UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Probabilidade no Ensino Médio: Metodologia Ativa como Suporte

Elvis Gomes Souza

Maceió, julho de 2018.

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO:
Metodologia Ativa como Suporte

ELVIS GOMES SOUZA

Maceió
2018

ELVIS GOMES SOUZA

Probabilidade no Ensino Médio: Metodologia Ativa como Suporte

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior

Maceió
2018

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

S731p Souza, Elvis Gomes.
Probabilidade no ensino médio: metodologia ativa como suporte / Elvis Gomes Souza. – 2018.
76 f. : il.

Orientador: Rinaldo Vieira da Silva Junior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

Bibliografia: f. 74-76.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Proporcionalidade (Analise combinatória). 3. Metodologia ativa. 4. Internet na educação. 5. Webquest. I. Título.

CDU: 372:519.1

Folha de Aprovação

ELVIS GOMES SOUZA

PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: METODOLOGIA ATIVA COMO SUPORTE

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 20 de julho de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior – UFAL (Presidente)

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa - UFAL

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento – IFAL

MACEIÓ - 2018

Este trabalho é dedicado ao meu pai-avô Agnelo Lourenço de Souza (*in memorian*), e aos meus filhos Sofia e Sócrates.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela força concedida a mim diante das dificuldades.

A minha esposa, pela paciência e apoio ao longo dessa jornada.

Aos amigos de turma com os quais compartilhei desafios e conquistas, em especial aos amigos Cláudio, Clewerton, Gerlan e Mayra, sem os quais a caminhada teria sido mais árdua.

Ao professor Rinaldo que ofereceu as orientações necessárias para que eu pudesse concluir este trabalho.

Aos professsores do curso que me desafiaram a ir mais longe ao universo da matemática.

E a todos os amigos e familiares, que mesmos distantes, acreditaram e torceram por mim.

Você nunca sabe que resultados virão da sua ação,
mas se você não fizer nada, não existirão resultados.
(Frase atribuída a Mahatma Gandhi)

RESUMO

A história da educação brasileira é marcada pelo ensino tradicional, de modo que o currículo escolar contribuiu por muitas décadas para a formação passiva dos alunos. Neste contexto, o professor era a figura central do conhecimento e o aluno era visto como ser incapaz, portanto, cabia ao mesmo apenas ouvir atentamente ao professor e memorizar fórmulas desprovidas de significados. Obviamente que ouvir o professor permanece importante, e a memorização de fórmulas pode ser útil em algumas circunstâncias. Todavia, restringir o ensino de matemática a esses procedimentos seria limitar o potencial do ser humano e não atenderia mais aos anseios da sociedade contemporânea. A atualidade é marcada pelo excesso de informação, assim sendo, o educando pode coletar dados no mundo virtual de forma direta, não necessitando do professor de matemática para transmitir uma fórmula. Diante desta realidade, o ensino da matemática precisa ser repensado, de modo que os conteúdos trabalhados apresentem um sentido social (ou pessoal) para o aluno, bem como possibilitem aos educandos fazer uso de técnicas iniciais da pesquisa, valorizar o trabalho coletivo, contribuindo para que atuem de forma crítica, participativa e autônoma. Partindo destes princípios, o tema PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: metodologia ativa como suporte apresenta um resgate da dimensão socio-histórica dessa área de conhecimento, valorizando os desafios e as contribuições de diversos matemáticos precursores de Pascal. Estes estudos enveredaram em direção as propriedades e aplicações da Probabilidade em fenômenos e experimentos aleatórios, enfatizando seu emprego na área de genética. Como proposta pedagógica, apresentou-se a Webquest como alternativa, uma vez que a mesma apresenta atividades estruturadas em ambientes virtuais, que ao serem norteadas pela pesquisa e pelo trabalho colaborativo, contribuem para o desenvolvimento do senso crítico e autônomo do alunado.

Palavras-chaves: 1. Matemática – Estudo ensino. 2. Proporcionalidade (Análise combinatória). 3. Metodologia ativa. 4. Internet na educação. 5. Webquest.

ABSTRACT

The history of Brazilian education is marked by traditional teaching, so that the school curriculum has contributed for many decades to the passive formation of students. In this context, the teacher was the central figure of knowledge and the student was seen as being incapable, therefore, it was up to him to only listen to the teacher and memorize formulas devoid of meanings. Obviously listening to the teacher remains important, and memorizing formulas may be helpful in some circumstances. However, to restrict the teaching of mathematics to such procedures would be to limit the potential of the human being and would no longer meet the aspirations of contemporary society. The actuality is marked by the excess of information, therefore, the learner can collect data in the virtual world directly, not needing the mathematics teacher to transmit a formula. Faced with this reality, the teaching of mathematics needs to be rethought, so that the contents worked out have a social (or personal) sense for the student, as well as enable students to use early research techniques, to value collective work, contributing to that act in a critical, patitious and autonomous way. Based on these principles, the theme PROBABILITY IN AVERAGE EDUCATION: active methodology as support presents a rescue of the socio-historical dimension of this area of knowledge, valuing the challenges and contributions of several mathematicians precursors of Pascal. These studies focused on the properties and applications of probability in random phenomena and experiments, emphasizing their use in the area of genetics. As a pedagogical proposal, Webquest presented itself as an alternative, since it presents activities structured in virtual environments, which, when guided by research and collaborative work, contribute to the development of the student's critical and autonomous sense.

Keywords: 1. Mathematics - Teaching study. 2. Proportionality (combinatorial analysis). 3. Active methodology. 4. Internet in education. 5. Webquest.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM-MEC	Exame Nacional do Ensino Médio-Ministério da Educação e Cultura
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PIF	Princípio da Indução Finita
PUC-MG	A Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
UDESC-SC	Universidade do Estado de Santa Catarina
UEL-PR	Universidade Estadual de Londrina
UEPB-PB	Universidade Estadual da Paraíba
UFPE-PE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRJ-RJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UTFPR-PR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	**Nome**
+	Adição
-	Subtração
****	Diferença
/	Divisão
$\bullet\, ou$ x	Multiplicação
$= \boldsymbol{e} \neq$	Igualdade e diferente
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números reais
$\{\ ,\ \}$	Chaves
$\{\ \}\ ou\ \emptyset$	Conjunto vazio
$(\quad)$	Parenteses
$[\quad]$	Colchetes
$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$< \quad e >$	Comparação
$\leq \quad e \geq$	Comparação
$\subset$	Está contido
$\mid$	Tal que
$n!$	n fatorial
$\rightarrow$	Se, então
$\updownarrow$	Se, somente se
$\sum$	Somatório
$\cup$	União de conjuntos
$\cap$	Intersecção de conjuntos
α	Alfa
β	Beta
Ω	Omega

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O mundo globalizado é ca'racterizado pela expansão contínua das tecnologias de comunicação, que ao estarem conectadas em redes, favorecem a circulação de informações. Tais mudanças estruturais tornam as sociedades cada vez mais complexas, gerando desafios exponenciais, o que torna imprescindível repensar diversas dimensões humanas, bem como estabelecer novos paradigmas em todas as áreas de conhecimento, inclusive a Matemática. Diante do exposto, de que forma o ensino de probabilidade pode contribuir para uma compreensão da realidade? Como este conteúdo deve ser abordado em sala de aula? Que metodologias são mais favoráveis ao processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo?

Neste sentido, o presente trabalho tem como objetivo geral analisar a utilização de Metodologias Ativas (MORAN, 2007) no ensino de Probabilidade (DANTE, 2011; BOYER, 2006; MORGADO [et al.], 2006), o que perpassa pela reflexão sobre de que modo a metodologia utilizada pode contribuir para que os educandos percebam a presença histórica da probabilidade em situações cotidianas, utilizem a mesma para fazer estimativas, bem como, desenvolvam a autonomia necessária para selecionar, analisar e aplicar conceitos relacionados a probabilidade em diversas situações, entre elas jogos, economia e genética, sempre preservando as dimensões éticas do trabalho colaborativo.

É diante deste cenário que a pesquisa sobre PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: metodologia ativa como suporte se justifica, pois, em uma era de incertezas, probabilidade será sempre um tema significativo. Além disso, se considerarmos a miríade de informações em que estamos mergulhados, o ensino da Matemática precisa ser repensado, visando superar paulatinamente o desenvolvimento de atividades descontextualizadas, centradas na memorização de fórmulas prontas e pautadas em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno.

Como proposta pedagógica favorável ao desenvolvimento de tais habilidades, defende-se o desenvolvimento de atividades estruturadas (FOSSA, 2011) através de Webquest (Dodge, 2005), de modo que os educandos possam desenvolver pesquisa orientada virtualmente e de forma colaborativo, atuando autonomamente como sujeitos do processo de ensino-aprendizagem.

O primeiro capítulo denominado UM POUCO DA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE apresenta a contribuição de diversos matemáticos que antecederam Pascal, entre eles Yang-Hui, Cardano, Petros Apianos, Michael Stifel e Tartaglia. ANÁLISE COMBINATÓRIA compõe o segundo capítulo e tem como principal objetivo apresentar ferramentas básicas (fórmulas utilizadas para calcular fatorial, arranjos, permutações e combinações) que possibilitem calcular o número de elementos de um conjunto, sem a necessidade de enumerar seus elementos. No terceiro capítulo, abordaremos NOÇÕES FUNDAMENTAIS DE PROBABILIDADES, identificando sua relação com experimentos e fenômenos aleatórios. Ainda neste capítulo, apresentamos o método binomial, bem como demonstramos algumas propriedades que são consequências quase que imediata da definição, direcionando as mesmas para a área de genética. O quarto capítulo WEBQUEST PROBABILIDADE APLICADA A GÉNETICA, apresenta uma proposta de atividade estruturada nos moldes da metodologia ativa. Através desta proposta, espera-se contribuir para que os educandos utilizem o ambiente virtual para realizar pesquisas, construindo, assim, novos conhecimentos de forma autônoma e colaborativa.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

2.1 Combinatória e triângulo aritmético

O objetivo deste capítulo é apresentar uma análise histórica que contemple os desafios encontrados e as contribuições trazidas pelos grandes matemáticos ao longo dos séculos, na busca por melhores caminhos que auxiliasse as soluções probabilísticas.

Na Índia (600 a. C.), o estudo da Combinatória estava associado a filosofia religiosa denominada jainismo (filosofia voltada para a vitória sobre os desejos mundanos). Seus adeptos passavam por um longo treinamento, onde o estudo da Matemática era considerado um dos exercícios mais nobres e eficazes. Neste treinamento, os jainas aprofundavam conhecimento sobre a Combinatória (*Vikalpa*), que era utilizada como instrumento de compreensão do mundo físico. Para eles, o mundo era composto por átomos, que por sua vez era indivisível e atemporal, sofrendo alterações apenas em suas cores (5 tipos), gostos (5 tipos), cheiros (2 tipos) e tatos (8 tipos). Assim, inicialmente, o maior desafio da Combinatória era calcular as combinações das qualidades dos átomos. Com o passar do tempo, esse conhecimento passou a ser utilizado para calcular qualidade de diversos seres. Afinal, tudo era composto por átomos, nada mais justo que sua utilização fosse ampliada.

Embora já existissem obras contendo regras para o cálculo de Combinatória e Arranjos, só em 200 a. C., o indiano Pingala, na obra *Chanda Sutra*, faz referência ao triângulo aritmético, através de seus estudos sobre métricas musicais na versificação, observando que a expansão métrica sucessiva (de uma, duas, três sílabas) podia ser disposta sob a forma de um padrão numérico triangular, o que corresponderia ao triângulo aritmético, que ele denominou *meruprastara*. Segundo Silveira (2001), Pingala descreve a seguinte regra:

> Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenho dois outros, de modo que se juntem no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. A seguir, escreve 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas. Nessas linhas, a segunda dá as combinações com uma sílaba; a terceira dá as combinações com duas sílabas e assim por diante. (SILVEIRA, 2001, p. 2).

Como podemos observar, a descrição apresentada anteriormente pelo indiano Pingala já apresentava características compatíveis com as propriedades do triângulo aritmético.

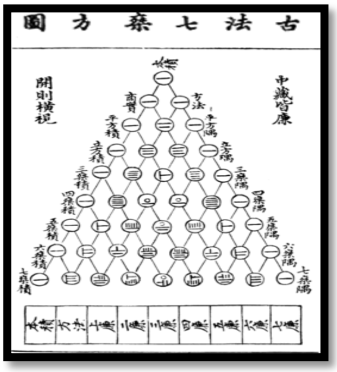
Quanto à contribuição chinesa, pode-se citar a obra *Jiuzhang Suanshu* (Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática), escrita por volta de 100 a.C., a qual dedica um dos seus capítulos ao ensino de procedimentos para a extração de raízes quadradas e cúbicas, baseando-se nos princípios das identidades, conforme descrito abaixo:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b(2a+b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b(3a^2 + 3ab + b^2)$$

Ao utilizar o princípio das identidades para extrair raízes quadradas e cúbicas, não se exigia a utilização do triângulo aritmético. Como pode ser observado na notação acima, os chineses, a princípio, não utilizavam álgebra literal, de modo que a resolução de problemas algébricos se dava através de notação e procedimentos adequados para o emprego de varetas de cálculo (ábaco chinês). Com o passar do tempo, o mesmo esquema foi utilizado no sistema de tabulação para descobrir coeficientes binomiais, ou seja, para calcular o triângulo aritmético.

Nesse contexto, os estudos chineses estavam direcionados à utilização do triângulo aritmético para o cálculo aproximado de raízes quadradas, cúbicas, etc. Entretanto, apenas em 1050, aproximadamente, o triângulo aritmético aparece no Manual de Matemática, de Jia Xian. Posteriormente, por volta de 1250, o grande matemático Yang-Hui, estudou e aplicou o triângulo aritmético. Sua contribuição foi tão significativa que comumente os chineses denominam o triângulo aritmético de Triângulo de Yang-Hui, como pode ser observado na figura que segue:

Figura 1 - Triângulo de Yang-Hui.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal

O triângulo aritmético aparece também no livro Precioso Espelho dos Quatro Elementos, que foi escrito por Chu Shih-Chieh em 1303. A referida obra apresentava figuras de triângulos com até nove linhas.

Com relação a contribuição européia, muitos matemáticos utilizavam o triângulo aritmético antes de Pascal. Entre eles, os alemães Petros Apianos, que em 1527 publicou a obra *Rechnung* (Cálculo), cuja capa apresentava o triângulo aritmético e, Michael Stifel, que divulgou o triângulo aritmético através de seu livro *Arithmetica Integra* (1544). Na Itália, Tartaglia (Nicolò Fontana Tartaglia, 1499-1559) descobriu algumas propriedades do triângulo aritmético, associando o mesmo ao cálculo de probabilidades. Posteriormente, o francês Blaise Pascal (1623-1662) se voltou para o estudo do triângulo aritmético a partir da resolução de um problema envolvendo probabilidade, que visava obter duplo 6 jogando dois dados, ficando consagrado pela resolução proposta. Segundo Dante (2011, p. 305):

> A consagração da denominação atual triângulo de Pascal ocorreu pelo fato de, em 1739, De Moivre (Abraham de Moivre, 1667-1754) ter publicado um trabalho de grande repercussão na época, em que usou a denominação *triângulo arithmeticum pascalianum para* o triângulo aritmético.

