Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Estudo de Abordagens dos Números Irracionais nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Saulo Ferreira Felix

Catalão

2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Saulo Ferreira Felix

Título do trabalho: Estudo de Abordagens dos Números Irracionais nos Anos Finais do Ensino Fundamental

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [**X**] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Saulo Ferreira Felix

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 02 / 07 / 2018

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Saulo Ferreira Felix

Estudo de Abordagens dos Números Irracionais nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.

Catalão

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Felix, Saulo Ferreira
Estudo de Abordagens dos Números Irracionais nos Anos Finais do Ensino Fundamental [manuscrito] / Saulo Ferreira Felix. - 2018.
0 68 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.
Trabalho de Conclusão de Curso Stricto Sensu (Stricto Sensu) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, PROFMAT- Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RC), Catalão, 2018.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Ensino Fundamental. 2. Números Irracionais. 3. Aprendizagem. I. Bergamaschi, Paulo Roberto , orient. II. Título.

CDU 512.5

Universidade Federal de Goiás - UFG
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

UFG

PROFMAT

Defesa N° 13

Ata de Defesa da Dissertação

Em 29 de junho de 2018, às 9 h 40 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr. Paulo Roberto Bergamaschi (orientador), Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior, Dr. Jean Carlo da Silva para, em sessão pública realizada na Sala de Reuniões (Centro Integrado de Pesquisa), da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação da Dissertação intitulado "Estudo de Abordagens dos Números Irracionais nos Anos Finais do Ensino Fundamental", de autoria de Saulo Ferreira Felix, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo(a) presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que, em 30 min procedeu a apresentação da Dissertação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado: (X) **Aprovado** ou ( ) **Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12 h 20 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Paulo Roberto Bergamaschi, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente.

Dr. Paulo Roberto Bergamaschi
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Porfírio A. dos S. Júnior

Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior
UFG/IMTec – Catalão

Dr. Jean Carlo da Silva
UNIUBE – Uberlândia

Saulo F. Felix

Saulo Ferreira Felix
Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RC/UFG

Dedico à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, aos meus familiares... , ao meu orientador, à Banca Examinadora, e à CAPES pelo apoio.

"O conhecimento provem também da simples observação..." (Desconhecido)

RESUMO

Este trabalho objetivou realizar uma investigação nas abordagens desenvolvidas sobre o conjunto dos números irracionais nos anos finais do ensino fundamental A metodologia utilizada é de natureza qualitativa e técnica de análise documental. Portanto, não necessita de interferência imediata na prática empírica e não impõe interação de imediato da construção da teoria e a prática. Deste modo foi observado como o ensino destes números é exposto a estes alunos e como este assunto é abordado nos livros didáticos de matemática destas séries. Como suporte para o trabalho é apresentada a exposição de procedimentos matemáticos dos elementos pertinentes ao estudo e à análise de literaturas em duas coleções de matemática do ensino fundamental. Um modelo alternativo é proposto. Verificou-se uma abordagem estática e repetitiva para o ensino dos números irracionais, a qual se resume em um material didático sem mudanças relacionadas a essa abordagem ou metodologia aplicada ao ensino dos números racionais e irracionais.

Palavras-chave: Ensino Fundamental. Números Irracionais. Aprendizagem.

ABSTRACT

This work aimed to carry out an investigation in the approaches developed on the set of irrational numbers in the final years of elementary school. The methodology used is of a qualitative and technical nature of documentary analysis. Therefore, it does not need immediate interference in empirical practice and does not impose immediate interaction of the construction of theory and practice. In this way it was observed how the teaching of these numbers is exposed to these students and how this subject is approached in the textbooks of mathematics of this series. As support for the work is presented the exposition of mathematical procedures of the elements pertinent to the study and analysis of literatures in two collections of primary school mathematics. An alternative model is proposed. There was a static and repetitive approach to the teaching of irrational numbers, which is summarized in a didactic material without changes related to this approach or methodology applied to the teaching of rational and irrational numbers.

Key words: Elementary School. Irrational Numbers. Learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - medida de um segmento em relação ao segmento unitário......................28
Figura 2 – segmento w menor que o unitário 28
Figura 3 - Quadrado de lado unitário...29
Figura 4 - pentágono regular..31
Figura 5 - Polígonos regulares inscritos...40
Figura 6 - pentágono regular caracterizado 40
Figura 7 - Aproximação gráfica pelo GEOGEBRA. 41
Figura 8 - retângulo de ouro...42
Figura 9 - retângulo de ouro 2..42
Figura 10 - segmento da razão áurea 43

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Aproximação para π 41
Tabela 2 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 1 67
Tabela 3 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 2 67
Tabela 4 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 3 67
Tabela 5 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 4 68
Tabela 6 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 5 68

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CBC	Currículo Básico Comum
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
IDEB	Índice de Desempenho da Educação Básica
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14
1. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 18
1.1. Pesquisa do trabalho 18
2. NÚMEROS 20
2.1 Caracterizações dos números racionais 20
2.2. Caracterização dos números irracionais. 25
2.3. Caracterização de segmentos incomensuráveis. 27
2.4. Caracterizações de conjunto. 32
3. ABORDAGEM DOS IRRACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL 34
3.1. Estudos de raízes não exatas. 37
3.2. Alguns números irracionais particulares: π, ϕ, e 39
3.3. Incomensurabilidades dos irracionais no ensino fundamental 44
4. ANÀLISE DA ABORDAGEM DO ENSINO 46
Referências 54
Apêndice A 57
Apêndice B 60
Apêndice C 62
Apêndice D 64
Apêndice E 65
Apêndice F 67

INTRODUÇÃO

Desde os tempos do antigo Egito trabalha-se com estudos numéricos visando solução de questões do cotidiano, gerando, desta forma, a interação dos números irracionais com termos e questões práticas de geometria. Questões como a divisão de áreas de plantio e áreas de subsistências à beira do rio Nilo, que após as enchentes obrigavam novas marcações e divisões para a restituição de posses destas terras de cultivo. Também fatos matemáticos, tais como: o perímetro do círculo, a diagonal de um quadrado de lado unitário e o número áureo.

Dentre estas situações, uma de importância para o surgimento dos números irracionais ocorreu aproximadamente no século V a.C., na determinação da relação da diagonal e o lado do quadrado, momento em que se percebeu que estes segmentos não são comensuráveis (ditos incomensuráveis). Observa-se que dois segmentos são incomensuráveis se a razão destes não puder ser expressa como razão de números inteiros. Este episódio no decorrer do tempo foi rotulado de ‘A Crise dos Incomensuráveis’ (POMMER, 2012).

