Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

O JOGO DOMINÓ ALGÉBRICO

Felipe Barbosa Franco

Catalão

2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Felipe Barbosa Franco

Título do trabalho: O JOGO DOMINÓ ALGÉBRICO

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Felipe Barbosa Franco

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Igor dos Santos Lima

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 20 / 06 / 2018

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Felipe Barbosa Franco

O JOGO DOMINÓ ALGÉBRICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Igor dos Santos Lima.

Catalão

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG

FRANCO, Felipe Barbosa
O JOGO DOMINÓ ALGÉBRICO [manuscrito] / Felipe Barbosa Franco. - 2018.
70 f.

Orientador: Prof. Dr. Igor dos Santos Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2018.
1. Dominó Algébrico. 2. Uso de Jogos. 3. Algoritmo de Euclides. I. Lima, Igor dos Santos, orient. II. Título

CDU 51

Universidade Federal de Goiás - UFG
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

UFG

PROFMAT

Defesa N° 05

Ata de Defesa da Dissertação

Em 3 de Abril de 2018, às 17h, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr. Igor dos Santos Lima (orientador), Dr. Fernando da Costa Barbosa, Dr. Paulo Henrique Pereira da Costa para, em sessão pública realizada por webconferência no Laboratório de Controle Operacional J-03, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação da Dissertação intitulado "O JOGO DOMINÓ ALGÉBRICO", de autoria de Felipe Barbosa Franco, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo(a) presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que, em 30 min procedeu a apresentação da Dissertação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado: (X) **Aprovado** ou ( ) **Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 18 h 00 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Igor dos Santos Lima, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente.

Igor dos Santos Lima

Dr. Igor dos Santos Lima
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Fernando da Costa Barbosa

Dr. Fernando da Costa Barbosa
UFG/IMTec - Catalão

Paulo Henrique P. Costa

Dr. Paulo Henrique Pereira da Costa
UnB/Brasília

Felipe Barbosa Franco

Felipe Barbosa Franco
Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RC/UFG

Felipe Barbosa Franco é Licenciado em Matemática pela Faculdade Projeção. Atua como professor no Colégio Ciman do Distrito Federal desde fevereiro de 2017.

“Saber muito não lhe torna inteligente. A inteligência se traduz na forma que você recolhe, julga, maneja e, sobretudo, onde aplica esta informação”. Carl Sagan

Dedico esse trabalho a minha mãe e meu pai que tanto me auxiliaram nesse caminho tão difícil.

AGRADECIMENTOS

Agradecer é um ato de nobreza, tão raro nos dias atuais, mas com capacidade de revolucionar as relações entre pessoas. Em um espaço curto, o agradecimento simples é a forma mais vasta de conferir as pessoas que foram importantes nesse caminho para que chegasse até aqui.

Primeiramente, vou agradecer a pessoa que, sem ela esta trajetória não seria possível ter iniciado: a minha mãe, que me apoiou desde o início da vida universitária até os momentos atuais.

Ao meu irmão Flávio, que com muito sacrifício foi o meu apoio logístico para que tudo isso ocorresse.

Ao meu Pai, que com muito orgulho se pôs a me incentivar e não deixar desistir.

Aos meus companheiros de carro Jânio, Paulo, Kleber e Maurício por todo o apoio em todos esses anos o meu sincero agradecimento.

A todos os professores que me auxiliaram direta e indiretamente na vida universitária, em especial o Dr. Igor.

Ao meu filho recém-nascido Gael, o meu brilho de esperança e a quem eu dedico toda a minha vida.

Aos colegas de turma, que são extremamente unidos.

Aos meus familiares que nunca deixaram de me apoiar.

RESUMO

Este trabalho é de cunho teórico, cuja metodologia baseou-se inicialmente na elaboração de pesquisas e revisões bibliográficas sobre o Algoritmo de Euclides, bem como sobre do Uso de Jogos no ensino de Matemática. Foi elaborada uma proposta inédita para o Sétimo Ano do Ensino Fundamental com base no Dominó Algébrico de Freitas-Teodoro [8]. Essa proposta segue a metodologia de Souza [22], que tem planos de aula definidos em quatro Momentos. Foi realizada uma análise para justificar a eficiência e importância da proposta do Dominó Algébrico Adaptado restritas ao Uso de Jogos no ensino com base em obras dos autores Regina Grando [10], Tizuko Kishimoto [13], [14], [15], [16], [17] e Cristiano Muniz [18]. Ademais, foram realizadas algumas simulações de jogadas relativas ao jogo Dominó Algébrico para melhor elucidação do tema proposto.

Palavras-chave: Dominó Algébrico, Uso de Jogos e Algoritmo de Euclides.

ABSTRACT

This work is theoretical, and its methodology was initially based on the research and bibliographic review of the Euclidean Algorithm, as well as the use of games in Mathematics education. A proposal was elaborated for the 7th year of Middle School, based on the Algebraic Dominoes of Freitas-Teodoro [8]. This proposal follows the methodology of Souza [22], which has lesson plans defined in four different moments. An analysis was made to justify the efficiency and importance of the Adapted Algebraic Domino restricted to the Use of Games in education based on the work of authors Regina Grando [10], Kishimoto [13], [14], [15], [16], [17] and Cristiano Muniz [18]. In addition, some simulations of plays related to the Algebraic Domino were made, for better understanding of the proposed subject.

Keywords: Algebraic Domino, Use of Games and Euclidean Algorithm.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Experimentos e propostas de ensino relativos à educação têm surgido com frequência, sendo objeto de mudança nos métodos aplicados em educação. Esse conhecimento experimental produzido tem levado ao desenvolvimento de métodos de ensino. Inicialmente, inserindo a educação num contexto histórico, é possível notar que o ensino, atualmente diversificado e objetivo, nem sempre foi desta maneira. No passado, baseava-se em uma educação voltada para repetição e métodos arcaicos.

O panorama da Educação Matemática brasileira era semelhante a este descrito anteriormente. Segundo Galvão et al. [9] e Pinto [20], o Brasil vivia um cenário de resultados ruins e elevado desinteresse, independentemente do nível de investimento. Além desse cenário, deve-se considerar os altos custos que envolviam a educação de jovens e adultos.

Com a perspectiva de melhora na Educação Matemática, um grupo de pessoas preocupadas com o ensino desta disciplina se reuniu e deu início a um debate de ideias acerca dessa temática. Esse grupo ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM). Segundo Pinto [20], o MMM iniciou sua trajetória com a proposta de alteração de currículos e, alguns anos depois, com a instituição de cursos, experimentos, publicações e palestras.

Durante a evolução do ensino nessa disciplina, surgiram as denominadas Tendências da Educação Matemática (TEM) que, segundo Galvão et al. [9], eram: História da Matemática, Resolução de Problemas, Mídias tecnológicas, Etnomatemática, Modelagem Matemática e o Uso de Jogos. O MMM passou então a desenvolver e a seguir as TEM e, com isso, o ensino de Matemática evoluiu nitidamente. Portanto, o Uso de Jogos tem papel especial nessa evolução.

Este trabalho tem como objetivos realizar uma revisão bibliográfica acerca do Algoritmo de Euclides, justificar e analisar o Uso de Jogos no ensino da Matemática e, a partir disso, aplicar os conhecimentos ao jogo Dominó Algébrico, tendo como ideia final uma proposta de aplicação para séries a partir do Sétimo Ano do Ensino Fundamental. Para isso, será utilizada a metodologia desenvolvida por Souza [22], dividida em quatro momentos.

Certamente, faz-se necessário, inicialmente, definir com precisão o conceito de jogo. De acordo com Ferreira [7], define-se jogo como:

> 1. Vício de Jogar 2. Exercício ou Passatempo entre duas ou mais pessoas das quais uma ganha, e a outra, ou as outras, perdem 3. O que serve para jogar determinado jogo 4. Maneira de jogar 5. Divertimento, Exercício 6. Manejo 7. Determinado número de peças que formam um serviço ou coleção 8. Brinco; escárnio 9. Artes, astúcia; modo de proceder 10. Habilidade 11. Parte da Carruagem que sustenta

> as rodas 12. Transação de fundos 13. Abrir o jogo: mostrar ou revelar algo que estava escondido ou em segredo. 14. Entrar em jogo: entrar em ação 15. Esconder o jogo: dissimular 16. Estar em jogo: estar em risco ou dependente de alguma coisa. (Ferreira [7])

Algumas definições modernas do termo jogo são encontradas em Ortiz ([19], p.11):

> (...) o jogo é uma atividade geradora de prazer que não se realiza com finalidade exterior a ela, mas por si mesma"(Russel, 1980)(...) A atividade lúdica contribui para a paidéia – a educação – e proporciona as forças e as virtudes que permitem fazer a si mesmo na sociedade(...) O jogo prepara para a entrada na vida e o surgimento da personalidade" (Chateâu, 1958). (Ortiz [19] p. 11-12)

Portanto, o jogo é um instrumento de construção individual e de inserção coletiva que surge naturalmente nas diferentes formas de cultura, em idades variadas.

Huizinga [11], por sua vez, coloca o jogo como uma manifestação cultural de manipulação de imagens ou situações, utilizando ideias de forma imaginativa e em muitas vezes desafiadoras, definidas inicialmente com regras.

> O jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da "vida quotidiana". (Huizinga [11], p. 24)

O termo jogo tem sua simbologia e significados interpretados em um contexto social. Trata-se de um elemento presente em todas as sociedades com formas determinadas, segundo esses autores.

Com a ideia inicial do significado do termo jogo, é preciso aplicá-lo no objeto de estudo, que é a Matemática. Segundo Grando [7] os fatores investigação, desafio e exploração de conceitos classificam o jogo como ferramenta essencial e fundamental na aquisição de conhecimentos em torno desta disciplina.

> O jogo propicia o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas na medida em que possibilita a investigação, ou seja, a exploração do conceito através da estrutura matemática subjacente ao jogo e que pode ser vivenciada, pelo aluno, quando ele joga, elaborando estratégias e testando-as a fim de vencer o jogo. (Grando [7], p. 32)

Dessa forma, o jogo é uma das ferramentas que crianças e adolescentes utilizam para evoluir dentro do aprendizado, dominando conceitos, criando ligações e raízes fortes com aplicações em situações diversas.

Experiências anteriores mostram com detalhes o quão eficiente pode ser o Uso de Jogos no ensino da Matemática. Junior-Lima [12] relatam como essa ferramenta pode ser utilizada em ambientes que, teoricamente, teriam um interesse reduzido por parte dos alunos. Nesses casos, os jogos permitem que ocorra certa atratividade, que cria uma conexão entre professor e aluno. Essa situação de aplicação do Uso de Jogos ocorreu para alunos do regime semiaberto do Centro de Detenção Provisória em que foi obtido, como principal resultado, a evolução dos alunos com relação aos níveis de interesse, rendimento e frequência.

No que tange aos objetivos, este trabalho pretende descrever, ademais, a influência e os momentos de aplicação do Uso de Jogos no ensino da Matemática. Nesse sentido, pode-se dizer que as ideias serão a descrição de regras, simulação de jogos e a proposta de aplicação do jogo Dominó Algébrico.

Criado por Freitas-Teodoro[1] [8], o Dominó Algébrico será abordado no presente trabalho de forma adaptada, sobretudo pela modificação de determinadas regras propostas inicialmente por Freitas-Teodoro [8], bem como pela inclusão na proposta da metodologia de Souza [22], em que são definidas formas, ideias e contextos a serem trabalhados com os alunos. Ademais, nota-se como distinção entre os trabalhos seus públicos-alvo: enquanto Freitas-Teodoro [8] aplicaram o Dominó Algébrico a turmas de licenciatura em matemática, o presente trabalho tem sua aplicação destinada a turmas a partir do Sétimo Ano do Ensino Fundamental. Por fim, cumpre destacar que também são distintos os referenciais teóricos no Uso de Jogos.

Segundo as definições de Cabral ([2], p. 30), o jogo Dominó Algébrico pode ser classificado na categoria estratégico, pois compõe conhecimentos relacionados a raciocínio lógico, interpretação de regras, além da criação de caminhos e estratégias para que se cheguem a um objetivo final.

Para melhor entendimento da sequência deste trabalho, foi feito o fluxograma, representado pela Figura 1 abaixo:

[1] O trabalho de Freitas-Teodoro [8] foi enviado por correspondência eletrônica para o orientador e se trata de um trabalho não publicado. Por este motivo o trabalho está sendo disponibilizado no **Anexo A**.

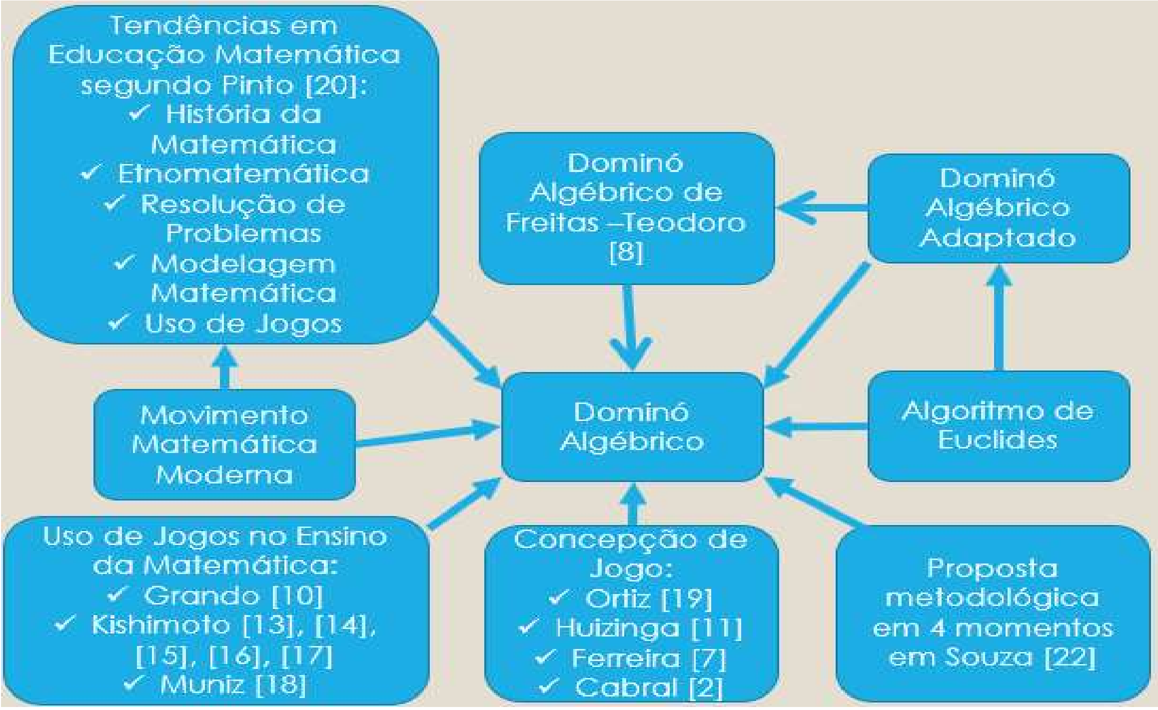

Figura 1 – Própria (2018) – Fluxograma do Trabalho

O fluxograma tem como bases: o Movimento da Matemática Moderna, que propôs inicialmente alterações curriculares na Educação Matemática. Com a mudança, o ensino continuou seguindo uma tendência formalista, com resultados semelhantes aos obtidos anteriormente. A partir desde fracasso, foram propostas as Novas Tendências em Educação Matemática (TEM). Dentro dessas, o Uso de Jogos será explicado nas perspectivas dos autores Grando [10], Kishimoto [13], [14], [15], [16] e [17] e Muniz [18], essas ideias serão essenciais para fazer uma análise para justificar a importância do Dominó Algébrico Adaptado.

Para isso, será utilizada a definição formal para jogo descrita por Ferreira [7], bem como a concepção contemporânea de jogo explicada por Ortiz [19] e por Huizinga [11]. No que diz respeito à caracterização, foram buscados como referências os tipos de jogos propostos por Cabral [2]. Nesse sentido o Dominó Algébrico foi descrito como um jogo estratégico, ainda em Cabral [2], podemos constatar determinados questionamentos quanto ao Uso de Jogos. Não obstante, conforme já mencionado, essa proposta para aplicação do Dominó Algébrico Adaptado tem por base Souza [22], onde a metodologia fundamentada em quatro momentos e será descrita no Capítulo 5 do presente trabalho.

É preciso destacar nesse momento o Algoritmo de Euclides, que associa divisores e restos, conceitos essenciais para os objetivos do Dominó Algébrico de Freitas-Teodoro [8]. Na proposta que será apresentada, esses conceitos também serão fundamentais.

