Universidade Federal de Goiás

Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ESTUDO DO CONCEITO DE LIMITES DE FUNÇÕES REAIS NO ENSINO MÉDIO: uma proposta de atividades utilizando o *software* WxMAXIMA

Leopoldo José Alves

Catalão

2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: LEOPOLDO JOSÉ ALVES

Título do trabalho: **ESTUDO DO CONCEITO DE LIMITES DE FUNÇÕES REAIS NO ENSINO MÉDIO: uma proposta de atividades utilizando o software WxMAXIMA**

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Leopoldo José Alves

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 22/06/2018

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Leopoldo José Alves

ESTUDO DO CONCEITO DE LIMITES DE FUNÇÕES REAIS NO ENSINO MÉDIO: uma proposta de atividades utilizando o *software* WxMAXIMA

Dissertação de Mestrado apresentada à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Prof.Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro

Catalão

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

ALVES, LEOPOLDO JOSÉ
ESTUDO DO CONCEITO DE LIMITES DE FUNÇÕES REAIS NO ENSINO MÉDIO: uma proposta de atividades utilizando o software WxMAXIMA. [manuscrito] / LEOPOLDO JOSÉ ALVES. - 2018.
120 f.

Orientador: Prof. MÁRCIO ROBERTO ROCHA RIBEIRO; co orientador MARTA BORGES.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2018.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. LIMITES DE FUNÇÕES REAIS. 2. SOFTWARE WxMAXIMA. 3. GRÁFICOS DE FUNÇÕES REAIS COM VARIÁVEL REAL. I. RIBEIRO, MÁRCIO ROBERTO ROCHA, orient. II. Título.

CDU 51

Defesa N° ___

Ata de Defesa da Dissertação

Em 15 de junho de 2018, às 14 h 20 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro (orientador), Dr. Flávio Raimundo de Souza e Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior para, em sessão pública realizada no Bloco J - Sala 02, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação da Dissertação intitulado "ESTUDO DO CONCEITO DE LIMITES DE FUNÇÕES REAIS NO ENSINO MÉDIO: uma proposta de atividades utilizando o software WxMAXIMA", de autoria de Leopoldo José Alves, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo(a) presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que, em 40 min procedeu a apresentação da Dissertação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado: (X) **Aprovado** ou ( ) **Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16 h 10 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Márcio Roberto Rocha Ribeiro, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente.

Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Flávio Raimundo de Souza

Dr. Flávio Raimundo de Souza
IFG-GOIÂNIA

Porfírio A. dos S. Júnior

Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior
UFG/IMTec-RC

Leopoldo José Alves

Leopoldo José Alves
Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RC/UFG

Leopoldo José Alves

Graduado em Licenciatura Plena em Matemática pelo Centro de Ensino Universitário de Brasília (UNICEUB), e Pós-Graduado em Educação Matemática pela Universidade de Brasília (UnB).

Dedico, primeiramente, a Deus, o Criador de todas as coisas. À minha esposa Adriana Alves, minha eterna companheira, aos meus filhos Miguel e Gabrielle, além de toda a minha família, aos amigos Ezequias e Gabya, Marcelo e Valdirene, Felipe e Nelma de Catalão. E finalmente a todos os companheiros de jornada do PROFMAT.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre guiar meus passos, iluminando meu caminho. Aos meus pais, João Alves Diniz e Felismina O. Alves, por me educarem com princípios cristãos, sempre demonstrando carinho e amor. À minha esposa Adriana Alves que me auxiliou em todos os momentos.

Agradeço o meu orientador, Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro, que me acolheu em um momento crítico do curso, me apoiando com seu conhecimento e técnica, também pela confiança em mim depositada, a dedicação e paciência que demonstrou aceitando o projeto proposto. à professora Dra. Marta Borges, pelo tempo disponibilizado, e apoio constante, inspirando-me a continuar evoluindo como professor. Agradeço aos professores Dr. Donald Mark Santee e Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior, por suas valiosas contribuições e orientações desde o início do curso e também nessa dissertação. E aos demais professores do programa de mestrado que com vossos conhecimentos, contribuíram para o sucesso da turma.

E ainda, agradeço os meus amigos e colegas de turma, pelo companheirismo no processo até a conclusão do curso, pela nossa união, que poucas pessoas têm o privilégio de conhecer, espero que nossas amizades se perpetuem. Em especial, agradeço aos meus amigos Alex, Davi, Henrique e Valter, que compartilharam caronas e transporte solidário.

E a CAPES pelo apoio financeiro.

Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana. (Carl Gustav Jung)

Resumo

ALVES, Leopoldo José. Estudo do Conceito de Limites de Funções Reais no Ensino Médio: uma Proposta de Atividades Utilizando o *Software* WxMAXIMA. Catalão, 2018. 113 p. Dissertação de Mestrado. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás.

A matemática do Ensino Médio não contempla de maneira direta o estudo de cálculo de limites de funções reais em seus programas curriculares, embora tal conteúdo seja parte fundamental em diversos cursos de Graduação, como engenharias e informática. Nesse contexto, o desenvolvimento desta pesquisa busca respostas às indagações: Quais as contribuições que o uso do *software* WxMAXIMA proporciona para a compreensão dos conceitos de limites de funções reais no nível médio? Qual o aproveitamento por parte dos alunos participantes do projeto com o estudo de limites de funções reais? Nesse sentido, o objetivo principal desta dissertação é aplicar e analisar uma proposta de ensino, para alunos do Ensino Médio, consistindo de atividades sobre o cálculo de limites de funções reais no laboratório de informática. Para o alcance desse objetivo foi realizada uma pesquisa bibliográfica, destacando limites de funções reais, conceitos, o histórico e aplicação desse assunto no contexto da Matemática e, também, a definição e aplicação do *software* WxMAXIMA no processo de ensino e aprendizagem. Além do estudo teórico, foi desenvolvido um estudo de caso no Centro de Ensino Médio de Taguatinga Norte, no Distrito Federal, contando com a colaboração de 20 alunos que estudam na referida instituição, onde os encontros foram realizados utilizando os computadores do Laboratório de Informática no mês de abril de 2018. Com os resultados obtidos por meio de dez atividades desenvolvidas no Laboratório de Informática, questionário aplicado aos alunos e diário de campo do pesquisador, foi possível constatar que os alunos apresentavam dificuldades na construção e leitura de gráficos de funções e nos conteúdos de Matemática trabalhados em aulas expositivas. Porém, ao utilizarem o computador como ferramenta para o estudo de funções, esses alunos conseguiram atingir os objetivos das atividades propostas com certa facilidade. Esses resultados permitem concluir que o uso do *software* WxMAXIMA contribuiu para melhor compreensão de conceitos de limites de funções reais, tornando as atividades mais significativas, uma vez que os alunos foram compreendendo melhor o conteúdo ministrado em cada atividade e conquistando uma melhor adaptação ao *software* WxMAXIMA.

Palavras-chave: Limite de Funções. Funções Reais. Gráfico de Funções. *Software WxMAXIMA.*

Abstract

ALVES, Leopoldo José. Study of the Concept of Limits of Real Functions: a proposal of activities using the software WxMAXIMA. Catalan, 2018. 113p. Masters dissertation. Master's Program in Mathematics in National Network, Special Academic Unit of Mathematics and Technology, Federal University of Goiás.

The mathematics of High School does not contemplate in a direct way the study of calculation of limits of real functions in its curricular programs, although such content is fundamental part in several undergraduate courses, like engineering and informatics. In this context, the development of this research seeks answers to the questions: What contributions does the use of the WxMAXIMA software provide for the understanding of the concepts of limits of real functions at the High School? What is the achievement of the students participating in the project with the study of limits of real functions? Therefore, the main objective of this dissertation is to apply and analyze a teaching proposal for High School students, consisting of activities on the calculation of limits of real functions in the computer lab. In order to reach this objective, a bibliographical research was carried out, highlighting the limits of real functions, concepts, the history and application of this subject in the context of mathematics, as well as the definition and application of WxMAXIMA software in the teaching and learning process. In addition to the theoretical study, a case study was developed at the Taguatinga Norte High School, in Distrito Federal, with the collaboration of 20 students, who study at that institution, where the meetings were held using computers of the computer lab in April 2018. With the results obtained through ten activities developed at the Computer Lab, a questionnaire applied to students and the researcher´s field diary, it was possible to verify that the students presented difficulties in the construction and reading of function graphs and in mathematics contents worked in lectures. However, by using the computer as a tool for the study of functions, these students were able to achieve the objectives of the proposed activities quite easily. These results allow us to conclude that the use of the WxMAXIMA software contributed to a better understanding of the concepts of Limits of Real-valued Functions, making the activities more meaningful, since the students were better able to understand the contents of each activity and achieve a better adaptation to WxMAXIMA software.

Key words: Limits of Functions. Real-valued Functions. Function Graphs. *Software WxMAXIMA*.

LISTA DE SIGLAS

a.C – Antes de Cristo

CAS – Computer Algebra System

CEF – Centros de Ensino Fundamental

CEMTN – Centro de Ensino Médio de Taguatinga Norte

CETN – Centro Educacional de Taguatinga Norte

CTN – Colégio de Taguatinga Norte

DRET – Diretoria Regional de Ensino de Taguatinga

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

ETI – Escola em Tempo Integral

GNU – Gnu's Not Unix

KM – Quilômetros

MEC – Ministério da Educação

MIT – Massachusetts Institute of Technology

PAS – Programa de Avaliação Seriada

PCN – Plano Curricular Nacional

PDAF – Programa de Descentralização Administração Financeira

PNDL – Programa Nacional do Livro Didático

PNE – Plano Nacional de Educação

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

SEE-DF – Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal

TDIC –Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

UFG – Universidade Federal de Goiás

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

Sumário

INTRODUÇÃO

A partir do ano 2000 os PCN (BRASIL, 2000) já apontavam que no nível do Ensino Médio a formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação. Mais recentemente, debates e pesquisas se desenvolvem no campo da Educação Matemática e novas estruturas curriculares são propostas, como por exemplo, a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) proposta pelo MEC em 2017 para o Ensino Fundamental e em 2018 para o Ensino Médio.

Ainda referindo-se aos PCN, um novo currículo para o Ensino Médio coloca em pauta dois fatores: as mudanças estruturais que decorrem da chamada "revolução do conhecimento", alterando o modo de organização do trabalho e as relações sociais; e a expansão crescente da rede pública, que deve atender a padrões de qualidade que se coadunem com as exigências desta sociedade (BRASIL,2000, p. 6, volume I).

Dentre as finalidades do ensino da Matemática no nível médio são apresentados nos PCN (BRASIL, 2000, p. 42, volume III) alguns objetivos listados a seguir:

• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

• aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

• analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

• desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

• utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;

• expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

• estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

• reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

• promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Nesse contexto, a utilização de novas Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) emergem no sentido de proporcionar um novo espaço de aprendizagem para as novas gerações (BRASIL, 2000).

Também, percebe-se uma mudança na interação professor-aluno, contribuindo para o que Freire (1972) chama de pedagogia emancipadora, em que o professor-dos-estudantes e os estudantes-do-professor se desfazem e novos termos se constroem: “professor-estudante e estudantes-professores, onde o ponto principal é o diálogo que se estabelece nesse novo contexto, em que ambos são parceiros”. Aliado a esses estudos espera-se do professor a criação de um novo ambiente escolar que envolva questionamento, encorajando o estudante a propor soluções, explorar possibilidades, levantar hipótese e justificar seu raciocínio (LAUDARES, 2004).

Neste sentido, o processo de aprendizagem da Matemática, segundo Oliveira et al. (2016), se estabelece pela investigação que possibilita estabelecer relações entre conceitos matemáticos, procura de propriedades implícitas ou subjacentes nos estudos. Os referidos autores também defendem que investigar é procurar conhecer o que não se sabe, o que se deseja conhecer.

Desta forma, é importante refletir sobre a eficiência de novas estratégias de ensino, a eficácia das ferramentas de TDIC e dos recursos computacionais, do auxílio de *software*s livres, como por exemplo o WxMAXIMA, investigando o real incentivo para a autonomia do educando, bem como as demais dificuldades que os alunos e educadores encontram ao utilizar estes instrumentos em suas atividades escolares, principalmente nas instituições de ensino que integram o setor público.

Paiva (2010) descreve que, quando se trata do aprendizado de limites, nota-se claramente uma lacuna no âmbito do Ensino Médio. Ressaltando que o estudo de limites não é muito abordado pelos professores de Ensino Médio, por considerarem a falta de cobrança do assunto de maneira direta no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e em outros exames vestibulares, torna-se essencial o desenvolvimento desta pesquisa.

Assim sendo, tal pesquisa teve início com o estudo de limites de funções reais, contribuindo para um entendimento conceitual de limite de maneira intuitiva, algébrica e simbólica com representação de gráficos no WxMAXIMA, evitando o ingresso desses alunos no nível superior sem a menor noção do conceito de limite de funções reais. Além disso, a pesquisa apontou a importância do assunto ser estudado no nível escolar em questão.

A realização desse estudo teve como justificativa a consideração de que vivencia-se um momento de muitos debates a respeito do processo de ensino entre os educadores na sociedade atual. Portanto, interações pedagógicas e recursos didáticos estão sendo testados e experimentados, evidenciando mudanças no comportamento e na rotina, tanto dos educadores quanto dos alunos, sendo que ambos estão procurando se adequar às novas tecnologias e processos de ensino e aprendizagem em busca de informação.

Visto que o ensino de Matemática faz parte do desenvolvimento humano, Carvalho (2009) acredita que o professor deve priorizar a construção do conhecimento pelo fazer e pensar do aluno. Sendo assim, segundo o autor, o papel do professor é de facilitador, orientador, estimulador e incentivador da aprendizagem, ou seja, ao introduzir um assunto matemático em sala de aula, o dever do professor é partir de onde o aluno já sabe para ajudá-lo a construir novos conhecimentos.

Nesse contexto, o desenvolvimento desta pesquisa buscou respostas às indagações: Quais as contribuições que o uso do *software* WxMAXIMA proporciona para a compreensão dos conceitos de limites de funções reais no nível médio? Qual o aproveitamento por parte dos alunos participantes do projeto com o estudo de limites de funções reais?

Nesse sentido, o objetivo geral desta dissertação é aplicar e analisar uma proposta de ensino no Laboratório de Informática, para alunos do Ensino Médio, consistindo de atividades sobre o cálculo de limites de funções reais de uma variável real. Considerando o assunto abordado, tem-se como objetivos específicos: viabilizar a aplicação das atividades da sequência didática usando o *software* WxMAXIMA para o entendimento de limites; investigar se a aplicação do *software* livre WxMAXIMA desperta a curiosidade do aluno sobre as novas tecnologias e o estímulo que estas podem representar no estudo de limite de funções reais; e verificar a eficiência da aplicação de recursos computacionais para o ensino da Matemática.

Para o alcance desses objetivos foi realizada uma pesquisa bibliográfica de modo a trazer contribuições de diversos autores sobre limites de funções reais, ressaltando conceitos, aspectos históricos e aplicação desse assunto no contexto da Matemática e, também, sobre a utilização do *software* WxMAXIMA no processo de ensino e aprendizagem. Além do estudo teórico, foi desenvolvido um estudo de caso em uma escola de Ensino Médio, que se localiza na cidade Taguatinga Norte, no Distrito Federal.

Após a Introdução, foram abordados nos demais capítulos, os seguintes assuntos:

- O Capítulo I descreve o conceito de limites de funções reais, a contextualização histórica do conceito de cálculo, definição de função real, o limite de funções reais, o papel do conceito de limite no contexto do Ensino Médio;
- O Capítulo II descreve o *software* WxMAXIMA e os procedimentos para aplicação desta ferramenta digital no processo de ensino e aprendizagem;
- O Capítulo III ressalta os procedimentos adotados para o desenvolvimento desta pesquisa e descreve bem o local selecionado para a concretização do estudo de caso;
- O Capítulo IV, por sua vez, realça os instrumentos empregados para a coleta de dados, a saber: as dez atividades e o questionário respondidos pelos vinte participantes; descreve ainda a análise das percepções dos alunos através do estudo de caso ;
- E o quinto Capítulo traz as Considerações Finais sobre a pesquisa realizada.

1 CONCEITO DE LIMITES DE FUNÇÕES

1.1 A Importância dos Conceitos Matemáticos

Para compreender o conceito de limites de funções reais é necessário ressaltar a contribuição da Matemática na formação de novos saberes e sua validade no cotidiano da vida das pessoas. De acordo com Bicudo et al. (2003), a Filosofia da Matemática busca respostas aos seguintes questionamentos: "O que existe no contexto dessa disciplina? O que é conhecimento matemático? Qual o seu valor e importância para a vida real? Qual a realidade dos objetos matemáticos? Como são conhecidos os objetos matemáticos e quais os critérios que sustentam a veracidade das teorias matemáticas? Os objetos e as leis matemáticas são inventados ou descobertos?" (BICUDO; GARNICA, 2003, p. 30).

Primeiramente é importante entender o que é conceituar e o que é necessário para concretizá-lo. Conceituar exige ação intelectual e envolve atividades mentais, uma vez que não se trata simplesmente de uma descoberta, fruto de uma atividade conseguida gratuitamente ou por acaso, mas provém da consequência de um árduo trabalho mental de insistência da verdade. Trata-se de um processo lógico que privilegia as descrições dos objetos matemáticos e das relações e estruturas que os unem (BICUDO; GARNICA, 2003).

Segundo Duval (2005), quando se aborda o conhecimento no âmbito da Matemática, busca-se a formação de conceitos, ou seja, dar forma a um conceito, a partir da utilização da linguagem matemática, também entendida e explicada nos estudos da semiótica. Uma vez que o objetivo do ensino da Matemática nas séries iniciais não é formar futuros matemáticos e, sim, proporcionar aos alunos instrumentos que lhes serão eventualmente úteis mais tarde, torna-se necessária uma abordagem cognitiva, que contribui para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. (DUVAL, 2005).

A compreensão dos conceitos matemáticos acontece a partir de experimentações e descrições, as quais são feitas juntamente com conceitos anteriormente adquiridos. As construções de gráficos permitem o fornecimento de imagens visuais, que são utilizadas para verificação das teorias e dos assuntos estudados. Nesse contexto, verifica-se uma articulação entre a coerência da Matemática Elementar e a consequência da Matemática formal, visando a descrição de sua definição (PINTO, 2001).

De acordo com Vaz (2010), a finalidade do pensamento em Cálculo Diferencial e Integral consiste em desenvolver o significado dos conceitos básicos de:

- *Funções: na modelagem cujo modelo é expresso matematicamente através de equações e gráficos, pela relação de variáveis e parâmetros.*
- *Limites: no estudo da vizinhança de um ponto e da tendência de valores cada vez maiores ou menores.*
- *Derivada: como taxa de variação nos fenômenos e interpretação do valor da derivada, para o estudo do comportamento de uma função.*
- *Integral: no cálculo operacional, como na anti-derivada e na interpretação geométrica, como na soma de infinitésimos numa relação do cálculo infinitesimal e do cálculo.*

Segundo Pais (2010), a formação do conceito requer a construção de uma rede de situações, "em que o novo se apresenta revestido de ocorrências já vivenciadas e articuladas longe de um contexto isolado". Da mesma forma como uma única situação, geralmente, envolve uma diversidade de conceitos, é importante ressaltar que a formação de um conceito não ocorre por meio de um único tipo de situação. O desafio para o professor de Matemática consiste em destacar " os invariantes referentes ao conceito principal que conduz à aprendizagem no momento considerado, articulando-os com outros conceitos já aprendidos pelo aluno. De posse dos conceitos já elaborados, o aluno é desafiado a compreender outras situações, onde aparecem os novos conceitos e novos invariantes ". Portanto, conclui-se que a aprendizagem não pode ser efetuada em um contexto isolado, como se o significado pudesse subsistir por si mesmo (PAIS, 2016).

No contexto internacional, a obra de Caraça (2000), intitulada "Conceitos Fundamentais de Matemática", apresenta um estudo na forma qualitativa, com descrição reflexiva, analítica e simples, visando exprimir rigor máximo na forma de expor os conceitos fundamentais de Matemática. O seu conteúdo aborda o que é conceituação, utilizando a linguagem retórica, sem abuso da algebrização, e ressaltando com prioridade o tratamento aritmético e geométrico dos conceitos.

Caraça (2000) inicia o estudo de números com o problema da contagem e da medida, chegando aos limites e à questão da continuidade; na área de cálculo diferencial, passa pelo conceito de função e infinitésimo. Sua abordagem é descritiva, com uso da aritmética e interpretação geométrica, sempre evidenciando o que se denomina significado geométrico. Ao abordar o conceito de limite, parte do comportamento de sucessão de números e de problemas do movimento. Para definição de limites, que é rigorosa, os autores fazem uso da linguagem verbal; a simbologia é necessária apenas para a definição do conceito de limite. Também, é importante destacar que o autor faz um estudo de séries quanto a seu comportamento de convergência e aponta um debate constante com o leitor, chamando-o para a necessidade de verificar que, ao criar um conceito, o rigor vem depois da experimentação (CARAÇA, 2000).

Outra obra de destaque é “O que é Matemática?”, de Richard Courant e Herbert Robbins (2000). Conforme mostra o subtítulo, essa obra traz uma abordagem elementar de métodos e conceitos. No prefácio da primeira edição, Courant et al. (1941) apontam a seguinte advertência:

> O ensino de Matemática tem sido algumas vezes degenerado em exercício repetitivo e vazio de solução de problemas, o que pode desenvolver capacitação formal, mas não conduz a uma real compreensão ou independência intelectual. A pesquisa matemática tem mostrado uma tendência no sentido da superespecialização e da ênfase excessiva na abstração. As aplicações e ligações com outros campos têm sido negligenciadas (COURANT et al., 1941, p.33).

Conforme destaca o autor, o processo didático adotado pelos professores de Matemática necessita de mudanças. A aplicação de exercícios repetitivos favorece a capacitação formal do aluno, mas não desenvolve a sua compreensão ou independência intelectual. Surge a necessidade de interligação desta disciplina com as demais ciências.

A obra de Courant et al. (2002), ao definir o que é Matemática, ressalta que a Matemática é a forma dedutiva, a meta, a intuição e a construção da expressão da mente humana. As formas propulsoras de expressar os conceitos matemáticos, na visão desses autores, refletem a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a análise e a construção, a lógica e a intuição, a generalidade e a individualidade.

Após essa reflexão sobre a importância da construção do conceito é importante destacar a contextualização do Cálculo e sua aplicabilidade social. O conteúdo a seguir aborda a história da construção do Cálculo.

1.2 Contextualização Histórica da Construção do Cálculo

Este item apresenta um breve relato histórico de como iniciou o Cálculo Diferencial e Integral, especificamente o cálculo de limites de funções reais. Também apresenta o conceito de funções reais e alguns exemplos de suas utilizações. Por fim, discorre sobre o conceito intuitivo de limite no contexto do Ensino Médio.

Pode-se afirmar que, com base nos estudos dos movimentos dos corpos, somente no século XVII os gênios Leibniz e Newton deram início aos escritos sobre o que viria a ser chamado por nós de Cálculo Diferencial e Integral. Naquela época era estudado o movimento dos corpos e a Matemática que eles dispunham não conseguia representar com perfeição o que lhes passava pela mente (PAIVA, 2010). Segunda Paiva (2010), talvez a inspiração tenha vindo da Grécia Antiga, e eles passaram a imaginar e representar algebricamente o universo infinitamente pequeno. Esta percepção levou filósofos gregos a concluírem coisas até absurdas, como os paradoxos de Zenão, no século V a.C. na Grécia, conforme mostra a Figura 1.

Entre esses paradoxos é famoso o de Aquiles e a tartaruga. Ao perseguir a tartaruga, o corredor olímpico Aquiles jamais alcançaria o animal. Assim, quando Aquiles percorresse a metade da distância entre ambos, a tartaruga já teria se afastado mais um pouco, percorrida outra metade da distância, agora menor que a inicial, e se afastado outro tanto. E assim, sucessivamente, sempre haveria, por menos que fosse, uma distância entre os dois - a tartaruga na frente e o atleta nunca conseguiria alcançá-la.


O PARADOXO DE ZENÃO
Na Grécia antiga, os pensadores se reuniam em escolas, que disputavam o saber em intensos debates.
Z
O filósofo grego Zenão, que viveu por volta de 450 a.C., lançou um paradoxo segundo o qual, "por mais rápido que fosse, Aquiles jamais alcançaria a tartaruga em uma corrida em que ela estivesse à frente dele". Com esse paradoxo, Zenão queria mostrar a inconsistência do conceito de infinito, associado ao espaço e tempo, conhecido até então.
É ASSIM:
UMA CORRIDA NUMA PISTA DE 100 METROS.
75m
50m
NUM LADO, AQUILES: FORTÃO, BONITÃO, RAPIDÃO.
É NÓIS!
NO OUTRO LADO, A TARTARUGA: PESADONA, IDOSA E MARCHA LENTA.
SOIS VÓS!
COMEÇA A CORRIDA!
VAI INDO!
QUANDO CHEGAR NOS 50 METROS, ME ACORDA!
BABACA!

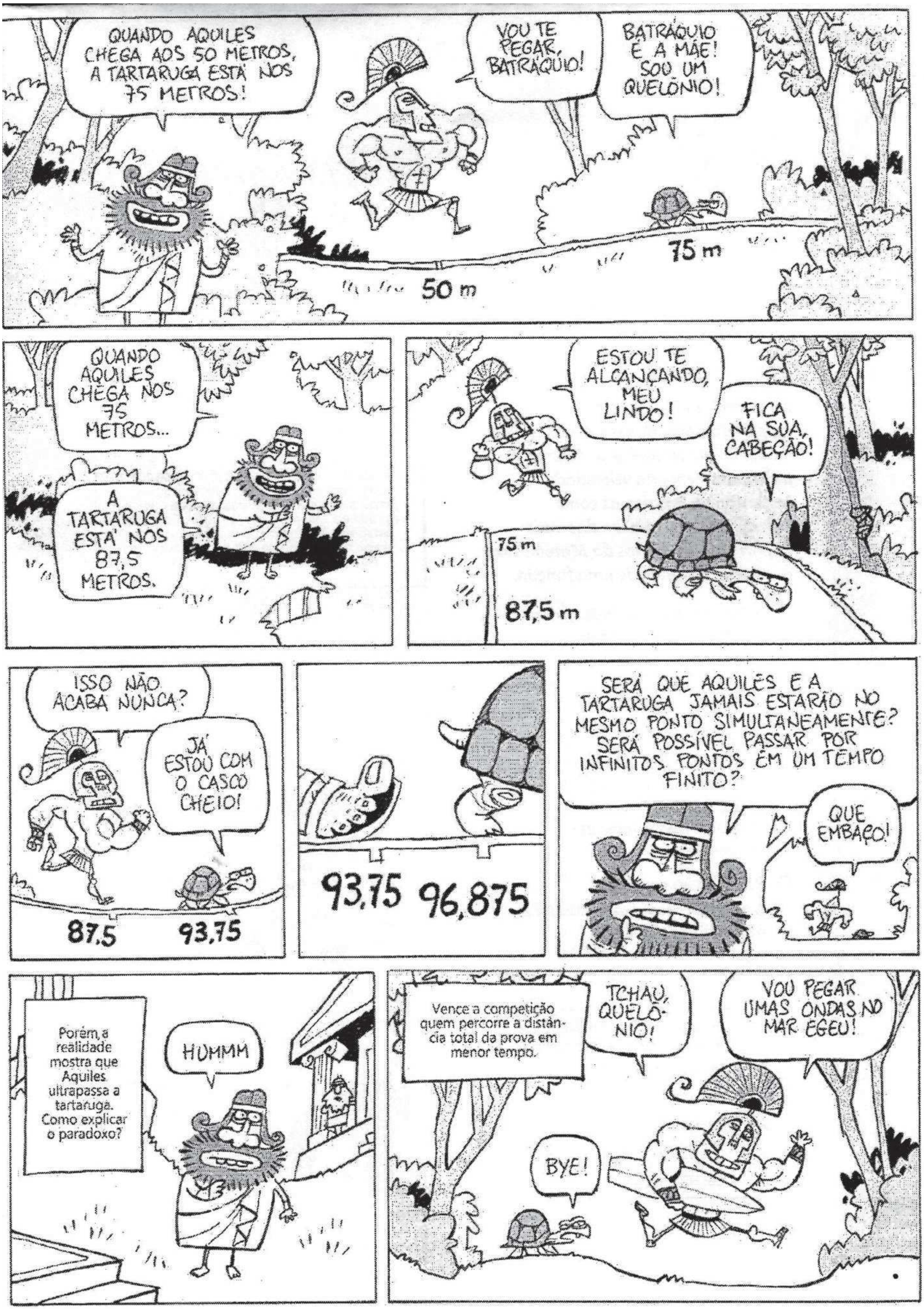


Figura 1: Paradoxo de Zenão.