Adotando que existiu a crise dos incomensuráveis, visto que para alguns historiadores esta não foi confirmada, por volta do período V e III a.C., os pitagóricos, matemáticos destacados desta época

> “[...] transpuseram o fato gerado por esta situação instituindo o método que veio constituir-se como característica típica da cultura matemática grega da época: a relação entre a diagonal e o lado do quadrado não deveria ser expressa por um número, mas por meio de elementos geométricos.” (POMMER, 2012, p. 19)

Não é difícil indicar esta abordagem grega para números irracionais observando um trecho da obra “Diálogo de Platão”, onde Sócrates por meio de um desenho de um quadrado de lados duas unidades, pede ao escravo de Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro da área do quadrado desenhado por ele. A narrativa de Sócrates, encontrada no Diálogo de Platão, ilustra a cultura típica dos gregos clássicos. Segundo POMMER (2012) após erros e tentativas o escravo de Menon, de acordo com o texto no ***Diálogo***, mostra a Sócrates um quadrado de lados iguais à diagonal do quadrado que Sócrates havia desenhado inicialmente. Com os números irracionais associados á geometria, pelos antigos gregos, pode ser pensado se realmente os antigos gregos identificavam os irracionais como números? Schubring (2005) coloca como negativo este entendimento por grande parte dos matemáticos e historiadores atuais.

Segundo Schubring (2005) desde a possível identificação da ‘Crise dos Incomensuráveis’, os números irracionais permaneceram fora de contexto e não compreendidos na Matemática, ocorrendo uma concordância que até meados do século XVIII não houve trabalho matemático de respaldo para caracterizar ou conceituar os números irracionais e assim configurar os números reais. Desta maneira, uma verdadeira compreensão dos números irracionais, mostrou-se necessária desde esta época.

Matemáticos trabalharam e formularam teoremas e postulados, como irracionalidade da raiz quadrada de 2 , números de Merssene, aplicação em cálculos financeiros, aplicação em cálculos de engenharia, em biomédicas dentre outros, reforçando a importância do conjunto dos irracionais no uso ou contraprovas de postulados ou cálculos práticos. Esta importância também é explicitada e desenvolvida atualmente de forma mais tecnológica pela criptografia computacional, porém pouco divulgada por envolvimento de patente, como o trabalho de Borges et al (2018), a qual é usada em comunicação virtual e formulação de senhas e codificação de sistema de leitura para programas de segurança.

Observado isto fica evidente a grande importância do estudo da maneira de se ensinar os números irracionais nos anos finais do ensino fundamental (oitavos e nonos anos).

Segundo Pommer & Pommer (2012) a maneira como ocorre à introdução à aprendizagem dos números irracionais no ensino fundamental sofre variantes, as quais são influenciadas pelos fatores geográficos, econômicos e sociais. Escolas mais próximas de grandes centros urbanos diferem de escolas interioranas, pois ambas têm recursos evidentemente diferenciados à disposição, como a proximidade com centros tecnológicos e universidades.

Lembrando-se do intuito matemático que foi foco de estudo deste trabalho, que é o estudo de como vem sendo abordado os números irracionais nos anos finais do Ensino Fundamental, fica também notório e trivial que a proximidade com centros tecnológicos, como universidades, influi de forma positiva este início de aprendizagem, pois esta proximidade facilita acesso a conhecimentos e práticas matemáticas mais dinâmicas e atualizadas, devido ao menor custo de efetivação destas ações nas proximidades destas instituições. A proximidade a grandes centros econômicos e educadores também interfere de forma mais concisa em projetos advindos do Governo Federal. Estes projetos partem inicialmente para interferências no livro didático como o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que é base para ensino a algumas décadas.

O norte de ensino na maioria das séries da educação básica, não sendo diferente no ensino fundamental, continua sendo o livro didático. Este obedece aos PARAMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) e Programa Nacional do Livro Didático promovidos pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Ainda, de acordo com cada estado, pode ou deve atender a um terceiro parâmetro, a exemplo o usado no estado de Minas Gerais, o Currículo Básico Comum (CBC). Estes parâmetros e o próprio CBC discorrem maneiras distintas de organizar o conhecimento a ser adquirido pelo aluno, o que daria assunto extenso e fora do contexto em questão. De acordo com POMMER (2011), em formas gerais, o livro didático introduz os números irracionais num viés empírico e desenvolve este tema de modo simplificado, principalmente trabalhando aspectos de cálculos operacionais envolvendo radicais, não caracterizando aspectos essenciais, que permitiriam entender a natureza semântica deste tema.

Os números irracionais não são tão intuitivos, sendo seu entendimento um problema de natureza teórica. Para que o ensino dos irracionais tenha significado verdadeiro deve haver um entendimento no modo como abordá-lo, ou seja, como realizar a passagem do conhecimento empírico, para o conhecimento teórico, conforme destaca Vigotski (2003). Esta passagem de conhecimento pode ser feita de forma mais efetiva, a depender da maneira associada ao método empírico, o que motiva um questionamento na escolha destes processos de introdução e consolidação a serem adquiridos teoricamente pelo aluno. Logo, é natural pressupor que o trabalho com imagens em impressos de papel ou softwares seja o caminho a seguir. Entretanto, um dos exemplos localizado nos livros didáticos destas séries é o cálculo das arestas de um cubo de volume "X", o qual retorna a raiz cúbica de X como o valor da aresta. Quando este volume for igual a 2, a aresta será raiz cúbica de 2, medida que não pode ser construída com geometria descritiva, ou seja, com régua e compasso. Este fato pode gerar dificuldades de entendimento e veracidade nos casos de construções a serem estudados pelo aluno, como construções das diagonais de polígonos e sólidos ou até mesmo na construção de simples arestas, observado que ocorrerá um segmento que não pode ser construído.

Vale salientar que:

> ...os números irracionais representam uma ideia matemática sofisticada, não trivial e pouco intuitiva, dificultando a abordagem deste assunto em sala de aula. Esta intrínseca característica teórica remete a uma necessária busca de recursos didáticos e epistemológicos para discutir a problemática de introduzir esse campo numérico de modo significativo, no ensino básico (POMMER, 2012, p. 27).

A importância que é devida aos estudos dos irracionais no ensino fundamental não é notada como evidencia Fischbein, Jehian e Cohen (1995, p. 29): “Pouca atenção é dada aos números irracionais na Matemática Elementar. A principal razão, em nossa opinião, é que a matemática da escola básica é essencialmente concebida como um conjunto de aplicação de técnicas”.

Do exposto, toma-se como norte deste trabalho como é fornecida a abordagem para o entendimento teórico por um aluno do ensino fundamental, a discussão à cerca da forma do ensino destes números neste nível de ensino e, na medida do cabível, como este ocorre, devido à extensão geográfica do país. Deste modo, fica subentendido neste trabalho a busca por uma discussão e investigação pela metodologia ou forma de exposição inicial deste assunto aos alunos pelos livros didáticos (no caso, amostra em uso na rede pública). Caso este intuito seja alcançado, em algum momento futuro na educação, ter-se-ia um processo que possibilitaria a aquisição teórica, ao invés de simples operação numérica com radicais.