Para melhor orientação do leitor quanto a sua organização, impende dizer que este trabalho está dividido da seguinte forma: no Capítulo 1 são determinados todos os conhecimentos matemáticos acerca do Dominó Algébrico baseados em Dantas [4].

No Capítulo 2 será abordado o jogo Dominó Algébrico e suas regras. Nesse momento, serão mostrados os exemplos de Freitas-Teodoro [8], bem como o Dominó Algébrico Adaptado, com a sequência de jogo, até que chegue ao seu final, evidenciando detalhadamente as possibilidades de jogadas.

O Capítulo 3, por sua vez, analisará de maneira lógica as possibilidades de jogada e de possíveis interpretações que os jogadores poderão ter, como consequência da aplicação do jogo. A principal referência, nesse momento, será Dantas [4].

No Capítulo 4, serão tecidas as considerações acerca do referencial teórico utilizado, em que serão citadas as construções históricas relativas ao ensino de Matemática no Brasil, baseados em Pinto [20] e Galvão et al. [9], bem como o elas conduziram as bases das Tendências de Educação Matemática. Baseadas nesses princípios, serão feitas análises específicas sobre o Uso de Jogos, conforme fazem referência os trabalhos de Grando [10], Kishimoto [13], [14], [15], [16], [17] e Muniz [18].

No Capítulo 5 será abordada a proposta de aplicação do Dominó Algébrico em ambiente de sala de aula, em que a metodologia será descrita em quatro momentos. Nesse capítulo constará, ademais, o material que deve ser utilizado, além das situações que necessitam de interferência por parte do professor. A principal referência será Souza [22].

Por fim, no Capítulo 6 constarão as considerações finais acerca do presente trabalho. Serão feitas análises acerca do Uso de Jogos no ensino e da proposta de Souza [22] aqui construída (Dominó Algébrico Adaptado baseado em Freitas-Teodoro [8]). Além disso, serão feitas análises do Dominó Algébrico Adaptado no ensino de Matemática.

Ao fim deste trabalho será possível responder, baseadas em Cabral ([2], p. 9-32), as seguintes perguntas que surgem naturalmente na tentativa de se fazer o Uso de Jogos no ensino de Matemática:

i) Qual é a importância do Uso de Jogos para o aprendizado?
ii) Em que contexto é possível aplicar o Uso de Jogos para o Ensino da Matemática?
iii) A criatividade é um conceito que pode ser explorado na aplicação do jogo Dominó Algébrico? O que pode limitar ou ampliar essa ideia no ambiente de ensino?
iv) Existem possibilidades de aplicação do jogo Dominó Algébrico para públicos em idades diferentes?
v) O jogo Dominó Algébrico pode desenvolver conhecimentos variados?

vi) O jogo Dominó Algébrico é possível somente com a presença do professor?

Dando continuidade, segundo Freitas-Teodoro [8], as seguintes perguntas surgem na tentativa do Uso de Jogos específicos no ensino da Matemática:

vii) O jogo Dominó Algébrico pode ser aplicado a partir de qual nível de escolaridade? Qual o conteúdo abordado dentro destes níveis?

viii) O jogo Dominó Algébrico será utilizado para ensinar ou revisar conteúdo?

1. CONCEITOS MATEMÁTICOS ACERCA DO DOMINÓ ALGÉBRICO

Para um melhor entendimento do jogo Dominó Algébrico descrito no próximo capítulo, serão abordados a seguir conceitos matemáticos. Muitas informações serão suprimidas a fim de tornar o texto menos técnico, indicando ao leitor interessado a precisa referência.

1.1 PROPRIEDADES DOS NÚMEROS INTEIROS ($\mathbb{Z}$)

Para definir as propriedades dos números inteiros, vamos primeiramente definir o conjunto dos números naturais.

Definição 1: Conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Superado esse conceito, a definição dos números inteiros será dada por:

Definição 2: Conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}.$$

1.1.1 Propriedades de $\mathbb{Z}$:

Como todo conjunto numérico, o conjunto dos números inteiros apresentará algumas propriedades com relação as operações básicas. Por Dantas ([4], p. 2-3) serão elas:

i) **Associativa da adição**: $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$, (a + b) + c = a + (b + c).
ii) **Comutativa da adição**: $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$, a + b = b + a.
iii) **Existência do elemento neutro para a adição**: Existe em $\mathbb{Z}$, o zero, tal que a + 0 = a $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$.

iv) **Existência do oposto**: Para cada a $\in \mathbb{Z}$ existe -a $\in \mathbb{Z}$ tal que a + (-a) = 0.

v) **Distributiva da multiplicação em relação à adição**: $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$, a • (b + c) = a • b + a • c e (a + b) • c = a • c + b • c.

vi) **Associativa da multiplicação**: $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$ (a • b) • c = a • (b • c).

vii) **Comutativa da multiplicação**: $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$ a • b = b • a.

viii) **Existência do elemento neutro da multiplicação**: Existe em $\mathbb{Z}$ o um, (1 $\neq$ 0), tal que a • 1 = a, para todo a $\in \mathbb{Z}$.

ix) **Integridade**: Se a, b $\in \mathbb{Z}$ e a • b = 0, então a = 0 ou b = 0.

As propriedades de $\mathbb{Z}$ levam a consequências imediatas, que serão utilizadas como regras do jogo Dominó Algébrico (veja **Seção 2.1**).

1.1.2 Divisibilidade

Como o Dominó Algébrico é um jogo baseado em divisibilidade e restos, também se faz necessário definir os dois conceitos.

A notação de divisibilidade segundo Dantas ([4], p. 8) será dada por:

Notação: Dados os números a, b $\in \mathbb{Z}$, dizemos que a divide b se existir c $\in \mathbb{Z}$ tal que b = a • c e terá a seguinte notação:

a | b (lê-se a divide b).

Se a condição definida para a divisibilidade não for satisfeita, então a não divide b, e terá a seguinte notação.

Notação: Notação de não divisão (lê-se a não divide b).

a † b.

1.1.3 Algoritmo de Euclides

Segundo Dantas ([4], p. 16), o Algoritmo da Divisão ou Algoritmo de Euclides pode ser enunciado da seguinte forma:

Algoritmo de Euclides. Sejam a e b $\in \mathbb{Z}$, com b $\neq$ 0, existem únicos q e r $\in \mathbb{Z}$ tais que a = b • q + r e 0 $\leq$ r < | b |. Dizemos que "q" é **quociente** e "r" **resto**.

Uma consequência desse algoritmo são as congruências, que também são formas diretas de falar sobre divisibilidade e restos.

1.1.4 Congruências

As congruências seriam formas de estudar divisibilidade e restos. A definição de congruências segundo Dantas ([4], p. 17) é a seguinte.

Definição 4 (Congruências). Seja $n \in \mathbb{N}$. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que "a" é congruente a "b" módulo n se a – b é múltiplo de n. Denotamos $a \equiv b \pmod{n}$.

Exemplos de congruências:

i) $7 \equiv 1 \pmod{3}$.

$7 - 1 = 3 \cdot 2$.

ii) $25 \equiv 4 \pmod{7}$.

$25 - 4 = 7 \cdot 3$.

iii) $32 \equiv -4 \pmod{9}$.

$32 - (-4) = 9 \cdot 4$.

iv) $-25 \equiv -1 \pmod{6}$.

$-25 - (-1) = 6 \cdot (-4)$.

1.1.5 Propriedades de congruências

As propriedades de congruências são de vital importância em algumas aplicações do jogo Dominó Algébrico. Segundo Dantas ([4], p. 17-18), temos:

Propriedades de congruências 1: Se "a" é congruente a "b" módulo n ($a \equiv b \bmod n$) então "a" e "b" deixam o mesmo resto na divisão por "n".

Exemplos:

i) $-25 \equiv -5 \pmod{6}$.

$-25 = 6 \cdot (-5) + 5$.

$-5 = 6 \cdot (0) + 5$.

ii) $25 \equiv 4 \pmod{7}$.

$25 = 4 \cdot 3 + 4$.

$4 = 4 \cdot 0 + 4$.

Propriedades de congruências 2: Sejam a, b, c, d, m, n $\in \mathbb{Z}$ e m, n $\geq$ 1. Valem:

i) a $\equiv$ a (mod n).

ii) a $\equiv$ b (mod n) $\Rightarrow$ b $\equiv$ a (mod n).

iii) a $\equiv$ b (mod n) e b $\equiv$ c (mod n) $\Rightarrow$ a $\equiv$ c (mod n).

iv) a $\equiv$ b (mod n) e c $\equiv$ d (mod n) $\Rightarrow$a+c $\equiv$ b+d (mod n).

v) a $\equiv$ b (mod n) e c $\equiv$ d (mod n) $\Rightarrow$ a • c $\equiv$ b • d (mod n).

vi) a $\equiv$ b (mod n) $\Rightarrow$ $a^m \equiv b^m$ (mod n).

Exemplos:

i) 2 $\equiv$ 2 (mod 5).

2 – 2 = 0 = 5 • 0.

ii) 22 $\equiv$ 2 (mod 5) então, 2 $\equiv$ 22 (mod 5).

22 – 5 = 17 = 5 • 3 + 2.

2 – 5 = – 3 = 5 • (-1) + 2.

iii) 30 $\equiv$ 12 (mod 6) e 12 $\equiv$ 6 (mod 6), então 30 $\equiv$ 6 (mod 6).

30 – 12 = 18 = 6 • 3.

12 – 6 = 6 = 6 • 1.

30– 6 = 24 = 6 • 4.

iv) 50 $\equiv$ 2 (mod 8) e 25 $\equiv$ 1 (mod 8), então 51 $\equiv$ 3 (mod 8).

50 – 2 = 48 = 8 • 6.

25 – 1 = 24 = 8 • 3.

51 – 3 = 48 = 8 • 3.

v) 50 $\equiv$ 2 (mod 8) e 25 $\equiv$ 1 (mod 8), então 1250 $\equiv$ 2 (mod 8).

50 – 2 = 48 = 8 • 6.

25 – 1 = 24 = 8 • 3.

1250– 2 = 1248 = 8 • 156.

vi) 50 $\equiv$ 2 mod 8, então $50^2 \equiv 2^2$ (mod 8) = 2500 $\equiv$ 4 (mod 8).

50 – 2 = 48 = 8 • 6.

2500 – 4 = 2496 = 8 • 312.

2 O JOGO DOMINÓ ALGÉBRICO

O jogo Dominó Algébrico é uma proposta destinada a estudar conceitos que envolvem divisibilidade e restos de maneira lúdica. Para ser jogado, ele necessita dos conhecimentos sobre divisibilidade e restos, além dos próprios conhecimentos sobre as regras mais básicas de dominó.

O jogo foi criado por Freitas-Teodoro [8] e tem algumas regras e lógicas semelhantes ao dominó tradicional. Ele foi testado por alunos de turmas iniciais de Licenciatura em Matemática.

O Dominó Algébrico é jogado da seguinte forma: com peças retangulares compostas por dois lados divididos ao meio pelo lado maior, com tamanhos iguais, elas serão marcadas com números e símbolos. Conforme Freitas-Teodoro [8], o Dominó Algébrico possui 84 peças (veja Figura 2) das quais 78 serão marcadas com números naturais de 0 a 11 (peças em branco representam o zero) em ambos os lados e o restante das peças serão marcadas com símbolos.

Será utilizada a seguinte notação para determinar as peças que estão sendo jogadas: [valor da peça 1 | valor da peça 2].

As peças, que recebem números naturais como marcação, serão denominadas **peças comuns**, sendo cada peça única. Existirão 78 peças comuns. Além disso, Freitas-Teodoro ([8], p. 5) definiram seis peças [Z_1 | Z_1], [Z_2 | Z_2], [Z_3 | Z_3], [Z_4 | Z_4], [Z_6 | Z_6] e [Z_{12} | Z_{12}] como **peças especiais** devido a sua importância chave nas regras do jogo. As peças estão dispostas da seguinte forma:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
3	4	5	6	7	8	9	10	11	3	4	5
3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
6	7	8	9	10	11	4	5	6	7	8	9
4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6
10	11	5	6	7	8	9	10	11	6	7	8
6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8
9	10	11	7	8	9	10	11	8	9	10	11
9	9	9	10	10	11	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_6	Z_{12}
9	10	11	10	11	11	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_6	Z_{12}

Figura 2 – Freitas-Teodoro ([8], p. 5).

2.1 REGRAS DO DOMINÓ ALGÉBRICO

O jogo será orientado por regras que, segundo Freitas-Teodoro ([8], p. 4-5), são as seguintes:

i) **Regra 1**. Será jogado com 1, 2, 3, 4, 6 ou 8 jogadores, dispostos de forma circular no local. Não é bem aceita as quantidades de 5 jogadores ou 7 jogadores, justamente pela quantidade de peças utilizadas no jogo.

ii) **Regra 2**: O jogo será iniciado sempre pelo jogador que possui a peça [Z_{12} | Z_{12}] e, na sequência, poderá ser jogada qualquer peça.

iii) **Regra 3**. No caso de jogo com 8 jogadores, Freitas-Teodoro [8] não definiram como ficaria a distribuição de peças. Nessa circunstância, **adaptamos para que seja definido que o jogador primeiro a jogar na partida e os 3 próximos a jogarem ficarão com as peças restantes, com o jogo ocorrendo no sentido horário ou anti-horário.**

iv) **Regra 4**: A última peça especial jogada será considerada a peça ativa, e ela determinará os critérios de divisibilidade e de restos e, portanto, será a responsável por determinar as regras das jogadas.

v) **Regra 5**: Será vencedor o jogador que ficar sem peças para jogar primeiro ou o jogador que, sem a possibilidade de fazer nenhum movimento, tenha a menor quantidade de pontos em suas mãos somadas às marcações de todas as peças. As peças especiais não têm pontuação definida porque o jogo sempre tem possibilidade de movimento enquanto existirem peças especiais.

vi) **Regra 6**: As peças comuns deverão ser encaixadas pelos critérios de divisibilidade e restos com o mesmo resto quando dividido pelo número representado pela peça especial ativa utilizando o Algoritmo de Euclides conforme explicado no Capítulo 1. As peças deverão ser encaixadas pela igualdade nos restos de divisões do número de um dos lados da peça pelo número da última peça especial jogada.

vii) **Regra 7**: Quando uma peça especial é jogada, qualquer peça pode ser jogada ao lado dela, até que fique definido um novo número para divisibilidade.

Poderão ser jogadas **peças comuns**, que terão critérios únicos para serem jogadas, ou **peças especiais**, que poderão ser jogadas a qualquer momento. Para melhor elucidação do jogo, **serão adaptadas a proposta de Freitas-Teodoro, as cores em peças especiais e as peças jogadas devido a presença das peças especiais** do tipo [Z_1 | Z_1], [Z_2 | Z_2], [Z_3 | Z_3], [Z_4 |Z_4], [Z_6 | Z_6] e [Z_{12} | Z_{12}]. As peças especiais ditarão as regras para as jogadas das peças comuns.

2.2 ELUCIDAÇÃO DO JOGO VIA EXEMPLOS

Nesta Seção, serão apresentados alguns exemplos para melhor elucidação do jogo.

2.2.1 Exemplo de Freitas-Teodoro

Conforme a **Regra 2**, a primeira peça a ser jogada deve ser a [Z_{12} | Z_{12}] e, então, qualquer peça pode ser utilizada após o início do jogo. Freitas-Teodoro ([8], p.6-9) optaram por encaixar como segunda peça a [9 | 7], que deveria ser jogada à direita da peça inicial, da seguinte forma:

[Z_{12} | Z_{12}] • [9 | 7].

O próximo jogador poderá optar por jogar ao lado direito – por qualquer peça (**Regra 6**), ou jogar ao lado esquerdo – peças que tenham resto 7 na divisão por 12. Pelo Algoritmo de Euclides e pela limitação da quantidade de peças, o resto 7 na divisão por 12 necessariamente levaria a jogada obrigatória de peças que tenham o número 7 em pelo menos um lado, ou à jogada, em qualquer um dos lados, de uma peça especial. Freitas-Teodoro [8] optaram por encaixar a peça [7 | 11], da seguinte forma:

$[\, Z_{12} \mid Z_{12} \,] \bullet [\, 9 \mid 7 \,] \bullet [\, 7 \mid 11 \,].$

Assim, as possibilidades de encaixar as próximas peças, para o próximo jogador, seriam as seguintes: para o lado esquerdo, qualquer peça normal e, para o lado direito, peças com pelo menos um dos lados iguais a 11 ou qualquer peça especial em um dos lados. Freitas-Teodoro [8] optaram pela peça [6 | 5], jogada ao lado da peça especial.