Pascal em sua obra *Traité du triangle arithmértique* (Tratado sobre o Triângulo Aritmético) apresentou um estudo aprofundado sobre as propriedades do referido triângulo, o qual só foi publicado postumamente em 1665. Ao analisar a mesma, De Moivre aprofundou seu conhecimento sobre probabilidades, os quais seriam aplicados em estatísticas de mortalidade e teorias das anuidades, no campo da matemática financeira.

No próximo item aprofundaremos a contribuição do Triângulo Aritmético de Pascal para a Probabilidade.

2.2 Bases teóricas da probabilidade

Como exposto no item anterior, embora o interesse por questões ligadas a probabilidade já existisse antes da era Cristã, foi a partir do século XV que se deu uma abordagem matemática mais aprofundada sobre esse tema. Destacaremos, a princípio, as contribuições de Cardano, que em sua autobiografia, *De Propria Vita,* afirmava ser viciado em jogos, o que o levou a estudar e formular as primeiras regras da Teoria da Probabilidade. (HAZZAN, 2013, p. 56).

Segundo Souza (2013, p. 246), **"**primeira obra conhecida que aborda esse assunto é a *De Ludo Aleae* (Sobre os jogos de azar), de Girolamo Cardano (1501 – 1576), publicada em 1663".

Para Hazzan, Cardano ficou conhecido pela seguinte afirmação:

> A probabilidade de que um evento cuja probabilidade é p ocorra independentemente n vezes é p^n. Por exemplo, como no lançamento de uma moeda a probabilidade de dar coroa é $\frac{1}{2}$, em n lançamentos consecutivos da mesma moeda é $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\cdot$ (HAZZAN, 2013, p.57).

No capítulo catorze da obra *De Ludo Aleae*, Cardano apresenta uma regra geral para calcular os resultados possíveis de alguns eventos aleatórios, afirmando que os mesmos seriam calculados a partir da razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao evento. Essa regra corresponde à Lei do Espaço Amostral presente na atual teoria da probabilidade. Entretanto, a palavra probabilidade só vem a ser utilizada por Cardano no capítulo quinze do seu livro. (TOMAZ, 2011, p. 4).

Embora Cardano tenha proposto algumas regras, a elaboração de uma teoria sobre Probabilidade está associada ao problema dos pontos (1654). A teoria se desenvolveu a partir de correspondências entre Pascal e Fermat, enquanto ambos tentavam solucionar um problema envolvendo jogos de azar, o qual foi trazido por um amigo em comum, o Cavaleiro de Meré. O processo de elaboração pode ser resumido da seguinte forma:

Dois jogadores querem terminar um jogo mais cedo e, dadas as atuais circunstâncias dos jogos, querem dividir as apostas de forma justa, com base na chance que cada um tem de ganhar o jogo a partir desse ponto. Então, Pascal pede para marcarem um encontro e discutirem o que conseguiram. No dia marcado, os dois comparecem e ambos apresentaram sua solução para o problema.

Fermat é o primeiro a expor a solução por ele encontrada, e começa citando um exemplo. Em um jogo de cartas, entre dois jogadores $A\ e\ B$ igualmente hábeis, com igual chance de vencer para cada adversário, os mesmos apostam 100 moedas cada. Eles definem que será o vencedor e levará toda quantia quem conseguir 10 batidas primeiro. No entanto, na 15ª rodada, os dois decidem encerrar o jogo. Uma vez que o placar estava de 8 a 7, para o jogador A, então o dinheiro deveria ser dividido com base nas chances que cada jogador tem para vencer o jogo, vendo que faltam duas batidas para A e três para B.

Perceberam que, no máximo, mais quatro partidas decidem o jogo. Seja a uma partida vencida por A e seja b uma partida vencida por B, Fermat considerou então os dezesseis arranjos completos, de ordem 4, das letras a e b. Observe o Arranjo:

$$\begin{array}{cccc} aaaa & aaab & abba & bbab \\ baaa & bbaa & abab & babb \\ abaa & baba & aabb & abbb \\ aaba & baab & bbba & bbbb \end{array}$$

Segundo Fermat, nos formatos em que aparecem acima, no mínimo duas vezes a são favoráveis ao jogador A. Observando o arranjo, isso acontece onze vezes. E para os casos em que b aparece no mínimo três vezes, as chances são favoráveis ao jogador B e, na tabela há cinco deles. Então, a divisão justa seria o número de casos favoráveis para cada jogador, dividido pelo total de arranjos, assim A ganha o jogo em $\frac{11}{16}$ e B em $\frac{5}{16}$.

Já Pascal resolveu o mesmo problema utilizando o triângulo aritmético. Denominando por $\binom{n}{k}$ o número de combinação, onde n corresponde ao número de partidas necessárias para o fim do jogo e k representa o número de partidas que cada jogador precisa perder ou ganhar, para que ouvesse um vencedor. Assim, ao analisar o triângulo aritmético de Pascal, pode-se observar que, o jogador A seria o vencedor se nas próximas quatro partidas perdesse $0, 1$ ou 2 e a probabilidade de A vencer é dada pelo quociente $\frac{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{1+4+6}{16} = \frac{11}{16}$, onde o numerador representa as combinações favoráveis e o denominador equivale ao universo de combinações possíveis. Enquanto isso, para o jogador B ganhar seria necessário que ganhasse $3\ ou\ 4$ partidas. Daí, a probabilidade de B ser o vencedor é $\frac{\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}{2^4} = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}$.

Assim, a divisão justa deveria ser calculada proporcionalmente a probabilidade de ganhar o jogo de cada competidor, no momento que encerraram a partida.

A partir desses conceitos e aplicações, percebe-se que os dois estavam certos e encontraram o mesmo resultado por caminhos distintos, ficando claro que a soma dos coeficientes da quinta diagonal, coincide com os da quinta linha, conforme pode ser observado no triângulo abaixo:

Figura 2 - Triângulo Aritmético utilizado por Pascal

1	1	1	1	**1**	1	1
1	2	3	**4**	5	6	
1	3	**6**	10	15		
1	**4**	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Fonte: Boye,1996, p. 250

No entanto, os livros didáticos atuais apresentam que a soma dos elementos da quinta diagonal do antigo triângulo corresponde a soma da quinta linha, onde pode-se observar que a soma de todas as configurações da tabela mantém o mesmo valor, ou seja, $2^4 = 16$. Vejamos:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Partindo da resolução do problema dos pontos, tanto Fermat quanto Pascal deram soluções gerais para aquele caso particular.

Para Fermat, caso o jogador A precisasse de m pontos para ganhar e B precisasse de n, a solução geral era dada por 2^{m+n-1} arranjos completos, de ordem $m+n-1$, das duas letras a e b. Com isso, deveria descobrir o número α de casos em que a aparece no mínimo m vezes e o número β de casos em que b aparece no mínimo n vezes. Assim, para o jogador A vencer é preciso $\frac{\alpha}{2^{m+n-1}}$, já para o jogador B vencer é necessário $\frac{\beta}{2^{m+n-1}}$.

Enquanto que a solução geral de Pascal, para que o jogador A seja o vencedor, precisando de m pontos para ganhar e para que B seja vencedor precisando de n pontos, escolhia-se a $(m+n)$-ésima diagonal do triângulo de Pascal. Daí, calculava-se a soma α dos primeiros n números da diagonal considerada e a soma β de seus últimos m números. Então, deve-se dividir as apostas na razão de $\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{k}}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{k}+\cdots+\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{k}}{2^n}$, e o jogador B vence com o complementar $B = 1 - A$.

Quando observamos a história européia, percebemos que foi a partir da necessidade de calcular o número de possibilidades existentes, principalmente em situações envolvendo os resultados de jogos, que se iniciou o estudo dos métodos de contagem aplicado a Probalidade. Todavia, é evidente que essa ciência está muito longe de não ter aplicações práticas no mundo contemporâneo.

Na atualidade, grandes empresas, laboratórios, entre outras instituições, primeiro fazem os cálculos de riscos ou erros, usando a Teoria da Probabilidade, para posteriormente firmar investimentos. Segundo Souza (2013, p. 246), os conhecimentos ligados a Probabilidade têm grande utilidade em situações cotidianas, de forma que comumente nos referimos a probabilidade de chuvas, acidentes no trânsito, valor de seguros ou variação nos preços.

Essa possibilidade de aplicação da Probabilidade em diversas áreas de conhecimento contribuiu para que a mesma continuasse a ser estudada por diversos matemáticos, como podemos observar na citação abaixo.

> Baseado nos trabalhos de Pascal e Fermat, Christiaan Huygens (1629 – 1695) escreveu, em 1657, a primeira e considerada a melhor exposição até então sobre a teoria de probabilidade. Tempos mais tarde, esse trabalho foi superado por Jakob Bernoulli (1654 – 1705) com a obra Ars Conjectandi. Vários outros matemáticos deram continuidade a esses primeiros trabalhos; atualmente as probabilidades ainda são estudadas e amplamente utilizadas. (SOUZA, 2013, p. 246).

Assim, partindo das contribuições de Pascal e Fermat, Bernoulli direcionou seus estudos para os grandes números, resolvendo questões que envolvia combinações, permutações e a classificação binomial. Além dele, não podemos desconsiderar as pesquisas de diversos matemáticos, entre eles Laplace (que criou a regra de sucessão) e Gauss (que construiu o método dos mínimos quadrados e a lei das distribuições de probabilidades).

2.3 Conceito de indução

Morgado e Carvalho (2015, p. 3) defendem com grande veemência a importância do último axioma de Peano, que trata da indução finita, pois com tal princípio é possível demonstrar vários teoremas matemáticos.

Segundo Iezze e Murakami (2016, p. 58), para provarmos que a relação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, empregamos o princípio da indução finita (PIF). Assim, na base de indução, verificamos que a propriedade é válida para um valor inicial $n = n_0$. O passo indutivo consiste em mostrar como utilizar $\mathrm{P}(n)$ (a chamada hipótese de indução) para provar $\mathrm{P}(n+1)$. Uma vez verificados a base e o passo indutivo, temos uma “cadeia de implicações”. (MOREIRA et al., 2012, p. 2).

Partindo do conceito anterior, pode-se afirmar que uma proposição $\mathrm{P}(n_0)$, aplicável aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n_0$, quando:

1º) Base da Indução, se $\mathrm{P}(n_0)$ é verdadeira e

2º) Passo Indutivo, se $\mathrm{P}(n)$ é verdadeira para algum número natural $n \geq n_0,$ então então $\mathrm{P}(n+1)$ também é verdade.

Exemplo 1:

Demonstre que para todo inteiro positivo n temos $1+2+\cdots+n=\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}\cdot$

Base de indução: $n = 1$, temos $\mathrm{P}(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$, válido.

Hipótese de indução: supondo verdadeiro para algum n a expressão:

$$\mathrm{P}(n)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

Tese de indução: devemos mostrar que também é válida para $(n+1)$, ou seja, vale a implicação $\mathrm{P}(n)\rightarrow \mathrm{P}(n+1)$.

Para isso, devemos somar $(n+1)$ a ambos os lados de $P(n)$, obtendo:

$$1+2+\cdots+n\ +(n+1)=\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}+(\mathrm{n}+1)=\ \frac{\mathrm{n(n+1)+\,2(n+1)}}{2}=\frac{\mathrm{(n+1)(n+2)}}{2}\cdot$$

Portanto, $1+2+\cdots+n=\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$, válido $\forall$ n $\in \mathbb{N}$.

Analisando a demonstração acima, pode-se enunciar que o princípio da indução finita é válido para demonstrar propriedades referentes ao Triângulo Aritmético, lemas e teoremas pertencentes ao Princípio fundamental da contagem, tema que será aprofundado no próximo capítulo.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA

O tempo todo estamos combinando possibilidades e fazendo escolhas baseadas nas possibilidades de combinações. A Análise Combinatória facilita essas escolhas, uma vez que contribui para o desenvolvimento de métodos que permitem “contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições”. (HAZZAN, 2013, p.1).

Varquez e Noguti (2004, p. 4) defendem que:

> [...] na análise combinatória, estuda-se formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: arranjos, permutações e combinações, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

Partindo da citação anterior, pode-se concluir que os agrupamentos desenvolvidos a partir da análise combinatória podem ser classificados em arranjos, permutações e combinações. Entende-se por Arranjos Simples, agrupamentos sem repetições, em que um grupo se torna diferente do outro pela ordem dos elemento, ou seja, $\{A,B\}$ e $\{B,A\}$ ou pela natureza dos elementos. Enquanto isso, na combinação, a ordem dos elementos não é considerada na formação dos subconjuntos, ou seja, o subconjunto $\{A,B\}$ e $\{B,A\}$ são iguais, devendo ser considerado uma única vez na contagem da quantidade de combinações. Neste estudo, não utilizaremos permutação para resolver questões ligadas a probabilidade.

3.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O estudo e aplicação do Princípio Fundamental da Contagem permitem determinar o número de elementos de um conjunto formado de acordo com algumas regras, sem a necessidade de enumerar seus elementos, sendo um instrumento básico da Análise combinatória.

Segundo Dante (2011), se um acontecimento A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, um acontecimento B pode acontecer de m maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos $A\ e\ B$ é dado pelo produto nm. Esse resultado é conhecido como Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo.

Para Hazzan (2013), tal Princípio consta de duas partes $(A \; e \; B)$ ligeiramente diferentes. Porém, antes de enunciar e demonstrar este princípio, ele enuncia e prova dois lemas, que servirão como base na demonstração do PFC, por indução finita. São eles:

Lema 1:

Considere os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$. Podemos formar mn pares ordenados (a_i, b_j) em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Demonstração:

Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo. Desta forma teremos:

$$\begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \cdots, (a_1, b_n) \rightarrow n \; pares \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_2, b_n) \rightarrow n \; pares \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \iddots \qquad \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \cdots, (a_m, b_n) \rightarrow n \; pares \end{cases}$$

O número de pares ordenados é então $\underbrace{n + n + n + \cdots + n}_{m \; vezes} = mn$.

Exemplo 2:

Quantos números com dois algarismos (distintos ou não) podem ser formados usando os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \; e \; 8$?

Podemos perceber cada número, como um par (x, y) onde:

$x \in \{1, 2, \cdots, 8\} \; e \; y \in \{1, 2, \cdots, 8\}$.