Com este contexto de ideias, busca-se, nesta pesquisa documental, prover discussão sobre possível forma de abordagem aos números irracionais para alunos do ensino fundamental. Ou seja, discutir uma maneira ou forma homogênea que se torne propícia no ensino dos números irracionais, o que, possivelmente, traria ganho de aprendizagem no sentido de dar significado ao conjunto dos irracionais, o que por si só se justifica o escopo deste trabalho.

1. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste trabalho optou-se pela pesquisa teórica, que é “[...] dedicada a reconstruir teoria, conceitos, ideias, ideologias, polêmicas, tendo em vista, em termos imediatos, aprimorar fundamentos teóricos” (DEMO, 2000, p. 20). Este método de pesquisa se molda na busca por melhores maneiras de reescrever teorias, regras ou normas que justifiquem a realidade e acepções pertinentes ao contexto estudado. Um modelo de pesquisa que não requer intervenção direta na área prática de resultados, não deixa de ser importante, pois fornece de maneira primária condições para uma possível intervenção quando esta for imperativa. “Desta maneira o estudo teórico correto provoca exatidão conceitual, análise determinada, procedimento coerente, alegação do ponto de vista não único e capacidade explicativa” (BAFFI, 2002, p. 4).

Ainda, segundo Baffi (2002), além da diferença entre tema e área, uma pesquisa pode ser classificada em relação à metodologia aplicada. Assim, costuma-se dividir os tipos de pesquisa em dois grupos gerais: as teóricas e as empíricas. A diferença entre pesquisa teórica e pesquisa empírica pode ser comparada àquela entre teoria versus prática, mas como será descrito na sequência, esta relação é muito mais de completude do que simples oposição.

1.1. Pesquisa do trabalho

A pesquisa teórica aborda a discussão e comprovação da teoria como também revisões de sua validade e alcance. Esta não necessita de interferência imediata na prática empírica, embora isso não queira dizer que ela esteja separada deste fato ou método. Ela não impõe que haja experimento prático de imediato ou que este tenha obrigatoriedade de ser feito. Algumas áreas do conhecimento, como exemplo a Sociologia e a Filosofia, têm a maior parte de suas pesquisas feitas nesta metodologia teórica, porém nada impede que a pesquisa empírica seja trabalhada nestas mesmas áreas.

Tanto a pesquisa teórica quanto a prática (ou empírica) podem ser trabalhadas de maneiras separadas ou de forma interativa. Esta forma conjunta ou dissociada de trabalho é relacionada ao andamento do objeto de trabalho que se pretende almejar. O modo de escolha da metodologia parece estar a cargo do próprio pesquisador, mas de forma inseparável está diretamente ligada à natureza da própria pesquisa. Assim, pode-se adotar que

> [...] a metodologia é na verdade determinada pelo recorte da pesquisa e seus objetivos, visto que um mesmo tema pode implicar em recortes diversos e que podem demandar tanto o método teórico quanto o empírico. Por isso, pode-se dizer que é a própria natureza da pesquisa que escolhe seu método. Pesquisas que objetivam discutir/analisar conceitos ou dar maior sustentação teórica a questões de ordem empírica (como a redefinição dos contornos do conceito de “interação” a partir das novas tecnologias, por exemplo) demandam um método teórico. Já pesquisas que desejam comprovar ou investigar dados ou fatos (como a eficácia de um novo medicamento em determinado grupo, por exemplo) demandam um método empírico. Tudo vai depender de onde se deseja chegar, mas, no geral, um método acaba complementando o outro, embora seja possível dizer que uma pesquisa “penda” mais para uma polaridade ou outra, sendo mais teórica ou mais prática (ENAGO, 2014, p. 01)

Neste trabalho não se teve a pretensão de comprovar nenhum fato, apenas o desenvolvimento de um estudo sobre o modo de abordagens dos números irracionais nos anos finais do Ensino Fundamental. Desta forma, diante do exposto, a pesquisa teórica tornou-se a escolha adequada para o desenvolvimento do trabalho, visto que atende de modo mais satisfatório. Para o estudo de abordagens dadas ao ensino dos números irracionais, optou-se pela pesquisa documental.

2. NÚMEROS

Em grande parte dos países, Números e Álgebra são temas fundamentais no ensino da Matemática nos anos iniciais e intermediários de escolaridade. Os Números têm um papel fundamental nas aprendizagens matemáticas nos anos iniciais de escolaridade e a Álgebra aparece como um tema matemático de fundamental importância, a partir dos anos intermediários. Quando o aprendiz não possui uma capacidade razoável de trabalhar com números, com suas propriedades, com seu entendimento sistêmico e não usa a linguagem abstrata da Álgebra, fica denotada uma séria limitação nas suas opções escolares e profissionais futuras e no seu exercício da cidadania democrática. Segundo PONTE (2006), em Portugal, estes temas têm merecido pouca atenção no campo da Educação Matemática, denotando que este dilema não é só no Brasil. Áreas como a Geometria e Estatística têm sido foco de encontros temáticos e ainda são o centro de interesse de grupos de trabalho de professores, pouco sendo vislumbrado o papel dos Números e da Álgebra no currículo escolar. Contextos como estes conotam como possível colaborador e razão pela qual os alunos demostram um fraco desempenho nestes campos. Desta maneira deve ser observado o que pode ser feito para melhorar as respectivas aprendizagens.

Voltando ao escopo do trabalho, foi procurado focar estudo e forças em discutir a forma de abordagem do ensino dos números irracionais feita nos livros didáticos, descrevendo a partir deste momento algumas caracterizações e formalizações pertinentes e mínimas ao nível de ensino, ou seja, a seguir foram fornecidas as caracterizações mínimas para o desenvolvimento do trabalho.

2.1 Caracterizações dos números racionais

A seguir caracteriza-se de forma sucinta os números racionais e os elementos pertinentes para entendimento do trabalho proposto.

A razão entre dois números inteiros a e b, com b não nulo, é denominada *fração* e denotada por $\frac{a}{b}$.

Uma fração $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, diz-se *irredutível* se o máximo divisor comum entre a e b é 1 $(mdc(a,b) = 1)$. Os números racionais costumam ser representados por frações ordinárias $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Essa representação é única se as frações estão na forma irredutível e com denominadores positivos. Deste modo, pode-se definir números racionais conforme a seguir.

Definição 2.1.1. *Um número é dito racional se pode ser escrito na forma*

$$\frac{a}{b}, \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

Simbolicamente, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais pode ser representado da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}.$$

A conversão de uma fração ordinária em número decimal se faz dividindo o numerador pelo denominador. O resultado desta divisão é identificado como *dízima*. Este resultado da divisão ou dízima pode ser finito ou não. Quando este resultado for finito trata-se de uma *dízima finita*, se infinito trata-se de uma *dízima infinita*.