Fonte: BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. Historia da Matemática.

Pode-se ressaltar que, naturalmente, o Paradoxo de Zenão é um absurdo, pois Aquiles alcançara o vagaroso réptil. Assim, é fundamental encontrar o erro existente neste paradoxo.

De acordo com Rosso Jr.(2011, p. 453), a falha está no conceito de que a divisibilidade é infinita. O paradoxo se sustenta na inexistência do infinitamente pequeno, por supor que haveria uma distância entre os competidores e que esse espaço jamais seria anulado. Nessa visão, tempo é entendido como sucessão de momentos que seriam indivisíveis, e durante a permanência de um momento nada se movia, nem Aquiles nem a tartaruga. O mesmo princípio se aplica ao conceito de espaço.

Convém destacar que a disputa entre a tartaruga e o atleta Aquiles encerra uma mentira. Porém, tal engano é de tamanha dificuldade de contestação que, mesmo sendo muito anterior a Era Cristã (Pensadores da Antiguidade, anteriores a Pitágoras - 500 a.C., já eram atormentados por essa problemática), esse paradoxo continuou sendo discutido e defendido pelos neopitagóricos, pensadores da Idade Média. Paiva (2010) destaca a possibilidade de discutir a dificuldade de entendimento, durante todo esse tempo do raciocínio utilizado por Arquimedes de Siracusa (século lll a.C.), para calcular volumes de sólidos usando a sua divisão em partes infinitamente pequenas.

Ainda segundo Rosso Jr. (2011, p. 45), o início do pensamento de Leibniz e de Newton abordou a representação do infinitamente pequeno, ou seja, o que ocorre com a variação de uma grandeza ou função quando a variável, normalmente representada pela letra x, recebe um aumento muito próximo de zero, que pode ser analisada pela seguinte expressão:

$$\Delta x \to 0.$$

A taxa de variação de uma grandeza y, que é representada $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ por , mostra como tal grandeza varia para pequenos acréscimos da variável x.

Assim, se y representa a posição s de um corpo ao longo de uma trajetória, a variação $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ mostra como a grandeza s varia quando a variável t (tempo) sofre aumentos muito pequenos. Tal taxa de variação da posição, em relação ao tempo é chamada na Cinemática de velocidade instantânea. Com essa idéia, e os cálculos posteriores, o paradoxo de Aquiles e a tartaruga cai por terra.

Esse é o princípio daquilo que hoje se chama de derivada de uma função, que possui aplicações em inúmeros campos científicos. Sempre que se estiver tratando de taxa de crescimento, as derivadas de uma função surgem automaticamente, quer estejam estudando fenômenos físicos, biológicos, químicos, sociais ou econômicos.

A derivada e a integral definida exprimem-se em termos de certos processos de limites. A ideia inicial que separa o cálculo das partes mais elementares da Matemática é representada pela noção de limite. Ávila (1981) destaca que a ligação entre derivadas e integrais é uma das descobertas realizadas por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Por essa razão, e várias outras contribuições para o assunto, Newton e Leibniz são considerados os inventores do cálculo.

No entanto, é importante ressaltar que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária daquela apontada nos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiramente descobre o cálculo integral e só muitos anos depois o cálculo diferencial. A ideia de integração surge através de processos somatórios ligados ao cálculo de determinadas áreas e envolvendo noções de volumes e comprimentos. Bem mais tarde, cria-se a diferenciação, que resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Também foi possível verificar que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo que cada uma delas representa operação inversa da outra (EVES, 1995).

Dentre as ferramentas de mais alto nível desenvolvidas pelos matemáticos encontra-se o cálculo infinitesimal. Refere-se a uma ferramenta do mais alto nível, sem dúvida, a mais poderosa e eficaz para o estudo da natureza, por ser uma ferramenta científica e tecnológica. De acordo com Eves (1995), pode-se considerar que Newton e Leibniz descobriram o cálculo infinitesimal porque:

1. Sintetizaram dois conceitos que hoje são denominados de derivada e integral;

2. Desenvolveram as ferramentas que permitem manejá-lo;

3. Mostraram que são conceitos inversos (Teorema Fundamental do Cálculo);

4. Ensinaram como utilizá-los para resolver de forma unificada um enorme catálogo de problemas que até então eram estudados caso a caso. O cálculo infinitesimal transformou problemas cuja resolução requeria o gênio de um Arquimedes, um Galileu, um Fermat ou um Pascal, em meros exercícios ao alcance de um estudante de Bacharelado.

O que torna o cálculo infinitesimal tão versátil é a grande variedade de processos matemáticos, tecnológicos, físicos, econômicos e de outras áreas científicas, que são modelizados com derivadas e integrais. A derivada refere-se a um conceito fundamental da física, pois permite estudar velocidades e acelerar variáveis instantâneas, e diversas formas.

Um outro exemplo da versatilidade do cálculo pode se verificar em um exame de tomografia ou ressonância magnética. Segundo Rosso Jr.(2011), esses procedimentos consistem em ondas que entram e saem do corpo humano. E, o que cada onda faz quando atravessa o corpo humano é considerado uma integral, cujo valor é a diferença de intensidade entre a onda que entra e a que sai. A função da máquina consiste em adivinhar o interior do corpo humano levando em consideração os valores de todas essas integrais. Esses conceitos são de grande importância e aplicação no mundo moderno. Sendo assim, é correto dizer que sem alguns dos conhecimentos apontados por Newton e Leibniz dificilmente alguma pessoa poderia considerar-se culta.

Eves (1995) ressalta que a obra de Isaac Newton contribui para a evolução do cálculo infinitesimal no século XVII, descobrindo leis físicas aplicáveis ao universo, como a lei da gravidade, razão, razão inversa e fórmulas de modo preciso e racional. Mais tarde, esses conceitos foram trabalhados pelo matemático alemão George Friedrich e exerceram grande influência na geometria das análises.

Leibnitz Gottfried Wilhelm (1646-1716) surge, em 1675, como inventor do Cálculo Diferencial e Integral. Em 1661, Leibnitz se dedicou aos ensinamentos de homens que revolucionaram a ciência e a filosofia como: Galileu, Francis Bacon, Thomas Hobbes, René Descartes (EVES, 1995). O conhecimento adquirido através dos pensamentos científicos apontados por esses cientistas contribuiu para a tese de bacharelado de Leibnitz, que traz por título "O princípio do indivíduo". De acordo com esse princípio, o indivíduo não haveria de ser explanado como matéria somente ou como uma forma, mas preferencialmente como ser (entidade toda).

Já em 1666 Leibnitz escreveu "A arte da combinação" na qual formulou um texto que serviu de teoria inicial para algumas invenções modernas como calculadora e computadores. Desenvolveu também o princípio da razão suficiente, através do qual fundamenta que nada ocorre sem uma razão, envolvendo problemática, espaço e movimento. Esses princípios foram publicados em 1671.

Em 1675 Leibniz formulou o fundamento do Cálculo Diferencial e Integral. Essa descoberta contribuiu para uma nova visão com relação ao tempo e o espaço, os quais pararam de ser considerados como substâncias. Nesse período, inicia-se o desenvolvimento do conceito da extensão e movimento, o que não poderia ser descoberto simplesmente com o estudo da natureza. Sendo assim, a lei básica do movimento não poderia ser encontrada simplesmente com o estudo da natureza (EVES, 1995).

Através de seus estudos críticos a respeito da fórmula Cartesiana das Leis do Movimento, conhecida como mecânica, Leibnitz tornou-se, em 1676, o fundador de uma nova formulação conhecida como Dinâmica, a qual substitui a energia cinética para a conservação dos movimentos. Dando continuidade em seu trabalho científico, Leibnitz propôs um processo educacional mais prático; desenvolveu pesquisas com pressão hidráulica, moinhos de vento, lâmpadas, submarinos, relógios e vários inventos, como bomba de água movida a moinho de vento. Em 1685 publicou New Method for Greatest and Least: Novo método para o máximo e o mínimo, que era uma exposição do seu Cálculo Integral (EVES, 1995).

Nesse contexto, é importante ressaltar que Newton e Leibniz descobriram o cálculo de forma independente. As descobertas de Newton ocorreram entre 1666 e 1669, mesmo já tendo escrito dois livros em 1671. Devido o pavor de ver suas obras sendo criticadas, Newton divulgou seus livros a um grupo de colegas, mas não os publicou. O primeiro desses livros foi publicado em 1704 e o segundo em 1736, ou seja, nove anos depois da sua morte. Leibniz descobriu o cálculo entre 1675 e 1676, período que corresponde a dois anos, dos cinco anos que passou em Paris. Mesmo que sua descoberta tenha ocorrido alguns anos depois de Newton, os descobrimentos de Leibniz foram publicados antes, em 1684 e 1686. As versões do cálculo de Newton e Leibniz foram conceitualmente distintas, e seus conceitos fundamentais ligeiramente diferentes dos que se conhecem atualmente.

Assim, nesse contexto de desenvolvimento científico, nasce o conhecido Cálculo Diferencial e Integral. Conforme descreve Ávila (1981):

> As ideias foram surgindo e se desenvolvendo, gradualmente, nas obras de vários cientistas, como Kleper, Galileu, Simon Stevin (1548-1620), Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Blaise Pascal (1623-1662), Gilles Personne de Roberval (1602-1675), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Isac Barrow (1630-1677), Christian Huygens (1629-1695), John Wallis (1616-1703), além de muitos outros.

> Porém, merecem destaque especial os nomes de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). (ÁVILA, 1981, p. 110).

Segundo Leithold et al. (1998), verifica-se que não foi antes do século XIX que os processos do Cálculo receberam fundamentação sólida por parte de matemáticos, como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin Lowis Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedeking (1836-1916). Mesmo trabalhando de forma independente e em períodos diferenciados, Newton e Leibniz vieram mais tarde e realizaram o trabalho de sistematização das ideias e métodos, aumentando espaços para novas pesquisas através do chamado Teorema Fundamental do Cálculo, que unifica os conceitos de derivada e integral. A realização de ambos foi motivo para a disputa mais marcante da história da ciência há 300 anos.

Após um estudo abordando a contextualização histórica do cálculo, bem como a origem do Cálculo Diferencial e Integral, é importante definir funções reais e os principais conceitos nesta área. O conteúdo a seguir define funções reais e sua aplicação na Matemática.

1.3 Funções Reais

Segundo Swokowski et al. (1989), um dos conceitos mais úteis em Matemática é o conceito de função. É possível definir uma função como uma regra, ou correspondência, que a cada elemento de um conjunto X associa-se a um único elemento de um conjunto Y. Como ilustração, seja X o conjunto de livros de uma biblioteca e Y o conjunto dos inteiros. Ao associar a cada livro o número de páginas que contém, é possível obter uma função de X em Y. No entanto, pode haver elementos de Y que não se associam a nenhum elemento de *X.*

Tal regra se aplica aos inteiros negativos, uma vez que nenhum livro possui um número negativo de páginas.

Outra ilustração é apresentada na seguinte regra: sejam X e Y o conjunto R dos reais. A cada real x é associado seu quadrado x^2. Assim, o numeral 3 associa-se ao numeral 9, a $\frac{-5}{4}$ associa-se $\frac{25}{16}$, a $\sqrt{2}$ associa-se 2, e assim por diante. Através desses exemplos obtém-se uma função de R em R.

Para chegar ao conceito que hoje se aplica na Matemática, foi necessário o desenvolvimento de outros conceitos, tais como o de variável dependente, variável independente, continuidade, domínio, contradomínio, funções analíticas, etc. Vasquez et al. (2008), apresenta um pequeno resumo sobre as definições do conceito de função ao longo dos séculos como pode ser visto na Figura 2.

Época	Definição
Século XVII	Qualquer relação entre variáveis
	Uma quantidade obtida de outras quantidades mediante
	operações algébricas ou qualquer outra operação imaginável.
	Qualquer quantidade que varia de um ponto a outro em
	Uma curva.
	Quantidades formadas usando expressões algébricas e
	Transcendentais de variáveis e constantes.
Século XVIII	Quantidades que dependem de uma variável.
	Função de algumas variáveis, como quantidade, que é
	composta, de alguma forma, de variáveis e constantes.
	Qualquer expressão útil para calcular.
Século XIX	Correspondência entre variáveis.
	Correspondência entre um conjunto A e os números reais.
	Correspondência entre os conjuntos.

Figura 2: Conceito de Função ao Longo dos Séculos.
Fonte: VASQUEZ (2008)

Caraça (2000) define função como: "Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é uma função de x e escreve-se $y= f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$..." A x chama-se variável independente, a y variável dependente. Muitas fórmulas que ocorrem na Matemática e nas ciências determinam funções.

Por exemplo, a fórmula:

$$A = \pi r^2.$$

Associa-se à área A de um círculo de raio r a cada real positivo r um único valor de A, determinando, assim, uma função f, tal que

$$f(r) = \pi r^2.$$

A letra r, que representa um número arbitrário do domínio de f, denomina-se variável independente. A letra A, que é um número do contradomínio de f, representa, a variável dependente, pois seu valor depende do número atribuído a r. Quando duas variáveis r e A acham-se relacionadas desta maneira, é possível descrever que A é função de r.

Outro exemplo: se um automóvel caminha a $50km/h$, a distância d (km) percorrida no tempo $t(h)$ é dada por $d = 50t$; d é de uma função de t.

O enfoque deste trabalho é apresentar f como uma função de números reais. Ou seja, o domínio e o contradomínio são representados por subconjuntos de números reais. Definida uma função por meio de uma expressão, se não se indica explicitamente o domínio X, então considera-se X como a totalidade dos números reais para os quais a expressão têm sentido.

Por exemplo, se

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad .$$

Admite-se então que o domínio seja o subconjunto de reais não-negativos e diferentes de 1. Se x pertence ao domínio, diz-se que f é definida em x, ou que $f(x)$ existe. Se um subconjunto S está contido no domínio, é possível ressaltar que f é definida em S. Se o processo for o contrário, o resultado é a comprovação de que f não é definida em x, o que significa que x não está no domínio de f.

Muniz Neto (2015, p. 14-17) apresenta em seu livro, Fundamentos de Cálculo, as seguintes considerações de funções:

> "Sejam dados conjuntos reais não vazios X e Y. Informalmente, uma função f de X em Y é uma regra que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$. Por vezes podemos visualizar uma função $f : X \to Y$ de uma maneira mais concreta por meio de diagramas como o da Figura 3 a seguir, onde cada seta indica que elemento $y \in Y$ está associado a cada $x \in X$." (MUNIZ NETO, 2015, p. 15)

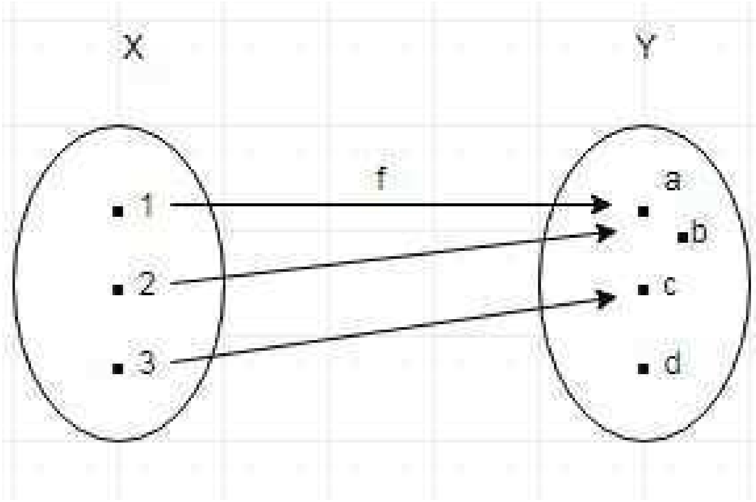


Figura 3: Exemplo de Função f de X em Y.
Fonte: MUNIZ NETO (2015).

Escreve-se $f : X \to Y$ para denotar que f é uma função de X em Y. Nesse caso, o elemento $y \in Y$ associado a $x \in X$ por f é denotado por $y = f(x)$, sendo denominada a imagem de $x \in X$ pela função f.

No exemplo da Figura 3, obtém-se a seguinte expressão:

$$X = \{1,2,3\}, Y = \{a,b,c,d\} \ e\ f(1) = a,\ f(2) = a\ e\ f(3) = c.$$

Assim, a é a Imagem de 1 e de 2 por f, e c é a imagem de 3 por f. Como atestado pelo exemplo acima, a definição de função permite que, no diagrama correspondente, um ou mais elementos de Y não recebam setas ou, ainda, que um ou mais elementos de y recebam mais de uma seta (observe que ambas as possibilidades estão presentes na Figura 3).

Note, contudo, que os diagramas das figuras 4 e 5, a seguir, não correspondem a funções.

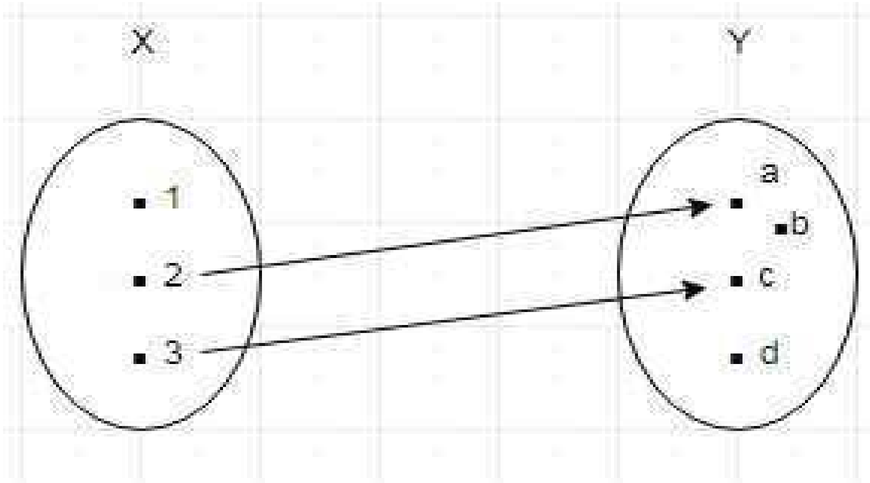


Figura 4: X tem Elementos dos quais não Partem Seta Alguma.

Fonte: Muniz Neto (2015).

A situação da Figura 4 não corresponde à função porque não há nenhuma seta partindo do elemento $1 \in X$.

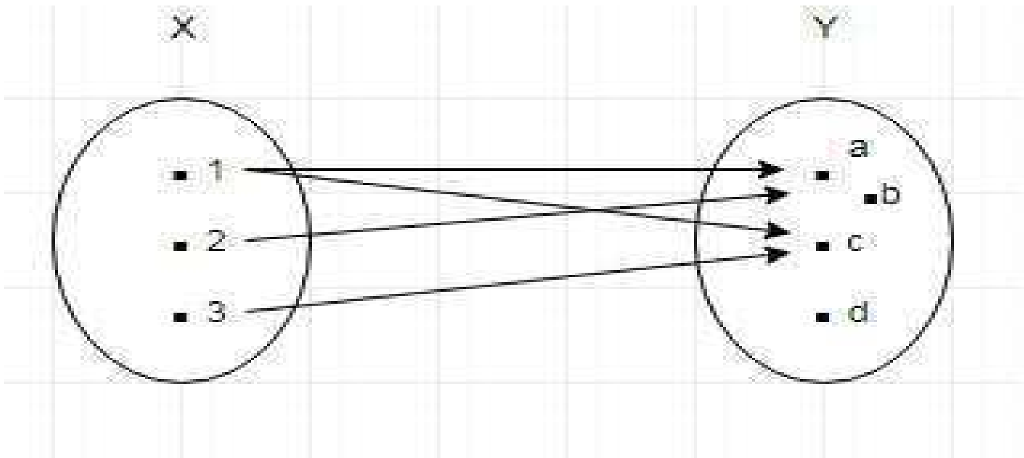


Figura 5: X tem Elementos dos quais Partem mais de uma Seta.

Fonte: Muniz Neto (2015).

A situação da Figura 5 não corresponde à função, pois do elemento $1 \in X$ parte mais de uma seta.

O conteúdo a seguir aborda três definições que explicitam alguns tipos extremamente úteis de funções.

Função Constante.

Dados conjuntos não vazios X e Y e dado um elemento $c \in Y$, a função constante c de X é a função: $f: X \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in X$. No caso extremo da função constante e igual a c, definida acima, todo $x \in X$ está associado a um mesmo $y \in Y$, qual seja, $y = c$. Contudo, as condições impostas na definição de função são plenamente satisfeitas, i.e., todo $x \in X$ está associado a um único $y \in Y$ (MUNIZ NETO, 2015, p. 15).

Função Identidade.

Dado um conjunto não vazio X, a função identidade de X, denotada por $I_{dx}: X \longrightarrow X$, é a função dada por $I_{dx}(x) = x$, para todos $x \in X$. Assim como no exemplo anterior, é imediato que as condições exigidas pela definição de função estão satisfeitas, de sorte que I_{dx} é realmente uma função. Para o que segue, dado arbitrariamente n e N, denotamos por I o conjunto dos n primeiros números I.e., $\{I_n = 1, 2, \cdots, n\}$. Por exemplo. $I_1 = 1$, $I_2 = 1, 2$, $I_3 = 1, 2, 3$ e assim por diante (MUNIZ NETO, 2015, p. 15).

Função e Notação de Sequências e Funções.

Uma sequência (infinita) de números reais é uma função f: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$. Uma sequência (finita) de números reais é uma função f: $I_n \rightarrow \mathbf{R}$, para algum $n \in \mathbf{N}$. Dada uma sequência f: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ (resp. $f: I_n \rightarrow \mathbf{R}$) é costume denotar, para $k \geq 1$ inteiro, $a_k = f(k)$. Desta forma, obtemos a notação usual para sequências, qual seja, $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$ (MUNIZ NETO, 2015, p. 16)

De um ponto de vista matematicamente mais rigoroso, uma função é um caso particular de uma relação entre dois conjuntos, de acordo com a definição a seguir:

> Dados conjuntos não vazios Y e X, uma relação de X em Y (ou entre X e Y, nessa ordem) é um subconjunto R do produto cartesiano $X \times Y$, i.e., R é um conjunto de pares ordenados do produto tipo (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$. Se R é uma relação de X em X, diremos simplesmente que R é uma relação em X. (MUNIZ NETO, 2015, p. 16)

Conforme foi abordado nas definições de funções supracitados, segue-se o exemplo :
Se X = $\{1, 2, 3\}$ e Y= $\{2, 3, 4, 5\}$, o conjunto $R = \{(x, y) \in (X \times Y), x \geq y\}$ é a relação de X em Y dada por $R = \{(2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$. De fato, esses são os únicos pares ordenados (x, y), com X $\in \{1, 2, 3\}$, Y $\in \{2, 3, 4, 5\}$ e tais que $x \geq y$.

O exemplo anterior é um caso particular de um procedimento prático a que se pode recorrer para construir relações específicas R entre conjuntos não vazios X e Y: basta especificar de alguma maneira um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$. Aqueles pares ordenados de $X \times Y$ que satisfazem a especificação prescrita são os elementos de R. Sendo (x, y) um tal par, diz-se que x e y são relacionados por R.

Se R é uma relação de X em Y, então $R \subset X \times Y$, por definição. Reciprocamente, escolhido um par ordenado $(x, y) \in X \times Y$, pode ocorrer que $(x, y) \in$ R ou $(x, y) \notin R$ (i.e., que x e y sejam relacionado por R, ou não).

$$x \, R \, y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{R}$$

Assim é que, para a relação do exemplo anterior, o numeral 3 relaciona a 2 mas 2 não relaciona a 3, uma vez que $2 \geq 3$ é falso.

Dentre todos os tipos de relação que se pode considerar entre dois conjuntos não vazios, o principal é apresentado a seguir.

Definição 2.2.5 "Dados conjuntos não vazios X e Y , uma relação f de X em Y é uma função se a seguinte condição for satisfeita. $\forall x \in X, \exists\, y \in Y$; $x \, f \, y$ e y precisa ser único." (MUNIZ NETO, 2015, p. 17)

Seguindo os mesmos procedimentos anteriores, escreve-se $f : X \rightarrow Y$ para denotar que f é uma função de X em Y e $f(x) = y$ para denotar que o par $(x, y) \in X \times Y$ relacionado por f,i.e., satisfaz $x \, f \, y$. Observe que tal notação faz sentido, uma vez que a definição de função garante que, se (x,y_1) e (x,y_2) são pares ordenados em $X \times Y$ tais que xfy_1 e xfy_2, então $y_1 = y_2$. Por outro lado, verifica-se que a definição formal apontada anteriormente coincide com a definição informal dada no início desta seção.

Também é possível trabalhar com funções $f : X \rightarrow Y$ tais que $X,Y \subset \mathrm{R}$. Em tais casos, geralmente indica-se quem é o elemento $f(x) \in Y$ associado a um elemento genérico $x \in X$ por meio de uma fórmula em x, a qual explicita uma regra que a função deve satisfazer.

Por exemplo, pode-se dizer: considere a função $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, dada por $f(x) = x^2$. Isto quer dizer que a função associa, a cada $x \in \mathrm{R}$, seu quadrado x^2.

Veja que os requisitos definidores de uma função estão satisfeitos, uma vez que, a cada $x \in \mathrm{R}$, tem-se associado um único outro real $f(x)$, qual seja, x^2. Assim é que, ainda em relação a esse exemplo, obtém-se a seguinte fórmula:

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$f(3) = 3^2 = 9 \quad ,$$

etc.

