PROFMAT

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EXPLORANDO O ESPAÇO ATRAVÉS DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA E O USO DO GEOGEBRA

Macapá
2017

JOSINEI DA SILVA BARBOSA

EXPLORANDO O ESPAÇO ATRAVÉS DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA E O USO DO GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional de Matemática – PROFMAT no Polo da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional

Orientadora: Drª. Simone de Almeida Delphim Leal

Macapá

2017

BARBOSA, Josinei da Silva.

EXPLORANDO O ESPAÇO ATRAVÉS DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA E O USO DO GEOGEBRA. Josinei da Silva Barbosa – Macapá: UNIFAP/PROFMAT, 2017.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Sociedade Brasileira de Matemática – SBM; Fundação Universidade Federal do Amapá – UNIFAP.

Orientação: Profª. Drª. Simone de Almeida Delphim Leal.

Fundação Universidade Federal do Amapá.

FOLHA DE APROVAÇÃO

EXPLORANDO O ESPAÇO ATRAVÉS DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA E O USO DO GEOGEBRA

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Simone de Almeida Delphim Leal (Orientadora)

____

Profº. Dr. Erasmo Senger (Convidado)

____

Profº. Msc. Hilton Bruno (Convidado)

DATA: ____/____/____

MÉDIA FINAL: ________

Macapá

2017

Dedico este trabalho as pessoas que mais me incentivaram na vida e acreditaram em mim: minha mãe Deonícia Rodrigues, minha esposa Claudia Almeida, minha filha Angelina Barbosa, meu tio e amigo Sebastião Rodrigues e minha tia e Mãe de criação Maria da Conceição Santos do Nascimento (*in memorian*), com eterna gratidão.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à DEUS.

Aos meus familiares e amigos, em especial minha mãe Deonícia Rodrigues da Silva, que nos momentos mais difíceis esteve sempre me dando apoio, mesmo estando longe e a minha esposa Claudia Almeida que sempre me incentivou pra que eu não desistisse pelo meio do caminho.

Aos colegas de turma e também da turma PROFMAT 2015, pelos conhecimentos compartilhados e incentivos no decorrer do curso de mestrado profissional.

A todos os professores da Universidade Federal do Amapá, que ministraram o curso de mestrado profissional de matemática.

À professora Drª Simone Leal, pela atenção, paciência e conhecimentos compartilhados no decorrer do curso e durante a orientação deste trabalho.

E finalmente agradecer à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), aos coordenadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT pela oportunidade de fazer um mestrado voltado ao Ensino de Matemática na Escola Básica e à CAPES por oportunizar que esse Mestrado fosse realizado com o auxílio de bolsa de estudo.

"A **imaginação** é mais importante que o **conhecimento**. O conhecimento é limitado. A imaginação **envolve o mundo**."

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho destaca a investigação matemática como uma possibilidade de recurso metodológico na construção do conhecimento matemático no ambiente da sala de aula, em especial, na construção dos conceitos de geometria espacial, defendendo um ensino pautado na ação do aluno como pessoa ativa no processo de ensino e aprendizagem. Para tanto, optou-se em utilizar o aplicativo Geogebra 3D, versão 5.0, como um instrumento auxiliar no processo de investigação matemática, visa contribuir de forma direta ou indireta com o processo ensino aprendizagem nas salas de aula das escolas públicas no que se refere à construção do conhecimento de matemática. Seu principal objetivo é apresentar a investigação matemática como uma alternativa que venha colaborar de forma positiva e satisfatória para o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias ao educando no ambiente escolar, promovendo uma aprendizagem significativa. Chegou-se ao entendimento que a adoção da investigação matemática é uma forte alternativa que só tem a contribuir com as mudanças necessárias e prementes no ambiente escolar, não como uma proposta única e absoluta, porém como uma ferramenta, uma engrenagem no processo de educação matemática crítica, que se entrelacem com outras propostas comprometidas com uma formação matemática sólida e significativa,

Palavras-chave: Investigação Matemática. Construção do Conhecimento. Geometria Espacial. Geogebra. Sala de Aula.

ABSTRACT

The present work highlights the mathematical investigation as a possibility of methodological recourse in the construction of mathematical knowledge in the classroom environment, especially in the construction of the concepts of spatial geometry, defending a teaching based on the student's action as an active person in the process of teaching and learning. In order to do so, it was decided to use Geogebra 3D, version 5.0, as an auxiliary tool in the mathematical investigation process, to contribute directly or indirectly to the teaching-learning process in public school classrooms with regard to construction of mathematical knowledge. Its main objective is to present mathematical research as an alternative that will collaborate positively and satisfactorily for the development of skills and abilities necessary for the student in the school environment, promoting a meaningful learning. It was understood that the adoption of mathematical research is a strong alternative that only has to contribute to the necessary and urgent changes in the school environment, not as a single and absolute proposal, but as a tool, a gear in the mathematical education process which are intertwined with other proposals committed to a solid and meaningful mathematical formation,

Keywords: Mathematical Research. Knowledge Building. Spatial Geometry. Geogebra. Classroom.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Investigar, de acordo com Ponte (2003), é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. Uma investigação matemática desenvolve-se normalmente em torno de um ou mais problemas, porém, o mais importante é identificar, de forma clara, que pergunta deve ser respondida. Sabe-se que o aluno aprende quando consegue por em prática seus recursos cognitivos e seu envolvimento ativo e sua participação na formulação das questões a serem estudadas.

Nesse sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam a importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento; ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas (BRASIL, 1998).

O professor tem um papel determinante nas aulas de investigação matemática. Tem de manter equilíbrio entre a autonomia necessária dada ao aluno para não comprometer sua autoria na investigação e garantir que o trabalho do aluno flua naturalmente e de maneira significativa. O professor deve interagir com o aluno levando em conta o individual sem perder de vista os aspectos mais gerais da situação didática. Tem a função de desafiar os alunos, avaliar seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho dos mesmos, por isso o cuidado especial na escolha das atividades.

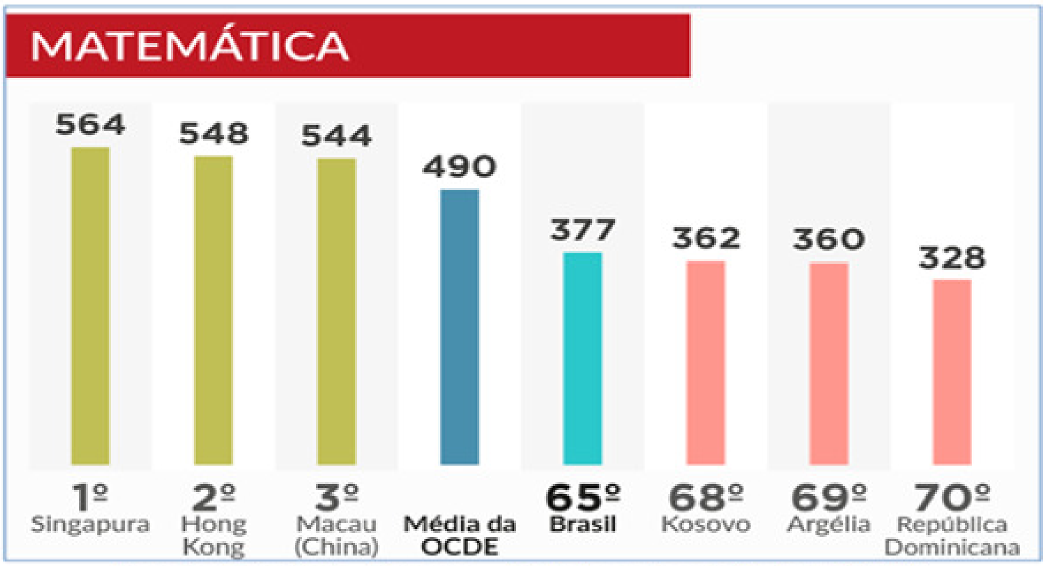
Por outro lado, Vale e Pimentel (2005), consideram que a Matemática, como ciência dos padrões, pode contribuir para um novo olhar por parte dos professores e proporcionar contextos de aprendizagens motivadores para os alunos de maneira a explorar seu poder matemático. Nos últimos anos, vários investigadores em Educação Matemática têm defendido que a aprendizagem matemática requer do estudante um envolvimento ativo e reflexivo em tarefas diversificadas e significativas.

A forma tradicional de abordar o ensino de matemática ao longo dos tempos mostrou-se insuficiente para o alcance dos objetivos esperados por uma educação cidadã. As dificuldades de aprendizagem da matemática na educação básica se refletem nos baixos índices avaliativos, tais como no ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio e no PISA - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

O PISA é um programa que avalia estudantes de 15 anos, uma vez que pressupõe-se o encerramento da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. As provas são aplicadas a cada três anos e abrangem leitura, ciências e matemática.

A área de matemática do PISA é onde o Brasil tem a pontuação mais baixa nas ultimas cinco edições do programa. Porém, o país vinha registrando um crescimento consistente de 2000 até 2012, sendo um dos países que mais evoluiu na pontuação média de matemática. Porém na ultima edição, essa foi a área onde o Brasil teve a queda mais acentuada, ficando entre as cinco últimas colocações no ranking da educação dos países avaliados pelo PISA – 2015.

Figura 01 – Desempenho do Brasil no PISA de 2015



Fonte: Revista Exame, Publicado em 6 dez 2016.

Em relação ao ENEM, apesar do governo comemorar um "avanço" nas médias obtidas pelos alunos da escola pública, nossa visão é discordante, uma vez que os relatórios oficiais* (MEC, 2016) apontam que a média nacional em matemática foi de 493,9 em uma prova com valor de 1000 pontos, além de que a grande maioria dos avaliados (2.430.115 alunos) apresentaram notas entre 400 e 500 pontos e a minoria (3.747 inscritos) obteve nota entre 900 e 1000 pontos, dados estes fornecidos pelo ministério da educação e disponíveis em sua página oficial, no endereço http://portal.mec.gov.br.

Em vias de ensino, cada vez mais, docentes têm utilizado a tecnologia em diversas áreas da educação básica para apoiar o processo de ensino-aprendizagem. Para Vieira (2011), um software educacional não possui apenas o papel de facilitador do processo de aprendizagem, mas seu objetivo maior está em ajudar a desenvolver habilidades e construir processos de conceituação para que o indivíduo possa participar da sociedade do conhecimento.

Na ótica exposta, Machado (1987) afirma que o ensino da Matemática é uma tarefa difícil, por enfatizar abstrações e seus aspectos formais, o que a afasta da realidade tanto para professores, quanto para alunos. Assim, a tecnologia e o computador, quando utilizados de maneira adequada, tornam-se um instrumento que contribui na construção de um cenário, criando para o aluno uma ponte entre os conceitos matemáticos e o mundo real.

É de suma importância que o docente defina e domine os objetivos das atividades que propõe. Para que isso ocorra, o uso de ferramentas computacionais deve ter uma análise criteriosa para a sua adequada utilização. “Assim, o professor deve compreender as vantagens de utilização de um software para que o estudante possa organizar seus pensamentos e socializar-se” (PINTO, 1999, p. 90).

Alves (2002) defende o uso do software no contexto educacional, mas alertam para a importância da avaliação da sua aplicabilidade. Esta avaliação, tradicionalmente, é feita por meio de parâmetros de qualidade de interface, apresentações coerentes de conceitos e aspectos ergonômicos. Nesse sentido, criar ambientes de aprendizagem em que a participação do professor seja de mediador das atividades e que os alunos tenham liberdade para expor suas ideias e participar na construção do conhecimento é o que se espera das novas tendências no ensino no Brasil. Dessa forma, desenvolver propostas que ajudem o aluno a ser ativo no processo de ensino e aprendizagem, a motivá-lo a aprender e a transformar-se em cidadão, é um desafio à escola hoje.

Entretanto, para tornar a matemática, mais agradável e atrativa para os alunos, podemos utilizar a informática como artifício de ensino. Usufruindo da tecnologia para abordar os conteúdos matemáticos, principalmente a geometria, criam-se oportunidades de dinamizar o ensino. Dessa forma, ao mesmo tempo em que se ensinam conteúdos básicos da matemática, é possível que o aluno aprenda tais conteúdos de uma divertida e diferente da convencional.

Nesse sentido, o software Geogebra, com sua combinação de geometria e álgebra, cuja utilização permite despertar nos alunos a curiosidade e o interesse na aprendizagem da matemática, logo, essa é uma forma de garantir uma aprendizagem significativa de conceitos matemáticos. Além das contribuições na atividade cognitiva relacionadas à matemática, o Geogebra contribui para aumentar a motivação dos alunos para a aprendizagem. No entanto, esses recursos não ensinam por si só, é fundamental que o professor esteja preparado no momento de elaborar situações de aprendizagem. A figura do professor nunca poderá ser substituída pelo uso de ferramentas computacionais, pois os alunos não aprendem com o mero arrastar de objetos na tela.

Fundamentando-se nos dados expostos anteriormente e considerando a necessidade de um ensino que valorize a construção significativa do conhecimento pelo educando, o presente trabalho, propõe-se a apresentar a investigação matemática como uma alternativa metodológica que venha contribuir de fato no processo de construção do conhecimento no ambiente da sala de aula, uma vez que é consenso a necessidade de avançar consideravelmente no que diz respeito ao ensino deste campo de saber.

Desse modo, reafirma-se que a forma tradicional de abordar o processo de ensino aprendizagem na sala de aula, fundamentado numa relação unilateral, tendo o professor como o centro do processo, pautado num processo de transmissão do conhecimento, tem corroborado para a manutenção dos baixos índices no que se refere ao ensino de matemática nos últimos anos.

Por outro lado, em outra margem do processo, está a educação matemática, que busca fundamentar as pesquisas e ações que objetivam dar um novo enfoque a dimensão do processo de aprendizagem da matemática em sala de aula. Assim, dentro desta visão fundamentada pela educação matemática, optou-se em desenvolver um trabalho utilizando a investigação matemática como suporte metodológico para as mudanças necessárias no ambiente escolar do ensino da matemática.

Neste sentido, o presente trabalho pretende mostrar a investigação matemática como uma possibilidade metodológica que propicie a construção do conhecimento pelo aluno, colaborando para o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias ao cidadão contemporâneo.

Assim sendo, o primeiro capítulo deste trabalho, tece uma revisão sobre o ensino tradicional da matemática, suas características e influências neste campo do saber. No capítulo seguinte, aborda-se a investigação matemática como uma possibilidade metodológica para a educação matemática crítica, busca-se fundamentar tal hipótese através de um aporte teórico conciso. No terceiro capítulo, apresentam-se algumas propostas de atividades investigativas que possam servir de aporte para a aplicação da mencionada metodologia em sala de aula, atividades estas específicas para o ensino da geometria espacial.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 O ENSINO TRADICIONAL DA MATEMÁTICA

Atualmente, apesar de todos os avanços na tecnologia, das discussões em torno de métodos e técnicas que visam melhorar o processo de ensino e aprendizagem, a escola ainda oferece um ensino fragmentado, com metodologias ultrapassadas e carentes de renovação. Infelizmente, o modelo tradicional de educação ainda persiste no ambiente da sala de aula, principalmente, no ensino da matemática. Diversos são os fatores que colaboram para tal acontecimento, desde a falta de apoio e investimento até a uma política de formação continuada do professor. Tal fato, como mencionado anteriormente, reflete diretamente nos baixos índices avaliativos da área.

O ensino tradicional se caracteriza basicamente por um processo unilateral de transmissão de conhecimento, onde o professor é tido como o centro de todo o processo e o aluno um mero receptor, passivo e responsável único por sua aprendizagem. Tal característica é chamada por Paulo Freire de “Educação Bancária”. Neste sentido, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, afirmam que:

> Nessa concepção, a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseia-se essencialmente na ‘verbalização’ do conhecimento por parte do professor. Se por um lado essa concepção teórica apresenta a vantagem de se atingir um grande número de alunos ao mesmo tempo, visto que a atividade estaria a cargo do professor, por outro lado demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor, o que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos, que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações. (BRASIL, 2006, p.80)

Assim, se faz necessário uma tomada de atitude por parte dos responsáveis pelo processo de ensino e aprendizagem, uma vez que se falam tanto em educação emancipatória e cidadã, porém a prática tradicional no ensino caminha na direção contrária. Formar o aluno para atuar como cidadão crítico e participativo em mundo globalizado, altamente tecnológico e excludente, tendo uma formação que não prima pelo debate, que não considera que os contextos socioeconômicos e culturais determinam a formação das estruturas comportamentais e cognitivas do educando, é uma falácia. Neste sentido, Freire (1996) afirma que:

> É exatamente neste sentido que ensinar não se esgota no "tratamento" do objeto ou do conteúdo, superficialmente feito, mas se alonga à produção das condições em que aprender criticamente é possível. E essas condições implicam ou exigem a presença de educadores e de educandos criadores, instigadores, inquietos, rigorosamente curiosos, humildes e persistentes. Faz parte das condições em que aprender criticamente é possível à pressuposição por parte dos educandos de que o educador já teve ou continua tendo experiência da produção de certos saberes e que estes não podem a eles, os educandos, ser simplesmente transferidos (FREIRE, 1996, p.13).

De um modo geral, nota-se, que muitos dos professores que atuam em sala de aula ainda trabalham com o método antigo ou o denominado ensino tradicional, com o qual os alunos sentem-se incapazes de desenvolver o seu aprendizado, tem dificuldade de resolver alguns tipos de problemas, por serem trabalhados de forma repetitiva. Este ensino não leva em consideração a participação do aluno, o que dificulta a construção do conhecimento e a organização de processos que possibilitem a real aprendizagem.

De acordo D'Ambrosio (1986, p.14), o ensino de matemática precisa mudar:

> [...] a ênfase do conteúdo e da quantidade de seus conhecimentos que o aluno adquira, para uma ênfase na metodologia que desenvolva atitude, que desenvolva capacidade de matematizar situações reais, que desenvolva capacidade de criar teorias adequadas para as situações mais diversas, e na metodologia que permita o recolhimento de informações onde ela esteja, metodologia que permita identificar o tipo de informação adequada para certa situação e condições para que sejam encontrados, em qualquer nível, os conteúdos e métodos adequados.

Faz-se necessário, como consta nos PCNS, que o professor crie caminhos para que o aluno tenha uma maior aprendizagem e construa o conhecimento. Isso só será possível se o professor trabalhar usando diferentes recursos e ou metodologias de ensino. Os PCNS indicam o reconhecimento de todo o sistema numérico como um dos caminhos para ensinar matemática, não como uma forma de exercitar o que já foi ensinado, mas uma estratégia que orienta e provoca novas aprendizagens, que proporciona contextos significativos de pesquisa e exploração no processo de aprender novas ideias, procedimentos e conceitos matemáticos (BRASIL, 1997).

O ensino tradicional não considera as características individuais e coletivas do educando, nem suas necessidades como um ser histórico-social, crítico e em constantes reflexões e mudanças, simplesmente tem como meta principal o processo de transmissão do conhecimento. No diagrama abaixo, mostramos a relação entre o conhecimento, professor e alunos no processo de ensino tradicional.

O processo de ensino e aprendizagem ocorre de forma linear, obedecendo a visão de que o professor é o detentor do conhecimento e, dessa forma, seu papel se resume em transmitir este conhecimento ao aluno, receptor passivo. No entanto, através da vasta literatura atual, sabe-se que o processo de aprendizagem e construção do conhecimento não ocorre dentro desta lógica, é algo bem mais complexo. Neste sentido, Vigotski (2003) afirma que:

> Na base do processo educativo deve estar a atividade pessoal do aluno, e toda a arte do educador deve se restringir a orientar e regular essa atividade. No processo de educação, o professor deve ser como os trilhos pelos quais avançam livre e independentemente os vagões, recebendo deles apenas a direção do próprio movimento. (VIGOTSKI, 2003, p.75).

Defende-se ainda uma proposta de ensino onde os agentes envolvidos interajam de forma continua em busca da construção do conhecimento. Assim, professor – aluno buscam construir coletivamente significados em torno de situações de aprendizagem, onde a não lineariedade é uma certeza e o conhecimento é significativo.