Então, o resultado procurado é: $8 \cdot 8 = 64$.

Lema 2: O número de pares ordenados (a_i, a_j), tais que:

$$a_i \in A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}, a_j \in A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \; e \; a_i \neq a_j \; (para \; i \neq j) \text{ é } m(m-1).$$

Demonstração:

Fixando o primeiro elemento do par e variando o segundo elemento, teremos:

$$\begin{cases} (a_1\,, a_2), (a_1, a_3), \cdots, (a_1, a_m) \to n\,pares \\ (a_2, a_1), (a_2, a_3), \cdots, (a_2, a_m) \to n\,pares \\ \quad\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad ⋰ \qquad\qquad \vdots \\ (a_m, a_1), (a_m, a_2), \cdots, (a_m, a_{m-1}) \to n\,pares \end{cases}$$

O número de pares é:

$$\underbrace{(m-1) + (m-1) + (m-1) + \cdots + (m-1)}_{m\,vezes} = m(m-1).$$

Exemplo 3:

Quantos números com dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\ e\ 8$?

Podemos considerar cada número com um par de dígitos (x, y) em que:

$x\ \in \{1, 2, \cdots, 8\}, y \in \{1, 2, \cdots, 8\} e\ x \neq y$.

Assim, o resultado que buscavamos é $8\ \cdot\ 7 = 56$.

Tomando os dois lemas como base, e seus devidos argumentos, será demonstrada a primeira parte do Princípio Fundamental da Contagem.

3.1.1 O Princípio Fundamental da Contagem (Parte A)

Inicialmente, demonstraremos o Princípio Fundamental da Contagem através de indução finita.

Consideremos r conjuntos:

$$\begin{array}{lll} A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}\} & & \#A = n_1 \\ B = \{b_1, b_2, \cdots, b_{n_2}\} & & \#B = n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_{n_r}\} & & \#Z = n_r \end{array}$$

Então, o número de r-uplas ordenadas (sequências de r elementos) do tipo $(a_i, b_j, \cdots, z_p)$, em que $a_i \in A,\ b_j \in B, \cdots, z_p \in Z$ é $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_r$.

Demonstração (Princípio da indução finita)

Se $r = 2$, é imediato, pois caímos no lema 1 já visto.

Suponhamos que a fórmula seja válida para o inteiro $(r-1)$ e provemos que ela também é válida para o inteiro r.

Para $(r-1)$, tomemos as sequências de $(r-1)$ elementos $(a_i, b_j, \cdots, w_k)$.

Por hipótese de indução, existem $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_{(r-1)}$ sequências e n_r elementos pertencentes ao conjunto Z.

Cada sequência $(a_i, b_j, \cdots, w_k, z_p)$ consiste de uma sequência $(a_i, b_j, \cdots, w_k)$ e um elemento $z_p \in Z$.

Portanto, pelo lema 1, o número de sequências do tipo $(a_i, b_j, \cdots, w_k, z_p)$ é:

$(n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_{n-1}) \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_{r-1} \cdot n_r$.

Decorre, então, que o teorema é válido $\forall\ r \in \mathbb{N}\ e\ r \geq 2$.

Exemplo 4:

Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

Indicado por $K \rightarrow cara\ e\ C \rightarrow coroa$.

Então, o resultado procurado é: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Podemos representar este resultado através do arranjo a seguir:

(K, K, K) (K, C, C)

(K, K, C) (C, K, C)

(K, C, K) (C, C, K)

(C, K, K) (C, C, C)

3.1.2. O Princípio Fundamental da Contagem (Parte B)

Consideremos um conjunto A, com m $(m \geq 2)$ elementos.

O número de *r*-uplas ordenadas (sequências com *r* elementos), formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot [m-(r-1)]}_{r\ fatores}.$$

Ou seja, se $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, o número de sequências do tipo

$$\underbrace{(a_j, a_l, \cdots, a_i, \cdots, a_k)}_{r\ elementos} \text{ com } \begin{cases} a_i \in A\ \forall_i \in \{1,2,\cdots,m\} \\ a_i \neq a_p\ para\ i \neq p \end{cases} \text{ é}$$

$$\underbrace{m(m-1)(m-2) \cdot \cdots \cdot [m(r-1)]}_{r\ fatores}.$$

As demonstrações podem ser feitas de modo análogo a feita na parte A.

Exemplo 5:

Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o $1^{\underline{o}}, 2^{\underline{o}}, 3^{\underline{o}}$ lugares?

Obtemos cada um dos resultados, com uma trípla (x, y, z) ordenada, em que x representa primeiro lugar, y o que chegou em segundo, z o que chega em terceiro.

Daí, o número de resultados possíveis é: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Agora, resolveremos problemas utilizando como base as demonstrações realizadas acima (Princípio Fundamental da Contagem, Partes A e B).

Problema 1.

(PUC-MG) As portas de acesso de todos os apartamentos de certo hotel são identificadas por meio de números ímpares, formados com 3 elementos do conjunto $M = \{3,4,6,7,8\}$. Nessas condições, é correto afirmar que o número máximo de apartamentos desse hotel é:

$a)24$ $b)\ 36$ $c)\ 44$ $d)\ 50$

Solução:

Considerando o enunciado, os números de todos os quartos do hotel são necessariamente ímpares. Deste modo, $m_{1,}$ (algarismo das centenas) pode ser escolhido de 5 formas distintas; m_2 (algarismo das dezenas) também pode ser formado de 5 maneiras distintas; enquanto m_3 (algarismo das unidades) permite apenas 2 maneiras distintas de escolha.

Logo, pelo PFC, o total de números ímpares distintos é dado por $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$. Portanto, $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$. Assim, o número máximo de apartamentos desse hotel é 50 e a resposta correta é d.

De acordo com Hazzan (2013), métodos associados ao Princípio Fundamental da Contagem podem parecer desnecessários, quando se está em questão combinações envolvendo um pequeno número de elementos. Todavia, quando se trata de um grande número, a utilização do PFC é determinante, sendo o mesmo facilitado através da utilização de cálculos como Arranjos e Combinações.

Nesse estudo, nos deteremos a aplicação de arranjos e combinações, tendo em vista que os mesmos estão diretamente relacionados ao problema dos pontos, questão motivadora para o desenvolvimento da teoria da probabilidade, conforme visto no capítulo anterior.

3.2 Arranjos simples

Para Souza (2013), Arranjo simples de *n* elementos distintos, tomados p a p, com $n \geq p$ é todo agrupamento ordenado, formado por *p* elementos distintos, escolhidos entre os n existentes. A quantidade total de agrupamentos é indicada por $A_{n,p}$ e calculada por:

Sendo A um conjunto com n elementos distintos, podemos escolher p elementos distintos do conjunto A da seguinte forma:

Quadro 1 - Arranjo simples

$Para\ escolha\ do\ 1^{º}\ elemento$	$Tenho\ n\ possibilidades, pois, ainda\ não\ escolhi\ nenhum.$
$Para\ escolha\ do\ 2^{º}\ elemento$	$Tenho\ n-1\ possibilidades, já\ escolhi\ o\ 1^{º}.$
$Para\ escolha\ do\ 3^{º}\ elemento$	$Tenho\ n-2\ possibilidades, já\ escolhi\ dois.$
$\vdots$	$\vdots$
$Para\ escolher\ o\ p^{º}\ elemento$	$Tenho\ n-(p-1)\ pois,\quad já\ escolhi\ (p-1) elementos.$

Fonte: Galdino (s.d., p. 16) – adaptado.

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o total de possibilidades que temos, isto é, o total de Arranjos simples é:

$$
\begin{aligned}
A_{n,p} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \\
&= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-p)!}.
\end{aligned}
$$

Veja que nesse caso, você tanto pode usar o conceito de Arranjo, como o Princípio Fundamental da Contagem, para resolver problemas ou exemplos, como veremos seguir. Pois mais importante que decorar uma fórmula e aplicá-la é compreender o que deve ser feito.

Problema 2:

(UFPE-PE) Um quarteto de cordas é formado por dois violinistas, um violista e um violoncelista, sendo que os dois violinistas exercem funções diferentes. De quantas maneiras se pode compor um quarteto, se podemos escolher entre quatro violinistas, três violistas e dois violoncelistas?

Solução:

Observe que precisamos de quatro músicos e temos nove. Onde, temos quatro violinistas e precisamos de dois, três violistas e precisamos de um, também de apenas um para violoncelista e temos dois. Assim:

$$A_{4,2} \cdot A_{3,1} \cdot A_{2,1} = \frac{4!}{(4-2)!} \cdot \frac{3!}{(3-1)!} \cdot \frac{2!}{(2-1)!} = \frac{4.3.2!}{2!} \cdot \frac{3.2!}{2!} \cdot \frac{2!}{1!} = 72 \text{ maneiras.}$$

3.3 Arranjo com repetição

Arranjo com repetição é o número de maneiras distintas que podemos escolher p elementos, que podem se repetir, do conjunto A. Seja A um conjunto com n elementos distintos e p um número natural, tal que $n \geq p$. Denotamos o número de arranjo com repetição por $AR_{n,p}$.

Podemos escolher p elementos do conjunto A, que podem se repetir, da seguinte forma:

Quadro 2 - Arranjo com repetição

$Para\ escolha\ do\ 1^{\underline{o}}\ elemento$	$Tenho\ n\ possibilidades$
$Para\ escolha\ do\ 2^{\underline{o}}\ elemento$	$Tenho\ n\ possibilidades\ (os\ elementos\ podem\ repetir)$
$Para\ escolha\ do\ 3^{\underline{o}}\ elemento$	$Tenho\ n\ possibilidades\ (os\ elementos\ podem\ repetir)$
$\vdots$	$\vdots$
$Para\ escolher\ o\ p^{\underline{o}}\ elemento$	$Tenho\ n\ possibilidades\ (os\ elementos\ podem\ repetir)$

Fonte: Galdino (s.d., p. 20) – adaptado.

Portanto, pelo PFC, o total de possibilidades que temos, isto é, o total de Arranjos com repetição é:

$$AR_{n,p} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{p\ vezes} = n^p.$$

Exemplo 6:

Qual o total de placas de carro que podem ser construídas com 3 letras do alfabeto brasileiro?

O alfabeto brasileiro é composto por 26 letras. E para formar as placas com 3 letras podemos repeti-las, ou seja, temos 26 possibilidades de escolha para a primeira letra, 26 possibilidades de escolha para a segunda letra e, finalmente, 26 possibilidades de escolha para a terceira letra. Sendo assim, há aqui um problema de Arranjo com repetição, onde devemos arranjar 26 letras, tomadas $3\ a\ 3$. Então temos:

$$AR_{26,3} = 26^3 = 17576.$$

Logo, podemos formar 17576 placas de carro com 3 letras do alfabeto brasileiro.

3.4 Combinação simples

Combinação simples é o número de maneiras distintas que podemos escolher p elementos distintos do conjunto A, de tal forma que apenas a natureza dos elementos determina agrupamentos distintos. Seja A, um conjunto com n elementos distintos e p um número natural, tal que $n \geq p$. Denotamos o número de Combinações simples de n elementos tomados $p\ a\ p$ por $C_{n,p}$.

Vimos, acima que os Arranjos são agrupamentos caracterizados pela natureza e pela ordem dos elementos escolhidos. Diferentemente dos Arranjos, quando queremos fazer uma Combinação nos preocupamos apenas com a natureza dos elementos escolhidos, ou seja, a ordem em que os elementos estão dispostos não é importante.

Para uma melhor compreensão desse tópico, iremos observar a definição dada por Hazzan (2013, p. 33). Para ele, os problemas de contagem, bem como o conceito de combinação, estão intuitivamente relacionados a ideia de escolher conjuntos.

3.4.1 Dedução da fórmula geral da combinação simples

Para calcular o total de Combinações simples $C_{n,p}$, de n elementos tomados $p\ a\ p$, basta calcular o total de Arranjos simples $A_{n,p}$ e eliminar todos os Arranjos gerados pelas permutações dos p elementos escolhidos, isto é, P_p. Logo,

$$C_{n,p} \cdot P_p = A_{n,p} \rightarrow C_{n,p} \cdot p! = A_{n,p} \rightarrow C_{n,p} \cdot p! = \frac{n!}{(n-p)!} \rightarrow C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Segundo Galdino (s.d., p. 33), como as combinações simples são arranjos que se diferenciam somente pela natureza de seus elementos, é natural que haja muito mais arranjos que combinações, e esses arranjos excedentes são aqueles gerados pelas permutações dos elementos envolvidos, já que a ordem é importante.

Problema 3:

(UDESC-SC) Suponha que um campeonato com 16 equipes seja disputado em turno único, isto é, quaisquer duas equipes jogam entre si apenas uma vez; o número total de jogos do campeonato é:

$a)120$ $b)240$ $c)160$ $d)\ 360$ $e)16$

Solução:

Nesse caso, temos 16 equipes que jogaram entre si apenas uma vez. Como em um jogo temos duas equipes, teremos uma combinação de 16 tomadas $2\ a\ 2$. Então, aplicando a fórmula:

$$C_{16,2} = \frac{16!}{2!\,(16-2)!} = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14!}{2! \cdot 14!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra a.

3.5 Binômio de Newton

De acordo com Milies e Coelho (2006), para uma melhor compreensão do número binomial, devemos introduzir primeiro os números combinatórios, já que eles irão desempenhar um papel fundamental no Teorema do Binômio.

Um coeficiente binomial, também chamado de número binomial, n sobre p, com $n \geq p$ onde $n, p \in \mathbb{N}$, consiste no total de combinações de n elementos tomados p a p e, é simbolizado por $\binom{n}{p}$, onde n é também chamado de numerador e p, de denominador.

Assim, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemplo 7:

$$\frac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}} = \frac{\frac{12!}{4!.8!}}{\frac{12!}{5!.7!}} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} \cdot \frac{5! \cdot 7!}{12!} = \frac{5 \cdot 4! \cdot 7!}{4! \cdot 8 \cdot 7!} = \frac{5}{8}.$$

Dante (2011), define que "toda potência da forma $(x+y)^n$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é conhecida como Binômio de Newton". O desenvolvimento do Binômio de Newton é fácil em casos como os vistos no Ensino Fundamental:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
\vdots & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Observe que o desenvolvimento de $(x+y)^n$, tem $(n+1)$ termos.

O problema que surge é o seguinte: será que podemos obter os termos do desenvolvimento de $(x+y)^n$ sem usar o número binomial?

Observando a concepção de Morgado et al. (2006, p.117), "basta aumentar o expoente de y em uma unidade, diminuir o expoente de x em uma unidade, multiplicar o coeficiente de T_k pelo expoente de x e dividir o produto pelo expoente de y (em T_{k+1}), aumentado de uma unidade". Em posse dessa informação, resolveríamos rapidamente o desenvolvimento de $(x+y)^5$.