Quando $X, Y \subset R$ e $f: X \to Y$ é uma função tal que o elemento $f(x) \in Y$ associado a $x \in X$ é dado por uma fórmula em x, denota-se por vez tal correspondência escrevendo:

$$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\to f(x). \end{aligned}$$

Assim, a função do parágrafo anterior, que associa a cada $x \in R$ seu quadrado x^2, poderia ser denotada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f: R &\to R \\ x &\to x^2. \end{aligned}$$

É importante ressaltar que diferentes elementos do domínio de uma função podem ter a mesma imagem. Se as imagens são sempre distintas, então a função diz-se biunívoca, ou um-a-um. Se f é uma função de X em X e se $f(x) = x$ para todo x, isto é, se cada elemento x é levado em si mesmo, f chama-se função identidade em X. Uma função f se diz uma função constante se existe um elemento c, tal que $f(x) = c$ para todo x do domínio. Todo elemento de X se relaciona com o mesmo elemento de Y.

Após um estudo focalizando os conceitos de funções reais e sua aplicabilidade no contexto da Matemática, é importante abordar o limite de funções reais. O conteúdo a seguir fundamenta-se neste assunto.

1.4 Limites de Funções Reais

Seja f uma função definida nem intervalo aberto contendo a (exceto possivelmente no próprio a) e seja L um numero real. A afirmação

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Significa que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, dizemos que **limite de $\boldsymbol{f(x)}$, quando $\boldsymbol{x}$ tende para $\boldsymbol{a}$, é $\boldsymbol{L}$.** Como ε pode tornar-se arbitrariamente pequeno, costuma-se reformular a definição acima dizendo que $f(x)$ pode tornar-se arbitrariamente próxima de L escolhendo-se x suficientemente próximo de a. Em termos de intervalos abertos, a útima parte da definição assim:

Se x esta no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$, e $x \neq a$,
então $f(x)$ entá no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Utiliza-se a definição de limite de funções reais quando há intenção de expor o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de determinados valores. O limite de uma função possui enorme importância em diversos ramos da Análise Matemática, principalmente no Cálculo Diferencial, na definição de derivadas e continuidade de funções.

Assim, diz-se que uma função $y = f(x)$ tem um limite L quando $x \to$ a ($\to$: tende), isto é, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, tendendo x para a , de qualquer maneira, sem atingir o valor a, ($y = f(x) \to L$) a diferença $f(x) - L$ em modulo se torna e permanece menor que qualquer valor positivo, predeterminado, por menor que seja. Deve-se ter atenção em não supor que lim $f(x) = f(a)$, (com x tendendo a a), pois lim $f(x)$ (com x tendendo a a) depende do comportamento de $f(x)$ para os valores de x próximos, mas diferentes de a, enquanto $f(a)$ é o valor da função $x = a$ (ROSSO JR, 2011, p. 387).

Conforme apontado anteriormente, o limite tem o objetivo de determinar o comportamento de uma função à medida que se aproxima de alguns valores, relacionando os pontos x e y, o que se comprova nos dois exemplos a seguir:

Exemplo 1: Tendo como exemplo a função $f(x) = 4x + 1$, determine a sua imagem à medida que o valor de x tende a 2.

Solução: $\lim_{x \to 2}(4x+1) = 4 \times 2 + 1 = 9$;

$f(x) = 4x + 1;$

$f(2) = 4 \times 2 + 1;$

$f(2) = 9.$

Exemplo 2. Determine o valor do Limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} \quad .$$

Solução: Neste caso, coloca-se em evidência a maior potência de x, tanto no numerador como no denominador:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5(1 + x^{-1} + x^{-5})}{x^5(2 + x^{-4} + x^{-5})} = \frac{1}{2}$$

.

Deste modo, os termos do tipo $\frac{1}{x^n} \longrightarrow 0 \; quando \; x \longrightarrow +\infty$, assim o limite da função $f(x) = \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$ será igual a $\frac{1}{2}$.

1.5 O Papel do Conceito de Limite no Contexto do Ensino Médio

Após um estudo abordando o conceito de limite e a definição de limite, segue-se uma apresentação da ideia intuitiva de limite, mais apropriada para ser trabalhada especificamente no Ensino Médio. Assim, o conceito de limite é usado de forma totalmente intuitiva. No contexto escolar, a palavra Limite é usada para indicar um ponto que pode eventualmente ser atingido, mas que jamais pode ser ultrapassado. Paiva (2010, p. 424) traz os seguintes exemplos:

1. Se injetarmos ar, ininterruptamente em um balão de borracha em determinado momento ele vai estourar. Isso porque existe o limite de elasticidade da borracha.
2. No Brasil, o limite mínimo de idade para que o cidadão tenha direito de votar é 16 anos.
3. Para que um foguete entre em órbita, há um limite mínimo de combustível necessário.
4. Para que um objeto flutue na água, há um limite máximo para a sua densidade. Ultrapassado esse limite o objeto afunda.

Ao estudar os limites de uma função exploram-se os aspectos intuitivos desse conceito. O exemplo a seguir destaca esses aspectos. Considera agora a função $f(x)$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, para\ x \neq 3 \\ 3, para\ x = 3 \end{cases}.$$

Observe o Quadro 1, à medida que os valores de x se aproximam de 3, por valores menores que 3 (pela esquerda) ou por valores maiores que 3 (pela direita), $f(x)$ se aproxima de 5.

x	2	2,3	2,8	2,85	2,9	2,99	⋯	3	⋯	3,01	3,1	3,2	3,5	3,8	3,9
$f(x)$	4	4,3	4,8	4,85	4,9	4,99	⋯	y	⋯	5,01	5,1	5,2	5,5	5,8	5,9

Quadro 1: Tabela de Valores da Função.

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Note que $f(3) = 3$, por definição de $f(x)$; no entanto, para valores de x cada vez mais próximos de 3(porém, diferentes de 3), os valores de $f(x)$ se aproximam de 5.

Observe o gráfico de f mostrado na Figura 6:

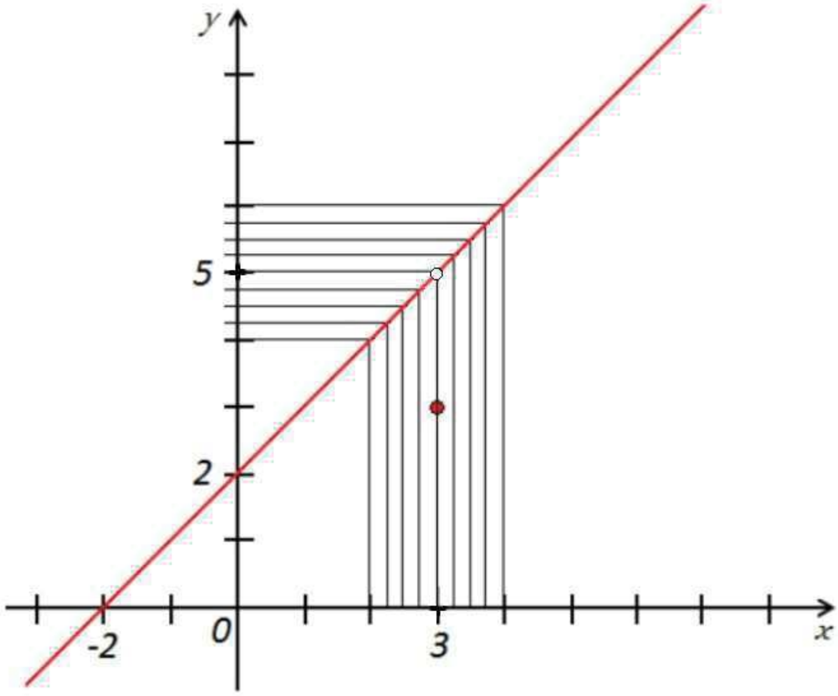


Figura 6: Gráfico de: *f(x)* $=\begin{cases} x+2, para\ x \neq 3 \\ 3, para\ x = 3 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

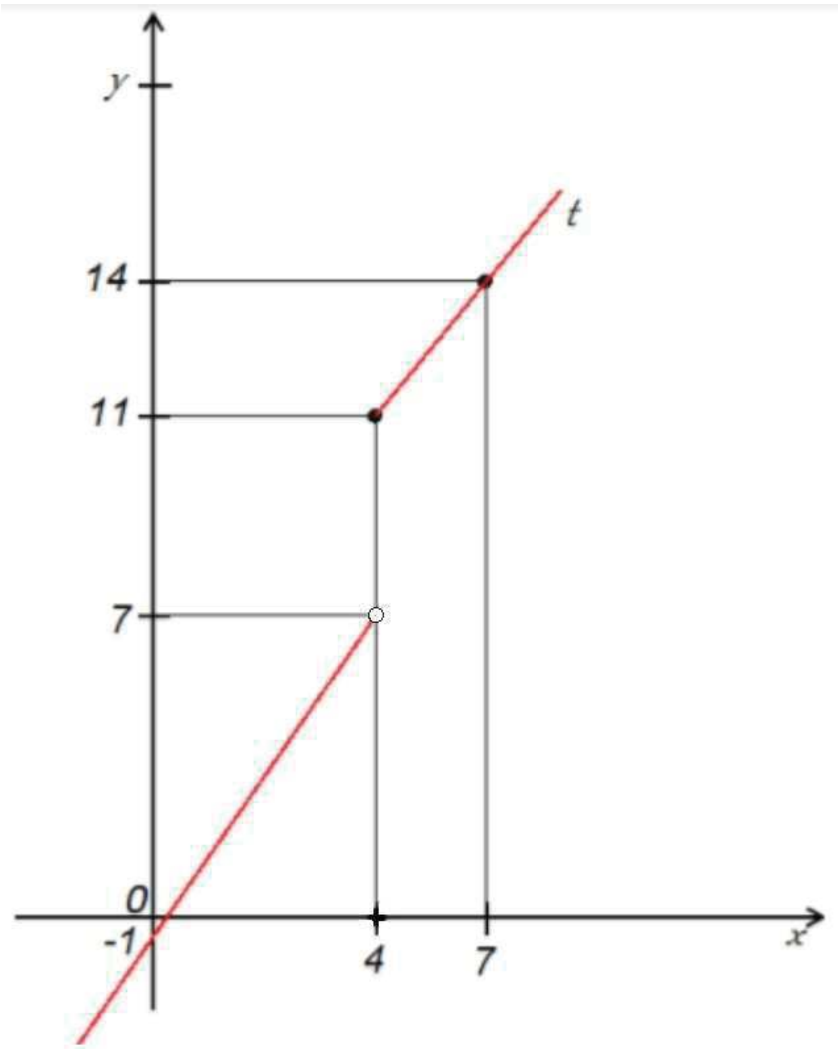
Pode-se dizer que o limite de $f(x)$ quando x tende a 3 pela esquerda é igual a 5, e representado por:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5.$$

O limite de $f(x)$ quando x tende a 3 pela direita é igual a 5, e indica-se por:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5.$$

Os limites à esquerda e à direita são chamados de *limites laterais.* E como esses dois limites são iguais, diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende a 3 é igual a 5 e pode ser indicado por:



.

(Diz-se que o limite de $f(x)$, quando x tende a 3, é igual a 5.)

É possível representar outro exemplo de limites laterais, considerando a função:

$$f(x)= \begin{cases} 2x-1, se\ x<4 \\ x+7, se\ x \geq 4 \end{cases},$$

cujo gráfico é:

Figura 7: Gráfico de *f(x)=*

Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

Conforme a análise do gráfico dado pela Figura 7, não existe $\lim_{x \to 4} f(x)$. Porém, ao considerar x tendendo a 4 apenas por valores maiores que 4, ou seja, à direita de 4, percebe-se que $f(x)$ tende a 11. Assim sendo, diz-se que a função f admite limite lateral para x tendendo a 4 pela direita, e que esse limite é igual a 11. Esse fato se escreve através da seguinte fórmula:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 11.$$

(Lê-se: limite de $f(x)$ para x tendendo a 4 pela direita é igual a 11)

Analogamente, ao considerar x tendendo a 4 apenas por valores menores que 4, ou seja esquerda de 4, percebe-se que $f(x)$ tende a 7. Esse fato é indicado pela seguinte expressão:

$$\lim_{x \to 4-} f(x) = 7.$$

(Lê-se: limite de $f(x)$ para x tendendo a 4 pela esquerda é igual a 7).

Embora existam os limites laterais $\lim_{x \to 4+} f(x) = 7$ e $\lim_{x \to 4-} f(x) = 7$, eles são diferentes. Isso implica que não existe o limite $\lim_{x \to 4} f(x)$.

De modo geral, uma condição necessária e suficiente para a existência do limite L de uma função $f(x)$, para x tendendo a um número a, é que os limites laterais de $f(x)$ esquerda e direita de a, existam e sejam iguais a L, isto é:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad .$$

Taxa de variação instantânea

A taxa de variação média de uma função f num intervalo x_0 ,x_1 de seu domínio não é necessariamente igual à taxa de variação em cada ponto desse intervalo. O método empregado para calcular a velocidade do móvel no instante $t = 1s$ no início deste capítulo pode ser aplicado no cálculo da taxa de variação instantânea de muitas outras funções.

Conforme descreve Giovanni (2013, p. 215), esse método consiste basicamente em se determinar o limite da taxa de variação média $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero.

Para definir a taxa de variação instantânea de uma função f no ponto x_0 de seu domínio, utiliza-se:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

sendo que

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

e Δx *é* um acréscimo (ou incremento) no ponto x_0 . Existem outras maneira de escrever esse limites, as quais são:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad .$$

Quando se substitui Δx por h ($h > 0$), tem-se:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{h} \quad .$$

Ao analisar a Figura 8 é possível verificar que, quando Δx assume valores cada vez menores, ou seja, tende a zero, a taxa de variação média $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima do valor da função em x_0 e, como consequência, a reta secante tende reta tangente $\boldsymbol{t}$ *à* curva no ponto P.

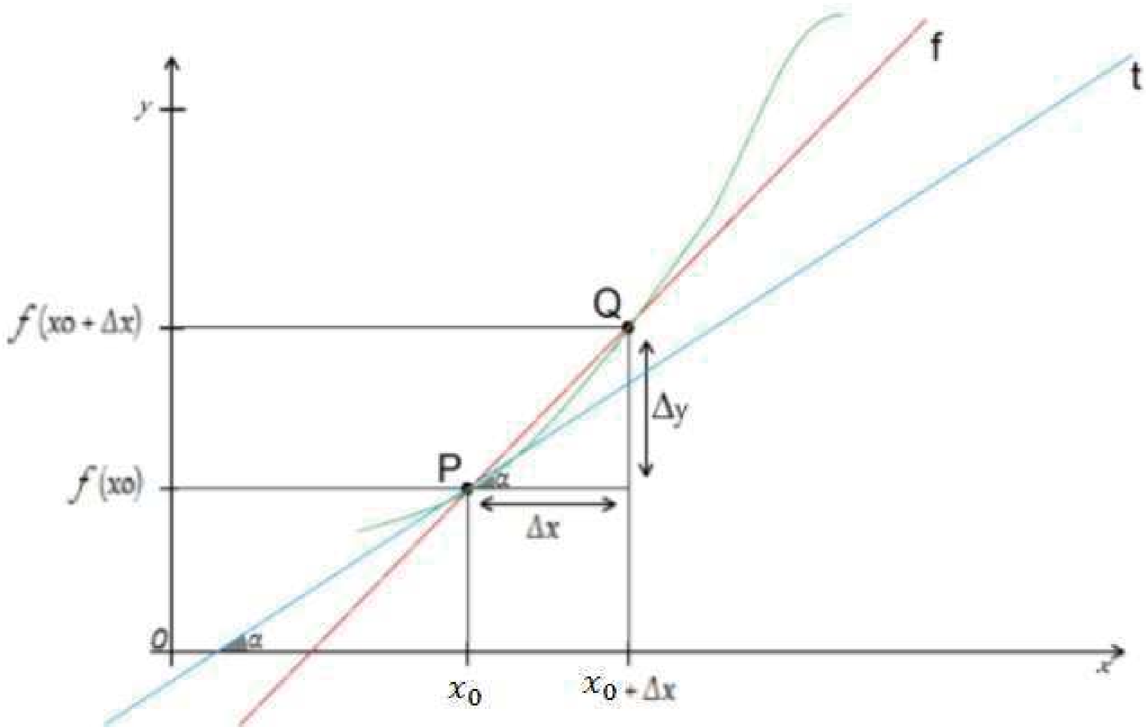


Figura 8: Gráfico de f
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

Portanto, pode-se dizer que, geometricamente, a taxa de variação instantânea representa o coeficiente angular m da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_0, ou seja,

$$m = tg\alpha \; = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{h} \quad .$$

Outro exemplo a ser observado ocorre quando um corpo em queda livre, em t segundos de queda, percorre uma distância em metros de:

$$s(t) = 4{,}9t^2 .$$

Ao questionar qual é a velocidade instantânea desse corpo no instante $t_0 = 3s$, verifica-se que a velocidade $\boldsymbol{v}$ do corpo no instante $t = 3s$ é a taxa de variação instantânea da função $\boldsymbol{s}$ no ponto $t_0 = 3$. Logo:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{s(3 + h) - s(3)}{h} \Rightarrow$$

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{4,9(3 + h)^2 - 4,9(3)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4,9(9 + 6h + h^2) - 4,9 \times 9}{h} \Rightarrow$$

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{29,4h + 4,9h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(29,4 + 4,9h) = 29,4$$

.

Assim, a velocidade instantânea desse corpo em t = 3s é 29,4$m/s.$ Conforme foi abordado no exemplo anterior, esse valor é chamado derivada da função $s(t)$ = 4,9t^2 quando t = 3. Pode-se representar a derivada de $s(t)$ = 4,9t^2 em t = 3 por $s'(3)$. Então, o resultado obtido é $s'(3)$ = 29,4.

Após um estudo teórico destacando a origem do cálculo, conceitos de funções reais, limites de funções reais e sua aplicabilidade nas séries do Ensino Médio, torna-se essencial conhecer a ferramenta digital denominada WxMAXIMA, selecionada para o desenvolvimento desta pesquisa. O capítulo a seguir define a origem do *software* WxMAXIMA e sua aplicabilidade no estudo de funções reais nas séries do Ensino Médio.

2 CONHECENDO O SOFTWARE WxMAXIMA

A necessidade atual de recursos tecnológicos, principalmente no contexto educacional, torna-se gigantesca a cada dia. Os alunos estão todos interconectados e conectados com a internet e cada vez mais interessados pelo acesso à informação. Esses fatores ampliam a ansiedade pela rápida execução de tarefas cotidianas e acaba por criar uma geração de alunos e professores que buscam nessas tecnologias novas formas de ensino e de aprendizagem adequadas ao mundo virtual.

Os recursos tecnológicos geram banalizações que terminam por contribuir, também, com o crescente fracasso de vários estudantes de matemática. De certa forma, quando um indivíduo é levado a estudar um conteúdo Matemático de forma equivocada, a frustração gerada contribui para o aumento do desinteresse pela Matemática (BRASIL, 2000).

A sociedade atual dispõe das melhores ferramentas de todos os tempos - grandes tecnologias, mídia digital e mídia social - para ampliar as possibilidades de adquirir conhecimentos. Mas essas ferramentas nem sempre favorecem a inteligência do ser humano quanto ao uso das mesmas. Na verdade, elas podem atrapalhar o desenvolvimento intelectual do aluno, uma vez que nem todo conteúdo disponível na internet provém realmente de uma base fundamentada na Matemática.

Analisando essa questão, e buscando uma forma do ensino em conexão com uma nova geração de alunos e professores, este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo de caso mais prático de uma sequência didática para desenvolver o conceito de limites de funções reais usando o WxMAXIMA, procurando dar praticidade na resolução de problemas que antes demandavam um esforço complicado e exaustivo, com o uso de limites de funções.

O WxMAXIMA surgiu a partir do Macsyma, um sistema de Álgebra Computacional desenvolvido na década de 1970, no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT Projeto MAC). [1]Refere-se a um *software* livre, que permite operar expressões algébricas e gráficos, operações matemáticas básicas ou avançadas. O fato de o MAXIMA ter uma Licença Pública GNU, possibilita ser instalado em qualquer computador e ser explorado ou distribuído sem qualquer empecilho ou custo adicional. O MAXIMA é uma linguagem computacional que permite realizar cálculos numéricos e simbólicos, representações gráficas e efetuar programação, possuindo uma grande variedade de comandos para os

[1] http://andrejv.github.io/wxmaxima/

mais variados fins em Matemática e aplicações. É um *software* de livre acesso, disponível para os sistemas operativos usuais, segundo o documento explicativo tutorial que foi disponibilizado por seus criadores e pode ser consultado através deste endereço eletrônico:
http://maxima.sourceforge.net/docs/tutorial/pt/Maxima_Bruna_Santos_2009.pdf .

Qualquer usuário do *software* pode digitalizar expressões matemáticas através de uma sintaxe amigável, o que o incentiva a estudar conceitos matemáticos. Afinal, isso o permite avaliar resultados com maior rapidez, além de alterar parâmetros e configurações dessas expressões para que possam ser adaptados e aplicados em atividades diversas do seu cotidiano.

Giraldo (2012) ressalta que o WxMAXIMA se mostra como uma ferramenta sem precedentes para o ensino do Cálculo. Sua importância está direcionada à necessidade de analisar um resultado, ou na eventual análise gráfica, já que o *software* também permite a construção de gráficos a partir de expressões algébricas, como por exemplo, as funções reais.

A funcionalidade do WxMAXIMA é para o ensino da Matemática em todos os níveis e ainda apresenta uma alternativa gratuita, com fácil acesso em computadores pessoais e notebooks, além de o laboratório de informática da própria instituição de ensino.

Um dos focos desta dissertação é mostrar aos alunos e professores um interesse pelo *software* WxMAXIMA, afim de integrá-lo como uma ferramenta para o ensino.

O conteúdo a seguir aponta noções preliminares a respeito do *software* WxMAXIMA e sua aplicação na área educacional, envolvendo operações matemáticas.

2.1 Noções Preliminares Operacionais

O WxMAXIMA é um *software* livre que possui versões para Windows Linux e Mac OS X. No entanto, este trabalho foi desenvolvido na plataforma Windows e surgiu do código fonte do Macsyma, criado pelo MIT (Massachusetts Institute of Technology), entre 1968 e 1982. Segundo o artigo de Santos (2009), no ano de 1982 o Macsyma passou a ser utilizado pelo departamento de energia americano e o professor William F. Schelter, da universidade do Texas, passou a adotá-lo em suas atividades diárias. É importante destacar que foi através do esforço de Schelter que foi liberada a licença do departamento de energia, tornando livre o código fonte do *software*.

Assim, considera-se um CAS (Computer Algebra System), que permite a realização de operações matemáticas simbólicas, cálculos numéricos envolvendo números decimais ou até mesmo decimais com muitos dígitos, expansões e fatorações de expressões.

O conteúdo a seguir descreve o download utilizado para o desenvolvimento do *software* WxMAXIMA, adotado nesta pesquisa.

2.2 Download do *Software*

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi utilizada a versão máxima 17.10.1 para Windows XP (32bit). O link para este download (de qualquer uma das versões supracitadas) é:

https : //andrejv.github.io/WxMAXIMA/.

O tamanho de versão para windows é de 104 MB.

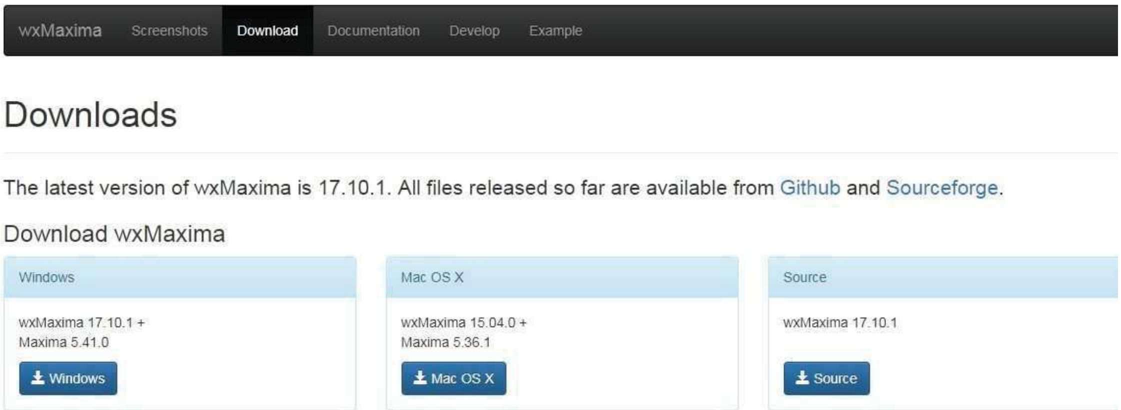


Figura 9: Download *Software* WxMAXIMA.
Disponível em: *http : //andrejv.github.io/WxMAXIMA/download.html*
Acesso em: 19 Dez. 2017.

A seguir são descritos os procedimentos adotados para a instalação do *software* WxMAXIMA.

2.3 Instalação do *Software*

Após o término do download a próxima etapa é a execução do arquivo $maxima{-}clisp{-}sbcl\ {-}5.38.1.exe$, para o qual seleciona-se Próximo , conforme a Figura 10.

Figura 10: Download *Software* WxMAXIMA.
Disponível em: *http : //andrejv.github.io/WxMAXIMA/download.html*
Acesso em: 19 Dez. 2017.

A próxima seção descreve os procedimentos para operacionalização do *software* WxMAXIMA.

2.4 Operando o WxMAXIMA

Cada entrada é etiquetada com (%ix), dado que esse i significa INPUT, em contrapartida, cada saída é etiquetada com (%ox), onde esse o significa OUTPUT. Para armazenamento de uma entrada na memória, basta digitá-la e finalizá-la com; . Caso o objetivo seja gerar o resultado dessa operação, é necessário finalizar com Shift + Enter.

Exemplo:

Ao digitar em uma célula $5+4$ seguido de ; e depois teclar Enter, a entrada fica armazenada na memória, conforme mostra a Figura 11.

Figura 11: Adicionando com o WxMAXIMA 1.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

O resultado s é exibido se, após a entrada $5 + 4$, digitar Shift + Enter. Ou seja, somente após a digitação de Shift + Enter é possível obter uma saída.

Figura 12: Adicionando com o WxMAXIMA 2.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

A seguir ressalta os procedimentos adotados para manipulação das variáveis e obtenção dos valores desejados no final de cada operação.

2.5 Manipulação das Variáveis

Sempre que houver a necessidade de atribuir um valor a uma variável, basta digitar a variável seguida de Aspas e, em seguida, o valor desejado.

Figura 13: Atribuindo Valor a uma Variável.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

Para os resultados apontados anteriormente, foram criados dois objetos a e b, sendo que o objeto a recebeu o número 5 e o objeto b recebeu o número 4.

A seguir, utilizamos o *software* WxMAXIMA para construção de gráficos de funções.

2.6 Construindo Gráficos de Funções e Calculando Limites

No WxMAXIMA, a lei de formação se define da seguinte forma: $f(x)$:=. O nome f pode ser substituído por qualquer outra letra (**a** até **z**).