Deste modo, quando esta divisão é exata diz-se que é uma *decimal finita ou não periódica*. Quando a divisão resulta em divisão não exata ou dízima, o que significa que em algum momento aparecerá sequências de um ou mais dígitos repetidos, diz-se que é uma *decimal periódica*, sendo o período a sequência de dígitos em repetição. Exemplos de decimal finita ou não periódica são:

$$\frac{6}{10} = 0{,}6; \qquad \frac{1}{2} = 0{,}5; \qquad \frac{2}{8} = 0{,}25; \qquad \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

E de decimal periódica ou não finita são:

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666 \ldots \ ; \ \frac{3}{5} = 1{,}6666 \ldots \ ; \ \frac{75}{99} = 0{,}75757575 \ldots \ ; \frac{345}{999} = 0{,}345345345 \ldots ;$$
$$\frac{235}{99} = 2{,}37373737 \ldots$$

Deste modo tem-se a seguinte definição.

Definição 2.1.2. *Uma* ***dízima periódica*** *é um número que quando escrito no sistema* *decimal apresenta uma sequência infinita de algarismos decimais que, a partir de um certo algarismo, repetem-se em grupos de um ou mais algarismos, ordenados sempre na mesma disposição. Esse número ou grupo de números que se repetem ordenados na mesma disposição é chamado* ***período da dízima****.*

Assim, pode-se demonstrar, utilizando o Algoritmo de Euclides da Divisão e resto de divisores por classe, que toda fração irredutível representa um número decimal finito ou periódico (HEFEZ, 2014).

Pelo exposto acima, todo número decimal finito ou periódico é obtido a partir de uma fração, e toda fração, pela caracterização de número racional, é um número racional. Ou seja, todo número decimal finito ou periódico é um número racional.

Por exemplo, o número decimal periódico $0{,}333333\ldots$ (tamanho do período é 1) é racional. De fato, faça

$$x = 0{,}333333\ldots \qquad (1)$$

Multiplicando o número x por 10, tem-se

$$10x = 3{,}333333. \qquad (2)$$

Subtraindo a equação (1) da equação (2), obtém-se $9x = 3$, e, portanto, $x = 0{,}333333\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, que é um número racional. Raciocinando de modo semelhante, pode-se verificar que, de fato, um número decimal periódico ou finito é racional.

Outra forma opcional de se caracterizar os números racionais pode ser pela representação de frações contínuas e finitas. Para entendimento deste contexto de frações continuas vejamos a definição a seguir:

Definição 2.1.3. *Uma fração contínua simples, com* a_0 *inteiro e os termos* a_n *naturais com* $n > 0$*, é uma expressão da forma:*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{\ldots}}}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ldots]$$

A representação $[a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ldots]$ é uma forma de representar uma fração contínua.

Uma fração contínua simples pode ter finitos ou infinitos termos. Quando a tem um número finito de termos diz-se que ela é uma fração contínua finita, como no exemplo abaixo.

$$y = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6}}}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$$

Observe que

$$a_5 + \frac{1}{a_6} = \frac{a_5 . a_6 + 1}{a_6} = \frac{c}{d} \ ; \ c, d \in \mathbb{Z}^* \tag{3}$$

o que gera um número racional, pois, como o conjunto dos inteiros é fechado para a soma e o produto, $a_5 \cdot a_6 + 1$ é um número inteiro.

De modo análogo, a soma $a_4 + \frac{c}{d}$ também acarreta um número racional por analogia a (3). Recursivamente a este método, obtém-se que a fração contínua finita y é um racional. Por recorrência, ao repetir o processo para uma fração contínua finita qualquer se consegue verificar que ela é um número racional.

Seja o algoritmo dado pela equação (5)

$$b_n = \frac{1}{b_{n-1} - a_{n-1}} \ , n \geq 1 \ e \ a_0 = \lfloor b_0 \rfloor, a_1 = \lfloor b_1 \rfloor, a_2 = \lfloor b_2 \rfloor, \ldots \ a_n = \lfloor b_n \rfloor, \ldots \tag{5}$$

Considere a fração: $\frac{140}{75}$.

$$b_0 = \frac{140}{75} \Longrightarrow \lfloor b_0 \rfloor = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$b_1 = \frac{75}{65} \Longrightarrow \lfloor b_1 \rfloor = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$b_2 = \frac{65}{10} \Longrightarrow \lfloor b_2 \rfloor = 6 \Rightarrow a_2 = 6$$

$$b_3 = \frac{10}{5} \Longrightarrow \lfloor b_3 \rfloor = 2 \Rightarrow a_3 = 2$$

$$Logo\colon \frac{140}{75} = \frac{28}{15} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2}}}$$

Os numeros $r_n; n \geq 0\ e\ n \in \mathbb{N}$ são chamados convergente de "x" :

$$r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{\cdot}{\ddots + \cfrac{\cdot}{a_{n-1} + \cfrac{\cdot}{a_n}}}}}}$$

$$r_0 = 1; \quad r_1 = 1 + \frac{1}{1} \Rightarrow r_1 = 3; \quad r_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}} \Rightarrow \quad r_2 = 1,\overline{857142}\ldots$$

$$\text{observe que: } r_0 < r_2 < r_4 \ldots < \frac{140}{75} < r_1 < r_3 < r_5 \ldots, \text{onde } x = \frac{140}{75}$$

Ou seja, as convergentes de índice par são aproximações por falta e as convergentes de índice impar são aproximações por excesso. Deste modo tem-se a seguinte definição.

Definição 2.1.4. Um número é racional se, e somente se, representa uma fração contínua finita.

Este processo do algoritmo dado pela equação (5) não deixa de ser semelhante ao anterior para o cálculo de uma fração geratriz de um número decimal periódico, pois os argumentos usados para justifica-lo também são o Algoritmo de Euclides e a classe de restos de uma divisão. Existem outros métodos com maior rigor matemático para demonstração da definição 2.1.4, entretanto exigiria formulações e rigores matemáticos fora do contexto desejado para este trabalho, além de se pretender usar o algoritmo dado pela equação (5) mais adiante. Aprofundamentos podem ser consultados em Pommer (2009) e Moscibroski (2002).

2.2. Caracterização dos números irracionais.

A caracterização dos números irracionais com rigor matemático, de modo geral, é abordada em graduações ou similares. Assim uma caracterização ou definição destes números muito empobrecida, e sem rigor algum, poderia levar ao entendimento insignificativo destes números. E no caso contrário, sendo rigorosa, não seria indicada pela cognição ainda não alcançada pelo aluno do ensino fundamental. Como a caracterização destes números não é assimilada de forma simples ou intuitivamente por alunos do ensino fundamental, o que pode vir a gerar nem mesmo a noção do que deva ser um número irracional, torna esta crucial para este ensino (POMMER, 2011).