Neste enfoque, chama-se a atenção para o papel do professor de matemática no contexto da sala de aula, uma vez que sua visão e atitude diante do processo de ensino é que irá definir os rumos da metodologia adotada. Assim, Fiorentini e Lorenzato (2006) caracterizam dois tipos de professor de matemática, a saber: O matemático e o educador matemático. O professor matemático concebe a matemática como um fim em si mesmo, enquanto que o educador matemático a concebe como um meio, como um instrumento de formação intelectual e social, promovendo uma educação pela matemática. Dessa forma, Silva (2012), esclarece as diferenças principais entre estes dois modelos de educador:

> Nota-se que a forma de se trabalhar a matemática entre o matemático e o educador matemático são bem diferentes, enquanto o primeiro possibilita o desenvolvimento da matemática pura e aplicada, onde esta é trabalhada como uma ciência nela e para ela; a segunda possibilita o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribui para a formação de um indivíduo crítico e atuante na sociedade. (SILVA, 2012, p.32)

Pode-se afirmar então que no modelo tradicional de ensino o professor de matemática atua como “matemático”, uma vez que seu papel fundamental é o de “transmissor do conhecimento” e o aluno mero receptor. Numa visão de educação cidadã, o ensino tradicional, por não atender os critérios de uma formação participativa, ativa e crítica, contribui de certa forma para a perpetuação dos “status quo”, ou seja, sua inoperância nos campos das discussões das ideias, não somente matemáticas colaboram na formação de cidadãos apáticos aos problemas de seu contexto social. Neste sentido, concordamos com Skovsmose (2007), quando nos afirma que:

> [...] a educação matemática pode também ter um potencial para desenvolver um forte auxílio para ideias democráticas, embora este potencial não seja compreendido por nenhuma força intrínseca à educação matemática. Como ela pode operar em relação aos ideais democráticos dependerá do contexto, da maneira como o currículo é organizado, do modo como as expectativas dos estudantes são reconhecidas etc. (SKOVSMOSE, 2007, p. 72).

Neste enfoque, contrapondo a visão tradicional de ensino, busca-se uma linha metodológica que privilegie o educando enquanto ser ativo no processo de construção/reconstrução do conhecimento. Para tanto, a investigação matemática, fundamentada por uma visão renovadora de educação, onde o professor deixa o centro do processo de ensino-aprendizagem e o educando assume o papel de protagonista atende as necessidades impostas por um ambiente que privilegie uma educação de emancipatória, onde o processo de aprendizagem se dá através da construção, onde o aluno caminha com meios próprios e o professor passa e exercer um papel de mediador neste processo. Assim, corroboramos com as ideias de Boeri e Vione (2009), quando mencionam o papel do professor diante de uma educação inovadora, ao afirmarem que:

> Se o professor é capaz de oferecer o ensino da matemática de forma dinâmica, atrativa e criativa, tem em mãos uma arma valiosa para desenvolver no educando o pensamento crítico, a confiança em seu potencial mental e raciocínio lógico e o hábito de utilizar as suas competências com autonomia, senso de investigação e criação. (BOERI e VIONE, 2009, p.19).

Assim, o papel do professor em uma visão de educação emancipatória é o de tornar o ambiente propicio a construção do conhecimento pelo educando, assumindo uma função mediadora entre o objeto de aprendizagem e o aluno, planejando situações de aprendizagem e interagindo na construção coletiva do conhecimento.

1.2 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

De um modo geral, a educação brasileira, em geral, necessita adequar-se à realidade social em que os alunos estão inseridos. Isso porque se faz necessária uma adequação dos conteúdos estudados na escola, com o contexto social vivido no cotidiano dos aprendizes. Assim, estas transformações englobam todas as ciências desenvolvidas nas escolas. Isso porque a escola é o instrumento capaz de formar cidadãos atuantes, críticos e aptos a contribuir para o desenvolvimento da sociedade.

Dessa forma, conteúdos, educador e educando, juntamente com a comunidade, precisam interagir-se entre si. Ou seja, a matemática precisa ser viva, atuante e, principalmente, compreendida como uma ciência importante para a formação do ser humano, e apropriar-se do conhecimento matemático é um direito de toda e qualquer pessoa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais referendam a reelaboração e renovação da proposta curricular, reforçando a importância de que a escola seja a responsável pela formulação de sua proposta pedagógica e de seu projeto educacional, sendo esses compartilhados por toda equipe pedagógica, visando a melhoria da qualidade da educação, resultando no compartilhamento de responsabilidades entre os todos os educadores (CRUZ, 2011).

Desse modo, vislumbrar o ensino da matemática como um instrumento de formação cidadã se faz necessário quando se pensa uma educação voltada para a formação integral do educando. Neste sentido, alguns documentos oficiais estabelecem metas e parâmetros em relação aos conteúdos que serão abordados em sala de aula e ao conhecimento que se espera que o educando desenvolva. Assim, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, documento oficial complementar aos PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais, em relação à escolha dos conteúdos, afirmam que:

> [...] é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p.69).

Ao considerar que o desenvolvimento matemático do aluno contribui de forma incisiva na tomada de decisões e atitudes perante a realidade a qual está inserida, os PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999) mostram que a formação matemática do ensino médio deverá ir além da preparação para estudos futuros, uma vez que:

> Um Ensino Médio concebido para a universalização da Educação Básica precisa desenvolver o saber matemático, científico e tecnológico como condição de cidadania e não como prerrogativa de especialistas. O aprendizado não deve ser centrado na interação individual de alunos com materiais instrucionais, nem se resumir à exposição de alunos ao discurso professoral, mas se realizar pela

> participação ativa de cada um e do coletivo educacional numa prática de elaboração cultural. (BRASIL, 1999, p.07).

O referido documento ainda reforça que numa educação voltada para a cidadania é essencial o papel ativo do educando na construção do conhecimento matemático com significado, afastando-se da linha tradicional de ensino da matemática, uma vez que...

> [...] se propõem métodos de aprendizado ativo, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes deste, quer se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles. Mas o que também se pretende é educar para a iniciativa, pois a cidadania que se quer construir implica participação e não se realiza na passividade. (BRASIL, 1999, p.54).

Outro documento, PCN-Matemática – 3º e 4º ciclos, voltado para a educação básica, corroboram com o exposto acima quando trata da relação da formação matemática do educando e sua postura diante da sociedade como cidadão:

> Falar em formação básica para a cidadania significa refletir sobre as condições humanas de sobrevivência, sobre a inserção das pessoas no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura e sobre o desenvolvimento da crítica e do posicionamento diante das questões sociais. Assim, é importante refletir a respeito da colaboração que a Matemática tem a oferecer com vistas à formação da cidadania. (BRASIL, 1998, p.26).

Deve-se considerar ainda que a aprendizagem de matemática em um ambiente democrático, onde as incertezas dão espaço à busca do conhecimento, os exercícios padrão substituídos por investigações matemáticas e resolução de problemas, o conhecimento matemático construído com sentido e significado para o aluno, exerce um papel primordial na formação de trabalhadores aptos a se adequar as mudanças e exigências do mercado de trabalho, pois, segundo o PCN-Matemática – 3º e 4º ciclos (op.cit.),

> Nesse aspecto, a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (BRASIL, 1998, p.27)

O referido documento ainda menciona que:

> Para atender as demandas do trabalho contemporâneo é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar,

> argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades. (BRASIL, 1998, p.34).

Diante disso, os PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza e Matemática, documento complementar aos PCNEM, reforçam que:

> No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. (BRASIL, 2002, p.111)

Os PCNs podem ser encarados como um auxílio aos professores na tarefa de refletir e de discutir aspectos da prática pedagógica, transformando continuamente o cotidiano escolar, sendo uma proposta flexível, que vai se concretizando nas decisões regionais e locais, configurando como um modelo curricular heterogêneo e não impositivo. Nesse contexto:

> Os objetivos dão importância à valorização da matemática pelo educando como instrumento capaz de permitir a compreensão do mundo em sua volta, estimulando o interesse, a curiosidade, o espírito investigativo e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Os conteúdos são escolhidos de acordo com o critério de relevância social e contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno (CRUZ, 2011, p. 26).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática apresentam os objetivos em termos das capacidades a serem desenvolvidas em cada ciclo, assim como os conteúdos para desenvolvê-las. São apontadas as possíveis conexões entre os blocos de conteúdos, entre a matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os temas transversais.

Considerando o papel fundamental que a educação tem que assumir diante de um mundo moderno e em constante evolução, que exige do cidadão, a cada dia, competências e habilidades que os torne capazes de adaptar-se, alto instruir-se, atuar de forma autônoma, solidária e crítica sobre sua realidade; é de oferecer condições para que o aluno possa construir e reconstruir seus conhecimentos, através de ambientes, situações e atividades que possibilitem o desenvolvimento das potencialidades individuais; o PCN – Matemática – 3º e 4º ciclos, consideram que:

> [...] a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e

> justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.
> Por outro lado, para a inserção de cada indivíduo no mundo das relações sociais, a escola deve estimular o crescimento coletivo e individual, o respeito mútuo e as formas diferenciadas de abordar os problemas que se apresentam. (BRASIL, 1998, p.26).

A seguir, listamos os objetivos do ensino da matemática, elencados para o ensino médio, etapa final da educação básica, segundo os parâmetros curriculares da disciplina para este nível de ensino. Segundo os PCNEM – Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias (Brasil, 2009) as finalidades do ensino de Matemática no nível médio devem propiciar o aluno a:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2009, p.42)

É notório que tais objetivos caminham ladeados com os objetivos de uma educação emancipatória, onde a investigação matemática como método de ensino tem fértil campo para atuação. O referido documento ainda descreve as competências e habilidades a serem desenvolvidas através da matemática no ensino médio, a saber: Representação e comunicação, Investigação e compreensão e contextualização sociocultural. Abaixo mostramos as habilidades pretendidas em relação à competência Investigação e compreensão, por entendermos que as atividades investigativas em sala de aula se justifiquem através das mesmas:

> Investigação e compreensão
> • Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
> • Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

> • Formular hipóteses e prever resultados.
> • Selecionar estratégias de resolução de problemas.
> • Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> • Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
> • Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> • Discutir ideias e produzir argumentos convincentes. (BRASIL, 2009, p.46)

Portanto, segundo Perez (2011) os Parâmetros Curriculares Nacionais, propõem mudanças de enfoque aos conteúdos curriculares, pois os mesmos são abordados muitas vezes de maneira equivocada, não sendo tratados como objeto de ensino, que necessitam de intervenções diretas do professor para serem de fato aprendidos. O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas a própria matemática, mais voltada para à teoria do que a prática.

1.3 CAMINHOS POSSÍVEIS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

A história da educação no Brasil tem indicado caminhos, papéis, deveres e estigmas que se modificam através do tempo, a medida que a sociedade, a família e a escola também mudam. a função do educador se altera e torna-se um desafio diante das transformações por que passa a educação. O professor, qualquer que seja o nível em que atue, pode e deve buscar razões e motivações próprias para alcançar seus objetivos como educador e promover o alcance dos objetivos dos educandos.

Hoje, a situação do ensino-aprendizagem da matemática necessita recorrer à capacidade e ao empenho de todos, alunos, professores e demais envolvidos no processo educacional para melhorar o padrão “ensinar/aprender matemática”. Nesse contexto, políticas públicas educacionais, escolas, professores, alunos e comunidade devem se preocupar em conhecer o ambiente em que se encontram para procurarem superar o modelo tradicional de ensino que, ao invés de promover o desenvolvimento dos cidadãos/as, contribui para sua decadência e para o descaso com a sociedade (SAVIANI, 2005).

O avanço tecnológico de forma exponencial, como citam alguns cientistas, trazem grandes benefícios para a humanidade. Através das tecnologias de informação e comunicação é possível ensinar e, consequentemente aprender de modo diferenciado, além de ainda desenvolver habilidades e competências distintas. Nessa perspectiva, articular o conteúdo curricular de outra maneira é transformar as relações existentes no contexto educacional escolar.

Diante do atual cenário pelo qual a sociedade moderna passa, onde os aparatos tecnológicos evoluem diariamente e com isso os seres humanos tendem a adaptarem-se as necessidades impostas por esta realidade, é inconcebível que o ensino da matemática permaneça estático, dominado por técnicas de ensino do século passado, no modelo da escola tradicional. Ensinar para os jovens do século XXI requer uma revisão dos conceitos relativos à construção e reconstrução do conhecimento e forma de abordagem dos conteúdos em sala de aula.

Neste sentido, a educação matemática tem se preocupado em buscar alternativas metodológicas visando suprir esta lacuna. Atualmente, há diversas linhas metodológicas voltadas para o processo de ensino aprendizagem da matemática. Analisaremos algumas destas e suas possibilidades de interação com a Investigação matemática, uma vez que nosso objetivo aqui não é aprofundar nas demais tendências e sim mostrar as possibilidades e potencialidades da investigação matemática como um instrumento de apoio ao trabalho do professor em sala de aula.

1.3.1 História da Matemática

Tal tendência pode ser empregada como uma forte aliada à construção do conhecimento pelo aluno, uma vez que possibilita a reconstrução do processo histórico do conhecimento matemático, sendo uma forte aliada à contextualização dos conceitos matemáticos desenvolvidos em sala de aula. Assim, os PCN_+ (Brasil, 2006) reforçam que:

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 2006, p.86)

Além disso, é consenso que o entendimento da estruturação da matemática como ciência contribui de forma significativa para que o aluno a perceba como uma construção humana e em constante evolução, amenizando a falsa percepção de uma ciência exata, sem falhas, formada a partir de verdades absolutas e construída num encadeamento contínuo e lógico. Assim, o uso da história da matemática em sala de aula, segundo Santos (2009), dá ao aluno:

> [...] a noção exata dessa ciência, como uma ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais. Contrariando a ideia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas, a História da Matemática tem este grande valor de poder também contextualizar este saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político (SANTOS, 2009, p.20).

A história da matemática pode estar presente na sala de aula em vários contextos diferentes, pode ser apresentada de forma lúdica com problemas curiosos, "os enigmas", como fonte de pesquisa e conhecimento geral, como introdução de um conteúdo ou atividades complementares de leitura, trabalho em equipe e apresentação para o coletivo. Também pode apresentar a matemática com uma gama de possibilidades de atividades diferenciadas que vão muito além das infindáveis sequencias de exercícios e memorização de métodos e fórmulas.

Além dessas possibilidades, a história da matemática pode se associar a investigação matemática no desenvolvimento dos conteúdos em sala de aula, reconstruindo etapas que levaram a elaboração de um conceito matemático, investigar um fato histórico na matemática, buscando refazer caminhos percorridos, dentre outras opções.

Esse entrelaçamento possibilitará ao aluno perceber que a matemática enquanto ciência surge das necessidades do homem em resolver situações cotidianas práticas, sendo dessa forma um elemento motivador e impulsionador de uma aprendizagem realmente significativa.

1.3.2 Etnomatemática

Segundo D'Ambrósio (1991, p.09) a "Etnomatemática é a arte ou técnica techné=tica) de explicar, de entender, de se desempenhar na realidade (matema) dentro de um contexto cultural próprio (etno)". Assim, pode-se afirmar que a Etnomatemática diz respeito à matemática cultural, aquela praticada pelos diferentes grupos, pelas diferentes sociedades, caracterizada pela sua realidade sociocultural no qual os grupos estão inseridos. Por exemplo, na região ribeirinha dos rios amazônicos temos profissionais que atuam na construção de embarcações rústicas (carpinteiros navais), que apesar de, em certos casos, terem quase nenhuma escolarização, dominam com maestria conhecimentos matemáticos relacionados à geometria, proporcionalidades, simetrias, etc. Este é um caso onde o professor pode explorar a Etnomatemática deste grupo de pessoas, como forma de valorizar a realidade cultural e dá significado ao conhecimento matemático desenvolvido em sala de aula, não somente como ponto de partida, mas como eixo norteador do processo pedagógico.

As atuais discussões de pesquisadores objetivam adequar o ensino da matemática a uma nova realidade, marcada pela presença da matemática no dia-a-dia da atividade humana. Esse fato é abordado pela Etnomatemática. Inicialmente, a Etnomatemática:

> [...] significava a matemática não acadêmica e não sistematizada, isto é, a matemática oral, informal, "espontânea" e, às vezes, oculta ou congelada, produzida e aplicada por grupos culturais específicos (indígenas, favelados, analfabetos, agricultores...). Isto é, seria uma maneira muito particular de grupos culturais específicos realizarem as tarefas de classificar, ordenar, inferir e modelar. (FIORENTINI, 1994, p. 59).

Considerando que uma prática em sala de aula, inspirada em práticas pedagógicas desenvolvidas no movimento etnomatemático, é também uma prática pedagógica baseada nos Estudos Culturais, a Etnomatemática apresenta um grande potencial para aliar-se a trabalhos investigativos, uma vez que as matemáticas dos diferentes grupos sociais e comunidades culturais diversas apresentam amplo campo para exploração através da investigação matemática.

1.3.3 Resolução de Problemas

É outra linha metodológica no ensino da matemática que ultimamente tem se mostrado bastante aplicada em sala de aula. A resolução de problemas tem como fundamento a construção do conhecimento matemático a partir de situações problemas, onde o aluno individualmente ou em grupos busca elencar meios de solucionar tal situação, tudo norteado pela ação do professor, que irá propor problemas de acordo com o conteúdo a ser desenvolvido e da realidade da turma.

Todavia, o tema resolução de problemas tem sido muito discutido e analisado nas últimas duas décadas, tanto por professores quanto por pesquisadores e elaboradores de currículos. Segundo Smole (2001), uma das questões centrais dessas reflexões é: o que é resolução de 1792 problemas? Na verdade, essa questão adquiriu, ao longo do tempo, uma mistura das diversas concepções. A partir dessa mescla de modos de pensar a resolução de problemas surgem, desde visões muito simplistas e ingênuas até sofisticadas teorias, as quais têm gerado diferentes orientações para o ensino, a organização curricular, a elaboração de materiais e as orientações didáticas para a abordagem do tema.

Na visão tradicional de ensino, como mencionado anteriormente, o professor apresenta o conteúdo, resolve exercícios modelos, aplica exercícios e, finalmente, propõe a resolução de problemas, como modo de avaliar se realmente ouve aprendizagem significativa e o aluno consegue aplicar os conceitos desenvolvidos na aula em outros contextos. A resolução de problemas propõe o caminho inverso, onde a partir da situação problema significativa o aluno irá construir conceitos e significados matemáticos, a aprendizagem ocorre num processo de resolução de problemas e não para resolver problemas. Diniz (2001), afirmar que a resolução de problemas corresponde,

> [...] a um modo de organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar, e consequentemente, do que significa aprender [...] na Resolução de Problemas trata-se de situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvedor combine seus conhecimentos e decida pela maneira de usá-los em busca da solução. (DINIZ, 2001, p. 89).

A possibilidade de alinhar a resolução de problemas com a investigação matemática é incontestável, uma vez que o traço característico das duas vertentes é a construção do conhecimento matemático, tendo o educando como protagonista nesta ação. No entanto, deve-se ter cuidado para não confundir resolução de problemas com investigação matemática. Assim, Lamonato e Passos (2011), buscam esclarecer as diferenças entre essas duas metodologias, quando afirmam que:

> Na resolução de problemas, o professor elabora os problemas ou as questões, porém, há a possibilidade de que os alunos não sejam apenas os ‘resolvedores’ dos problemas elaborados por outros, mas que também elaborem os seus próprios, que irão resolver. Na exploração-investigação matemática, dada a situação, a elaboração das questões já faz parte do processo resolução. Por outro lado, ao final, ambas as atividades podem promover o debate e a socialização dos resultados como novo momento para argumentação e justificação. (LAMONATO; PASSOS, 2011, p.70).