$[\, 6 \mid 5 \,] \bullet [\, Z_{12} \mid Z_{12} \,] \bullet [\, 9 \mid 7 \,] \bullet [\, 7 \mid 11 \,].$

Conclui-se que as possíveis jogadas nesta situação seriam à esquerda, mediante encaixe de peças em que pelo menos um lado tenha valor igual a 6 e à direita por meio de encaixe de peças em que pelo menos um lado é 11. Além disso, é possível jogar qualquer peça especial em ambos os lados. Freitas-Teodoro [8] optaram nesse momento por jogar a peça especial $[\, Z_3 \mid Z_3 \,]$ à esquerda.

$[\, Z_3 \mid Z_3 \,] \bullet [\, 6 \mid 5 \,] \bullet [\, Z_{12} \mid Z_{12} \,] \bullet [\, 9 \mid 7 \,] \bullet [\, 7 \mid 11 \,].$

Quando a peça especial é jogada, as possibilidades restantes são alteradas, como na **Regra 6**. Então, utilizando o Algoritmo de Euclides para explicar os restos, existiriam as seguintes possibilidades:

$0 = 0 \bullet 3 + 0.$
$1 = 0 \bullet 3 + 1.$
$2 = 0 \bullet 3 + 2.$
$3 = 1 \bullet 3 + 0.$
$4 = 1 \bullet 3 + 1.$
$5 = 1 \bullet 3 + 2.$
$6 = 2 \bullet 3 + 0.$
$7 = 2 \bullet 3 + 1.$
$8 = 2 \bullet 3 + 2.$
$9 = 3 \bullet 3 + 0.$
$10 = 3 \bullet 3 + 1.$

11 = 3 • 3 + 2.

Portanto, pelas **Regras 6 e 7**, as possíveis jogadas seriam – à esquerda, qualquer peça – à direita, peças que, ao serem divididas por 3, deixam resto 2, ou seja, resto 2 mod 3. Nesse caso, as possibilidades são as peças com pelo menos um dos lados igual a 2, 5, 8 ou 11 ou em qualquer lado o encaixe de uma peça especial. Freitas-Teodoro [8] optaram por encaixar a peça [8 | 10] posicionada à direita, então, as peças passariam a ter a seguinte configuração:

[Z_3 | Z_3] • [6 | 5] • [Z_{12} | Z_{12}] • [9 | 7] • [7 | 11] • [8 | 10].

Com esta configuração, as possíveis jogadas seriam encaixar à esquerda qualquer peça, encaixar à direita peças que, quando divididas por 3, têm mesmo resto que a divisão de 10 por 3 (ou seja, as peças com pelo menos um dos lados com numeração 1, 4, 7 ou 10) ou em ambos os lados jogar qualquer peça especial. Freitas-Teodoro [8] optaram por encaixar à direita a peça [4 | 5]. Então, a configuração será a seguinte:

[Z_3 | Z_3] • [6 | 5] • [Z_{12} | Z_{12}] • [9 | 7] • [7 | 11] • [8 | 10] • [4 | 5].

À esquerda poderá ser encaixada qualquer peça, à direita poderão ser encaixadas peças com pelo menos um dos lados igual a 2, 5, 8 ou 11. Freitas-Teodoro [8] optaram como próxima jogada a peça [6 | 7], sendo jogada à esquerda.

[7 | 6] • [Z_3 | Z_3] • [6 | 5] • [Z_{12} | Z_{12}] • [9 | 7] • [7 | 11] • [8 | 10] • [4 | 5].

Possíveis jogadas: à esquerda seriam possíveis peças com pelo menos um dos lados igual a 1, 4, 7 ou 10, à direita seriam possíveis peças com pelo menos um dos lados igual a 2, 5, 8 ou 11, ou em ambos os lados jogar qualquer peça especial. Freitas-Teodoro [8] optaram por jogar a peça [1 | 1] à esquerda.

[1 | 1] • [7 | 6] • [Z_3 | Z_3] • [6 | 5] • [Z_{12} | Z_{12}] • [9 | 7] • [7 | 11] •
[8 | 10] • [4 | 5].

Como a jogada anterior foi uma peça em que os lados tinham restos iguais na divisão por 3, as possibilidades não se alteram. No passo seguinte, Freitas-Teodoro [8] optaram por jogar a peça especial [Z_1 | Z_1] à esquerda.

[1 | 1] • [7 | 6] • [Z_3 | Z_3] • [6 | 5] • [Z_{12} | Z_{12}] • [9 | 7] • [7 | 11] •
[8 | 10] • [4 | 5] • [Z_1 | Z_1].

A jogada dessa peça, pelo Algoritmo de Euclides, possibilita jogar qualquer peça, pois na divisão por 1 os restos sempre serão iguais a zero. Freitas-Teodoro [8] optaram por encaixar, na sequência, a peça [0 | 2] à direita.

[1 | 1] • [7 | 6] • [Z_3 | Z_3] • [6 | 5] • [Z_{12} | Z_{12}] • [9 | 7] • [7 | 11] •
[8 | 10] • [4 | 5] • [Z_1 | Z_1] • [0 | 2].

Com a jogada de [Z_1 | Z_1], qualquer peça pode ser jogada. Freitas-Teodoro [8] optaram pela peça [4 | 2] à esquerda.

[4 | 2] • [1 | 1] • [7 | 6] • [Z_3 | Z_3] • [6 | 5] • [Z_{12} | Z_{12}] • [9 | 7] •
[7 | 11] • [8 | 10] • [4 | 5] • [Z_1 | Z_1] • [0 | 2].

O exemplo de Freitas-Teodoro [8] finaliza nesta parte. Para melhor entendimento, serão feitas outras duas adaptações (possibilidades), uma que não consta no trabalho de Freitas-Teodoro [8] e outra baseada na continuação do Exemplo que não consta no trabalho de Freitas-Teodoro [8] a partir de determinada jogada.

2.2.2 O Dominó Algébrico Adaptado

Pela **Regra 6**, o portador da peça especial [Z_{12} | Z_{12}] iniciará o jogo. Após isso, será jogada a segunda peça [11 | 6], e o jogo terá a seguinte configuração:

$[\ Z_{12}\ |\ Z_{12}\ ] \bullet [\ 11\ |\ 6\ ].$

Se o jogador optar por jogar na posição à esquerda da peça $[\ Z_{12}\ |\ Z_{12}\ ]$, ele poderá jogar qualquer peça. Se optar por jogar ao lado da peça [11 | 6], só poderá encaixar peças em que pelo menos um lado que contenha o número 6, ou então encaixar uma peça especial em qualquer um dos lados.

Suponha que na terceira rodada, seja jogada a peça [7 | 9], encaixada, com a seguinte configuração:

$[\ 7\ |\ 9\ ] \bullet [\ Z_{12}\ |\ Z_{12}\ ] \bullet [\ 11\ |\ 6\ ].$

Assim, as possibilidades serão: à esquerda poderá ser encaixada uma peça com pelo menos um lado 7, à direita poderá ser encaixada uma peça com pelo menos um lado 6, ou poderá ser jogada uma das peças especiais.

Na quarta jogada a peça [6 | 9] é encaixada à direita, com a seguinte configuração:

$[\ 7\ |\ 9\ ] \bullet [\ Z_{12}\ |\ Z_{12}\ ] \bullet [\ 11\ |\ 6\ ] \bullet [\ 6\ |\ 9\ ].$

Assim, as possibilidades de jogadas serão: à esquerda, encaixar uma peça com pelo menos um lado 7, à direita, poderá ser encaixada qualquer peça com pelo menos um lado 9, ou então, em qualquer dos lados poderá ser encaixada uma peça especial.

Na quinta jogada, a peça especial $[\ Z_4\ |\ Z_4\ ]$ foi encaixada à esquerda, passando a ter a seguinte configuração:

$[\ Z_4\ |\ Z_4\ ] \bullet [\ 7\ |\ 9\ ] \bullet [\ Z_{12}\ |\ Z_{12}\ ] \bullet [\ 11\ |\ 6\ ] \bullet [\ 6\ |\ 9\ ].$

Isso implicará em mais possibilidades de jogo, pois será possível encaixar: à esquerda qualquer peça poderá ser jogada, à direita, pela **Regra 6**, poderá ser jogada qualquer peça em que pelo menos um dos lados, quando dividido pelo valor da peça especial, tenha o mesmo resto de divisão. Como na **Seção 2.2.1**, considere o número 9, quando dividido por 4, pode ser escrito como $9 = 4 \bullet 2 + 1$. Nesse caso, os números com possibilidade de encaixe ao lado do valor nove seriam os que têm resto 1 quando divididos por 4. Testando todas as possibilidades dentro do jogo, temos:

0 = 0 • 4 + 0.

1 = 0 • 4 + 1.

2 = 0 • 4 + 2.

3 = 0 • 4 + 3.

4 = 4 • 1 + 0.

5 = 5 • 1 + 1.

6 = 4 • 1 + 2.

7 = 4 • 1 + 3.

8 = 4 • 2 + 0.

9 = 4 • 2 + 1.

10 = 4 • 2 + 2.

11 = 4 • 2 + 3.

Como o jogo envolve a igualdade de restos (Algoritmo de Euclides), as peças que poderão ser jogadas a direita possuem número na face que deixa resto 1 na divisão por 4, restando como possibilidades de encaixe as peças com pelo menos um lado igual a 1, 5 ou 9 à direita. À esquerda poderá ser jogada qualquer peça.

Na sexta jogada à direita, será encaixada a peça [5 | 4] e a configuração passará a ser a seguinte:

[Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4].

Nesse caso, à esquerda seria possível jogar, como antes, qualquer peça. À direita, existindo a possibilidade de serem jogadas peças que, quando divididas por 4, tenham o mesmo resto que o valor da peça especial jogada, então os restos iguais a 0. Pela sequência já descrita dos restos de divisões por 4, as possibilidades seriam 0, 4 ou 8 ou em qualquer lado poderá ser jogada uma peça especial.

Na sétima jogada será encaixada a peça [2 | 9] à esquerda. Então, a seguinte configuração será:

[2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4].

Nesse caso, as possibilidades seriam: à direita, peças com pelo menos um número que, quando divididos por 4 tem resto igual a 2 e utilizando a sequência supracitada, conclui-se que as possibilidades que restam são de peças com pelo menos um dos números iguais a 2, 6 ou 10, ou, à esquerda, as possibilidades seriam jogar peças em que pelo menos um dos números, quando divididos por 4, tenham resto 0. Ou seja, as possibilidades anteriores para a esquerda seriam mantidas ou então em ambos os lados poderia ser jogada uma peça especial.

Na oitava jogada a próxima peça será a [Z_3 | Z_3] que, sendo encaixada à direita, teríamos a seguinte configuração.

[2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3].

Com a inserção de peças especiais, a regra do jogo é alterada para peças jogadas com pelo menos um dos lados com restos iguais na divisão por 3. Portanto, a configuração terá um quadro de possibilidades baseados em divisões por 3, já mostrado na **Seção 2.2.1**. Portanto poderiam ser jogadas: à esquerda peças com valores iguais na divisão por 3. No caso, a peça tem o número 2 para ser dividido por 3, com resto 2 (Algoritmo de Euclides), ou seja, todos os números com resto 2 na divisão por 3 poderiam ser encaixados. Seriam eles os números 2, 5, 8 ou 11. À direita, qualquer peça pode ser encaixada ou em ambos os lados pode ser jogada uma peça especial.

Na nona jogada à esquerda, será encaixada a peça [10 | 8], passando o jogo a ter a seguinte configuração:

[10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] •
[Z_3 | Z_3].

Portanto, com esta nova configuração as possibilidades serão: à esquerda temos a peça 10, que tem resto 1 na divisão por 3 (Algoritmo de Euclides) sendo possível apenas jogar peças que, quando divididas por 3 geram resto 1. Seriam elas as peças 1, 4, 7 ou 10. À direita, qualquer peça poderia ser jogada, ou em ambos os lados podem ser jogadas qualquer peça especial. Para continuidade do jogo (décima à direita) a peça [2 | 2], e o jogo terá a seguinte configuração:

[10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2].

À esquerda se manterão as possibilidades com pelo menos um dos lados iguais a 1, 4, 7 ou 10, e à direita serão possíveis encaixar as peças com pelo menos um dos lados iguais a 2, 5, 8 ou 11.

2.2.3 A Continuidade do Exemplo do Dominó Algébrico Adaptado

Suponha que o jogo da **Seção 2.2.2** continue até o final, entre dois jogadores, com peças distribuídas aleatoriamente, a partir do final, onde 10 peças foram jogadas e onde os dois jogadores possuem a mesma quantidade de peças. Neste exemplo, como as maneiras de encaixe já estão suficientemente explicadas, a sequência de jogadas será feita de uma forma mais simplificada. Será mostrada a configuração de dez em dez peças ou no momento em que uma peça especial for jogada. A peça especial ativa é a [Z_3 | Z_3].

11ª jogada – jogador 1 posiciona a peça [1 | 1] à esquerda.

12ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [3 | 7] à esquerda.

13ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [8 | 9] à direita.

14ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [0 | 0] à direita.

15ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [6 | 8] à direita.

16ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [2 | 3] à direita.

17ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [11 | 3] à esquerda.

18ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [0 | 5] à esquerda. A configuração do jogo será a seguinte:

[0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] • [10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] • [6 | 8] • [2 | 3].

19ª jogada – jogador 1 posiciona a peça especial [Z_2 | Z_2] à direita. Isso altera as regras de encaixe de peças do jogo para restos na divisão por 2, utilizando o Algoritmo de Euclides:

0 = 0 • 2 + 0.

1 = 0 • 2 + 1.

2 = 1 • 2 + 0.

3 = 1 • 2 + 1.

4 = 2 • 2 + 0.

5 = 2 • 2 + 1.

6 = 2 • 3 + 0.

7 = 2 • 3 + 1.

8 = 2 • 4 + 0.

9 = 2 • 4 + 1.

10 = 2 • 5 + 0.

11 = 2 • 5 + 1.

[0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] • [10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] • [6 | 8] • [2 | 3] • [Z_2 | Z_2].

20ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [1 | 4] à esquerda.

21ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [5 | 11] à esquerda.

22ª jogada – jogador 2 posiciona a peça [1 | 9] à esquerda.

23ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [7 | 11] à direita.

24ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [9 | 4] à direita.

25ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [8 | 5] à esquerda.

26ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [11 | 2] à esquerda.

27ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [1 | 11] à esquerda.

28ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [0 | 3] à direita.

29ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [7 | 7] à direita, com a seguinte configuração:

[1 | 11] • [11 | 2] • [8 | 5] • [1 | 9] • [5 | 11] • [1 | 4] • [0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] • [10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] • [6 | 8] • [2 | 3] • [Z_2 | Z_2] • [7 | 11] • [9 | 4] • [7 | 7].

30ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [4 | 7] à esquerda.

31ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [3 | 4] à direita.

32ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [10 | 10] à esquerda.

33ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [2 | 7] à direita.

34ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [1 | 8] à esquerda.

35ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [3 | 5] à direita.

36ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [1 | 6] à direita.

37ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [0 | 8] à direita.

38ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [6 | 5] à esquerda.

39ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [0 | 10] à direita.

[6 | 5] • [1 | 8] • [10 | 10] • [4 | 7] • [1 | 11] • [11 | 2] • [8 | 5] • [1 | 9] • [5 | 11] • [1 | 4] • [0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] • [10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] • [6 | 8] • [2 | 3] • [Z_2 | Z_2] • [7 | 11] • [9 | 4] • [0 | 3] • [7 | 7] • [3 | 4] • [2 | 7] • [3 | 5] • [1 | 6] • [0 | 8] • [0 | 10].

40ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [5 | 2] à esquerda.

41ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [7 | 6] à esquerda.

42ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça especial [Z_6 | Z_6] à direita. Passando o jogo a ter a seguinte configuração:

[7 | 6] • [5 | 2] • [6 | 5] • [1 | 8] • [10 | 10] • [4 | 7] • [1 | 11] • [11 | 2] • [8 | 5] • [1 | 9] • [5 | 11] • [1 | 4] • [0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] • [10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] • [6 | 8] • [2 | 3] • [Z_2 | Z_2] • [7 | 11] • [9 | 4] • [0 | 3] • [7 | 7] • [3 | 4] • [2 | 7] • [3 | 5] • [1 | 6] • [0 | 8] • [0 | 10] • [Z_6 | Z_6].

Desta maneira, [Z_6 | Z_6] é a peça especial ativa e as possibilidades de jogada foram alteradas. Pelo Algoritmo de Euclides para as divisões por 6 as possibilidades do jogo serão:

0 = 0 • 6 + 0.