Fica notório que uma caracterização adequada e atermada ao ensino em questão contribuam de maneira extremamente positiva para amenizar as dificuldades de entendimento dos números irracionais pelo aluno do ensino fundamental. Dentre as obras consultadas, não houve apresentação desta definição de forma unívoca no sentido de esclarecer o conceito de números irracionais e que atenda a estes preceitos.

De acordo com SOUTO (2010),

> ... a escolha de uma definição para um objeto matemático desempenha um papel primordial no processo de aprendizagem. Tratando-se da aprendizagem de um determinado conteúdo, o objeto matemático é muito mais amplo do que a sua definição, não é uma ação localizada como a expressão ou um registro linguístico, é necessário recorrer a outros conceitos e teorias que podem revelar novos saberes que o aluno deve aprender que a definição não é capaz de expressar, isto é, conceituar exige muito mais do que definir apenas (SOUTO, 2010, p. 38).

Deste modo, como descrito por Souto (2010), uma definição cabal pode não ser suficiente para dar noção ou entendimento de números irracionais no ensino fundamental; pode ou deve ocorrer a necessidade de conceitos e teorias auxiliares e ou suplementares para este fim. E é com este intuito que listaremos os elementos a seguir no decorrer deste tópico.

Na sua obra Niven define os irracionais desta forma:

> No entanto, existem números reais que não são racionais. O número $\sqrt{2}$ não é racional, como provaremos mais adiante, neste capítulo. Qualquer

> número real, como $\sqrt{2}$, que não é racional, diz-se irracional. De acordo com esta definição, todo numero real, ou é racional, ou é irracional. A reta, ou eixo, com um número associado a cada um de seus pontos, na maneira escrita acima, é chamada reta real. Os pontos desta reta se dizem racionais ou irracionais conforme os números a eles associados sejam racionais ou irracionais.
> Observe que a definição acima, de número irracional, resume-se no seguinte: qualquer número real que não possa ser expresso como razão a/b de dois inteiros, diz-se irracional (NÍVEN, 1984, p. 60).

Observe que Niven (1984) usa uma reta para dar significado empírico aos irracionais. Expõe o conjunto dos reais para então iniciar os irracionais com exposição de $\sqrt{2}$. A autora Garcia (2005) propõe de forma semelhante, porém com teorias e técnicas auxiliares como visto na sequência abaixo:

> NOSSA PROPOSTA
> APLICADA NA 8ª SÉRIE
> Elemento Motivador: Gráficos
> Reta real
> Número Real
> (é aquele que pode ser representado por um ponto na reta numerada)
> Construção da reta numerada
> (a partir de uma unidade de medida)
> Os números reais são obtidos das medidas sobre a reta
> Números reais na forma decimal
> Números decimais exatos e periódicos
> (correspondem aos números racionais)
> Números decimais não exatos e não periódicos
> (correspondem aos números irracionais)
> Outros números obtidos por medidas: as raízes e PI
> Teorema de Pitágoras
> As raízes inexatas são números reais e irracionais
> PI é irracional
> Um número real pode ser racional ou irracional. (GARCIA, FRONZA e SOARES, 2005, p. 20).

O trabalho de Garcia se assemelha ideologicamente ao de Niven, porém Garcia contextualiza através de **mais** exemplos cotidianos e **mais** marcações na reta numérica, onde cada tópico da “proposta” acima é trabalhado contextualizando e exemplificando também na reta numérica.

Alguns livros didáticos de matemática do ensino fundamental usam a negação da caracterização anterior de um número racional, que exprime a necessidade deste ser um decimal finito ou infinito e periódico. Assim o número decimal que não é finito e também não periódico, é certamente “não racional”, também dito número irracional. Isto está correto se nos limitarmos aos números contidos na reta numérica ou reta real. Porém, o fato da restrição destes números à reta numérica não fica evidente nestes livros. Logo, usando esta negativa como maneira simbólica de caracterizar um irracional é descrevê-lo na forma:

Definição 2.2.1. $x \text{ é irracional } \Rightarrow \begin{cases} x \text{ é } um\ número\ da\ reta\ real \\ se\ x \neq \frac{a}{b}\ ; a, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0 \end{cases}$

Porém como Souto (2010, p.34) afirma "[...] o objeto matemático é muito mais amplo do que a sua definição", principalmente neste caso dos números irracionais, levando-se neste caso ao cuidado de não reproduzir simplesmente a simbologia sem o seu significado e entendimento.

Outra formalização possível de um irracional qualquer α seria através de fração contínua infinita, onde $\alpha = [b_0; b_1, b_2, \dots, b_n, \dots]$ e $C_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, donde:

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} C_n$$

Contudo o uso de limite inviabiliza esta abordagem. Esta maneira de representação e aproximação de irracionais são trabalhadas algebricamente no **Apêndice A**.

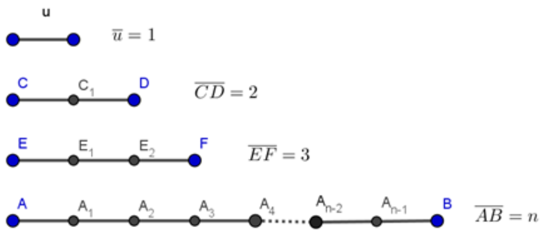
2.3. Caracterização de segmentos incomensuráveis.

Dando sequência aos elementos representativos de um número, agora será tratado de forma discreta uma caracterização simples para comensurabilidade, para que deste modo possa ter o entendimento necessário para posicionar e concluir o assunto dos números irracionais.

Definição 2.3.1 . A medida de um segmento AB, *representado* por $(\overline{AB})$, é um número que deve exprimir quantas vezes o segmento $(\overline{AB})$ contém o segmento $\bar{u}$, fixado previamente, tomado como unidade de medida .

Comensurável é aquilo que se pode medir. Se "u" é um segmento unitário, pode-se calcular a medida do segmento conforme a figura 1 a seguir.

Figura 1 - medida de um segmento em relação ao segmento unitário



Fonte: autor

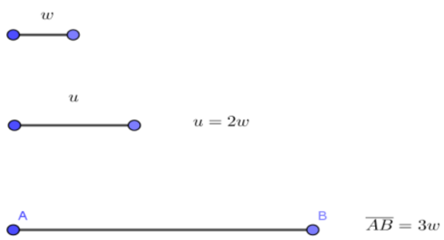
É possível a partir da figura 1 apresentar uma melhor definição para segmentos comensuráveis como abaixo:

Definição 2.3.2 - "Dado um inteiro positivo n, se for possível obter $(n-1)$ pontos intermediários $A_1, A_2, \ldots, A_n,$ no segmento AB tal que os segmentos $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$ sejam todos de mesma medida e igual ao segmento unitário previamente definido, conclui-se que a medida do segmento será *"n". "*

Caso o segmento AB não contiver o segmento unitário "u" um número inteiro de vezes investiga-se outro segmento que é uma subunidade do segmento unitário "u" de tal maneira que seja possível medir o segmento por esta nova unidade de medida.

