Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática

em Rede Nacional

WEVERTON MAGNO FERREIRA DE CASTRO

SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

Orientador: Prof. Dr. Cecília de Souza Fernandez.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI
MARÇO/2013

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

WEVERTON MAGNO FERREIRA DE CASTRO

SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

NITERÓI/RJ

2013

WEVERTON MAGNO FERREIRA DE CASTRO

SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

Trabalho de conclusão de Curso de Pós-Graduação Profissional em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Prof. Dr. Cecília de Souza Fernandez.

Niterói/RJ

2013

WEVERTON MAGNO FERREIRA DE CASTRO

SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

Trabalho de conclusão de Curso de Pós-Graduação Profissional em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em 26 de março de 2013.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Cecília de Souza Fernandez – Orientadora

UFF

____

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira

IMPA

____

Prof. Dr. Paulo Roberto Trales

UFF

Niterói/RJ

2013

Ao meu Deus e seu filho, Jesus Cristo,

toda honra, toda glória e todo o louvor!

AGRADECIMENTOS

Agradeço de todo coração a minha amada esposa, Tatiana Paes da Paixão de Castro, que sempre me incentivou, acredita em meu talento e é minha companheira em todos os momentos. Aos meus pais, Vera Lucia Ferreira de Castro e Evaldo Alves de Castro, que sempre me apoiaram nos estudos e sempre demonstram orgulho pelas conquistas de seus filhos. A minha orientadora, Professora Dr. Cecília de Souza Fernandez, por acreditar no meu potencial, por toda a paciência e disponibilidade ao longo desta caminhada.

RESUMO

O teorema de Pitágoras é um tema que desperta a curiosidade de quem começa a estudá-lo. Por isso, este trabalho tem o objetivo de apresentar parte da história da Matemática que envolve um de seus grandes personagens, Pitágoras de Samos, além da história do próprio teorema, que teria sido desenvolvido por ele. Apresentam-se algumas demonstrações deste teorema. Também se apresenta a análise dos principais livros didáticos de Matemática dos ensinos fundamental e médio disponíveis no mercado brasileiro, principalmente os oferecidos nas escolas públicas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNDL). Uma proposta de apresentação do tema, nos ensinos fundamental e médio, é dada no final do trabalho.

Palavras-chave: Pitágoras, Teorema de Pitágoras, Escola pitagórica, Ensino.

ABSTRACT

The Pythagorean theorem is a topic that arouses the curiosity of those who begin to study it. Therefore, this work aims to present part of the history of Mathematics involving one of his greatest characters, Pythagoras of Samos, and the story of his own theorem, which was developed by him. We present some proofs of this theorem. We also present the analyses of textbooks used at mathematics primary and secondary education available in the Brazilian market, especially those offered in public schools by the National Plan of Textbook (PNDL). A proposal for a presentation of the subject, in primary and secondary education, is given at the end of the work.

Keywords: Pythagoras, Theorem of Pythagoras, Pythagorean school, Teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Toda pessoa que já passou por alguma escola e concluiu o ensino fundamental, certamente já ouviu falar de Pitágoras. O teorema que leva seu nome também é bastante conhecido, assim como suas aplicações no mundo real.

No presente trabalho apresentar-se-á um pouco sobre a história do teorema de Pitágoras e sobre o próprio Pitágoras, considerado por muitos especialistas em História da Matemática como o primeiro matemático. Também se apresentam algumas demonstrações do referido teorema. Uma parte importante deste trabalho é a análise de como o tema é abordado em alguns livros didáticos dos ensinos fundamental e médio, principalmente os oferecidos nas escolas públicas pelo Plano Nacional do Livro Didático. Uma proposta didática para o desenvolvimento do tema nos ensinos fundamental e médio é também apresentada.

No Capítulo 2 apresenta-se a vida de Pitágoras: onde ele nasceu, como conheceu a Matemática e, finalmente, como fundou o que se conhece como “escola pitagórica” ou “irmandade pitagórica”.

No Capítulo 3 enunciamos o teorema de Pitágoras e apresentamos um pouco sobre sua história.

No Capítulo 4 quatro demonstrações distintas deste teorema são desenvolvidas, propiciando um contato direto com diferentes maneiras de se conhecer tal teorema.

No Capítulo 5 apresentamos a análise de dezesseis livros didáticos de Matemática, sendo oito do ensino fundamental e oito do ensino médio, seguidos de uma análise crítica do que foi encontrado em suas páginas.

No Capítulo 6 uma proposta didática é sugerida. Esta proposta é baseada na abordagem do tema “teorema de Pitágoras” feita pelos livros didáticos, em confronto com o que dizem os “Parâmetros Curriculares Nacionais” (PCN´s), dos ensinos fundamental e médio, para o ensino de Matemática e suas tecnologias.

No Capítulo 7 fazemos algumas considerações finais.

Terminamos observando que, neste trabalho, denota-se $\overline{\mathrm{AB}}$ como segmento que possui extremidades nos pontos A e B. E a medida do segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ como AB.

2 PITÁGORAS E A ESCOLA PITAGÓRICA

Considerado o primeiro matemático, Pitágoras nasceu no século VI a.C. em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso (um grupo de ilhas gregas na extremidade leste do Mar Egeu, junto à costa sudoeste da Turquia), próximo a Mileto, lugar de nascimento de Tales. Não há como precisar o ano de nascimento de Pitágoras. Algumas fontes afirmam que foi por volta de 550 a.C. ou 569 a.C..

Tales era um exímio negociante, descendente de uma nobre família grega. Mas deixou tudo isso para se dedicar ao estudo da Matemática, Astronomia e Filosofia tornando-se um grande sábio, de tal maneira que foi o primeiro dos considerados "Sete sábios da Grécia" (Tales de Mileto, Periandro de Corinto, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene, Cleóbulo de Lindos, Sólon de Atenas e Quílon de Esparta). A estes sábios foram atribuídas autorias de grandes provérbios, alguns tão famosos que foram inscritos no templo de Apolo em Delfos. A Tales são atribuídas algumas descobertas matemáticas, como:

1ª) Em triângulos semelhantes, a razão entre lados homólogos é constante;

2ª) Os ângulos da base de um triângulo isósceles possuem a mesma medida, ou seja são congruentes.

3ª) Quanto são conhecidos um lado e seus dois ângulos adjacentes, todo o triângulo é conhecido;

4ª) Um triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo;

5ª) Em duas retas concorrentes, os pares de ângulos opostos formados são congruentes;

6ª) Se um lado e dois ângulos de um triângulo são congruentes a um lado homólogo e dois ângulos de outro triângulo, então estes triângulos são semelhantes.

Com idade próxima a 18 ou 19 anos, Pitágoras partiu de Samos para conhecer o mundo, pois, em sua época, isto era um costume para adquirir conhecimento através do contato com outros povos. Nestas viagens, Pitágoras visitou e viveu alguns anos no Egito e Babilônia e é muito provável que ele tenha ido também a Índia. Contemporâneo de Confúcio, Lao-Tse e Buda, há quem diga que Pitágoras teve contato com Buda e seus ensinamentos em sua provável passagem pela Índia.

> Pitágoras adquiriu suas habilidades matemáticas em suas viagens pelo mundo antigo. Algumas histórias tentam nos fazer crer que Pitágoras teria ido até a Índia e a Inglaterra, mas o mais certo é que ele aprendeu muitas técnicas matemáticas com os egípcios e os babilônicos. Esses povos antigos tinham ido além da simples contagem e eram capazes de cálculos complexos que lhes permitiam criar sistemas de contabilidade sofisticados e construir prédios elaborados. De fato, os dois povos viam a matemática como uma ferramenta para resolver problemas práticos. A motivação que conduziu à descoberta de algumas das leis básicas da geometria era a necessidade de refazer a demarcação dos campos, perdida durante as enchentes anuais do Nilo. A palavra geometria significa “a medida da terra”. (SINGH, 2008, p.29)

É desta situação gerada pelas enchentes anuais do rio Nilo que os antigos egípcios desenvolveram métodos usando cordas para refazerem na terra as marcações apagadas pelo rio. Um desses métodos, que é bastante interessante, era utilizar uma corda aberta com 13 nós, igualmente espaçados, para construir um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5. Os egípcios perceberam que com tal triângulo era possível construir um ângulo reto entre os lados que mediam 3 e 4. Ou seja, eles conheciam pelo menos um terno de números ditos pitagóricos, que com certeza não eram ainda conhecidos desta forma. Mas, mesmo sem qualquer documento que comprove isto, o mais importante é que estas situações devem ter sido vividas de alguma forma por Pitágoras nestas viagens.

Voltando a Grécia, Pitágoras tinha o objetivo de fundar uma escola para estudar a filosofia e a matemática que aprendeu durante suas viagens por estes diferentes povos. Porém, em Samos, Pitágoras enfrentou um problema político. Durante suas viagens, um tirano persa, chamado Polícrates, teria transformado Samos em uma cidade conservadora, um lugar de intolerância. Convidado por Polícrates para compor a equipe de sua corte, Pitágoras percebeu que esta era a maneira encontrada para fiscalizá-lo, impedindo que ele difundisse a ideia do estudo filosófico e matemático. A princípio, a solução encontrada por Pitágoras foi se refugiar em uma caverna localizada em uma região remota da ilha, a fim de continuar seus estudos.

> Pitágoras não apreciava o isolamento e acabou subornando um menino para ser seu primeiro aluno. A identidade do garoto é incerta, mas alguns historiadores sugerem que ele também se chamaria Pitágoras [...] Pitágoras, o mestre, pagava ao seu aluno três ébolos para cada aula a que ele comparecia. Logo percebeu que, à medida que as semanas se passavam, a relutância inicial do menino em aprender se transformava em entusiasmo pelo conhecimento. Para testar seu pupilo, Pitágoras fingiu que não podia mais pagar o estudante e que teria de interromper as aulas. Então o menino se ofereceu para pagar por sua educação. O pupilo tornara-se discípulo. Infelizmente este foi o único adepto que Pitágoras conquistou em Samos. Ele chegou a estabelecer temporariamente uma escola conhecida como o Semicírculo de Pitágoras, mas suas ideias de reforma social eram inaceitáveis e o filósofo foi obrigado a fugir com sua mãe e seu único discípulo. (SINGH, 2008, p.30).

Foi neste momento que Pitágoras chega a Crotona, uma antiga cidade-estado da Magna Grécia, onde hoje é o sul da Itália. Por lá, Pitágoras encontrou o apoio de Milo que era o homem mais rico e forte da cidade. Além de influente politicamente, Milo era forte fisicamente, já que era um atleta olímpico, cinco vezes campeão de luta livre nos jogos olímpicos da antiguidade. Este homem já tinha ouvido sobre a fama de Pitágoras, que ecoava na Grécia, e lhe cedeu parte de sua casa para que Pitágoras fundasse a sua escola, tendo inclusive a filha de Milo, uma bela mulher chamada Teano, como uma de suas alunas. Futuramente, apesar da diferença de idade, Pitágoras e Teano acabaram se casando.

É então que nasce a famosa “escola pitagórica”, conhecida também como “irmandade pitagórica”, já que esta escola possuía também um caráter religioso e era cercada de mistérios e lendas.