Quando os problemas convencionais são o único material utilizado para o trabalho com resolução de problemas na escola, pode-se levar o aluno a uma postura de fragilidade e insegurança diante de situações que exijam algum desafio maior. Assim, de acordo com Charnay (2006), a compreensão no processo de aprendizagem deveria ser o foco dos esforços de professores e pesquisadores da área da Matemática.

1.3.4 Modelagem Matemática

Outra vertente metodológica bastante atual é a modelagem matemática, que se constitui, segundo Bassanezi (2004, p.24) “na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual". Deste modo, podemos afirmar que a modelagem matemática pode ser um instrumento eficaz para que os envolvidos compreendam a matemática como uma ciência viva e uma ferramenta essencial à compreensão e intervenção na realidade. Ainda Bassanezi (1994) afirma que:

> Modelagem Matemática é um processo que consiste em traduzir uma situação ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem, que denominamos Modelo Matemático, pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão. (BASSANEZI, 1994, p.01)

Um caminho para que a escola possa contribuir para a aprendizagem do próprio aluno é repensar numa proposta pedagógica democrática, crítica e reflexiva sobre o seu papel, de modo que o estudante seja o elemento principal da aprendizagem. É de fundamental importância que o professor de Matemática comece a refletir em sua prática pedagógica, no sentido de encontrar novas estratégias e metodologias que possam fazer o ensino da Matemática ficar mais próximo do contexto do aluno. Nesta perspectiva, apresenta-se a Modelagem Matemática como uma ferramenta de contribuição para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, no intuito de motivar e estimular a construção do conhecimento matemático.

A referida metodologia se fundamenta no fato de que, partindo de uma situação-problema inicial, os envolvidos (professores e alunos) irão desenvolver procedimentos e ferramentas necessárias a solução do problema, construindo assim uma resposta denominada modelo matemático para o problema inicial. A modelagem matemática, dessa forma, se mostra como um método de ensino capaz de dar significado a matemática como ciência e como instrumento de ação sobre o mundo, uma vez que, tal método exige contextualização e interdisciplinaridade.

Como dito anteriormente, a modelagem matemática parte da realidade cultural do educando para dar forma e significado a modelos matemáticos, assim, tal método pode ser um forte aliado da Etnomatemática e da investigação matemática e vice-versa.

1.3.5 Investigação Matemática

Investigar em matemática é algo que, tradicionalmente, é feito por especialistas da área, professores ou pesquisadores. A investigação matemática como uma metodologia de ensino tem uma história recente no ambiente de pesquisas acadêmicas. A ideia de que é possível o aluno construir conceitos e significados a partir de uma vivencia de investigação, contribui para que se construa uma nova visão sobre o processo de ensino e aprendizagem nesta área.

A atividade de investigar matematicamente na sala de aula significa buscar soluções para situações que requerem a construção de diversos conceitos, pré-estabelecidos pelo professor, seguindo um roteiro planejado em torno do conteúdo matemático envolvido. A investigação matemática pode ser confundida com a resolução de problemas em algumas situações, como mencionamos anteriormente, no entanto a diferença fundamental reside no fato de que a investigação matemática é uma atividade aberta, aonde o aluno irá, através de procedimentos investigativos, formular hipóteses, testar conjecturas e, dessa forma, redescobrindo um conceito e reinventando a matemática. Ponte, Brocardo e Oliveira, nos informam que:

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa tão só, que reformulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 9).

Em um processo de investigação matemática o papel do professor passa a ser de um instigador que irá buscar formas de propor atividades que realmente mechan com o interesse e tenham significado para os alunos, pois a investigação requer uma atitude ativa do educando, agindo e interagindo em torno do objeto investigado.

Assim exposto, pode-se afirmar que a investigação matemática é uma metodologia que valoriza o fazer do aluno, a ação constante e reflexiva em torno de objetivos, em função de uma hipótese. Por suas características acima mencionadas, a investigação matemática se mostra como uma tendência capaz de se aliar as demais, uma vez que não podemos limitar as ações da sala de aula a uma única forma de construção do conhecimento. Neste sentido, os PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002 p.42), nos afirmam que “é consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular da matemática”.

2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Investigar é algo intrinsecamente humano, que a partir de necessidades de ordem prática, por exemplo, organiza meios para suprir estas necessidades. A evolução científica, quase sempre ocorreu a partir da necessidade de mudanças e adaptações em conceitos já desenvolvidos. É inconcebível que o ensino da matemática ainda seja feito de forma tradicional, onde os conceitos são expostos pelo professor, cabendo aos alunos a absorção e aplicação destes em exercícios e provas.

Atualmente, a sala de aula tem que se apresentar como um ambiente motivador e capaz de assegurar que os alunos apresentem interesse à aprendizagem. Neste sentido, concorda-se com Lorezato (2006), quando enfatiza que dá aula não é a mesma coisa que ensinar, uma vez que:

> Ensinar é dar condição para que o aluno construa seu próprio conhecimento. Vale salientar a condição de que há ensino somente quando, em decorrência dele, houver aprendizagem. Note que é possível dar aula sem conhecer, entretanto não é possível ensinar sem conhecer. Mas conhecer o quê? Tanto o conteúdo (matemática) como o modo de ensinar (didática); e ainda sabemos que ambos não são suficientes para uma aprendizagem significativa (LOREZATO, 2006, p. 03).

A investigação matemática como uma metodologia de ensino atende aos objetivos estabelecidos para uma educação moderna, onde o aluno deve adquirir o habito de pesquisa e aprendizagem constantes, como esclarece os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio), em relação aos objetivos da aprendizagem matemática para este nível de ensino:

> [...] apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento. (BRASIL, 1999, p.41)

Assim, investigar em sala de aula é preponderante para que os educandos adquiram o hábito de pesquisar, de construir o conhecimento de forma autônoma, de aprender a aprender, características essenciais ao cidadão moderno. Desse modo, apresenta-se a seguir um breve resumo do que venha a ser a investigação matemática como metodologia de ensino.

2.1 O ENSINO DA GEOEMTRIA ESPACIAL – UMA BREVE ANÁLISE

A geometria espacial, assim como a geometria plana, é um dos conteúdos matemáticos que permeiam a realidade do aluno cotidianamente, no entanto, a escola através da segmentação curricular, não possibilita o contato do educando com estes conteúdos no decorrer do ensino fundamental, apresentando um ensino altamente enciclopédico na educação secundária, colaborando assim com as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Nos anos iniciais do ensino fundamental, onde o aluno desenvolve a base para sua formação cientifica, a carência de um ensino de geometria, realmente comprometido com uma aprendizagem significativa, certamente irá gerar suas consequências no ensino médio. Assim, concordamos com Lorenzatto (1995, p.05), em relação à importância do ensino de geometria, uma vez que o mesmo justifica:

> A necessidade do ensino de Geometria pelo fato de que, um individuo sem esse conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas. Não poderá ainda utilizar-se da Geometria como facilitadora para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. (LORENZATTO, 1995, p.05).

Dessa forma, podemos afirmar que o ensino geometria contribui para a formação integral do cidadão, uma vez que o seu conhecimento ajuda a preparar para o individuo para que o mesmo interaja de forma critica sobre sua realidade, utilizando os conhecimentos de geometria na tomada de decisões no seu cotidiano.

O ensino da geometria espacial na educação tradicional se caracteriza por ser fundamentalmente teórico, onde as definições e teoremas são apresentados antes de qualquer exploração pratica, quando assim ocorre. Basicamente a forma tradicional de abordagem segue o seguinte roteiro: Teoria – Pratica – Tecnologia. Defendemos, através da investigação matemática, um caminho oposto, onde através de explorações praticas e tecnológicas, no caso com o geogebra 3D, o aluno possa construir seus conceitos e assim dar significado a teoria.

Ainda Lorenzatto (1995, p.07) mostra que a geometria apresenta a possibilidade de dar significado aos demais temas da matemática, pois possibilita a conexão entre estes, uma vez que ela:

> [...] se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. (LORENZATTO, 1995, p.07)

A conexão entre as áreas da matemática em sala de aula, certamente é um grande auxiliador na aprendizagem significativa, pois essa interligação colabora para que o educando perceba a matemática como uma ciência estruturada. Dessa forma, a investigação matemática e o Geogebra podem contribuir para que a escola e o professor exerçam seus papéis de forma satisfatória.

2.2 A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

A matemática enquanto ciência se estruturou em torno de avanços investigativos, ocasionados por lacunas dentro do próprio contexto científico – matemático, bem como na busca de soluções de problemas do cotidiano. Trazer essa visão para a sala de aula e mostrar que o conhecimento matemático pode ser reconstruído pelo aluno, é essencial para ajudar a desmistificar a matemática enquanto disciplina escolar e dá significado real aos conhecimentos abordados, uma vez que também mostra a matemática como construção humana e intrinsecamente ligada a realidade sociocultural. Assim, Mendes (2008), afirma que:

> Desde tempos remotos que a matemática tem sido um poderoso instrumento utilizado para a solução de problemas comuns do cotidiano, bem como para uma tentativa de leitura e interpretação/compreensão da natureza. O aperfeiçoamento desse processo transformou-se evolutivamente de modo a estruturar-se sob a forma de modelos úteis ao ensino desse conhecimento hoje. É uma perspectiva de solucionar o problema referente à desconexão entre conhecimento, sociedade e escola, evitando a fragmentação dos objetos do saber nas diversas áreas de ensino (MENDES, 2008, p.35).

A investigação matemática como instrumento norteador do processo de aprendizagem da matemática tem como fundamento essencial a postura ativa do aluno na reconstrução do conhecimento matemático através de busca de soluções para situações problema, onde a construção de argumentos e conjecturas é essencial para justificar ou refutar uma hipótese.

Investigar como atividade pedagógica, segundo Ponte (2013) não significa desenvolver um trabalho de cunho técnico-científico, e sim agir em torno da solução de problemas utilizando os instrumentos ao alcance do aluno, possibilitado por uma postura ativa de aluno e professor em torno de uma situação indefinida para aquele. Neste sentido, Ponte (2013), afirmar que:

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muitos sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam para as quais não temos respostas prontas, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. (PONTE et al, 2013, p.09).

Lamonato e Passos (2011) chamam a atenção para o desenvolvimento do conhecimento em uma atividade de exploração-investigação matemática, quando manifestam que:

> [...] aprender e ensinar sejam diferentes de transmitir e adquirir conhecimentos, mas, pelos seus processos intrínsecos, proporcionam o desenvolvimento do conhecimento por quem se envolve em atividade de investigação matemática. (LAMONATO E PASSOS, 2011, p. 63).

O despertar do interesse, da curiosidade do estudante nas aulas de matemática, certamente tem sido um dos grandes desafios do professor da atualidade. As amarras do ensino tradicional nas aulas de matemática têm deixado suas marcas e conquistar o aluno num processo de ensino que realmente lhe gere vontade de aprender é imprescindível. A relação professor – aluno deve ser uma relação de construção conjunta do conhecimento, fugindo dos moldes tradicionais. Assim, Isotani (2005) nos reforça que:

> Neste processo de ensino-aprendizagem, o professor irá incentivar e ajudar o aluno a descobrir por si só o mundo matemático, seus conceitos e suas propriedades. As dicas e conselhos do professor devem ser tomados como valiosos preceitos que servirão como guias durante o processo de descoberta. Dessa forma, é possível estimular a curiosidade sobre a matemática, e não apenas incentivar a busca por uma resposta. (ISOTANI, 2005, p. 12).

As atividades investigativas, quando bem planejadas e estruturadas, tem forte impacto no despertar do interesse do aluno e na formação de conceitos matemáticos significativos para o mesmo, uma vez que envolve o educando em uma atividade dinâmica e reflexiva, onde situações matemáticas são criadas e recriadas através de uma postura ativa e com significado real para o educando. Porfírio e Oliveira (1999), ao tratarem da investigação matemática na sala de aula, definem que:

> O conceito de investigação relaciona-se com a atividade que os matemáticos profissionais desenvolvem ao produzirem conhecimento. Deste modo, investigar

> tem como objetivo descobrir algo recorrendo a um processo, de alguma forma, sistemático (PORFÍRIO; OLIVEIRA, 1999, p. 112).

Nota-se então, que o processo de investigação matemática na sala de aula requer um planejamento sistemático do professor, uma vez que é uma atividade centrada na ação do aluno e, dessa forma, bem como a atividade sugerida seja realmente de interesse e com significado para os envolvidos, garantindo a eficiência e o alcance dos objetivos estabelecidos.

A investigação matemática na sala de aula apresenta suas vantagens e peculiaridades em relação às demais metodologias. Oportunizar ao aluno perceber que o conhecimento matemático se constrói através de uma relação de acertos e erros, certamente é um diferencial positivo, pois permite aos envolvidos agirem como “pesquisadores matemáticos”, tendo que formular questões, planejar ações, levantar hipóteses, desenvolver argumentação com os colegas para aceitar ou refutar uma hipótese, entre outras ações, além de trazer a construção matemática para um nível de real compreensão enquanto construção humana. Neste sentido, Ponte et al (2013) menciona que:

> Na disciplina matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental de aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com via a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações matemáticas. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende s favorecer o seu envolvimento na aprendizagem. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 23).

Tal forma de compreender o processo de ensino e aprendizagem da matemática, certamente tem nos PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental, uma fundamentação sólida, visto que o documento enfatiza como um dos objetivos do ensino da matemática na educação fundamental, o de oferecer condições para que o aluno possa:

> [...] identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p.47).

Para D’Ambrósio (1993, p.36), a pesquisa – investigação deve ser um instrumento constante na sala de aula, não mais algo somente de especialistas ou professores, para este pesquisador o aluno não pode mais ficar à margem do processo de construção matemática, deve assumir papel central no processo. Segundo D’Ambrósio (1993, p.36):

> Dificilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; consequentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância.

A investigação matemática como uma ferramenta de ensino contribui para desmistificação do ensino desta disciplina, colaborando de forma significativa para a construção de conceitos, competências e habilidades, não somente os inerentes a matemática, mas aqueles também necessários à formação integral do aluno, tais como a capacidade de trabalhar em equipe, elaborar e planejar ações, enfim, aprender a aprender. Para Braumann, (2002, p.05) “aprender matemática não é simplesmente compreender a matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação (ao nível adequado a cada grau de ensino)”, o mesmo pesquisador ainda afirma que:

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2002, p.5).

Assim, investigar em sala de aula pressupõe uma atitude diferenciada por parte do aluno frente aos problemas propostos; no entanto, cabe ao professor criar um ambiente adequado e propício a investigação, oferecendo situações que realmente tenham significados para os alunos, criando um clima favorável ao desenvolvimento da atividade.

2.3 ETAPAS NO PROCESSO DE INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA

O desenvolvimento de qualquer atividade de investigação matemática como uma metodologia de ensino requer do professor um comprometimento com o planejamento. Para utilizar a investigação matemática como uma metodologia de ensino, deve-se conhecer como funciona e se estrutura tal tendência. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) a realização de uma investigação matemática se forma três momentos interligados e essenciais:

> Uma atividade investigativa desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto delas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE et al, 2013, p.25).

Descreveremos sucintamente cada fase num processo de investigação matemática em sala de aula, mas vale ressaltar que estas etapas não são estanques, podem ocorrer de forma simultânea, dependendo da situação a ser investigada.

2.3.1 Introdução da tarefa

É de suma importância para o desenvolvimento das demais etapas, uma vez que nesta fase o aluno irá se deparar com a situação problema a ser investigada, fato que pode gerar um desinteresse pela investigação, caso o objeto a ser investigado não tenha significado para os alunos. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p.47) “na fase do arranque da investigação, é fundamental que os alunos se sintam motivados para a atividade a realizar”.

Essa motivação é essencial para o sucesso da tarefa, pois o primeiro contato com a atividade deve ser motivador o suficiente para despertar o interesse dos alunos na continuidade da investigação. Por isso, como mencionado anteriormente, a criação de um ambiente, de um cenário para investigação matemática é essencial para o êxito da atividade.

Compreender o processo que ora se inicia é essencial para que o aluno vislumbre os caminhos a seguir dentro da investigação. Deixar claro a tarefa a ser realizada e os objetivos da tarefa deve ser o papel do professor neste momento, além de buscar envolver todos os alunos da classe no processo, uma vez que, o que desperta o interesse de alguns, pode não ser interessante para outros, conforme nos ensina Skovsmose (2000):

> O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos. Se um certo cenário pode dar suporte a uma abordagem de investigação ou não é uma questão empírica que pode ser respondida através da prática dos professores e alunos envolvidos. (SKOSMOSE, 2000, p.72)

O professor deverá atuar no sentido de que os alunos realmente possam reconhecer a situação problema a ser investigada e mobilizem ações em busca de interagir sobre o objeto investigado, familiarizando o educando com a situação, ou seja, criando um ambiente investigativo. Uma opção aqui é ouvir os alunos naquilo que gostariam de investigar em seu cotidiano e buscar mecanismos de adequação com os conteúdos propostos para aquele momento escolar. Assim feito, o passo inicial no processo de investigação em sala de aula está dado de forma firme e segura. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), nos chamam a atenção sobre a importância desta etapa:

> Essa fase, embora curta, é absolutamente crítica, dela dependendo todo o resto. O professor tem de garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade. O cuidado posto nesses momentos iniciais tem especial relevância quando os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com investigações. (PONTE et al, 2013, p. 26).

No entanto, reforçamos o fato de que é essencial o aceite dos alunos a investigação matemática, uma vez que sua atitude ativa irá determinar o sucesso ou não da atividade, por isso a importância desta fase inicial.

2.3.2 Realização da Investigação

A tarefa de investigar em sala de aula segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) o processo de realização da investigação matemática em sala de aula, pode seguir as mesmas etapas do processo de construção do conhecimento matemático por especialistas da área, com as devidas e necessárias adaptações. A figura seguinte mostra estas fases:

Figura 02 - Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar os dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

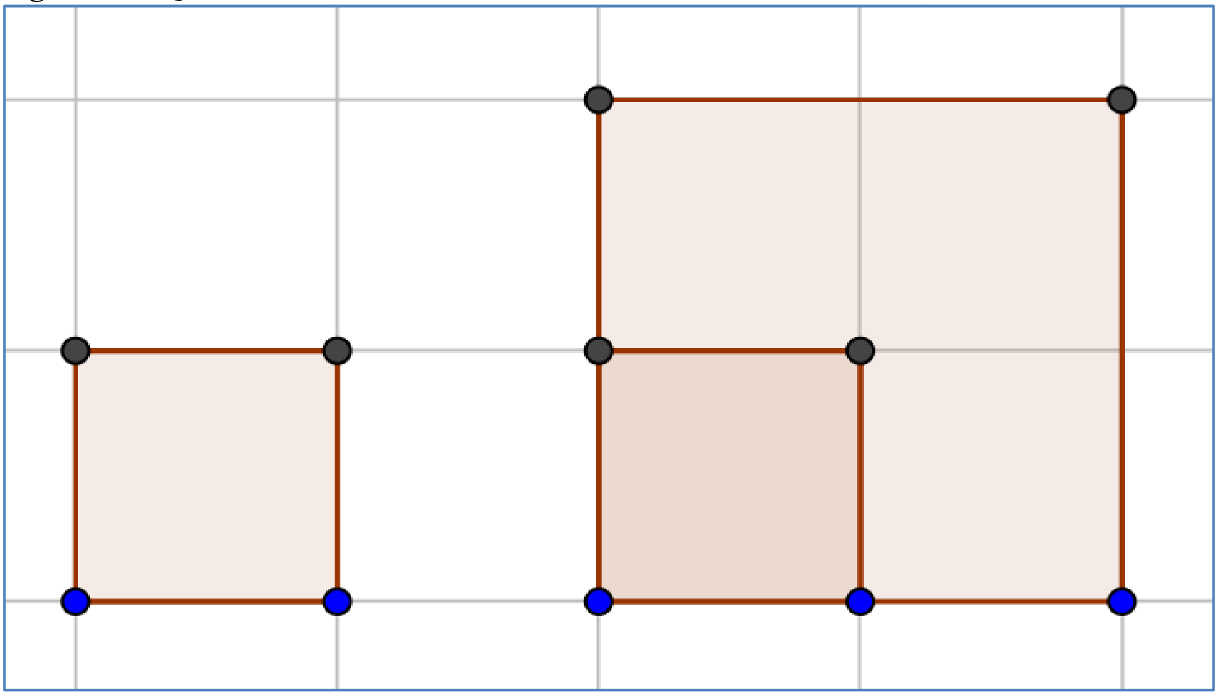
Fonte: Ponte et al (2013, p.21).