$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$$

Observando o que disse Morgado, os coeficientes foram obtidos assim:

$$1, \frac{1 \cdot 5}{1} = 5, \frac{5 \cdot 4}{2} = 10, \frac{10 \cdot 3}{3} = 10, \frac{10 \cdot 2}{4} = 5, \frac{5 \cdot 1}{5} = 1.$$

Portanto, ao analisarmos o enunciado por Morgado et al. (2006) e o exemplo, percebe-se que as informações acima resolvem $(x+y)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Essa proposta é válida, caso não se tenha o interesse em desenvolver os coeficientes de x e y, usando a expansão $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

Assim, chegamos a um ponto crucial desse capítulo, ou seja, demonstrar que é possível resolver problemas envolvendo probabilidade, através do uso de Binômio de Newton. Daqui em diante, mostraremos algumas definições, teoremas e propriedades referentes ao Triângulo de Pascal, porém, sem o uso do número binomial. O mesmo será aplicado para análise de situações envolvendo Probabilidades, entre elas podemos destacar lançamentos de moedas, nascimento de filhos, questões relacionadas à genética.

3.6 Triângulo de Pascal

Como vimos no primeiro capítulo desta obra, antes da era cristã, Pingala (600 a. C.) já apresentava conceitos gerais que podem ser associados ao Triângulo Aritmético, embora esse termo não fosse utilizado na época. Todavia, o mesmo passou a ser conhecido como Triângulo de Pascal, devido ao fato de Blaise Pascal (1623 – 1662), físico e matemático francês, ter descoberto a maioria das propriedades e relações referentes ao Triângulo Aritmético.

O Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números relacionados entre si. O referido triângulo dispõe os números binomiais em uma tabela, onde os coeficientes binomiais de mesmo numerador ocupam a mesma linha e, os de mesmo denominador ocupam a mesma coluna. Assim, a linha k representa todos os coeficientes desde $\binom{n}{0}$ até $\binom{n}{n}$. A seguir representamos o Triângulo Aritmético de Pascal com os respectivos coeficientes binomiais:

$$
\begin{array}{ll}
Linha\ 0 & \binom{0}{0} \\
Linha\ 1 & \binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
Linha\ 2 & \binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
Linha\ 3 & \binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
Linha\ 4 & \binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
Linha\ 5 & \binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \\
\vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
Linha\ n & \binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n-2}\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Agora, veremos algumas propriedades específicas do Triângulo Aritmético de Pascal, que são extremamente necessárias à sua construção, pois facilita determinarmos os números binomiais sem a necessidade de calcular todos eles.

3.6.1 Propriedades do Triângulo de Pascal

De acordo com Giovanni (2015), destaca-se essas propriedades no Triângulo de Pascal:

1ª propriedade:

Todos os elementos da 1ª coluna são iguais a 1, pois $\binom{n}{0} = 1$.

Prova:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(\mathrm{n}-0)!} = \frac{\mathrm{n}!}{0!\,\mathrm{n}!} = 1, \mathrm{pois}, 0! = 1.$$

2ª propriedade:

O último elemento de cada linha é igual a 1, pois $\binom{n}{n} = 1$.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{\mathrm{n}!\,(\mathrm{n}-\mathrm{n})!} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{n}!\,0!} = 1, \mathrm{pois}, 0! = 1.$$

3ª propriedade:

Numa linha quaisquer, dois binomiais, equidistantes dos extremos são iguais. Observe:

$$\begin{matrix} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{matrix}$$

Prova:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{\mathrm{k}!(\mathrm{n}-\mathrm{k})!} = \frac{n!}{(\mathrm{n}-\mathrm{k})![\mathrm{n}-(\mathrm{n}-\mathrm{k})]!} = \binom{n}{n-k}.$$

4ª propriedade:

A partir da 3ª linha, e com exceção do primeiro e do último elemento de cada linha, cada elemento do triângulo de Pascal é igual à soma do elemento imediatamente superior a ele com o elemento anterior a este.

$$
\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots
\end{array}
$$

De modo geral: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, para $n \geq 2$ relação de Stifel.

Prova:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{\mathrm{k!(n-k)!}} + \frac{n!}{\mathrm{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{\mathrm{(k+1)!(n-k)!}} = \frac{n![(k+1)+(n-k)]}{\mathrm{(k+1)!(n-k)!}} = \frac{n!(n+1)}{\mathrm{(k+1)!(n-k)!}} = \frac{(n+1)!}{\mathrm{(k+1)!(n-k)!}} = \binom{n+1}{k+1}.$$

A seguir provaremos a expansão binomial fazendo uso do princípio da indução finita, e em seguida a demonstração da 5ª propriedade do Triângulo de Pascal, pois já o anunciamos no primeiro capítulo.

Expansão Binomial:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Demonstração:

Base de indução: para $n = 1 \rightarrow (a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$, então válido para base.

Hipótese de indução: supondo verdadeiro para algum n a expressão. $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$.

Tese de indução: devemos mostrar que também é válido para $(n+1)$, ou seja, vale a implicação $(a+b)^n \rightarrow (a+b)^{n+1}$.

Para isso, devemos multiplicar $(a+b)^n$ por $(a+b)$, primeiro multiplicando por a e em seguida por b, obtendo:

$$(a+b)(a+b)^n = (a+b)\left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right] \rightarrow$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \cdots + \binom{n}{n}ab^n +$$

$$\binom{n}{0}a^n b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Pois, sabemos pela 4ª propriedade acima citada, que trata da relação de Stifel, que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, além disso, sabe-se que $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$, $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ são extremos nos triângulos de Pascal, logo, iguais a 1. Vejamos:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$

Portanto, $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$, válido $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

5ª propriedade:

A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2, cujo expoente é igual ao numerador desses números binomiais.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Antes de demonstrarmos esta propriedade, observe a seguinte construção:

$$
\begin{array}{lll}
Linha\ 0 & \binom{0}{0} & \rightarrow \quad 1 = 2^0 \\
Linha\ 1 & \binom{1}{0} + \binom{1}{1} & \rightarrow \quad 1 \quad 1 = 2^1 \\
Linha\ 2 & \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} & \rightarrow \quad 1 \quad 2 \quad 1 = 2^2 \\
Linha\ 3 & \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} & \rightarrow \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 = 2^3 \\
Linha\ 4 & \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} & \rightarrow \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 = 2^4 \\
\vdots & \qquad \vdots & \\
Linha\ n & \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n &
\end{array}
$$

Observe, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ representa somatório e é um operador matemático para representar a soma de n termos, em uma determinada sequência. No caso, ele substituiria a referida linha do Triângulo de Pascal. Agora, veremos a demonstração da propriedade citada acima utilizando para isso o princípio da indução finita.

Demonstração:

Base de indução para $n = 1$, temos: $\mathrm{P}(1)\colon \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1$, portanto válido.

Hipótese de indução: supondo verdadeiro para algum n a expressão,

$$\mathrm{P}(n)\colon \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tese de indução: devemos mostrar que também é válido para $(n + 1)$, ou seja, vale a implicação $\mathrm{P}(n) \rightarrow \mathrm{P}(n + 1)$.

Para isso, devemos somar 2^n em ambos os lados de $\mathrm{P}(n)$, obtemos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} + 2^n = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{(n+1)}$$

$$\updownarrow$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} +$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^{(n+1)}$$

$$\updownarrow$$

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} = 2^{(n+1)}.$$

Pois, sabemos que $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$, $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ e pela relação de Stifel:

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Portanto, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ é válido $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Problema 4:

(UEPB-PB) Suponha que $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 8191$. O valor de n será:

$a)14$ $\quad b)12$ $\quad c)13$ $\quad d)15$ $\quad e)11$

Solução:

Veja que a solução da questão sai direto pela propriedade 5, pois, ela define que a soma dos elementos de qualquer linha do triângulo de Pascal é 2^n. No entanto, nesse somatório faltou o $\binom{n}{0} = 1$, então, o lado esquerdo $2^n - \binom{n}{0} \rightarrow 2^n - 1$. Segue a solução:

$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 8191 \rightarrow$

$2^n - \binom{n}{0} \rightarrow 2^n - 1 = 8191 \rightarrow 2^n = 8192 = 2^{13}$, então,

$2^n = 2^{13}$, portanto, $n = 13$.

Consequentimente, em uma mesma linha n, a soma dos números binomiais é uma potência de base 2 e expoente igual ao numerador do número binomial, então seu resultado é 2^n, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, a partir das propriedades apresentadas, o Triângulo Aritmético de Pascal se apresenta da seguinte forma:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Até aqui nos preocupamos em apresentar os elementos essencias da Análise Combinatória, expondo conceitos e aplicações referentes ao Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo simples e com repetição, Binômio de Newton, Combinação simples e Triângulo de Pascal. Na próxima seção, veremos de que forma esse conhecimento pode auxiliar a resolução de questões envolvendo Probabilidade.

4. NOÇÕES FUNDAMENTAIS DE PROBABILIDADES

Na definição de Nicholson (1818), probabilidade é "o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas, através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si". Para Dante (2011, p. 308), "a teoria das probabilidades é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios", tornando a mesma de extrema importância na sociedade contemporânea, considerando que existe uma infinidade de possibilidades para suas aplicações.

Entre uma de suas aplicações está a possibilidade de ganhar na Mega Sena. Afinal, que brasileiro nunca pensou em ficar rico da noite para o dia? Milhares! Por esse motivo, muitos apostadores procuram as casas lotéricas diariamente.

Partindo desse fato, mostraremos agora como a Análise Combinatória e Probabilidade podem ser utilizadas para demonstrar a possibilidade real de determinado apostador obter êxito. Vejamos:

Problema 5:

Qual é a probabilidade de um apostador ganhar na mega sena com 6 acertos, lembrando que, para jogar na Mega Sena, o apostador deve escolher de 6 a 15 números de uma cartela que contém de 1 a 60?

Solução:

Para resolvermos esse problema, temos que levar em consideração o espaço amostral do sorteio, dos quais o apostador precisa acertar 6 no universo de 60.

$$n(\Omega) = C_{(60,6)} = \frac{60!}{6!\,(60-6)!} = \frac{60!}{6! \cdot 54!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54!}{6.5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 54!} = 50063860.$$

Então, para sabermos a probabilidade de um apostador acertar as 6 dezenas, é preciso considerar a quantidade de números apostados. Nessas condições, vamos observar o quadro a seguir:

Quadro 3 - Probabilidade de ganhar na mega sena

6	$C_{(6,6)}$	$\frac{1}{50063860}$
7	$C_{(7,6)}$	$\frac{1}{7151980}$
8	$C_{(8,6)}$	$\frac{1}{1787995}$
9	$C_{(9,6)}$	$\frac{1}{595998}$
10	$C_{(10,6)}$	$\frac{1}{238399}$
11	$C_{(11,6)}$	$\frac{1}{108363}$
12	$C_{(12,6)}$	$\frac{1}{54182}$
13	$C_{(13,6)}$	$\frac{1}{29175}$
14	$C_{(14,6)}$	$\frac{1}{16671}$
15	$C_{(15,6)}$	$\frac{1}{10003}$

Fonte: Almeida (2014), adaptado.

Veja que na terceira coluna dessa tabela, usamos o espaço amostral como denominador em todos os casos que se adimite apostas, que são as combinações de $(C_{6,6}, C_{7,6}, \cdots, C_{15,6})$. Feito também as devidas simplificações, representam a probabilidade de ganhar nesse jogo, dependendo de quantos números serão jogados.

Hazzan (2013, p. 90) esclarece que, “chamamos de espaço amostral, e indicamos por Ω, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório”. Por sua vez, Dante (2011, p. 308) acrescenta que, “qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento”, o qual pode ser definido por um conjunto de casos favoráveis de um determinado acontecimento, podendo ser representado por A.

Souza (2013, p.251) considera um evento A de um espaço amostral Ω finito e equiprovável. A razão entre a quantidade de elementos de A indicados por $n(\mathrm{A})$ e a quantidade de elementos de Ω indicada por $n(\Omega)$ é a probabilidade $P(\mathrm{A})$ de o evento A ocorrer. Observe a expressão:

$$P(A) = \frac{número\ de\ elementos\ de\ A}{\text{número de elementos de }\Omega} = \frac{n(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} \text{ ou } P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Analisando a expressão acima, pode-se concluir que, a teoria do azar permite limitar todos os fenômenos do mesmo tipo a “um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento, cuja probabilidade é buscada”. Assim, a probabilidade pode ser calculada por “uma fração, cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis”. (MORGADO et al., 2006, p. 127).

Problema 6:

(ENEM – 2009) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto $\{01, 02, 03, \cdots, 59, 60\}$, custava R$1,50. Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

a)$1\ \frac{1}{2}$ vezes menor b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor c) 4 vezes menor

d) 9 vezes menor e) 14 vezes menor

Solução:

A cada aposta de seis dezenas, concorre-se com $C_{6,5} = 6$ quinas. Em 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, concorre-se com $84 \cdot 6 = 504$ quinas. Em uma aposta única com nove dezenas, concorre-se com $C_{9,5} = \frac{9!}{5!(9-6)!} = \frac{9!}{5!\cdot 4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5!} = \frac{3024}{24} = 126$ quinas. Observe que a probabilidade de acertar a quina no segundo caso ($126\ quinas$) é 4 vezes menor que no primeiro caso ($504\ quinas$). Então a resposta correta está na letra c.

4.1 Espaço de probabilidade

Nesse momento, iremos iniciar a noção geral de probabilidade e demonstrar várias propriedades, que são consequências quase que imediata da definição. Meyer (2006, p.18), define probabilidade da seguinte maneira: seja $\mathcal{E}$ um experimento, seja Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. A cada evento A associaremos um número real representado por $P(A)$ e denominado probabilidade de A, que satisfaça às seguintes propriedades:

(1) $\emptyset \leq P(A) \leq 1$, para todo evento $A \subset \Omega$.

(2) $P(A) = 0,\ P(\Omega) = 1$.

(3) Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, isto é, $A \cap B = \emptyset$.

Os teoremas que veremos serão apresentados segundo Meyer (2006), em sua obra Probabilidade Aplicações à Estatística.

Teorema 1. Se $\emptyset$ for conjunto vazio, então $P(\emptyset) = 0$.

Demonstração*:* Para qualquer evento A, podemos escrever $A = A + \emptyset$. Uma vez que $A + \emptyset$ são mutuamente excludentes, decorre da propriedade 3, que $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$. Daqui a conclusão é imediata.

Depois, teremos a oportunidade de ver que a recíproca não é verdadeira. Se $P(\mathrm{A}) = 0$, não teremos garantia que $A = \emptyset$. É o caso de designarmos probabilidade zero a um evento que pode ocorrer.

Teorema 2. Se A^c for o evento complementar de A, então $P(A) = 1 - P(A^c)$.