Para construção do gráfico, neste trabalho, utiliza-se apenas o R_2 (gráfico bidimensional). O comando que permite esta ação é o $wxplot2d$. Uma outra alternativa baseia-se na barra de tarefas, Gráficos> Gráficos 2d, e por fim a inserção dos valores.

Pode-se exemplificar através da seguinte função:

$$f(x) = (x + 2)(x + 3)(x - 5).$$

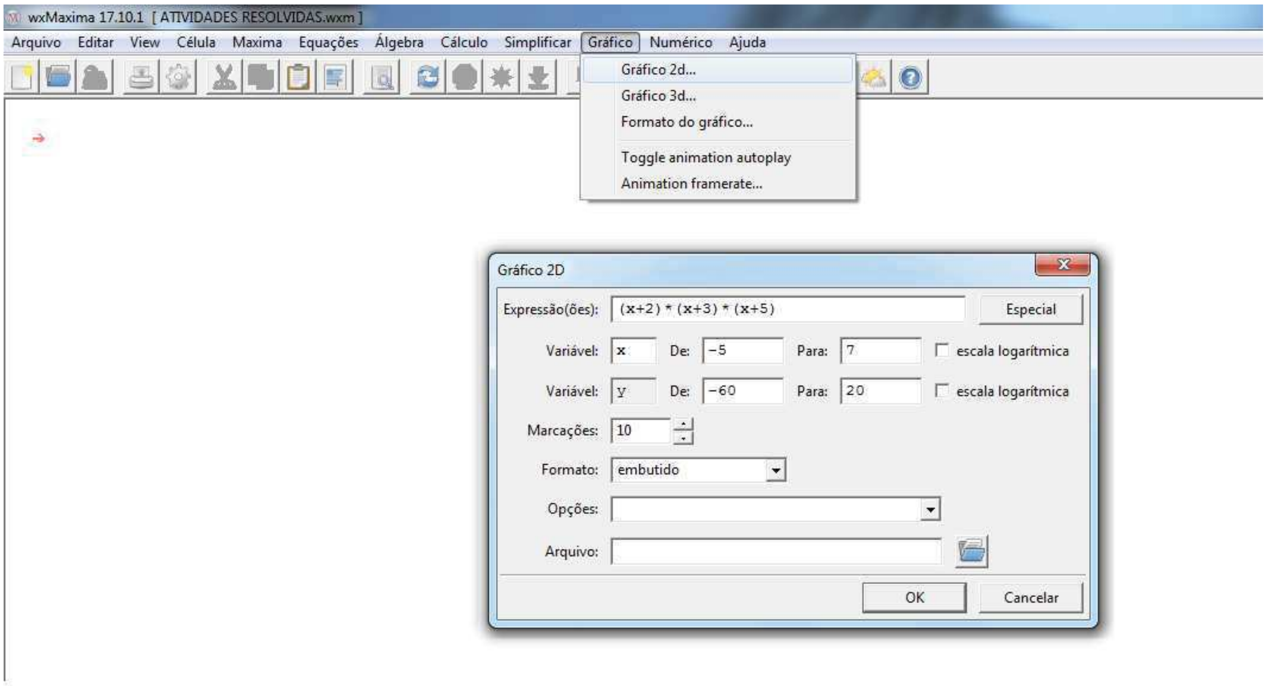


Figura 14: Construindo Gráfico de Funções no WxMAXIMA.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

A maneira mais simples de traçar gráficos no R_2 (gráfico bidimensional) é o comando $wxplot2d$, que deve ser usado assim:

wxplot2d (função, [eixo, inicio, final]).

Para traçar o gráfico desta função, inicialmente define-se numa janela de visualização, que deve ser indicada na função $wxplot2d$. Observe a Figura 15:

```
(%i3)    f(x):=(x+2)*(x+3)*(x-5);
(%o3)    f(x):=(x+2)(x+3)(x-5)

(%i1)    wxplot2d([(x-5)*(x+2)*(x+3)], [x,-5,7], [y,-65,20])$
plot2d: some values were clipped.
(%t1)
```

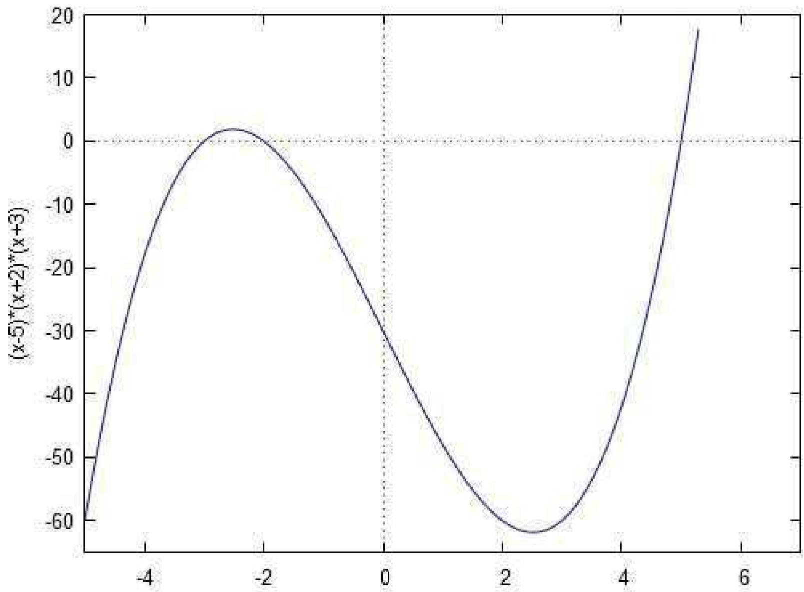


Figura 15: Plotando Funções no WxMAXIMA.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

O comando *ratsimp* expande a forma fatorada, ou seja, efetua as devidas multiplicações e divisões.
Observe a Figura 16:

```
(%i5)    ratsimp(%o3);
(%o5)    f(x):=x^3-19 x-30
```

Figura 16: Utilizando o Comando *ratsimp.*

Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

Para o calculo de limites podemos usar a expressão *linti(função, variável,tendência)* ou utilizar a barra de tarefas (Calculo> Encontrar Limites...) e em seguida preencher o quadro e por fim clicando em “OK”, como mostra o exemplo a seguir:

Calculo do Limite da Função *f*(x)=1/x , com (x) tendendo ao infinito e ao menos infinito.

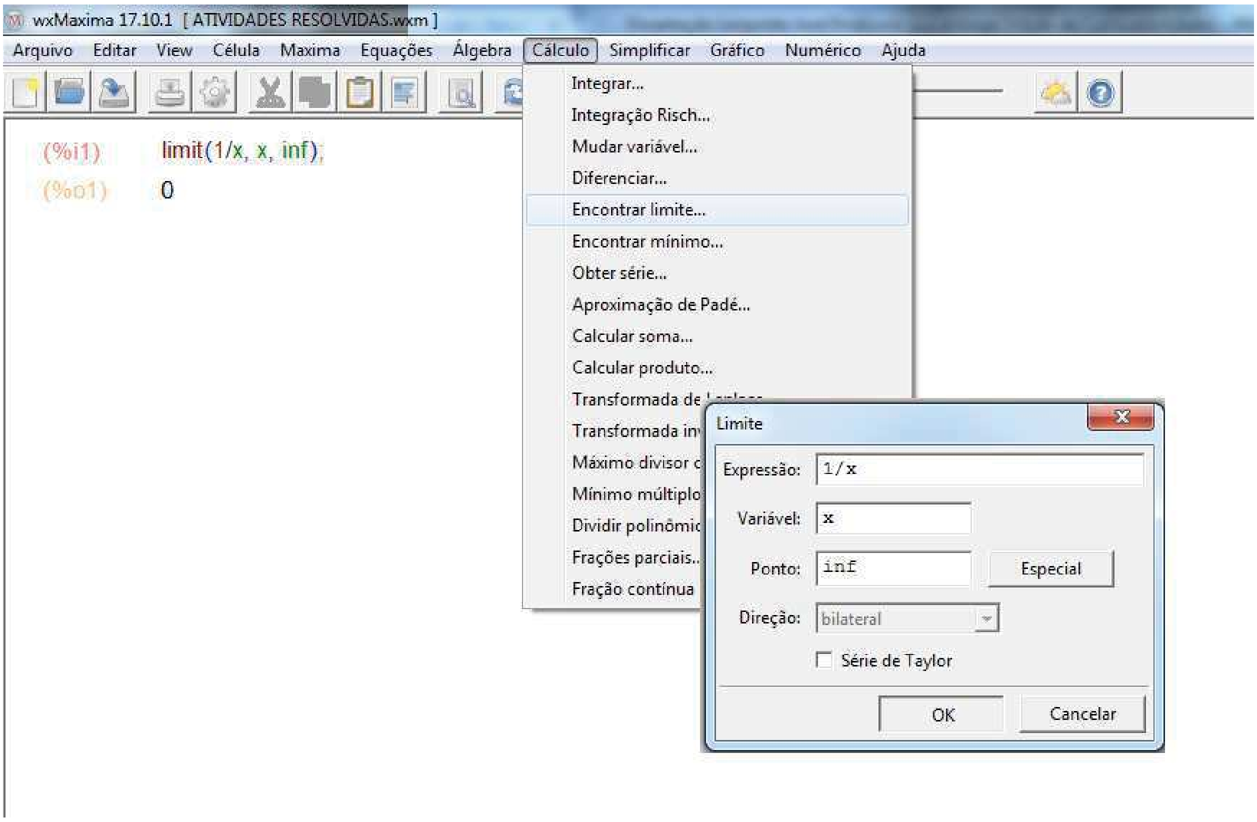


Figura 17: Calculo de Limite no WxMAXIMA com x Tendendo ao Infinito.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

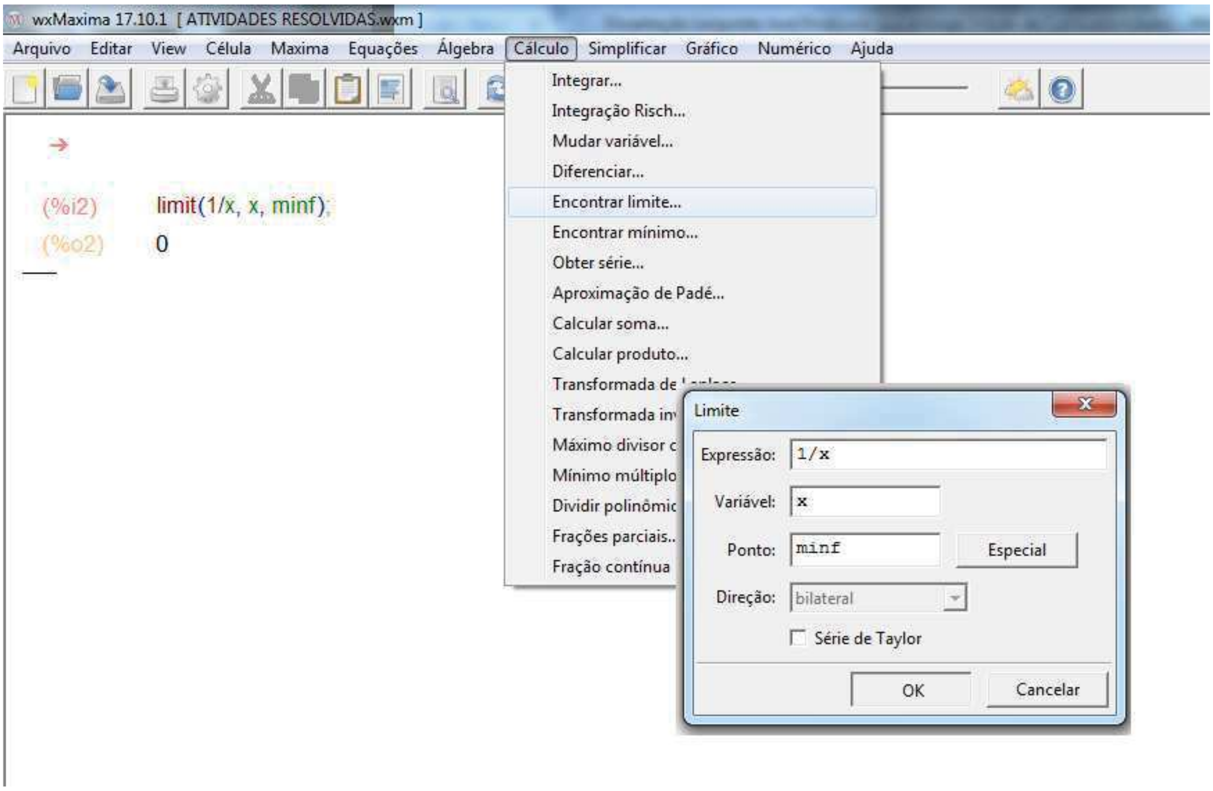


Figura 18: Calculo de Limite no WxMAXIMA com x Tendendo ao Menos Infinito.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

O mesmo Calculo de Limites pode ser efetuado digitando a expressão *limit*((1/x),x,inf), e em seguida pressionando Shift+Enter no WxMAXIMA e *limit*((1/x),x,minf) e em seguida pressionando Shift+Enter, como ilustrado na figura seguinte:

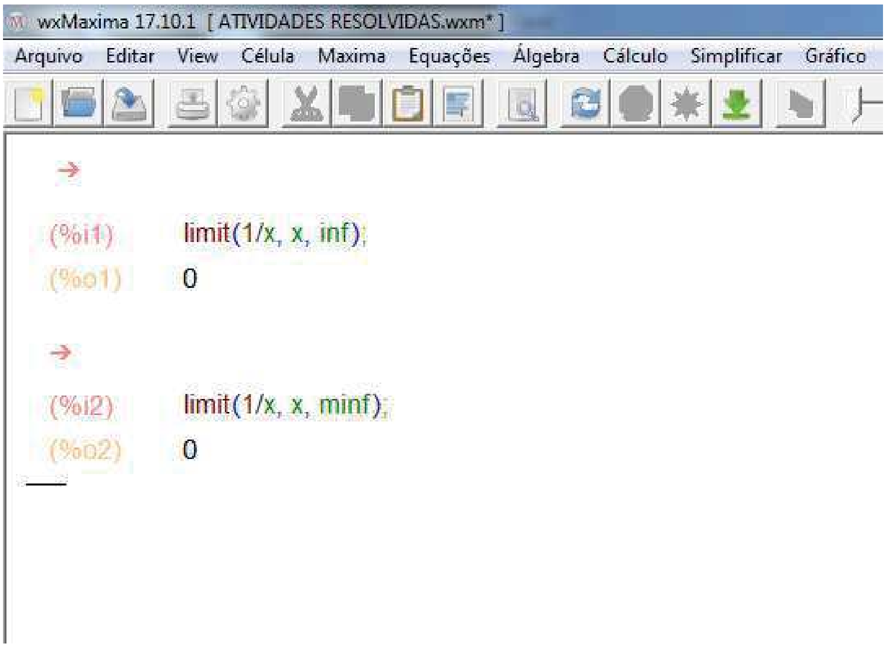


Figura 19: Calculo de Limite no WxMAXIMA com x Tendendo ao Infinito e Menos Infinito.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

O conteúdo a seguir mostra os procedimentos a serem adotados pelos estudantes que utilizam o *software* WxMAXIMA para salvamento de arquivos.

2.7 Salvando Arquivos

Para salvar um projeto, clicar na aba Arquivo e selecionar Salvar. Depois de escolher o local onde o projeto será salvo, é necessário dar um nome ao mesmo e em seguida salvá-lo. Observe as figuras 20 e 21:

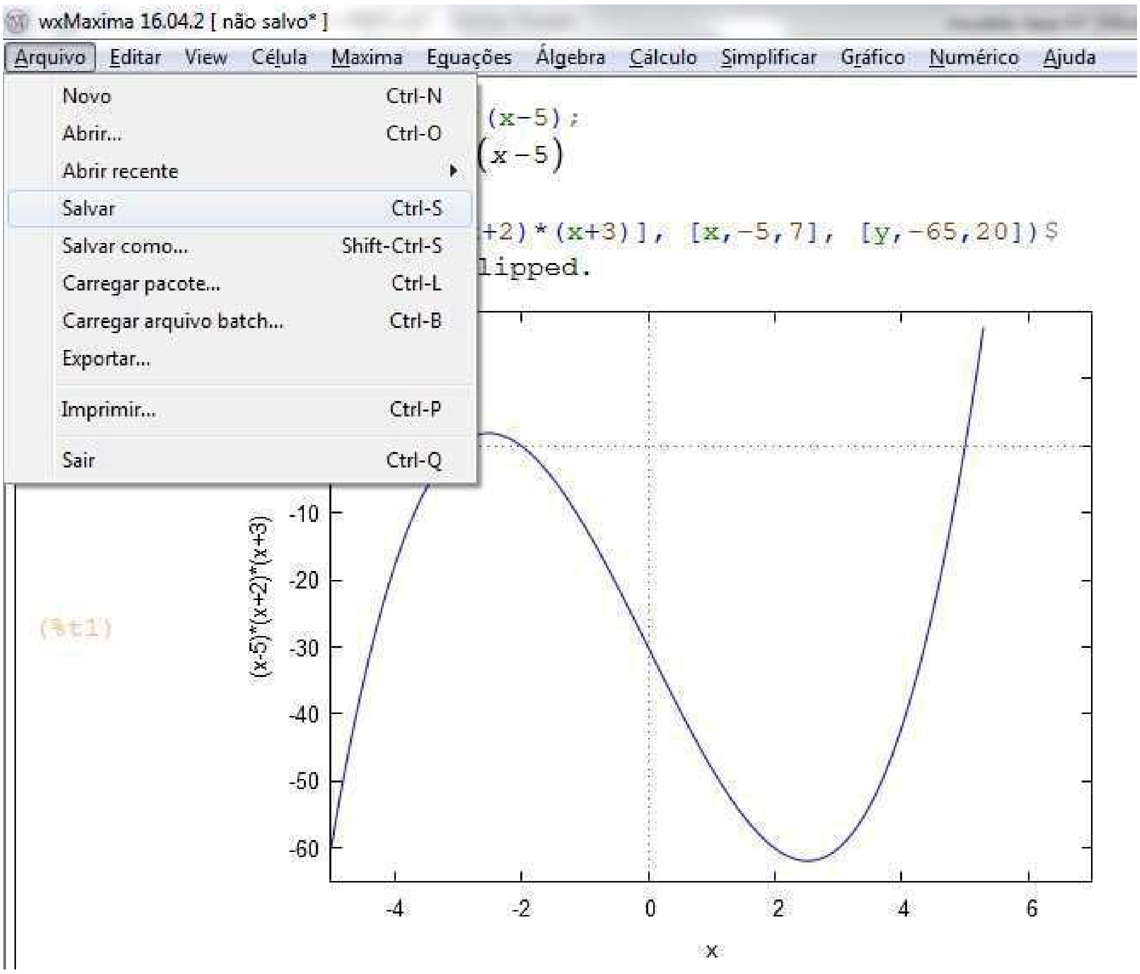


Figura 20: Salvando Arquivos.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

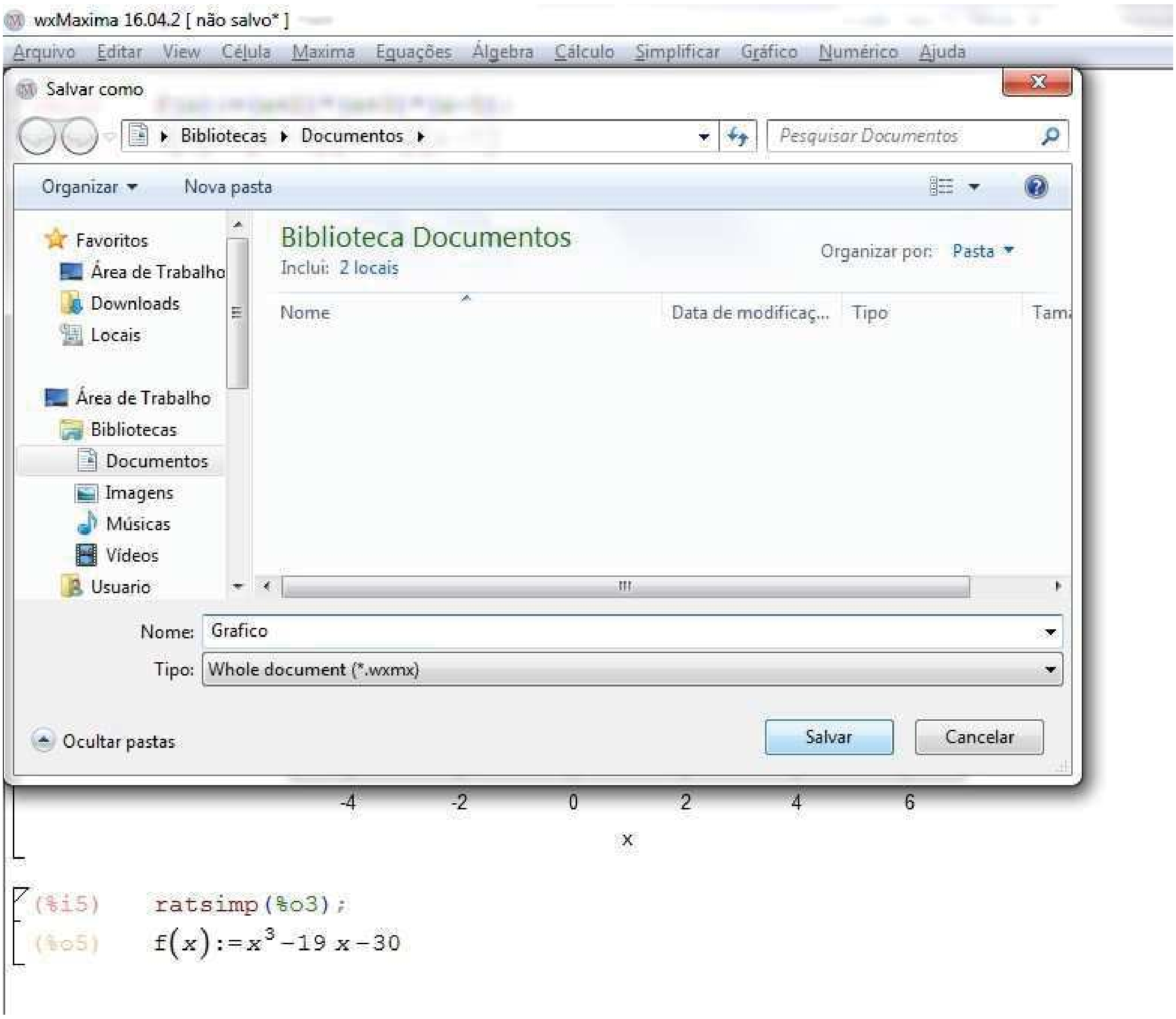


Figura 21: Salvando Arquivos.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

Após um estudo teórico abordando conceitos e origem de cálculos, funções reais, limites de funções reais, construção de gráficos de limites de funções reais, e agora a aplicação *software* WxMAXIMA e sua contribuição nesta área especifica da Matemática, é importante apresentar os resultados obtidos com a pesquisa realizada, envolvendo um grupo de estudos formado por 20 alunos, que cursam o Ensino Médio, no CEMTN. Os próximos capítulos a seguir descrevem os procedimentos, o local da pesquisa, a metodologia e os instrumentos empregados no desenvolvimento desta pesquisa.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

O presente trabalho foi realizado visando a inovação na forma como a Matemática é trabalhada no Ensino Médio utilizando a Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) e, também, propor formas de inclusão de projetos que podem ser considerados relevantes para uma futura escolha profissional do aluno. Trata-se de uma pesquisa qualitativa do tipo Estudo de Caso, que foi desenvolvida com a participação de alunos voluntários do Ensino Médio. O norte desta pesquisa foi a realização de uma investigação a respeito da eficiência de contribuições de projeto de ensino e aprendizagem da Matemática, com um grupo de 20 alunos do Centro de Ensino Médio de Taguatinga Norte (CEMTN), os quais realizaram o estudo do conceito de limite de funções reais, utilizando o *software* de Sistema Computação Algébrica WxMAXIMA.

3.1 Procedimentos da Pesquisa

A realização da pesquisa de campo ocorreu através da formação de um grupo de estudo, que teve como foco o estudo do conceito de limites de funções reais com a utilização do *software* livre WxMAXIMA, tendo como base uma sequência didática da apostila elaborada pelo autor da pesquisa contendo dez atividades, as quais são descritas detalhadamente no próximo capítulo.

A apostila forneceu informações para facilitar a compreensão do assunto em questão, trazendo noções de limites, assim como a resolução de atividades do livro Recursos Computacionais no Ensino da Matemática, da coleção PROFMAT, SBM sobre limites de funções reais utilizando o *software* WxMAXIMA (APÊNDICE A1).

O projeto de pesquisa foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa/CEP-UFG, pois essa dissertação versa sobre as atividades desenvolvidas pelos alunos no laboratório de informática, avaliando a adequação da metodologia de ensino proposta e em acordo com os princípios éticos vigentes, tendo sido aprovado por este comitê.

Para o desenvolvimento desta pesquisa foi necessário utilizar o laboratório de informática da referida escola no contra-turno das aulas regulares. Essa etapa contou com a colaboração de alunos que se prontificaram voluntariamente a participar do desenvolvimento deste projeto, demonstrando interesse sobre o tema de limites de funções reais e pelos recursos computacionais. Também, pela vontade de iniciar o estudo do Cálculo Diferencial e Integral por desejarem futuramente se graduar em cursos nas diversas áreas da informática, engenharias e demais áreas afins que têm como base a disciplina Matemática ou Cálculo Diferencial e Integral.

Sendo assim, os fatores que levaram esses estudantes a participar desta pesquisa foram: o desejo de ingressar em cursos nas áreas de engenharias e informática e também prontificarem-se voluntariamente para o estudo em grupo sobre o assunto abordado neste trabalho, assim como registrado no diário de campo do pesquisador. Esse grupo foi composto pelo número de 20 alunos (maiores de dezoito anos de idade), que estudam no CEMTN, local onde os encontros foram realizados utilizando os computadores do Laboratório de Informática.

Para o desenvolvimento desta pesquisa foram seguidas duas etapas principais, sendo elas:

- Rotina paradidática individual em computadores, contendo dez atividades sobre limites de funções reais. Os dados coletados seguiram a sequência didática (sucessão planejada de atividades progressivas e articuladas entre si) aplicada, apontadas no APÊNDICE A1.

- Aplicação de questionário individual de avaliação das atividades com todos os participantes.

As dez atividades foram apresentadas em grau crescente de dificuldade, sendo que as atividades 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7: retiradas da obra de Giraldo (2012, p. 209) e adaptadas pelo pesquisador, atividades 8, 9 e 10 elaboradas e sugeridas pelo autor da pesquisa, com foco no estudo dos conceitos de limites de funções reais com a utilização do *software* livre WxMAXIMA.

No final do projeto, foi aplicado um questionário aos alunos, a fim de colher seus testemunhos e considerações pessoais sobre o projeto. O questionário aplicado encontra-se em APÊNDICE A2.

A seção a seguir descreve o local selecionado para o desenvolvimento da pesquisa de campo.