Será descrito a seguir as etapas que compõe esta fase do processo de investigação. Para tanto, utilizamos uma situação hipotética para mostrar e justificar cada etapa da investigação.

A atividade de investigação tem como objetivo explorar o conceito de função quadrática e soma dos termos de um P.A (progressão aritmética), a partir de uma situação concreta. Alguns requisitos são necessários, tais como, por exemplo, o professor já ter trabalhado o conceito de função e sua noção intuitiva, bem como o domínio sobre a caracterização da função de 1º grau e progressões aritméticas. Desse modo:

> *Com quatro palitos é possível formar um quadrado, com lado medindo 01 unidade. Porém, se juntarmos mais 06 palitos é possível formar um segundo quadrado, que, sobreposto ao primeiro, com lado medindo 02 unidades, e assim sucessivamente, conforme pode ser observado na figura abaixo.*

Figura 03 - Quadrados de lado medindo 1 e 2 unidades



Fonte: Elaborada pelo autor.

I- Obedecendo ao padrão exposto, quantos palitos serão necessários para montar o quadrado seguinte?

II- Quantos palitos serão utilizados para formar a figura, cujo o quadrado maior tem lado medindo n unidades?

2.3.2.1 Exploração e formulação de questões

Após a fase introdutória da tarefa a ser investigada se inicia o processo de investigação propriamente dito. Nesta etapa o professor irá oferecer condições do aluno explorar a situação possibilitando a formulação de questões, que poderão fundamentar futuras hipóteses. O trabalho em grupo, neste momento, poderá ser uma boa indicação, uma vez que possibilitará a troca de ideias dos alunos, podendo surgir diferentes pontos de vistas, o que levará a uma análise e interpretação dos dados mais profunda, levando a uma possível conjectura. Para Ponte et al (2013), esta fase inicial é de suma importância para a realização da investigação, uma vez que: "[...] essa etapa é decisiva para que depois os alunos comecem a formular questões e conjecturas. É nessa fase que se vão embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa". (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 30)

O professor deverá nortear a atividade, propondo situações em que os alunos explorem sem se distanciar do foco da atividade, não que seja proibido este distanciamento, mas em virtude dos conteúdos matemáticos que a atividade requer, se faz necessário prender a atenção do aluno para que o professor alcance os resultados almejados. Nesta fase poderá ser proposta aos alunos a exploração com material concreto manipulável ou através da geometria dinâmica, a construção de tabelas para visualizar o comportamento das variáveis, uma maquete, uma figura, etc. Dependendo da situação investigada, poderá ser propostas intervenções diferentes pelo professor.

Na situação hipotética que trabalhamos, uma possível forma de explorar é através da construção com palitos, por ser um material acessível; se desejar os alunos podem utilizar figuras construídas com régua e lápis ou no aplicativo Geogebra. O importante é que manipulem os dados em busca de um padrão que possa fundamentar uma conjectura.

2.3.2.2 Formulando e testando conjecturas

Nesta fase da investigação os alunos irão, após as percepções iniciais ocasionadas pela exploração da situação, formular e testar possíveis conjecturas sobre a resolução da situação problema. Neste sentido, Ponte et al (2013, p. 33), ensinam que "as conjecturas podem surgir ao aluno de diversas formas, por exemplo, por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas", daí a importância da fase anterior.

Caso os alunos apresentem dificuldades em formular uma conjectura, o professor poderá sugerir outras atividades complementares que poderão ajudar o aluno na elaboração de uma hipótese. Na situação ora investigada, o professor poderá sugerir a distribuição dos dados obtidos em uma tabela, como forma de visualizar o comportamento dos dados. Abaixo encontra-se um exemplo da ação do professor:

Figura 04 - Relação funcional entre a figura e o número de palitos

Figura	**Nº de Palitos**
01	4
02	10
03	18
04	28

Fonte: Elaborada pelo autor

Após a construção da tabela, o professor, por sua vez, poderá apresentar alguns questionamentos, que possam, dessa maneira, nortear as atividades dos alunos, como por exemplo:

a) O número de palitos na figura é uma função da posição da figura na sequência?
b) Ao passar de uma figura para a seguinte, quantos palitos são acrescidos?
c) Isso ocorre em todos os elementos da sequência?
d) O número de palitos cresce de forma linear? Justifique

Espera-se aqui que os alunos percebam a funcionalidade entre a posição da figura e o número de palitos necessário para a construção da mesma. O momento é oportuno para o professor explorar também a simbologia funcional de forma significativa, expressando por $\boldsymbol{p}$ o número de palitos necessários para a construção da figura de posição $\boldsymbol{n}$, podemos afirmar que $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$, ou seja, o numero de palitos depende da posição da figura.

Nesta fase será explorada a percepção dos alunos em relação à capacidade de notarem como os dados se relacionam e criarem uma conjectura plausível em torno da situação investigada. Através da análise dos dados da tabela e das figuras ou construções com palitos, os alunos poderão perceber que o número de palitos não crescem de forma linear, uma vez que as diferenças entre esses valores não é constante, o que garantiria a linearidade do crescimento dos dados e por consequência sua representação através de uma função de 1º grau do tipo $f(x) = a.x + b$, com a e b constantes e $a \neq 0$.

Através das manipulações é fácil perceber que o número de palitos da figura na posição **n** é obtido através do acréscimo de **2n+2** palitos. Basta notar que para completar a figura seguinte a partir da anterior basta acrescentar **2** palitos, um em cada vértice oposto do quadrado anterior, completando assim dois lados do quadrado seguinte, faltando assim apenas dois lados, que serão completos por **2n** palitos.

Caso os alunos não apresentem uma forma de organização dos dados, o professor poderá sugerir aos alunos a elaboração de mais uma tabela, onde o crescimento de cada quadrado é detalhado através da composição com os números de palitos do quadrado anterior. A figura seguinte, na qual **n** representa o número de palitos para uma determinada figura da sequência, serve para visualizar o comportamento dos dados e os ajudará também a reforçar as respostas dos questionamentos anteriores feito pelo professor e posterior elaboração da hipótese:

Figura 05 - Relação funcional entre a figura e o número de palitos que a compõe

Figura	n	Composição
01	04	----------
02	10	4+(2.2+2)=4+6
03	18	4+6+(2.3+2)=4+6+8
04	28	4+6+8+(2.4+2)=4+6+8+10
05	40	4+6+8+10+(2.5+2)=4+6+8+10+12
n	???	4+6+8+10+12+14+16+...+ (2n+2)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelos dados da tabela, pode-se conjecturar que o número de palitos para compor o quadrado na posição **n** será a soma dos **n** números pares a partir de 4. Com esta hipótese formada, basta agora achar uma fórmula fechada para a soma dos n números pares a partir de 4 e testar a hipótese para validá-la ou refutá-la.

A solução para a formula fechada (modelo matemático da hipótese) será através da soma dos termos de uma P.A finita, uma vez que 4+6+8+10+12+14+16+... + (2n+2) representa a soma de uma progressão aritmética finita. Neste ponto, o professor poderá aproveitar a oportunidade para trabalhar progressões aritméticas, caso a turma ainda não tenha visto este conteúdo. É um momento oportuno para dar significados a conceitos matemáticos.

A sequência (4, 6, 8, 10, 12, ..., 2n, 2n+2) é uma P.A (progressão aritmética) finita, onde o primeiro termo vale 4, a razão é 2 e o termo geral pode ser expresso por:

$$a_n = a_1 + (n-1).r = 2n + 2.$$

Da fórmula da soma S_n dos n termos de uma P.A, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,.\,n}{2} = \frac{(4 + 2n + 2).\,n}{2} \quad \rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^2 + 6}{2} \quad \rightarrow \quad S_n = n^2 + 3$$

Dessa forma, pode-se conjecturar que o número de palitos necessários para a construção do quadrado de lado **n** pode ser obtido pela expressão $S_n = n^2 + 3$.

2.3.2.3 Testes e reformulação

Nesta etapa os alunos irão testar as hipóteses desenvolvidas no processo de investigação objetivando validá-las ou, se necessário, aprimora-las ou até mesmo refutá-las. Na investigação em curso, uma forma possível de testar a hipótese e aplicar a fórmula deduzida, relacionando os resultados com as construções reais para cada caso testado e buscar contraexemplos possíveis. O papel do professor orientador das ações se faz essencial aqui.

2.3.2.4 Justificação e avaliação

Assim como na etapa anterior, a hipótese desenvolvida e testada precisa ser justificada matematicamente. É um ponto crucial da investigação, pois os alunos certamente irão apresentar dificuldades devido a ausência deste tipo de atividade em sala de aula. Dependendo da investigação desenvolvida, as abordagens para justificativa se diferenciam. Na investigação ora realizada, uma justificativa possível e provar que a formula desenvolvida é verdadeira via indução.

2.3.3 Discussão dos Resultados

A etapa final da investigação, onde os alunos irão expor os resultados relevantes, mostrar suas hipóteses desenvolvidas e justifica-las perante a classe. As estratégias desenvolvidas para o alcance dos resultados são expostas para os demais alunos. É o momento de troca de experiências, onde a capacidade de argumentação matemática e oral é desenvolvida.

3 GEOGEBRA E AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICA

A informática na educação matemática é uma ferramenta que tem se mostrado de grande eficiência no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que propicia ao aluno a construção de objetos concreto-abstratos de aprendizagem, a análise gráfica, manipulação de forma dinâmica de entes geométricos, entre outras possibilidades.

Neste capítulo, apresentam-se algumas atividades de investigação matemática utilizando o software Geogebra, como forma de justificar o presente trabalho, além de oferecer uma possibilidade de pesquisa e utilização destas atividades em sala de aula para os demais educadores matemáticos.

3.1 GEOGEBRA

Com as constantes transformações no mundo em termos de conhecimento e principalmente desenvolvimento tecnológico, entendemos que cada professor deve em um processo contínuo, manter-se atualizado. Aprimorando e inovando o ensino e aprendizagem dentro das salas de aula, os educadores atualmente, buscam novos procedimentos educacionais com softwares educacionais que podem ser incorporados como recursos pedagógicos.

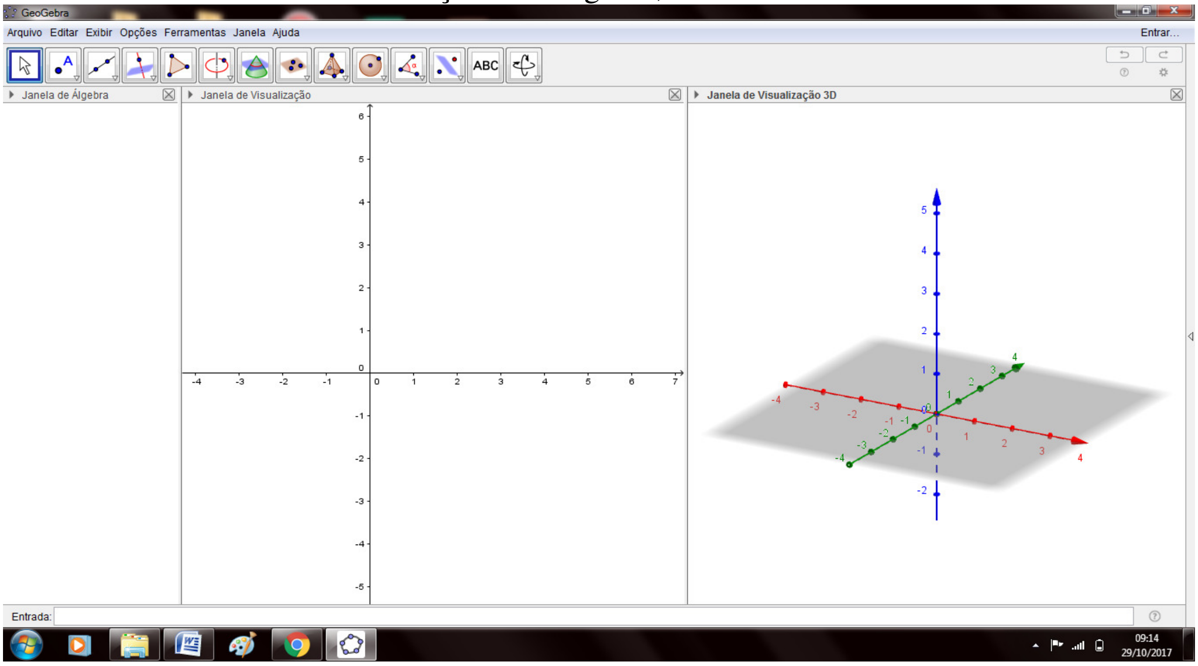
O software Geogebra teve sua primeira versão desenvolvida por Marcus Hohenwarter, na universidade de Salzburg, na Áustria, no ano de 2001. Sua interface permite construir entes geométricos de forma dinâmica, o que potencializa essa ferramenta como um instrumento auxiliar na sala de aula. Outro fator importante, é que o Geogebra permite investigar as relações geométricas e algébricas de um objeto, proporcionando a construção de conceitos matemáticos pelo aluno, o que faz deste aplicativo forte aliado do professor em aulas investigativas.

Sua obtenção é gratuita, bastando o interessado acessar a página oficial do software (www.geogebra.org), baixar e instalar o mesmo. Como o aplicativo é desenvolvido em plataforma Java, pode ser instalado em quase todos os computadores, tablets e celulares com dispositivo Android. Atualmente já está disponível versões a partir da 5.0, que alia em um só aplicativo janelas para trabalhar Geometria plana, denominada Janela 2D e ferramentas para trabalhar com construções tridimensionais; a denominada janela 3D.

No entanto, a versatilidade desta opção do aplicativo e que se pode construir em 3D, mas com visões projetadas em duas dimensões, fato que enriquece ainda mais as atividades de sala de aula e certamente possibilita uma melhor aprendizagem de conceitos e definições geométricas. Iremos utilizar neste trabalho a versão 5.0382.0.3D.

Abaixo demonstra-se a tela inicial do Geogebra 3D:

FIGURA 06 - Janela de Visualização do Geogebra, versão 5.0.382.0. 3D



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

Antes de propormos as atividades investigativas, iremos destacar alguns conceitos e postulados introdutórios da geometria plana e espacial, que servirão de suporte para que os alunos possam desenvolver com mais facilidade as tarefas propostas, dentre os quais destacamos mais especificamente:

- **Ponto**, **Reta** e **Plano** são conceitos primitivos, aceitos como verdadeiro, sem definições.

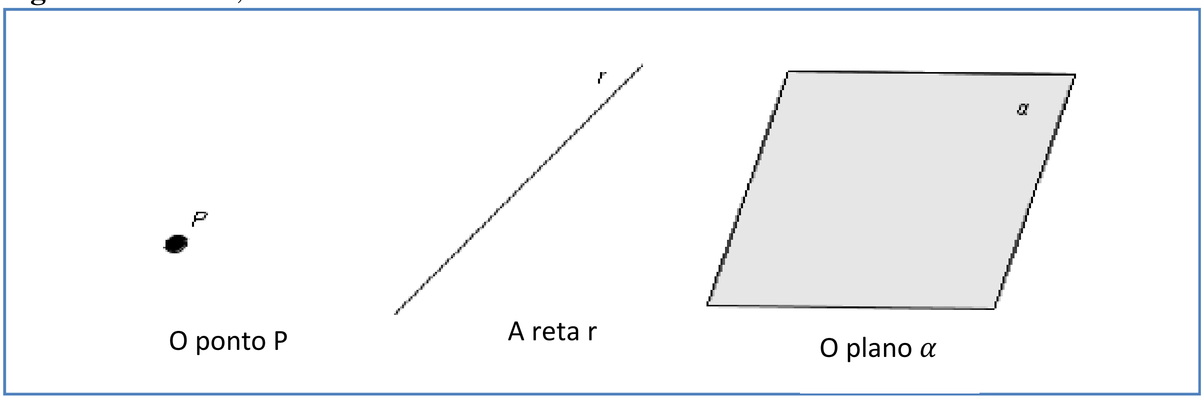
  Notação usual:

  Ponto: letras maiúsculas do nosso alfabeto.

  Reta: letras minúsculas do nosso alfabeto

  Plano: letras minúsculas do alfabeto grego.

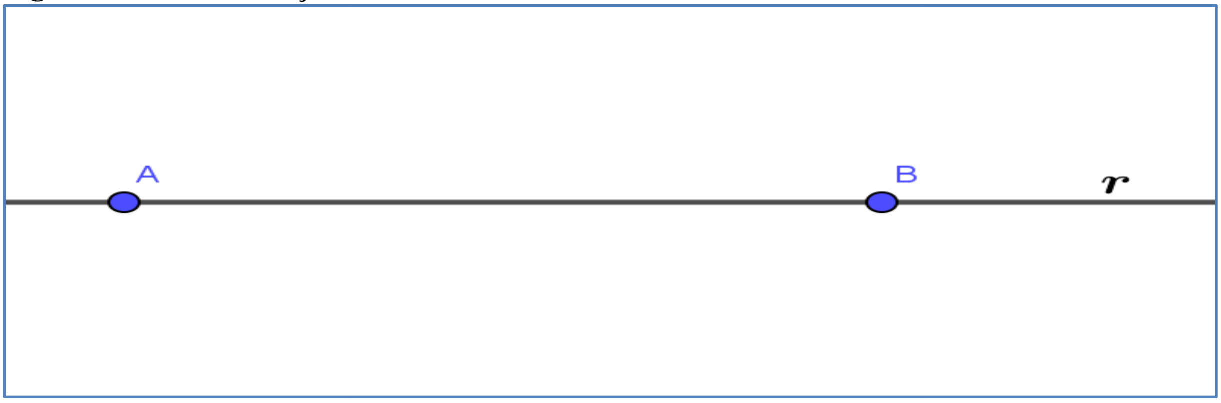
Figura 07 - Ponto, Reta e Plano



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

➢ **Postulado da determinação da reta**: Dois pontos distintos determinam uma única reta.

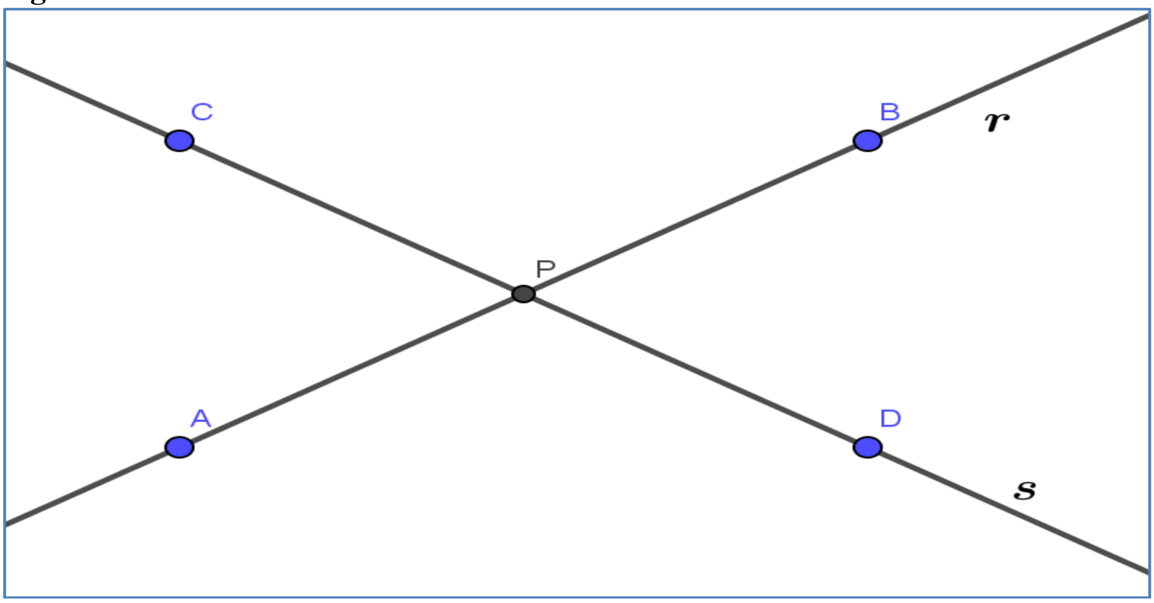
Figura 08 - Determinação de uma Reta



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

➢ **Retas concorrentes** – duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum.