Observe a figura 2 a seguir, onde o segmento é menor que o unitário.

Figura 2 – segmento w menor que o unitário



Fonte: autor

Suponha que $u = 2w$, o que torna $w = \frac{u}{2}$. Agora supondo que o segmento AB contenha o segmento "w" três vezes, isto é

$$\overline{AB} = 3\overline{w} = 3\frac{\overline{u}}{2}$$

Então, seja w um segmento que esteja contido uma quantidade n de vezes em um segmento "u" e m quantidade de vezes no segmento $\overline{AB}$, com m e n inteiros positivos. Pode-se concluir que uma (*uma barra acima do segmento significa a medida deste segmento*):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{u}} = \frac{\overline{mw}}{\overline{nw}} = \frac{\overline{m}}{\overline{n}}$$

ou seja, $\overline{AB} = \frac{m}{n}$, pois por suposição "$u$" é unitário, neste caso "w" é submúltiplo de AB e "u", tornando deste modo AB e "u" comensuráveis. Portanto um segmento AB é comensurável com "u" quando sua medida $\overline{AB}$ for um número inteiro ou fracionário.

Para a sequência, considere o seguinte lema.

Lema 2.3.3. Se t^2 é par então t é par.

Suponha que t seja impar, logo $t = 2k + 1$,

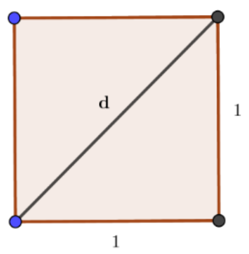
assim $t^2 = (2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$t^2 = 2s + 1$ que também é impar.

Assim pelo método da contra positiva o lema se torna verdadeiro.

Nem sempre os lados de um quadrado são comensuráveis, observe a figura 3 a seguir, que se refere a um quadrado de lado 1, considerando sua diagonal e seus lados.

Figura 3 - Quadrado de lado unitário



Fonte: autor

Pelo teorema de Pitágoras tem-se $d^2 = 1^2 + 1^2$, ou seja, $d^2 = 2$. A partir de então demostra-se que a diagonal do quadrado e o seu lado não são comensuráveis, ou seja, são incomensuráveis.

De fato,

Suponha que sejam comensuráveis, logo existem $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ inteiros tais que $d = \frac{m}{n}$. Assim:

$$\boldsymbol{d^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2}$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $mdc(m, n) = 1$, assim:

$$\boldsymbol{\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{m^2}{n^2} = 2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{m^2 = 2n^2} \qquad (*)$$

Aplicando o **lema 2.3.3** em (*) temos que m^2é par então m é par;

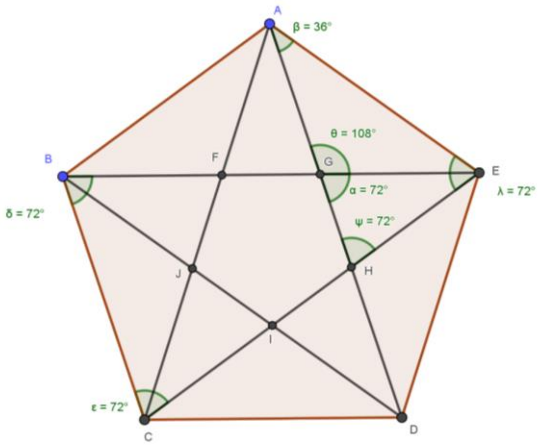
Logo: $m = 2r$ e então:

$$\boldsymbol{m^2 = (2r)^2 \Rightarrow 2n^2 \Rightarrow 4r^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2r^2}; \quad (**)$$

Usando o lema novamente em $(**)$ concluímos que n é par, o que contraria a hipótese do $mdc(m, n) = 1$, pois se ambos forem par então são divisíveis por 2, o que é absurdo por hipótese do próprio mdc proposto. Assim, o lado e a diagonal do quadrado em questão não são comensuráveis. ■

A seguir obtém-se um número incomensurável particular*. O número de ouro*. Um polígono regular é aquele que possui lados iguais e ângulos também de mesma medida. Todo polígono regular pode ser inscrito em um círculo. Observe o pentágono regular a seguir $ABCDE$, de lado "l", com suas diagonais traçadas cujas interseções determinam os pontos $FGHIJ$, que também determinam outro pentágono regular invertido. Ao segmento CE iremos chamar de diagonal do polígono e denotaremos esta por d. Para isto vamos a seguir, provar a semelhança dos triângulos $AHE\ e\ EBC$.

Figura 4 - pentágono regular



Fonte – autor

O ângulo $\angle AGE$ é oposto pelo vértice ao angulo $\angle BGD$, sendo o ângulo $\angle BGD$ ângulo interno do polígono regular $FGHIJ$, o que dá $\angle BGD = 180 - (\frac{360}{5}) = 108°$. Tem-se que $\angle EGD = \alpha = 72°$, o mesmo ocorrendo com o ângulo $\angle EHA = \Psi = 72°$. O ângulo $\angle GEH$, por soma de ângulos internos de um triangulo, vale $36°$. Os triângulos $AFG, EGH, \ldots, BJF$, que formam a estrela, são congruentes entre si pelo caso de congruência "Ângulo-Lado-Ângulo". Logo os ângulos $\angle GAE$ e $\angle GEA$ são congruentes por pertencerem a um triangulo isósceles, deste modo ambos valem $36°$. Pode-se concluir que os triângulos AHE e EBC são semelhantes.

Portanto, tem-se a relação:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EH}}$$

$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l} \Rightarrow l^2 = d^2 - dl \Rightarrow \frac{l^2}{l^2} = \frac{d^2}{l^2} - \frac{d}{l} \Rightarrow$

fazendo $x = \frac{d}{l}$; $\quad x^2 - x - 1 = 0$

$x^2 - x - 1 = 0$, resolvendo para x e descartando o valor negativo:

$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; substituindo x pelo símbolo ϕ

$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}6180339887498948482045868343656 \ldots$ ■

Deste modo a existência de segmentos incomensuráveis implica na insuficiência dos sistemas numéricos conhecidos - números naturais, inteiros e racionais - para efetuar medida em objetos geométricos simples, como exemplo no quadrado. A razão entre as medidas do perímetro e do diâmetro e um circulo também geram esta não comensurabilidade.

Para polígonos regulares a razão entre a diagonal e a aresta desta diagonal fornece segmentos também não comensuráveis.

A solução que se impôs, na época em que se foi determinada a incomensurabilidade de segmentos, e que levou séculos para ser adotada, era a de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados números irracionais, de tal modo que, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, qualquer segmento de reta pudesse ter uma medida numérica. Deste modo, números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade. Número irracional, portanto, é um número obtido das medidas de segmentos e que não pode ser expresso como uma razão entre dois números inteiros, sendo estes segmentos, deste modo, denominados incomensuráveis.