3.2 Local da Pesquisa - CEMTN

O Centro de Ensino Médio Taguatinga Norte (CEMTN) foi inaugurado em 09 de abril de 1963. Conforme mostra a Figura 22, geograficamente essa escola localiza-se na QNC AE 1/2/3, av. SAMDU, na zona urbana norte da cidade de Taguatinga e mantém vínculo direto com a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEE/DF) e com a Diretoria Regional de Ensino de Taguatinga (DRET).

Figura 22: Foto de Satélite Atual do CEMTN.
Fonte: Google Earth.

Por meio do Decreto n. 700, aprovado em 26 de janeiro de 1968, a referida escola foi transformada em Colégio de Taguatinga Norte (CTN), necessariamente quando foi implantado o Ensino Colegial, atual Ensino Médio. Por se destacar como referência na formação de jovens para o mercado de trabalho, essa escola foi se fortalecendo na cidade de Taguatinga, que também iniciava sua história. Em 1976 o referido colégio passou a chamar-se Centro Educacional de Taguatinga Norte (CETN).

Por meio da Portaria nº 04 da Secretaria de Educação do Distrito Federal, aprovada em 2000, a referida escola passa-se a designar Centro de Ensino Médio Taguatinga Norte (CEMTN), atendendo ao Ensino Médio completo. Desde então, essa instituição de ensino passa por profundas mudanças, tanto na área administrativa quanto pedagógica, sendo a implantação da jornada ampliada para os professores - uma das mais significativas, pois representou a possibilidade de desenvolvimento de discussões, planejamentos, através de avaliações coletivas (CEMTN, 2017). Também é importante destacar que as coordenações pedagógicas passaram a ser organizadas por áreas curriculares, a saber:

- Área de Códigos, Linguagens e suas Tecnologias (Português, Arte, Educação Física, LEM).
- Área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Matemática, Física, Química, Biologia).
- Área das Ciências Humanas e suas Tecnologias (História, Geografia, Filosofia, Sociologia).

Após uma avaliação sobre a aprendizagem e rendimento apresentados pelos alunos, a aplicação metodológica do currículo no CEMTN passou por mudanças no 2º semestre de 2005. A partir dessa reforma foi adotada a metodologia de atendimento aos alunos em salas ambiente com horário duplo das aulas, otimizando o tempo de aula e os espaços físicos da escola. No final do ano letivo de 2005, foi realizada uma reavaliação deste projeto metodológico e foi possível identificar vários aspectos positivos, sendo assim, mantido para o ano letivo subsequente.

Para o ano de 2006 foram estabelecidas mudanças referentes à parte diversificada, conforme as novas diretrizes para a avaliação. Desta forma, o CEMTN incluiu a parte diversificada como componente curricular com 03 horas/aulas semanais para atender aos princípios norteadores que permeiam o trabalho pedagógico e que são essenciais para a formação do aluno na sua essência. Foram adotados como eixos estruturadores para o desenvolvimento deste projeto os princípios que constituem os quatro pilares da educação, quais sejam: o aprender a ser, o aprender a fazer, o aprender a conviver e o aprender a conhecer (CEMTN, 2017)

É importante destacar que, em 2008, a escola passou por algumas reformas físicas, sendo as principais mudanças: criação do Laboratório de Informática, reforma da Quadra Poliesportiva, construção de Arquibancadas, reforma e pintura do Auditório e obtenção de bens de consumo e permanentes com a verba do Programa de Descentralização

Administrativa e Financeira (PDAF). A figura 23 a seguir apresenta a Quadra Poliesportiva e o Laboratório de Informática.

Figura 23: Fotos da Quadra Poliesportiva e Laboratório de Informática do CEMTN.
Fonte: Dados Coletados pelo Autor dessa Pesquisa.

Quanto à aprovação de alunos no ENEM, é importante descrever que nos anos de 2009 e 2010 a escola permaneceu em segundo lugar em relação às escolas públicas do Distrito Federal e em primeiro lugar em Taguatinga. Além disso, no ano de 2010, a escola passou a trabalhar com o projeto Ensino Inovador do MEC e com o sistema de Escola Integral. Dando continuidade aos projetos previstos no PPP, o CEMTN trabalhou-se com salas ambientes, aulas com horários duplos e com dois intervalos de 15 minutos, atendimento pedagógico em turno contrário, atendimento aos alunos com necessidades especiais por dois profissionais da área na sala de recurso construída para este fim.

Atualmente a estrutura física da escola é composta por 20 salas de aula, sendo salas-ambientes equipadas com armários e quadros de giz e de pincel, 3 laboratórios (Física, Química e Biologia), sala de professores, biblioteca, sala de coordenação, secretaria, mecanografia, sala de multimídia, sala de direção, sala da vice direção, sala multiuso, sala para supervisão pedagógica, sala para supervisão administrativa, sala para o grêmio estudantil, quadra poliesportiva, depósito, sala de Educação Física, sala de Artes, cantina, sala de reforço e refeitório (CEMTN, 2017).

Essa estrutura atende cerca de 774 alunos no turno matutino e 799 alunos no turno vespertino, conforme o Quadro 2 a seguir.

Matutino			Vespertino		
Série	Turma	N° de Alunos	Série	Turma	N° de Alunos
1° Ano	0	0	1° Ano	17	718
2° Ano	9	362	2° Ano	2	81
3° Ano	10	412	3° Ano	0	0
Total	19	774	Total	19	799

Quadro 2: Quantidade de Alunos por Ano e Turno.
Disponível em: *http* : *http://www.cemtn.com.br/?pageid=1418*
Acesso em 19 DEZ. 2017.

Na Figura 24, estão explicitas as concepções com base nos valores norteadores das práticas pedagógicas do CEMTN.

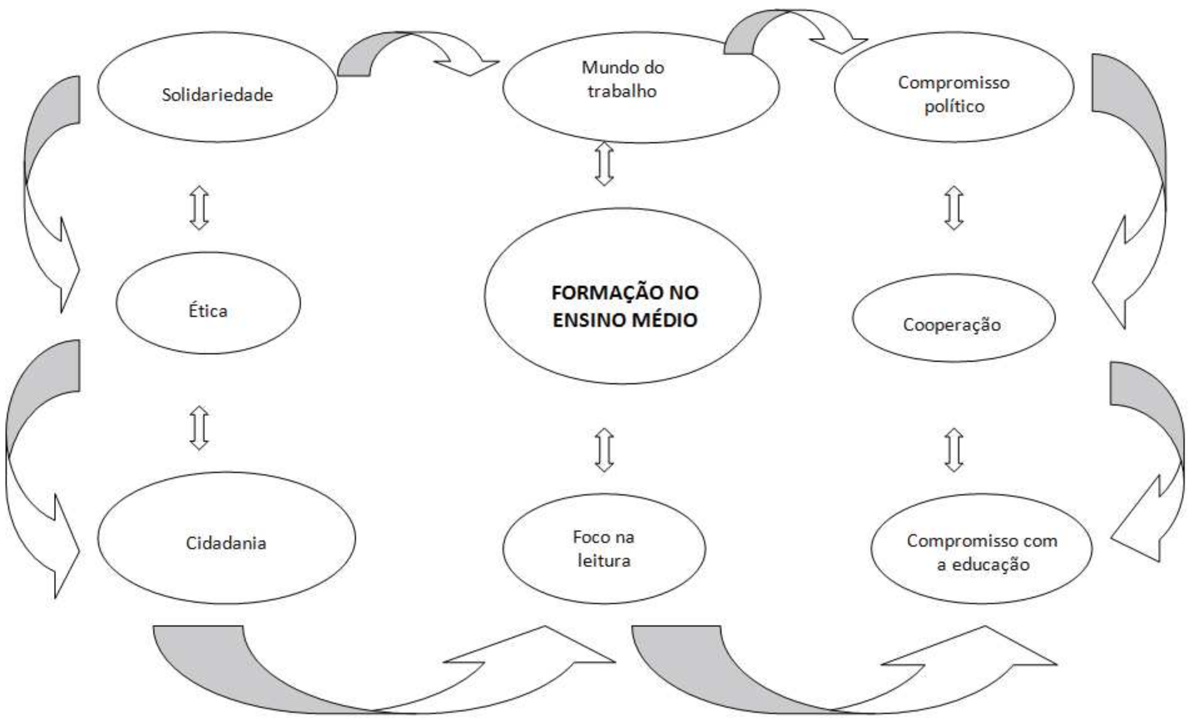


Figura 24: Valores Norteadores do CEMTN.
Disponível em: *http* : *//www.cemtn.com.br/?pageid=141*
Acesso em: 19 DEZ. 2017

A Figura 24 retrata que a ação pedagógica do CEMTN fundamenta-se em valores que são imprescindíveis ao fazer pedagógico, como: a solidariedade, a ética e a cidadania buscando sempre a formação crítica do cidadão e o engajamento de seus atores com o compromisso público da qualidade dos serviços prestados no mundo do trabalho, e também com os princípios de igualdade, gestão democrática, liberdade e valorização do magistério.

Respeitando os princípios supracitados, a organização curricular do CEMTN se baseia no Currículo das Escolas Públicas do DF, atendendo aos três eixos estruturadores: diversidade para atender diferentes grupos em diferentes espaços, exigibilidade para responder as mudanças e contextualização que dá significado e sentido aprendizagem (CEMTN, 2017). Os conteúdos são concentrados em três áreas do conhecimento, de conformidade com a Base Nacional Comum Curricular que é uma exigência colocada para o sistema educacional brasileiro pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996; 2013), pelas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (Brasil, 2009) e pelo Plano Nacional de Educação (Brasil, 2014), e deve se constituir como um avanço na construção da qualidade da educação, conforme o Quadro 3 a seguir.

Área de Conhecimento	Componentes Curriculares	Carga Horária Semanal
Linguagens, Códigos e Suas Tecnologias	Língua Portuguesa	4h/a
	Inglês	2h/a
	Artes	2h/a
	Educação Física	2h/a
Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias	Matemática	3h/a
	Química	2h/a
	Física	2h/a
	Biologia	2h/a
Ciências Humanas e suas Tecnologias	Geografia	2h/a
	História	2h/a
	Filosofia	2h/a
	Sociologia	2h/a
Projeto Interdisciplinar: Redação Geometria	Parte Diversificada	2h/a 1h/a

Quadro 3: Relação de Disciplinas de Acordo com sua Carga Horária.
Disponível em: $http://www.cemtn.com.br/?page_id=1418$
Acesso em: 19 DEZ. 2017.

Recursos Humanos

Atualmente o quadro de pessoal desta escola é composto por:

- 2 Orientadoras Educacionais, sendo uma para o turno matutino e outra para o turno vespertino;
- 3 Apoios Administrativos nos turnos: matutino e vespertino;
- 1 Coordenador Pedagógico por área de conhecimento;
- 2 Professores de 40 horas para os laboratórios de Ciências: Química e Física;
- 2 Professores de 40 horas para a Laboratório de Informática;
- 65 Professores;
- 18 Servidores técnicos-administrativos.

A partir do segundo semestre de 2017 três turmas (1ª A, B e C) fizeram parte do programa de Educação em Tempo Integral do Ministério da Educação (MEC), cujo intuito é apoiar os sistemas de ensino público a atender meta 6 do Plano Nacional de Educação (PNE), que prevê, até 2024, a oferta da educação em tempo integral em pelo menos 25% dos estudantes da Educação Básica (CEMTN, 2017). É um momento de ações compartilhadas entre União, Estados e o Distrito Federal para melhorias do Ensino Médio.

Assim sendo, o Centro de Ensino Médio de Taguatinga Norte (CEMTN) constitui-se como uma instituição pública muito valorizada por toda a comunidade escolar, tendo em seus quadros tanto profissionais da educação como também alunos dedicados a formação crítica e consciente do cidadão, promovendo sempre a inovação e melhoria do processo de ensino e aprendizagem, sendo uma escola aberta a novos projetos educacionais.

Após um estudo descrevendo os procedimentos metodológicos e o local selecionado para esta pesquisa, o capítulo a seguir apresenta os resultados da análise dos dados obtidos com a aplicação das dez atividades da sequência didática e do questionário aplicado aos alunos.

4 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS COM OS ALUNOS

Após ser aplicada a sequência didática ao grupo voluntário de 20 alunos que cursam o terceiro ano do Ensino Médio no turno contrário as aulas nos dias 02, 03, 04, 09, 10, 11 e 12 de Abril de 2018, utilizando o Laboratório de Informática do CEMTN, foi possível observar através de anotações feitas pelo pesquisador em seu diário de campo que todos os alunos demonstraram interesse e comprometimento na realização das atividades, mesmo sabendo que se tratava de uma atividade voluntária, que não faria parte de nenhuma pontuação de notas para eles.

As atividades foram desenvolvidas com o auxílio de dois alunos monitores que demonstraram interesse em conhecer o WxMAXIMA anteriormente. Esses alunos tiveram oportunidades de conhecer os principais comandos para a realização das tarefas, gastando aproximadamente uma hora com a orientação do professor/supervisor Leopoldo José Alves para tanto.

O *software* WxMAXIMA foi instalado em computadores que tinham o sistema operacional Windows XP do Laboratório de Informática, o que proporcionou a todos os participantes o manuseio e interação com o *software* WxMAXIMA.

4.1 Da Sequência Didática

Nesta seção, as discussões são desenvolvidas a partir da análise das atividades e de seus objetivos.

Foi constatado que os alunos levaram em média 30 minutos para executarem os principais comandos no WxMAXIMA para realização da sequência didática, a saber, calcular limites de funções reais e construção de gráficos de funções reais em $2D$, tendo todos relatados que tal experiência foi gratificante, sendo isso registrado no questionário de avaliação das atividades (APÊNDICE A2).

Como parte do processo, todos os alunos receberam um questionário de avaliação das atividades (APÊNDICE A2), a fim de relatar o ponto de vista com relação ao desenvolvimento das tarefas no WxMAXIMA. Foi desenvolvido um diário de bordo pelo pesquisador, contendo observações identificadas durante o desenvolvimento dessas atividades, através de diálogo com os alunos, visando identificar as dificuldades apontadas por eles. Dos 20 alunos que participaram desse estudo, apenas 04 manifestaram que tiveram dificuldades de adaptação ao Software WxMAXIMA, o que corresponde a 20% do total. Isso justifica-se devido a falta de algum detalhe na hora da digitação ou mesmo desatenção dos alunos.

Outra observação constatada foi que os alunos não tiveram nenhuma dificuldade quanto a notação de limites, inclusive compreendendo a idéia de aproximação e tendência de *x* para um valor real, algo logo percebido nas primeiras atividades 1 e 2 (conceito intuitivo de limite). A seguir, são descritas as atividades solicitadas aos alunos e suas respectivas resoluções.

A Atividade 1 (APÊNDICE A1) solicitou aos alunos a identificação do limite de uma função *f*, usando a noção intuitiva, no *software* WxMAXIMA. A Figura 25 destaca os procedimentos adotados para sua resolução.

ATIVIDADE 1: Cálculo do limite da função f(x)= x-1 quando x tende a 2 e esboço do gráfico de f com o WxMAXIMA.

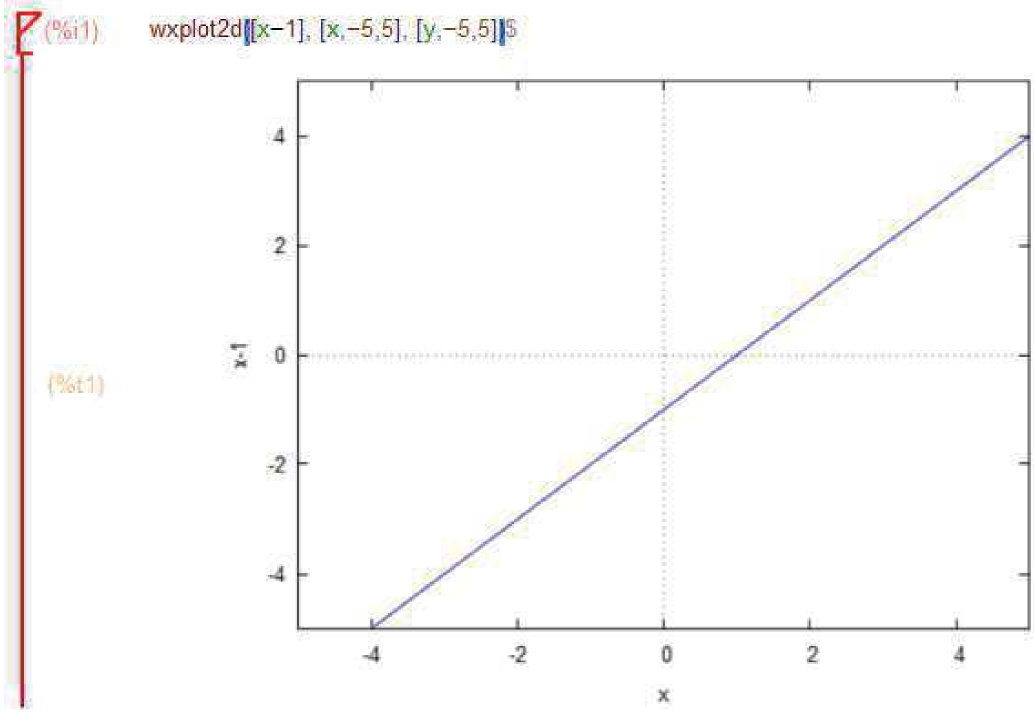


Figura 25: Atividade 1 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Ainda com base no estudo de noção intuitiva, a Atividade 2 (APÊNDICE A1) abordou o cálculo do limite de uma função *f* e a elaboração de um gráfico referente a esta função, usando o *software* WxMAXIMA, conforme ilustra a Figura 26.

ATIVIDADE 2: Cálculo do limite e esboço do gráfico da função f(x)= x^2+1, quando x tende a 1, com o WxMAXIMA.

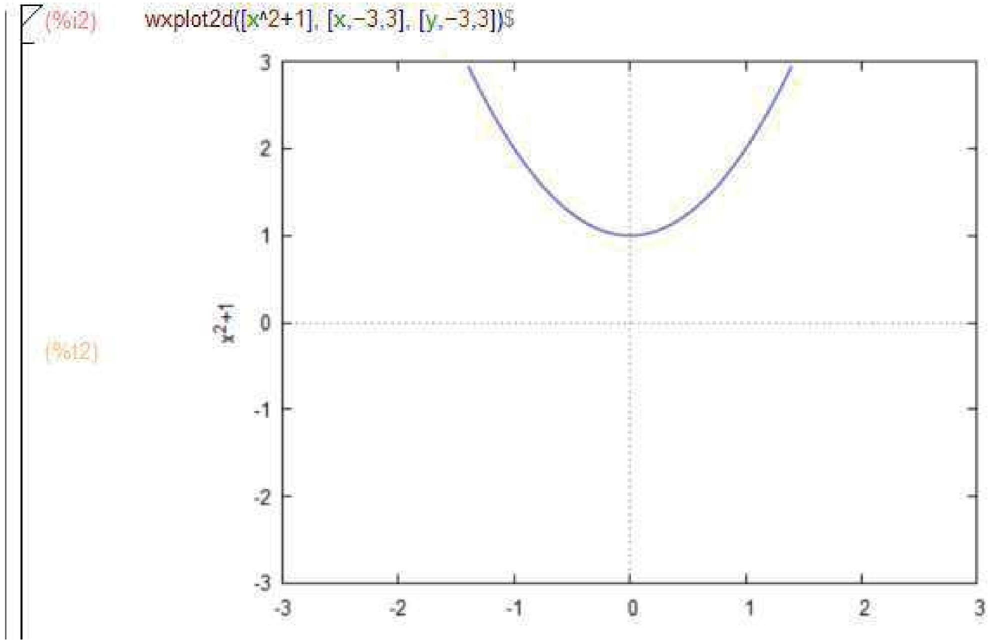


Figura 26: Atividade 2 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

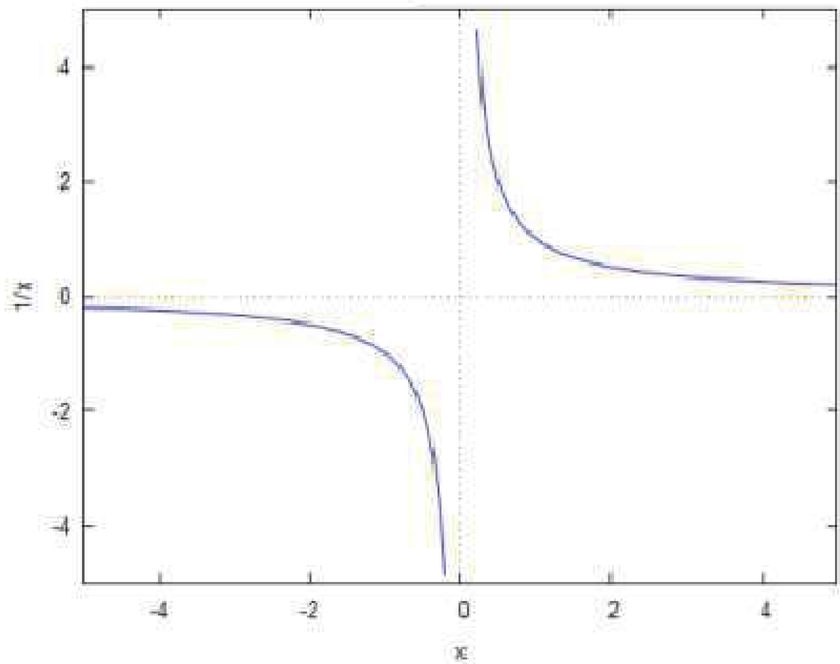
Ao resolverem as atividades 3 e 4, 100% dos alunos atingiram a habilidade de cálculo de limites no WxMAXIMA e também a construção de gráficos, sendo auxiliados pelo professor Leopoldo e os dois alunos monitores.

As figuras 23 e 24 a seguir apresentam os gráficos produzidos pelos alunos, ao resolver essas atividades no WxMAXIMA. Assim sendo, a Atividade 3 (APÊNDICE A1) ressaltou o cálculo do valor limite de uma função e a construção de um gráfico, usando o referido *software*. A Figura 27 aponta a resolução dessa atividade.

ATIVIDADE 3: Cálculo do limite e esboço do gráfico da função f(x)= 1/x, quando x tende para o infinito, com o WxMAXIMA.

```
(%i3)   wxplot2d([1/x], [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

(%t3)




```
(%i4)   limit((1/x), x, inf);
(%o4)   0
```

Figura 27: Atividade 3 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A Atividade 4 (APÊNDICE A1) solicitou aos alunos a determinação do valor limite e a elaboração de um gráfico, colocando em evidência a maior potência de X, tanto no numerador quanto no denominador. A Figura 28 mostra as resoluções e a construção do referido gráfico.

ATIVIDADE 4: Cálculo do limite e esboço do gráfico da função f(x)= x^5+x^4+1 / $2x^5+x+1$, quando x tende para o infinito, com o WxMAXIMA.

```
(%i5) limit([(x^5+x^4+1)/(2·x^5+x+1)], x,inf);
(%o5) [1/2]
(%i6) wxplot2d([(x^5+x^4+1)/(2·x^5+x+1)], [x,-2,8], [y,-2,2])$
(%t6)
```

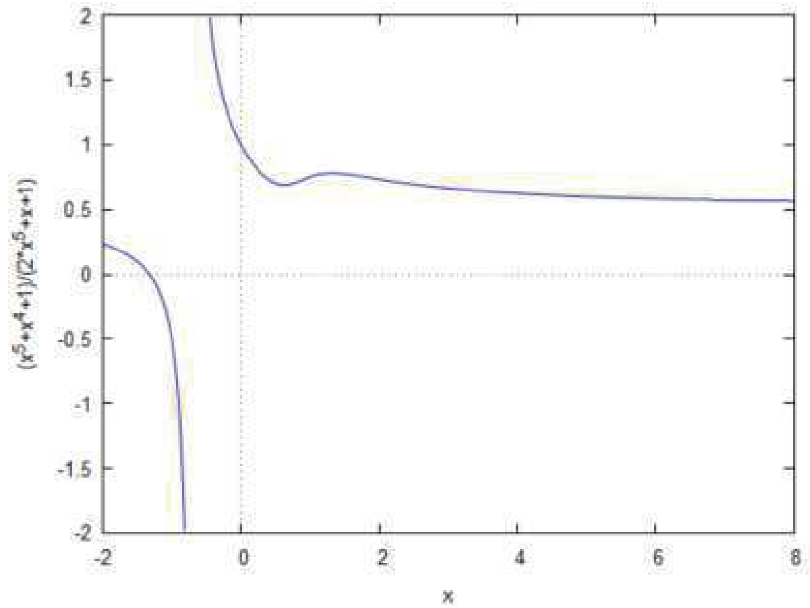


Figura 28: Atividade 4 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A partir das atividades 5 e 6, foi explorada a ideia de limites laterais à esquerda (minus) e à direita (plus) e também a ideia de limites no infinito, conceitos estes que foram apresentados no decorrer das atividades, possibilitando também o desenvolvimento do conceito de limite global ou limite bilateral, como é apresentado na barra de tarefas do WxMAXIMA.

Levando em consideração as funções f1(x)=1/x e f2 (x)= $1/x^2$, a Atividade 5 (APÊNDICE A1) teve como prioridade o cálculo dos limites dessas funções, quando x tende a 0, quando x tende a 0 pela esquerda e quando x tende a 0 pela direita, e também o cálculo dos limites laterais dessas funções, através do uso do *software* WxMAXIMA. Em destaque, segue-se a resolução e os gráficos produzidos pelos alunos, com base na Atividade 5:

ATIVIDADE 5: Cálculo dos limites e esboço do gráficos das funções f1(x)= 1/x e f2(x)= 1/x², quando x tende a zero, com o WxMAXIMA.

```
(%i7)   limit(1/x, x, 0);
(%o7)   infinity

(%i8)   limit(1/x^2, x, 0);
(%o8)   ∞

(%i9)   limit(1/x, x, 0, minus);
(%o9)   −∞

(%i10)  limit(1/x, x, 0, plus);
(%o10)  ∞

(%i11)  limit(1/x^2, x, 0, minus);
(%o11)  ∞

(%i12)  limit(1/x^2, x, 0, plus);
(%o12)  ∞
```

Figura 29: Atividade 5 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

```
(%i13)  wxplot2d([1/x^2], [x,-5,5], [y,-5,5])$
(%t13)
```

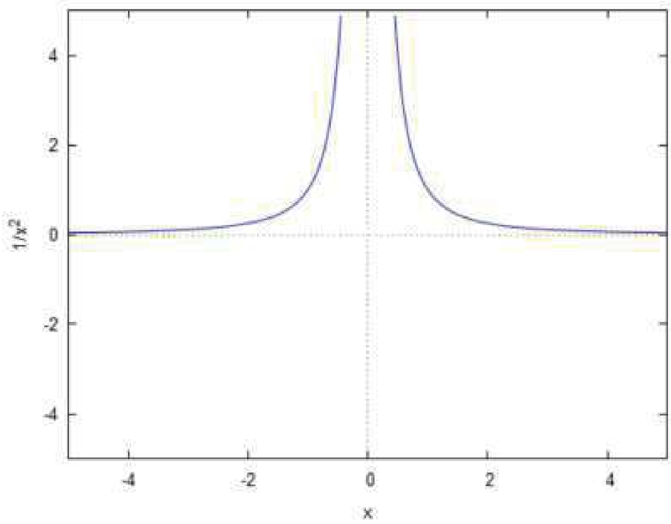


Figura 30: Atividade 5 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A Atividade 6 (APÊNDICE A1) baseou-se no cálculo do limite das funções g_1(X) e g_2 (X) com R*→R₊ e dos seus limites laterais, através do software WxMAXIMA. A Figura 31 apresenta a resolução dessa atividade.

ATIVIDADE 6:Cálculo dos limites laterais e os limites das funções g_1(x)= x/|x| e g_2(x)= sen(1/x), quando x tende a zero, com o WxMaxima.