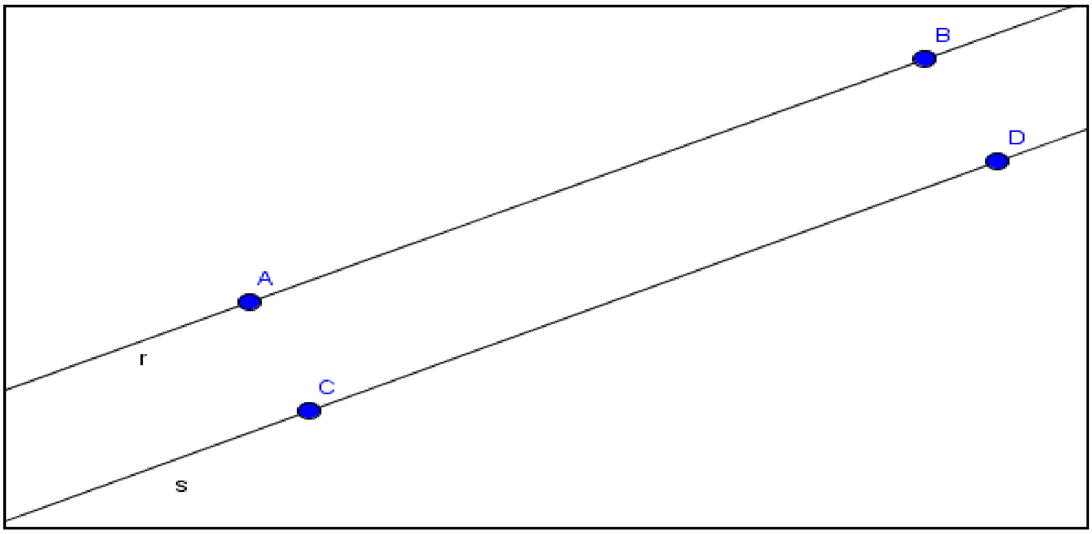
Figura 09 - Retas concorrentes



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

➢ **Retas paralelas** – duas retas são paralelas se, e somente se, são coincidentes ou são coplanares e não tem ponto em comum.

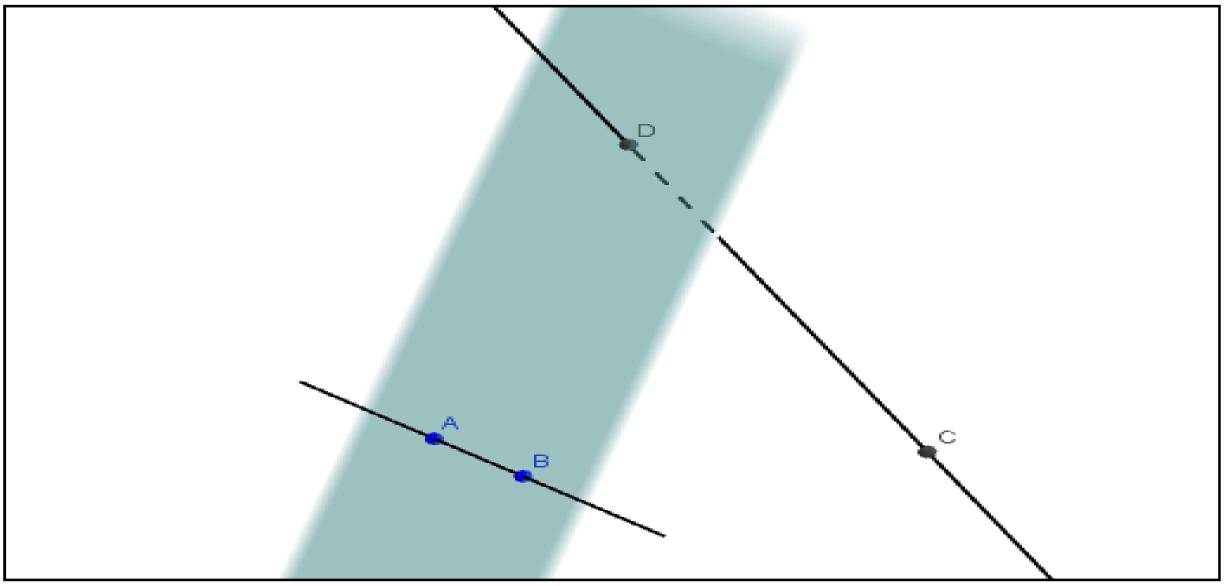
Figura 10 - Retas paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

- **Retas reversas** – Duas retas são chamadas reversas se, e somente se, não existe plano que as contenha.

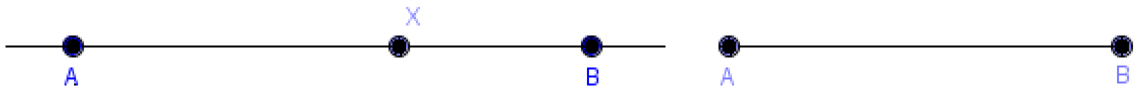
Figura 11 - Retas reversas



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

- **Segmento de reta** – Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

Figura 12 - Segmento de Reta

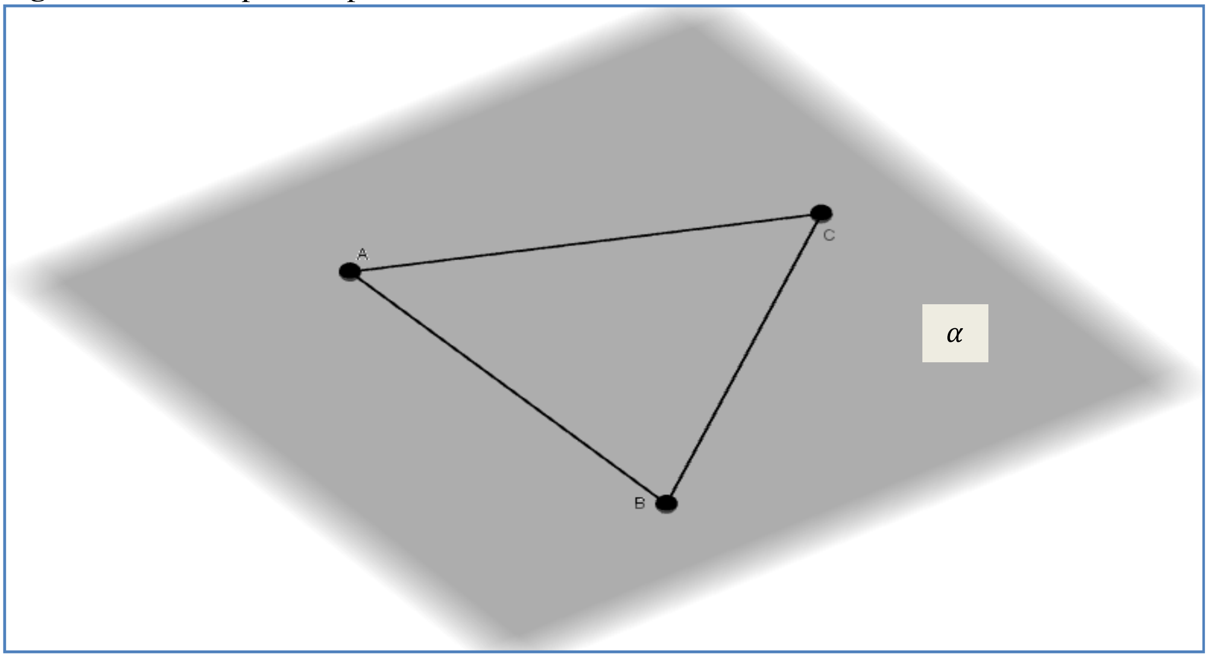


$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X | X \; está \; entre \; A \; e \; B\}$$

Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

- **Postulado da determinação do plano**: Três pontos distintos não colineares determinam um único plano.

Figura 13 - Plano por três pontos



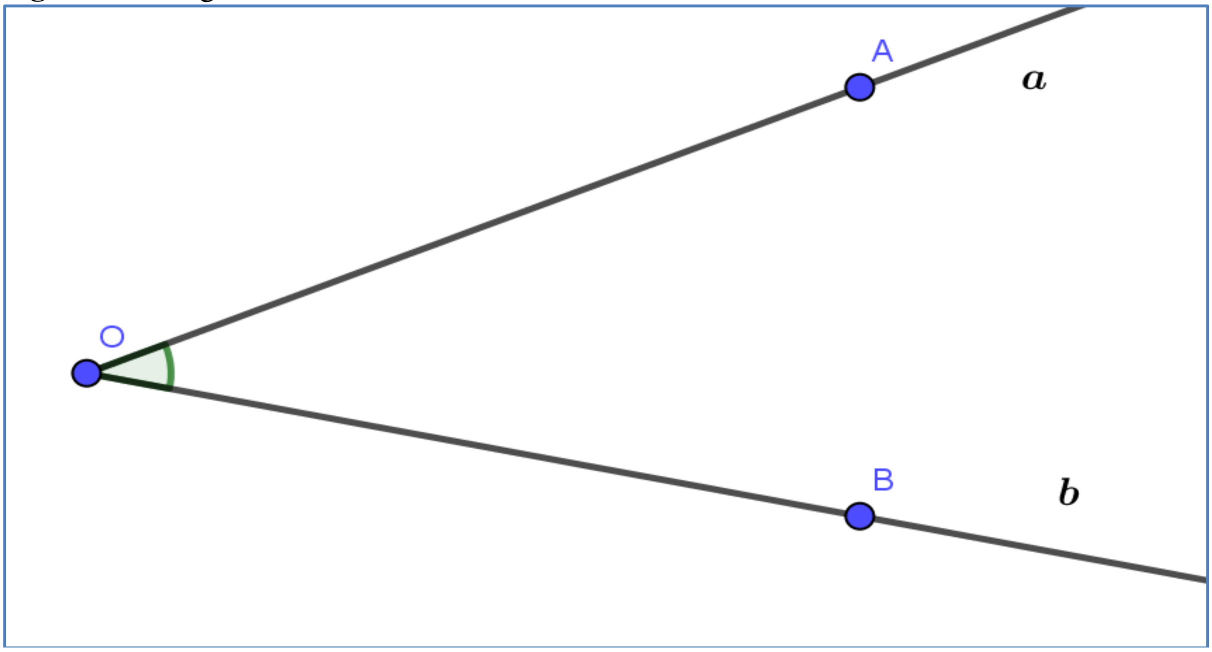
Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

Pode-se determinar um plano de quatro modos diferentes:

- Por três pontos não colineares
- Por uma reta e um ponto fora dela
- Por duas retas concorrentes
- Por duas retas paralelas e distintas.

- **Ângulo** – Chama-se ângulo a reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta.

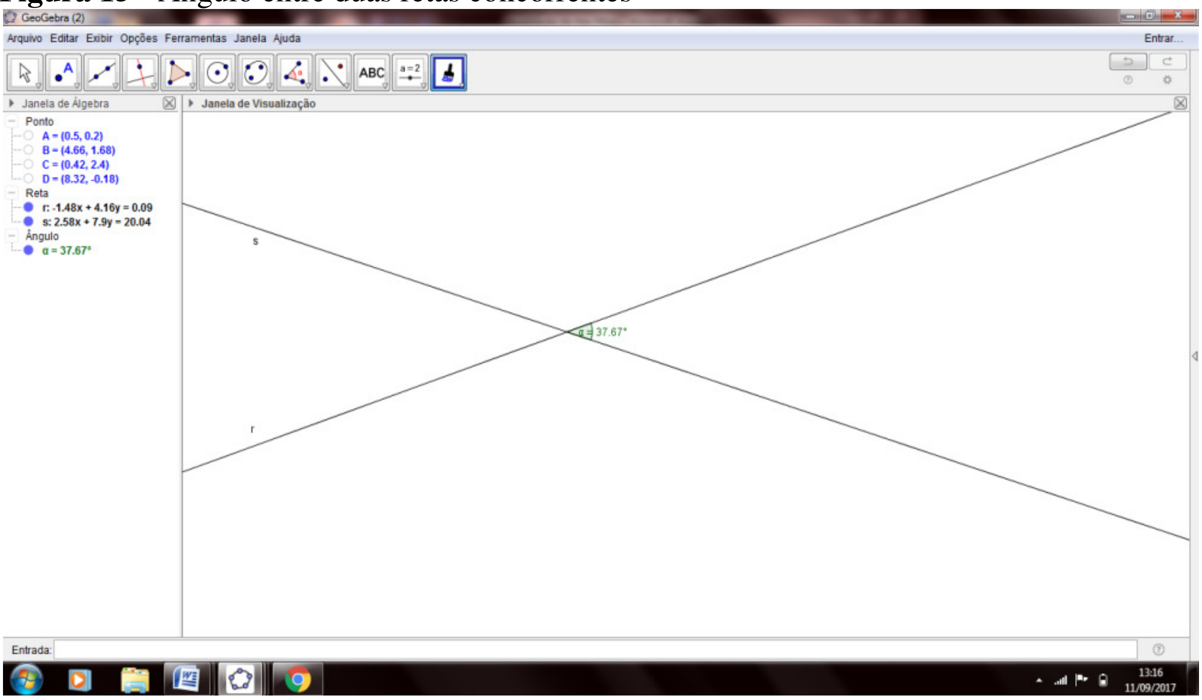
Figura 14 - Ângulo AOB



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

- **Ângulo entre duas retas concorrentes** – Duas retas r e s, que se interceptam num ponto P, determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre as retas r e s é definido como sendo o menor dos ângulos entre elas.

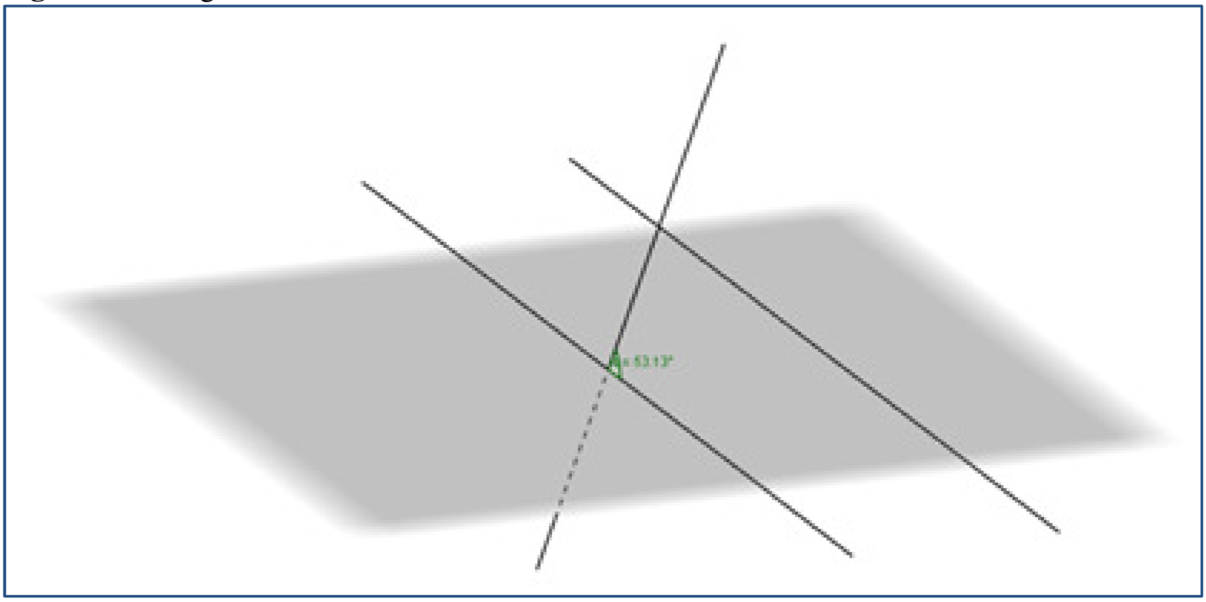
Figura 15 - Ângulo entre duas retas concorrentes



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra 3D

- **Ângulo entre duas retas reversas** – O ângulo entre duas retas reversas é o ângulo que uma delas forma com uma reta paralela à outra, interceptando a primeira.

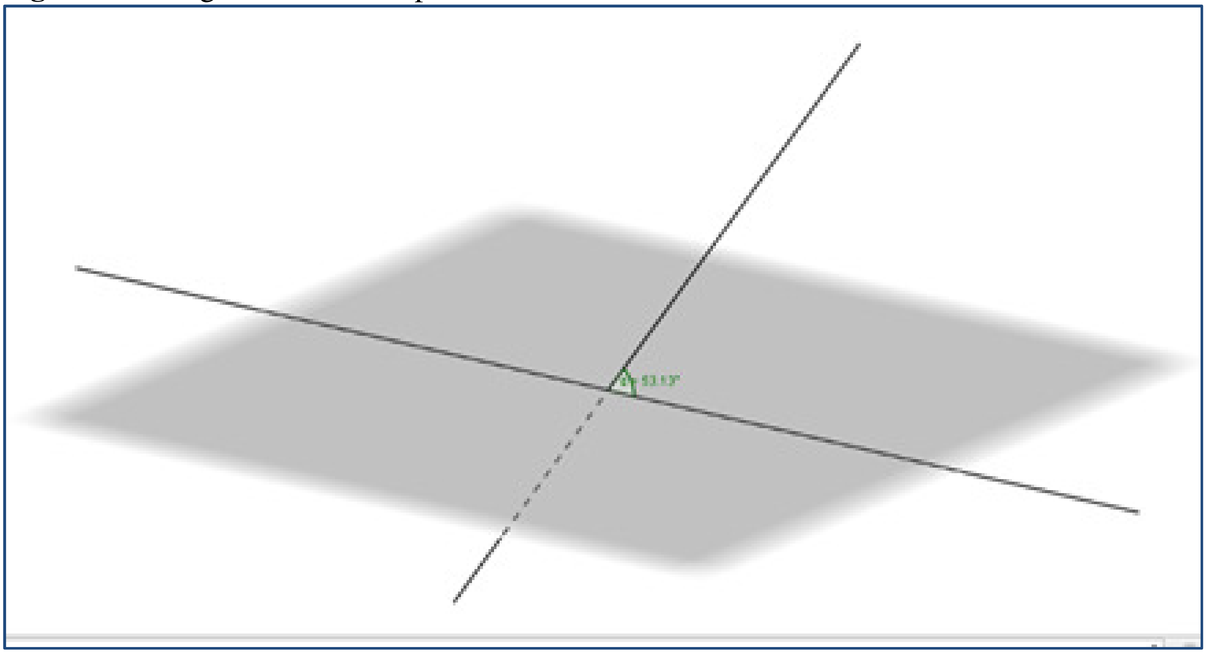
Figura 16 - Ângulo entre duas retas reversas



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra 3D

- **Ângulo entre reta e plano** – O ângulo entre uma reta e um plano é o ângulo agudo que a reta forma com sua projeção ortogonal sobre o plano.