1 = 0 • 6 + 1.

2 = 0 • 6 + 2.

3 = 0 • 6 + 3.

4 = 0 • 4 + 4.

5 = 0 • 5 + 5.

6 = 1 • 6 + 0.

7 = 1 • 6 + 1.

8 = 1 • 6 + 2.

9 = 1 • 6 + 3.

10 = 1 • 6 + 4.

11 = 1 • 6 + 5.

43ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [5 | 7] à esquerda.

44ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [9 | 5] à esquerda.

45ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [2 | 4] à esquerda.

46ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [3 | 8] à esquerda.

47ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [0 | 9] à esquerda.

48ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [10 | 11] à direita.

49ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [3 | 6] à esquerda.

50ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [10 | 9] à esquerda.

51ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [5 | 1] à direita.

52ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [1 | 0] à direita, passando o jogo a ter a seguinte configuração:

[10 | 9] • [3 | 6] • [0 | 9] • [3 | 8] • [2 | 4] • [9 | 5] • [5 | 7] • [7 | 6] • [5 | 2] • [6 | 5] • [1 | 8] • [10 | 10] • [4 | 7] • [1 | 11] • [11 | 2] • [8 | 5] • [1 | 9] • [5 | 11] • [1 | 4] • [0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] • [10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] • [6 | 8] • [2 | 3] • [Z_2 | Z_2] • [7 | 11] • [9 | 4] • [0 | 3] • [7 | 7] • [3 | 4] • [2 | 7] • [3 | 5] • [1 | 6] • [0 | 8] • [0 | 10] • [Z_6 | Z_6] • [10 | 11] • [5 | 1] • [1 | 0].

53ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [11 | 4] à esquerda.

54ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [0 | 7] à direita.

55ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [1 | 2] à direita.

56ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [8 | 4] à direita.

57ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [5 | 5] à esquerda.

58ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [8 | 11] à esquerda.

59ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [8 | 8] à esquerda.

60ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [6 | 2] à esquerda.

61ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [2 | 0] à esquerda.

62ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [0 | 6] à esquerda, passando o jogo a ter a seguinte configuração:

[0 | 6] • [0 | 2] • [6 | 2] • [8 | 8] • [8 | 11] • [5 | 5] • [11 | 4] • [10 | 9] • [3 | 6] •
[0 | 9] • [3 | 8] • [2 | 4] • [9 | 5] • [5 | 7] • [7 | 6] • [5 | 2] • [6 | 5] • [1 | 8] •
[10 | 10] • [4 | 7] • [1 | 11] • [11 | 2] • [8 | 5] • [1 | 9] • [5 | 11] • [1 | 4] •
[0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] • [10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] •
[Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] •
[6 | 8] • [2 | 3] • [Z_2 | Z_2] • [7 | 11] • [9 | 4] • [0 | 3] • [7 | 7] • [3 | 4] • [2 | 7] •
[3 | 5] • [1 | 6] • [0 | 8] • [0 | 10] • [Z_6 | Z_6] • [10 | 11] • [5 | 1] • [1 | 0] • [0 | 7] •
[1 | 2] • [8 | 4].

63ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [4 | 0] à esquerda.

64ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [4 | 4] à direita.

65ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [4 | 6] à direita.

66ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [6 | 6] à direita.

67ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [0 | 11] à direita.

68ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [6 | 10] à esquerda.

69ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [11 | 0] à direita.

70ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [5 | 10] à direita.

71ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [10 | 4] à direita.

72ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [10 | 7] à direita. Passando o jogo a ter a seguinte configuração:

[6 | 10] • [4 | 0] • [0 | 6] • [0 | 2] • [6 | 2] • [8 | 8] • [8 | 11] • [5 | 5] • [11 | 4] •

[10 | 9] • [3 | 6] • [0 | 9] • [3 | 8] • [2 | 4] • [9 | 5] • [5 | 7] • [7 | 6] • [5 | 2] • [6 | 5] • [1 | 8] • [10 | 10] • [4 | 7] • [1 | 11] • [11 | 2] • [8 | 5] • [1 | 9] • [5 | 11] • [1 | 4] • [0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] • [10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] • [6 | 8] • [2 | 3] • [Z_2 | Z_2] • [7 | 11] • [9 | 4] • [0 | 3] • [7 | 7] • [3 | 4] • [2 | 7] • [3 | 5] • [1 | 6] • [0 | 8] • [0 | 10] • [Z_6 | Z_6] • [10 | 11] • [5 | 1] • [1 | 0] • [0 | 7] • [1 | 2] • [8 | 4] • [4 | 4] • [4 | 6] • [6 | 6] • [0 | 11] • [5 | 10] • [10 | 4] • [10 | 7].

73ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [1 | 10] à direita.

74ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [10 | 2] à direita.

75ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [8 | 2] à direita.

76ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [8 | 7] à direita.

77ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça especial [Z_1 | Z_1] à esquerda, passando o jogo a ter a seguinte configuração:

[Z_1 | Z_1] • [6 | 10] • [4 | 0] • [0 | 6] • [0 | 2] • [6 | 2] • [8 | 8] • [8 | 11] • [5 | 5] • [11 | 4] • [10 | 9] • [3 | 6] • [0 | 9] • [3 | 8] • [2 | 4] • [9 | 5] • [5 | 7] • [7 | 6] • [5 | 2] • [6 | 5] • [1 | 8] • [10 | 10] • [4 | 7] • [1 | 11] • [11 | 2] • [8 | 5] • [1 | 9] • [5 | 11] • [1 | 4] • [0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] • [10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] • [Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] • [6 | 8] • [2 | 3] • [Z_2 | Z_2] • [7 | 11] • [9 | 4] • [0 | 3] • [7 | 7] • [3 | 4] • [2 | 7] • [3 | 5] • [1 | 6] • [0 | 8] • [0 | 10] • [Z_6 | Z_6] • [10 | 11] • [5 | 1] • [1 | 0] • [0 | 7] • [1 | 2] • [8 | 4] • [4 | 4] • [4 | 6] • [6 | 6] • [0 | 11] • [5 | 10] • [10 | 4] • [10 | 7] • [1 | 10] • [10 | 2] • [8 | 2] • [8 | 7].

78ª jogada – com a jogada da peça especial [Z_1 | Z_1], a partir deste momento, pelo Algoritmo de Euclides, qualquer peça pode ser jogada. Jogador 2 posiciona a peça [9 | 11] à direita.

79ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [9 | 9] à esquerda.

80ª jogada – Jogador 2 posiciona a peça [3 | 3] à direita.

81ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [1 | 7] à esquerda.

82ª jogada – jogador 2 posiciona a peça [1 | 3] à direita.

83ª jogada – Jogador 1 posiciona a peça [11 | 11] à esquerda e vence o jogo, passando o jogo a ter a seguinte configuração:

[11 | 11] • [1 | 7] • [9 | 9] • [Z_1 | Z_1] • [6 | 10] • [4 | 0] • [0 | 6] • [0 | 2] • [6 | 2] •
[8 | 8] • [8 | 11] • [5 | 5] • [11 | 4] • [10 | 9] • [3 | 6] • [0 | 9] • [3 | 8] • [2 | 4] •
[9 | 5] • [5 | 7] • [7 | 6] • [5 | 2] • [6 | 5] • [1 | 8] • [10 | 10] • [4 | 7] • [1 | 11] •
[11 | 2] • [8 | 5] • [1 | 9] • [5 | 11] • [1 | 4] • [0 | 5] • [11 | 3] • [3 | 7] • [1 | 1] •
[10 | 8] • [2 | 9] • [Z_4 | Z_4] • [7 | 9] • [Z_{12} | Z_{12}] • [11 | 6] • [6 | 9] • [5 | 4] •
[Z_3 | Z_3] • [2 | 2] • [8 | 9] • [0 | 0] • [6 | 8] • [2 | 3] • [Z_2 | Z_2] • [7 | 11] • [9 | 4] •
[0 | 3] • [7 | 7] • [3 | 4] • [2 | 7] • [3 | 5] • [1 | 6] • [0 | 8] • [0 | 10] • [Z_6 | Z_6] •
[10 | 11] • [5 | 1] • [1 | 0] • [0 | 7] • [1 | 2] • [8 | 4] • [4 | 4] • [4 | 6] • [6 | 6] •
[0 | 11] • [5 | 10] • [10 | 4] • [10 | 7] • [1 | 10] • [10 | 2] • [8 | 2] • [8 | 7] •
[9 | 11] • [3 | 3] • [1 | 3].

Pelo fato do jogador 1 ter concluído o jogo, acabando com as suas peças, o jogador 2 termina o jogo sem jogar a peça [3 | 9].

3 ANÁLISE LÓGICA DO DOMINÓ ALGÉBRICO

Inicialmente será feita uma análise sobre as peças especiais do jogo, utilizando definições baseadas no Algoritmo de Euclides.

A peça inicial [Z_{12} | Z_{12}] implicaria em números divididos por 12 e seus respectivos restos. Mas como as peças são numeradas de 0 a 11, todos os seus números têm restos iguais a esse mesmo número. Por isso, quando a peça que está jogada é a inicial, somente números iguais podem ser colocados no jogo. Quando a peça for a [Z_6 | Z_6], a quantidade de peças disponíveis para jogar aumenta, pois passariam a ter dois resultados com o mesmo resto.

Peça [Z_1 | Z_1]: Possibilitaria que qualquer peça seja jogada, pois, na divisão por 1, todos os números inteiros possuem resto 0 e, assim, podem ser encaixados qualquer número.

Peça [Z_2 | Z_2]: Com essa peça, se um número ímpar for colocado, somente outro número ímpar pode ser encaixado. Se um número par for encaixado, somente outro número par pode ser colocado.

A conclusão lógica é a de que quanto maior for o número que representa a peça especial jogada, mais restritas serão as opções. Então, nesse padrão, quanto maior o valor da peça especial, menos opções de jogadas terão os jogadores e maior dificuldade de encontrar jogadas terão.

Se, em determinado momento, for objetivo do jogo a vitória, então quanto antes o jogador usar peças especiais com os “menores números” e, posteriormente, os “com maiores números”, terá maiores chances de vencer. Além disso, no que diz respeito a vencer, o jogador que possui maior diversidade de jogadas irá lidar com mais possibilidades e tenderá a sair vitorioso.

4 USO DE JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Para Galvão et al. [9], até meados do século 20, o ensino da Matemática no Brasil era baseado em aulas expositivas, nas quais o aluno reproduzia os exercícios abordados pelo professor. Eram utilizados a repetição e memorização, e o professor era o personagem central, que se valia do quadro negro e voz como fonte de comunicação. Essa forma de ensino foi denominada Formalista Clássica. Os resultados da Educação Clássica, porém, não eram satisfatórios e o alcance era limitado, geralmente a uma pequena quantidade de alunos, aqueles que se adaptavam ao único método de ensino utilizado. Esse método foi proposto até a década de 60, até que grupos de estudiosos buscaram novos rumos no ensino da Matemática brasileira. Segundo Pinto ([20], p. 6-14) esses grupos ficaram conhecidos como MMM (Movimento da Matemática Moderna).

O MMM visava modernizar e renovar os currículos da Educação Matemática brasileira e tinha forte influência de pensadores estrangeiros, principalmente europeus, porém, esse primeiro passo para um ensino mais inclusivo e eficiente não foi considerado correto, pois, apesar da modernização do currículo, o ensino continuou baseado em repetição e memorização.

Além disso, o ensino de Matemática continuou com padronizações semelhantes às propostas pela Tendência Formalista Clássica, com livros de níveis idênticos, pouco maleáveis, que privilegiavam o conhecimento puramente matemático em detrimento do conhecimento escrito e interpretativo. Para Pinto [20], tratavam-se de livros com pouca durabilidade e custos considerados altos para os padrões familiares da época, ou seja, houve uma mudança no conteúdo, mas o problema que era a forma de ensino, continuou a mesma.

Com as possibilidades de comunicação da época (acesso a livros e conteúdos), a disseminação de ideias, métodos e pesquisas era dificultada por não se vislumbrar perspectivas de fácil interação entre os pesquisadores da área. Para resolver essa problemática, Pinto [20] cita que, dos diversos grupos que lideravam o MMM, o principal era o Grupo de Estudos de Ensino da Matemática (GEEM), que tinha como principal personagem Oswaldo Sangiorgi. Esse grupo foi um dos principais difusores dos ideais de modernização da Educação Matemática no Brasil. Com os recursos disponíveis para a época (cursos e livros principalmente), a principal proposta era de uma Matemática adequada a capacidade e intelecto da maioria dos alunos.

Após esse período, segundo Galvão et al. ([9], p. 3-6) houve sugestões ao longo do tempo de alternativas metodológicas que foram denominadas Tendências em Educação Matemática (TEM), que seriam: História da Matemática, Resolução de Problemas, Etnomatemática, Uso de Jogos, Modelagem Matemática e Mídias Tecnológicas.

A História da Matemática mostra a construção teórica e experimental no ensino da Matemática. É uma TEM que mostra como, a partir de erros e acertos ao longo da história do ensino, a matemática foi construída para alunos e professores. Da forma como a conhecemos atualmente, essa TEM vem sendo fundamental para reconhecer e entender os contextos históricos das tendências atuais. Pinto [20] ressalta que:

> Investigar a vida e morte desse movimento, que alterou a estrutura do ensino e da aprendizagem de Matemática é, portanto, de suma importância para a compreensão das práticas escolares atuais, e isso suscita pesquisas que desvelem novas evidências das formas como as ideias desse importante movimento foram incorporadas pelos agentes escolares, especialmente como deram significado à cultura docente. (Pinto [20], p. 12)

A Resolução de Problemas trabalha o conhecimento matemático como interpretação de texto e raciocínio lógico. Está ligada ao fator desafio, conectando conceitos como investigação, comparação e definição de padrões para resolver um determinado tipo de problema. Acerca da Resolução de Problemas Polya ([21], p. 5) observa que “(...) é importante ressaltar que a escolha desta tendência de ensino permite desenvolver um processo de reflexão quanto ao caminho a ser utilizado com tomada de decisões eficazes para resolução de problemas”.

A Etnomatemática é uma tendência que valoriza o aluno num contexto sócio cultural. Nela é observado o modo de agir, bem como experiências de vida para trabalhar ideias e produzir formas mais eficientes de entendimento sobre os conteúdos relacionados à Matemática. Essa é uma das tendências mais debatidas e é frequentemente desenvolvida em diferentes situações. Para D’ambrosio [6] a Etnomatemática pode tornar o ensino de Matemática inclusivo, criando possibilidades principalmente para grupos esquecidos no âmbito social.

> (...) objetivo maior é analisar as raízes sócio-culturais do conhecimento matemático, revela uma grande preocupação com a dimensão política ao estudar história, filosofia e suas implicações pedagógicas. As pesquisas consistem essencialmente numa investigação holística da geração [cognição], organização intelectual [epistemologia] e social [história] e difusão [educação] do conhecimento matemático, particularmente em culturas consideradas marginais. (D’ambrosio [6], p. 25)

A Modelagem Matemática tem por objeto de estudo a compreensão dos mais variados fenômenos do dia-a-dia, testando a capacidade de enquadrar a disciplina aos contextos vividos pelos alunos. Como o próprio nome diz, devem ser criados modelos, mediante o uso de técnicas para solucionar os mais variados problemas. Segundo Bassanezi ([1], p.21) "Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências".

As Mídias Tecnológicas são ideias mais recentes, pelo fato da disponibilidade tecnológica. São, além de uma tendência, uma ferramenta que pode auxiliar e potencializar a educação, comparando resoluções e formas de estudo dos alunos para compreender tipos de pensamento e, assim, moldar o ensino da Matemática. Costa-Pinheiro ([3], p. 4) ressalta que "(...) recursos tecnológicos podem se apresentar como estimuladores para a aprendizagem em Matemática. Isso porque a ferramenta computador está presente no cotidiano das pessoas (...)".

O Uso de Jogos é visto como uma maneira lúdica de acesso ao conhecimento, sem necessariamente estar dissociado das outras TEM. Para Galvão et al. ([9], p. 4), ele pode ser aplicado em qualquer nível e disciplina. Huizinga [11] pontua que a natureza do jogo está relacionada a fenômenos culturais, por isso, o jogo é inerente a todos os povos. O ato de jogar integra diversos aspectos como linguagem, interpretação, integração e imaginação.

Nas seções seguir, abordaremos o Uso de Jogos no ensino de Matemática nas perspectivas dos autores C. Muniz, T. Kishimoto e R. Grando.

4.1 USO DE JOGOS NA PERSPECTIVA DE CRISTIANO MUNIZ

O Uso de Jogos é uma das ferramentas para desconstrução da mentalidade social sobre as dificuldades no conteúdo de Matemática. Neste contexto, Muniz [18] determina formas e momentos de aplicações de jogos para o ensino e para o reforço de determinadas ideias teóricas.