```
(%i14)  limit(x/abs(x), x, 0);
(%o14)  und

(%i15)  limit(sin(1/x), x, 0);
(%o15)  ind

(%i16)  limit(sin(1/x), x, 0);
(%o16)  ind

(%i17)  limit(x/abs(x), x, 0);
(%o17)  und

(%i18)  limit(x/abs(x), x, 0, minus);
(%o18)  -1

(%i19)  limit(x/abs(x), x, 0, plus);
(%o19)  1

(%i20)  limit(sin(1/x), x, 0, minus);
(%o20)  ind

(%i21)  limit(sin(1/x), x, 0, plus);
(%o21)  ind
```

Figura 31: Atividade 6 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

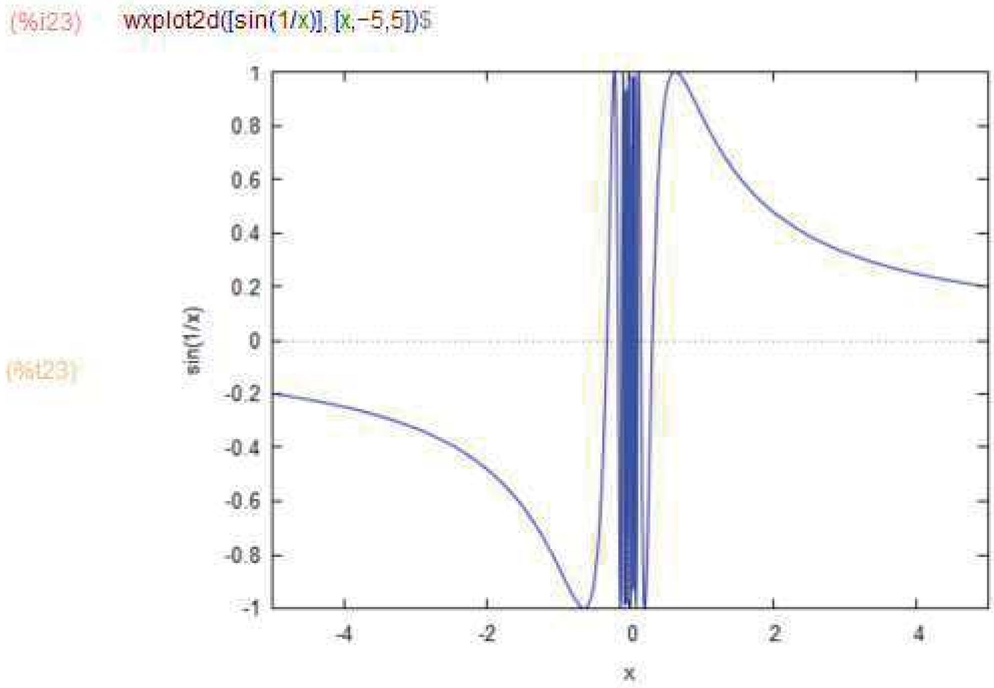


Figura 32: Atividade 6 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

As atividades 7 e 8 foram reconhecidamente as mais difíceis pelos alunos. A Atividade 7 (APÊNDICE A1) ofereceu oportunidades aos alunos para calcular os limites da função f(x)= $x^2 + 1/x^2 - 1$ e elaborar seu gráfico, através do *software* WxMAXIMA. Devido o grau de dificuldade em perceber a distinção que o programa faz quando os limites laterais são $+\infty$ e $-\infty$, tendo como consequência que o limite bilateral não existe, mas o programa WxMAXIMA dá como resposta a este limite a expressão *infinity* *p*ara destacar este fato, e também pelo gráfico, verificar e demonstrar a descontinuidade, o que pode ser observado nas figuras 33 e 34 seguintes.

ATIVIDADE 7: Cálculo dos limites laterais e global e esboço do gráfico da função f(x)= x^2+1/x^2-1, com x tendendo para zero, -1, 1, infinito e menos infinito, com o WxMAXIMA.

```
(%i25) limit((x^2+1)/(x^2-1), x,-1 );
(%o25) infinity

(%i26) limit((x^2+1)/(x^2-1), x, 0);
(%o26) -1

(%i27) limit((x^2+1)/(x^2-1), x, 1);
(%o27) infinity

(%i28) limit((x^2+1)/(x^2-1), x, inf);
(%o28) 1

(%i29) limit((x^2+1)/(x^2-1), x, minf);
(%o29) 1
```

Figura 33: Atividade 7 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

```
(%i24) wxplot2d([(x^2+1)/(x^2-1)], [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

(%t24)

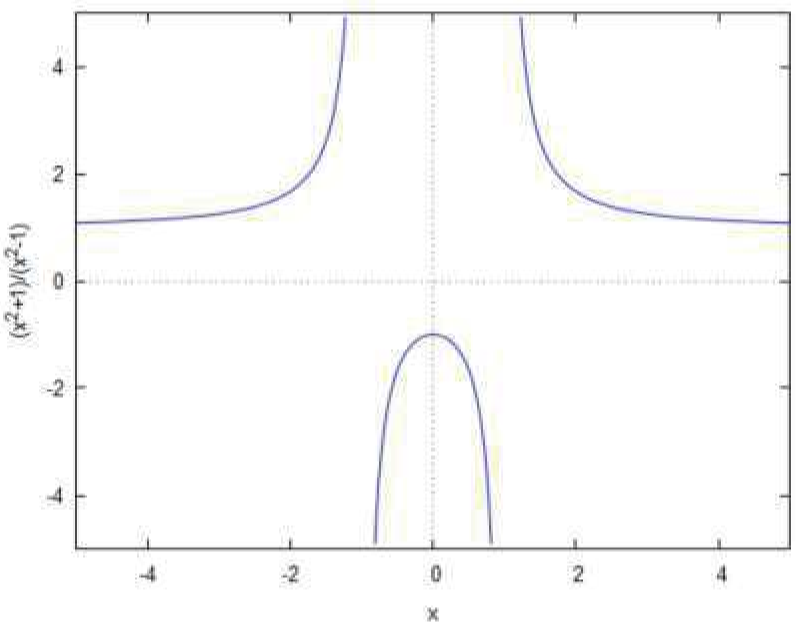


Figura 34: Atividade 7 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

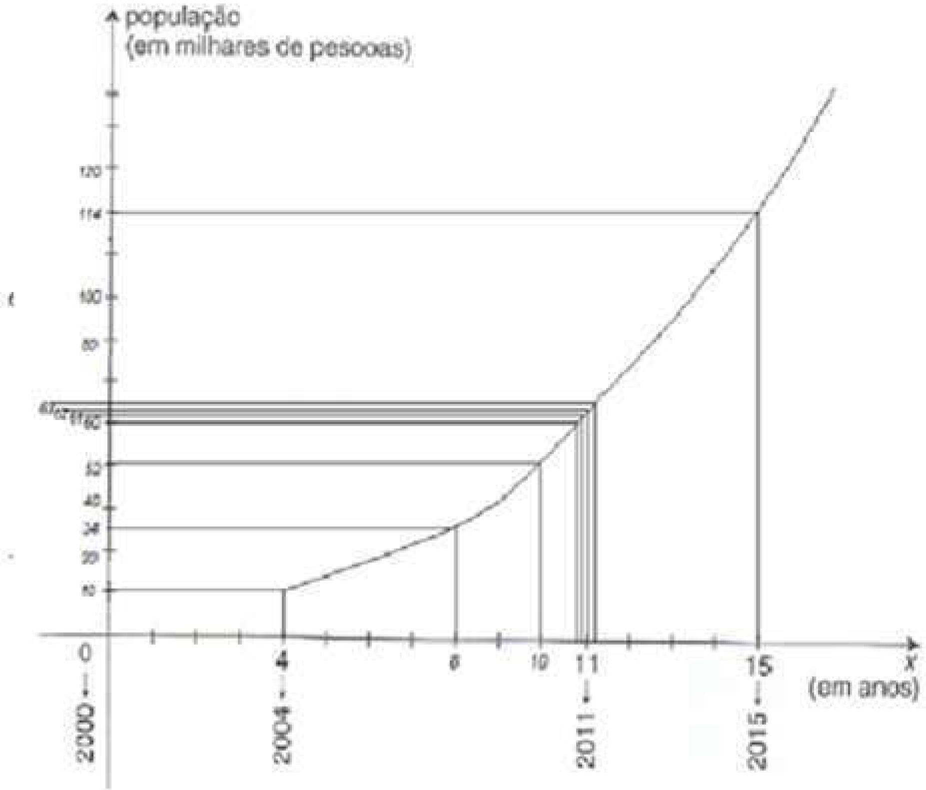
A Atividade 8 (APÊNDICE A1) descreveu o crescimento populacional de uma pequena cidade, ocasionando a elaboração da função:

$h(x) = \frac{x^4-12x^3+15x^2-48x+44}{2x^2-24x+22}$. Nesse contexto, foi solicitado aos alunos a elaboração de um gráfico mostrando o crescimento populacional dessa cidade no período de 2000 a 2015 e uma previsão do que acontece com seus habitantes em 2011, através do *software* WxMAXIMA.

Durante a execução da expressão da Atividade 8 no *software* WxMAXIMA os alunos apresentaram maior dificuldade devido a extensão da mesma. É importante lembrar que numerador e denominador devem ser colocados entre parênteses para o cálculo de limites e também para a construção de gráficos. Assim, pelo contexto do problema, os alunos deveriam fazer uma avaliação de x a partir do ano de 2004 ao ano 2015 e variação de y ou $f(x)$ de 10 a 150, dados esses extraídos da situação-problema, mostrando que além do conhecimento de execução das tarefas do WxMAXIMA sempre há a necessidade de abstração e raciocínios lógicos para que o educando consiga melhor proveito das ferramentas apresentadas pelo *software*.

Na Atividade 8, os alunos precisaram ser orientados quanto a construção do esboço do gráfico no período dos anos 2000 a 2004 e no período subsequente dos anos 2004 a 2015. Daí podemos esboçar o gráfico que descreve o crescimento populacional dessa cidade de 2000 a 2015.

ATIVIDADE 8: Esboço do gráfico da função h(x)= x^4-12x^3+15x^2-48x+44/2x^2-24x+22, com o WxMAXIMA.



$$\lim_{x\to 11}\frac{x^4-12x^3+15x^2-48x+44}{2x^2-24x+22}=\lim_{x\to 11}\frac{(x^2+4)}{2}=\lim_{x\to 11}\frac{x^2}{2}+2=$$

$$\lim_{x\to 11}\frac{11^2}{2}+2=\frac{121}{2}+2=\mathbf{62,5\,\mathit{mil}}$$

Figura 35: Atividade 8 no *Software* WxMaxima.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A dificuldade da Atividade 8 também foi o resultado da divisão polinomial ou fatoração da expressão, algo que é possível ser realizado no WxMAXIMA com a entrada da função ratsimp, como no exemplo mostrado na Figura 36 a seguir que corresponde a expressão final simplificada $h(x) = \frac{x^2}{2} + 2$, como mostrou o exercício.

(%i2) `h(x):=(x^4-12*x^3+15*x^2-48*x+44)/(2*x^2-24*x+22);`

(%o2) $h(x) := \frac{x^4 - 12x^3 + 15x^2 + (-48)x + 44}{2x^2 - 24x + 22}$

(%i3) `ratsimp(%o2);`

(%o3) $h(x) := \frac{x^2 + 4}{2}$

Figura 36: Atividade 8 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

A Atividade 9 (APÊNDICE A1) abordou um assunto relacionado à escola em que eles estudam, relembrando a importância do Projeto Valorização da Escola Pública do CEMTN do professor Valdison Morais. Esse projeto aborda a importância de espécies de árvores no ambiente escolar, bem como a manutenção e revitalização dos espaços verdes da escola, inclusive sendo plantadas pelos alunos mais de 40 mudas de vários tipos de árvores no ano de 2005.

Como a questão é bem prática e da vivência dos alunos (que fizeram uma observação prévia das alturas das árvores da escola), a contextualização e a aplicação da fórmula da altura h em metros em função do tempo t em anos foi bem assimilada pelos educandos que logo perceberam que a altura máxima de cada árvore era doze metros, mesmo quando o tempo t tende para o infinito ($t \to \infty$), evidenciando que o contexto traz mais significação para as novas aprendizagens, de acordo com a definição para o Ensino Médio estabelecida na LDB/96, assim como seu detalhamento e encaminhamento pela Resolução CNE/98, que apontam para uma maior contextualização e interdisciplinaridade na aprendizagem. Vários dos artigos daquela resolução são dedicados a orientar o aprendizado para uma maior contextualização, uma efetiva interdisciplinaridade e uma formação humana mais ampla, não só técnica, já recomendando uma maior relação entre teoria e prática no próprio processo de aprendizado (BRASIL,2000, p 48, volume III).

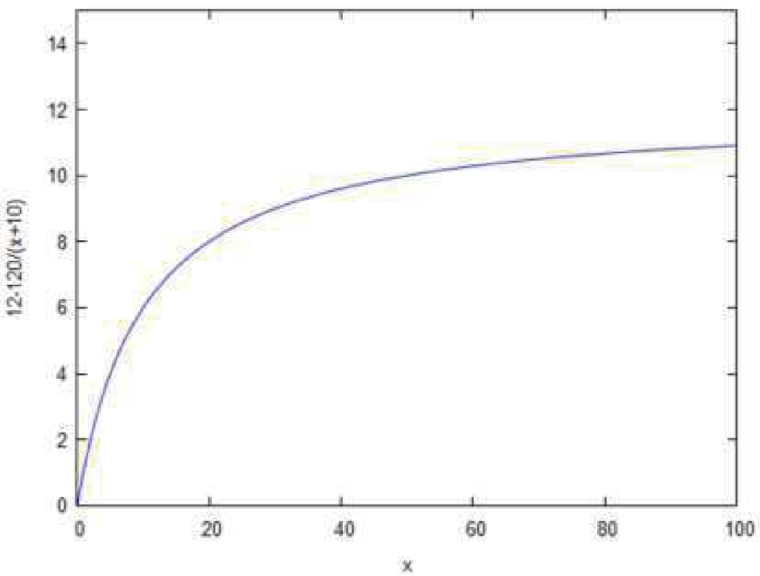
Os alunos nesta questão não demonstraram nenhuma dificuldade em construir o gráfico no *software* WxMAXIMA, colocando a variação do tempo t do ano 2005 ao ano 2020 e a altura h variando de 0 a 15 metros.

A Figura 37 ilustra o gráfico feito pelos alunos no WxMAXIMA e em seguida o seu esboço:

ATIVIDADE 9: Esboço do gráfico da função h(t)= 12-(120/10+t), com o WxMAXIMA.

```
(%i30)  wxplot2d([12-(120)/(10+x)], [x,0,100], [y,0,15])$
```

(%t30)




```
(%i31)  limit([12-(120)/(10+x)], x, inf);
(%o31)  [ 12 ]
```

Figura 37: Atividade 9 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

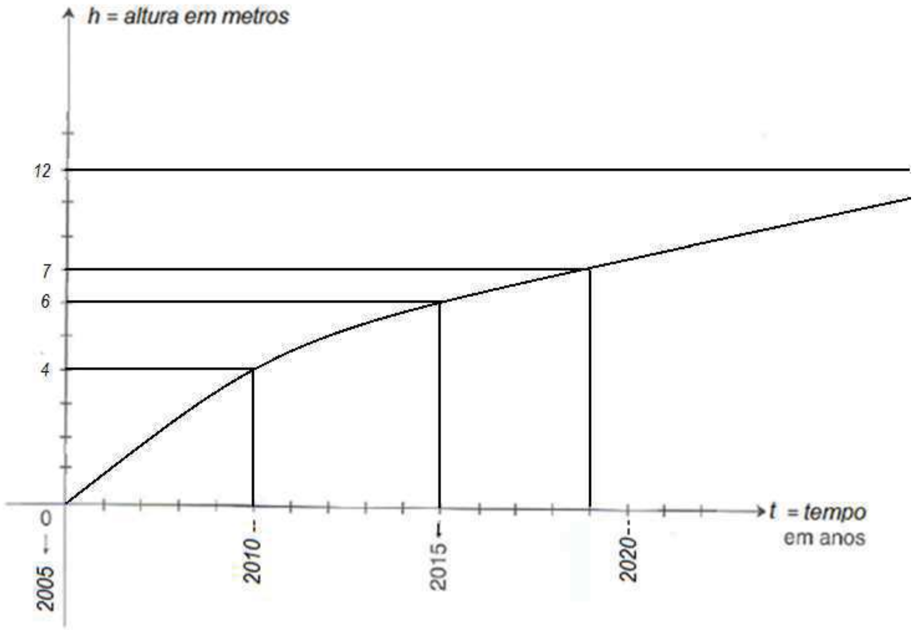


Figura 38: Atividade 9 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

Por último, a Atividade 10 (APÊNDICE A1) buscou o conceito intuitivo de limites por parte dos alunos, tendo os mesmos que completar as lacunas. Nesta questão ficou evidenciada a noção de proximidade e vizinhança de x suficientemente próximo de x_0, ou seja, com x tendendo para x_0, $(x \to x_0)$, $f(x)$ aproximas-se cada vez mais de L, de onde pode-se então escrever:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ .$$

A seguir resolução dessa atividade.

Atividade 10: Completar adequadamente as lacunas com a noção intuitiva de limites.

Seja f uma FUNÇÃO definida em um intervalo aberto em torno de x_0, "Exceto talvez"em x_0. Se $f\ (x)$ fica arbitrariamente próximo a x_0 para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0 (com x TENDENDO para x_0), dizemos que $f\,(x)$ tem limite L quando $x \to x_0$ e escrevemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Isto é, quando x se aproxima de x_0 , $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L ou seja podemos tomar $f(x)$ tão próximo de L quanto desejamos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo a x_0 .

Figura 39: Atividade 10 no *Software* WxMAXIMA.
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador.

4.2 Das Percepções dos Alunos Participantes

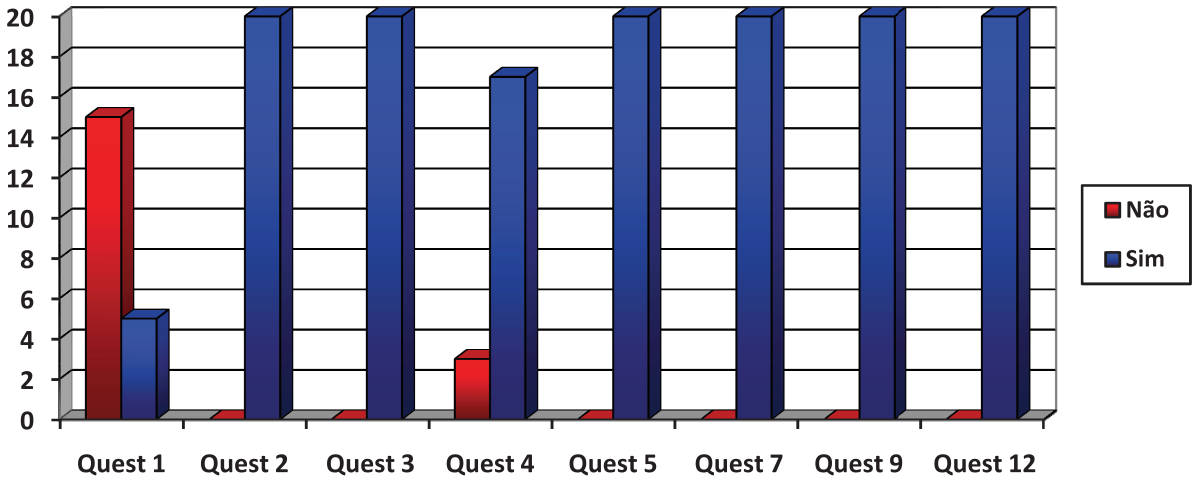
Segundo os questionários respondidos pelos alunos participantes das atividades e também observações colhidas pelo pesquisador através do diário de campo, as respostas apontaram que o estudo do conceito de limites de funções reais foi relevante, uma vez que tal conceito foi relacionado a situações cotidianas evidenciadas na lista da sequência didática contendo dez atividades com situações problemas com nível de dificuldades crescentes, justamente propostas para melhor aproveitamento e compreensão do conteúdo de limites de funções reais.

É importante ressaltar que o questionário aplicado aos participantes dividiu-se em dois itens: o item i, que abrangeu as questões 1 a 8, teve como objetivo verificar a impressão dos alunos em relação à aprendizagem do conceito de limites de funções reais utilizando o *software* WxMAXIMA; e o item ii, que envolveu as questões 9 a 12, visou obter uma análise da percepção dos participantes acerca da execução do projeto de estudo no Laboratório de Informática.

Em relação aos dados levantados no roteiro do questionário respondido pelos alunos, é possível apresentar o Gráfico 1 a seguir com as respostas objetivas Sim ou Não às questões objetivas 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 e 12. As demais questões são comentadas na sequência.

Posicionamento dos Alunos quanto as Atividades Desenvolvidas com o *Software* WxMAXIMA.

Gráfico 1: Posicionamento dos Alunos quanto as Atividades Desenvolvidas com o *Software* WxMAXIMA.



Fonte: Elaborado pelo Autor

A Questão 01 (APÊNDICE A2) apresentada no questionário buscou saber se o conteúdo do livro didático Matemática Contexto & Aplicações em três volumes, de autoria de Luiz Roberto Dante, editora Ática, 2010, fornecido pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) utilizado pelos alunos, aborda o conceito de limite de funções reais. Constatou-se que 75% dos 20 alunos responderam com exatidão que tal conteúdo não faz parte do livro didático adotado. No entanto, os demais responderam “sim” ao questionamento, pois lembraram que já tinham estudado no livro o conceito de funções, não se atentando que a pergunta era especificamente para “limites de funções reais”.

Após responderem a primeira pergunta do QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES (APÊNDICE A2), foi apresentado para os alunos o livro de autoria de Manoel Paiva, Matemática Moderna Plus , 2010, onde os mesmos puderam constatar o conteúdo de limites de funções reais conforme mostra a Figura 40, e foi registrada no diário de campo do pesquisador a surpresa dos alunos quanto a constatação do fato de haver o conteúdo de limites de funções reais em outros livros do Ensino Médio.

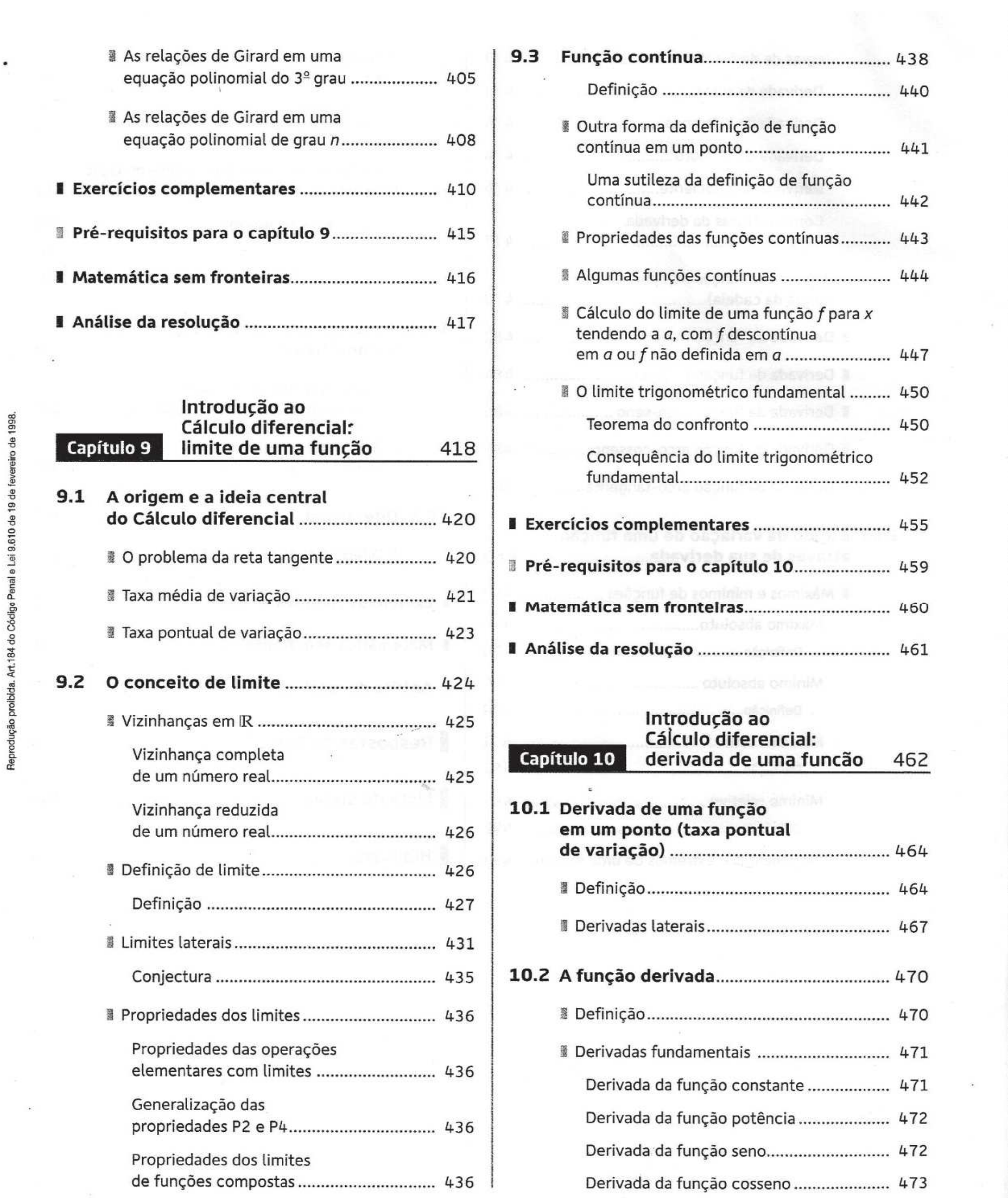


Figura 40: Parte do Sumário do Livro Matemática Moderna Plus Paiva, de Autoria de Manuel Paiva, Editora Moderna.

Fonte: Extraído de Paiva (2010).

Ao serem interrogados a respeito da aplicabilidade do conteúdo de limites de funções reais (Questão 02 do item i , APÊNDICE A2) para conclusão do Ensino Médio, foi possível constatar a importância desse estudo para os alunos que estão concluindo mais uma etapa em sua carreira estudantil, uma vez que 100% dos participantes responderam "sim", conforme aponta o Gráfico 1.