2.4. Caracterizações de conjunto.

As contribuições definitivas ao estudo dos conjuntos infinitos são devidas a Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, na segunda metade do século XIX. A noção de conjunto é uma das noções primitivas da Matemática Moderna, isto é, um dos conceitos adotados como ponto de partida e que servem de base para a definição dos outros conceitos introduzidos no desenvolvimento da teoria de conjuntos. Intuitivamente, um conjunto é encarado como uma coleção de objetos de natureza qualquer.

No ano de 2000, Ávila (2000, on-line) datava que haviam ocorrido 40 anos desde quando fora introduzido a noção de conjuntos no ensino básico no Brasil, sendo que na data atual de edição deste trabalho já decorreram aproximadamente 58 anos. Neste mesmo artigo o autor afirmava que havia uma ótica para a minimização do ensino de conjuntos no ensino básico e que autores desta época haviam reduzido o ensino de conjuntos e que o início deste estudo ocorreria nos oitavos anos. Porém, desde 2000 essa ótica não se confirmou e atualmente os livros didáticos continuam a tratar até mesmo dos números Reais no próprio oitavo ano e de conjuntos em outras séries anteriores do ensino fundamental atual.

Em verificação pessoal de duas obras que denotaremos por “***coleção A***” e “***coleção B***”, atuais e utilizadas na rede pública de ensino, trata-se do assunto sobre conjuntos no sexto ano fundamental. Na ***coleção A*** o assunto é tratado no capitulo 2,3 e 4. Na ***coleção B*** o tema é tratado no capitulo dois.

Assuntos como a enumerabilidade, densidade e cardinalidade de conjuntos formalmente definidos fogem do contexto do ensino fundamental segundo o PNLD, ou seja, nestes temas nos restringimos ao intuitivo, para atender a demanda de ensino vigente para o ensino fundamental. Em verificação nas coleções didáticas de ensino do fundamental citadas não ocorre citação destes assuntos.

3. ABORDAGEM DOS IRRACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

A construção inicial do entendimento de um número irracional para um aluno do ensino fundamental merece uma atenção especial no modo como será realizado para este aluno. O tratamento de conjuntos numéricos, como o dos números Naturais e Inteiros está intimamente ligado ao fato de simplesmente contar ou de contagem de elementos, principalmente no fato de haver ou não haver elementos no caso dos números Inteiros, tornando o entendimento destes conjuntos, de certa forma, concreto ou concretizável para o aluno assimilar de maneira prática ou empírica. Quanto ao entendimento dos números Racionais já se tornam necessários argumentos lógicos e definições para a interpretação do que virá a ser um número racional. Então, para o aluno de ensino fundamental, principalmente nos anos finais (8º e 9º anos), onde ocorre a introdução do conjunto numérico dos racionais, começa a aparecer os questionamentos devido à nova estrutura de se pensar os elementos deste conjunto.

Na continuidade dos ensinamentos dos conjuntos no ensino fundamental aparece o conjunto dos números Irracionais. E, na maioria das vezes, é definido para o aluno de ensino fundamental como sendo um número que não é racional ou que é um número de dízima não periódico e infinito. É neste ponto que se torna importante ter uma metodologia ou critério a se seguir.

Para POMMER,

> Os números irracionais são pouco intuitivos, sendo assim um problema de natureza teórica sua aprendizagem. Para significar, o ensino dos irracionais, deve haver um entendimento no modo como abordá-lo, ou seja, como realizar a passagem do conhecimento empírico, para o conhecimento teórico [...] (POMMER, 2011, p.4)

Esta pouca intuitividade e a necessidade de definições não cotidianas dos números irracionais torna evidente e necessário um método de trabalho para o ensino destes números nos anos finais do ensino fundamental, devendo-se levar em conta a estranheza dos alunos para a compreensão destes números, pois além do fato de propor um conteúdo abstrato e com pouca aplicação para este momento na vida destes alunos, ainda se tem a impossibilidade de não poder mensurar irracionais, como se mostra em uma régua comum para a maioria dos números naturais.

Porém, o tratamento do conhecimento de conjuntos numéricos através dos tempos não foi provido de sistemática ou padronização, segundo Pommer (2011). O tratamento, padronização e sistemática do conjunto dos números Reais e, por consequência, dos números irracionais no campo do saber matemático se consolidou há pouco mais de 100 anos. Infelizmente, o mesmo não ocorreu no campo do ensino básico da Matemática, o que cria a demanda de alguns estudos sobre o tema. A carência de sistematização no ensino básico e principalmente nos anos finais do ensino fundamental torna-se necessária uma observação em como isto está ocorrendo, neste caso na inserção ou abordagem dos números Irracionais.

Nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental a introdução dos números Irracionais geralmente ocorre por meio de três ênfases básicas:

> a- Um número é Irracional se não for possível escrevê-lo na forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$, ou então Irracional é o número que não pode ser escrito na forma de fração.
>
> b- Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não periódica. Todo número escrito na forma de um decimal infinito não periódico é um número irracional.
>
> c- Os números irracionais positivos representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade. (RIPOLL, 2001, p. 1)

Tanto a ***coleção A*** e ***coleção B*** se enquadraram na afirmação de RIPOLL (2001), onde a ***coleção B*** utiliza pouco texto didático para exposição da teoria de conjuntos irracionais e reais.

Empossado deste argumento fica evidente que comparado à complexidade que envolve um número irracional, tais argumentos ficam mínimos para o entendimento deste conteúdo. Autores como POMMER e LUDKE analisaram livros didáticos (de matemática) aplicados no ensino fundamental chegando à conclusão de (RIPOLL, 2001, p. 1) citada anteriormente. Estes autores não citam quais são as obras inspecionadas. Como verificado pessoalmente nas ***coleções A*** e ***B***, obras atuais usadas nas redes públicas, constata-se que não houve mudança deste método caracterizado de abordagem inicial. Na ***coleção A*** foi constatada que toda abordagem teórica e prática de conjuntos numéricos ocorre apenas em um capítulo, que é aplicado no oitavo ano de ensino. Deste capítulo, seis páginas são destinadas ao conteúdo dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Uma pagina para exercícios sobre números racionais e uma sobre números irracionais. Ainda na ***coleção A***, no capítulo 2 deste livro, um tópico trata de raiz quadrada aproximada de um número, onde na sequência, no capitulo três, depois de vários procedimentos e aulas subsequentes, é que vai ser abordado com o aluno o conjunto dos números irracionais e a natureza deste número.

Na ***coleção B*** é dedicado pouco texto para o conteúdo dos conjuntos numéricos. Destes textos poucos são teorias de abordagem do conteúdo.