> A escola pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígido. O vegetarianismo era imposto a seus membros, aparentemente porque o pitagorismo aceitava a doutrina da metempsicose, ou transmissão das almas, com a preocupação consequente de que se podia matar um animal que fosse a nova moradia da alma de um

> amigo morto. Entre outros tabus da escola havia o de comer feijões (ou melhor, lentilhas). (BOYER, 1996, p. 33)

> Talvez Pitágoras, influenciado pelas tradições budistas, desenvolveu a ideia de comunidade fraternal (sangha – comunidade dos budistas que têm os mesmos objetivos). Com características monásticas, instituiu ritos de abstinência, pureza e o vegetarianismo, que era imposto ou aceito pelos que queriam participar da escola. (CYRINO, 2006, p. 38)

> Ao entrar para a Irmandade cada adepto devia doar tudo o que tinha para um fundo comum. E se alguém quisesse partir receberia o dobro do que tinha doado e uma lápide seria erguida em sua memória. A Irmandade era uma escola igualitária e incluía várias irmãs. (SINGH, 2008, p.30)

> Os discípulos da escola pitagórica formavam duas classes: os Auditores ou Pitagoristas, cujo ensino se limitava à música, considerada como medicina da alma, e os Matemáticos ou Pitagóricos, iniciados nas principais descobertas da escola e nos segredos dos deuses. (CYRINO, 2006, p. 38)

Estes são relatos de algumas histórias que cercavam a escola pitagórica. O fato é que tal escola contava com cerca de seiscentos seguidores que estudavam e desenvolviam a matemática proposta por Pitágoras. O interesse deles era de ir além da utilização dos números. Eles queriam entendê-los profundamente, tanto que o lema da escola pitagória é que “tudo é número”.

> Pitágoras desenvolveu a idéia da lógica numérica e foi responsável pela primeira idade de ouro da matemática. Graças ao seu gênio, os números deixaram de ser apenas coisas usadas meramente para contar e calcular e passaram a ser apreciados por suas próprias características. Ele estudou as propriedades de certos números, o relacionamento entre eles e os padrões que formavam. Ele percebeu que os números existem independentemente do mundo palpável e, portanto, seu estudo não é prejudicado pelas incertezas da percepção. (SINGH, 2008, p.28)

Além de entender completamente o que cada número significava e de estudar a relação entre eles, a irmandade pitagórica cercava os números de imenso misticismo.

> Os pitagóricos tiveram grande influência no misticismo dos números, mas não foram os únicos a imaginar os números ímpares como sendo masculinos e os pares femininos; afirmavam que os ímpares exerciam supremacia sobre os pares, pois a soma de dois ímpares gera um número par e a de dois pares sempre gera um número par. (CYRINO, 2006, p. 46).

A partir deste raciocínio, os pitagóricos chegaram a listar as características místicas dos primeiros números naturais. O número “um” é o gerador dos números, o primeiro número masculino. O “dois” que é o primeiro dos números femininos, o número da opinião. “Três” é o número da harmonia ou número da forma, por causa das dimensões: comprimento, largura e altura. O número “quatro” se corresponde ao tetraedro onde as faces seriam os elementos ar, terra, fogo e água. A soma do primeiro número feminino com o primeiro número masculino verdadeiro, respectivamente 2 e 3, chegaria ao “cinco” que, por isso, é o número do casamento. O “seis” é o número da criação. “Sete” é a junção da harmonia, simbolizada pelo 3, com os elementos, que é o 4. Sendo o dobro do número que representa os elementos, o “oito” é o número das formas perfeitas. Já o número “nove” é a caracterização numérica da indestrutibilidade, pois a soma dos algarismos de seus múltiplos é ele próprio; exemplos: 18, 27 e 36. E o “dez” é o número sagrado.

> A irmandade era realmente uma comunidade religiosa e um de seus ídolos era o Número. Eles acreditavam que se entendessem as relações entre os números poderiam descobrir os segredos espirituais do universo, tornando-se, assim, próximos dos deuses. Em especial, a Irmandade voltou sua atenção para os números inteiros (1, 2, 3, ...) e as frações. Os números inteiros e as frações (proporções entre números inteiros) são conhecidos, tecnicamente, como *números racionais*. (SINGH, 2008, p.32)

Mas a escola formada por Pitágoras descobriu propriedades interessantes em alguns números. Para Pitágoras, a perfeição de um número era demonstrada utilizando de seus divisores próprios. Quando um número inteiro possuía divisores próprios cuja soma era menor que o próprio número ele, o chamava de “número deficiente”. Um exemplo é o 10. Seus divisores próprios (1, 2 e 5) possuem soma igual a 8 que é menor que o 10. Já quando a soma dos divisores próprios de um número era maior que o mesmo, ele recebia o nome de “número abundante” ou “número excessivo”. O número 20 é um exemplo. Seus divisores próprios (1, 2, 4, 5 e 10) possuem soma igual a 22 que é maior do que o 20. Porém, quando a soma dos divisores próprios de um número é exatamente igual ao mesmo, ele é chamado de “número perfeito”. O primeiro número perfeito é o 6, pois seus divisores próprios são 1, 2 e 3 cuja soma é 6. Um fato curioso é que a irmandade pitagórica acreditava que Deus criou o mundo em seis dias, porque este é o número perfeito. E que se Deus não tivesse feito desta forma, o seis continuaria a ser perfeito.

Os primeiros números perfeitos são 6, 28, 496 e 8128. Note que fica cada vez mais difícil encontrá-los usando este método dos divisores. Foi desta dificuldade que Pitágoras tentou desenvolver outro método para encontrá-los. A sua crença era que o número 2 estava ligado a perfeição dos números. Foi quando ele descobriu que as potências de 2 que podem ser escritas como 2^n, com n natural, chegavam próximas a perfeição. Isto porque, dado um n_0 natural, a soma dos divisores próprios de 2^{n_0} é sempre $2^{n_0} - 1$. Por exemplo,

a) $2^2 = 4$ e seus divisores próprios (1 e 2) possuem soma igual a 3;
b) $2^3 = 8$ e seus divisores próprios (1, 2 e 4) possuem soma igual a 7;
c) $2^4 = 16$ e seus divisores próprios (1, 2, 4 e 8) possuem soma igual a 15.

Pitágoras não estava totalmente errado em sua suspeita. Algum tempo depois Euclides descobriria, provavelmente baseado no raciocínio de Pitágoras, que os números da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, para algum n natural, são perfeitos. Por exemplo,

a) Para n = 2, $2^1(2^2 - 1) = 2.3 = 6$;
b) Para n = 3, $2^2(2^3 - 1) = 4.7 = 28$;
c) Para n = 5, $2^4(2^5 - 1) = 16.31 = 496$;
d) Para n = 7, $2^6(2^7 - 1) = 64.127 = 8\,128$.

Para que o número da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ seja perfeito, se faz necessário que o número $2^n - 1$ seja um número primo de Mersenne. Como, até a data de publicação deste trabalho, são conhecidos 48 números primos de Mersenne, então são conhecidos 48 números perfeitos, sendo o maior deles o número $2^{57885160}(2^{57\,885\,161} - 1)$ que possui 34 850 340 algarismos, descoberto pelo Dr. Curtis Cooper, professor da University of Central Missouri, em 25 de janeiro de 2013 no GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search). O GIMPS, desde 1996, é o grupo de pesquisa responsável pela descoberta dos últimos quatorze números primos de Mersenne, consequentemente pelos últimos quatorze números perfeitos descobertos. A grande curiosidade é sobre a existência de números perfeitos ímpares, pois dentre os 48 números perfeitos descobertos até agora não há nenhum ímpar, basta notar que todos são múltiplos de uma potência de 2.

> Pitágoras era fascinado pelos ricos padrões e as propriedades dos números perfeitos e respeitava sua sutileza. À primeira vista, o conceito de perfeição é relativamente simples de entender, no entanto os antigos gregos foram incapazes de sondar alguns aspectos fundamentais deste assunto. Por exemplo, embora exista uma grande quantidade de números cujos divisores somados são uma unidade a menos do que o próprio número, ou seja, são ligeiramente deficientes, parecem não existir números ligeiramente excessivos. Os gregos foram incapazes de descobrir quaisquer números cujos divisores somados excedem em uma unidade o número original e não conseguem entender por que isso acontece. E para aumentar sua frustração também não conseguiram provar que tais números não existiam. É compreensível que a aparente falta de números levemente excessivos não tivesse nenhuma utilidade prática, entretanto era um problema que poderia revelar a natureza dos números e, portanto, valeria a pena estudar. Tais enigmas intrigaram a Irmandade Pitagórica, e dois mil e quinhentos anos depois os matemáticos ainda são incapazes de provar que não existem números ligeiramente excessivos. (SINGH, 2008, p.34)

Outros números de grande importância para a teoria dos números e aritmética, que Pitágoras junto a sua escola descobriu, foram os “números primos”, que são os números que possuem apenas dois divisores: o próprio número e a unidade. O único número primo par é o 2 e há uma infinidade de números primos ímpares. Os “números amigos” são outra descoberta de Pitágoras. Números amigos são dois números cuja soma dos divisores próprios de um deles é igual ao outro. O exemplo encontrado por Pitágoras foi o par 220 e 284. Note que os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, que apresentam soma igual a 284. O mesmo acontece com 284 cujos divisores próprios são 1, 2, 4, 71 e 142, que apresentam soma igual a 220. Outros pares de números amigos foram descobertos por Pierre Fermat em 1636 e por Leonard Euler em 1747.

A descoberta dos números irracionais também é creditada a irmandade pitagórica. Um de seus membros, ao analisar um triângulo retângulo com catetos congruentes medindo uma unidade, notou que não havia nenhum número racional que fornecesse a medida da hipotenusa, pois $x^2 = 1^2 + 1^2$, ou seja, $x^2 = 2$ e não existe número racional que elevado ao quadrado resulte no inteiro 2. Logo existiria pelo menos um número que não se encaixava na crença dos pitagóricos de que tudo poderia ser resolvido com os números inteiros ou com a divisão de inteiros. Logo este problema, que era considerado por Pitágoras como um erro, foi encoberto sendo revelado muito tempo depois. Há uma lenda de que Pitágoras teria condenado o descobridor deste fato à morte por afogamento, forçando todos a manterem o segredo.

A irmandade pitagórica tinha um símbolo que era o pentágono regular estrelado, simplesmente chamado de pentagrama, que nada mais é do que o pentágono regular com suas cinco diagonais como mostra a figura abaixo:

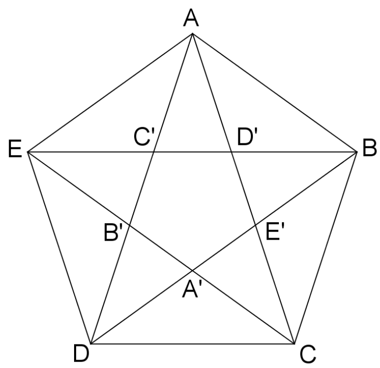

Fig. 1: Pentágono regular estrelado.

O símbolo da escola pitagórica é uma figura intrigante, justamente porque ela é formada por muitas curiosidades. A primeira delas é que suas diagonais se intersectam formando outro pentágono regular. De acordo com a Figura 1, o pentágono A'B'C'D'E'. Outra curiosidade é que cada um dos pontos A', B', C', D' e E' dividem suas diagonais em segmentos com medidas diferentes de tal modo que "a razão da medida de toda a diagonal para a medida do maior segmento gerado é igual à razão da medida deste para a medida do menor segmento gerado". Tomando a diagonal $\overline{AD}$ como exemplo, temos que $\frac{AD}{C'D} = \frac{C'D}{AC'}$.