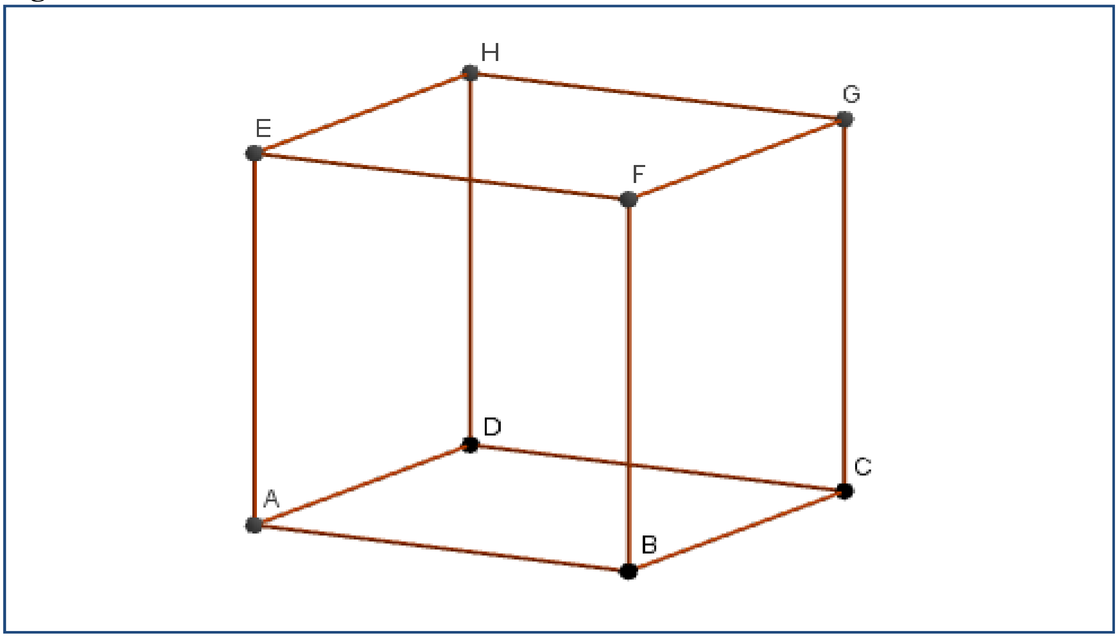
Figura 17 - Ângulo entre reta e plano



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra 3D

Para conceituarmos vértice, aresta e face, iremos utilizar a seguinte figura, que representa um poliedro regular:

Figura 18 - Vértices, arestas e faces em um cubo



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra 3D

- **Face** – O cubo ABCDEFGH tem 6 faces quadradas, duas a duas paralelas: ABCD//EFGH, BCFG//ADEH e ABEF//CDGH.
- **Arestas** – São os segmentos de reta que limitam cada face. No caso do cubo temos 12 arestas, cada qual representada por um lado de um quadrado que forma uma face: AB, BC, CD, DA são as arestas da base, formada pelo quadrado ABCD, por exemplo.
- **Vértice** – O cubo ABCDEFGH tem 8 vértices, representados pelos pontos A, B, C, D, E, F, G e H, que representam os pontos de encontro das arestas.

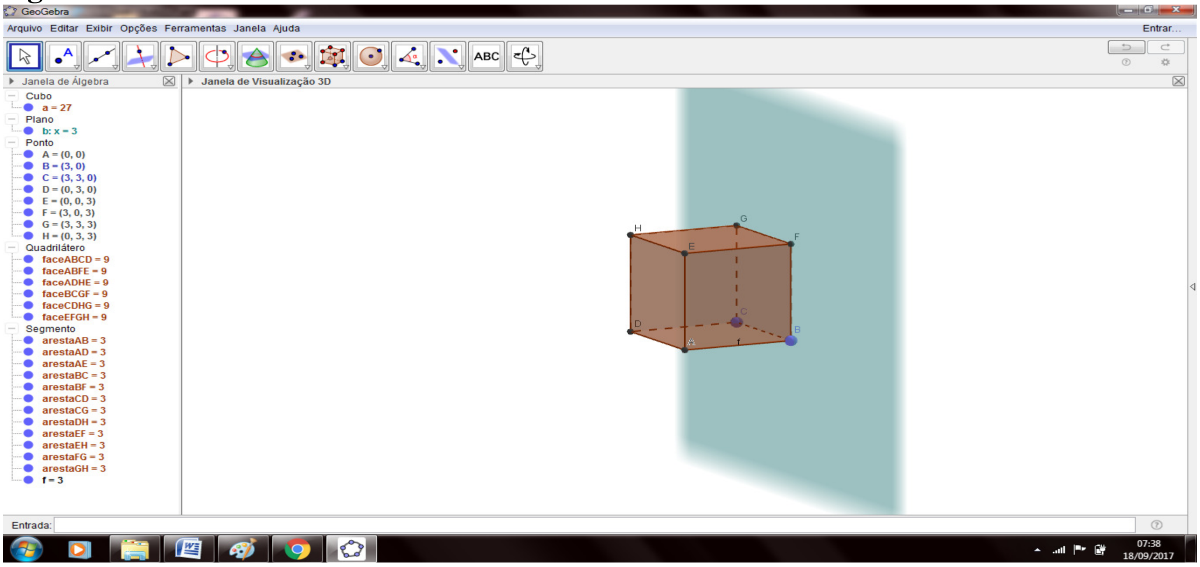
Iniciaremos as atividades investigativas explorando retas e ângulos em um poliedro regular, mas especificamente, um cubo.

Poliedros são sólidos geométricos limitados por polígonos, que por sua vez, são figuras geométricas planas limitadas por segmentos de reta. Um poliedro é dito regular quando obedece às três exigências seguintes:

1) É convexo;
2) É também poliedro de Platão;
3) Os polígonos que o formam, chamados de face, são regulares e congruentes.

Um **poliedro é convexo** quando está inteiramente contido em um dos dois semiespaços determinados por qualquer uma de suas faces.

Figura 19 - Poliedro convexo



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra 3D

Os **poliedros de Platão** são aqueles que possuem as seguintes propriedades:

1) Todas as faces apresentam o mesmo número de arestas;
2) Todos os vértices possuem o mesmo número de aresta, isto é, se um vértice é a extremidade de três arestas, por exemplo, então todos serão também;
3) É convexo;
4) Seja o número de faces igual a F, de aresta igual a A e vértice igual a V, então vale a seguinte relação, chamada de relação de Euler: **V – A + F = 2**

3.2 INVESTIGANDO RETAS E ÂNGULOS NO ESPAÇO

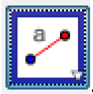
Esta atividade trabalha alguns conceitos introdutórios de geometria espacial, mais especificamente, o conceito de ângulos entre retas, retas paralelas, retas perpendiculares e retas reversas.

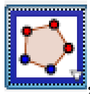
Objetivo da Atividade: Tal atividade tem como principal objetivo explorar de forma interativa o conceito de ângulos entre retas, além de explorar paralelismo e perpendicularidade.

Desenvolvimento Da Atividade:

TAREFA 01: Explorando ângulos entre retas no cubo

Esta primeira tarefa explora os ângulo entre retas de forma significativa, pois a construção em 3D possibilita a interação do aluno sobre os entes geométricos analisados, possibilitando uma exploração mais minuciosa sobre o tema.

=> T.1.1 – Na janela 2D construa um segmento com comprimento fixo de 5 unidades, usando o comando SEGMENTO COM COMPRIMENTO FIXO .

=> T.1.2 – Acione o comando POLÍGONO REGULAR , e a partir do segmento anterior construa um quadrilátero regular ABCD.

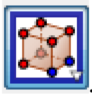
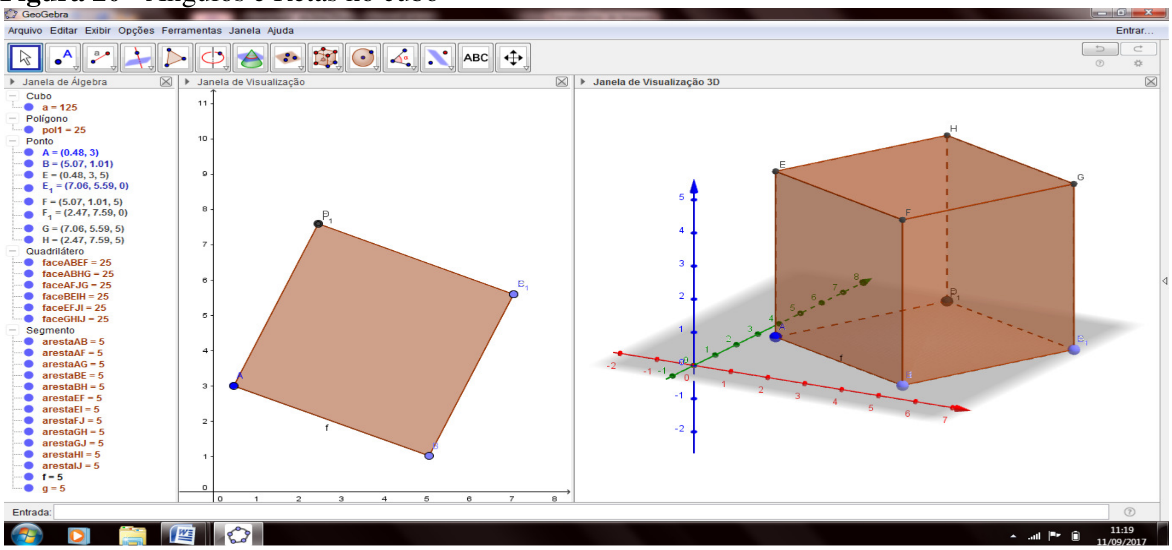
=> T.1.3 – Na janela 3D acione o comando CUBO , e construa um cubo de aresta medindo 5 unidades a partir do segmento AB. A figura abaixo mostra esta etapa de construção.

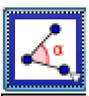
Figura 20 - Ângulos e Retas no cubo



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra 3D

=> T.1.4 – Quantas arestas partem de cada vértice? Identifique as arestas que partem do vértice E.

=> T.1.5 – Construa as retas suportes das arestas AB, BC, DH e GH. Identifique os ângulos entre as retas suportes das arestas AB e BC, e das arestas DH e GH, respectivamente.

=> T.1.6 – Compare seus resultados com os valores oferecidos pelo Geogebra. Para isso acione o comando ÂNGULO  e clique sobre os pares de retas que queira determinar o ângulo. Na figura 19, temos a identificação das retas suportes solicitada anteriormente.

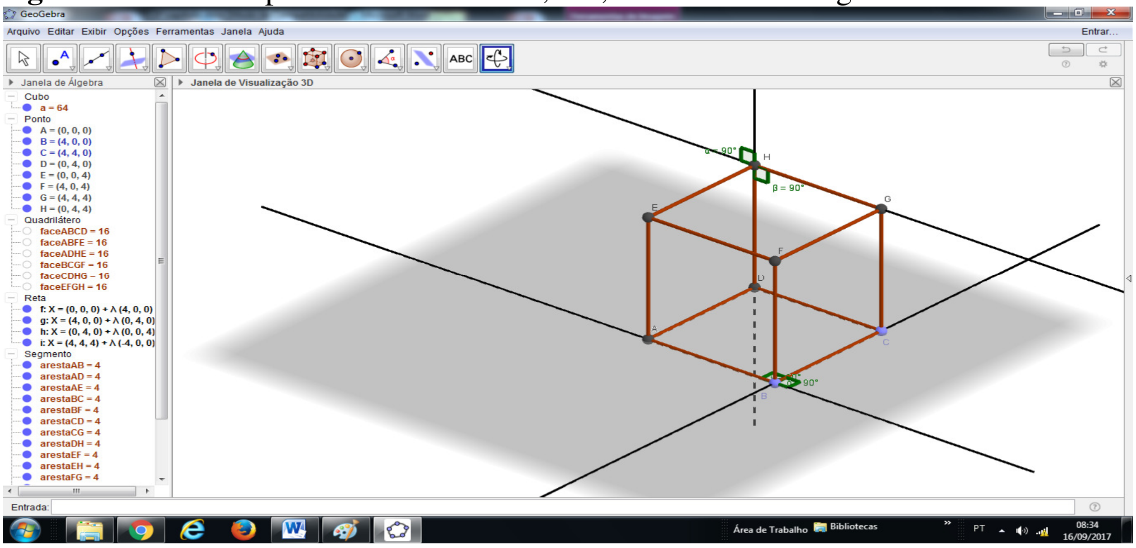
=> T.1.7 – Como você classifica as retas AB e BC, em relação à posição e ao ângulo entre elas?

=> T.1.8 – E as retas AB e GH?

A tarefa 01 envolve a construção de diversos conceitos da geometria espacial, relacionados a ângulos e retas no espaço, o que podemos visualizar a partir das chamadas noções primitivas da geometria (ponto, reta e plano). Esta tarefa tem como instrumento auxiliar um cubo construído no Geogebra 3D, o que provavelmente ajudará o educando a desenvolver os conceitos já mencionados neste capítulo através da percepção da posição relativa entre retas e de ângulos formados entre elas.

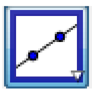
Portanto, para que o investigador (aluno) alcance seus objetivos, ele precisa recordar no mínimo as definições de posições relativas de duas retas. Assim sendo, certamente perceberão com mais facilidade o perpendicularismo entre todas as faces do cubo no decorrer das atividades investigadas, o que tem como fundamento o fato de que as arestas são todas perpendiculares. A figura seguinte mostra a solução esperada após a análise dos alunos.

Figura 21 - Retas suportes das arestas AB, BC, DH e GH e os ângulos entre elas



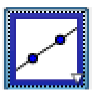
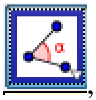
Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra 3D

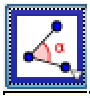
Utilizando a construção da figura 20, vamos explorar o conceito de reta, plano e diagonal no cubo, para isso propõem-se as tarefas seguintes:

=> T.1.9 – Usando o comando SEGMENTO , construa um segmento unindo os vértices F e H. O que esse segmento representa? Justifique.

=> T.1.10 – Existem outras diagonais nas faces do cubo. Identifique-as.

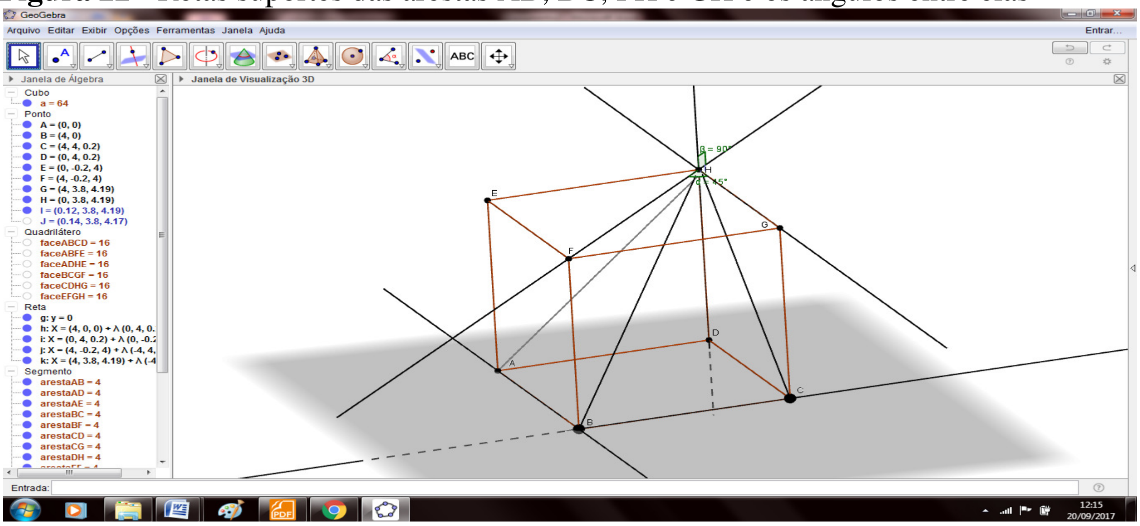
=> T.1.11 – Quantas diagonais são possíveis traçar a partir de cada vértice do cubo?

=> T.1.12 – Através do comando RETA , construa a reta suporte da diagonal FH. Determine os valores dos ângulos formados entre retas FH e GH e FH e DH, respectivamente, sem utilizar o comando ÂNGULO , do Geogebra. Descreva qual o procedimento adotado para obtenção dos ângulos solicitados.

=> T.1.13 – Acione a ferramenta ÂNGULO , e determine a medida dos ângulos solicitados acima. Sua hipótese anterior é verdadeira?

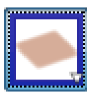
Na tarefa 01, de T.1.9 a T1,13, damos continuidade à construção de situações geométricas no cubo, a fim de fazer com que os educandos possam perceber e formular novas conjecturas sobre ângulos formados a partir das diagonais da face de um cubo, assim como também, o números de diagonais que serão possíveis se traçar de cada vértice do mesmo, conforme ilustra a figura 21 construída no GeoGebra 3D, utilizada para confirmar as hipótese levantadas no decorrer da construção deste ente geométrico, através de uma investigação empírica e dedutiva, a fim de confrontar o conhecimento prévio dos alunos com as ideias estabelecias em comum quanto às suas realizações.

Figura 22 - Retas suportes das arestas AB, BC, FH e GH e os ângulos entre elas



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra 3D

TAREFA 02: Explorando retas reversas e planos no cubo

=> T.2.1 – Ainda utilizando o cubo construído anteriormente, construa o plano formado pela face ABCD, do cubo. Para tanto acione o comando PLANO  no Geogebra. Este plano contém as retas AB e CD? Quais as possibilidades para a construção deste plano oferecida pelo Geogebra?

=> T.2.2 – É possível traçar um plano que contenha as retas AH e HG?

=> T.2.3 – Qual a intersecção dos planos anteriores, um ponto, uma reta ou plano?

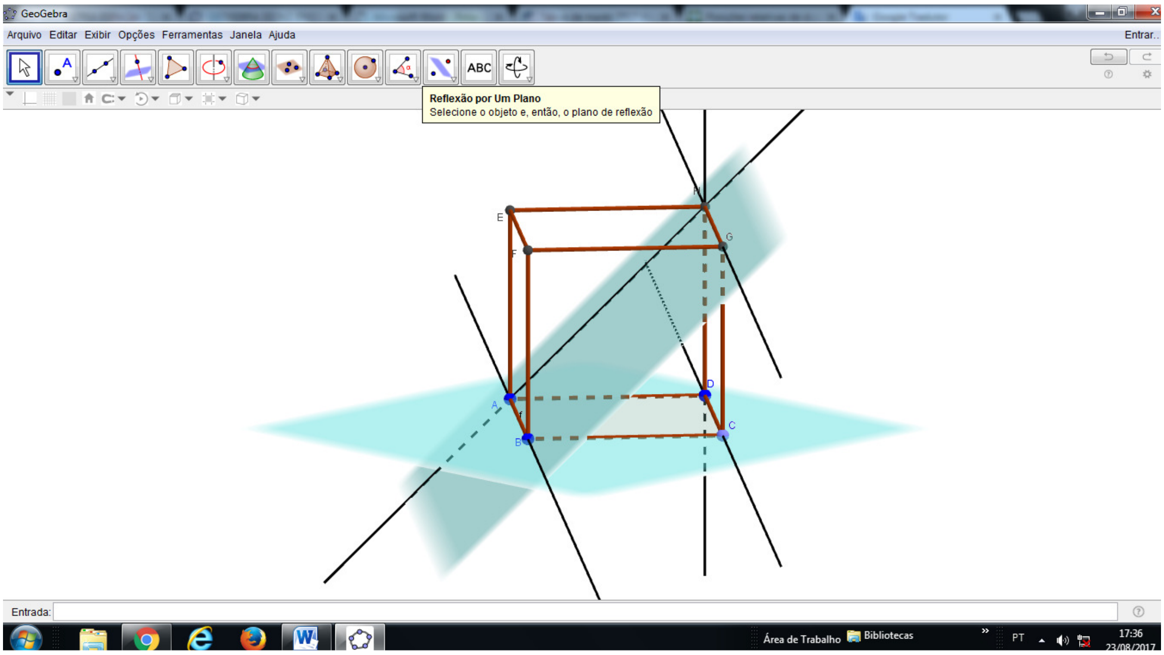
=> T.2.4 – Determine o ângulo entre as retas AB e DH

=> T.2.5 – É possível traçar um plano que contenha as retas AB e HD?