Para o mesmo autor, o jogo pode e deve ser parte integrante do processo de aprendizagem do aluno e quando a adaptação contexto-jogo é feita com competência, utilizando regras coesas, porém não tão rígidas, dando margem a criatividade e a ludicidade, o jogo passa a ser um complemento, uma forma útil de ensino.

A proposta de Muniz [18] é uma pesquisa que analisa os resultados de jogos propostos para crianças por adultos, sendo utilizada a Matemática como forma de determinar o vencedor, chegando ao objetivo, que é a forma de aprendizado ou reforço do ensino da Matemática dentro do próprio jogo. Nesta proposta o conceito de jogo para o ensino da Matemática não necessariamente passa por jogos matemáticos. O jogo pode ter conceitos matemáticos inclusos nas regras, na jogabilidade ou ter ideias matemáticas dissolvidas, como por exemplo, uma soma de pontuação.

Muniz [18] cita como presença fundamental o professor. Ele é o controlador das ações, das regras, das propostas e é em torno dele devem interagir, através das regras propostas. O autor faz uma correlação entre a produtividade em torno da Matemática no Uso de Jogos com e sem o controle de adultos, que permita satisfatório nível de satisfação e aprendizagem de crianças sem que alguém dite regras específicas para seguir o jogo e regras que priorizem o aprendizado. Faz também um estudo para entender o que é necessário para que as crianças tenham a mesma produtividade no jogo sem o controle de adultos e com o controle de adultos.

O jogo deve ter, além das relações citadas acima, o fator desafio colocado como ideia central. Os jogos onde puramente o azar determina a relação do vencedor ou perdedor deixam de lado, a longo prazo, o fator desafio e, com isso, o interesse coletivo da classe pelo jogo.

O Uso de Jogos, segundo Muniz [18], pode ter duas maneiras de ser aplicado: para ensinar o conteúdo ou para reforçá-los. Partindo deste conceito, nem sempre será possível incluir a teoria ou até mesmo a prática da Educação Matemática integrada aos jogos, mas quando possível o jogo pode ser utilizado, pois trata-se de uma forma mais abrangente e eficiente de ensino da Matemática, aliando teoria à prática.

> A partir desta convicção teórica, o jogo é tomado como instrumento pedagógico e vemos uma introdução gradual e crescente dos jogos no ensino da Matemática. A utilização do jogo como mediador do conhecimento matemático ganha importância nos discursos dos educadores e dentro da prática pedagógica a partir da necessidade da participação efetiva do sujeito na construção do seu conhecimento. (Muniz [18], p. 13)

Com esse ponto de vista, Muniz [18] convalida o pensamento deste trabalho, pois, sem o conhecimento teórico atingido sobre os principais tópicos do jogo, passaria a ter seu resultado prejudicado. Seria um pensamento no sentido de utilização do jogo como parte prática, de convalidar conhecimentos anteriores e aplicar na forma lúdica.

Do ponto de vista matemático, o jogo pode ser de pura reflexão, onde em geral trata-se de um jogo com dois adversários, que tem ligação forte com a Matemática criando não somente possibilidades exclusivamente matemáticas, mas também utilizando a lógica Matemática, interpretações de situações e observações do próprio jogo e do jogo dos seus oponentes.

O Dominó Algébrico é uma forma de jogo onde a reflexão, observação, cálculos matemáticos e interpretação podem ser decisivas na aplicação do jogo em determinados contextos e podem instigar o pensamento crítico do aluno, com ganhos educacionais na simples aplicação e até mesmo na determinação de vencedores, podendo ser aliado a diversos conteúdos e diversos níveis.

Segundo Muniz ([18], p. 14) “A atividade desenvolvida em contexto escolar é nomeada “jogo”, apresenta-se como situação didática, podendo ser controlada por regras impostas de forma arbitrária pelo professor”. Justamente a imposição de regras tem a tendência de fazer com que o jogo passe do improdutivo para o eficiente. O jogo Dominó Algébrico pode passar de um jogo irrelevante do ponto de vista educacional, que seria o dominó tradicional, sem consequências didáticas, passando para o produtivo, com consequências didáticas profundas em determinados conteúdos e para diferentes níveis.

Então o jogo será uma forma de desconstrução de ideias pré-concebidas com relação a algumas disciplinas, entre elas, a Matemática, possibilitando a criação de um canal entre professor e aluno que pode ser intensamente fortalecido.

> As crianças jogando, mesmo quando em atividades solitárias, desenvolvem determinada atividade matemática num processo de criação ou da resolução de problemas que as lançam a colocar em cena suas capacidades cognitivas, sejam conhecimentos já construídos, sejam suas capacidades de criar e gerenciar novas estratégias do pensamento. (Muniz [18], p.45)

O jogo auxilia o aluno a produzir novos conhecimentos ou a reforçar conhecimentos matemáticos já adquiridos. As situações de Jogo-Problema, para Muniz [18], foge aos objetivos primários do jogo, que são predominantemente determinados pela atratividade e poder de persuasão. O Jogo-Problema é algo que poderia ser aplicado a alunos ou a pessoas com conhecimentos e interesses significativamente grandes sobre determinados assuntos. Para Muniz ([18], p. 27) “Em um exercício escolar, imposto por meio de uma situação didática, não é verdade que o aluno possua esta liberdade criativa”. Portanto, para que se tenha a liberdade criativa, as flexibilidades das regras são consideradas fundamentais.

Como consequência, o Jogo-Problema seria algo aplicável somente em casos muito específicos como em locais com pessoas bem capacitadas sobre os objetivos do jogo e que, principalmente, tenham interesse no aprendizado profundo com o Uso de Jogos.

Com análises feitas por Muniz [18] e com a ferramenta que o jogo pode oferecer, o Dominó Algébrico pode ser usado tanto como jogo ou como uma espécie de jogo com maiores dificuldades, tudo dependerá da forma como é utilizado o Algoritmo de Euclides dentro da proposta e do nível de ensino.

4.2 USO DE JOGOS NA PERSPECTIVA DE TIZUKO KISHIMOTO

Os jogos podem ser a única oportunidade atrativa para pessoas com menor acesso a atividades recreativas, seja por falta de liberdade, por ausência de contexto social ou por qualquer outro motivo. Segundo Kishimoto [14], desta maneira, o aluno que enxerga a escola como uma obrigação rotineira pode passar a ter uma visão lúdica ao lado da visão necessária para o aprendizado, tornando-o assim algo atrativo e mais acessível em qualquer nível de ensino.

> O brincar é importante para a criança expressar significações simbólicas. Pelo brincar a criança aprende a simbolizar. Ao assumir papéis, ao usar objetos com outras finalidades para expressar significações, a criança entra no processo simbólico. O brincar auxilia o desenvolvimento simbólico. Mas não se trata de entender o símbolo como exercícios ou cópia de letras e números em práticas de uso do brinquedo no ensino formal. A criança, ao brincar de fazer compras no mercado, desenvolve a linguagem verbal e quando dispõe de um ambiente preparado, com embalagens de caixas de mantimentos, refrigerantes com rótulos que indicam o nome dos produtos, e utiliza dinheiro que constrói como moeda de troca, vai penetrando no mundo letrado e gradativamente avançando no processo de simbolização, conhecido como emergência, no letramento. (Kishimoto [14], Video file)

O ato de brincar auxilia o aluno a ter uma aprendizagem espontânea, tornando-a atrativa e eficiente nos seus objetivos, fazer com que o aluno produza conhecimento através de uma brincadeira.

Por se tratar de uma livre iniciativa ou algo relacionado a uma brincadeira dirigida, a importância do brincar é sempre considerada relevante. No que diz respeito a parte dirigida, esta que pode ser em sala de aula ou em um ambiente exterior, ambas com sua importância na construção do conhecimento de uma criança. O brincar dá autonomia e condições para a criança de tomar decisões, mesmo que partindo de exemplos relativamente simples. A brincadeira dirigida é algo que tem como impulsionar uma decisão ou um aprendizado mais próximo de objetivos não aleatórios, ou seja, que tenham relação ligada com algo, seja ele um ente ou uma regra.

Usar o Dominó Algébrico pode, nesse sentido, sair das ideias já construídas anteriormente. Porém, ele se enquadraria no critério citado por Kishimoto [13] de brincar, pois o jogo visa o aprendizado através da confirmação de conhecimentos.

Além desses conceitos, Kishimoto [16] cita o fato de que os brinquedos e jogos mudam ao longo do tempo. O que antes poderia ser considerado algo perigoso (por exemplo, o chocalho era utilizado para afugentar maus espíritos), no futuro pode se tornar uma brincadeira saudável. além disso, novas brincadeiras e novos conhecimentos podem ser introduzidos, deixando as brincadeiras ou brinquedos obsoletos e, assim, aumentar a quantidade de possibilidades do Uso de Jogos de forma didática.

Os jogos criam um ambiente favorável ao ensino da Matemática, gerando um interesse coletivo, natural e atraente para pessoas em qualquer idade, com uma identidade única e pode ser moldada por um orientador, estando em sala de aula a possibilidade de o professor ter o papel de orientador, bem como em algum contexto externo a sala de aula.

Kishimoto [15] orienta que a definição do que pode ser uma brincadeira e um jogo depende muito das condições em que ele será aplicado, tais como idade, níveis de aprendizado, interesse, contexto social, acessibilidade e cultura. O ato de subir em árvores pode ser algo natural a algumas culturas e ser considerado uma maneira de diversão, já em outras pareceria um ato hostil.

Portanto, o jogo não seria algo naturalmente aceito em todas as culturas e aplicado de qualquer forma, mas sim aplicado em contextos específicos. Em sala de aula, o nível de especificidade aumenta ainda mais, e isso deve ser conduzido pelo orientador de forma que ele tenha objetivos bem coesos.

Para Kishimoto [13], o jogar principalmente em séries iniciais tem vital importância no aprendizado e, com o passar do tempo, o brincar torna-se algo mais complementar ao conteúdo, porém, não menos fundamental e com resultados semelhantes aos das séries iniciais, utilizando o jogo para mudar ideias pré-concebidas e retirando o parâmetro de algo unicamente visto como passatempo. Para Kishimoto ([13], p. 21) “Os paradigmas sobre o jogo infantil parecem equiparar o jogo ao "não sério", à futilidade ou reivindicar o sério e associá-lo à utilidade educativa”.

Kishimoto [13] também acredita na diferença entre o brincar o e jogar. Para a autora, o brincar estaria relacionado a algo sem compromisso algum, cujo o objetivo principal é exclusivamente lúdico. Já o jogar estaria relacionado ao compromisso, imposição de regras, objetivos educacionais bem definidos, dificuldades bem esclarecidas. Porém, apesar do objetivo não definido, o brincar também tem sua importância, seja ela motora, lógica ou interpretativa. A falta de objetivo definido não implica necessariamente em não alcançá-lo.

A cultura lúdica passa a ter importância fundamental na construção social e no aprendizado de crianças e adolescentes. É exatamente essa a ideia que o jogo tenta construir. O Dominó Algébrico tem por base reforçar conteúdos abordados, potencializando a aprendizagem dos participantes.

4.3 USO DE JOGOS NA PERSPECTIVA DE REGINA GRANDO

Segundo Grando [10], a noção intuitiva de jogos está ligada principalmente a noção de inserção cultural e contextos diversos. O que pode ser divertido para um certo grupo, para um outro pode não ser. Neste sentido, a definição do que poderia ser considerado um jogo, de fato, será enquadrada em ideias específicas de cada local. Isso por um lado pode limitar a quantidade de jogos que podem ser utilizados, porém, pela diversidade, amplia possibilidades de utilização das ferramentas conhecidas como jogo.

Para isso, o jogo é algo que é determinado como uma atividade lúdica de um certo grupo cultural, num contexto específico e que não necessariamente tem objetivos bem definidos.

Para Grando [10], os conteúdos têm objetivos e objetos de estudos extensos e, além disso, são itens sem utilidade no contexto social e de aprendizagem. Para lidar com esses problemas, o Uso de Jogo é algo essencial no ensino, pois pode criar um laço gigantesco e inseparável entre, aluno, conteúdo e professor.

Na situação de aplicação de jogos em sala de aula, com objetos bem definidos, Grando [10] convalida a ideia de que o jogo possa ser a ferramenta de utilização do ensino da Matemática de maior interesse de um público, pois se trata de algo de adesão cultural elevada, portanto, aumentando os níveis de interesses e diminuindo relativamente os níveis de preocupação com a dificuldade do conteúdo por parte dos alunos.

Para essa aplicação, Grando [10] cita como parte essencial a utilização de regras. Com elas desenvolvimentos quantitativos, qualitativos ou lógicos ficam potencializados. O uso de regras é algo que não pode ser tão rígido ou restritivo, pois regras são necessárias para o bom andamento e para que o fator desafio não tenha sua eficácia deixada de lado, porém as regras devem dar espaço ao raciocínio, a interpretação, a integração do aluno com os demais e o entendimento específico do conteúdo que o jogo pretende abordar, sem deixar de lado os trabalhos individuais ou coletivos.

Esses desenvolvimentos levam, além do conhecimento adquirido, ao fator desafio, que pode ser pessoal ou coletivo e pode desencadear o aprendizado de outros conteúdos com o objeto de estudo.

Na atividade lúdica as crianças criam uma ligação de obrigatoriedade, isso poderá ser a transformação necessária entre conteúdo e professor com o aluno. Este mesmo laço existirá entre aluno com professor, conteúdo e colegas. O jogo desenvolve a capacidade de questionar e de sugerir soluções baseadas em regras. E esse conceito pode ser aplicado tanto individualmente como numa coletividade.

> No jogo, este tipo de transformação pode ser evidenciado no momento em que considerarmos a ação do jogo como um diálogo do indivíduo consigo mesmo. Como se observa, pelo jogo, durante sua ação, o adversário serve de referência para o jogador se conhecer, estabelecendo uma transição do interpessoal para o intrapessoal. (Grando [10], p. 22)

E nesse estabelecimento de padrões baseados no aluno em comparação com os colegas de classe e com a didática do professor, o conhecimento matemático passa a ter o princípio desejável, atrativo e lúdico. A ideia é que esta ligação pessoal e coletiva se fortaleça para que as aplicações se perpetuem e que, a longo prazo, possam ter um bom resultado. O Uso de Jogos pode aparecer como forma de aplicação, elucidação e diminuição da abstração com relação aos conteúdos por parte dos alunos.

Grando [10] também cita a importância da utilização de regras no ensino da Matemática através de jogos, pois eles determinam a forma objetiva do jogo, criando um caminho que trilha para o conhecimento e que, também, pode determinar outros objetos além primários.

> Quando nos referimos à utilização de jogos nas aulas de Matemática como um suporte metodológico, consideramos que tenha utilidade em todos os níveis de ensino. O importante é que os objetivos com o jogo estejam claros, a metodologia a ser utilizada seja adequada ao nível que se está trabalhando e, principalmente, que represente uma atividade desafiadora ao aluno para o desencadeamento do processo. (Grando [10], p. 48)

A formação continuada dos professores seria um dos fatores que, segundo Grando [10], poderia dinamizar e melhorar a capacidade dos profissionais para que possam desenvolver e conhecer as técnicas utilizadas no ensino. A formação continuada capacita o professor para as diversas metodologias, que são experiências dentro do processo evolutivo do ensino de Matemática.

5 PROPOSTA DE APLICAÇÃO DO DOMINÓ ALGÉBRICO

Neste capítulo, será feita uma proposta para aplicação do Dominó Algébrico em sala de aula. O objetivo principal do jogo é o estudo de divisibilidade e restos.

A Metodologia utilizada é semelhante a proposta por Souza ([22], p.17-19). Ela tem como base a definição de objetivos, tempo de aplicação, utilização de recursos e, principalmente, divide a aplicação do trabalho em momentos para melhor entendimento e aplicação futura por parte do leitor.

5.1 DOMINÓ ALGÉBRICO EM SALA DE AULA

O Dominó Algébrico Adaptado terá como proposta uma aplicação para alunos a partir do Sétimo Ano do Ensino Fundamental. Desta maneira, um modelo de trabalho simples e de aplicação rápida será proposto.

5.1.1 Objetivos

i) Entender os conceitos de divisibilidade e restos.

ii) Desenvolver cálculos que envolvem o Algoritmo de Euclides.

iii) Compreender os conceitos de congruências e módulos.

5.1.2 Recursos

i) Duas folhas de papel cartolina.

ii) Uma tesoura.

iii) Pincéis esferográficos de cores diferentes da cartolina.

iv) Para maior durabilidade das peças, plástico transparente colável.