Os gregos conheciam esta divisão como "divisão de um segmento em média e extrema razão". Atualmente ela é conhecida como "secção áurea" de um segmento, denominação criada por Kepler (1571 – 1630). Kepler escreveu "A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de joia preciosa”.

Uma curiosidade é que a secção áurea se “autopropaga”. Tomando um segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ e um ponto P_1 pertencente a $\overline{\mathrm{AB}}$, tal que P_1 divide $\overline{\mathrm{AB}}$ em média e extrema razão sendo $\overline{\mathrm{AP_1}}$ o maior segmento gerado, temos que um ponto P_2 pertencente a $\overline{\mathrm{AP_1}}$ de tal modo que $\overline{\mathrm{AP_2}}$ seja congruente a $\overline{\mathrm{P_1B}}$, divide $\overline{\mathrm{AP_1}}$ em média e extrema razão. Da mesma forma, P_3 divide $\overline{\mathrm{AP_2}}$ em média e extrema razão se $\overline{\mathrm{AP_3}}$ é congruente a $\overline{\mathrm{P_2P_1}}$. Repetindo este processo indefinidamente, obteremos segmentos $\overline{\mathrm{AP_n}}$ divididos em média e extrema razão por P_{n+1} se $\overline{\mathrm{AP_{n+1}}}$ é congruente a $\overline{\mathrm{P_{n+1}P_n}}$.

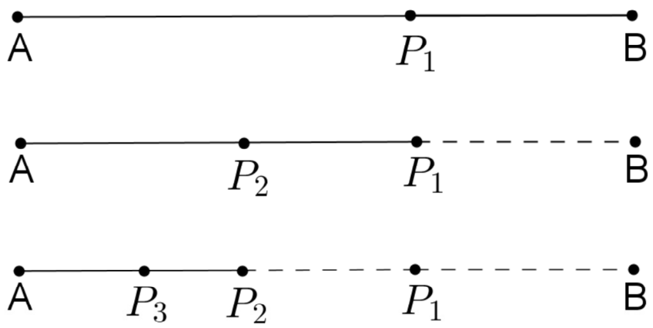

Fig. 2: Secção áurea.

É bem provável que Pitágoras e seus discípulos conhecessem a divisão de um segmento em média e extrema razão, pois a mesma gera uma equação do 2º grau, que Pitágoras deve ter conhecido em suas viagens a Babilônia. Sejam $\mathrm{AB} = a$ e $\mathrm{AP_1} = x$. Temos $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, quando aplicamos a secção áurea. Aplicando a propriedade fundamental da proporção temos:

$$a.(a-x) = x.x \leftrightarrow a^2 - ax = x^2 \leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Resolvendo a equação $x^2 + ax - a^2 = 0$ na incógnita x, chegamos em $x = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} = a.\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, que é um número irracional, independente do valor de “a”.

Tomando a raiz positiva desta equação temos $x = a.\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ou seja, $\frac{a}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Geramos, então, o que hoje é chamado, número de ouro, $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}6180339887...$. Este número, assim como a secção áurea, aparece em diversos elementos da história, como, por exemplo, na arquitetura e nas artes.

Pitágoras também foi o responsável pela formalização da escala musical que usamos hoje.

> O instrumento mais importante da antiga música helênica era o tetracórdio, ou lira de quatro cordas. Antes de Pitágoras, os músicos tinham percebido que certas notas, quando soavam juntas, criavam um efeito agradável e afinavam suas liras de modo que ao tocarem duas cordas pudessem produzir tal harmonia. Contudo, os antigos músicos não compreendiam por que certas notas, em especial, eram harmônicas e não tinham nenhum meio preciso de afinar seus instrumentos. Eles afinavam suas liras pelo ouvido, até conseguirem um estado de harmonia – um processo que Platão chamava de torturar as cravelhas. (SINGH, 2008, p.35)

Pitágoras observou que quando os comprimentos das cordas estavam em algumas proporções, elas soavam de forma harmônica. Ele notou que se uma corda produzia uma nota qualquer, outra corda com o dobro do tamanho produziria a mesma nota em uma oitava abaixo. Este mesmo princípio é utilizado hoje em harpas e pianos. Pitágoras formalizou as notas musicais que conhecemos da seguinte forma: dada uma corda que produzia um Dó, uma corda com o dobro do comprimento levaria a um Dó uma oitava abaixo e de forma ascendente, uma corda com 16:9 de seu tamanho produziria um Ré, 8:5 para Mi, 3:2 para Fá, 4:3 para Sol, 6:5 para Lá e 16:15 para Si.

Todas estas descobertas fizeram com que a escola pitagórica ganhasse notoriedade na Grécia antiga, porém junto com este prestígio muita inveja também era atraída. Cyrino (2006, p. 52) diz: “Da mesma maneira que os pitagóricos conseguiram ascensão política, os inimigos surgiram. Um dos senhores mais ricos de Crotona, chamado Cilon, empreendeu um ataque a uma casa onde se reuniam os pitagóricos e muitos foram assassinados. Pitágoras foi para Tarento e daí, para Metaponto, onde perdeu a vida, aproximadamente, em 500 a.C.”

Pitágoras e os pitagóricos foram pessoas que deixaram um legado matemático e filosófico muito grande, porém esta história importante da Matemática é envolta em muitas lendas, pelo fato de muitas de suas descobertas ficarem em segredo, além da perda da maioria dos documentos. Há uma lenda que diz que, neste ataque aos pitagóricos, toda a casa foi incendiada, queimando os registros de Pitágoras e sua escola.

3 O TEOREMA DE PITÁGORAS

Um triângulo retângulo é um triângulo que possui um de seus ângulos internos medindo 90º. O maior lado de um triângulo retângulo, chamado de hipotenusa (palavra que tem origem no grego "hypoteínousa", cujo significado é "contrário a ..."), é justamente o lado oposto ao ângulo reto e os outros dois lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos (palavra que tem origem no grego "Kathetos" cujo significado é "que cai perpendicular").

O teorema de Pitágoras é uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, e pode ser enunciado da seguinte forma: *"Dado um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos".*

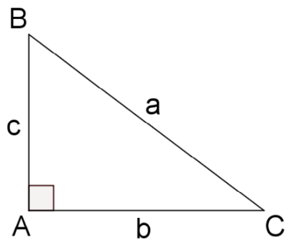

Fig. 3: Triângulo retângulo.

Com a notação dada na figura acima, temos a seguinte identidade: $a^2 = b^2 + c^2$. Note que o teorema de Pitágoras relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, porém esta identidade também pode ser utilizada para relacionar as áreas dos quadrados gerados a partir dos lados do mesmo triângulo retângulo. Ou seja, as áreas dos quadrados gerados pela hipotenusa e catetos são respectivamente a^2, b^2 e c^2 (Figura 4).

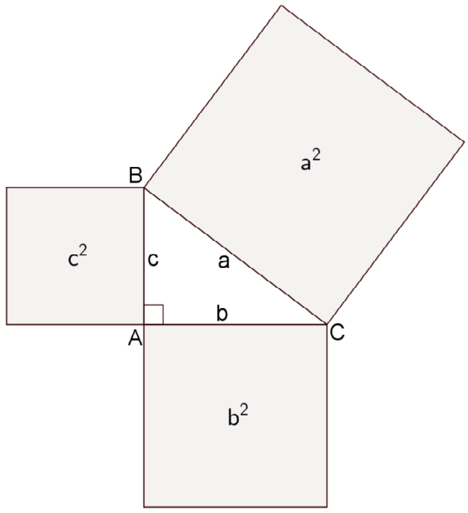

Fig. 4: O teorema de Pitágoras por comparação de áreas.

Uma curiosidade muito interessante é que esta relação entre as áreas dos quadrados gerados a partir dos lados pode ser estendida a qualquer trio de figuras semelhantes geradas a partir dos lados do triângulo retângulo. Não é necessário que estas figuras sejam polígonos, basta a semelhança. Ou seja, se construirmos, a partir dos três lados do triângulo retângulo, três retângulos semelhantes, três pentágonos semelhantes, três semicírculos ou três figuras totalmente estranhas, porém semelhantes, a soma das áreas das figuras menores é igual à área da figura maior.

Para provar este fato, é necessário provar uma propriedade de proporção que diz: Se $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$, então $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w}$. De fato, observe que se $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ tem-se $xw = yz$. Somando o fator zw em ambos os lados da igualdade, chega-se a $xw + zw = yz + zw$. Logo, $w(x + z) = z(y + w)$, onde $\frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w}$.

Agora, dado um triângulo retângulo, com hipotenusa medindo “a” e catetos medindo “b” e “c”, constrói-se três figuras semelhantes quaisquer a partir dos lados com medidas a, b e c, do triângulo retângulo, sendo suas áreas medindo A, B e C, respectivamente.

Utilizando a propriedade da razão de semelhança entre áreas de figuras semelhantes tem-se que $\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ e $\frac{B}{C} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$. Ou seja, $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$ e $\frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$. Portanto, $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$. Utilizando a segunda igualdade e a propriedade de proporção provada anteriormente, tem-se que $\frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}$, ou seja, $\frac{A}{a^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}$. Mas, pelo teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto, A = B + C. Ou seja, a soma das áreas menores é igual à área maior.

A vantagem dos quadrados é que eles também ilustram bem a identidade $a^2 = b^2 + c^2$.

Esta relação conhecida como teorema de Pitágoras era conhecida por muitos povos anteriores ao Pitágoras. Ela tem este nome, pois é muito provável que Pitágoras ou seus discípulos da escola pitagórica a tenham demonstrado pela primeira vez. Como já dito anteriormente, os egípcios usavam um triângulo retângulo para refazerem as marcações de ângulos retos na terra. Porém os povos antigos, que tiveram algum contato com o triângulo retângulo e com a relação entre seus lados, não tinham o interesse de saber o porquê dessa relação, assim como de outras que provavelmente conheciam. Para eles, era suficiente o benefício que as relações os traziam, ou seja, o interesse era único e exclusivo nas aplicações e não nas demonstrações.

O fato é que esta relação entre o comprimento dos três lados do triângulo retângulo gera um trio de números, que é chamado de “terno pitagórico”. Muitos desses ternos eram conhecidos pelos povos anteriores a Pitágoras, como mostram alguns documentos. Um deles é o “Plimpton 322”, que é uma tábua babilônica feita com argila e de escrita cuneiforme (tipo de escrita feita com um instrumento em forma de cunha) datada de 1800 a.C.. Esta tábua está localizada hoje na coleção da Universidade de Columbia, e contém uma tabela com quinze linhas de ternos pitagóricos. Como diz Crease (2011, p.18), “A tábua era evidentemente uma tabela trigonométrica ou um auxílio didático para a regra de calcular hipotenusas de triângulos retângulos. Ela não contém variáveis, e parece que sua intenção era divulgar a regra por meio de uma lista de exemplos”.