=> T.2.6 – Identifique os pares de retas em que a propriedade anterior ocorre. Como se classificam essas retas quanto a posição entre elas?

Na tarefa 02, mais especificamente em T.2.1, busca-se instigar o educando a perceber os conceitos fundamentais de se determinar um plano, já na tarefa T.2.2, o aluno deverá perceber a impossibilidade de se traçar um plano, visto que o mesmo já deve ter um conhecimento prévio a respeito dos quatro modos diferentes de se determinar um plano. Por outro lado, ainda na nesta tarefa, através da construção de planos, busca-se explorar os conceitos de posições relativas à dois planos, conforme mostra a FIGURA 19.

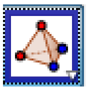
Figura 23 - Posições entre Retas e planos no cubo



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra 3D

A tarefa 03 será desenvolvida sobre a construção de um tetraedro, que nada mais é do que um sólido geométrico que possui como face, quatro triângulos equiláteros, também conhecido como pirâmide de base triangular regular.

TAREFA 03: Explorando posições entre retas e planos no Tetraedro

=> T.3.1 – Usando o comando TETRAEDRO REGULAR, da barra de ferramentas, construa um Tetraedro ABCD, de vértice D.

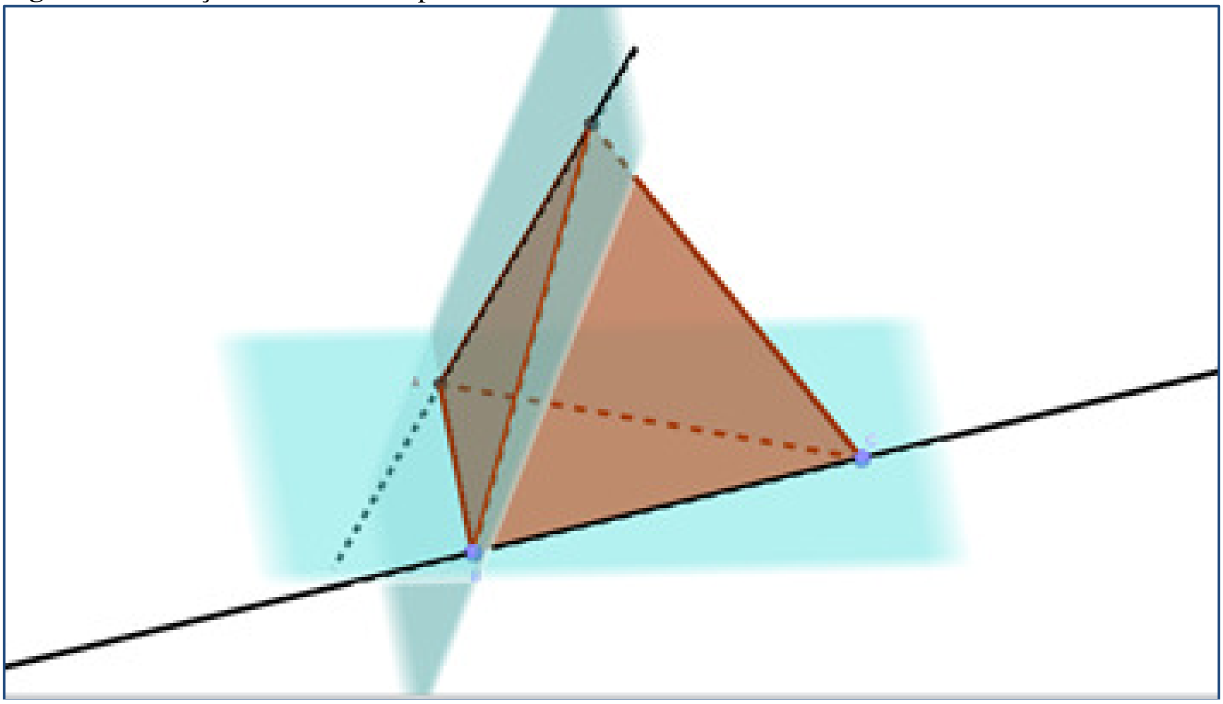
=> T.3.2 – Identifique 2 pares de retas reversas. Descreva o procedimento adotado para determinar o ângulo solicitado.

=> T.3.3 – Determine os ângulos entre as retas anteriores.

=> T.3.3 – Trace os planos que contenha as faces ABC e ABD. Identifique sem o uso do Geogebra o ângulo entre estes planos? Descreva o procedimento adotado para determinar o ângulo solicitado.

=> T.3.4 – Compare sua resposta da questão anterior com o resultado oferecido pelo Geogebra.

Figura 24 - Posições entre Retas e planos no tetraedro



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra 3D

Na tarefa 03, apresentamos uma investigação matemática com o auxílio do Geogebra 3D, enfocando na construção de retas e planos em um tetraedro regular, com intuito de que os alunos possam construir de modo significativo os conceitos relativos de duas retas, em especial, retas reversas e ângulo entre elas, e a partir de então apropriar-se com afinco de conjecturas relevantes, e com isso criar seus próprios conceitos , reformulando uma nova propriedade a fim de justificar suas hipóteses. Na figura 23, evidenciamos com clareza as indagações feitas em T.3.2 e T.3.3.

As tarefas T.1 a T.3 podem ser exploradas pelo professor utilizando outros entes geométricos, como por exemplo, paralelepípedos, prismas não regulares, como forma de investigar também as propriedades destes objetos e suas relações.

3.3 INVESTIGANDO O VOLUME DE PIRÂMIDES E PRISMAS

Esta atividade pode ser desenvolvida tanto por alunos do 1º ano, quanto do 3º ano do ensino médio, dependendo do professor adaptá-la para a preparação de translação de gráfico de funções (1º ano), como para a construção do conceito de isometrias no plano, em geometria analítica (3º ano).

Objetivo da Atividade: explorar a relação entre o volume de uma pirâmide e o volume do prisma convexo cuja base e a altura coincidam com a base da pirâmide, ou seja, pirâmide inscrita no prisma.

Desenvolvimento da atividade:

TAREFA 04: Construir uma pirâmide inscrita em um Cubo e investigar o volume do mesmo e sua relação com a altura.

=> T.4.1 – Inserir na barra de comando do Geogebra 3D dois pontos $\boldsymbol{A}$, a origem, e $\boldsymbol{B}$ um ponto qualquer sobre o eixo 0x.

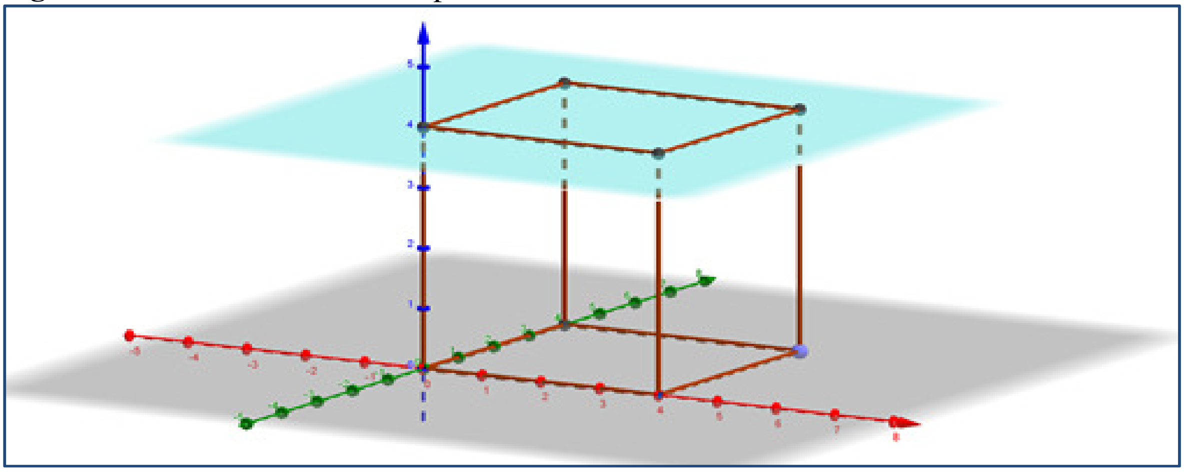
=> T.4.2 – Construir o segmento AB.

=> T.4.3 – Na janela 3D, acionar o comando que permite a construção de um cubo a partir de uma aresta, no caso o segmento AB.

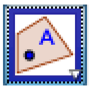
=> T.4.4 – Inserir um plano **z** que passe pelos pontos EFG, da face do cubo.

- ✓ Qual a distância deste plano a aresta AB do Cubo?
- ✓ Qual a distância deste plano a aresta BC do Cubo?
- ✓ Este plano é paralelo a face ABCD do cubo?
- ✓ Qualquer ponto plano **z** possui a mesma distância do plano que contém a face ABCD?

Figura 25 - Cubo de aresta AB e plano z



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

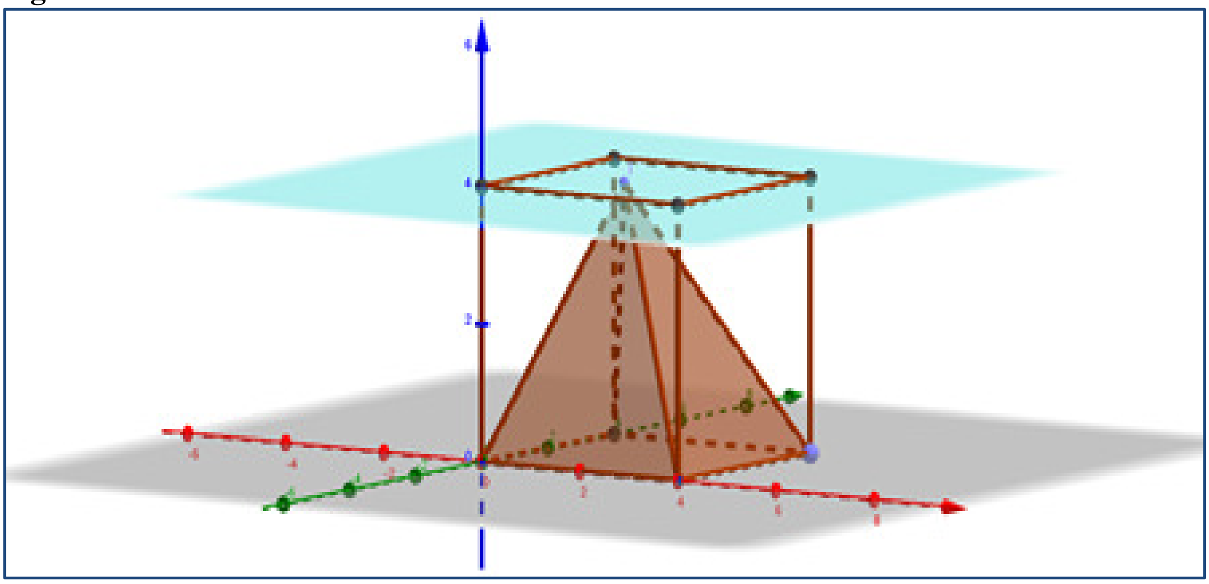
=> T.4.5 – Inserir um ponto I na face oposta a face ABCD, usando o comando PONTO EM OBJETO , na barra de ferramentas.

=> T.4.6 – Construir a pirâmide de Base ABCDI

=> T.4.7 – Na janela de álgebra ocultar as faces do Cubo.

A figura abaixo mostra a pirâmide ABCDI inscrita no cubo:

Figura 26 - Pirâmide inscrita em um Cubo



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

Ao construirmos um prisma qualquer o Geogebra 3D fornece de imediato seu volume na janela de álgebra, representando por uma letra minúscula o prisma e ao lado seu respectivo volume. Na situação ora trabalhada temos:

Para o cubo → a = 64 u³, já que AB= 4 u

Para a pirâmide → b= 21.333 u³

=> T.4.8 – Ao movimentar o ponto I sobre a face EFGH do cubo, o que acontece com o volume das diferentes pirâmides que irão surgir? Justifique.

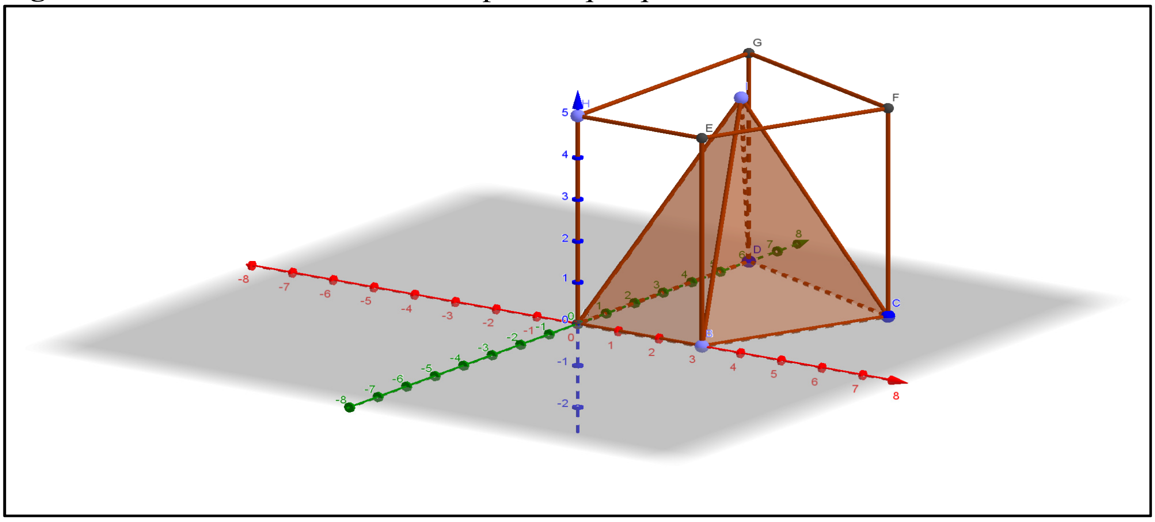
=> T.4.9 – Inserir na barra de comando o parâmetro $v = \frac{b}{a}$, que compara o volume da pirâmide com o volume do cubo.

- ✓ Qual o valor encontrado?
- ✓ Esse valor se altera ao movimentarmos o ponto I sobre a face EFGH?
- ✓ Qual sua hipótese sobre o que acontece?

As tarefas anteriormente desenvolvidas farão com que os alunos percebam, de forma interativa, a relação entre o volume, a área da base e altura de um prisma, uma vez que a exploração do volume de diferentes prismas, obtidos somente pela variação da posição do vértice do mesmo no plano paralelo a base, fará com que se perceba tal relação.

TAREFA 05: Refaça a atividade anterior para um prisma qualquer e uma pirâmide inscrita neste prisma, a hipótese anterior se mantém?

Figura 27 - Pirâmide inscrita em um prisma qualquer



Fonte: Elaborada pelo autor no Geogebra 3D

Nesta tarefa, o aluno deverá perceber que a hipótese construída anteriormente, de que o volume permanece inalterado independente da posição do vértice da pirâmide, não se sustenta, uma vez que, num prisma irregular poderá haver variação da altura, ocasionando uma variação no volume da pirâmide inscrita.

3.4 INVESTIGANDO A RELAÇÃO ENTRE VOLUME E OS ELEMENTOS DE CONES SEMELHANTES

A presente atividade se constitui em construir cones semelhantes e investigar de forma interativa a relação entre as alturas, os raios e os volumes dos respectivos cones, obtidos através da secção de planos paralelos a base do cone original, podendo ser desenvolvida por turmas do 2º ou 3º anos do ensino médio.

Objetivo da atividade: explorar a relação entre o volume e altura de cones e pirâmides semelhantes, onde são obtidos sólidos semelhantes através da intersecção de planos paralelos as bases.

Desenvolvimento da Atividade:

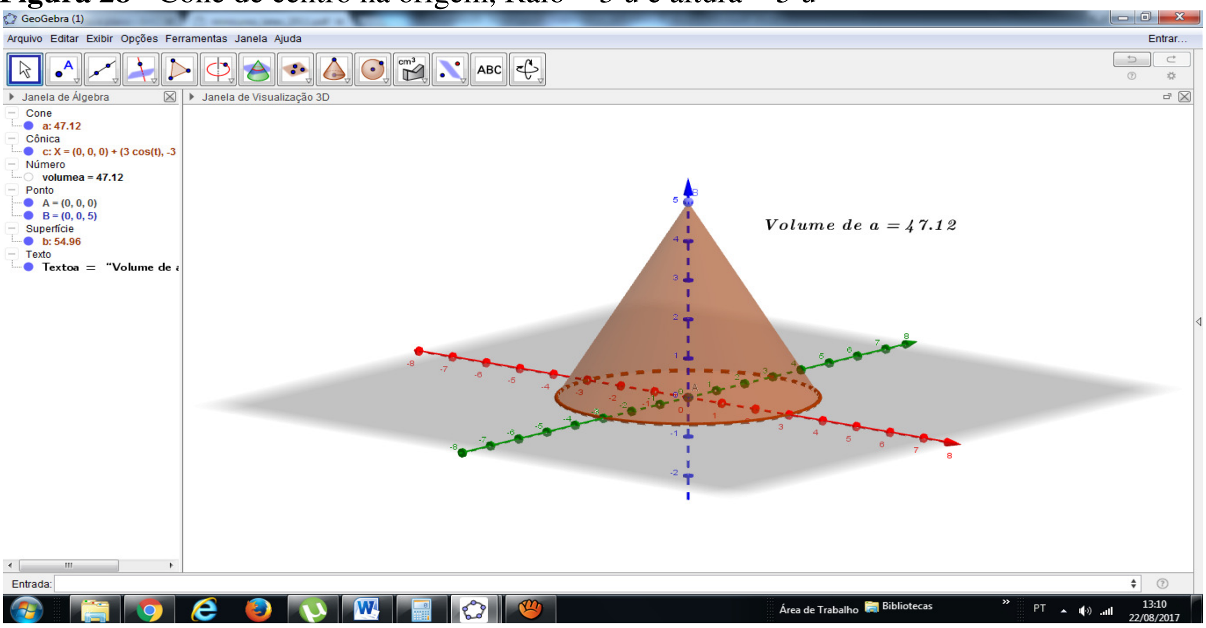
TAREFA 06: Construir dois cones semelhantes e investigar a relação entre as alturas, os raios e os volumes dos mesmos.

=> T.6.1 – No geogebra 3D, insira dois pontos A e B, sendo A a origem e B um ponto qualquer no eixo z (Vertical).

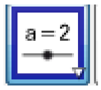
=> T.6.2 – Utilizando o comando CONE , da barra de ferramentas construa um cone com centro da base em A, com raio R = 3 unidades e vértice em B.

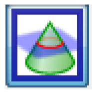
=> T.6.3 – Determine o volume do cone anterior usando o Comando VOLUME . Afigura abaixo mostra esta etapa da atividade:

Figura 28 - Cone de centro na origem, Raio = 3 u e altura = 5 u



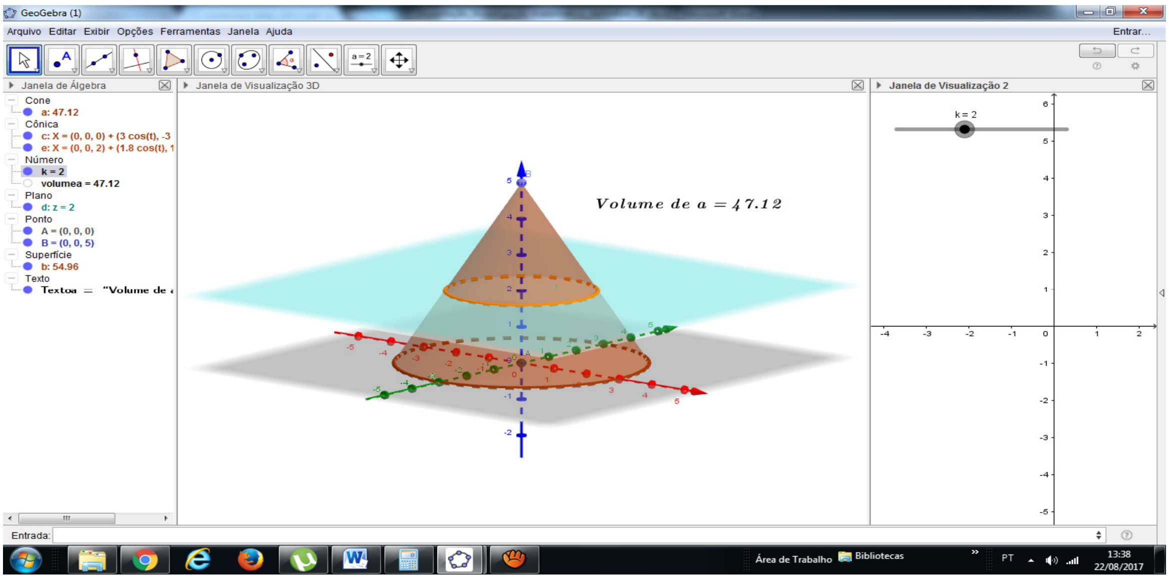
Fonte: Elaborado pelo autor, no Geogebra 3D

=> T.6.4 – Inserir um plano z = k, paralelo ao plano que contem a base do cone. Para isso crie um CONTROLE DISLIZANTE PARA k, usando o comando , adote um intervalo de variação de 0 a 1 e um incremento de 01 unidade. Movimente o CONTROLE DESLIZANTE. O que o corre?