5.1.3 Duração

i) 4 horas.

5.1.4 Metodologia

i) **Primeiro Momento**: As peças serão confeccionadas utilizando-se a cartolina. Os alunos deverão, portanto, cortar 84 pedaços com medidas de 1,5 cm x 3 cm (adaptação sugerida). Todos esses pedaços, que serão as peças do jogo, devem ser marcados através da utilização de pincéis esferográficos de acordo com a Figura 2. Para facilitar a jogabilidade, sugere-se a utilização de mais de uma cor na marcação das peças.

ii) **Segundo Momento**: Os alunos devem ser direcionados a se dividirem em grupos de 1, 2, 3, 4, 6 ou 8 alunos. Sugere-se a preferência a equipes formadas com 8 integrantes para que assim não haja tantos grupos na sala, o que irá facilitar a supervisão por parte do professor, principalmente no que se refere à aplicação das **Regras de 1 a 6**.

iii) **Terceiro Momento**: Será o momento da aplicação do Dominó Algébrico Adaptado. Após a formação dos grupos, o professor será o responsável por mostrar aos alunos as peças e as possíveis jogadas, através do auxílio direto a alunos escolhidos sem predileção, e deverá abrir espaços para participações e eventuais questionamentos que podem acontecer tanto entre os integrantes da equipe quanto entre os alunos.

iv) **Quarto Momento**: após os alunos se habituarem às regras e jogadas, o professor passará a agir de uma forma não tão ativa. Seu papel agora é apenas checar se os participantes possuem capacidade de realizar movimentos e seguir as regras do jogo, auxiliando aqueles que ainda apresentem algum tipo de dificuldade. Sugere-se que o professor questione as possíveis jogadas no momento do auxílio direto. Após todos os grupos concluírem uma partida com esse auxílio direto por parte do professor, uma nova partida deve ser iniciada, e, desta vez, o professor só intervirá em momentos de dúvida generalizada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse momento serão feitas análise, justificativa da eficiência e importância do Uso de Jogos no ensino, da proposta construída com base na metodologia de Souza [22] (Dominó Algébrico Adaptado baseado em Freitas-Teodoro [8]) bem como sua aplicabilidade a partir do Sétimo Ano do Ensino Fundamental e do Dominó Algébrico Adaptado no ensino de Matemática, estes baseados nos pontos de vista de Grando [10], Kishimoto [13], [14], [15], [16], [17] e Muniz [18].

Huizinga [11] cita a dificuldade de se definir um conceito fortemente ligado ao jogo. Para o autor, apesar do jogo anteceder a cultura, atualmente existe uma impossibilidade de se definir esta ideia sem que seja ligada a costumes de determinado grupo. Para Huizinga ([11], p. 9) “(...) são as relações entre o jogo e a cultura, não é indispensável fazer referência a todas as formas possíveis de jogo, sendo possível limitarmo-nos a suas manifestações sociais”.

Segundo Huizinga [11] o jogo é naturalmente atrativo para boa parte das pessoas inseridas numa ideia de sociedade e, assim, sendo utilizado nos mais diversos contextos pode ser uma ferramenta com fatores positivos, inclusive no processo educacional. Métodos eficientes para o desenvolvimento de capacidades para alunos é algo importante no contexto atual.

Sobre esta ideia Ortiz [19] cita que:

> O que se entende como jogo ou brincadeira abarca uma infinidade de ações e atividades. Tudo o que vivemos pode tomar parte na brincadeira. O mundo mágico do jogo torna possível todo tipo de conexões ou interações para atingir diversas realizações. Os atos do jogo são produto da ilusão, da vontade, da alegria, do otimismo. No jogo, podemos conseguir tudo o que desejamos. O benefício dessa prática preenche o desejo de realização e nos proporciona prazer ou satisfação. (Ortiz [19], p. 18)

Complementando estes fatores, Ortiz [19] cita sobre a importância do jogo na construção do contexto social infantil, sendo considerado fundamental para a construção de variadas habilidades motoras e mentais. Com relação a essa ideia, Ortiz ([19], p. 15) cita que “O jogo em sua formação não necessita de aprendizagem, surge espontaneamente, é algo instintivo que responde às necessidades da dinâmica infantil”.

A partir desta ideia, este trabalho desenvolveu a proposta criada por Freitas-Teodoro [8] sendo uma construção que visava trabalhar a tendência Uso de Jogos.

Com relação ao Uso de Jogos, Grando [10] acredita na vital importância para construção do conhecimento que o aluno tenha a vivência prática do conteúdo através da estimulação lúdica de trabalhos orientados, que podem ser de cunho individual ou coletivo. A autora cita:

> "Ressalta-se a importância de valorização, pela escola, das várias competências apresentadas pelos alunos. Assim sendo, evidencia-se a necessidade de se criarem situações competitivas de ensino, que possam ser desencadeadas ludicamente, a fim de que o aluno perceba suas capacidades, seus limites, suas competências, incidindo positivamente no que tange à afetividade com relação à aprendizagem Matemática. (Grando [10], p. 15)

Partindo dessa ideia, o Dominó Algébrico é determinado como proposta que se enquadra como uma possível solução de problemas para alunos em dificuldades de aprendizado, convalidando os objetivos desse trabalho.

Ainda segundo Grando [10], são necessários alguns fatores para que o conhecimento matemático, que está dissolvido no jogo, apareça de fato. O conceito só existirá a partir do indivíduo, dotado da liberdade de pensamento e se, dentro das regras, for capaz de pensar, interpretar e determinar ações corretas dentro do ambiente de jogo, sendo o jogo individual ou coletivo.

Nesse sentido, o Dominó Algébrico tem regras coesas, bem definidas e que são norteadoras da criatividade e competição entre jogadores, pode ser aplicado a nível de competição individual ou coletiva, levando a possibilidades e caminhos distintos.

Muniz [18], que complementa essa ideia, cita que o jogo deve ter regras, porém, se forem muito complexas elas só poderiam ser aplicadas a públicos-alvo restritos e retiram boa parte da possibilidade de aprendizado. Segundo Muniz ([18], p.20) "O objetivo do Jogo é a proposição de uma resolução de um problema matemático e sua consequente validação entre os jogadores".

O Dominó Algébrico tem, em sua essência, todos os itens que, segundo Muniz ([18], p. 22), convalidam a ideia acerca de um jogo com possibilidade de sucesso em sua aplicação em sala de aula, pois não se trata de um jogo puramente de azar, tendo o fator desafio incluso, com regras bem definidas e possibilidades de aplicação coletiva e individual.

Nessa configuração passa a existir um outro problema que é a importância do jogo e a sua inserção num contexto sócio cultural, onde o entendimento e a aplicação do jogo faz-se necessária e suficiente.

> Essa forma lúdica é configurada pela sequência de decisões do brincante quando se trata de um ser social com capacidade de decisão, com protagonismo, que também é embebida pela cultura na qual vive o brincante, acompanhada por regras, que provém do exterior, mas que podem ser negociadas ou construídas conforme o jogo avança e que orientam as ações lúdicas. (Kishimoto [16], p.86)

Com base no pensamento de Kishimoto [16], o jogo Dominó Algébrico, dotado de protagonismo para a aplicação, entrega ao aluno a possibilidade de interpretar regras, variações, incluindo interpretações pessoais e coletivas para definição de jogadas.

Portanto trata-se de um jogo com três princípios básicos: interpretações, cálculos matemáticos e observações. R. Grando, T. Kishimoto e C. Muniz convalidam e recomendam esses conceitos na aplicação de jogos, de forma que se esses critérios forem utilizados a chance de uma boa aplicação será elevada.

O jogo Dominó Algébrico tem como público alvo alunos que cursam a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental, podendo ser aplicado em séries mais avançadas na aplicação de conteúdos com a forma complexa e utiliza conhecimentos relativos a divisibilidade e restos.

Para os alunos que cursam o Ensino Fundamental, o jogo é classificado segundo Cabral ([2], p. 30) como estratégico, pois existe a possibilidade de ensino direto na utilização do Dominó Algébrico. Ainda com base neste autor, para alunos em fases mais avançadas do ensino, ele toma forma de jogos de treinamento, sendo utilizado como reforço dos conteúdos.

A aplicação em todos os seus passos, desde a confecção até o momento em que os alunos tenham a capacidade de jogar e seguir as regras sem o auxílio do professor tem duração de 4 horas e pode ser aplicado para alunos a partir do Sétimo Ano do Ensino Fundamental. Tem participação atuante de professor em conjunto com os alunos num momento inicial, até que o nível de dependência e a capacidade de seguir regras se torne algo natural.

A motivação para futuras aplicações do jogo Dominó Algébrico por parte de professores se dará principalmente pela facilidade de aplicação, pela possibilidade de ensino de divisibilidade, restos e o Algoritmo de Euclides de maneira simplificada e pelos baixos custos envolvidos na aplicação do Dominó Algébrico.

Este trabalho conclui, portanto, que o Uso de Jogos através do jogo Dominó Algébrico Adaptado tem convalidação e recomendação no ensino de conceitos matemáticos, em específico o Algoritmo de Euclides, para alunos e assim, ser aplicado de forma lúdica.

7 REFERÊNCIAS

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed. Contexto, 2004.

[2] CABRAL, Marcos Aurélio. **A Utilização de Jogos no Ensino da Matemática.** Florianopolis, 2006.

[3] COSTA, Jaqueline de Morais; PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel. **As Tendências da Educação Matemática Aplicadas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** V sinect. 2016

[4] DANTAS, Natanael Oliveira. **Estruturas Algébricas 1**. São Cristovão. 2009

[5] D'AMBROSIO, Ubiratan**.** Belo Horizonte, Ed. Autêntica, 2001.

[6] D'AMBROSIO, Ubiratan. **A História da Matemática: Questões Historiográficas e Políticas e reflexos na Educação Matemática**. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções &Perspectivas, org. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Editora UNESP, São Paulo, 1999; p.97-115.

[7] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Dicionário Eletrônico Aurélio**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2018. https://dicionariodoaurelio.com/jogo acesso em 25/03/2018

[8] FREITAS, Luiz Fernando de Souza; TEODORO, João Vitor. **Dominó Algébrico: o algoritmo da divisão de uma forma lúdica.**

[9] GALVÃO, Daiane Leszarinski, et al. **Tendências em Educação Matemática: Uma análise das concepções e experiências dos professores.** Ponta Grossa. 2016

[10] GRANDO, Regina Célia. **O Conhecimento Matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000. 239 f. Tese de Doutorado. Campinas. 2000.

[11] HUIZINGA, J. *Homo Ludens.* Ed. Perspectiva. 2000.

[12] JUNIOR, Lourival Carlos Cunha; LIMA, Igor dos Santos. **Matemática Lúdica na Educação de Jovens e Adultos do Centro de Progressão Penitenciária do Distrito Federal.** Revista Ciência e Natura. Santa Maria. Volume 38, Ed. 3, p. 1448-1461. 2016.

[13] KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Brinquedos e brincadeiras na educação infantil.** 2010. http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro.2010.pdf/7155.2.3. brinquedos.brincadeiras.tizuko.morchida/fileSão Paulo. Acesso em 24/01/2018.

[14] KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Brincar é diferente de aprender**. 2009. http://portaldoprofessor.mec.gov.br/conteudoJornal.html?idConteudo=453 acesso em 24/01/2018.

[15] KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Perspectiva: O jogo e a Educação Infantil. 1994.** Florianópolis. https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/download/10745/10260 . Acesso em 24/01/2018. n. 22, página 105-128.

[16] KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Jogos, brinquedos e brincadeiras do Brasil**. *Espacios em blanco*.Nº 24, p. 81-106. 2014.

[17] KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **O Brinquedo na Educação.** Considerações Históricas.

[18] MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e Jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da Educação Matemática**. Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2ª edição. 2010.

[19] ORTIZ, J. P. *Aproximações teórica à realidade do jogo.*In: MURCIA, J. A. M. (org.). 2005. Aprendizagem através do jogo. Tradução de Valério Campos. Porto Alegre, RS. Artmed. p. (09 – 28).

[20] PINTO, Neuza Bertoni. **Marcas Históricas da Matemática Moderna no Brasil.** Revista Diálogo Educacional, Curitiba, V. 5, n.16, p. 25-38, set./dez. 2005.

[21] POLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[22] SOUZA, Rodrigo Luiz de. **Permutações: grupos e simetrias.** Revista Ciência e Natura. Santa Maria. Volume 37, Ed. Especial PROFMAT, Páginas 289-307.2015.

ANEXO A – O TRABALHO DE FREITAS-TEODORO [8]

Dominó Algébrico: o algoritmo da divisão de uma forma lúdica

Algebraic Domino: the division algorithm in a playful way

João Vitor Teodoro[1]
Luiz Fernando de Souza Freitas[2]

Resumo

Diante da consciência de que o ensino de matemática não deve ser apoiado exclusivamente em um conjunto de normas e princípios desenvolvidos apenas pelo raciocínio docente, foram incorporadas às propostas de ensino formas lúdicas de caráter construtivista da aprendizagem. O aluno passa a ser construtor do conhecimento e o professor o auxiliar na construção e organização desse conhecimento. Uma das ferramentas que contribuem nessa metodologia educacional é o jogo, que aborda decisões a serem tomadas e exige a resolução de problemas. O problema funciona como desencadeador do raciocínio, tornando quem o resolve o organizador de suas ideias.
Uma variação do jogo de dominó é apresentada como forma de auxiliar no ensino de conceitos relacionados ao Algoritmo da Divisão e Relações de Equivalência, além da própria problematização e conhecimentos exigidos e praticados ao jogar, mais problemas são apresentados possibilitando a compreensão e fixação do conteúdo e a otimização estratégica do jogador.

Palavras-chave: Jogo. Dominó. Resolução de Problemas. Álgebra. Divisão.

Abstract

Before the concept that mathematical teaching should not be supported only on a set of rules and principles developed by teachers thoughts, playful character constructivist forms of learning were incorporated into the teaching proposals. The student becomes a builder of his own knowledge and the teacher helps in this construction and organization. One of the tools that help in this educational methodology is the game which covers decisions to be made and requires the problems resolution. The problem works as a trigger of the reasoning, making who solves it the organizer of his ideas. A domino game variation is presented as an aid to teach concepts related to Division Algorithm and Equivalence Relations, besides the problematic and required and practice knowledge to play more problems are presented enabling the understanding and establishment of strategic content and optimization of the player.

Keywords: Game. Domino. Problems Resolution. Algebra. Division.

[1] Professor Assistente – Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD – Brasil. E-mail: joaoteodoro@ufgd.edu.br.
[2] Doutorando – Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – Brasil. E-mail: luizfsf28@gmail.com

Introdução

O ensino de matemática passou, nos últimos tempos, por várias mudanças e reformas que foram exigidas por necessidades e falhas, pois, como afirma Miranda (2009), a matemática, disciplina que vem sendo ministrada em sala de aula desde o término da Revolução Industrial, no final do século XVIII, pela necessidade de pessoas capacitadas a tratar de assuntos administrativos e bancários que se faziam escassos na época, teve seu método de aplicação inicial baseado no raciocínio dedutivo de Euclides, que utilizava uma linguagem totalmente incompatível com a idade e conhecimento prévio dos alunos e não mostrava aplicação na realidade. Tudo isso gerou grande número de reprovação e aversão à disciplina.

Após a década de 30, os norte-americanos, numa tentativa de melhorar esse modelo de ensino, formularam um novo currículo denominado Matemática Moderna, esse foi, novamente, marcado pela falta de didática. Somente na década de 70, que estudiosos, relacionando a matemática com a psicopedagogia, melhoraram as técnicas de ensino.

Devemos ter a consciência de que matemática não é apenas um conjunto de normas e princípios e, por esse motivo, seu ensino não deve ser de forma impositiva e construído apenas pelo raciocínio docente, pois, como afirmam Groenwald e Timm (2000), ensinar matemática é fazer com que o aprendiz construa o conhecimento utilizando seu raciocínio lógico e através da criatividade, organização e autoconfiança resolva problemas que envolvam seu conhecimento prévio e que resultem em novos conceitos. Assim, a aprendizagem torna-se um processo motivador que torna todos ativos.

A participação do professor passa a ser a de auxiliar na construção e organização do conhecimento e de sistematizar os conceitos, ou seja, relacionar tudo aquilo que foi entendido com a teoria matemática. Dessa forma, o processo de ensino torna-se prazeroso ao aluno e ao professor.