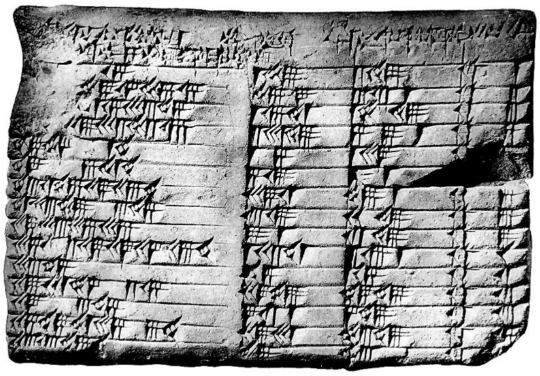

Fig. 5: Plimpton 322.
(imagem retirada de: http://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322)

Na Índia antiga, a regra provada por Pitágoras também era conhecida e utilizada. Algumas aplicações estão registradas nos “Sulbasutras”, documentos que fazem parte do maior corpo de textos do período védico (1500 a.C. – 500 a.C.). Eles são as únicas fontes de conhecimento da matemática indiana. O “Zhou Bi Suan”, nome que significa “a clássica aritmética da Gnomon e os caminhos do céu circular” (Gnomon é a lâmina triangular do relógio de sol), é o texto chinês de Astronomia e Matemática mais antigo, provavelmente feito no I século a.C., que apresenta o conhecimento gerado no período da dinastia Zhou (1046 a.C. – 256 a.C). Neste texto há uma gravura que pode ser considerada parte do que seria a primeira prova geométrica do que viria a ser o teorema de Pitágoras.

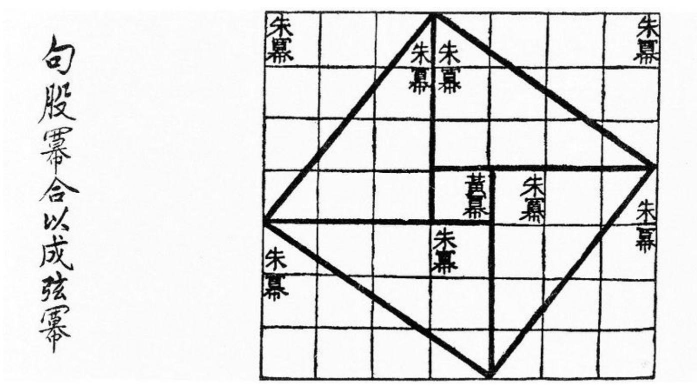

Fig. 6: Gravura do Zhou Bi Suan.
(imagem retirada de http://en.wikipedia.org/wiki/ Zhou_Bi_Suan_Jing)

Em todos estes textos, há a aparição de ternos pitagóricos ou gravuras com triângulos retângulos, porém em nenhum deles se apresenta uma demonstração algébrica ou geométrica completa do teorema.

> A tábua babilônica, os Sulbasutras indianos e o Zhou Bi chinês exibem o conhecimento da regra aplicada a algum outro propósito: educação, no caso da Plimpton 322; religião, no caso dos Sulbasutras; astronomia, no caso do Zhou Bi. Nestes e em outros textos antigos, a regra é apresentada sem uma justificativa explícita, mas como um meio para descobrir distâncias e conferir resultados, algumas vezes com certo grau de formalismo. (CREASE, 2011, p. 19)

Outro acontecimento curioso é do terno pitagórico mais conhecido (3, 4 e 5) aparecer na proporção da grande pirâmide do Egito. Normalmente este terno de números era utilizado para encontrar ângulos retos e deve ter sido esse mesmo o intuito, com o objetivo de posicionar o vértice da pirâmide conforme a figura abaixo.

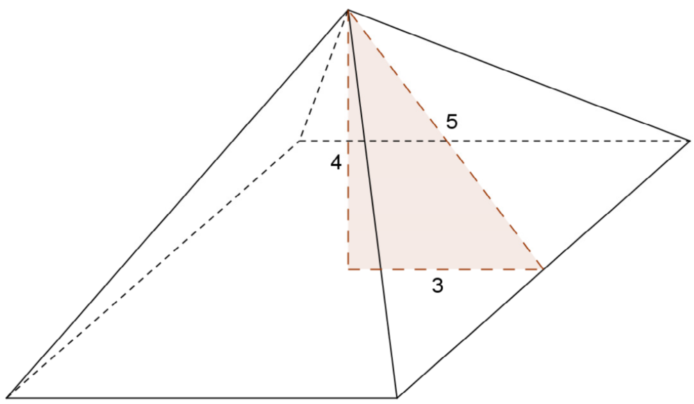

Fig. 7: Pirâmide e o terno pitagórico 3, 4 e 5.

> Provar uma regra é muito diferente de apenas conhecê-la. Uma prova demonstra a validade geral de um resultado baseada em princípios fundamentais – ela é sua própria motivação, não visa a nenhum resultado prático e está menos preocupada com o resultado em si do que com o método utilizado para atingí-lo; mais preocupada com o processo pelo qual passamos a confiar nela. Uma prova reconta a jornada pela qual passamos a conhecer uma equação. Fornecer a prova de uma regra requer uma perspectiva matemática diferente de apenas enunciar a regra. (CREASE, 2011, p. 20)

Provavelmente Pitágoras foi o primeiro a demonstrar este teorema, que era tão utilizado pelos povos antigos, na Índia, China, Egito e Babilônia. Não se sabe qual é exatamente a demonstração feita por Pitágoras. Acredita-se que tenha sido uma demonstração geométrica, usando comparação de áreas. Então vamos à provável demonstração feita por Pitágoras:

Dado um triângulo retângulo com catetos medindo “a” e “b”; e hipotenusa medindo “c”, deseja-se mostrar que $c^2 = a^2 + b^2$.

Seja um quadrado com lados medindo “a + b”. Constrói-se um quadrado de lados medindo “c” conforme a figura abaixo:

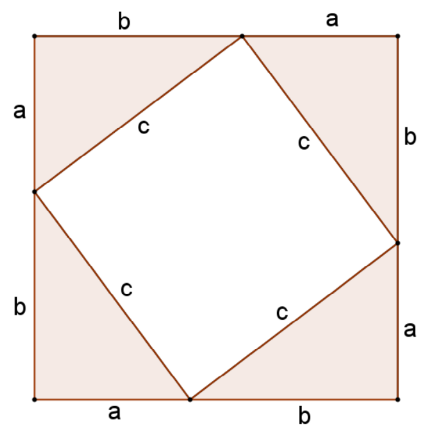

Fig. 8: Primeiro quadrado com lado medindo “a+b”.

Sabe-se que o quadrilátero de lado medindo “c” é um quadrado, pois os ângulos agudos de cada triângulo retângulo são complementares.

Agora, pode-se desmembrar o quadrado acima em quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado. Utilizando os quatro triângulos congruentes é possível remontar o quadrado com lado medindo “a + b” com outra configuração, conforme a figura abaixo:

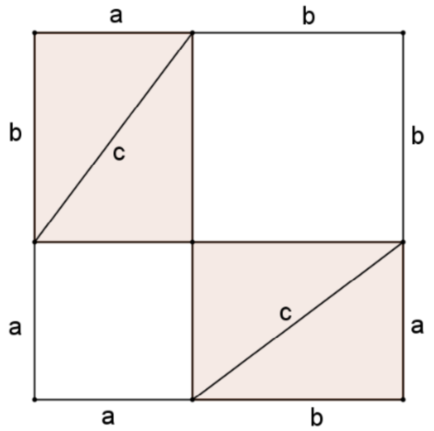

Fig. 9: Segundo quadrado com lado medindo “a+b”.

Note que nesta nova figura, o quadrado de lados medindo “a + b” é composto por seis polígonos: os mesmos quatro triângulos congruentes, um quadrado com lados medindo “a” e um quadrado com lados medindo “b”. Desta forma, fazendo uma comparação entre as duas figuras, temos que a área original não foi alterada pela nova composição. Isto indica que a área do quadrado de lado medindo “c” da primeira figura é igual à soma das áreas dos quadrados com lados medindo “a” e “b” da segunda figura. Ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$.

4 ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES

O teorema de Pitágoras é um dos mais famosos teoremas da história da Matemática, pois, além de toda a lenda que o envolve, ele possui muitas demonstrações distintas. Comparado aos outros tantos teoremas da Matemática, sem dúvida, o teorema de Pitágoras é o que possui o maior número de demonstrações. Estas demonstrações são, em sua grande maioria, geométricas, mas também existem demonstrações de caráter algébrico.

> Em 1927 (quando já era professor universitário), Loomis publicou *A proposição pitagórica*, livro contendo 230 provas; em 1940, então aos 87 anos, Loomis publicou uma segunda edição, com 370 provas. [...] A última frase de sua segunda edição é: “E ainda não chegamos ao fim”.
>
> Loomis estava certo; não era o fim. O site *Guinness World Records*, sob o título “Maior quantidade de provas do teorema de Pitágoras”, recentemente apontou um grego que diz ter descoberto 520 provas distintas. (CREASE, 2011, p. 24 e 25).

Nas ciências naturais, uma demonstração é algo que pode ser observado e que, repetido uma grande quantidade de vezes, é tomado como verdade, claro que muitas vezes de forma não absoluta. As descobertas científicas, na maioria das vezes, foram feitas desta forma. Uma conjectura é proposta e verificada muitas vezes, para o maior número de casos, até que seja considerada verdadeira. Mas na Matemática, uma conjectura só é considerada verdadeira quando for demonstrada com argumentos lógicos, sem deixar qualquer margem de dúvida. Ou seja, realizar testes com casos particulares, por maior que seja a quantidade destes testes, não serve como demonstração ou prova de qualquer afirmação matemática.

> “...Em matemática o conceito de prova é muito mais rigoroso e poderoso do que o que usamos em nosso dia-a-dia e até mesmo mais preciso do que o conceito de prova como entendido pelos físicos e químicos. A diferença entre prova científica e prova matemática é ao mesmo tempo sutil e profunda. Ela é crucial para que possamos entender o trabalho de cada matemático, desde Pitágoras.
>
> A ideia de demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que sejam verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável”. (SINGH, 2008, p.41).

Apresentam-se nas seções seguintes, cinco demonstrações distintas do teorema de Pitágoras, sendo duas delas feitas por pessoas de grande reconhecimento científico e na sociedade, uma de amplo conhecimento acadêmico, uma de caráter geométrico, mas com propriedades aritméticas em seu desenvolvimento e a última que é bastante curiosa.

4.1 DEMONSTRAÇÃO DE EUCLIDES

Euclides de Alexandria (360 a.C. – 295 a.C.) foi um filósofo e matemático grego que escreveu, por volta de 300 a.C., uma das mais valiosas obras da história da Matemática chamada de “Os elementos”, que era uma coleção de 13 livros com muitas demonstrações de grande importância para a geometria e para a teoria dos números.

Em “Os elementos” de Euclides, livro I, a proposição 47 é o teorema de Pitágoras acompanhado de sua demonstração. Observe como o teorema é enunciado:

Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que formam o ângulo reto.

Demonstração:

Euclides iniciou sua demonstração construindo três quadrados, a partir dos lados de um triângulo ABC, reto em A e construindo um segmento de reta perpendicular a hipotenusa com extremidades em A e K, conforme a figura abaixo:

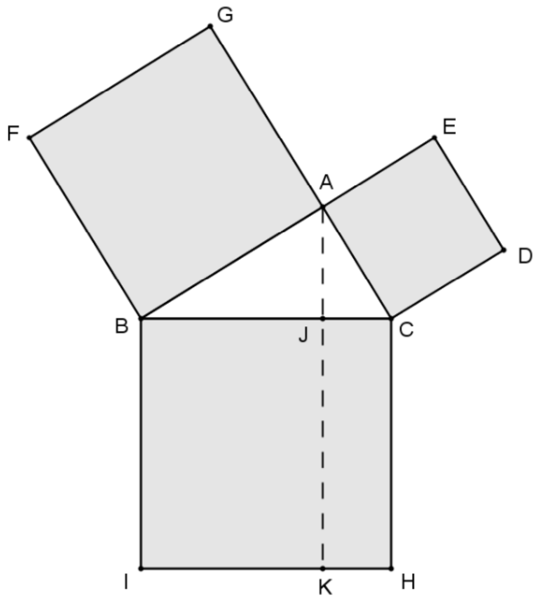

Fig. 10: Demonstração de Euclides.