Demonstração: Podemos escrever $\Omega = A + A^c$ e, empregando as propriedades 2 e 3, obteremos $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = 1 = P(A) + P(A^c)$.

Portanto, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Este resultado é particularmente útil, pois ele significa que em muitos casos é mais fácil encontrar $P(A^c)$ e depois encontrar $P(A)$ por subtração.

Teorema 3. Se A e B forem dois eventos quaisquer, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração: A ideia desta demonstração é decompor $A \cup B$ e B em dois eventos mutuamente excludentes e, em seguida, aplicar a propriedade 3.

Daí, $A \cup B = A \cup (B \cap A^c),\ B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$.

Consequentemente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c).$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira, obtemos:

$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Com esse teorema, obtemos uma extensão da propriedade 3, pois se $A \cap B = \emptyset$, tem-se exatamente a propriedade 3.

Teorema 4. Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Usaremos o fato, já provado, de que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Temos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \big((A \cup B) \cup C\big) \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P\big((A \cup B) \cap C\big) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P\big((A \cup B) \cap C\big). \end{aligned}$$

Agora:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ e daí,

$$P\big((A \cup B) \cap C\big) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big)$$

$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C).$$

Substituindo na expressão anterior, obtemos, finalmente:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Portanto, teorema válido.

Teorema 5. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração: Podemos decompor B em dois eventos mutuamente excludentes, na seguinte forma: $B = A \cup (B \cap A^c)$.

Consequentemente, $P(B) = P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A)$, porque $P(B \cap A^c) \geq 0$, pela propriedade 1.

Para este caso, seu resultado é diretamente intuitivo, pois é possível perceber que se B deve ocorrer quando A ocorrer, então B é mais provável do que A.

Problema 7:

(UEL-PR) De um total de 500 estudantes da área de exatas, 200 estudam Cálculo Diferencial e 180 estudam Álgebra Linear. Esses dados incluem 130 estudantes que estudam ambas as disciplinas. Qual é a probabilidade de que um estudante escolhido aleatoriamente esteja estudando Cálculo Diferencial ou Álgebra Linear?

$a)0{,}26$ $\quad b)0{,}50$ $\quad c)0{,}62$ $\quad d)0{,}76$ $\quad e)0{,}80$

Solução:

Sejam $A \text{ e } C$ os eventos "estudar Álgebra Linear" e "estudar Cálculo Diferencial", respectivamente.

Assim sendo:

$$P(A) = \frac{180}{500} = \frac{9}{25}, \qquad P(C) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} \quad \text{e} \quad P(A \cap C) = \frac{130}{500} = \frac{13}{50}$$

A probabilidade de que um estudante escolhido aleatoriamente esteja estudando Álgebra Linear ou Cálculo Diferencial é dada por:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \rightarrow P(A \cup C) = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} - \frac{13}{50} = \frac{1}{2} =$$
$0{,}5 \ ou \ 50\%$.

Logo, a alternativa correta é a letra b.

4.2 Probabilidade condicional

É necessário entendermos que Probabilidade condicional não é representada por um teorema, nem por um axioma, pois nada será demonstrado, iremos tratar da ideia intuitiva de probabilidade condicionada.

Iniciaremos com uma definição formal, que corresponde a noção intuitiva da mesma. Para Morgado e Carvalho (2015:148), dados dois eventos A e B, com $P(A) \neq 0$, a probabilidade condicional de B na certeza de A é o número $P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Para o caso acima, isto é, probabilidade condicional de B já ocorrido A, sempre que calcularmos $P(B \setminus A)$, estamos essencialmente calculando $P(B)$ em relação ao espaço amostral reduzido A, em lugar de fazê-lo em relação ao espaço amostral origina Ω. É importante observamos que, quando calculamos probabilidade condicional, estamos reduzindo nosso espaço amostral para o evento que já aconteceu.

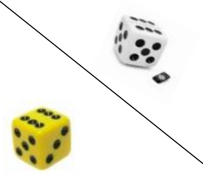
Para Meyer (2006, p. 45), a mais importante consequência da definição de probabilidade condicionada é obtida ao se escrever:

$P(A \cap B) = P(B \setminus A)P(A)$ ou, equivalente $P(A \cap B) = P(A \setminus B)P(B)$.

Esta expressão, algumas vezes, é mencionada como teorema da multiplicação de probabilidades, onde podemos aplicar esse teorema para calcular a probabilidade dos acontecidos no conjunto dos eventos $A\ e\ B$.

Problema 8: (Meyer, 2006:46) Dois dados equilibrados são lançados, registrando-se o resultado como (x_1, x_2), onde x_i é o i-ésimo dado, $i = 1{,}2$. Por isso, o espaço amostral Ω pode ser representado pela seguinte lista, de 36 resultados igualmente prováveis.

Quadro 4 - Espaço amostral do lançamento simultâneo de dois dados

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: autor

Solução:

Considerando os dois eventos:

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2/\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = 10\}, \mathrm{B} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2/\mathrm{x}_1 > \mathrm{x}_2\}$.

Daí, $A = \{(5{,}5), (4{,}6), (6{,}4)\}\ e\ B = \{(2{,}1), (3{,}1), (3{,}2), (4{,}1), (4{,}2), (4{,}3), (5{,}1), (5{,}2), (5{,}3), (5{,}4), (6{,}1), (6{,}2), (6{,}3), (6{,}4), (6{,}5)\}$.

Com efeito, $P(A) = \frac{3}{36}$, $P(B) = \frac{15}{36}$ e $P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$.

Uma vez que o espaço amostral é formado por A e possui três resultados, é lógico que apenas um desses três resultados é coeso com o evento B. E seguindo o padrão, vemos que $P(B \setminus A) = \frac{1}{15}$.

E para finalizar, vamos mostrar $P(A \cap B)$ com argumentos. O evento $A \cap B$ ocorre se, e somente se, a soma dos dois dados for 10 e, se o primeiro dado tiver apresentado um valor maior que o segundo dado. Existe apenas um desses resultados e, por isso, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

4.3 Eventos independentes

Para esta definição, algumas observações se fazem necessárias. Veja que $\mathrm{P(A \cap B) = P(A \setminus B)P(B) = P(A)P(B)}$, $\mathrm{P(A \cap B) = P(B \setminus A)P(A) = P(B)P(A)}$.

Assim, percebemos que essas informações são válidas quando $\mathrm{P(A)} \neq 0$ e $\mathrm{P(B)} \neq 0$, pois vemos que as probabilidades absolutas são iguais as probabilidades condicionais se, e somente se, $\mathrm{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$.

Em definição dada por Meyer (2006, p.53), A e B serão eventos independentes se, e somente se, $\mathrm{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$.

Veja que a definição acima é equivalente a definição apresentada no item 3.2. (Probabilidade condicional), desde que A e B sejam independentes no momento em que $\mathrm{P(B \setminus A) = P(B)}$ e $\mathrm{P(A \setminus B) = P(A)}$. Sendo que esta última maneira é relativamente intuitiva, pois nos mostra que A e B serão independentes, se a ocorrência de A não intervir na probabilidade da ocorrência de B.

Esta definição será válida também para $\mathrm{P(A)}$ e $\mathrm{P(B)}$ nulos.

Problema 9:

Essa questão foi retirada do livro de Dante (2011, p.322).

Uma moeda perfeita é lançada duas vezes. Considerando os eventos: A, sair cara na $1^{\underline{a}}$ jogada; B, sair cara na $2^{\underline{a}}$ jogada. Demonstre que os eventos A e B são independentes.

Solução:

Seja o espaço amostral $\Omega = \{\mathrm{cc}, \mathrm{ck}, \mathrm{kc}, \mathrm{kk}\}$, evento $A = \{cc, ck\}$ e evento

$|B = \{cc, kc\}$.

Observe a legenda c→cara e k→coroa, então:

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{e } A \cap B = \{cc\} \to P(B \cap A) = \frac{1}{4}, \text{como } \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$ logo $\mathrm{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$, portanto $A\ e\ B$ são independentes.

Morgado et al. (2006:167) generaliza a definição acima citada da seguinte maneira:

Definição: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são independentes se ∀ k, e ∀ $i_1, i_2, \cdots, i_k$, tem-se:

$P(Ai_1 \cap Ai_2 \cap \cdots \cap Ai_k) = P(Ai_1) \cdot P(Ai_2) \cdot \cdots \cdot P(Ai_k)$.

Observando a definição, vemos que para o caso de dois eventos serem independentes, devemos verificar apenas uma identidade. E para provar que n eventos são independentes é necessário que verifiquemos para $2^{\mathrm{n}} - \mathrm{n} - 1$. Isso é igual à quantidade de subconjuntos com no mínimo dois elementos pertencentes a um conjunto com n elementos.

Problema 10.

Esta questão foi tirada do livro de Morgado et al. (2006, p.168):

Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros A e B. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, respectivamente. O jogador vencerá o torneio se ganhar dois jogos consecutivos, de uma série de 3. Que série de jogos é mais favorável para o jogador: ABA ou BAB?

Solução:

A probabilidade do jogador vencer se escolher a primeira série ABA é: ganha de A, ganha de B ou perde para A, ganha de B e ganha de A. Vejamos:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}= \frac{10}{27}.$$

A probabilidade do jogador vencer se escolher a segunda série BAB é: ganha de B, ganha de A ou perde para B, ganha de A e ganha de B.

$$\frac{2}{3}\cdot \frac{1}{3}+ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}= \frac{8}{27}.$$

Portanto, a primeira série (ABA) é a mais favorável. E este resultado pode parecer admirável, uma vez que o jogador A é o adversário mais difícil, pois ele aparece duas vezes na primeira série. No entanto, o jogo com o adversário A na segunda série é determinante. E na primeira série ele joga apenas duas vezes com A, por isso fica evidente qual série é mais favorável.

4.4 Método binomial

Esse teorema é muito usado em produto de probabilidade, no caso de calcular a probabilidade quando um casal pretende ter n filhos, a probabilidade de serem h homens e m mulheres e outras formatações possíveis.

Esse será o caso em que usaremos Binômio de Newton, já estudado nesse trabalho. Assim, partiremos em busca de soluções usando o desenvolvimento de $(x+y)^n$ e a generalização dada por Morgado et al. (2006:182), onde o mesmo define que a probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos, em n provas independentes, na qual a probabilidade de sucessos em cada prova é p, é igual a:

$P=\binom{n}{k}\mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}}$, quando usarmos essa fórmula, estaremos aplicando o teorema binomial. E devemos observar a aplicação do teorema do evento complementar de A, então $P(A)=1-P(A^c)$, para resolução de problemas do cotidiano.

Exemplo 8:

Questão tirada do livro de Dante (2011, p.327).

Um casal pretende ter 5 filhos e deseja saber qual é a probabilidade de ter:

a) 5 meninos;

b) 2 meninos e 3 meninas;

c) 1 menino e 4 meninas;

d) o $1^{\text{º}}$ homem, o $2^{\text{º}}$ mulher, o $3^{\text{º}}$ mulher, o $4^{\text{º}}$ homem e o $5^{\text{º}}$ mulher.

Na solução dessa questão, usaremos o desenvolvimento de $(\mathrm{h}+\mathrm{m})^5$, onde $\mathrm{h}\rightarrow$homem e $\mathrm{m}\rightarrow$mulher, então:

* $(\mathrm{h}+\mathrm{m})^5 = \mathrm{h}^5 + 5\mathrm{h}^4\mathrm{m} + 10\mathrm{h}^3\mathrm{m}^2 + 10\mathrm{h}^2\mathrm{m}^3 + 5\mathrm{hm}^4 + \mathrm{m}^5$

a) No item a, podemos calcular como $P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$, onde $P = \binom{n}{k}\mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}} = \mathrm{h}^5$.

b) No caso de b, podemos resolvê-lo usando* e o termo referente ao que se pede,

$$P(B) = \binom{n}{k}\mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}} = 10\mathrm{h}^2\mathrm{m}^3 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

c) Podemos caracterizar a solução do item b, $P(C) = \binom{n}{k}\mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}} = 5\mathrm{hm}^4 = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$.

d) Já no item d usaremos $A_1, A_2, \cdots, A_n$, que são independentes. Para $\forall_k$ e $\forall\, i_1, i_2, \cdots, i_k,$ tem-se: $P(Ai_1 \cap Ai_2 \cap \cdots \cap Ai_k) = P(Ai_1)\cdot P(Ai_2)\cdot\cdots\cdot P(Ai_k)$. Assim, temos Probabilidade condicional, $P(D) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{32}$, pois os eventos são independentes.

4.5 Aplicações do método binomial

O método binomial pode ser utilizado para resolver problemas que tenham apenas dois resultados possíveis. Este método é muito utilizado em situações nas quais ocorre o produto de probabilidades. Para construir o modelo binomial, vamos introduzir uma sequência lógica, que denotaremos por p, para casos favoráveis e por $(1-p)$ para casos não-favoráveis, onde a probabilidade de um ponto probabilístico é $P = \binom{n}{k}\mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}}$.

Sabemos também que os coeficientes binomiais podem ser obtidos pelo Triângulo de Pascal.

Vejamos alguns problemas retirados das obras de Dante (2011), Hazzan (2013), Souza (2013) e Giovanni (2015).

Problema 11.

Um dado é jogado 7 vezes. Qual é a probabilidade de sair o número 5 quatro vezes?

Solução:

Probabilidade de sair o 5 em cada jogada: $p = \frac{1}{6}$.

Probabilidade de não sair o número 5 em cada jogada: $1 - p = \frac{5}{6}$.

Probabilidade de sair o 5 em 4 das 7 jogadas: $P = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Problema 12.

Uma prova é constituída de 10 exercícios em forma de teste, com 5 alternativas em cada teste. Se um aluno “chutar” todas as respostas, qual é a probabilidade de ele acertar 6 exercícios?

Solução:

Probabilidade de acertar, em cada questão: $p = \frac{1}{5}$.

Probabilidade de errar, em cada questão: $1 - p = \frac{4}{5}$.

Probabilidade de acertar 6 das 10 questões: $p = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4$.

Problema 13.

Uma moeda é lançada 8 vezes. Qual é a probabilidade de sair cara 5 vezes?

Solução:

Probabilidade de sair cara é $p = \frac{1}{2}$.

Probabilidade de não sair cara é $1 - p = \frac{1}{2}$.

Então, a probabilidade de sair cara 5 vezes é: $\binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Problema 14.

Uma urna tem 4 bolas vermelhas (V) e 6 brancas (B). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. O experimento é repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

Solução:

Probabilidade de sair bola vermelha em cada retirada: $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Probabilidade de não sair bola vermelha em cada retirada da: $1 - p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Probabilidade de sair vermelha em 3 das 5 retiradas: $P = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$.