Essas novas formas de ensinar, não apenas matemática, mas qualquer assunto, foram abordadas utilizando ferramentas que associam a teoria à prática, ou seja, levando o aluno a relacionar o que lhe é ensinado ao seu cotidiano. Ferramentas lúdicas estão sendo cada vez mais aplicadas no ensino e os jogos tomam grande espaço nessa esfera.

Há muitos anos que os jogos vêm sendo usados como forma de diversão, entretenimento e educação por muitos povos. Como lembra Aguiar (1998), Platão ensinava matemática às crianças e defendia a ideia de que os anos iniciais na escola devem ter como atividades o uso de jogos educativos. No entanto, só recentemente é

> [...] que vamos ter entre nós as contribuições teóricas mais relevantes para o aparecimento de propostas de ensino que incorporam o uso de materiais pedagógicos onde os sujeitos possam tomar parte ativa na aprendizagem. São as contribuições de Piaget, Bruner, Wallon e Vygotsky que, definitivamente, marcam as novas propostas de ensino em bases mais científicas. (MOURA, 1994, p.18).

Os PCNs (1997) afirmam que o jogo tem papel fundamental no processo de ensinoaprendizagem, classificando-o como recurso didático, lembrando que ele deve levar à situações que impliquem na reflexão e, somente após esse processo, a formalização matemática deve ser exposta.

Às vezes, quando se joga, a competição é inevitável e, segundo Macedo et al. (1997), esse fator não é bom nem ruim, ela cria uma situação em que mais de uma pessoa busca a mesma coisa simultaneamente e para que alguns consigam, outros terão que deixar de conseguir. Esse fato ocorre, também, na vida e o mais importante é a forma como se deve reagir diante dela.

É fato que jogo e competição se relacionam, e que o jogo sem que haja vontade de ganhar e a possibilidade de perder não tem graça, portanto, não seria coerente jogar com ausência da competitividade. A competitividade deve ser tratada de maneira que não ocorra divergência nas relações entre os competidores, mas sim como fator enriquecedor da amizade, portanto, devem ser preconizadas a harmonia e a colaboração.

Para que se vença um jogo é necessário que haja, entre outros fatores, a estratégia, fator indispensável quando se deseja maximizar as chances de vitória, pois não se deve apenas se basear na tentativa e erro. Muitas vezes, a estratégia tem relações e explicações matemáticas; dessa forma, para que se jogue de maneira inteligente e eficiente, esses conceitos devem ser de domínio do competidor, que ao resolver os problemas explícitos no jogo estará resolvendo problemas de matemática ou com auxílio desta.

Além dos problemas que o jogo oferece naturalmente, o professor pode aplicar outros, envolvendo esse jogo com o intuito de introduzir ou explorar os conceitos abordados e fazer com que através da análise das jogadas, o aprendiz construa ou aplique o conhecimento matemático.

Moura (1991) classifica o jogo, instrumento de ensino, em dois blocos - o jogo desencadeador de aprendizagem e o jogo de aplicação -, afirmando que quem diferencia esses tipos de jogo não é o brinquedo nem o jogo em si, mas a forma com que o professor os aplica.

O trabalho conjunto entre jogo e problema é citado por Moura (1991), que encontra semelhanças entre ambos. Inicialmente, para o sujeito que executa a ação só há jogo se houver a vontade de jogar e só há o problema se o mesmo for do indivíduo e, nele, existir a necessidade de resolvê-lo. Além de que não estão somente no indivíduo, mas são fornecidos por ações externas que causam conflito cognitivo que, no jogo, é competir e, no problema, é resolvê-lo.

Andrade (1998) afirma que as implicações curriculares mais relevantes sobre a resolução de problemas vieram a partir de 1970, apesar dos trabalhos desde 1944 de George Polya, mas foi só a partir do final da década de 60 que a metodologia de investigação utilizando sessões de resolução de problemas em grupos e com alunos ganhou forças, tornando-se comum. De 1962 a 1972, ocorreu a transição entre a metodologia de investigação quantitativa para a qualitativa, pois antes se preocupava somente com a obtenção da solução do problema e, posteriormente, passou-se a levar em consideração o processo realizado na resolução do problema, mostrando diferentes maneiras de resolução. Portanto, o problema funciona como desencadeador do raciocínio, tornando quem o resolve o organizador de suas ideias trazendo sensação de prazer após a sua resolução.

Nesse enfoque, buscou-se desenvolver e trabalhar com uma variação do jogo de dominó, abordando um tema específico de matemática em duas visões: a do nível de ensino básico e a do nível que exige conhecimento matemático mais avançado, porém, é possível perceber ao final que ambos são equivalentes, apesar do nível de entendimento.

O jogo de dominó vem sendo muito utilizado como forma de auxílio na construção e compreensão do conhecimento nas mais variadas formas. Como exemplo, Santos e Alves (2000) descrevem a importância do jogo na construção do desenvolvimento infantil, observando o desempenho de pré-escolares jogando dominó. E QUESADA e QUIROZ (2005) apresentam uma linguagem lógica que permite expressar o conhecimento dos jogadores e como as ações modificam esse conhecimento no jogo de dominó.

O Dominó Algébrico

Provavelmente, muitos devem ter jogado ou ouvido falar do jogo de dominó, cujo nome é possivelmente derivado da expressão latina "*domino gratias*", que significa "*graças a Deus*". Pouco se sabe sobre a origem do jogo, porém, há indícios de que o surgimento tenha ocorrido na China.

O jogo é formado por peças retangulares e nas duas pontas há marcações numéricas que variam entre 1 e 6 ou deixadas em branco, combinando essas marcações duas a duas com repetições obtemos um total de 28 peças (pedras) no dominó tradicional conhecido como "*sino-europeu*".

Entre as mais variadas formas de se jogar dominó, no Brasil, a forma mais comum dessa prática é com quatro jogadores individuais recebendo quatro pedras cada, quatro jogadores em duplas recebendo quatro pedras cada ou dois jogadores jogam entre si recebendo sete pedras cada e deixando o restante para comprar, ou seja, para serem pegas caso o jogador não tenha a peça da vez. Outras formas de jogo são encontradas pelo Brasil.

O *Dominó Algébrico* é composto por peças similares às do dominó convencional, porém, os pontos marcados variam de zero (lado branco) a onze e, dado que cada pedra possui duas dessas numerações e não há peças repetidas, temos um número de peças calculado pelo total de combinações com repetição, já que há peças com os dois números iguais de doze elementos tomados dois a dois, ou seja, setenta e oito, além de seis peças especiais, que serão comentadas a seguir, totalizando oitenta e quatro peças (Figura 2).

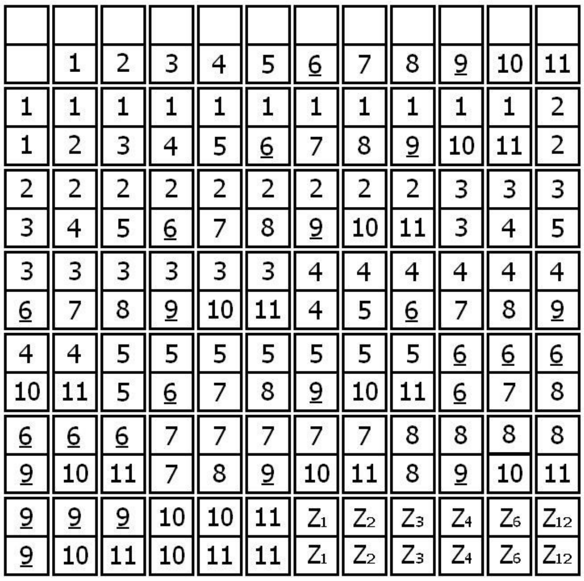

Figura 1 – Peças do *Dominó Algébrico*

Podem jogar duas, três, quatro, seis ou oito pessoas, individualmente ou em duplas quando possível, sorteando e dividindo as peças entre elas, sem que possa restar alguma. Devem-se jogar várias partidas somando pontos e o jogador ou a dupla que acumular primeiramente seis vitórias, vence o jogo.

O objetivo do jogador é eliminar suas peças antes de qualquer oponente ou trancar o jogo, ou seja, criar uma situação onde ninguém tenha peças a serem jogadas, obtendo soma dos valores das peças não especiais do dominó em mãos inferior às dos oponentes.

Inicia o jogo quem obtiver a peça especial com inscrição Z_{12} que será colocada em jogo, após isso, o próximo a jogar será o da direita do jogador que iniciou e, assim, sucessivamente. Caso o jogador não tenha peça disponível para a situação de jogo, ele passa sua vez para o próximo jogador.

As peças especiais podem ser inseridas a qualquer momento, qualquer peça pode ser ligada às peças especiais e para que se entenda o procedimento das ligações restantes, o conceito de *Algoritmo da Divisão* pode ser introduzido como segue ou por meio de exemplos.

Sabemos da *Álgebra* que, nos inteiros, a divisão de um número por outro nem sempre é possível, porém, é possível efetuar uma divisão com resto definido por meio do *Algoritmo da Divisão* (DOMINGUES; IEZZI, 2003; GONÇALVES, 1999).

Algoritmo da Divisão (Divisão Euclidiana): Sejam a e b dois números inteiros com $a > 0$. Então, sempre, podem-se encontrar dois números inteiros q e r tais que:

$$b = a \times q + r, \text{ com } 0 \leq r < a.$$

Nessas condições, q e r são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão de b por a.

No jogo, considerando as peças numeradas, cada valor b_1 de uma peça poderá ser ligado a um valor b_2 de outra peça se dada a última peça especial Z_a colocada em jogo, então as divisões euclidianas entre b_1 e b_2, ambos por a, obtiverem restos iguais, ou seja:

$$b_1 = a \times q_1 + r_1 \text{ e } b_2 = a \times q_2 + r_2, \text{ de forma que } r_1 = r_2$$

É importante salientar, antes de apresentar o *Algoritmo da Divisão* aos alunos, que essa teoria é necessária ao entendimento do funcionamento do jogo, ou seja, que é parte fundamental das regras. Além disso, para casos em que a questão de divisibilidade esteja sendo vista pela primeira vez, é aconselhável apresentar o *Algoritmo da Divisão* por meio de exemplos, possibilitando, posteriormente, algumas jogadas pelos alunos e, somente depois, o conceito é apresentado, seguido pelos problemas.

Os exemplos que introduzem o conceito de divisão podem ser de maneiras habitualmente utilizadas como, por exemplo, indagando sobre a distribuição de 10 livros a 3 alunos, tal que recebam mesmo número de livros e cada livro não possa ser dividido. Assim, resolvendo o problema na prática, é possível que os alunos cheguem a um resultado satisfatório, sem ajuda docente nem prévia introdução teórica do *Algoritmo da Divisão*.

Um exemplo de partida do *Dominó Algébrico* é apresentado:

Exemplo: Considerando quatro jogadores jogando individualmente, cada um receberá dezoito peças. Quem tiver a peça Z_{12} inicia a partida, assim, pode-se ligar qualquer peça a Z_{12}, e o jogo será jogado como de maneira tradicional até que se coloque outra peça especial, pois, cada valor quando dividido por 12 terá resto único, ou seja, nenhum outro número de 0 a 11, ao ser dividido por 12, terá resto igual:

Tabela 1 – Os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 como produto de 12 mais resto.

0	$= 12 \times 0 + \mathbf{0}$
1	$= 12 \times 0 + \mathbf{1}$
2	$= 12 \times 0 + \mathbf{2}$
3	$= 12 \times 0 + \mathbf{3}$
4	$= 12 \times 0 + \mathbf{4}$
5	$= 12 \times 0 + \mathbf{5}$
6	$= 12 \times 0 + \mathbf{6}$
7	$= 12 \times 0 + \mathbf{7}$
8	$= 12 \times 0 + \mathbf{8}$

$$9 = 12 \times 0 + \mathbf{9}$$
$$10 = 12 \times 0 + \mathbf{10}$$
$$11 = 12 \times 0 + \mathbf{11}$$

Assim, o próximo jogador, que colocará a *2ª peça,* pode ligar qualquer peça a Z_{12}, pois, ela é especial.

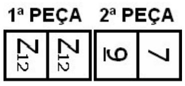

Figura 2 – Segunda peça

O próximo a jogar, colocará a *3ª peça*, que poderá ser qualquer se ligada à Z_{12}. Se preferir, poderá ligar ao lado 7 também uma peça com valor 7 (como foi visto nas divisões acima). Ou uma peça especial em qualquer lado.

Figura 3 – Terceira peça

O jogador que colocará a *4ª peça* poderá ligar à Z_{12} qualquer peça, ligar uma peça que contenha valor 11 à *3ª peça* ou uma peça especial em qualquer lado.

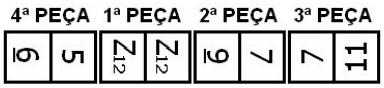

Figura 4 – Quarta peça

O jogador que colocará a *5ª peça* poderá ligar uma outra que contenha valor 6 em um dos lados à *4ª peça*, uma que tenha valor 11 em um dos lados à *3ª peça* ou uma peça especial em qualquer lado.

Figura 5 – Quinta peça

Como uma peça especial foi colocada em jogo, o *a* em questão será 3, ou seja, ambos os valores das peças a serem ligadas devem ter restos iguais quando divididos por 3. Dessa forma, o jogador seguinte pode ligar qualquer peça à Z_3, ligar uma peça com resto 2 na divisão por 3, que pode ser visto na Tabela 2, ao lado 11 da *3ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado.

Tabela 2 – Os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 como produto de 3 mais resto.

$$0 = 3 \times 0 + \mathbf{0}$$
$$1 = 3 \times 0 + \mathbf{1}$$

$$2 = 3 \times 0 + \mathbf{2}$$
$$3 = 3 \times 1 + \mathbf{0}$$
$$4 = 3 \times 1 + \mathbf{1}$$
$$5 = 3 \times 1 + \mathbf{2}$$
$$6 = 3 \times 2 + \mathbf{0}$$
$$7 = 3 \times 2 + \mathbf{1}$$
$$8 = 3 \times 2 + \mathbf{2}$$
$$9 = 3 \times 3 + \mathbf{0}$$
$$10 = 3 \times 3 + \mathbf{1}$$
$$11 = 3 \times 3 + \mathbf{2}$$

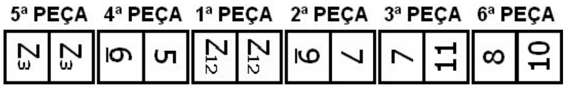

Figura 6 – Sexta peça

O jogador seguinte pode ligar qualquer peça à Z_3, ligar uma peça com lado de resto 1 na divisão por 3 ao lado 10 da *6ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado.

Figura 7 – Sétima peça

O próximo a jogar pode ligar qualquer peça à Z_3, ligar uma peça com lado de resto 2 na divisão por 3 ao lado 5 da *7ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado.

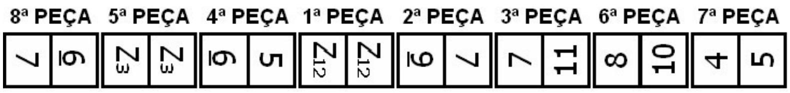

Figura 8 – Oitava peça

A peça a ser colocada agora, pelo próximo jogador, deve ter lado com resto 1 quando dividido por 3 se ligada à *8ª peça*, lado com resto 2 na divisão por 3 ao lado 5 da *7ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado.

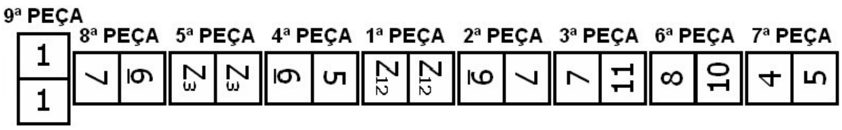

Figura 9 – Nona peça

O jogador seguinte deve ligar à *9ª peça* outra que tenha lado com resto 1 na divisão por 3, ligar à *7ª peça* outra que tenha lado com resto 2 na divisão por 3 ou colocar uma peça especial em qualquer lado.

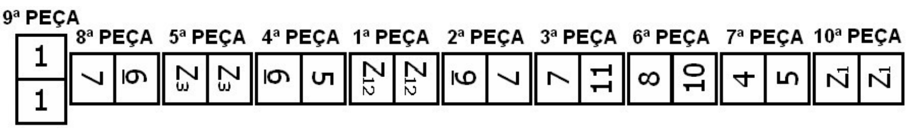

Figura 10 – Décima peça

Nesse momento, como foi inserida no jogo a peça especial Z_1, devem ser ligadas peças que tenham valores, nos lados a serem ligados, com mesmo resto quando divididos por 1, ou seja, como qualquer valor de 0 a 11 tem resto 0 quando dividido por 1, então, quaisquer valores dos lados das peças poderão ser ligados. Portanto, qualquer peça pode ser colocada.