O objetivo de Euclides era mostrar que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior. Para isso, Euclides traçou os segmentos $\overline{\mathrm{AH}}$ e $\overline{\mathrm{BD}}$ (Figura 11), construindo os triângulos ACH e DCB que são congruentes; pois $\overline{\mathrm{AC}} \equiv \overline{\mathrm{DC}}$, $\mathrm{A\hat{C}H} \equiv \mathrm{D\hat{C}B}$ (já que ambos são iguais a med($\mathrm{A\hat{C}B}$) + 90º) e $\overline{\mathrm{CH}} \equiv \overline{\mathrm{CB}}$, o que nos leva ao caso L.A.L. de congruência entre triângulos, que Euclides havia demonstrado na proposição 4 do mesmo livro. Observe a figura a seguir:

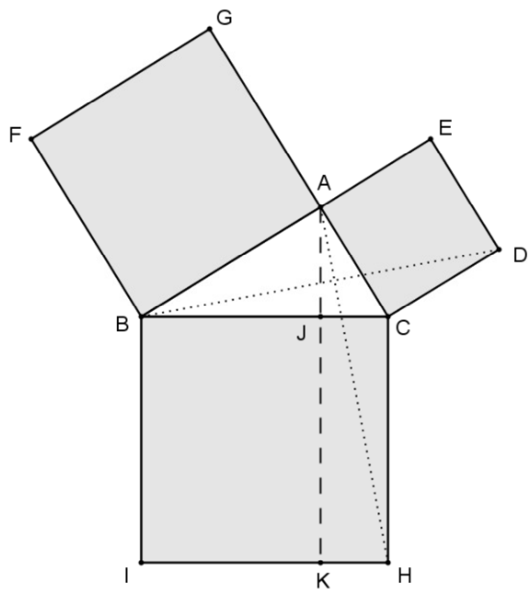

Fig. 11: Congruência na demonstração de Euclides.

Porém, o triângulo ACH e o retângulo JKHC possuem a mesma base $\overline{CH}$ e a mesma altura $\overline{CJ}$ (observe que os dois polígonos estão entre as paralelas $\overleftrightarrow{AK}$ e $\overleftrightarrow{CH}$). Na proposição 41, também do livro I, Euclides já demonstrara que um triângulo com a mesma base e altura de um quadrilátero, também possui metade de sua área. Assim, a área do triângulo ACH é a metade da área do retângulo JKHC. Da mesma forma, a área do triângulo DCB é metade da área do quadrado ACDE, pois ambos possuem base $\overline{CD}$ e altura $\overline{CA}$ (observe que os dois polígonos estão entre as paralelas $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{CD}$).

Como os triângulos ACH e DCB possuem a mesma área, pois são congruentes, os quadriláteros JKCH e ACDE também possuem áreas iguais, já que suas áreas são o dobro da área dos triângulos ACH e DCB, respectivamente.

Analogamente, os quadriláteros JKIB e ABFG têm áreas iguais. Mas, a área do quadrado BCHI é a soma das áreas dos quadriláteros JKIB e JKHC. Ou seja, a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores.

4.2 DEMONSTRAÇÃO DE LEONARDO DA VINCI

Leonardo da Vinci (1452 – 1519) é considerado um dos maiores pintores de todos os tempos. Autor de obras como *Mona Lisa*, *A última ceia* e *Homem Vitruviano*, Leonardo possuía diversos talentos. Um de seus talentos era a facilidade com a Matemática. Observe abaixo a demonstração do teorema de Pitágoras feita por este grande artista:

Dado um triângulo retângulo ABC, reto em A, a ideia de Leonardo da Vinci foi construir um quadrado a partir de cada lado do triângulo e mostrar que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior, assim como fez Euclides. Para isso, além dos quadrados, Leonardo utilizou dois triângulos retângulos congruentes ao triângulo original, conforme a figura abaixo:

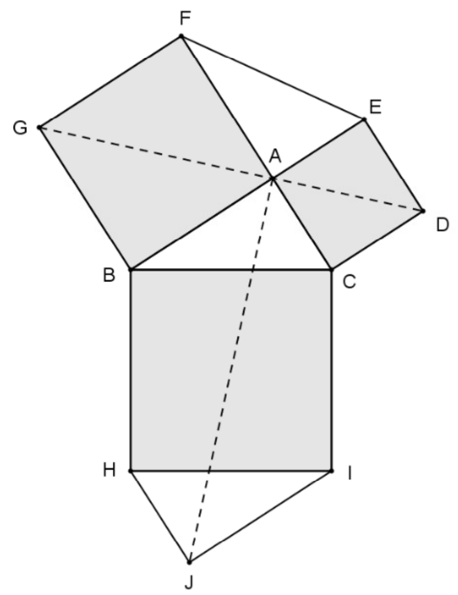

Fig. 12: Demonstração de Leonardo da Vinci.

Note que o segmento $\overline{DG}$ particiona o hexágono BCDEFG em dois quadriláteros congruentes, pois GBCD é o simétrico do quadrilátero GFED em relação ao próprio segmento $\overline{DG}$. Já o hexágono ABHJIC é dividido em dois quadriláteros congruentes pelo segmento $\overline{AJ}$, observe que o quadrilátero ABHJ é a rotação em 180º do quadrilátero JICA. Porém estes quatro quadriláteros são todos congruentes entre si. Para isso basta perceber a congruência entre os quadriláteros ABHJ e GBCD, pois $\overline{AB} \equiv \overline{GB}$, $A\hat{B}H \equiv G\hat{B}C$ (já que ambos são iguais a med($A\hat{B}C$) + 90º), $\overline{BH} \equiv \overline{BC}$, $B\hat{H}J \equiv B\hat{C}D$ (já que ambos são iguais a med($B\hat{C}A$) + 90º) e $\overline{HJ} \equiv \overline{CD}$.

Como os quatro quadriláteros são congruentes, então suas áreas são iguais. Assim como as áreas dos hexágonos BCDEFG e ABHJIC. Mas o primeiro hexágono é composto por dois triângulos retângulos congruentes ao ABC e pelos quadrados menores. Já o segundo hexágono, é composto por dois triângulos retângulos congruentes ao ABC e pelo quadrado maior. Estas duas afirmações garantem que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior.

4.3 DEMONSTRAÇÃO POR SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Esta é a demonstração mais difundida nos livros didáticos, por isso a mais conhecida nos dias de hoje. Esta demonstração é a mais utilizada, porque usa um conteúdo de grande importância, que é a semelhança de triângulos.

Dado um triângulo retângulo ABC, reto em A, constrói-se a altura relativa à hipotenusa, que a divide em dois segmentos que são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, denotadas na figura abaixo como “m” e “n”.

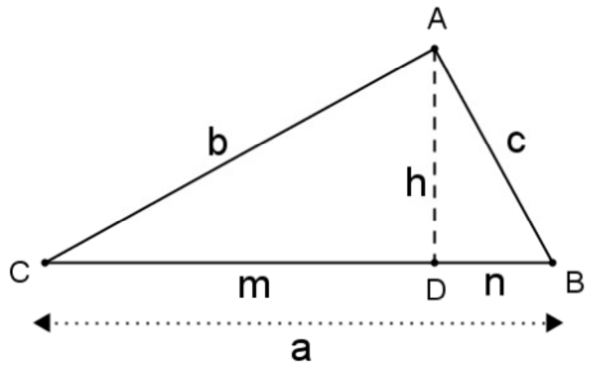

Fig. 13: Demonstração por semelhança de triângulos.

Observe que os triângulos DBA e DAC, retos em D, são semelhantes ao triângulo ABC, reto em A. Utilizando a semelhança entre DBA e ABC, tem-se que $\frac{c}{n} = \frac{a}{c}$. Aplicando a propriedade fundamental da proporção tem-se que c² = n.a. Com a semelhança entre os triângulos DAC e ABC, tem-se que $\frac{b}{m} = \frac{a}{b}$, que leva a relação $b^2 = m.a$. Somando as relações obtidas das duas semelhanças, chega-se a $b^2 + c^2 = m.a + n.a = (m + n).a = a.a = a^2$, que é a relação do teorema de Pitágoras.

4.4 DEMONSTRAÇÃO UTILIZANDO O TEOREMA DAS CORDAS

Para esta demonstração do teorema de Pitágoras, precisaremos do teorema das cordas. Segue abaixo a definição de uma corda e uma demonstração do teorema das cordas.

Corda: É um segmento de reta cujas extremidades pertencem a uma mesma circunferência. Um exemplo é o *“diâmetro da circunferência”*, nome dado a uma corda que passe pelo centro da circunferência.

Teorema das cordas: Se duas cordas se encontram, então o produto das medidas dos dois segmentos determinados em uma delas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados na outra.

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ cordas que se encontram em um ponto P no círculo, conforme a figura abaixo:

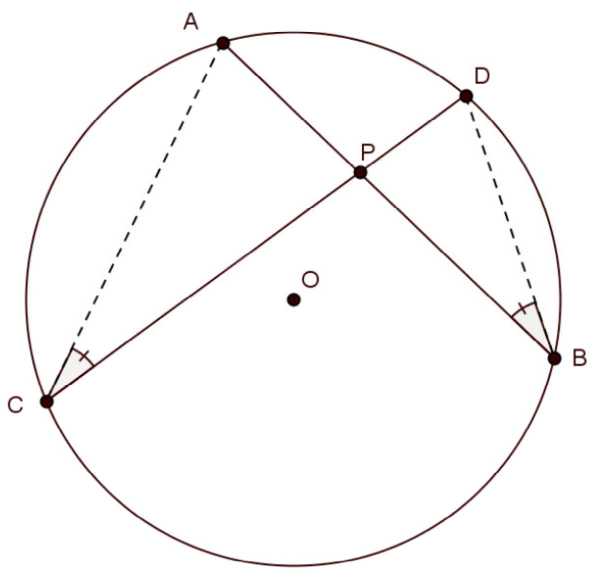

Fig. 14: Demonstração do teorema das cordas.

Construindo os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, nota-se que os triângulos ACP e DBP são semelhantes pelo caso A.A.A., pois $A\hat{C}D \equiv A\hat{B}D$ (já que ambos são ângulos inscritos no mesmo arco $\widehat{AD}$) e $A\hat{P}C \equiv B\hat{P}D$ (ângulos opostos pelo vértice). Por semelhança, tem-se $\frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PB}$.

