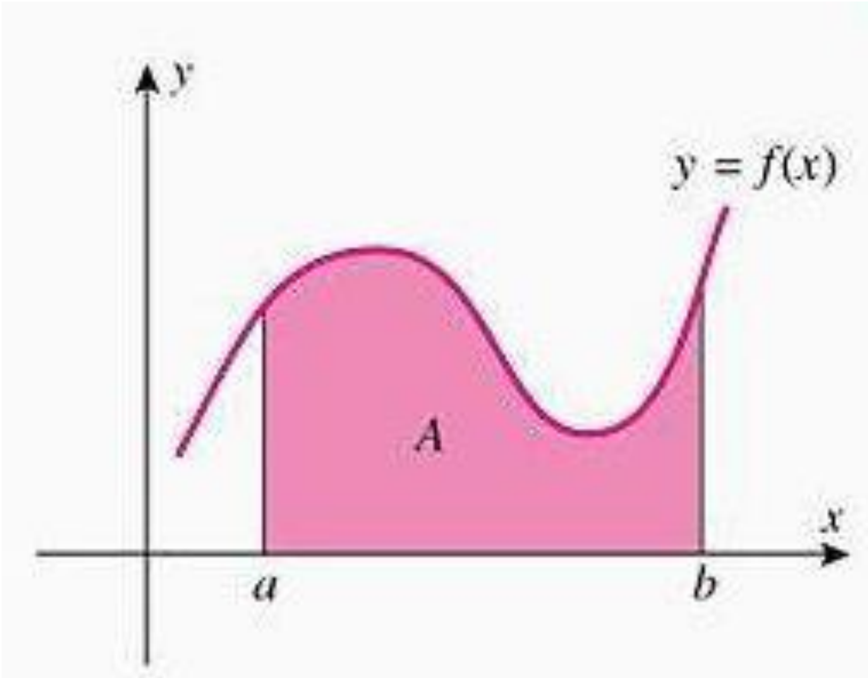


FIGURA 04: Área sob um curva em um intervalo

Definição 04: Iremos inicialmente supor a função $f(x)$ não negativa e contínua em um intervalo $[a,b]$, e A a área contida entre o gráfico da função e o intervalo, e ainda que $F(x)$ seja uma primitiva de $f(x)$. Assim definimos:

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

No entanto, tal afirmação necessita de uma argumentação acessível ao estudante de nível médio, então vejamos:

Comecemos por enunciar o fato de que na antiguidade muitos matemáticos tinham certa intimidade com o cálculo de áreas de alguns polígonos, tais como triângulos, quadrados, entre outros. Mas, em se tratando de figuras com contornos curvilíneos havia grande dificuldade para determinação de suas áreas. Tal dificuldade começou a ser superada de forma mais efetiva com o trabalho do matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.), usando um método que posteriormente ficou conhecido como método da exaustão de Eudoxo, que consistia no seguinte:

Aplicado a um círculo, por exemplo, o método consiste na inscrição de sucessivos polígonos regulares, de modo que o número de lados dos polígonos inscritos possa ser aumentado indefinidamente, fazendo com que a área do polígono esteja cada vez mais próxima da área do círculo em questão, conforme a figura a seguir:

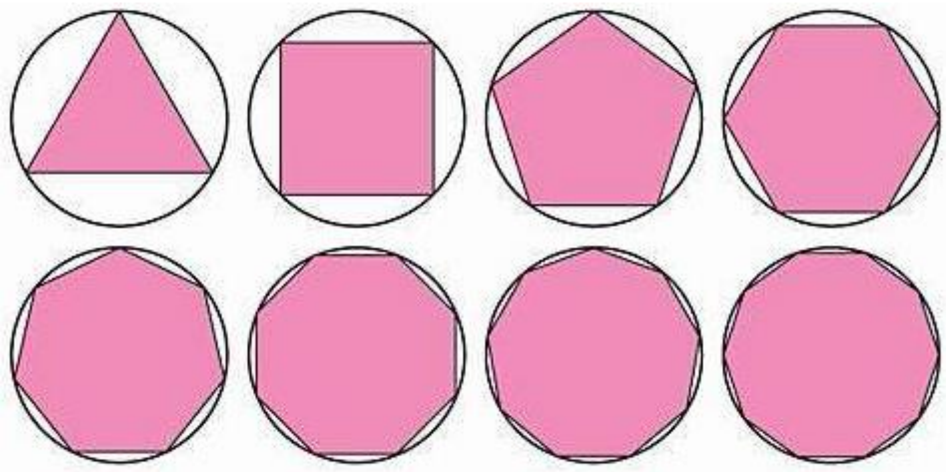


FIGURA 05: Polígonos regulares inscritos exaurindo um círculo

Como veremos na tabela a seguir (ANTON, 2007), sendo n o número de lados do polígono regular inscrito na circunferência e $A(n)$ a área correspondente do referido polígono, todos inscritos em uma circunferência de raio 1, temos:

n	$A(n)$
100	3,13952597647
200	3,14107590781
300	3,14136298250

400	3,14146366236
500	3,14150997084
1000	3,14157198278
2000	3,14158748588
3000	3,14159035683
4000	3,14159136166
5000	3,14159182676
10000	3,14159244688

O que devemos observar é que quanto maior for o valor de n escolhido, a área $A(n)$ se aproxima, em unidades de área, de π (3,141592653589793...). Uma vez que sabemos que a área do círculo é dada por $A(c) = \pi r^2$, temos que para $r = 1$ que $A(c) = \pi$, desse modo, usando o método da exaustão, e aplicando as noções básicas de limite estudadas, podemos deduzir algo do tipo:

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = \pi$$

Portanto, podemos expandir a ideia apresentada no método da exaustão de Arquimedes, generalizando sua aplicação para o caso apresentado no início deste capítulo, que cuidava de determinar a área de uma figura localizada sob uma curva definida por uma função qualquer.

> “Como os matemáticos gregos suspeitavam muito do conceito de “infinito”, eles evitavam seu uso em argumentos matemáticos. Desse modo, o cálculo de áreas pelo método de exaustão era um procedimento muito complicado. Acabou ficando para Newton e Leibniz a descoberta de um método geral de obtenção de áreas que utilizasse explicitamente a noção de limite.”(ANTON, 2007)

Para resolvermos o problema utilizaremos o método dos retângulos para o cálculo de áreas, como consequência natural do método da exaustão, da seguinte maneira: consideremos uma função contínua e não-negativa f, definida em um intervalo [a,b]. Para encontramos a área da região contida entre o gráfico da função e o intervalo [a,b] no eixo das abscissas, procederemos da seguinte forma:

Dividiremos o intervalo [a,b] em n intervalos iguais e, em cada um desses intervalos, construiremos retângulos contidos entre o eixo das abscissas e a curva gerada pelo gráfico da função ($y = f(x)$). Vale ressaltar que o ponto onde o gráfico da função intersecta o segmento superior do retângulo não é crucial para o desenvolvimento deste raciocínio, porém, apenas para ilustrar a questão, consideraremos que tal intersecção se dá no ponto médio do segmento superior, conforme ilustra a figura abaixo:

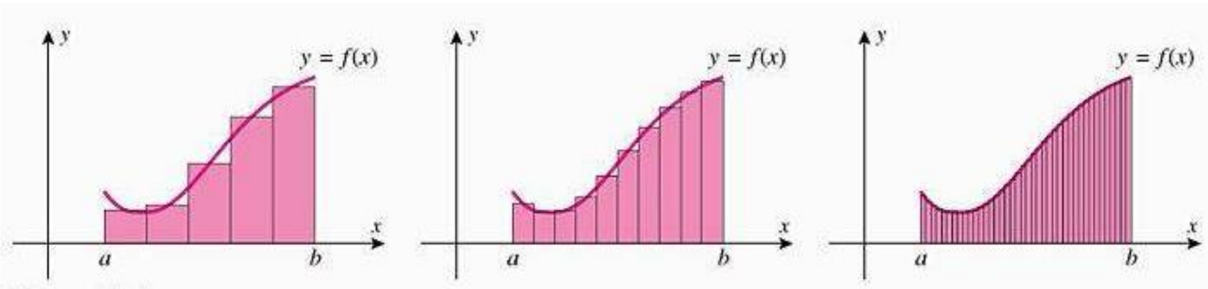


FIGURA 06: Representação do método dos retângulos

Observemos, de maneira intuitiva, que conforme aumentamos o número n de intervalos, diminuímos os espaços vazios e a área total dos retângulos $A(n)$ se aproxima da área exata sob a curva A, de modo que podemos denotar essa tendência como um limite as seguinte forma:

$$A = \lim_{n \to +\infty} A(n)$$

> “O método do retângulo e o da antiderivada fornecem duas abordagens bem diferentes ao problema da área, cada uma das quais é importante. Em geral, o método da antiderivada é o mais eficiente para calcular áreas, mas é o método do retângulo que é utilizado para formalmente definir a noção de área, com isso permitindo a demonstração de resultados matemáticos sobre áreas. A ideia subjacente à abordagem por retângulos também