4.5.1 Generalizando aplicações do método binomial

Observando os tipos de problemas acima expostos, podemos perceber o quanto é forte o método binomial na solução de questões envolvendo probabilidades, pois:

a. Uma experiência é realizada n vezes independentemente;

b. Em cada uma das n vezes, um evento A tem probabilidade p de ocorrer;

c. A probabilidade de A não ocorrer em cada vez é $1 - p$;

d. A probabilidade de A ocorrer em k das n vezes é dada por: $\binom{n}{k}\mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}}$.

Sendo assim, pode-se considerar “verdade que a solução de um problema (⋯), aqui ‘probabilidade’, exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema”. Morgado (2006, p.2). Por isso, as soluções dos problemas expostos partiram da compreensão das informações apresentadas pelas questões, que permitiram definir o método binomial como a opção mais adequada para solucionar as mesmas.

4.6 Aplicações de probabilidade à genética

Nas considerações de Dante (2011, p. 331), “a genética é, talvez, o ramo da Biologia que utiliza os conceitos matemáticos envolvidos na teoria das probabilidades. Isso porque, em probabilidade, trabalhamos com os eventos chamados aleatórios”, entre eles, genótipo e fenótipo.

Lopes e Rosso (2005, p.438) afirmam que o termo genótipo se aplica “tanto ao conjunto total de genes de um indivíduo como a cada par de alelos em particular”. Entende-se por alelo as formas distintas em que os genes podem se apresentar. Quando nas células de um indivíduo, os alelos que compõem um par são idênticos entre si, o indivíduo é classificado como homozigótico (puro). Exemplos: AA; BB; aa; bb. Entretanto, quando o par é composto por alelos diferentes, o indivíduo é denominado heterozigótico (híbrido). Exemplo: Aa; Bb; Cc.

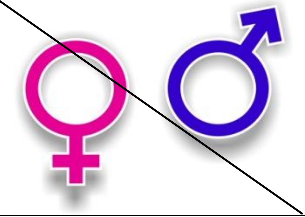
O alelo dominante é representado por letra maiúscula e, quando está presente, sua carcaterística sempre se manifesta, seja em homozigose (AA; BB) ou heterozigose (Aa, Bb). Enquanto isso, o alelo recessivo é representado por letra minúscula e só se manifesta em homozigose (aa; bb).

O termo fenótipo representa as possibilidades de manifestação do genótipo ao interagir com o meio. E é justamente no campo dessas possibilidades de manifestação dos genótipos que a probabilidade pode contribuir para fazer previsões no campo da genética.

Partindo das definições supracitadas, iremos fazer uma análise de alguns casos para resolver determinados problemas.

Observe a seguinte situação: Um indivíduo heterozigoto para determinada característica (Aa) forma dois tipos de espermatozoides, A e a. Se uma mulher também for heterozigota, poderá formar óvulo A e a. Depende apenas do acaso o fato de ser o espermatozóide A ou a o responsável pela fecundação, assim como também depende apenas do acaso, o fato de ser a célula feminina A ou a fecundada.

Quadro 5 - Possibilidades com suas respectivas probabilidades

	$A \rightarrow \frac{1}{2}$	$a \rightarrow \frac{1}{2}$
$A \rightarrow \frac{1}{2}$	$AA \rightarrow \frac{1}{4}$	$Aa \rightarrow \frac{1}{4}$
$a \rightarrow \frac{1}{2}$	$Aa \rightarrow \frac{1}{4}$	$aa \rightarrow \frac{1}{4}$

Fonte: Dante (2011, p. 331)

A partir do quadro acima, podemos resolver alguns problemas envolvendo o tema aqui exposto.

Problema 15.

No ser humano, o albinismo é determinado por um gene recessivo a, enquanto a pele normal é determinada pelo alelo dominante A. Um casal heterozigoto, com pigmentação normal, teve como primeiro descendente uma criança albina.

a) Qual é a probabilidade de que seus próximos dois filhos sejam albinos?

Solução:

O fato de a primeira criança ser albina não influenciará, nesse aspecto, a hereditariedade das futuras crianças. São, pois, eventos independentes.

Analisando o quadro acima a probabilidade de cada criança ser albina em qualquer nascimento é $aa \rightarrow \frac{1}{4}$ ou seja 25%. Portanto:

$$P(segunda\ criança\ ser\ albina) = \frac{1}{4}.$$
$$P(terceira\ criança\ ser\ albina) = \frac{1}{4}.$$

Observemos, que esse é um caso de probabilidade com eventos independentes, ou seja, $P(seg \cap ter) = P(seg)\,.\,P(ter)$.

$$P(segunda\ e\ terceira\ crianças\ serem\ albinas) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ ou } 6{,}25\%.$$

b) Qual a probabilidade de que seus próximos dois filhos tenham pigmentação normal?

Solução:

A probabilidade de que cada um, separadamente, dos seus próximos dois filhos tenha pigmentação normal é $\frac{3}{4}$ ou 75%, pois:

$$\frac{1}{4}\text{AA} + \frac{1}{2}\text{Aa}, \text{ ou seja, } \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Logo:

Outro caso de probabilidade com eventos independentes, ou seja, $P(seg \cap ter) = P(seg) \cdot P(ter)$.

$$P(segunda\ e\ terceira\ crianças\ terem\ pigmentação\ normal) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \text{ ou } 56{,}25\%.$$

c) Qual a probabilidade de pelo menos um dos seus próximos dois filhos ser albino e menino?

Solução:

A probabilidade de pelo menos um dos seus próximos dois filhos ser albino é:

Veja que nesse caso estamos com uma probabilidade, onde o melhor caminho é encontrar seu complementar, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

$P(A^c) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$ ou aproximadamente 43%.

Como a probabilidade de ser menino é $\frac{1}{2}$, então a probabilidade de pelo menos uma criança ser menino e albino é dada pelo produto:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{16} = \frac{7}{32}$ ou aproximadamente 22%.

d) Três filhos: 2 normais e 1 albino.

Solução:

Seguindo o desenvolvimento do binômio $(n + a)^3 = n^3 + 3n^2a + 3na^2 + a^3$ e a legenda, onde n→normal e a→albino, usaremos $3n^2a$, pois temos que responder a probabilidade para o caso 2 normais e 1 albino. Então:

$$P(2\ normais\ e\ 1\ albino) = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 3 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64}.$$

Como pode ser observado nos problemas acima, diversas são as questões ligadas à genética que fazem uso dos conceitos probabilísticos. No entanto, será na seção seguinte que apresentaremos uma proposta pedagógica de intervenção direcionada ao professor de Matemática que atua no Ensino Médio.

5. WEBQUEST: PROBABILIDADE APLICADA A GENÉTICA

5.1 Contexto histórico educacional

Ao longo da história da educação brasileira, o ensino da Matemática esteve associado a transmissão de conteúdos. Os saberes produzidos pelas gerações anteriores eram repassados como verdades absolutas, inquestionáveis e apresentando reduzido vínculo com a realidade vivenciada. Neste contexto, os melhores recursos seriam a voz do professor, os exercícios de fixação, a repetição, a memorização e, principalmente, a passividade do aluno.

No entanto, os avanços tecnológicos ocorridos nas últimas décadas provocaram uma intensa mudança na sociedade atual, alterando tanto os aspectos econômicos, quanto os sociais, políticos e culturais. Estas alterações determinaram a reestruturação da nossa forma de pensar, sentir e viver, exigindo que o cidadão do mundo “virtual”, desenvolva diversas competências, que o torne capaz de lidar com a produção e a divulgação constante de informação.

Desta forma, a escola precisa repensar sua função social e buscar novas alternativas que favoreçam o processo de ensino-aprendizagem, pois para transmitir fórmulas prontas e passar “macetes”, os recursos multimídias (textos, som, imagens fixas e animadas, vídeos) da internet se apresentam como instrumento bem mais interessante que o professor.

5.2 Origem e finalidades da metodologia Webquest

Assim, uma vez inseridos na sociedade digital, não podemos apenas continuar repetindo padrões válidos em épocas anteriores, é preciso refletir sobre que estratégias pedagógicas devem ser mantidas e quais necessitam ser alteradas.

Partindo desta realidade, em 1995, o professor Bernie Dodge da Universidade de San Diego, Estados Unidos, desenvolveu a metodologia de ensino WebQuest, tendo como objetivo orientar processos de pesquisa via Web.

A metodologia Webquest permite que o próprio docente crie sua página Web, propondo para os alunos uma tarefa que para ser desenvolvida exige pesquisa na

Web e trabalho colaborativo. Ao longo do processo, os alunos podem sugerir outros sites ou fontes de pesquisa, todavia, cabe ao docente estruturar todas as etapas do processo, verificando previamente se as informações presentes nos links sugeridos são válidas e se a questão proposta é motivadora. (MASCARENHAS, 2005).

A preocupação em coordenar a realização de pesquisas via Web decorre do fato de que, sem a devida orientação, esse processo pode se tornar apenas “um dispersivo e inútil coletar de dados sem relevância, que não agregam qualidade pedagógica ao uso da rede.” (DODGE, 1995, p. 6; ROCHA, 2007). Assim, a metodologia Webquest contribui para evitar a dispersão, envolvendo alunos e professores em uma metodologia ativa, que estímule o pensamento crítico e a produção do conhecimento pelos próprios alunos.

5.3 Metodologia ativa e atividades estruturadas

Com relação à Metodologia Ativa, Moran (2007, p.150), defende que o professor “é um articulador de aprendizagens ativas, um conselheiro de pessoas diferentes, um avaliador de resultados. Seu papel é mais nobre, menos repetitivo e mais criativo do que na escola convencional”.

Assim, o docente precisa construir mecanismos pedagógicos em que a tecnologia seja colocada a serviço da aprendizagem, mostrando aos educandos que tais recursos, além de lazer desprovido de conhecimento, podem contribuir para ampliar sua dimensão cognitiva. Neste sentido, Moran apresenta o professor como um articulador de aprendizagens ativas, de onde depreende-se que o aluno é o sujeito do processo de ensino aprendizagem, cabendo ao docente propiciar as condições pedagógicas necessários para que os alunos possam construir seu universo de conhecimento.

Ao fazer referência a aprendizagem ativa, podemos concluir que “[···] o processo cognitivo não é um processo passivo e dependente, conforme o modelo de transmissão de conhecimento, mas um procedimento ativo em que o sujeito cognoscitivo, de fato, constrói seu próprio conhecimento [···]”. (FOSSA, 2011, p. 86).

No entanto, seria ingenuidade acreditar que a construção do conhecimento é uma tarefa simples. Os estudos demonstram que são diversos os fatores que interferem no processo de ensino-aprendizagem, perpassando pelas dimensões sociais, econômicas, psicológicas e até culturais, do indivíduo e sua comunidade, que somada a marca histórica do ensino tradicional, provoca desencanto em diversos alunos, os quais classificam a matemática como uma disciplina difícil, muito abstrata e sem relação com o cotidiano. Todavia, "será, contudo, simplesmente inútil observar e lamentar a conjuntura retratada [···], pois precisamos tomar as ações necessárias para implantar as inovações que poderiam implicar em um ensino melhor [···]". (FOSSA, 2011, pp. 75-76).

Assim, cabe ao docente, diante de tantas adversidades, buscar alternativas que corroborem para a formação de um indivíduo crítico e autônomo, capaz de selecionar, analisar e utilizar adequadamente os dados matemáticos. Para isso, necessita desenvolver atividades estruturadas que estimulem a pesquisa em fontes diversas, trabalho em equipe e elaboração de suas próprias considerações, rompendo definitivamente com a "cultura das fórmulas prontas", consolidada ao longo da história da Educação Matemática.

Quando nos referimos a atividades estruturadas, Fossa (2011) afirma que as metodologias baseadas em tais atividades contribuem para a eficácia do ensino da matemática por contemplar o desafio da "redescoberta". Para este autor, "Isto acontece porque as atividades levam o aluno a construir estruturas matemáticas por si mesmo, em conformidade com o preceito construtivista. O autor esclarece ainda que o termo "redescoberta" é utilizado em substituição de "descoberta", porque, na maioria das vezes, o aluno não descobre "novas verdades matemáticas nas fronteiras do conhecimento" (FOSSA, 2011, p.87). Todavia, realiza uma descoberta pessoal de novos saberes matemáticos, já aprofundado por pesquisadores da área.

Assim, atividades estruturadas, pautadas na redescoberta possibilitam aos estudantes a iniciação no universo científico, pois se voltam para a solução ou compreensão de situações complexas, as quais, na maioria das vezes, exigem pesquisas e trabalho colaborativo. (FOSSA, 2011, p. 88).

Para Fossa (2011), a atividade estruturada exige três condições:

> [...] Em primeiro lugar, necessitamos **sequenciar as atividades** de maneira apropriada. Várias atividades com a mesma estrutura matemática deveriam ser justapostas para que cada uma reforce as outras. Também é desejável que a apresentação de uma estrutura matemática nova seja feita de tal forma que o aluno possa aproveitar os elementos já construídos por ele. [...] Outra característica das atividades em tela é que elas deveriam conter um **componente oral**, isto é, o aluno deveria **verbalizar seu entendimento da atividade,** tanto para favorecer a primeira abstração para o conceito da própria atividade, quanto para fortalecer a integração do novo conceito com os conceitos já construídos. Essa **verbalização deveria ocorrer durante a atividade, feita em parceria com os seus colegas**, e no fim da atividade seria interessante termos um relatório oral ou explicação do que foi feito. Finalmente, a atividade deveria ter um **componente simbólico** em que o aluno **registrasse por escrito os resultados alcançados** para promover a segunda abstração e facilitar a manipulação de símbolos abstratos. (FOSSA, 2011, pp. 123-124, grifos nossos)

Partindo das três condições apresentadas na citação acima – sequência adequada das atividades, verbalização do entendimento (componente oral) e registro escrito dos resultados alcançados (componente simbólico) –, pode-se concluir que a utilização de Webquest pode ser um dos instrumentos virtuais mais adequados quando se pensa em atividades estruturadas, pois, tem como característica básica o detalhamento da tarefa a ser realizada pelo estudante, valorizando a pesquisa colaborativa, ao tempo que fortalece a autonomia do sujeito, pois "o respeito à autonomia e à dignidade de cada um é um imperativo ético e não um favor que podemos ou não conceder uns aos outros". (FREIRE, 2002: 66)

A Webquest valoriza a autonomia do estudante, uma vez que as tarefas estruturadas, embora apresente um norte a ser seguido pelo estudante, diferencia-se do ensino tradicional por valorizar a investigação e estimular a postura ativa e colaborativa dos estudantes. Isso ocorre porque as metodologias ativas:

> [...] tiram o foco do 'conteúdo que o professor quer ensinar', permitindo que o aluno estabeleça um vínculo com a aprendizagem, baseado na ação-reflexão-ação. Os projetos podem estar centrados em cada área de conhecimento isoladamente (projetos dentro de cada disciplina) ou integrar áreas de conhecimento de forma mais ampla (projetos interdisciplinares). (MORAN, 2007, p. 33)

As tarefas estruturadas necessitam ser planejadas cuidadosamente, preferencialmente através de projetos, onde o conteúdo matemático possa dialogar com situações do cotidiano do aluno, partindo de problemáticas sociais ou científicas, oferecendo o suporte necessário para uma melhor compreensão da realidade. Para isso, seguiremos a Metodologia Webquest criada por Bernie Dodge

(2012), que em sua estrutura virtual apresenta: Introdução, Tarefa (Produto), Processo, Fontes de Informação (Recurso), Avaliação e Conclusão.