Com este resultado vamos demonstrar o teorema de Pitágoras da seguinte forma:

Dado um triângulo ABC, reto em A, constrói-se uma circunferência com centro em B e raio $\overline{BC}$, conforme a figura abaixo:

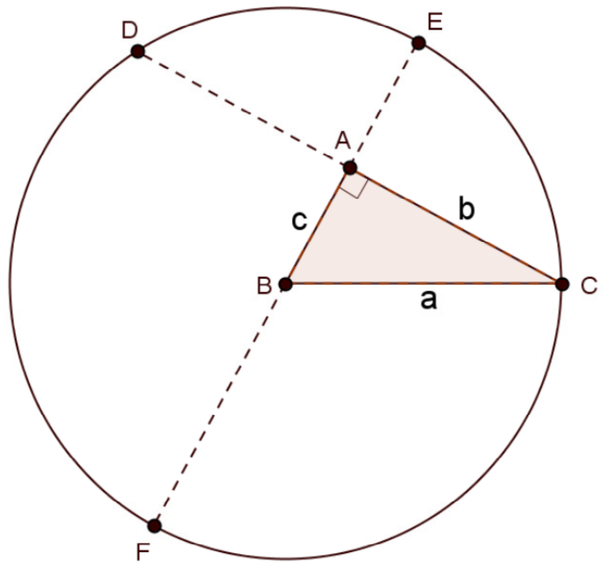

Fig. 15: Demonstração utilizando o teorema das cordas.

Observe que ao prolongarem-se os catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ obtemos as cordas $\overline{EF}$ e $\overline{CD}$, que se intersectam perpendicularmente no ponto A, sendo $\overline{EF}$ o diâmetro da circunferência. Desta forma a corda $\overline{CD}$ é intersectada em seu ponto médio, sendo AD = b. Basta observar que o triângulo BCD é isósceles de base $\overline{CD}$ e que $\overline{BA}$ é sua altura. Note que BF = a (raio da circunferência) e AE = a – c. Utilizando o teorema das cordas, tem-se AC.AD = AE.AF, ou seja b.b = (a – c).(a + c). Resolvendo o produto notável, encontra-se $b^2 = a^2 - c^2$. Ou equivalentemente, $a^2 = b^2 + c^2$, que é a identidade do teorema de Pitágoras, pois “a” é a medida da hipotenusa e, “b” e “c” são as medidas dos catetos do triângulo ABC.

4.5 DEMONSTRAÇÃO DE BHASKARA

Bhaskara (1114 – 1185) foi um matemático indiano que encontrou uma demonstração do teorema de Pitágoras baseada apenas na observação de duas figuras. Diz a lenda, que Bhaskara desenhou as duas figuras abaixo e escreveu somente uma pequena palavra em sua argumentação: Olha!

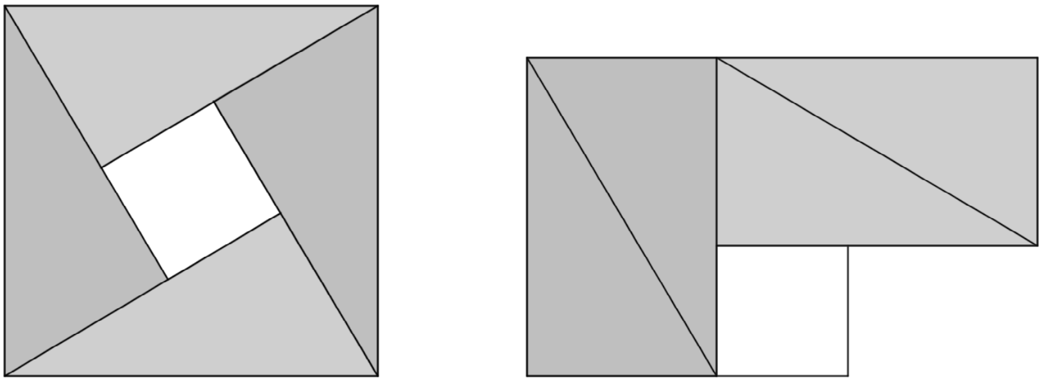

Fig. 16: Desenho feito por Bhaskara.

A intenção de Bhaskara foi construir uma figura com área medindo a² e outra figura com área medindo b² + c², onde a, b e c são, respectivamente, a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Observe a figura abaixo:

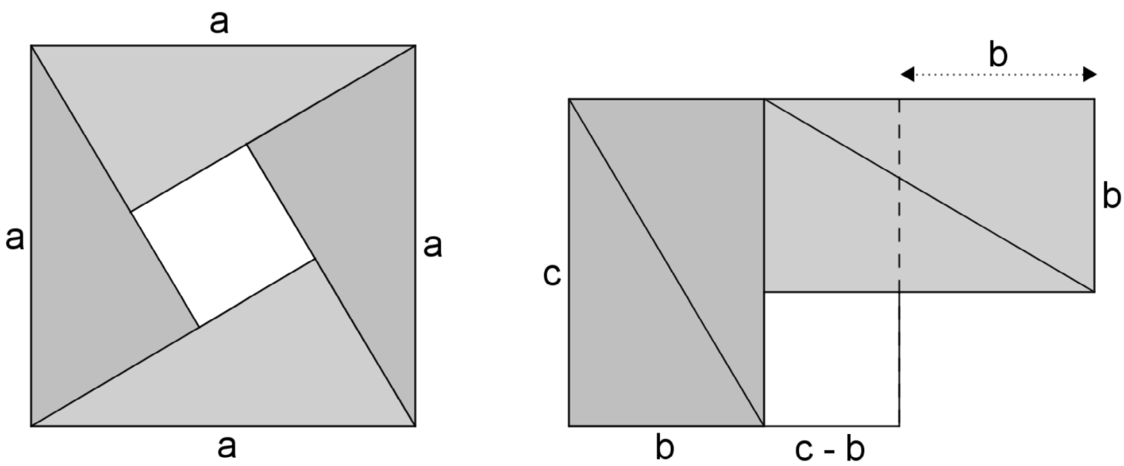

Fig. 17: Base para a prova de Bhaskara.

Ou seja, a primeira figura, que tem área a², e a segunda figura, que tem área b² + c², são formadas por quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado com lado medindo (c – b). Assim, Bhaskara conseguiu mostrar que a² = b² + c².

5 ANÁLISE DE ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Seguem abaixo as análises de 8 livros do ensino fundamental e de 8 livros do ensino médio, sobre a abordagem do tema “teorema de Pitágoras”. Os livros analisados, em sua grande maioria, são do “Plano Nacional do Livro Didático” (PNLD), programa do Ministério da Cultura e Educação (MEC), que distribui livros às escolas públicas.

5.1 LIVROS DO ENSINO FUNDAMENTAL

1 – Livro: Matemática - 9º ano, 6ª edição, São Paulo, 2006, Editora: Moderna e Autor: Edwaldo Bianchini.

Este livro traz, em seu Capítulo 8, uma Seção introdutória contando a parte histórica de Pitágoras, o local de seu nascimento e falando um pouco sobre a escola pitagórica. Na próxima Seção do Capítulo, o autor diz o que é um triângulo retângulo e apresenta seus lados (catetos e hipotenusa). Finalmente, na terceira Seção, um triângulo retângulo com hipotenusa medindo 5 e catetos medindo 3 e 4 é apresentado, juntamente com os quadrados construídos a partir de seus lados para fora do triângulo. Utilizando este exemplo, nota-se que as áreas dos respectivos quadrados são 25, 9 e 16 e que 25 = 9 + 16, ou seja, que $5^2 = 3^2 + 4^2$. Então o autor deste livro didático afirma que esta relação é válida para todo triângulo retângulo e generaliza enunciando o teorema de Pitágoras. Após a generalização, ele cita que há mais de trezentas provas para tal teorema e apresenta uma delas.

2 – Livro: Tudo é matemática - 9º ano, 3ª edição, São Paulo, 2010, PNLD 2011, Editora: Ática e Autor: Luiz Roberto Dante.

No Capítulo 7 o livro começa com uma parte histórica falando sobre os “esticadores de cordas” do antigo Egito, que usavam uma corda de 12 nós para construir ângulos retos, chegando ao triângulo com lados 3, 4 e 5. Antes de falar dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo, o autor já cita o que chama de “relação de Pitágoras”. Na próxima Seção, sem definir o que é um triângulo retângulo, apresentam-se seus lados (catetos e hipotenusa). Por fim, na Seção dedicada ao teorema de Pitágoras, ele é apenas enunciado. Sua demonstração aparece na Seção seguinte quando se apresentam as outras relações métricas no triângulo retângulo. Ao final desta Seção, uma parte intitulada de “Leitura” apresenta mais três demonstrações.

3 – Livro: Matemática e realidade - 8ª série, 5ª edição, São Paulo, 2005, PNLD 2008, Editora: Atual Editora e Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado.

O teorema de Pitágoras é apresentado no Capítulo 13 deste livro. O Capítulo se inicia com os lados (catetos e hipotenusa) de um triângulo retângulo e, em seguida, mostra as semelhanças em um triângulo retângulo com a altura relativa à hipotenusa. O teorema de Pitágoras é demonstrado em meio a outras relações métricas no triângulo retângulo. Outros tipos de demonstração e a parte histórica são apresentadas no final do Capítulo em uma Seção intitulada “Matemática no tempo”, após todas as aplicações e exercícios.

4 – Livro: Vencendo com e matemática - 8ª série, 1ª edição, São Paulo, 2005, Editora: Editora do Brasil e Autor: Miguel Asis Name.

Neste livro o teorema de Pitágoras é apresentado no Capítulo 13, e se inicia com uma parte histórica muito pequena sobre como os Egípcios construíam ângulos retos com uma corda com 13 nós igualmente espaçados (Note que no segundo livro analisado, a corda continha 12 nós). Porém o autor deste livro didático diz “o nó era considerado a unidade de medida”, o que parece estar errado. O correto parece ser que o espaço entre os nós é a unidade de medida, já que eles são igualmente espaçados. Após os lados (catetos e hipotenusa) de um triângulo retângulo serem apresentados, algumas relações métricas são dadas e demonstradas através de semelhança. Após alguns exercícios, o teorema de Pitágoras é demonstrado usando as relações já provadas. Ao final do Capítulo, em uma Seção intitulada como “Um pouco de história”, uma pequena parte histórica é apresentada.

5 – Livro: Novo praticando matemática - 8ª série, 1ª edição, São Paulo, 2002, PNLD 2005, Editora: Editora do Brasil e Autores: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos.

Na Unidade 6 os autores deste livro didático iniciam falando sobre ângulos retos no cotidiano e sobre o método dos Egípcios para construir ângulos retos com a corda de 13 nós. Em seguida, com o exemplo do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, faz a constatação sobre a relação entre as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados. A seguir, usa o quadrado com lado “b + c” para demonstrar o teorema de Pitágoras fazendo uma comparação entre a área do quadrado $(b + c)^2$ e a área do mesmo quadrado partido em um quadrado menor de lado medindo “a” e 4 triângulos retângulos com catetos b e c. Ou seja, a mesma área é dada por $a^2 + 2bc$. Ao final os autores deste livro didático apresentam uma pequena parte histórica intitulada “Falando de Pitágoras”.

6 – Livro: A conquista da matemática - 9º ano, 1ª edição, São Paulo, 2009, PNLD 2011, Editora: FTD e Autores: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr.

Na parte intitulada “Estudando as relações métricas no triângulo retângulo”, os autores deste livro didático iniciam o assunto com algumas curiosidades. Dentro desta parte, no Capítulo 49, apresentam-se os lados (catetos e hipotenusa) de um triângulo retângulo e a história dos Egípcios, utilizando-se agora uma corda de 12 nós. Usando as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo com lados 3, 4 e 5, enuncia-se a teorema de Pitágoras. Após alguns exemplos de aplicação, uma parte intitulada “Uma outra demonstração do teorema de Pitágoras”, é enunciada sem entretanto nenhuma demonstração ter sido feita. Isso pode levar o aluno à seguinte constatação: achar que um exemplo é uma demonstração, ou que vários exemplos seguidos são satisfatórios para se demonstrar algo.