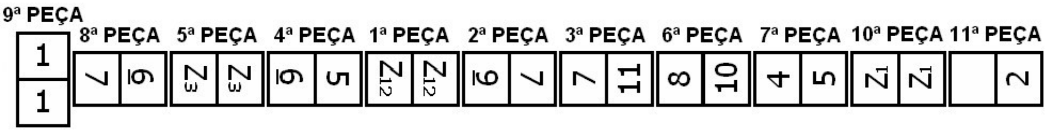

Figura 11 – Décima primeira peça

Qualquer peça pode ser colocada.

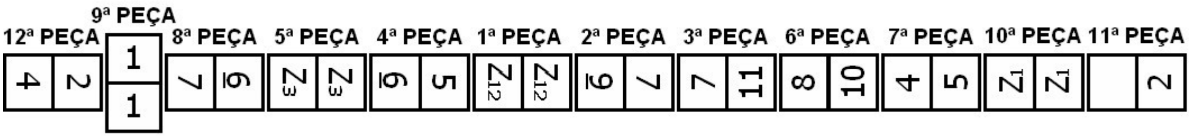

Figura 12 – Décima segunda peça

Novamente, qualquer peça pode ser ligada até que se coloque uma peça especial em jogo, que terminará quando um jogador eliminar suas peças ou todos não tiverem peças a serem colocadas.

Após introduzir o *Algoritmo da Divisão* e expor as regras desse jogo aos alunos, é possível aplicá-lo em sala de aula de forma que o jogo só terá desenvolvimento se os conceitos e regras forem entendidos integralmente, caso contrário, ou seja, se algum jogador colocar peças incompatíveis com as jogadas possíveis, é porque ele não teve entendimento do conteúdo e/ou das regras do jogo. É competência do professor identificar e sanar o problema.

Além da própria problematização oferecida diretamente no ato de jogar, alguns problemas extras podem, também, ser oferecidos como forma de aplicação direta e formal da teoria. Seguem alguns problemas que podem ser abordados:

Problema 1. Quando o jogo é iniciado, ou seja, a peça especial Z_{12} é inserida, quais valores podem ser ligados?

Solução. Nesse caso, deveremos ligar valores que tenham mesmo resto quando divididos por 12. Assim, como descrito na Tabela 1, valores inteiros entre 0 e 11 quando divididos por 12, só quando forem iguais, coincidem os valores do resto.

Problema 2. Quando a peça especial Z_2 é colocada em jogo, quais valores poderão ser ligados?

Solução. Os valores a serem ligados devem ter restos iguais quando divididos por 2. Dessa forma, como todos os números pares têm resto 0 na divisão por 2 e os ímpares, resto 1 na divisão por 2, então, poderão ligar entre si valores pares e poderão ligar entre si valores ímpares. Em particular se ligarão os valores oferecidos no jogo.

Problema 3. Quando a peça especial Z_3 é colocada em jogo, quais valores poderão ser ligados?

Solução. Os valores a serem ligados devem ter restos iguais quando divididos por 3. Dessa forma, como expresso na Tabela 2, poderão ligar entre si 0, 3, 6 e 9, também poderão ligar entre si 1, 4, 7 e 10 e poderão ser ligados entre si também os valores 2, 5, 8 e 11.

Problema 4. Quais peças especiais fazem com que os valores 2 e 4 possam ser ligados?

Solução. As peças especiais que permitem a ligação entre 2 e 4 são:

Z_1, pois, $2 = 1 \times 2 + \mathbf{0}$ e $4 = 1 \times 4 + \mathbf{0}$; Z_2,

pois, $2 = 2 \times 1 + \mathbf{0}$ e $4 = 2 \times 2 + \mathbf{0}$.

Problema 5. Qual peça especial permite que quaisquer valores possam se ligar até que outra peça especial seja colocada?

Solução. Somente a peça especial Z_1. Vejamos.

Vale para Z_1, pois, $b = 1 \times b + \mathbf{0}$ e $b' = 1 \times b' + \mathbf{0}$ para quaisquer b e b'.

Não vale para nenhum outro $Z_a \neq Z_1$, pois, sendo $a > 1$, dada a divisão euclidiana de b por a, então:

$$b = a \times q + r, \text{ com } 0 \leq r < a.$$

Fazendo também a divisão euclidiana de $b + 1$ por a, então:

$$b + 1 = a \times q' + r', \text{ com } 0 \leq r' < a.$$

Assim,

- Se $0 \leq r + 1 < a$, então $r' = r + 1$ e $q' = q$, ficando:

  $$b + 1 = a \times q + (r + 1), \text{ com } 0 \leq (r + 1) < a,$$

  Desse modo, b e $b + 1$ não poderão ser ligados.

- Se $r + 1 = a$, então $r' = 0$, pois:

  $b + 1 = a \times q + r + 1 = a \times q + a = a \times (q + 1) + 0$ Desse modo, $0 = r' \neq r = a - 1$, pois $a - 1 \neq 0$, já que $a > 1$.

  O que nos diz que b e $b + 1$ não poderão ser ligados.

Problema 6. Se, em meio a um jogo, liga-se o valor 5 ao 7 e, posteriormente o valor 7 ao 10, qual Z_a foi inserido por último no jogo?

Solução. Os valores 5 e 7 se ligarão quando for inserido Z_1 ou Z_2. E, os valores 7 e 10 se ligarão quando for inserido Z_1 ou Z_3. Dessa forma, para que ambas as ligações ocorram, a peça especial a ser inserida por último deve ser Z_1.

Problema 7. Por que não se pode ter a peça especial Z_0?

Solução. Pelo algoritmo da divisão $b = a \times q + r$, com $0 \leq r$

$< a$

Se houvesse a peça especial Z_0, então, $a = 0$ e, portanto, b

$$= r, \text{ com } 0 \leq r < 0,$$

o que é um absurdo.

Problema 8 Quais peças especiais fazem com que os valores 7 e 10 possam ser ligados?

Solução. As peças especiais que permitem a ligação entre 7 e 10 são:

Z_1, pois, $7 = 1 \times 7 + \mathbf{0}$ e $10 = 1 \times 7 + \mathbf{0}$; Z_3,

pois, $7 = 3 \times 2 + \mathbf{1}$ e $10 = 3 \times 3 + \mathbf{1}$.

Problema 9. Para o caso em que a peça Z_a esteja valendo no jogo. Quais valores terão resto 0?
Solução. Pelo algoritmo da divisão

$$b = a \times q + r, \text{ com } 0 \leq r < a$$

Se $r = 0$, então,

$$b = a \times q, \text{ com } 0 < a,$$

ou seja, para valores múltiplos de a.

Problema 10. Mostre que os valores b e b' podem ser ligados quando a última peça especial colocada em jogo for Z_a se, e somente se, $b - b' = a \times k$, para algum k inteiro.

Solução.
($\Rightarrow$) Como b e b' podem ser ligados, então:

$$b = a \times q + r \text{ e } b' = a \times q' + r$$

Fazendo $b - b'$ obtemos:

$$b - b' = a \times q + r - (a \times q' + r) = a \times q + r - a \times q' - r = a \times q - a \times q'$$

Colocando a em evidência:

$$b - b' = a \times (q - q')$$

Como q e q' são inteiros, então, $q - q' = k$, onde k é inteiro. Portanto, $b - b' = ak$.

($\Leftarrow$) Se $b - b' = ak$ e, como b e b' podem ser expressos através do algoritmo da divisão na divisão por a:

$$b = a \times q + r, \text{ com } 0 \leq r < a \text{ e}$$

$$b' = a \times q' + r', \text{ com } 0 \leq r' < a$$

Fazendo $b - b'$:

$$b - b' = a \times q + r - (a \times q' + r') = ak \Rightarrow a \times q + r - a \times q' - r' = ak$$

Colocando a em evidência:

$$a \times (q - q') + r - r' = ak$$

Mas, como ak é inteiro para a e k inteiros, então, $(q - q') = k$ e $r - r' = 0$, logo, $r = r'$ e, assim, b e b' podem ser ligados.

A noção estabelecida anteriormente pode ser estendida através de conceitos introduzidos pela *Álgebra Abstrata*. Tais conceitos são, geralmente, oferecidos no nível superior. Dessa forma, o texto que segue tem por objetivo estabelecer a relação entre os conceitos de divisibilidade e classes de equivalência, podendo, assim, ser abordada entre graduandos que estejam estudando o assunto ou queiram praticar a matemática como diversão.

Antes de iniciar a relação entre a teoria e o jogo, apresentemos algumas definições e relações necessárias à associação com a teoria anterior (DOMINGUES; IEZZI, 2003; GONÇALVES, 1999).

Definição 1. Sejam a e b números inteiros quaisquer e m um inteiro estritamente positivo. Diz-se que a é côngruo (congruente) a b módulo m se $m \mid (a - b)$, isto é, se $a - b = m \times q$ para um conveniente inteiro q. Para indicar que a é côngruo a b, módulo m, usa-se a notação: $a \equiv b \ (mod\ m)$ Pode se demonstrar que vale:

Proposição 1. $a \equiv b \ (mod\ m) \Leftrightarrow a$ e b dão o mesmo resto na divisão euclidiana por m.

Portanto, de acordo com as regras do *Dominó Algébrico*, quando a última peça especial colocada for Z_m, então, dois valores a e b se ligarão se, e somente se, tiverem restos iguais quando divididos por m, ou seja, quando $a \equiv b \ (mod\ m)$.

Para facilitar ainda mais o entendimento, consideremos:

Definição 2. Uma relação R sobre um conjunto E não vazio é chamada *relação de equivalência* sobre E se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva. Ou seja, R deve cumprir, respectivamente, as seguintes propriedades:

(i) se $x \in E$, então, xRx;

(ii) se $x, y \in E$ e xRy, então, yRx;

(iii) se $x, y, z \in E$ e xRy e yRz, então, xRz.

Pode se demonstrar que vale:

Proposição 2. A relação de congruência módulo m sobre os inteiros é uma relação de equivalência.

Portanto, como cada ligação entre peças não especiais, no *Dominó Algébrico*, é feita se os numerais a serem ligados são côngruos módulo m, em que m é o valor estabelecido pela última peça especial colocada em jogo Z_m, então, as ligações entre as peças satisfazem às propriedades de relação de equivalência. Em outras palavras, por (i) qualquer peça do dominó com valor na extremidade valendo a, pode ser conectada à outra com extremidade com valor a, por (ii) segue que se o valor a pode ser ligado a um valor b, então, o valor b pode ser conectado ao valor a e, por (iii) se um valor a pode ser conectado a um valor b e o valor b pode ser conectado a um valor c, então, o valor a pode ser conectado ao valor c.

Definição 3. Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto E. Dado $a \in E$, chama-se classe de equivalência determinada por a, módulo R, o subconjunto $\bar{a}$ de E constituído pelos elementos x tais que xRa. Em símbolos:

$$\bar{a} = \{x \in E \,;\, xRa\}$$

Em geral $Z_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$, para m inteiro positivo.

O conjunto $Z_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$, onde, para cada $\bar{a} \in Z_{12}$, $\bar{a}$ representa uma classe de equivalência da relação congruência módulo 12. Em outras palavras, Z_{12} particiona o conjunto dos inteiros em classes de equivalência, onde, para que a e b inteiros pertençam à mesma classe de equivalência deve ocorrer $a \equiv b$ (*mod* 12), que se lê a côngruo (congruente) a b módulo 12. Dessa forma, no jogo, deverão ser conectados valores que pertençam a uma mesma classe para cada Z_m em questão.

Todos os problemas resolvidos utilizando o *Algoritmo da Divisão* podem ser resolvidos utilizando a notação de *Relação de Equivalência*, e o jogo pode ser jogado utilizando ambas as linguagens apresentadas.

Relato de uma aplicação

O *Dominó Algébrico* foi aplicado em uma oficina a nove alunos matriculados nos primeiro e quarto anos em um curso de licenciatura em matemática. Partes dessa aplicação foram registradas em vídeo e, posteriormente, avaliadas.

Inicialmente, após a distribuição do material teórico aos participantes, ocorreu a leitura e discussão deste, que contém partes do texto aqui descrito. Partes estas como: a introdução, pois ela serve como motivação ao estudo do material, seguindo a respectiva metodologia; as regras do jogo; a associação das regras com divisibilidade, objetivando a sistematização teórica que todos, na ocasião, já dominavam; um exemplo de jogada, que permitiu o pleno entendimento das regras; os *Problemas 1*, *2* e *3* resolvidos e, o *Problema 5* a resolver; a associação do jogo com relação de equivalência, que permitiu aos que já cursaram a disciplina *Álgebra Abstrata* uma outra visualização do jogo e aos que ainda não cursaram a disciplina, uma forma lúdica de conhecer um conteúdo futuramente estudado.

Após a leitura do material o jogo foi aplicado a três grupos.

No grupo 1, tinha dois jogadores, um do primeiro e outro do quarto ano. Ambos jogaram utilizando as regras na forma de classes de equivalência. O aluno de primeiro ano, inicialmente, necessitou da ajuda de um dos ministrantes da oficina até conseguir jogar usando corretamente essa teoria. Esse mesmo aluno venceu o jogo.

No grupo 2, tinha três jogadores, todos do quarto ano. O jogo foi desenvolvido por eles considerando as regras associadas à classe de equivalência, pois, o conteúdo já era conhecido, facilitando o desenvolvimento.

No grupo 3, tinha quatro jogadores, todos do primeiro ano. O jogo foi desenvolvido por eles considerando as regras associadas à divisibilidade, pois ainda não haviam aprendido o conteúdo de classes de equivalência e, apesar da introdução sobre o assunto ter sido feita na oficina, preferiram utilizar a linguagem que já lhes era familiar.

Em geral, o jogo foi bem aceito, todos os participantes jogaram corretamente e, aparentemente, divertiram-se, produzindo entre os jogadores o desenvolvimento de um conteúdo matemático de forma descontraída e lúdica.

Essa aplicação permitiu, além dessa análise, a elaboração de alguns dos problemas que não estavam no material, principalmente o *Problema 7*, que foi motivado por indagações por parte de alunos do primeiro ano, e o *Problema 5* que havia sido deixado em aberto, principalmente sobre a possibilidade da resposta ser Z_0, ocasionando uma suposta divisão por zero.

Considerações Finais

Apresentamos, neste artigo, um material que pode auxiliar no ensino de conceitos sobre *Algoritmo da Divisão*, podendo fazer parte do material didático do conteúdo de divisibilidade no ensino fundamental, reforçar esse conceito nos ensinos médio e superior, além de estendê-lo à *Relações de Equivalência*.

A problemática oferecida pelo jogo exige do aluno o domínio teórico e estratégico envolvendo conceitos matemáticos. Para jogar, é necessário entender e respeitar as regras e, para isso, é preciso dominar o conhecimento matemático que, aprimorado, melhora o desempenho e aumenta as chances de sucesso do jogador.

O jogo começa a ser tratado como coisa séria e os professores enxergam nele uma forma construtivista de ensinar, além de tornar o ato de jogar ou brincar uma forma divertida de aprender, resultando numa aula mais rica e descontraída. “Jogar não é estudar nem trabalhar, porque jogando, o aluno aprende, sobretudo, a conhecer e compreender o mundo social que o rodeia.” (GROENWALD; TIMM, 2000, p. 21).

Referências

AGUIAR, J.S. **Jogos para o ensino de conceitos:** Leitura escrita na pré-escola. Campinas, SP: Papirus, 1998.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

DOMINGUES, H.H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: Impa, 1999.

GROENWALD, C.L.O.; TIMM, Ú.T. Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula. **Educação Matemática Em Revista**. São Paulo, 2000.

MACEDO, L.de; PETTY, A.L.S.; PASSOS, N.C. **4 Cores, Senha e Dominó**: oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.

MIRANDA, D.de. **A história do ensino da matemática na sala de aula**. Disponível em: < http://www.educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/a-historia-ensino-matematica-nasala-aula.htm>. Acesso em: 11 de junho de 2012.

MOURA, M.O.de. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, 1994.

MOURA, M.O.de. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. São Paulo: FDE, 1991. (Série Idéias, 10).

QUESADA, F.R.V.; QUIROZ, F.H. A logical language for dominoes. In:

INTERNATIONAL CONFERENCE ON LOGIC FOR PROGRAMMING ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND REASONING, 12., 2005, Montego Bay, **Proceeding...** Montego Bay, 2005.

SANTOS, J.G.W.; ALVES, J.M. O jogo de dominó como contexto interativo para a construção de conhecimentos por pré-escolares. **Psicologia, Reflexão e Crítica**. Porto Alegre, 2000.