5.4 Webquest: uma proposta para o professor de Matemática que atua no Ensino Médio

Considerando que o aluno precisa sentir a Matemática como parte de sua vivência, escolhemos Probabilidade aplicada a Genética como tema estruturador, onde, através de orientações contidas na Webquest, espera-se contribuir para uma melhor compreensão sobre as possibilidades das características dos pais serem transmitidas aos descendentes, analisando as chances dos mesmos nascerem com olhos verdes, azuis, castanhos ou pretos; pele branca, negra, parda ou amarela; cabelos lisos ou encaracolados; apresentar determinadas doenças ou não, entre outras questões.

Na Introdução da Webquest, apresentamos o caso de uma mulher inglesa que, em 2006, deu à luz a gêmeos, chamando a atenção da mídia o fato de um ter nascido com pele branca e o outro com pele negra, conforme apresentado na figura 3:

Figura 3 – Introdução Webquest

Fonte: https://matematicativa3.webnode.com/

Apresentou-se como desafio uma questão retirada do Blog do Enem: Qual a probabilidade de um casal de olhos castanhos heterozigoto para esta característica ter dois filhos, um menino com olhos castanhos e uma menina com olhos azuis? Após a questão desafio, apresentou-se o texto Probabilidade e Genética, retirado no site Brasil Escola, contendo uma explanação geral sobre a temática.

A Introdução é muito importante, pois é nessa parte que se expõe o tema e os objetivos da pesquisa, tentando motivar os educandos através de enigmas, desafios, ilustrações ou textos contextualizados.

A segunda parte da Webquest é a Tarefa, onde se informa ao aluno o resultado esperado ou o produto a ser construído. Partindo desta estrutura, o professor assume o papel de orientador, propondo a tarefa que irá nortear a pesquisa colaborativa, bem como apresentando fontes seguras de pesquisas, através de diversos recursos digitais (textos, vídeos, jogos, simuladores).

Para Santos e Barin (2014), a metodologia Webquest auxilia a construção do conhecimento por possibilitar ao docente organizar os conteúdos extraídos da internet e apresentá-los aos estudantes de forma estruturada e significativa, reduzindo a dispersão dos alunos, ao tempo que exige reflexão, autonomia e colaboração para realizar a tarefa proposta. Contudo, para se chegar a esse objetivo, é preciso definir com clareza o que se espera dos educandos, ou seja, sua tarefa.

Figura 4 – Definição da Tarefa (Produto)

Fonte: https://matematicativa3.webnode.com/tarefa/

Ao finalizar todas as etapas do processo, espera-se que os alunos, em grupo, produzam um jogo de tabuleiro, cartas ou similar, que envolva Probabilidade Aplicada a Genética. Assim, eles poderão ressignificar os conceitos trabalhados, de forma cooperativa, reflexiva e lúdica.

A terceira parte da Webquest é o Processo. Nesta aba são descritas detalhadamente cada etapa necessária para o desenvolvimento da Tarefa, apresentando um rumo a ser seguido, mas preservando o espaço para o trabalho colaborativo e elaboração autônoma por parte do educando.

Figura 5 - PROCESSO – 1ª semana

Fonte: https://matematicativa3.webnode.com/processos/

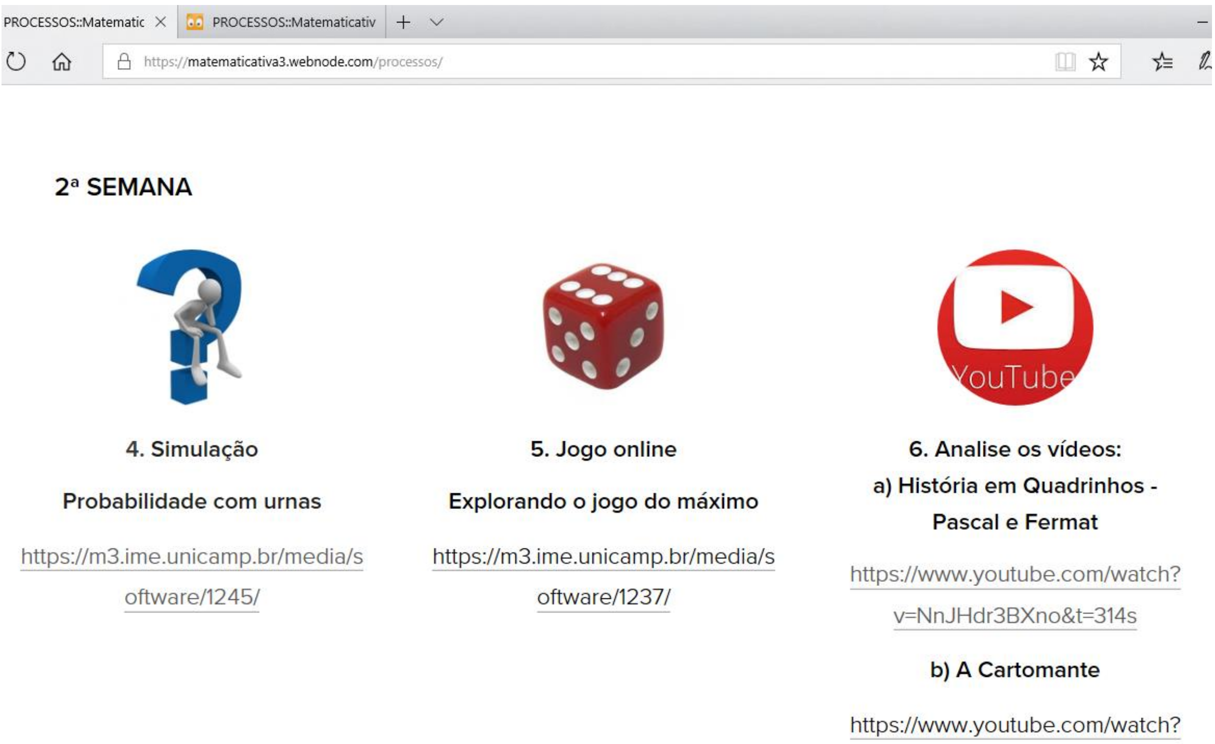
Na primeira semana do projeto, será solicitada a criação de um grupo de WhatsApp para a turma. O mesmo deverá ser utilizado exclusivamente para socializar as experiências relativas ao projeto. Após a inserção de todos os alunos no grupo de WhatsApp da turma, deverão ser formados subgrupos compostos por 4 membros.

Na sequência, os alunos deverão fazer a leitura do texto Início da Matematização das Probabilidades, respondendo as 4 (quatro) questões presentes no mesmo.

Ao analisar o texto, espera-se que os alunos compreendam as bases históricas da Probabilidade, bem como sua relação direta com a Combinatória e sua aplicação nos seguros e jogos de azar. Na sequência, os alunos devem assistir o vídeo Análise combinatória: combinação, permutação e arranjo e a Animação da Distribuição binomial.

Após a realização dessas atividades, os alunos devem realizar a autoavaliação, identificando e socializando no grupo de WhatsApp da turma, os saberes construídos e as dúvidas que permaneceram. De acordo com a complexidade, as dúvidas poderão ser sanadas pelos próprios colegas ou pelo professor.

Figura 6 - PROCESSO – 2ª semana



Fonte: https://matematicativa3.webnode.com/processos/

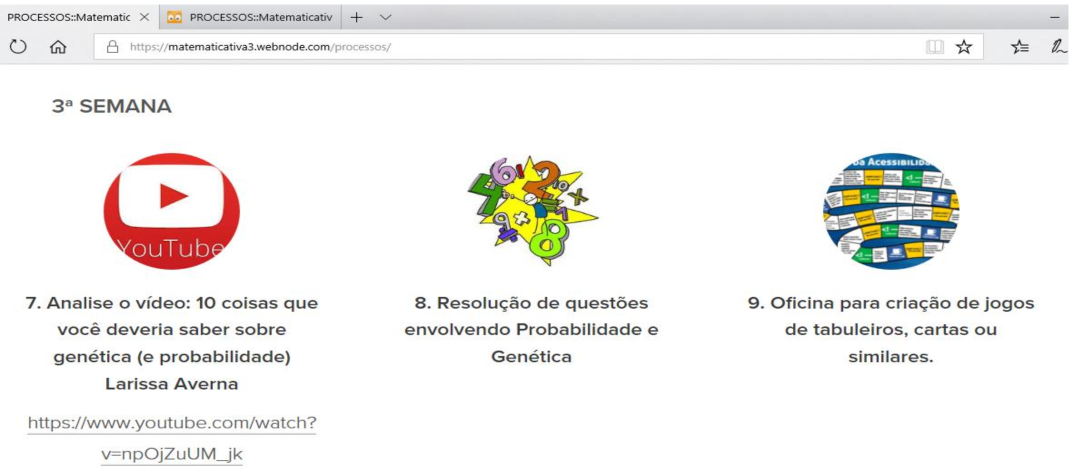
Na segunda semana, os alunos utilizarão um software produzido pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), onde poderão participar da simulação Probabilidade com urnas. O mesmo está disponível gratuitamente no site da referida universidade e apresenta a seguinte situação problema: Imagine uma urna contendo certa quantidade de bolinhas de cores diferentes. Dessa urna são retiradas bolinhas aleatoriamente, ou seja, sem escolher as cores. Diante disso, tendo observado apenas as cores das bolinhas fora da urna, seria possível estimar as proporções de bolinhas de cada cor existentes na urna?

Posteriormente, os alunos participarão da atividade online: Explorando o Jogo do Máximo. O mesmo também foi produzido pela Unicamp, e dospõe da seguinte descrição: “Nesta unidade, você terá a oportunidade de exercitar algumas noções do cálculo de probabilidades, tais como as de evento e de independência. Além disso, lhe será apresentada a ideia de experimento aleatório por meio de um jogo chamado ‘jogo do máximo’”.

Para finalizar as atividades da semana, os alunos analisarão a História em Quadrinhos - Pascal e Fermat e o vídeo “A Cartomante”, sendo que o primeiro trata sobre as contribuições de Pascal e Fermat para a probabilidade, enquanto o segundo se volta para a aplicação da probabilidade em leitura de cartas.

Com o objetivo de avaliar os conhecimentos construídos ao longo destas duas semanas, solicita-se aos alunos a organização de um seminário, onde eles poderão socializar seus saberes sobre a contribuição de diversos pensadores para o desenvolvimento da probabilidade.

Figura 7 - PROCESSO – 3ª semana



Fonte: https://matematicativa3.webnode.com/processos/

Considerando que os alunos já possuem uma compreensão mais aprofundada sobre Probabilidade, a terceira semana do projeto será reservada para a aplicação da mesma nos estudos de genética. A princípio, os alunos analisarão o vídeo “10 coisas que você deveria saber sobre genética (e probabilidade), de Larissa Averna”. Na sequência, serão resolvidas em grupo questões de Probabilidade aplicada a Genética, sendo reservado um espaço para que o professor possa esclarecer as dúvidas existentes. Após essa etapa, será realizada a Oficina para a confecção do produto, ou seja, o jogo de tabuleiro ou cartas.

Os grupos deverão pensar em um jogo para ser desenvolvido em dupla ou equipe, que contemple os conceitos de Probabilidade aplicada a Genética. Na sequência, cada equipe deverá socializar sua produção, explicando as regras do jogo para os demais colegas. Logo após, cada grupo deve trocar seu jogo com outro grupo, que irá jogar e avaliar se a produção dos colegas respeita os critérios descritos no quadro seguinte:

Quadro 6 - Critérios para avaliação do jogo

CRITÉRIOS PARA AVALIAÇÃO DO JOGO	AVALIAÇÃO		
	SIM	NÃO	OBSERVAÇÃO
1. Pode ser jogado em dupla ou em equipe			
2. Contempla os conceitos estudados sobre Probabilidade			
3. Aparece situações relacionadas a probabilidade e genética			
4. As regras do jogo estão claras			
5. O jogo possui uma aparência harmoniosa (sem rasuras e “amassões”, contendo informações legíveis)			
6. É um jogo divertido			
7. É um jogo desafiador			

Fonte: o autor

Assim, ao longo do processo, espera-se que os educandos percebam e façam uso adequado dos saberes disponíveis no mundo virtual, desenvolvendo a capacidade de avaliação e autoavaliação, de (re)aprender sempre, sozinho e com os outros, pois a inclusão social perpassa por estas capacidades.

Durante todo o processo, os Recursos (fontes de informações) são determinantes. Uma vez que a principal função da Webquest é auxiliar o desenvolvimento da autonomia do aluno e do trabalho colaborativo – através da pesquisa orientada virtualmente –, as informações a serem consultadas precisam ser confiáveis. Assim, cabe ao docente avaliar previamente o conteúdo disponibilizado, garantindo que os mesmos contribuam para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem.

Além de apresentar as fontes virtuais e físicas que deverão ser consultadas – de modo que as produções sejam fundamentadas em saberes validados cientificamente –, é importante orientar os alunos sobre o perigo do plágio, quando se utiliza indevidamente tais recursos.