7 – Livro: Matemática - Volume 8, 1ª edição, São Paulo, 2003, Editora: Moderna e Autoria do Projeto Araribá.

Na Unidade 4 “Relações no triângulo retângulo”, a parte 2, “Relações métricas no triângulo retângulo”, apresenta a demonstração do teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos, sem qualquer abordagem histórica. Após falar das aplicações do teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo, ângulos notáveis, tabela trigonométrica, relações trigonométricas em um triângulo qualquer e muitas atividades, apresenta-se uma parte histórica sobre a vida e a obra de Pitágoras.

8 – Livro: Matemática - Projeto Teláris - 9º ano, 1ª edição, São Paulo, 2012, Editora: Ática e Autor: Luiz Roberto Dante.

No Capítulo 6 o autor deste livro didático introduz o tema falando dos “harpedonaptas” que são os esticadores de cordas do antigo Egito, usado pela maioria dos autores citados anteriormente. Ainda desta vez, o autor deste livro didático afirma que a corda utilizada para obter ângulos retos com o triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 possuía 12 nós. Após esta pequena parte histórica, ele diz que este método é baseado no teorema de Pitágoras e enuncia o teorema. Em seguida, sem definir de forma rigorosa o que é um triângulo retângulo, seus lados (catetos e hipotenusa) são apresentados. E enfim, após apresentar o exemplo das áreas construídas a partir dos lados, o teorema de Pitágoras é demonstrado em meio às outras relações métricas no triângulo retângulo. Ainda, em tempo, após alguns exercícios o autor apresenta outras duas demonstrações do teorema.

5.2 LIVROS DO ENSINO MÉDIO

1 – Livro: Matemática: Ciências e aplicações - Volume 1, 6ª edição, São Paulo, 2010, PNLD 2012, Editora: Saraiva, Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.

No Capítulo 12, o teorema de Pitágoras é demonstrado junto com as outras relações métricas no triângulo retângulo, usando semelhança de triângulos. Após as aplicações do teorema de Pitágoras, uma parte chamada de “Um pouco de história” apresenta uma parte da história de Pitágoras e uma demonstração feita por James Abraham Garfield (1831 – 1881), vigésimo presidente dos Estados Unidos da América.

2 – Livro: Matemática Paiva - Volume 1, 1ª edição, São Paulo, 2009, PNLD 2012, Editora: Moderna, Autor: Manoel Paiva.

Ao final do Capítulo 3, na Seção 8, as relações métricas no triângulo retângulo são primeiro, citadas e, em seguida, demonstradas. A última delas é o teorema de Pitágoras. Em uma nota pequena o autor cita o livro *The Pythagorean Proposition* de Elisha Scott Loomis, onde há 367 demonstrações diferentes do teorema de Pitágoras.

3 – Livro: Matemática - Volume 1, 1ª edição, São Paulo, 2004, PNLD 2006, Editora: Moderna e Autores: Edwaldo Bianchini e Herval Paccola.

No Capítulo 2 os autores deste livro didático iniciam o tema enunciando diretamente o teorema de Pitágoras sem demonstrar ou fazer qualquer abordagem histórica. Em seguida, apresentam um exemplo onde se pede para calcular um cateto de um triângulo retângulo dados a medida da hipotenusa e do outro cateto que medem, respectivamente, 5 cm e 4 cm. Logo após é proposta aos leitores uma Seção de exercícios, que sem dúvida são mais difíceis que o exemplo apresentado. E, para encerrar, as aplicações do teorema no quadrado e no triângulo equilátero são rapidamente demonstradas. Nem no final do Capítulo, como alguns autores fazem, alguma parte histórica da vida de Pitágoras ou uma demonstração é apresentada.

4 – Livro: Matemática - Ensino médio - Volume 1, 4ª edição reformulada, São Paulo, 2004 (3ª tiragem, 2005), PNLD 2006, Editora: Saraiva e Autores: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz.

Na Unidade 11 deste livro as autoras iniciam o tema definindo o que é um triângulo retângulo e apresentando seus lados (catetos e hipotenusa). A seguir, apenas citam o teorema de Pitágoras, dizendo que ele foi demonstrado pela escola pitagórica e mostram às aplicações no quadrado e no triângulo equilátero. Toda esta abordagem não chega a uma página e meia de um livro que tem formato pequeno. Após tal abordagem, são apresentados quatro exercícios resolvidos para encerrar o tema. Também, neste livro, nenhuma demonstração ou abordagem histórica é apresentada em qualquer parte do Capítulo.

5 – Livro: Conexões com a matemática - Volume 1, 1ª edição, São Paulo, 2010, PNLD 2012, Editora: Moderna e Autora: Juliane Matsubara Barroso.

Este livro, em sua Unidade 5, traz na página 301 o tema com uma pequena abordagem histórica, novamente citando o método usado pelos egípcios para verificar ângulos retos usando uma corda para formar um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5. Esta autora deste livro didático também considera a corda com 12 nós. Em seguida, ela apresenta o triângulo com medidas 3, 4 e 5, e os quadrados construídos a partir dos lados menores que tem a soma de suas áreas igual à área do quadrado construído a partir do lado maior, usando um quadriculado com quadradinhos unitários. E desta vez, a autora deste livro didático diz que nem sempre isso será de fácil visualização, pois os lados do triângulo podem não ser comensuráveis, o que impediria a construção de um quadriculado conveniente. Então, usando este argumento, ela apresenta sua primeira demonstração usando composição de áreas. Essa demonstração foi feita por James Abrahan Garfield (1831 – 1881), vigésimo presidente dos Estados Unidos da América.

Após alguns exemplos, a autora deste livro didático traz um fragmento do livro “O último teorema de Fermat” mostrando o pensamento de Fermat para generalizar o teorema de Pitágoras. Por último, em uma Seção intitulada de “A semelhança e o teorema de Pitágoras”, o livro demonstra as relações métricas em um triângulo retângulo, utilizando semelhança de triângulos e a última das relações demonstradas é o teorema de Pitágoras.

6 – Livro: Matemática - Ciência, linguagem e tecnologia - Volume 1, 1ª edição, São Paulo, 2011, PNLD 2012, Editora: Scipione e Autor: Jackson Ribeiro.

Após demonstrar as relações métricas em um triângulo retângulo na Seção 5 da Unidade IV, o autor deste livro didático traz na Seção 6 o teorema de Pitágoras. Ele introduz o tema com uma aplicação prática usada pelos operários da construção civil. Para verificar se duas paredes formam um ângulo reto eles marcam 30 cm em uma delas e 40 cm na outra. Feito isto, se a distância entre os pontos marcados for 50 cm, as paredes são perpendiculares, caso contrário elas formam um ângulo obtuso se tal distância for maior que 50 cm ou agudo caso seja menor que 50 cm. Em seguida, ele enuncia o teorema e usa as relações demonstradas na Seção anterior para mostrar o teorema de Pitágoras. Em um recorte da página, ele fala rapidamente sobre o fato da soma das áreas dos quadrados construídos a partir dos catetos terem a mesma área do quadrado construído a partir da hipotenusa. No final da Unidade, há uma Seção intitulada "Um pouco de história", que fala sobre os egípcios e babilônicos e o método utilizado para construir ângulos retos, sobre Pitágoras e a escola pitagórica e também sobre a quantidade de demonstrações descobertas.

7 – Livro: Matemática - Coleção: Novo olhar - Volume 1, 1ª edição, São Paulo, 2010, PNLD 2012, Editora: FTD e Autor: Joamir Souza.

O autor deste livro didático inicia o tema apresentando uma pequena parte histórica onde cita Pitágoras e um fragmento do texto de Euclides de Alexandria em uma imagem muito pequena. Em seguida enuncia o teorema e faz uma demonstração utilizando um quadrado de lado "b + c". Em meio às atividades propostas, uma parte intitulada "Contexto", que é uma denominação um tanto quanto ruim para uma Seção de um livro, apresenta o mesmo exemplo citado anteriormente da construção civil.

8 – Livro: Matemática e suas tecnologias 2ª série - Coleção: Áreas do conhecimento, 1ª edição, São Paulo, 2005, PNLD 2009, Editora: IBEP e Autores: Angel Panadés Rubió e Luciana Maria Tenuta de Freitas.

Na página 206 deste livro os autores deste livro didático começam a demonstrar as relações métricas no triângulo retângulo utilizando semelhança entre os triângulos formados, quando se constrói a altura relativa à hipotenusa. Dentre as relações, está o teorema de Pitágoras, que tem seu enunciado e uma prova feita, sem qualquer nota histórica sobre o teorema e nem sobre Pitágoras. Em seguida, são apresentados dois exemplos, um em um triângulo retângulo para usar todas as relações e um outro em um triângulo equilátero para aplicar o teorema de Pitágoras em busca da altura do triângulo. Após esta breve exposição, tem-se uma Seção de exercícios.

5.3 OBSERVAÇÃO DAS ANÁLISES FEITAS SOBRE OS LIVROS

O teorema de Pitágoras é um tema de grande notoriedade e é um resultado muito explorado nos conteúdos de trigonometria e geometria seguintes, por isso deve ser um tema com um tratamento especial. Mas o que vemos nos livros dos ensinos fundamental e médio são abordagens pobres de informação histórica e falta de argumentação de provas, principalmente nos livros de ensino médio.

Nos livros de ensino fundamental analisados é quase que unânime a apresentação do tema com uma pequena parte histórica falando dos “esticadores de corda” do antigo Egito. Os egípcios utilizavam uma corda com 13 ou 12 nós igualmente espaçados? Esta dúvida fica no ar. Note que se a corda for aberta, com 12 nós há 11 espaços entre os nós, mas 11 espaços não geram um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5, pois 3 + 4 + 5 = 12. Ou seja, faz-se necessário que a corda possua 13 nós para que 12 espaços entre eles sejam gerados. Mas se a corda for fechada, com 12 nós, há 12 espaços entre os nós. O que nos leva a seguinte conclusão: quando os autores citam a corda com 12 nós, parece que eles se referem a uma corda fechada, sem extremidades. E quando a corda é citada com 13 nós, então ela é aberta. Mas esta dualidade de informação, sem qualquer tipo de informação textual ou ilustrada, confunde o leitor que consulte dois ou três materiais diferentes.

Nos livros de ensino médio analisados, a abordagem histórica praticamente não existe. Em nosso entendimento, isto é uma pena, pois é a oportunidade de se acrescentar mais conhecimento ao aluno que já tendo estudado o tema no ensino fundamental, encontra-se mais maduro para uma análise mais completa. Apenas um dos livros faz este tipo de abordagem, mas de forma muito breve.