=> T.6.5 – Ativar o comando INTERSEÇÃO DE DUAS SUPERFÍCIES , na barra de ferramentas.

Determinar a interseção do plano z = k com o cone, conforme figura abaixo:

Figura 29 - Intersecção do plano z = 3 com o cone



Fonte: Elaborado pelo autor, no Geogebra 3D

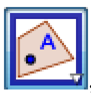
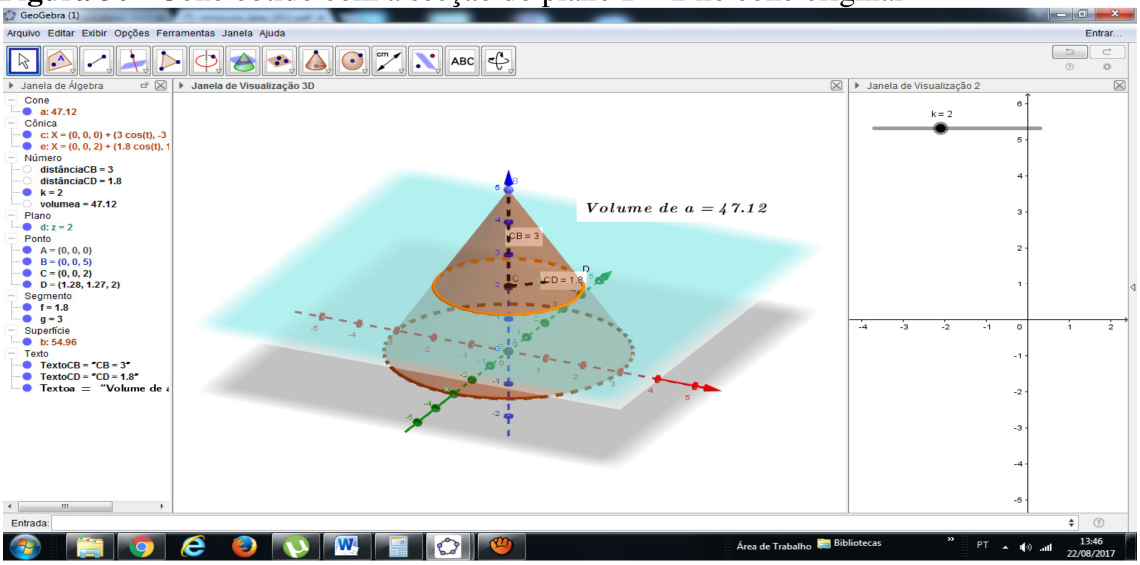
- ✓ Qual a figura geométrica obtida com interseção do cone com o plano z = k?
- ✓ Com a intersecção, foi gerado um cone acima do plano z = 2. Este cone é semelhante ao cone original? Justifique
- ✓ Determine o ponto C, intersecção do plano z = k como o eixo Z. O que ela representa em relação ao cone menor?
- ✓ Usando a ferramenta PONTO EM OBJETO , marque um ponto D sobre o circulo que representa a intersecção do plano *z* = 2 e o cone maior, base do cone menor.
- ✓ Trace os segmentos CB e CD. A figura abaixo mostra as construções anteriores.

Figura 30 - Cone obtido com a secção do plano $z = 2$ no cone original



Fonte: Elaborador pelo autor no Geogebra 3D

- ✓ Considere H=AB a altura do cone maior e h=CB a altura do cone menor. Insira uma tabela e na célula A1 calcule o valor da razão $\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{H}}$.
- ✓ Sendo os dois cones semelhantes, como você procederia para determinar a medida do raio do cone menor?

Espera-se aqui que o aluno perceba que a semelhança entre os cones irá gerar segmentos homólogos proporcionais. Dessa forma, chamando de R o raio do cone maior e r o raio do cone menor, deverão apresentar:

$$\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{H}} = \mathbf{0,6} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}} \rightarrow 0{,}6 = \frac{r}{3} \rightarrow \boldsymbol{r} = \mathbf{1,8}$$

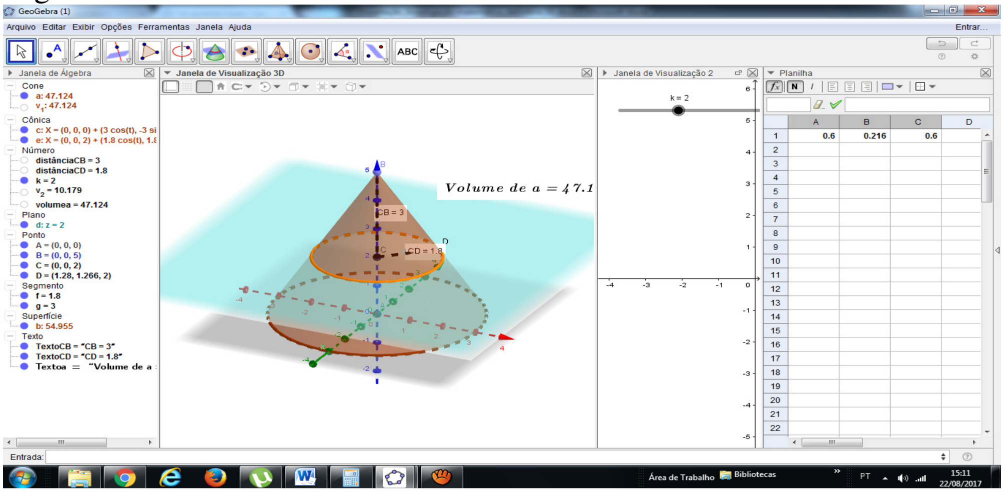
- ✓ Insira na barra de comandos a fórmula **V_2 = [(pi * CD²)*CB/3]** . Qual o valor obtido? O que significa este valor?
- ✓ Varie o controle deslizante no intervalo dado. O que acontece com V_2? Justifique.
- ✓ Faça V_1 o volume do cone maior e $\mathbf{V_2}$ o volume do cone menor. Insira na célula B1 da tabela a razão $\frac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{V_1}}$. Qual o valor obtido?
- ✓ O que acontece com a razão $\frac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{V_1}}$ ao movimentarmos o controle deslizante?
- ✓ Investigues uma relação entre as razões $\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{H}}$, $\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}$ e $\frac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{V_1}}$.
- ✓ Qual sua hipótese sobre o fato anterior?

Espera-se aqui que os alunos possam perceber através da exploração dos dados da tabela, que a relação é dada da seguinte forma:

$$\frac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{V_1}} = \left(\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{H}}\right)^3 \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{V_1}} = \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)^3$$

A figura seguinte mostra as construções e os elementos interativos da atividade.

Figura 31 - Relação entre os elementos do Cone obtido com a secção do plano $z = 2$ e o cone original



Fonte: Elaborador pelo autor no Geogebra 3D

A tarefa T.6 se apresenta como atividade bastante enriquecedora no que diz respeito a investigação matemática, uma vez que explora diversos conceitos matemáticos, não só da geometria espacial, pois possibilita a utilização de conhecimentos da geometria plana e da matemática em geral, como por exemplo, semelhança de triângulos, razão, proporcionalidade, entre outros.

As atividades propostas retratam um estudo da geometria plana e espacial através da investigação matemática como uma alternativa que venha possibilitar ao educando a construção e manipulação de forma dinâmica de entes geométricos utilizando o software Geogebra como uma ferramenta na construção dos conceitos dos referidos objetos de estudo.

Tais atividades podem auxiliar os demais professores de matemática para que possam desenvolver suas aulas de forma satisfatória, propiciando uma aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos desenvolvidos em cada atividade.

Nas tarefas desenvolvidas neste trabalho, os educandos deverão perceber de forma menos abstrata, os mais diversos conceitos de geometria espacial através da construção no Geogebra 3D, onde poderão analisar de forma mais minuciosa tais conceitos e tirar suas próprias conclusões, e com isso formular novas conjecturas referentes aos conteúdos estudados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar dos diversos avanços tecnológicos, o ensino da matemática tem se mantido ainda como algo extremamente teórico, onde a sala de aula representa somente um espaço para explanações e exposições de conteúdos pelo professor, o que contribui para que os objetivos esperados fossem insuficiente para uma educação de qualidade e satisfatória, isso tem se refletido como uma dificuldade no processo de ensino aprendizagem nas escolas de educação básica, o que tem contribuído significativamente para os baixos índices da área.

Todavia, cabe destacar que a informática possibilita ao ensino da matemática, uma atitude de experimentação. Os recursos disponibilizados a partir da tecnologia, como os softwares educacionais, instigam a participação dos alunos, a tomada de decisão, a levantar conjecturas e fazer analogias em um processo de ensino e aprendizagem.

Atualmente, o ensino da matemática nas escolas públicas de educação básica ainda é carente de uma dinâmica que valorize o papel do educando como um ser criativo e atuante, capaz de agir ativamente no processo de construção do conhecimento. Infelizmente, o ensino tradicional da matemática ainda é uma realidade nas salas de aulas das escolas, muitas vezes justificado pela falta de tempo, de formação continuada do professor, além da falta de condições de trabalho, que é uma triste realidade da educação pública.

Por outro lado, a expressão "novas tecnologias" geralmente é empregada em referência ao uso da informática. No entanto, ao conceituar tecnologia, deve-se pensar em um contexto mais amplo, em que a informática é apenas uma entre as inúmeras tecnologias disponíveis. Sendo assim, a efetiva contribuição de softwares educativos no processo de ensino aprendizagem está diretamente ligada aos recursos que eles disponibilizam e a forma como são utilizados. O professor precisa conhecer os recursos disponíveis dos programas escolhidos para suas atividades de ensino, somente assim estará apto a realizar uma aula dinâmica, criativa e segura.

Nesse sentido, os referenciais teóricos só colaboraram de forma positiva com a hipótese de que é possível se ter um ensino de qualidade e satisfatória através da investigação matemática como uma alternativa metodológica no que diz respeito ao ensino deste campo do saber, possibilitando ao educando a construção de seus próprios conhecimentos, desenvolvendo suas competências e habilidades necessárias como cidadão contemporâneo.

Sendo assim, o trabalho desenvolvido apresentou indícios de que atividades de cunho investigativo podem contribuir para uma aprendizagem significativa, na qual o aluno é convidado a atuar como sujeito de sua própria aprendizagem. E para isso, é necessário que atividades do tipo se faça mais presentes em salas de aulas, para que os alunos se sintam mais a vontade à medida que forem se familiarizando com atividades investigativas.

A análise das fundamentações teóricas do presente trabalho fortaleceu o ponto de vista de que é possível o professor assumir uma postura inovadora em sala de aula, possibilitando um ensino voltado para a construção do conhecimento pelo educando e fomentando uma educação critica e cidadã. No entanto, o escape da zona de conforto é necessário, quando se assume o compromisso com a mudança. Para tanto, uma formação continuada sólida é imprescindível para a concretização de qualquer mudança, uma vez que o professor deve estar apto a exercer um papel de mediador, tendo em vista que toda e qualquer atividade deve está centrada na ação do aluno.

De modo geral, através do presente trabalho percebemos que ao investigar matematicamente uma situação ou realizar uma tarefa investigativa, pode-se despertar mais o interesse dos alunos, por estarem construindo seus próprios conceitos através de questionamentos com o professor e também com os colegas, tendo que comparar suas conjecturas e criar hipóteses. Assim numa perspectiva critica, podemos afirmar que, adotando a investigação matemática como uma metodologia de ensino no ambiente da sala de aula de matemática pode proporcionar uma aprendizagem significativa e prazerosa para o educando, uma vez que, possibilitará ao aluno perceber que o conhecimento matemático pode ser construído através de uma relação de erros e acertos, o que de certa forma permite com que os envolvidos possam agir como 'pesquisadores matemáticos' tendo que planejar ações, levantar hipóteses e desenvolver argumentações com os próprios colegas, alem de trazer a construção matemática a um nível real e coletivo, quebrando o paradigma da matemática como uma disciplina complicada e sem nexo com a realidade.

Contudo, podemos afirmar que a adoção da investigação matemática é uma forte alternativa que só tem a contribuir com as mudanças necessárias e prementes no ambiente escolar, não como uma proposta única e absoluta, porém como uma ferramenta, uma engrenagem no processo de educação matemática crítica, que se entrelacem com outras propostas comprometidas com uma formação matemática sólida e significativa, fundamentadas em desenvolvimentos de competências e habilidades num processo dinâmico e dialético de construção do conhecimento.

No decorrer da construção deste trabalho até sua finalização, foi possível perceber a importância do uso da tecnologia nas aulas de matemática, em especial, o uso do Geogebra 5.0 como auxiliar na construção de conceitos da geometria espacial; no entanto, percebeu-se também, uma possível dificuldade na realização das tarefas defendidas neste trabalho, uma vez que é notória a realidade de sucateamento por qual passam a maioria das escolas públicas, já que a implementação de um ensino pautado em atividades com tecnologia requer, no mínimo, uma estrutura de um laboratório de informática, com maquinas e equipamentos disponíveis, com internet de qualidade, entre outros; mas, frisamos novamente, que esta realidade é pouco vivenciada nas escolas.

Finalmente, espera-se que este trabalho só tenha a contribuir e auxiliar os professores de matemática, despertando-lhes para que possam mudar essa realidade ultrapassada de ensino e venham buscar novas alternativas metodológicas que desperte o educando pela aprendizagem de forma prazerosa e construir para uma nova visão sobre o processo de ensino aprendizagem de matemática nas escolas públicas. No entanto, vale ressaltar que não se pretende exaurir toda a discussão em torno do tema, ficando aberto a sugestões e aprimoramentos, além de se colocar como uma fonte de estudo pesquisa para o referido tema.

REFERÊNCIAS

ALVES, M. **Avaliação de software educativo para o ensino de matemática**. WIE 2002, Florianópolis (SC), 2002.

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2004.

__________. Modelagem **como estratégia metodológica no ensino da matemática**. Boletim de Educação da SBMAC. São Paulo: IMECC/Unicamp, 1994.

BECHARA, Evanildo (org). **Dicionário Escolar da Academia Brasileira de Letras** - Língua Portuguesa. 3ª Edição. São Paulo: Companhia Editora Nacional. 2011.

BICUDO, Maria Aparecida V. **Educação matemática**. Rio de Janeiro: LTC, 1987.

BOERI, Camila Nicola. VIONE, Márcio Tadeu (2009). **Abordagens em Educação Matemática**. Disponível em http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ea000661.pdf. Acesso em 10/07/2016.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Vol.02. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

__________. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

__________. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** – 3ª e 4ª ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

__________. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros **Curriculares Nacionais (PCN+)** - Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. In: PONTE, J.P.(et al) (Eds.), Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Lisboa: SEM – SPCE, 2002.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Formação de professores de matemática para o século XXI**: o grande desafio. Pro-Posições, v. 4, n. 1, p. 35-41, mar. 1993.

__________. **Da Realidade a Ação**: Reflexões sobre Educação Matemática. Campinas/SP: Sammus, 1986.

__________. **Educação Matemática:** Da teoria a Prática. 2ª ed. Campinas: Papirus, 1991.

__________. **Matemática, ensino e educação**: uma proposta global. In Temas e Debates, ano IV, n. 3, p. 1-15, 1991.

DINIZ, M. I. **Resolução de problemas e comunicação**. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DOLCE, Osvaldo. POMPEO. José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v.09. 5ª Edição. São Paulo: Atual Editora, 1993.

FIORENTINI, D. Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em Cursos de Pós-Graduação. Tese de doutorado. Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, SP: 1994.

FREIRE**,** Paulo**. Pedagogia da Autonomia**: Saberes Necessários à Prática Educativa. 25ª Ed. São Paulo: Paz e Terra. 1996.

FROTA, M. Clara R. Experiência matemática e Investigação Matemática, In: **CONGRESSO IBERO AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, V CIBEM**,** Porto, Portugal, jul. 2005. Disponível em http://www.matematica.pucminas.br/Grupo%20de%20Trabalho/Maria%20clara/experienciaDocumento%20do%20Acrobat.pdf. Acesso em 29/07/2016.

GADOTTI, Moacir. Concepção Dialética de Educação. 10ª ed. São Paulo: Cortez, 1997.
ISOTANI, Seiji. **Desenvolvimento de ferramentas no IGEON**: utilizando a Geometria Dinâmica no ensino presencial e a distância. 2005. 92 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática**: reflexões para o ensino de matemática. Zetetiké – FE/Unicamp – v. 19, n. 36 – jul/dez 2011. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_lamonato_passos.pdf. Acesso em: 17/06/2016.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 2ª ed. São Paulo: Cortez, 1994.

LOREZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. – Campinas, SP: Autores Associados. (Coleção Formação de Professores), 2006.

MACHADO, N. J., Matemática e Realidade, v.1, Cortez Editora, São Paulo, 5.ed., 1987.

MENDES, Iran Abreu. **Tendências Metodológicas no Ensino da Matemática**. Belém: edUFPA. 2008. Disponível em: www.ufpa.br/par/files/Modulos/vol41.pdf. Acesso em: 10/08/2017.

PINTO, M.A.L. **Computadores X Educadores**. Revista de Psicopedagogia, v.18, n.47, São Paulo, 1999.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

__________. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 3ª Ed (Revista e ampliada). Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autentica Editora. 2013.

PONTE, João Pedro da. Matemática: **Uma disciplina condenada ao insucesso.** NOESIS, 1994, n. 32, p. 2.

PORFIRIO, J.; OLIVEIRA**, H. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação**. In: ABRANTES, P.; PONTE, J.P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (org.) Investigações Matemáticas na aula e no currículo. 999, p. 111-118.

SANTOS, Luciane Mulazani dos. **Metodologia do ensino de Matemática e Física: Tópicos de história da física e da matemática**. Curitiba: Ibpex, 2009.

SAVIANI, D. **Educação e questões da atualidade.** São Paulo: Cortez, 2005. 242 p.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação Matemática. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, Ano 13. n. 14. p 66-91. 2000. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022. Acessado em: 20/04/2017.

__________. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas, SP: Papirus, 2008.

__________. **Educação crítica**: incerteza, matemática e responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

__________. **Educação Matemática Crítica**: A questão da Democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001.

SMOLE, Kátia Stocoo. **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

VALE, I.; PIMENTEL, T. **Padrões**: um tema transversal do currículo. LIBEC, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo. Nov/Dez. 2005. Disponível em: http://www.esev.ipv.pt/servicos/upload%5Cma%5C267%5Cpadr%C3%B5es.pdf. Acesso em agosto de 2010.

VIEIRA, F. M. S. **Avaliação de Software Educativo**: Reflexões para uma Análise Criteriosa. Cortez Editora, São Paulo, 5.ed., 2011.

VIGOTSKI, L. S. **Psicologia Pedagógica**. Tradução Claudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2003.