> é importante, por poder ser facilmente adaptada a problemas tão diversos como encontrar o volume de um sólido, o comprimento de uma curva, a massa de um objeto e o trabalho para bombear água para fora de um tanque, para citar apenas alguns exemplos.” (ANTON, 2007)

Agora, de posse da ideia apresentada no método dos retângulos, e pressupondo um conhecimento básico sobre as propriedades de somatórios (denotado pela letra grega sigma (Σ)), definiremos a área sob a curva de maneira mais precisa da seguinte forma:

A partir do intervalo [a,b] dado, chamaremos de partição do intervalo um conjunto finito de pontos sobre o eixo das abscissas $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, ordenado de modo que $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, dividindo o intervalo [a,b] em n intervalos iguais, de comprimento Δx, onde obviamente temos que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Seja também x_k^* um valor pertencente ao k-ésimo intervalo (para $k = 1,2,3, \dots, n$).

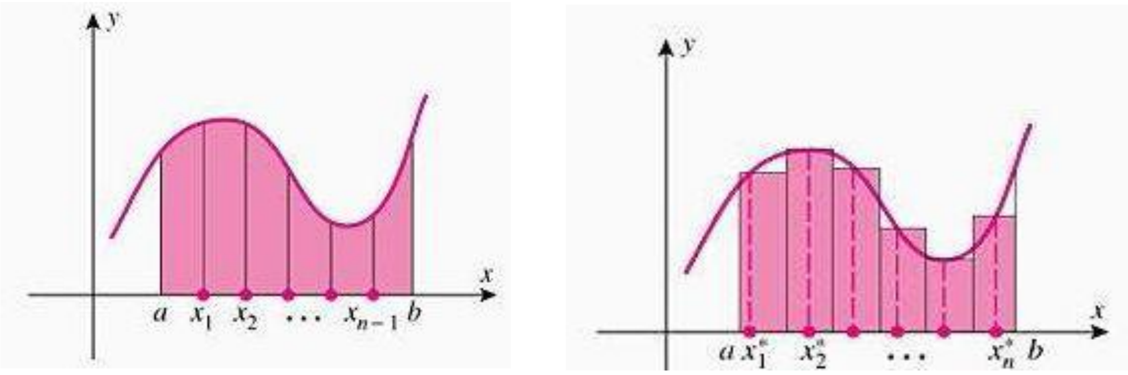


FIGURA 07: Divisão do intervalo $[a, b]$ em intervalos iguais

Devemos escolher o valor x_k^* de modo que o ponto de coordenadas $(x_k^*, f(x_k^*))$ pertença à curva dada.

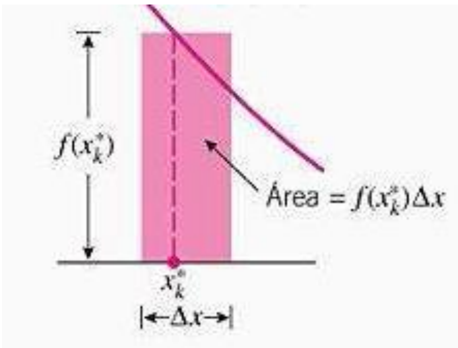


FIGURA 08: Área do retângulo em um dos intervalos redefinidos

Assim, podemos perceber que a área de cada um dos retângulo gerados pode ser expressa como sendo $A(k) = f(x_k^*)\Delta x$. E, como a área total dos retângulo $A(n)$ é a soma de todas essas áreas, iremos representa-la da seguinte forma:

$$A(n) = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

Ou seja,

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Uma vez que denotamos a área sob a curva, A, como sendo:

$$A = \lim_{n\to+\infty} A(n)$$

Isso nos permite elaborar a seguinte definição para a área A:

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Uma partição desse tipo, onde todos os intervalos tem o mesmo tamanho é denominada de partição regular, nesse caso, uma vez que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, é fácil observar que, de acordo com as propriedades de limites, quando $n \to +\infty$, segue que $\Delta x \to 0$. Sendo assim podemos generalizar a definição de integral definida da seguinte forma:

Definição 05: Diremos que a função f é integrável no intervalo finito $[a, b]$, se o limite a seguir existir e não depender nem das partições, nem da escolha dos valores dos pontos x_k^* em cada um dos n intervalos atribuídos. Assim sendo, definiremos a integral definida denotada pelo seguinte limite:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{máx\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = A$$

Dessa definição, seguem as mesmas propriedades de integral vistas anteriormente.

6. APLICAÇÕES:

Para apresentarmos algumas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, usaremos o artifício de apresentar problemas que poderão ser resolvidos baseados na fundamentação aqui apresentada, e caso seja necessário, com alguma propriedade suplementar introduzida no decurso da resolução do mesmo.

Aplicação 01: Para seguirmos adiante, retomaremos a questão 01, apresentada no capítulo 3 sobre limites que trazia o seguinte enunciado: "Imagine que um sapo deseja atravessar uma rodovia cuja largura é de 10 metros. Imagine também que a cada salto ele consegue atingir exatamente a metade da distância que falta para chegar ao outro lado, ou seja, atingirá 5 metros no primeiro salto, mais 2,5 metros no segundo salto, mais 1,25 metros no terceiro salto, e assim por diante. Então pergunta-se, quantos saltos ele dará até atingir o seu objetivo?"

Para justificarmos que a soma das distâncias dos infinitos saltos dados pelo sapo durante a travessia, era de exatamente 10 metros, utilizamos a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ do somatório de uma progressão geométrica infinita, no entanto, agora temos plenas condições de demonstrar a validade da mesma.

Lembrando que a fórmula que determina a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, é dada por:

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$$

Onde a_1 é o primeiro termo da progressão, e q é a razão, a qual consideraremos no intervalo $0 < q < 1$, e em momento oportuno a representaremos com $q = \frac{1}{x}$, para algum $x > 1$. Daí segue que:

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_1.q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1.q^n}{1-q}$$

Portanto,

$$S_\infty = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 . q^n}{1-q}$$

Como $q = \frac{1}{x}$, quando $n \to \infty$ o valor $q^n \to 0$, desse modo:

$$S_\infty = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

Aplicação 02: Faremos uso agora das definições do Cálculo para determinar a fórmula do volume de uma esfera de raio r:

Para tanto, introduziremos inicialmente a seguinte propriedade para determinação do volume de sólidos em revolução:

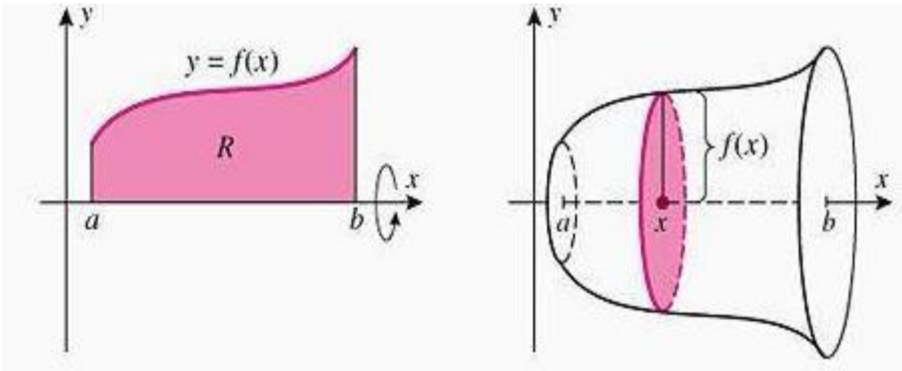


FIGURA 09: Sólido gerado por revolução da curva

Seja f uma função não-negativa e contínua no intervalo $[a, b]$, o volume do sólido obtido quando rotacionamos a curva de $f(x)$ em torno do eixo das abscissas, considerando $dx = \Delta x$ como variação dos valores de x no intervalo dado, e que a partir daí faremos o somatório de infinitos cilindros de volume $V(c) = \pi(f(x))^2 \Delta x$, uma vez que $\Delta x \to 0$, e fazendo uso da definição de integral como limite de somatório, temos que:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Para determina o volume de uma esfera de raio r, consideraremos:

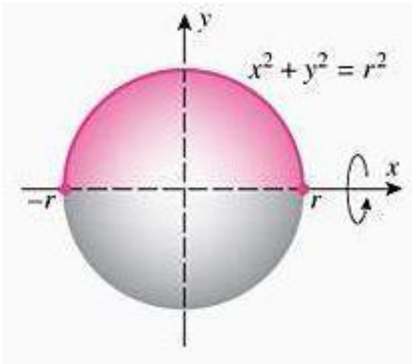


FIGURA 10: Esfera gerada por revolução de semicírculo

Seja $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, segue que o volume da esfera é dado por:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} r^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} x^2 dx$$

$$= \pi (r^2 x - \frac{x^3}{3})]_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \pi (-r^3 + \frac{r^3}{3})$$

$$= \frac{2\pi r^3}{3} + \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$= \frac{4\pi r^3}{3}$$

Aplicação 03: Consideremos uma situação na qual pretende-se construir as paredes um hangar retangular com a frente aberta (apenas três paredes). Após todos os cálculos, levando em consideração a quantidade de material disponível, concluiu-se que seria possível ser construído um total de 40 metros de parede. Nesse caso, devemos dimensionar o comprimento de cada parede para que a área construída seja a maior possível:

Para efeito de cálculo chamaremos o comprimento das paredes laterais de x e o comprimento da parede de fundo de k. Desse modo a soma dos comprimentos das três paredes, que denotaremos por p, é dado por:

$$p = 2x + k$$

Portando,

$$k = p - 2x$$

$$k = 40 - 2x$$

Como a estrutura é retangular, podemos estabelecer o fato de que a área total é dada por:

$$A = xk = x(40 - 2x)$$

Portanto,

$$A = f(x) = 40x - 2x^2$$

Neste caso, introduziremos inicialmente a seguinte propriedade para determinação da área máxima, com base nas definições de máximos e mínimos vistas anteriormente, que será obtida com o valor de x para o qual $f'(x) = 0$, assim teremos:

$$f'(x) = 40 - 4x = 0$$

$$4x = 40 \quad logo \quad x = 10$$

Ou seja, para $x = 10$, e consequentemente $k = 20$, teremos $A = 200\ m^2$, como a maior área possível dadas essas condições.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS:

O presente trabalho apresentou uma visão significativa da utilização do Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta de interação com inúmeras ciências, além de diversos campos da própria Matemática.

Obviamente que um assunto tão amplo merece uma investigação muito mais profunda que a apresentada aqui, espera-se, com esse trabalho que se possa ter atingido os seguintes objetivos:

Primeiramente, indicar que é possível aproximar a Matemática de questões importantes, contextualizadas e aplicadas ao cotidiano, de maneira simples e prática.

Em segundo lugar, convidar o estudante do ensino médio, movido pela curiosidade, a conhecer melhor e investigar mais profundamente as nuances que permeiam a fundamentação teórica inerente a esse trabalho.

Em terceiro lugar, motivar o professor que trabalha com essa clientela, a buscar novos horizontes para consubstanciar a abordagem dos temas trabalhados em sala de aula, não somente via Cálculo Diferencial e Integral, mas com uso da Lógica, Álgebra Linear, Teoria dos Números, e muitas outras ferramentas que impulsionarão a busca pelo conhecimento e amadurecimento cognitivo do alunado.

E, por fim, é preciso lançar um olhar de profunda admiração para tantas pessoas, que ao longo da história transformaram o mundo em que vivemos movidos pela curiosidade, criatividade, inquietação, ousadia, etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ANTON; Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo.** Vol I. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

DEMIDOVITCH, Boris. **Problemas e exercícios de análise de matemática.** 4 ed..Moscou: Editora Mir, 1984.

MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J.. **Cálculo**. vol. 1 e 2. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1982.

FLEMMING. Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** funções, limite, derivação e integração**.** 6ª ed. São Paulo: Prentice Hall, 2000.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Fundamentos de Cálculo.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PAIVA, Manuel Rodrigues. **Matemática**. 3 vol. São Paulo: Moderna, 1995.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.