A abordagem histórica é muito importante e é necessário que seja feita com a maior precisão possível, a fim de gerar conhecimento e interesse no leitor em se aprofundar no tema. Caso contrário, isso poderá afastá-lo do assunto, fazendo com que ele não perceba com quanta riqueza o resultado foi descoberto. Impossibilitando-o de guardar o resultado por meio de uma motivação histórica, que sem dúvida agrega mais qualidade a aprendizagem e prolonga, ou até mesmo perpetua, sua memória em relação ao que foi estudado. Ainda falando sobre a parte histórica, poucos autores contam a história do próprio Pitágoras e da escola pitagórica na introdução do tema. Este fato nos parece pesar contra, pois esta história é rica em detalhes curiosos e, além disso, é um capítulo interessante da construção do conhecimento matemático e filosófico que temos hoje em dia. Acreditamos que os professores de ensino básico precisam ter conhecimento da história da Matemática para poderem motivar os seus alunos. De fato, segundo a M.A.A. (Mathematical Association of America), o conhecimento da história da Matemática mostra aos alunos que ela é uma importante conquista humana, geralmente desenvolvida de forma intuitiva e experimental a partir da necessidade de se resolver problemas nas mais diversas áreas do saber.

Quanto às demonstrações, existe uma grande quantidade delas e, em todos os livros de ensino fundamental analisados, temos pelo menos uma delas. A mais comum entre elas é a que usa semelhança de triângulos para demonstrar todas as relações trigonométricas no triângulo retângulo, inclusive o teorema de Pitágoras. Isto é um ponto positivo, e mais interessante ainda são os livros que além desta demonstração fornecem uma leitura com mais uma ou duas demonstração diferentes. Além disso, seria importante que os autores publicassem que estas são apenas duas ou três de muitas demonstrações existentes. Isto é uma curiosidade que pode despertar um interesse no leitor, instigando-o a pesquisar mais em outras fontes. Um fator muito negativo é que, na maioria dos livros de ensino médio, não são apresentadas sequer uma demonstração. Assim, como foi dito sobre a abordagem histórica, a respeito da maturidade que o aluno já adquiriu estudando o assunto no ensino fundamental, também se perde uma grande oportunidade quando não se apresentam demonstrações do teorema no ensino médio. Neste momento o aluno já possui uma bagagem matemática maior para entender e discutir provas mais complexas. O fato de o aluno já ter estudado o teorema de Pitágoras em outra oportunidade, leva a maioria dos autores a tratar o tema com superficialidade neste momento acadêmico, mas isso nos parece ser prejudicial. Esta objetividade, ao invés de ajudar no processo de construção do conhecimento matemático, acaba o empobrecendo.

6 PROPOSTA DIDÁTICA DE ABORDAGEM DO TEMA “TEOREMA DE PITÁGORAS”

Neste trabalho, pode-se conhecer parte da história da Matemática sobre Pitágoras, a escola pitagórica e o teorema de Pitágoras. Este fragmento da história da Matemática é riquíssimo em lendas e curiosidades que podem encantar qualquer leitor, até os matematicamente leigos. Por isso, seria importante que os livros didáticos e os professores de Matemática dessem devida atenção à abordagem histórica deste tema nas salas de aula. Ou seja, quando forem ensinar o teorema de Pitágoras, que a abordagem seja mais rica em conteúdo histórico.

> “A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.” (PCN´s Ensino Fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998, p. 42).

A proposta feita por este trabalho é que ao se ensinar o teorema de Pitágoras, a abordagem mais eficaz, mais profícua, mais interessante seja a da descoberta. Que o aluno ao ser iniciado nesta viagem no tempo, seja instigado a desenvolver uma curiosidade para buscar novas informações históricas. Isto facilita o aprendizado e incentiva o compartilhamento de conhecimento entre os alunos da turma.

Outro fator de grande importância é que o teorema de Pitágoras possui um número muito grande de demonstrações distintas. Então, é interessante que o professor e o livro didático apresentem diferentes demonstrações e, mais do que isso, incentive seus alunos a demonstrar o teorema de Pitágoras de diferentes formas. Crie uma conjectura e peça a seus alunos que trabalhem no tema, forneça algumas ferramentas e incentive o aluno a busca pela elaboração da prova formal. Isto já pode ser feito no 9º ano do ensino fundamental, como diz o fragmento dos "Parâmetros Curriculares Nacionais" abaixo:

> "Apesar da força de convencimento para os alunos que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências possam ser aceitas como provas no terceiro ciclo, é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais." (PCN´s Ensino fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998, p. 127).

O que normalmente acontece é que as demonstrações aparecem timidamente nos livros didáticos do ensino fundamental e, praticamente, desaparecem nos livros do ensino médio. E, se o professor não apresentar as demonstrações aos alunos nesta fase da vida acadêmica, os alunos, que ingressarem em carreiras da área de Ciências Exatas, serão apresentados às provas e demonstrações na universidade. Isto pode ser traumático para o aluno, pois parece que a Matemática estudada na educação básica é completamente diferente da Matemática da educação superior. Se no ensino fundamental o aluno já pode ser apresentado às demonstrações e provas, no ensino médio existe a oportunidade de aprofundamento dos alunos nestas mesmas demonstrações apresentadas no ensino fundamental. A proposta deste trabalho é de sugerir que as demonstrações do teorema de Pitágoras sejam, além de apresentadas no ensino fundamental, aprofundadas no ensino médio. Apresentamos a seguir a orientação dada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio:

> "O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma

> demonstração para fatos que lhe são familiares.” (PCN+ Ensino médio – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 2007, p. 123 e 124)

A última proposta deste trabalho é que o ensino do teorema de Pitágoras seja aplicado em situações reais, assim como em um dos livros didáticos analisados, que trabalha com um exemplo da construção civil que pode facilmente ser aplicado na própria sala de aula. Os alunos podem ser convocados a verificarem a perpendicularidade das paredes da sala de aula usando o teorema de Pitágoras, mais especificamente o triângulo com lados medindo 30 cm e 40 cm. Caso o terceiro lado deste triângulo meça 50 cm, então as paredes serão perpendiculares. Quando se aplica o saber teórico a uma situação próxima do aluno, ele deixa de ser teórico e passa e ser prático, despertando o interesse do aluno pelo tema. O teorema de Pitágoras é um exemplo de conhecimento que pode ser aplicado a inúmeras situações do cotidiano, basta que os professores, e também os autores de livros didáticos, busquem estas aplicações, a fim de apresentar o conteúdo de maneira mais interessante e agradável.

Abaixo apresentamos um resumo de nossas propostas, acima discutidas, que acreditamos serem importantes na contribuição do processo ensino-aprendizagem do tema “teorema de Pitágoras”:

1ª) História da Matemática: O professor do ensino básico deve conhecer a Matemática do passado (função direta da História da Matemática), para melhorar a compreensão da Matemática que eles irão ensinar (função metodológica e epistemológica da História da Matemática). Dessa forma, o professor pode motivar melhor os alunos sobre o tema, em sua prática docente (uso da História da Matemática em sala de aula).

2ª) Formalização: O professor, principalmente do ensino médio, deve sempre apresentar um enunciado bem posto e uma prova completa de um resultado que esteja apresentando em sala de aula. (Aprender Matemática não é demonstração da capacidade de decorar. Aprender a Matemática como um receituário de fórmulas é tedioso para os jovens e pode contribuir para afastá-los das carreiras das Ciências Exatas e da Terra).

3ª) Aplicação: O professor deve buscar aplicações do tema no cotidiano. Como já mencionamos, segundo a Mathematical Association of America, a Matemática é desenvolvida a partir da necessidade de se resolver problemas nas mais diversas áreas do saber. (Apresentar “para que serve”, mostra que a Matemática não é uma ciência fechada em si mesma. Muito pelo contrário, a Matemática é uma ferramenta importante no desenvolvimento de outras ciências, como Computação, Economia, Arquitetura, Engenharia e Física. Inclusive, mais recentemente, nas carreiras das áreas da Saúde, como Biologia e Medicina).

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a apresentação de uma parte histórica, demonstrações e análise de 16 livros didáticos de Matemática, pode-se concluir que o teorema de Pitágoras possui um encanto praticamente inexplicável. Este teorema é o mais demonstrado de toda a Matemática, sendo essas demonstrações de todos os tipos e características. Apesar disso, o teorema tem um enunciado simples que se traduz em uma identidade pequena e direta.

O desenvolvimento da história em torno do triângulo retângulo, dos ternos pitagóricos e do teorema de Pitágoras é cheia de incertezas e lendas. Muitos documentos históricos dão conta do conhecimento da regra e da aplicação e benefícios que ela trazia, mas em momento algum a sua demonstração é apresentada. Da mesma forma, não existe nenhum documento que comprove a demonstração por parte de Pitágoras ou da escola pitagórica, porém este crédito é dado a Pitágoras e seus discípulos desde aquele tempo. A própria história carregou este fato até os dias de hoje, assim como todas as lendas que os cercam.

Teorema e história tão fascinantes merecem atenção especial dos livros didáticos de Matemática, que apresentam a parte histórica de maneira muito breve e despretensiosa. A apresentação da parte histórica deve ter a intenção de motivar o leitor a se interessar pelo teorema de Pitágoras, buscando mais fontes e sendo instigado a dissecar o tema (mesmo que esta tarefa seja difícil). Assim, o aluno teria a real dimensão da importância deste teorema para a história da Matemática e para o desenvolvimento da Geometria que temos nos dias de hoje. Os livros didáticos analisados, principalmente os de ensino médio, tratam o assunto com superficialidade. Assim, perde-se a oportunidade de acrescentar conhecimento, motivar e mostrar um lado mais real no estudo da Matemática, para estes alunos que estão no final do ensino fundamental e no início do ensino médio. O desenvolvimento da parte histórica de qualquer conteúdo matemático mostra para os alunos que a Matemática é uma ciência construída pelos homens ao longo de muito tempo, com muito esforço e estudo. Isto, de certa forma, humaniza o conhecimento e traz o aluno para mais próximo da Matemática. Como o teorema de Pitágoras possui uma história bela em detalhes e curiosidades, é um desperdício não utilizá-la para motivar os alunos a gostarem um pouco mais de Matemática.

As demonstrações do teorema são itens que ficam de fora em alguns livros, que apresentam o teorema sem qualquer justificativa formal. Um livro, em especial, leva o aluno a crer que um exemplo é uma demonstração, quando apresenta sua primeira prova com o título de “outra demonstração”. A maioria dos livros apresenta apenas um tipo de demonstração, sem citar que existe uma enorme quantidade de demonstrações distintas para tal teorema. Há também alguns livros de ensino médio que enunciam o teorema, apresentam um exemplo e partem para os exercícios, que são bem mais difíceis que o exemplo apresentado. Esta ocultação de provas e de demonstrações apresenta uma Matemática muito direta, desinteressante e irreal.

Matemática pode ser, brevemente apresentada como sendo, composta por conjecturas, histórias, demonstrações e aplicações. Por essa razão, recomendamos que nada disso pode ficar de fora dos livros didáticos e da sala de aula!

8 BIBLIOGRAFIA

[1] BOYER, Carl B. *História da matemática*. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.

[2] CREASE, Robert P. *As grandes equações: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram*. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

[3] CYRINO, Hélio Fernando Ferreira. *Matemática & Gregos*. São Paulo: Editora Átomo, 2006.

[4] MARQUES, Sofia Cardoso. *A descoberta do teorema de Pitágoras*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

[5] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. Ensino Fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998, p. 42.

[6] ________. Ensino fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998, p. 127.

[7] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS MAIS. Ensino médio – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 2007, p. 123 e 124.

[8] SINGH, Simon. *O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*. 13. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[9] UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação. *Apresentação de trabalhos monográficos de conclusão de curso*. 8. ed. ver. Niterói: EdUFF, 2005.