A Questão 03 do item i (APÊNDICE A2) buscou o posicionamento dos alunos quanto à importância desse estudo para aprendizagem de interpretação gráfica de funções reais. O Gráfico 1 comprova que 100% dos participantes consideram importante esse estudo para todos que desejam enriquecer seus conhecimentos na interpretação de gráficos relacionados à funções reais.

Em relação à aplicação do assunto limite de funções reais em outros conteúdos estudados no Ensino Médio (questão 04 do item i, APÊNDICE A2), foi possível identificar que 85% dos participantes são a favor dessa aplicabilidade, conforme mostra o Gráfico 1.

Também, pelo Gráfico 1, ficou esclarecido que o uso de novas tecnologias promove o interesse do jovem no estudo de Matemática (questão 05 do item i, APÊNDICE A2), uma que vez que 100% consideram o uso dessas tecnologias um fator motivacional para se estudar Ciências Exatas.

Foi possível verificar que o estudo em Laboratório de Informática, envolvendo outros alunos que compartilham do mesmo interesse, motiva os estudantes (questão 07 do item i, APÊNDICE A2), uma vez que 100% se sentiram motivados ao desenvolver as atividades apontadas nesse projeto, conforme mostra o Gráfico 1.

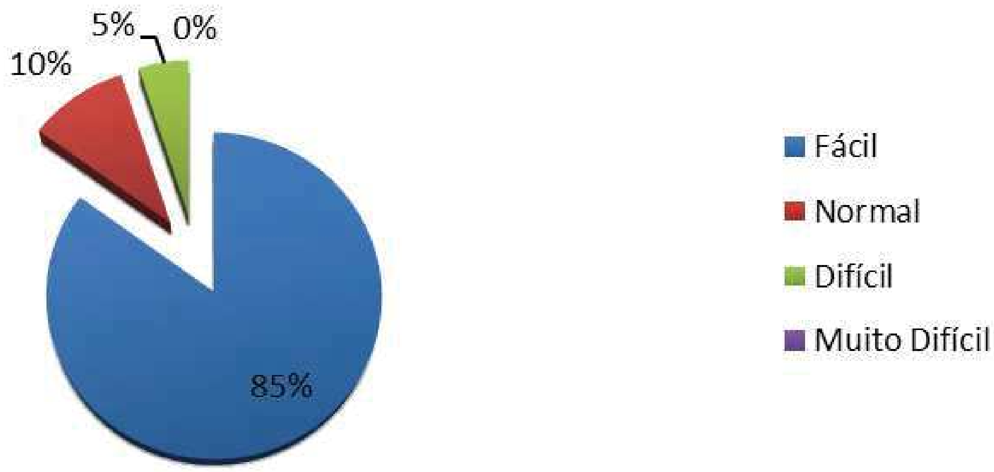
Foi possível comprovar o interesse de aplicação desse projeto a todos os alunos presentes no projeto (questão 09 do item i, APÊNDICE A2), uma vez que 100% consideram importante esse envolvimento, conforme mostra Gráfico 1.

Ficou evidenciado (questão 12, do item i, APÊNDICE A2) que 100% dos participantes responderam "sim" sobre a possibilidade de formação de grupos de monitoria para outros alunos também vivenciarem a experiência de aprendizagem no Laboratório de Informática, demonstrando assim que os alunos aprovaram essa ideia da monitoria para estudos de limites de funções reais no Laboratório de Informática da escola.

Em relação às impressões dos alunos quanto ao uso do *software* WxMAXIMA (questão 06 do item i, APÊNDICE A2), foi possível constatar que se trata de um recurso computacional acessível, uma vez que 85% dos participantes o consideraram de fácil adaptação, como mostra o Gráfico 2.

Adaptação ao *Software* WxMAXIMA

Gráfico 2: Adaptação dos Alunos quanto ao Uso do WxMAXIMA.



Fonte: Elaborado pelo Autor dessa Pesquisa com Base em Respostas dos Alunos.

Ao abordar a participação dos alunos no projeto (questão 08 do item 1, APÊNDICE A2), dentre as respostas apresentadas pelos participantes (os 20 estudantes foram identificados com letras de A ao U), temos:

- Eu gostei de participar do projeto de pesquisa (Estudantes A e T);
- Gostei de programar e aprender a usar o *software* WxMAXIMA (Estudante B);
- Foi muito interessante construir gráficos usando um *software* (Estudante C);
- Resolvi todos os exercícios com facilidade (Estudantes D e U);
- Foi uma participação agradável muito produtiva (Estudantes E e F);
- Foi ótimo trabalhar junto com meus colegas construindo gráficos e resolvendo limites. (Estudantes G e H);
- De grande valia para o aprendizado (Estudantes I e J);
- Gostei de aprender coisas novas (Estudantes K e L);
- Construção de gráficos no computador (Estudantes N e M);

- Aprendi um novo programa (Estudantes O, P e Q).

Ao responderem a questão 08 os alunos evidenciaram aspectos subjetivos de sua participação no estudo demonstrando satisfação quanto ao novo aprendizado.

A questão 10 do item ii (APÊNDICE A2) buscou saber quais as dificuldades encontradas pelos alunos durante a execução do projeto de estudo. As respostas encontradas foram:

- Para transcrever e digitar as funções e expressões algébricas (Estudantes A, B, D, F, G, I, J, K, M, N, P, Q, S, T e U);
- Falta de um manual adequado para utilização do *software* WxMaxima (Estudantes A, B, D, F, G, I, J, K, M, N, P, Q, S, T e U);
- Falta de computadores mais atualizados e melhores equipados (Estudantes A, C, E, H, L, O e P);
- Falta de memória, pois demorava a responder aos comandos (Estudantes A, B, C, F, G, H, L, O, P e U).

É plenamente compreensível que os alunos apontaram tais dificuldades, pois esses aspectos são mesmos esperados quando se encara um desafio de aprender a utilização de um *software* novo, com comandos específicos para construção de gráficos e cálculo de limites de funções reais. De acordo com as respostas apresentadas pelos alunos, ao serem questionados sobre as principais dificuldades encontradas durante a execução do projeto de estudo (questão 10 do item ii, APÊNDICE A2), verifica-se: ausência de computadores mais atualizados e de um manual contendo as instruções quanto ao uso do *software* WxMAXIMA; dificuldades em transcrever as funções e expressões algébricas. Nesse contexto, é importante que a escola providencie novos computadores, elabore um manual de orientação para os seus usuários, a fim de facilitar o desenvolvimento de novas atividades, que envolvam o uso do *software* WxMAXIMA.

A questão 11 do item ii (APÊNDICE A2) ofereceu a oportunidade para que aluno apontasse sugestões de iniciativas dos próprios estundantes para implantação de um projeto como esse na escola. As respostas encontradas foram:

- Formação de grupos de monitoria (Estudantes A, B, C, E, F, H, N, O, P, R , T e U);
- Exposição do projeto no Laboratório de Informática divulgando o *software* WxMAXIMA entre os demais colegas (Estudantes I, L, K e M);

- Apresentar e compartilhar as atividades com o WxMAXIMA para os colegas de turma (Estudantes D, G, J, Q e S);
- Incentivar a participação de grupos de estudos no reforço de Matemática no turno contrário, utilizando o WxMAXIMA (Estudantes A, O, P e U);
- Solicitar ao professor de Matemática da turma pra apresentar o *software* WxMAXIMA nas aulas de Matemática (Estudantes I, L e M).

De acordo com as respostas apresentadas pelos alunos, quando solicitados a apresentar sugestões para implantação de um projeto como esse na escola (questão 11 do item ii, APÊNDICE A2), foi possível verificar a necessidade de formação de grupos de monitoria, divulgação do projeto, apresentação do WxMAXIMA aos demais colegas, como estratégia para motivá-los a participar do projeto. Os resultados obtidos na questão 11 apontaram que, segundo os participantes da pesquisa, é interessante montar grupos de monitoria no Laboratório de Informática (12 Estudantes), fazer exposição do projeto com oficinas no Laboratório de Informática (4 Estudantes), socializar a experiência das atividades com os colegas (5 Estudantes), incentivar a participação dos colegas no reforço de Matemática (4 Estudantes) e solicitar ao professor de Matemática a utilização do WxMAXIMA nas aulas (3 Estudantes).

Diante do exposto, conclui-se que os alunos participaram de todas as atividades com o desejo de aprender mais, tanto o conteúdo de limites de funções reais com variável real quanto também a utilização do *software* WxMAXIMA para a realização das atividades, principalmente em relação a confecção dos esboços dos gráficos, algo percebido e registrado no diário de campo do professor pesquisador.

No próximo capítulo, temos as Considerações Finais a respeito do que foi desenvolvido na pesquisa de estudo de caso em questão.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento desta pesquisa foi possível evidenciar que o estudo de limites de funções reais é um conteúdo fundamental para o entendimento de várias questões ainda abordadas no Ensino Médio. Neste estudo de caso realizado com os alunos do CEMTN foi evidenciado um grande interesse pelos alunos participantes, uma vez que todos foram voluntários e iniciaram e completaram o estudo com grande êxito.

Com o intuito de incentivar o estudo de conceitos de limites de funções reais, com o auxílio de recursos computacionais, foi verificada a eficiência do uso de sequência didática em ambiente digital através da execução de lista de atividades, bem como, a verificação das percepções dos alunos por meio das respostas dadas no questionário.

Sem dúvida alguma, o atrativo de se aprender um novo *software* e utilizar os recursos computacionais do laboratório foi fundamental para implementação das atividades. No entanto, o comprometimento dos educandos em parceria firmada com o autor da pesquisa foi outro fator fundamental, pois os alunos demonstraram por livre e espontânea vontade, desejo de participar das atividades de limites de funções reais, procurando melhor preparo para o ensino superior na área de exatas.

A experiência adquirida no ambiente escolar do CEMTN, a colaboração da direção, dos professores, de funcionários e dos alunos são os principais fatores que contribuíram para a execução e a aceitação do projeto perante a comunidade escolar.

No Laboratório de Informática, enquanto desenvolviam as atividades propostas no *software* WxMAXIMA, foi possível observar que os alunos apresentavam dificuldades na construção e leitura de gráficos de funções e nos conteúdos de Matemática trabalhados em aulas expositivas. Porém, ao utilizarem o computador como ferramenta para o estudo de funções, esses alunos conseguiram atingir os objetivos das atividades propostas com certa facilidade. Esses resultados comprovam que as atividades desenvolvidas por eles ao fim de cada ciclo tornaram-se mais significativas, uma vez que os alunos foram compreendendo melhor o conteúdo de limites de funções reais e conquistando uma melhor adaptação ao *software* WxMAXIMA.

Outro aspecto importante é que o pesquisador, mesmo não sendo o professor titular regente dos alunos voluntários, foi capaz de compreender algumas das dificuldades dos educandos, evidenciadas durante a aplicação do estudo de caso, e pôde auxiliá-los durante as atividades desenvolvidas, assim garantindo a participação e o aprendizado de todos. Fica evidente também que, em momento algum, o *software* substitui todo o conhecimento adquirido em sala, muito pelo contrário, a utilização do *WxMAXIMA* depende da condição de que o usuário já esteja familiarizado e apto com o conteúdo de funções reais, para poder ampliá-lo e aplicá-lo em outros contextos de ensino e aprendizagens. Foi possível constatar que o WxMAXIMA aparece como uma ferramenta de auxílio didático a fim de engrandecer o processo de ensino e aprendizagem, diversificando as abordagens nos estudos de limites de funções reais.

Desta forma, concordando com Giraldo (2012, p. 209), "a interpretação de resultados produzidos por ferramentas computacionais simbólicas, mesmo nos sistemas de computação algébrica mais poderosos, como por exemplo o *software* WxMAXIMA, não dispensa ou substitui o conhecimento dos conceitos matemáticos envolvidos.". Em particular, fica destacado que os recursos computacionais desempenham um papel efetivo para os objetivos das atividades, mas nem por isso são isentas de limitações, sendo a interação professor-aluno algo realmente imprescindível em todo o processo de ensino e aprendizagem deste trabalho, sendo evidenciado a participação proativa de cada educando em todo o processo para alcançarmos os objetivos desse estudo de caso.

Assim sendo, corroborando com o objetivo geral deste estudo de caso, verifica-se como contribuição aos alunos participantes que os mesmos entenderam o conceito intuitivo de limites e também tiveram ganho na construção e análise de gráficos de funções reais com variável real, sendo que a aplicação do *software* livre WxMAXIMA despertou a curiosidade dos alunos e estimulou a participação efetiva de todos os participantes no estudo de limites de funções reais, através de um estudo no Laboratório de Informática da escola, pois nenhum aluno desistiu das atividades desenvolvidas e todos se dedicaram até o fim.

Como contribuição para professor pesquisador, fica evidenciado que ao promover novas aprendizagens com os alunos, o próprio professor é desafiado a buscar novas aprendizagens em TDIC (Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação), tendo a possibilidade de ser criado com as atividades desenvolvidas minicursos e oficinas de capacitação e compatilhamento de experiências para outros professores na Escola de Aperfeiçoamento dos Profissionais em Educação (EAPE) , no âmbito da Secretaria de Educação do Distrito Federal.

Referências

ÁVILA, Geraldo. (1981). Cálculo 1: funções de uma variável. LTC.

BARSA, E. E. (1998). Enciclopédia britânica do Brasil publica ıes ltda. São Paulo, 70.

BICUDO, M. and GARNICA, A. (2003). Mal uso a da matemática e sua constituição multifacetada: apontamentos sobre algumas de suas questões geradoras. Filosofia da educação matemática: concepções e movimento. Brasíia: Plano Editora.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. (2012). História da Matemática. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Bucher.

BRASIL (2000, p. 6, Volume I). http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf

BRASIL (2000, p. 42, Volume III). http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf

CARAÇA a, B. d. J. (2000a). Conceitos fundamentais da matemática. Gradiva.

COURANT, R. and ROBBINS, H. (2000). O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Ciência Moderna.

COURANT, R. and ROBBINS, H. (2002). Que son las matemáticas?: conceptos y métodos fundamentales. FCE.

COURANT, R., ROBBINS, H., et al. (1941). What is mathematics?

DANTE, L. R. (2010). Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

DO BRASIL, E. B. (1998). Nova enciclopédia barsa. Micropédia, Rio de Janeiro-São Paulo, 2.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l apprentissage de la geometrie: developpement de la visualisation, diferenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 10, pages 5 53.

EVES, H. W. (1995). Introdução história da matemática. Unicamp.

FREIRE, Paulo. (1972). Education: domestication or liberation? Obra de Paulo Freire; Série Artigos.

FROTA, M. C. R. (2001). Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de cálculo. in: Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC.

GIRALDO, Victor (2012). Recursos computacionais no ensino de matemática. Victor Giraldo, Paulo Caetano e Francisco Mattos. Rio de Janeiro: SBM, (COLEÇÃO PROFMAT)

LAUDARES, J. B. (2004). A matemática e a estatística nos cursos de graduação da Área tecnológica e gerencial: um estudo de caso dos cursos da puc minas. in: Cury, helena noronha. Disciplinas matemáticas em cursos superiores.

LEITHOLD, Louis. and FAGOAGA, J. C. V. (1998). El cálculo, volume 7. Oxford University Press.HARBRA

MUNIZ NETO, A. C. M. and CAMINHA, A. (2015). Fundamentos de cálculo. Rio de Janeiro: SBM, (COLEÇÃO PROFMAT)

OLIVEIRA, H., BROCARDO, J., and DA PONTE, J. P. (2016). Investigações matemáticas na sala de aula. Autêntica.

PAIS, L. C. (2016). Didática da Matemática: uma análise da insuficiência francesa. Autêntica.

PAIVA, Manoel. (2010). Matemática Moderna Plus. MODERNA

PINTO, M. M. F. (2001). Discutindo a transição dos cálculos para a análise real. in: Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cáculo. Belo Horizonte: FUMARC.

ROSSO JR, A. C. and FURTADO, P. (2011). Matemática uma ciência para a vida.HARBRA

VASQUEZ, P. S., and REY, G., and BOUBÉE, C. (2008). El concepto de funci n a través de la historia. Junta de Gobierno de la FISEM, p141.

SANTOS, Bruna. (2009, p 11):
http://maxima.sourceforge.net/docs/tutorial/pt/Maxima_Bruna_Santos_2009.pdf.

SWOKOWSKI, E. W., ABREU, J. L., OLIVERO, M., et al. (1989). Calculus with analytic geometry. Cálculo com geometria analítica.

VAZ, Ieda do Carmo. (2010, p 34): http://livros01.livrosgratis.com.br/cp149993.pd

APÊNDICE A1: ATIVIDADES APLICADAS PARA DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

Introdução Limites

Um dos grandes problemas do mundo é o desmatamento, com o aumento da população e a tendência crescente da urbanização, grandes regiões, antes intocadas, passaram a dar lugar a cidades ou plantações.

Como consequência, são eliminadas habitats de diversas espécies de animais e de plantas, acarretando a diminuição de indivíduos de uma espécie, podendo levar até mesmo à sua extinção.

Apesar disso, nem tudo esta perdido, pois cresce a consciência de que é preciso cuidar de nosso planeta e deixa-lo habitável para as próximas gerações.

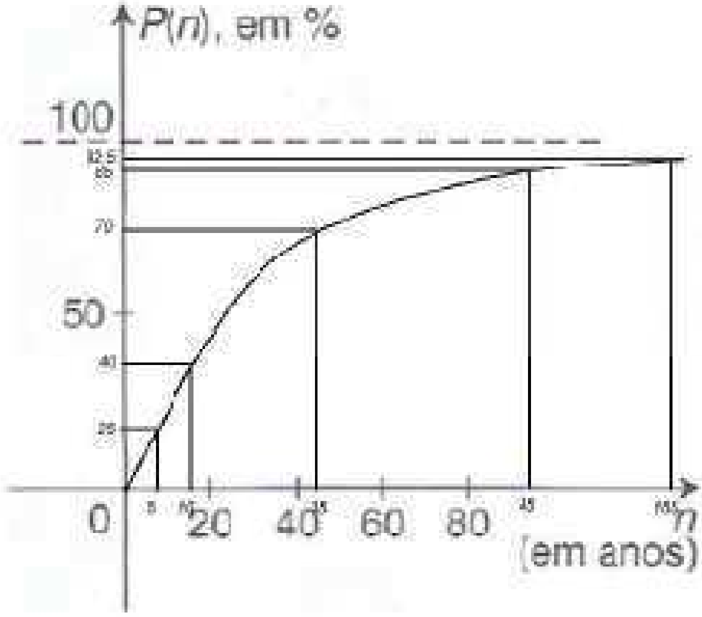
Uma das medidas que podemos tomar, além de preservar o que já temos é reflorestar áreas desmatadas. Com tudo, muitas vezes é quase impossível obter o reflorestamento completo. Por exemplo, para certa região de 10.000 hectares, que foi devastada por uma queimada, a relação que descreve a porcentagem de recuperação da floresta original após n anos desde o inicio do processo é:

$$P(n) = \frac{100n}{n+15}$$

Tabelando alguns valores, temos:

Após n anos	0	5	10	35	85	185	...	∞
P (n) em %	**0**	**25**	**40**	**70**	**85**	**92,5**	...	∞ **100%**

Construa o gráfico a partir dos dados da tabela:



Observe que a porcentagem da área que foi restaurada à sua condição original se aproxima de 100%, mas precisaríamos de um tempo absurdamente grande para dizermos que aproximadamente 100% da região foi reflorestada.

Podemos representar essa situação matematicamente por:

$$\lim_{n \to +\infty} P(n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{100n}{n+15} = 100$$

(Lê-se "O limite de $P(n)$ quando n tende o mais infinito é 100").

LIMITES DE FUNÇÕES REAIS

1- Noção Intuitiva de Limite

A noção intuitiva de limite está ligada a várias ideias, dentre elas a de tendência. Dizer que x tende a um determinado valor p, do domínio de uma função, significa que os valores de x se aproximam de p.

Dizer que o limite de uma função f, quando x tende a p (representa-se $x \to p$) é igual a L, significa que, quando os valores de x se aproximam de p, os valores $f(x)$ da função aproximam-se de L. Simbolicamente, escreve-se:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Vejamos os seguintes exemplos:

Atividade 1 Usando a noção intuitiva, vamos identificar o limite, quando x tende a 2 da função $f(x) = -1$. De outro modo, vamos calcular:

$$\lim_{x \to 2}(x-1)$$

Vamos construir tabelas para obtermos o valor do limite:

x	$f(x) = x - 1$	$f(x)$
15	$f(x) = 1{,}5 - 1$	0,5
18	$f(x) = 1{,}8 - 1$	0,8
19	$f(x) = 1{,}9 - 1$	0,9
199	$f(x) = 1{,}99 - 1$	0,9

x	$f(x) = x - 1$	$f(x)$
2,5	$f(x) = 2{,}5 - 1$	1,5
2,2	$f(x) = 2{,}2 - 1$	1,2
201	$f(x) = 2{,}01 - 1$	1,01
2001	$f(x) = 2{,}001 - 1$	1,001

Construa o gráfico usando o *Software* WxMAXIMA e esboce o desenho abaixo:

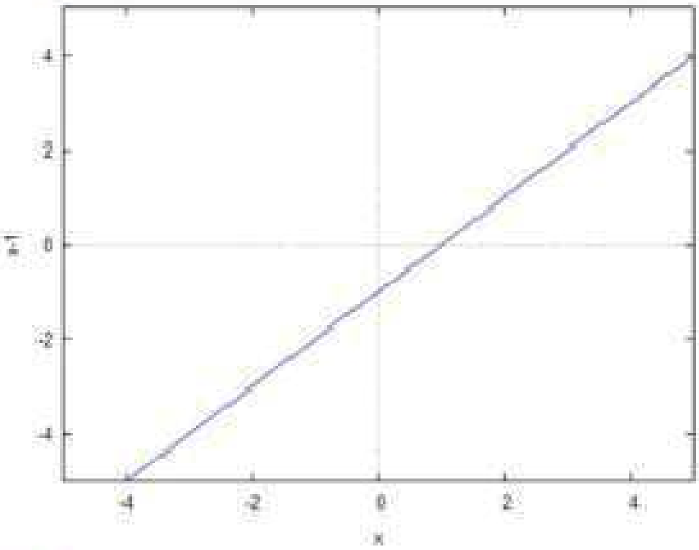


Grafico de f(x) = x−1

Gráfico de $f(x) = x - 1$

Observe que, quando x tende a 2,tanto por valores menores e quanto por valores maiores que 2, $f(x)$ aproxima-se de 1, portanto,

$$\lim_{x \to 2} (x - 1) = 1$$

É importante observar que $f(2)$= __1__, ou seja, $\lim_{x \to 2} (x - 1) = f(2)$.

Atividade 2 - Calcule o $\lim_{x \to 1} (x^2 + 1)$, usando a noção intuitiva.

Construindo as tabelas para os valores da função $f(x) = x^2 + 1$, temos:

x	$f(x) = x^2 + 1$	$f(x)$
0,7	$f(x) = 0,7^2 + 1$	1,49
0,8	$f(x) = 0,8^2 + 1$	1,64
0,9	$f(x) = 0,9^2 + 1$	1,81
0,99	$f(x) = 0,99^2 + 1$	1,98
	$f(1) = 1^2 + 1$	2

x	$f(x) = x^2 + 1$	$f(x)$
1,2	$f(x) = (1,2)^2 + 1$	2,44
1,1	$f(x) = 1,1^2 + 1$	2,21
1,01	$f(x) = 1,01^2 + 1$	2,02
1,001	$f(x) = 1,001^2 + 1$	2,002
	$f(x) = 1^2 + 1$	2

Construa o gráfico usando o *Software* WxMAXIMA e esboce o desenho abaixo:

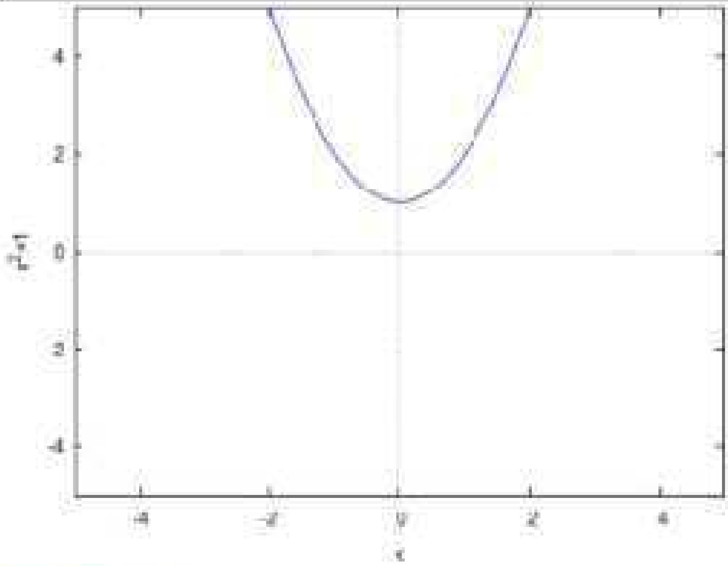


Grafico de $f(x) = x^2+1$

Gráfico de $f(x) = x^2 + 1$

Atividade 3 - Calcule o valor do Limite: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

Solução:

Analisando a função $f(x) = \frac{1}{2}$, temos que, como o numerador da fração é constante, quanto maior for o denominador dela, mais próximo de zero estará o valor da função, ou seja, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \underline{\ 0\ }$.

Construa o gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}$, usando o *Software* WxMAXIMA e esboce o desenho abaixo:

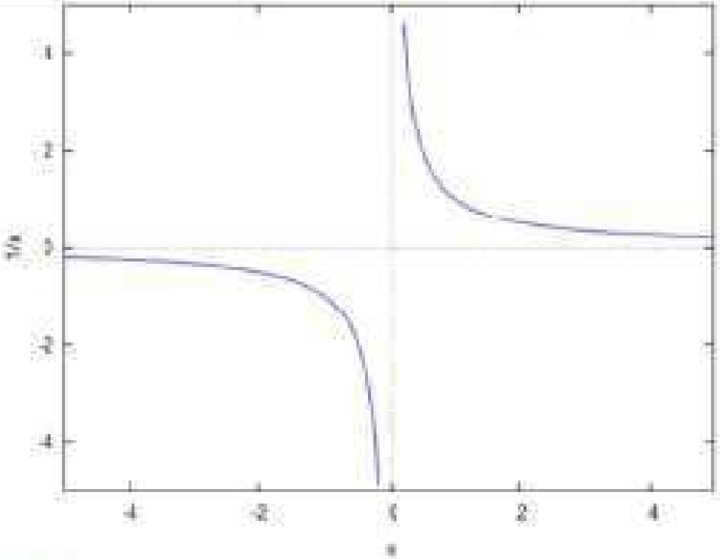


Grafico de f(x) = 1/x

Gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}$

Gráfico Elaborado Manualmente pelo Aluno.

UNIVERSIDAIDE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

PROFMAT

UFG

Atividade 3 – Calcule o valor do Limite: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}$

Solução:

Analisando a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, temos que, como o numerador da fração é constante, quanto maior for o denominador dela, mais próximo de zero estará o valor da função, ou seja, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \underline{\ 0\ }$.