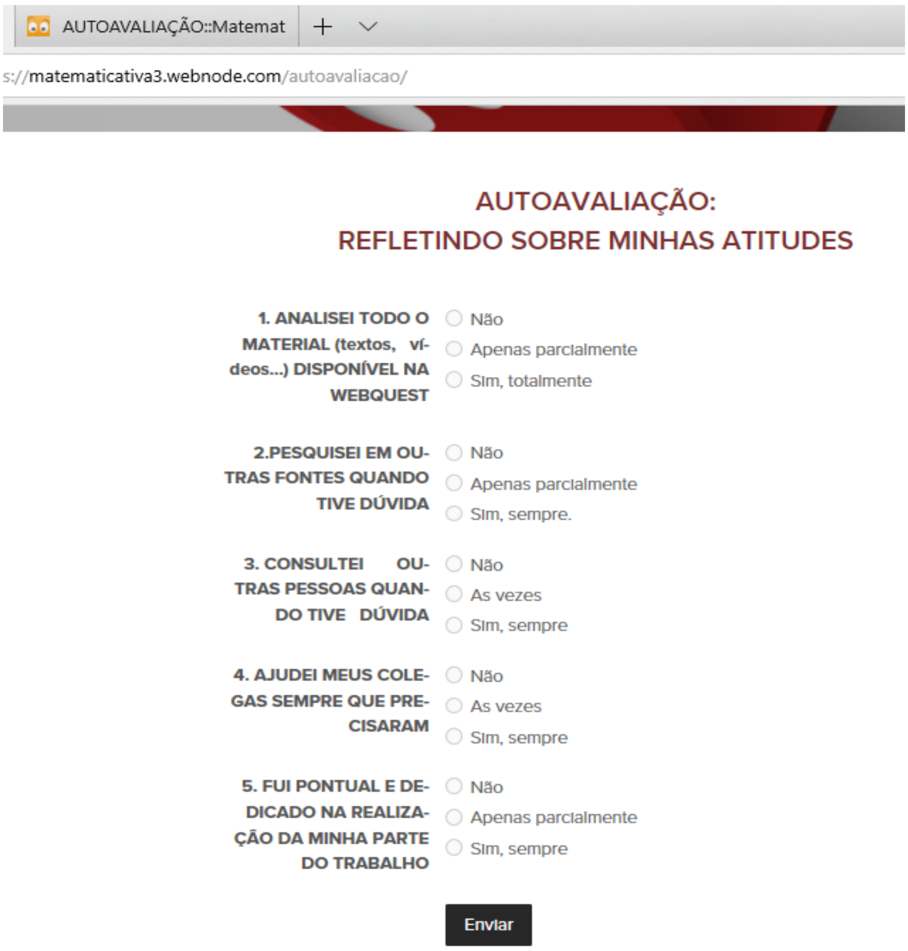
Figura 8 - Recursos

Fonte: https://matematicativa3.webnode.com/recursos/

Ao recorrer prioritariamente a pesquisa em fontes virtuais, a Webquest representa ainda uma oportunidade de orientar nossos educandos sobre uma forma produtiva de utilizar internet, mostrando que as redes sociais representam um espaço para socializar ideias, saberes, experiência, que ultrapassa o simples compartilhamento de "*selfie*". Auxilia ainda, orientando o processo de pesquisa e elaboração, explicitando que meras cópias de sites de busca, caracteriza plágio, não pesquisa.

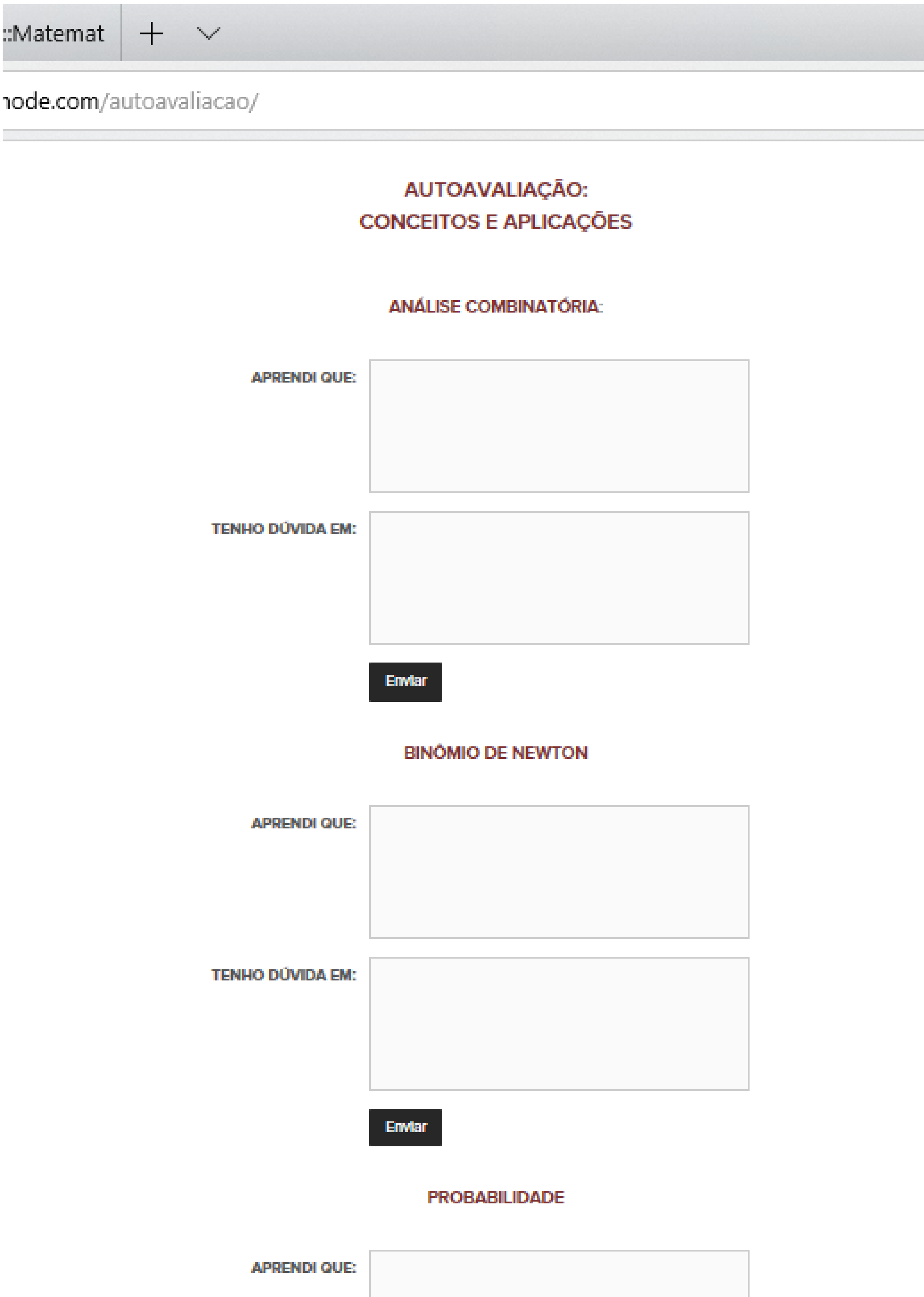
Um dos elementos mais importante do projeto é Avaliação, pois é ela que fornece os dados necessários para retroalimentar o processo, apresentando êxitos e desafios, que indicam o caminho a ser seguido. Nesse espaço, é importante registrar previamente o que se espera dos educandos, resguardando sempre um espaço para autoavaliação, de modo que os mesmos possam repensar sua postura durante o exercício de atividades individuais e coletivas.

Figura 9 – Autoavaliação: atitudes



Fonte: https://matematicativa3.webnode.com/autoavaliacao/

Figura 10 – Autoavaliação: conceitos e aplicações



Fonte: https://matematicativa3.webnode.com/autoavaliacao/

Tendo como meta a construção da autonomia do educando, a autoavalição não deve se voltar apenas para a dimensão quantitativa, própria da avaliação somatória, mas se direcionar para a consciência do sujeito, que deve pensar sobre os avanços e as dificuldades encontradas ao longo do processo, identificar "[...] o que já aprendeu, o que ainda não aprendeu, os aspectos facilitadores e os dificultadores do seu trabalho, tomando como referências os objetivos de aprendizagem e os critérios de avaliação [...].” (VILLAS BOAS, 2008, p.51). Assim, ao refletir sobre a própria postura e sobre a atuação do grupo, identificando os comportamentos pessoais e coletivos que contribuíram, ou não, para a ampliação do universo de conhecimento, desenvolve-se dimensão processual e formativa da avaliação.

Ao finalizar o projeto, é determinante o registro das conclusões do grupo, contemplando a descrição dos resultados alcançados, as dificuldades encontradas, bem como registrando sugestões para a realização de novos estudos.

Assim, espera-se com esta proposta de intervenção contribuir para romper com a cultura da “fórmula pronta”, estimulando o questionamento, a elaboração pessoal e a criação do novo, de modo que o ensino da Matemática incentive o pensamento reflexivo, a autonomia do sujeito e a ação colaborativa, favorecendo com isto, o desenvolvimento pleno do educando.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho desenvolvido contribuiu para repensar sobre a forma que o ensino de Probabilidade deve ser abordado em sala de aula de Ensino Médio, bem como quais metodologias são mais adequadadas ao processo de ensino aprendizagem deste conteúdo. Após a realização de pesquisas bibliográficas, confirmou-se a hipótese que as metodologias ativas são de grande valia para a formação matemática no contexto atual, pois tem como meta contribuir para o desenvolvimento da autonomia e do pensamento reflexivo. Neste sentido, constatou-se que a atuação do professor é de extrema importância, pois cabe a ele (re)planejar todo o processo, elaborando atividades estruturadas, voltadas para a pesquisa e o trabalho colaborativo.

Considerando a imensidão de informações disponíveis no universo virtual, orientar os alunos no processo de pesquisa é determinante, pois coloca o mesmo em condição ativa diante do conhecimento. Assim sendo, nossos estudos demonstraram que a adoção da Metodologia Webquest para trabalhar o conteúdo Probabilidade Aplicada a Genética pode ser extremamente válida, pois ao dispor de atividades estruturadas, fornece aos alunos orientações clara e caminhos teóricos seguros a serem seguidos, ao tempo que incentiva a elaboração autônoma do conhecimento pelos alunos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. **Veja qual a probabilidade de você ganhar na Mega-Sena.** 2014. Disponível em: < https://exame.abril.com.br/seu-dinheiro/veja-qual-a-probabilidade-de-voce-ganhar-na-mega-sena/ > Acesso em: 17 abr. 2018.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Revisto por Uta C. Merzbach. Traduzido por Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2011. (Coleção, Volume 2).

DANNIMATT. Animação da Distribuição binomial. 2016. (0h0min46s) Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=7uI_95disKw> Acesso em: 14 abr. 2018.

DODGE, B. (2005). In: MASCARENHAS (2005). Educação sem internet? Só no monastério. Disponível em: < http://www.educacao.sp.gov.br/noticias/educacao-sem-internet-so-no-monasterio> Acesso em: 18 dez. 2017

FOSSA. J. A. **Ensaios sobre a Educação Matemática**. 2. Ed. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia de autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 24. ed. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2002. 165 p.

GALDINO, A. L. **Notas de aula: lógica, indução e iniciação matemática**. Disponível em: <https://galdino.catalao.ufg.br/up/635/o/Notas_logica_inducao_iniciacao_matematica.pdf > Acesso em: 17 abr. de 2018.

GIOVANNI, J. R. [et al.] **360º Matemática Fundamental**: uma nova abordagem. 2. ed. São Paulo: FTD, 2015. (Coleção, volume 2).

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar**: combinatória e probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. (Coleção, volume 5).

IEZZE, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**: conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2016. (Coleção, volume 1).

LOPES, S.; ROSSO, S. **Biologia** – volume único. São Paulo: Saraiva, 2005.

M3 MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. **A Cartomante**. 2012. (11min.17s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=sBZQOGEtyT0&t=93s> Acesso em: 15 abr. 2018.

MEYER, P. L. **Probabilidade**: aplicações à estatística. Tradução Ruy de C. B. Lourenço Filho. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1983. (Reimpressão 2006).

MILIES, F. C . P.; COELHO, S. P. **Números**: uma introdução a matemática. 3. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006. (2. Reimpr.).

MORAN, J. M. A. **Educação que desejamos**: novos desafios e como chegar lá. Campinas, SP: Papirus, 2007. 174 p.

MOREIRA, C. G. T. de A. (Org.). **Tópicos de Teoria de Números**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Profmat).

MORGADO, A. C. (Org.). **Análise Combinatória e Probabilidade** (com a solução dos exercícios) 9. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MORGADO, A. C. (Org.). **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção Profmat).

SANTOS, T. R. dos; BARIN, C. S**. Problematização da metodologia webquest na prática educativa**: potencialidades e desafios. Revista Tecnologias na Educação – Ano 6 - número 11 – dez. 2014. Disponível em: <http://tecnologiasnaeducacao.pro.br/wpcontent/uploads/2014/12/Problematiza%C3%A7%C3%A3o-da-metodologia-webquest-napr%C3%A1tica-educativa-potencialidades-e-desafios.pdf> Acesso em: 08 mar. 2015.

SILVA, M. N. P. da. **Probabilidade e Genética**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/probabilidade-genetica.htm > Acesso em: 25 jan. 2018.

SILVEIRA. J.F. P. da. **O triângulo de Pascal é de Pascal**? Publicado em 2001. Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html> Acesso em: 01 jan. 2018.

SILVEIRA, J.F. P. da. **Início da matematização das probabilidades.** Publicado em 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa6a.html > Acesso em: 01 mai. 2018.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar Matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013. (Coleção, Volume 2).

UNICAMP. **Simulação Probabilidade das Urnas**. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1245/> Acesso em 15 abri. 2018.

UNICAMP. **Explorando o Jogo do Máximo**. Disponível: <http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1237/> Acesso em: 15 abr. 2018.

UNIVESP. **História da Matemática - Aula 09 - História em quadrinhos: Pascal e Fermat**. 2017. (7min50s) Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=NnJHdr3BXno&t=314s> Acesso em: 15 abri. 2018.

VARQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. **Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica**. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf > Acesso em: 10 fev. 2018.

VÍDEOS EDUCATIVOS. **Análise combinatória: combinação, permutação e arranjo**. 2013. (10 min.) Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=16XpBZKuLyY&t=24s> Acesso em: 14 abri. 2018.

VILLAS BOAS, B. M. F. **Virando a escola do avesso por meio da avaliação**. Campinas: Papirus, 2015.

TOMAZ, P.S. S. Gerolamo Cardano: pai da teoria da probabilidade ou um bom apostador de jogos de azar?   Disponível em: <http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Tomaz_P_S_S_Gerolamo_Cardano.pdf> Acesso em: 01 mai. 2018.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ABRAMO, H. **Aritmética**. 2. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção Profmat). (2ª impressão)

BITTENCOURT, R. N. Virtualização dos saberes. **Portal Ciência e Vida: Filosofia**. Ano VI, n. 68, pp. 17 - 23, mar. 2012.

DEMO, P. **Pesquisa**: princípio científico e educativo. São Paulo: Editora Cortez, 2000, p. 120.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. (4ª reimpressão, 2008).

HOFFMANN, J. M. L. **Avaliação mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade. 19. ed. Porto Alegre: Editora Mediação, 2001. 200 p.

SILVA, C. X. da; FILHO, B. B. **Matemática aula por aula**. 2. ed. renov. São Paulo: FTD, 2005. (Coleção, volume 2).

SILVA. M. de F (org.). Webquest: interligando a pesquisa orientada e a inteligência coletiva. Disponível em: <http://www.seer.ufal.br/index.php/cipar/article/view/1976/1477> Acesso em: 18 dez. 2017.

SILVA. M. de F. Tecnologias de informação e comunicação: entre a inteligência coletiva e a idiotia generalizada. Disponível em: <https://filosofando7.webnode.com/webquest/> Acesso em: 18 dez. 2017.