Construa o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ usando o Software WxMaxima e esboce o desenho abaixo:

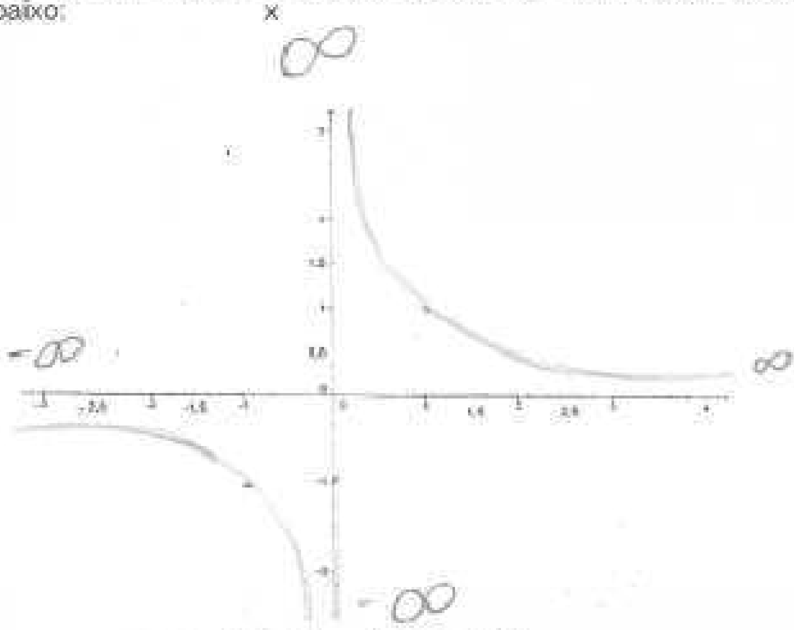


Figura 3: Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Atividade 4 - Determine o valor do Limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$$

Solução:

Neste caso, devemos colocar em evidência a maior potência de x tanto no numerador como no denominador:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\,(1+x^{-1}+x^{-5})}{x^5(2+x^{-4}+x^{-5})}=\frac{1}{2}$$

Deste modo, os termos do tipo $\frac{1}{(x)^n}\to 0$ quando $x\to+\infty$, assim o limite da função $f\ (x)=\frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$ será igual $\frac{1}{2}$

Calcule o limite de:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$$

Usando o *Software* WxMáxima, quando $x \to \infty$ e confira com sua resposta anterior.

Construa o gráfico usando o *Software* WxMAXIMA e esboce o desenho abaixo:

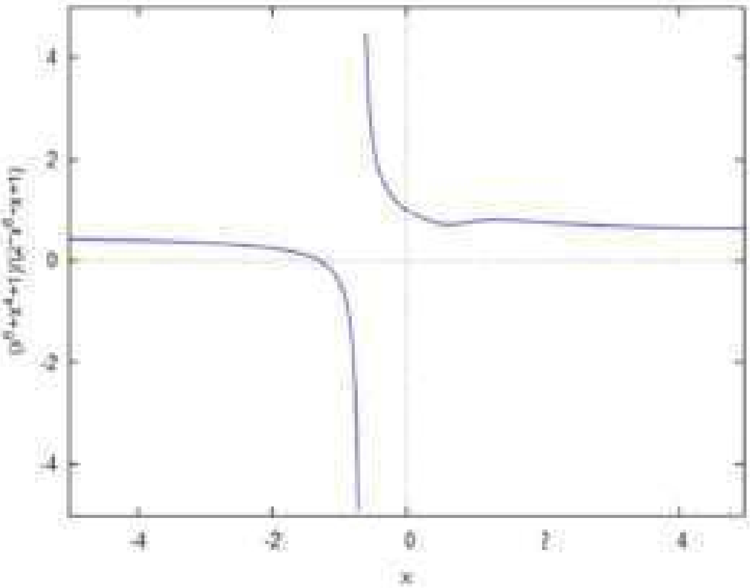


grafico de f(x) (x^5+x^4+1)/(2 x^5+x+1) = 1/2

Atividade 5 - Considere as funções f_1, f_2 : Reais não-nulos → Reais, definidas por $f_1(x) = 1/x$ e $f_2(x) = 1/x^2$.

Use o WxMAXIMA para calcular os limites das funções f_1, f_2 quando $x \to 0$, comparando os resultados dados pelo software.

Calcule também os limites laterais de f_1, f_2 quando $x \to 0-$ $x \to 0+$ para as duas funções. Como você interpreta esses resultados apresentados pelo software?

Na Atividade 5, todos os limites laterais são INFINITOS. Os limites laterais de f_1 possuem sinais OPOSTOS, enquanto os de f_2 têm sinais IGUAIS.

Assim, temos que o limite de f_2 é igual ∞ que corresponde à resposta dada pelo WxMAXIMA. Porém, não podemos representar o limite de f_1 pelo símbolo de infinito. Por isso, o WxMAXIMA retorna a palavra *infinity* significando apenas que os limites laterais são infinitos.

Gráfico Elaborado Manualmente pelo Aluno.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

PROFMAT

UFG

Construa os gráficos das funções acima usando o Software WxMaxima e esboce o desenho abaixo:

Gráfico de: $f1\ (x) = 1/x$

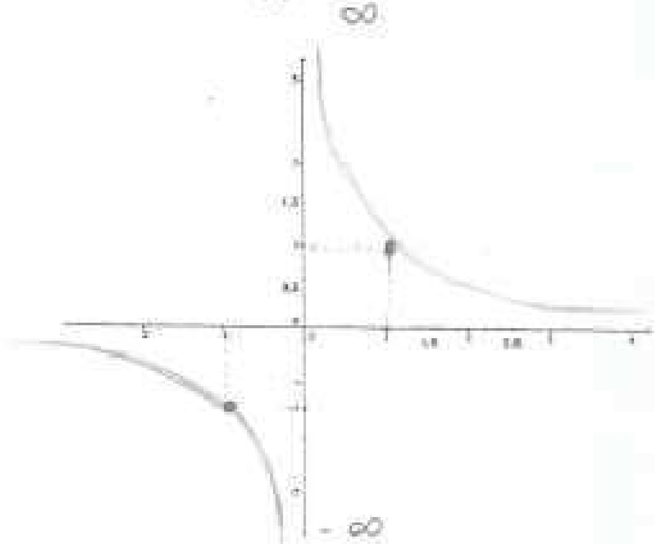
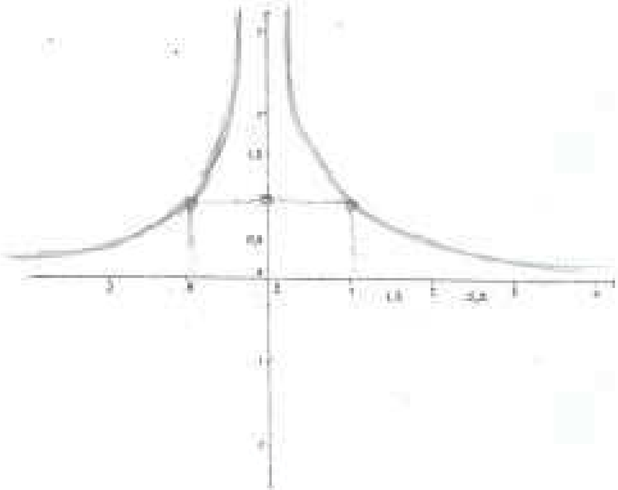


Gráfico de: $f2\ (x) = 1/x^2$



Construa os gráficos das funções acima usando o *Software* WxMAXIMA e esboce o desenho abaixo:

Gráfico de: $f1\,(x) = 1/x$

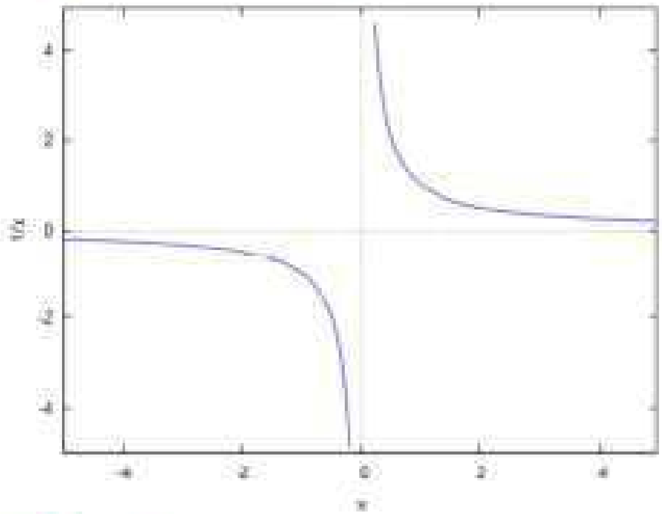


Grafico de f(x) = 1/x

Gráfico de: $f2(x) = 1/x^2$

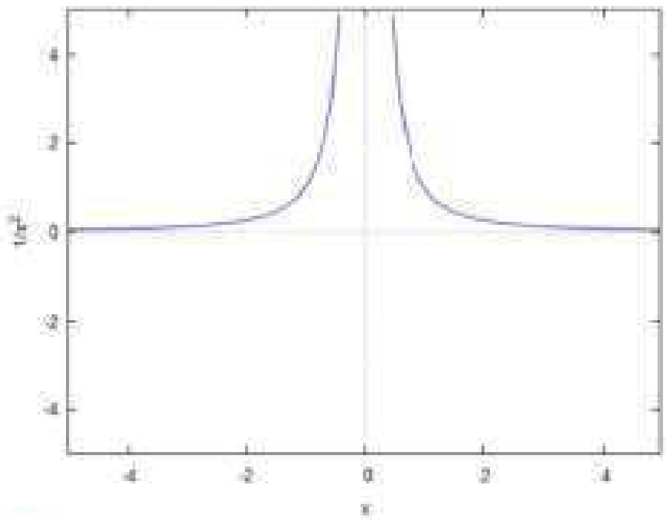


Grafico de f2(x) = 1/x^2

Atividade 6 - Considere as funções $g_1(x)$ e $g_2(x) \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+$ definidas por $g_1(x) = x/|x|$ e $g_2(x) = sen(1/x)$. Use o WxMAXIMA para calcular limite de $g_1(x)$ e limite de $g_2(x)$ quando $x \to 0$.

Compare os resultados dados pelo WxMAXIMA.

Calcule os limites laterais de $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Como você interpreta esses resultados?

Na Atividade 6, ambos os limites propostos SÃO INDEFINIDOS, porém com comportamentos distintos. No caso da função $g_1(x)$, o LIMITE não existe porque os limites laterais existem, mas são OPOSTOS. Porem, no caso de $g2$ nem mesmo os limites LATERAIS existem. Para apontar essa diferença de comportamento, o WxMAXIMA retorna os termos: und de *undefined* ou indefindo, no caso em que o limite global NÃO EXISTENTES porque os limites laterais existem, mas são OPOSTOS; e o termo ind no caso em que o limite nao existe por outros motivos.

Construa os gráficos das funções acima usando o *Software* WxMAXIMA e esboce os desenhos abaixo:

Gráfico de: $g_1(x) = x/|x|$

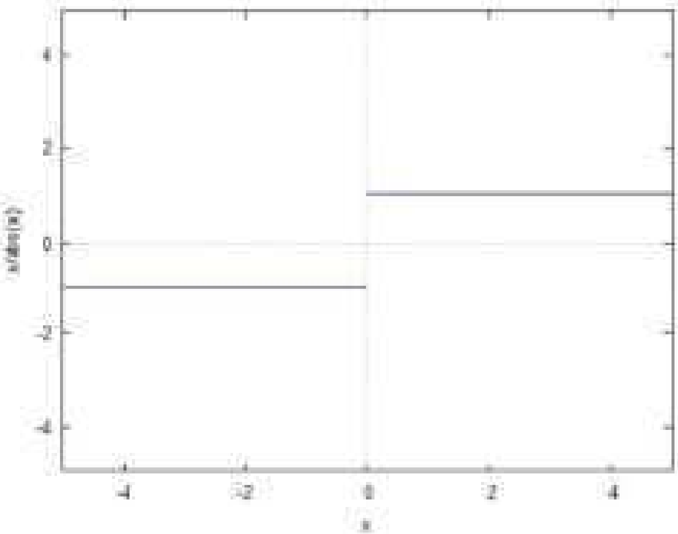


Grafico de g1 (x) = x / | x |

Gráfico de: $g_2(x) = sen(1/x)$

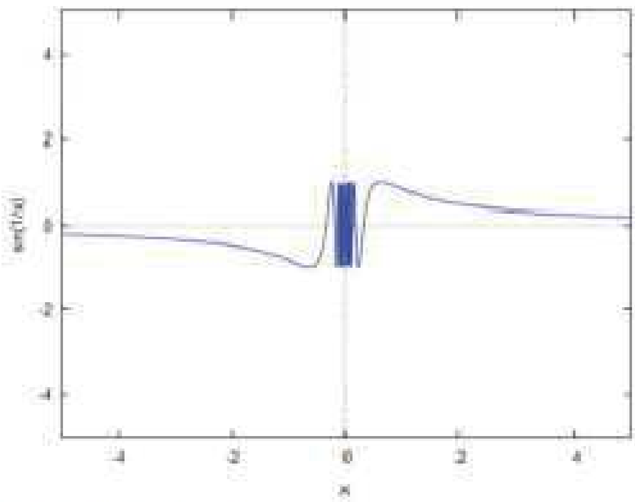


Grafico de g2 (x) = sin (1 / x)

Atividade 7 – Estude a função $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$.

Construa o gráfico da função acima usando o *Software* WxMAXIMA e esboce o desenho abaixo:

Gráfico de: $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$.

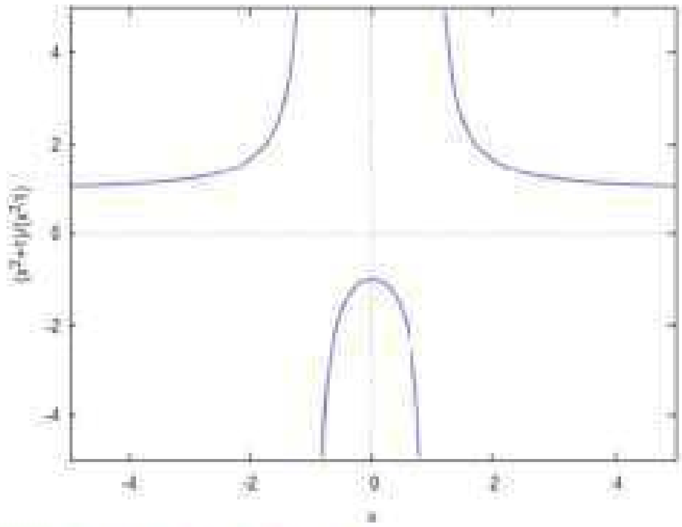


Grafico de f (x) = (x^2 + 1) / (x^2 − 1)

Utilizando o *Software* WxMAXIMA, calcule os limites da função $f(x)$ dada, quando: (visualize esses limites no gráfico).

A) $x \to -1$ $\boldsymbol{lim f(x) = infinity}$

B) $x \to 0$ $\boldsymbol{lim\, f(x) = -1}$

C) $x \to 1$ $\boldsymbol{lim\, f(x) = infinity}$

D) $x \to \infty$ $\boldsymbol{lim\, f(x) = 1}$

E) $x \to -\infty$ $\boldsymbol{lim\, f(x) = 1}$

Gráfico Elaborado Manualmente pelo Aluno.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

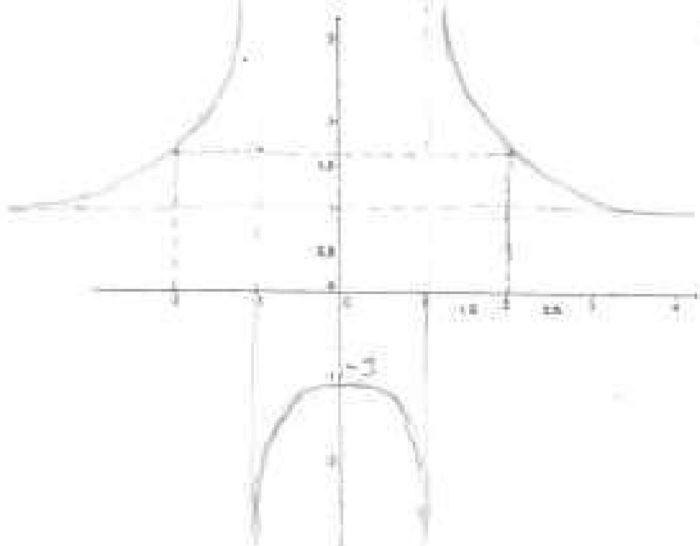
PROFMAT

UFG

Atividade 7 – Estude a função $f(x) = (x^2 + 1) / (x^2 - 1)$

Construa o gráfico da função acima usando o Software WxMaxima e esboce o desenho abaixo:

Gráfico de: $f(x) = x^2 + 1 / x^2 - 1$.



Utilizando o software WxMaxima, calcule os limites da função f (x) dada, quando: (visualize esses limites no gráfico).

A) $x \to -1$
B) $x \to 0$
C) $x \to 1$
D) $x \to \infty$
E) $x \to -\infty$

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ INFINITY

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ INFINITY

$\lim_{x \to 0} f(x) = -1$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

Atividade 8 - Problema sobre crescimento populacional

Pesquisadores estudando o crescimento populacional de uma pequena cidade verificaram que a população no ano 2000 era de 10 mil habitantes e se manteve estável ate o ano 2004, quando foi descoberta uma grande quantidade de petróleo na cidade. Com isso houve grande migração de pessoas para lá, aumentando a sua população sensivelmente.

Estudando o fenômeno, esses pesquisadores descobriram que a partir de 2004 a evolução populacional da cidade pode ser descrita, aproximadamente, por uma função dada por:

$$h(x)=\frac{x^4-12x^3+15x^2-48x+44}{2x^2-24x+22}$$

Em que $h(x)$ é o numero de habitante (em milhares de pessoas) e x é o intervalo de tempo (em anos) que excede 2000, e que essa função dá uma boa estimativa da população dessa cidade até 2015.

Com base nessas informações, esboce um gráfico que mostre o que ocorre com a população dessa cidade no periodo de 2000 a 2015 e verifique o que acontece com o numero de habitante em 2011.

***Período em que a população se manteve estável em 10 mil habitantes.

Ano	*2000*	*2001*	*2002*	*2003*	*2004*
x	0	1	2	3	4

***Período em que a população é descrita pela função h.

Ano	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
x	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Para descrever o crescimento populacional da cidade nesse período, precisamos estudar o comportamento do gráfico em duas etapas: de 2000 a 2004 e de 2004 a 2015.

Como de 2000 a 2004 sabemos que o numero de habitantes se manteve em 10 mil, falta apenas conhecer a parte do gráfico da função h que corresponde ao período de 2004 a 2015.

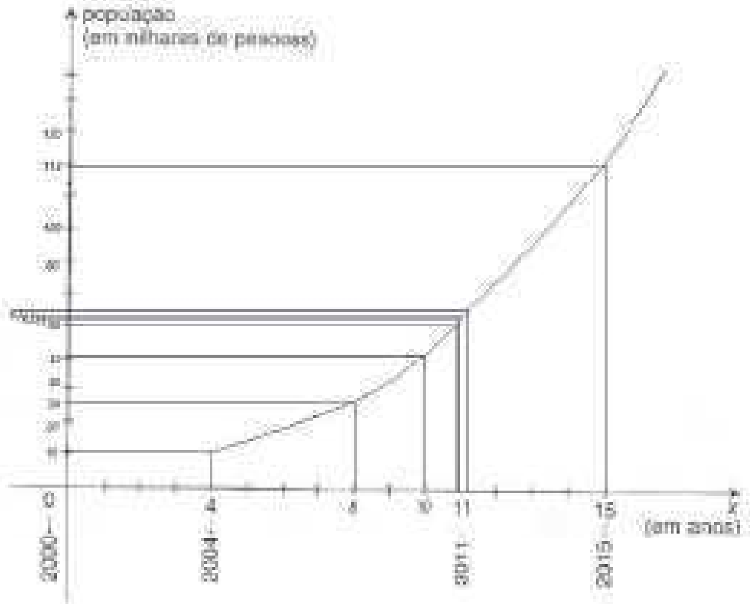
Além disso, vimos que para $x \neq 1$ e $x \neq 11$, h se comporta como a função quadrática dada por:

$$y = \frac{x^2}{2} + 2$$

Que tem domínio real e seu gráfico é uma parábola. Assim, os pontos do gráfico de h estão sobre parte dessa parábola. Então, vamos tabelas alguns valores no intervalo $4 \leq x \leq 15$.

x	4	8	10	10,9	10,999	11,1	15
$y = \frac{x^2}{2} + 2$	10	34	52	61,40	62,48	63,6	114,5

Daí podemos esboçar o gráfico que descreve o crescimento populacional dessa cidade de 2000 a 2015.



Pelo gráfico podemos verificar que, embora h não esteja definida para $x = 11$, podemos encontrar o valor para o qual a função h tende quando $x \to 11$, que corresponde ao numero de habitantes no ano de 2011. Para isso, usamos o conceito de limite.

$$\lim_{x\to 11} \frac{x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 48x + 44}{2x^2 - 24x + 22} = \lim_{x\to 11} \frac{(x^2+4)}{2} = \lim_{x\to 11} \frac{x^2}{2} + 2 =$$

$$\lim_{x\to 11} \frac{11^2}{2} + 2 = \frac{121}{2} + 2 = \mathbf{62{,}5}\ \boldsymbol{mil}$$

Atividade 9 - Projeto Valorização da Escola Publica-CEMTN Jatobá -do-cerrado.

A espécie de jatobá encontrada no cerrado é a de nome científico *Hymenaeastilbocarpa*, da família *Leguminosae*. Também conhecida como jatobá-do-campo, jatobá-da-serra, jatobá-de-casca-fina e jutaí. O nome jatobá vem do guarani e significa "árvore de fruto duro". Em outras regiões do Brasil podem ser encontradas outras espécies de jatobá.

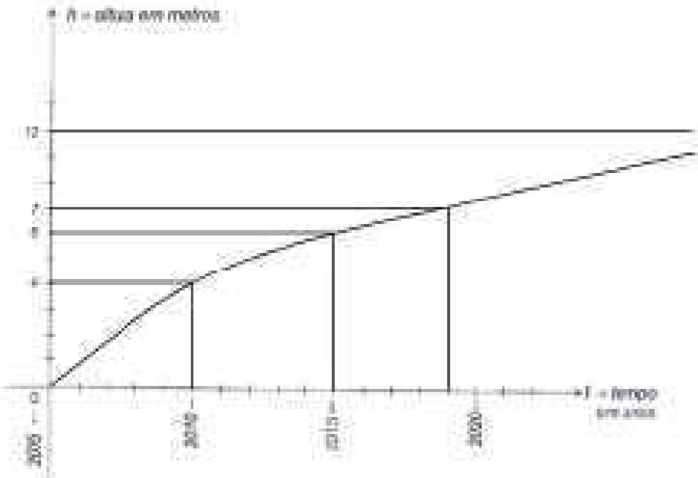
É muito usado na extração de madeira, o que a torna uma espécie de risco de extinção. A sua madeira é muito valorizada devido sua resistência, inclusive pelos índios que a usam para fazer canoas.

Sua casca e resina servem como remédio para várias enfermidades e a resina ainda pode ser usado como verniz vegetal, incenso, combustível e até mesmo impermeabilizante.

Na revitalização dos espaços verdes do CEMTN, durante a ação do PROJETO VALORIZAÇÃO DA ESCOLA PÚBLICA em meados do ano de 2005, o professor Waldison Moraes plantou com os alunos várias mudas de arvores como jatobá-do-cerrado, ipê, juazeiro,ingá, pau-pombo, barriguda e jatobá, além de algumas mudas do pau-brasil, com o intuito de amenizar as altas temperaturas verificados nos meses de agosto a setembro, pico do clima quente e seco do Distrito Federal, onde se verifica baixíssimas taxas de 12% a 13 % umidade do ar segundo a EMBRAPA, de onde vieram as principais mudas, a altura de uma arvore de jatobá, em metros, pode ser representada pela fórmula:

$$h = 12 - \frac{120}{10 + t}$$

Onde h é altura em metros e t é o tempo em anos. Construa o gráfico da função acima usando o *Software* WxMAXIMA e esboce o desenho abaixo:



A) Qual a altura da arvore aos:

(a)12 anos de idade? **6 metros**

(b)15 anos de idade? **7 metros**

(c) Qual será sua altura máxima? Calcule o limite quando $t \to \infty$.

$$\lim_{t \to \infty} 12 - \frac{120}{10 + 1t} = \mathbf{12\ metros}$$

Atividade 10 – Noção intuitiva de limite.

Seja f uma FUNÇÃO definida em um intervalo aberto em torno de x_0, "Exceto talvez"em x_0. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo a x_0 para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0 (com x *TENDENDO* para x_0), dizemos que $f(x)$ tem limite L quando $x \to x_0$ e escrevemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Isto é, quando x se aproxima de x_0 , $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L ou seja podemos tomar $f(x)$ tão próximo de L quanto desejamos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo a x_0 .

APÊNDICE A2-QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
(PROFMAT)

PROFMAT

UFG

Objetivos da entrevista:

ii) Verificar a impressão dos alunos em relação a aprendizagem de conceito de limites de funções reais utilizando o software WxMáxima.

iii) Analisar a percepção dos alunos a cerca da execução do projeto de estudo no laboratório de informática.

Roteiro da entrevista:

Item i:Verificar a impressão dos alunos em relação a aprendizagem de conceito de limites de funções reais utilizando o software WxMáxima

1.Em seu livro didático existe o conteúdo limites de funções reais?

2.Você considera que esse assunto poderia ser estudado no Ensino Médio?

3.Você acha esse estudo importante para aprendizagem de interpretação gráfica de funções reais?

4.Em sua opinião, o assunto limite de funções reais é aplicável a outros conteúdos estudados no Ensino Médio?

5.Você considera que o uso de novas tecnologias promove o interesse do educando no estudo Matemática?

6.Como foi sua adaptação em relação ao Software WxMaximo?

Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, nº 1120 – Setor Universitário – Bloco "M" – C.P. 56 – CEP: 75704-020 – Tel.: (64) 3441-5316 – Telefax: (64) 3441-5320 – www.catalao.ufg.br/mat

7.Você se sentiu motivado a estudar no laboratório de informática com outros alunos que compartilham do mesmo interesse?

8.Descreva a sua participação no projeto.

Roteiro da entrevista:

Item ii: Analisar a percepção dos alunos a cerca da execução do projeto de estudo no laboratório de informática

9.Você acha que esse projeto poderia ser estendido a todos os alunos que estão cursando o terceiro ano do Ensino Médio?

10. Quais as dificuldades encontradas durante a execução do projeto de estudo?

11. Que iniciavas livres dos alunos poderiam ser feitas para que este projeto fosse estendido aos demais alunos?

12. Em sua opinião,é possível montarmos grupos de monitoria para que outros alunos tenham essa aprendizagem no laboratório de informática?