Coincidentemente, ou não, tanto na afirmação de RIPOL (2001) quanto nas duas coleções ***A*** e ***B,*** é verificado a separação de processos para o ensino de conjuntos numéricos, gerando certa descontinuidade lógica e que pode causar quebra de entendimento dos números irracionais. Ou seja, o aluno pode até mesmo ser levado a não adquirir a noção para a aprendizagem do conceito e definição interpretativa de um número irracional. No livro seguinte destas coleções, o de nono ano, tanto da ***coleção A*** como na ***B,*** não há direcionamento à abordagem para ensino dos números irracionais, apenas cálculo com radicais. Cálculos como a soma, produto e potências com expoentes de radicais. Não ocorre nenhuma abordagem quanto ao assunto conjunto irracional ou números irracionais, nem para familiarização com os mesmos.

Em ambas as ***coleções A*** e ***B***, no livro de nono ano, ocorrem práticas mecânicas de resolução de exercícios de radicais como: multiplicação, divisão ou cálculo com raízes, onde o entendimento de posicionamento de números infinitos na reta numérica, noção sobre a quantidade de números irracionais, subconjuntos irracionais não são abordados. O que ocorre são exercícios sem a devida teoria ou contextualização, no máximo um item resolvido na letra inicial do exercício solicitando que se faça de modo semelhante para os demais termos.

Não foi constatada a abordagem teórica ou significativa da relação de subconjuntos irracionais. A relação de pertinência de números ao conjunto dos irracionais é pouco trabalhada nas duas ***coleções***, **A** e ***B***, e quando isto ocorre os livros o fazem usando exercícios que consideram dízimas ou o não aparecimento das mesmas. Seja então a fração $\frac{23}{19}$, a qual gera por divisão o decimal infinito $1{,}210526315789473684210526315789 5...$. Se for seguida a concepção de que se não houver dízima (repetição), então alguém que observar o número apenas até a vigésima casa após a vírgula irá concluir, erroneamente, que o número é irracional. Porém, o número não o é por advir de uma fração composta por dois inteiros. Logo, a investigação deste decimal por um aluno do ensino fundamental certamente irá gerar questionamentos na concepção e no entendimento a ser adquirido pelo mesmo.

Quando se aproxima um número irracional ocorrem consequências para quem ensina e quem aprende. A simples aproximação, sem preparação, de um número irracional tira o verdadeiro significado decimal de um número irracional que é infinitas casas decimais não periódicas. Em nenhum caso referente às coleções analisadas é realizada uma abordagem teórica que simplesmente torne plausível este fato para o aluno. Somente se apresenta a foto da leitura na calculadora eletrônica e se constata tal fato, sem aprofundamento ou consolidação. Neste caso da calculadora, a transformação do decimal exposto em fração geratriz mostraria uma fração diferente da original. Porém este retorno à fração geratriz deve ser feito como a seção 2.1, observando o erro de máquina ou arredondamento, pois existem calculadoras que oferecem recurso inverso gerando interpretação equivocada devido ao não entendimento da máquina. Este questionamento quando não for tratado de forma coerente pode induzir o aprendiz ao não entendimento e ao conformismo do não aprendizado, mostrado constantemente pelo Índice de Desempenho da Educação Básica (IDEB).

3.1. Estudos de raízes não exatas.

Um dos temas fundamentais em álgebra no ensino fundamental, segundo o CBC, BNCC e o PNLD são as equações do segundo grau, e que a grande maioria das soluções destas equações é composta de números racionais e irracionais. Um tratamento sobre isso se encontra no Apêndice C. Logo, a noção de um irracional se torna exigência direta para o trabalho com estas equações. É esperado para o estudo destas equações que o aluno apresente habilidade para o cálculo de suas raízes. É por meio do cálculo destas raízes que se consegue a representação do número de ouro através de uma equação do segundo grau. Na interpretação gráfica destas equações do segundo grau e suas raízes, se o aluno não tem noção de como proceder com número irracional em relação à reta numérica, ele terá dificuldade em trabalhar com a construção dos gráficos. A não localização destes números pode gerar equívocos na construção e interpretação, explicitando novamente a importância desta abordagem numérica.

Ocorre ainda o fato que a grande maioria dos livros didáticos de matemática, inclusive as ***coleções A*** e ***B*** analisadas, do ensino fundamental abordam situações envolvendo área e perímetros de quadrados, assim como o volume e aresta de cubos. Neste processo inicialmente, há a exposição de exemplos numéricos envolvendo lados e arestas no âmbito de números inteiros ou uma relação de números inteiros. Isto equivale à escolha de valores de área que sejam quadrados perfeitos e de volume que sejam cubos perfeitos, de modo que o conceito da raiz quadrada ou raiz cúbica tenham suas existências confinadas apenas aos lados de uma figura geométrica ou à geometria. Caso não seja trabalhada ou abordada outra forma de se identificar ou abordar um número irracional, este "confinamento" poderá ter sido a única maneira de trabalho com os irracionais assimilados pelo aluno. O que desta maneira induz a uma ligação entre geometria e número irracional que deve ser valorizada pela importante possibilidade empírica de trabalho com estes números. Outra forma de se propor ao aluno a representação dos números irracionais ajudaria a contrapor este fenômeno ressurgem-te do confinamento segundo POMMER (2011) e ainda a assimilação da verdadeira noção destes números. O trabalho com números algébricos, como proposto no Apêndice C, que são soluções de equações polinomiais, o que no caso do ensino fundamental levaria às equações do segundo grau, seria uma forma de abordar os irracionais alternativamente à geometria, não renegando a relevância da geometria neste estudo.

Dadas às conotações anteriores, pode-se afirmar que estas percorrem de forma geral a abordagem com raízes não exatas adotadas pelos livros didáticos do ensino fundamental, ou seja, em nenhum dos livros analisados se discute a aproximação de um irracional e suas implicações ou importâncias, indo de encontro com a seguinte afirmação:

> Ao se aproximar um número irracional há uma implicação. Este tratamento de aproximação mascara o verdadeiro significado do número irracional envolvido: infinitas casas decimais e não periódicas. Em nenhum dos livros analisados é realizada uma explicação que caracterize este fato: somente se apresenta a leitura na calculadora eletrônica e se constata tal fato, sem aprofundamento (POMMER, 2011, p.07)

De modo geral quando os livros didáticos abordam as raízes que não são exatas, este fato se dá pelo estudo de expoentes fracionários, onde pouco se observa o termo "***número irracional***", não se propondo a noção ou o entendimento de um número irracional, ou seja, ocorre uma preocupação com a repetição de modelos e métodos práticos operatórios, sobrevindo ainda de maneira bastante reduzida na maioria dos livros didáticos.

Caso ocorra uma abordagem com relação à marcação destes valores irracionais, tratados pelos livros didáticos de raízes não exatas, na reta numérica certamente colocariam uma metodologia diferenciada do que acontece atualmente. Desta maneira teríamos então uma ligação entre a visão geométrica dada a estes números e a álgebra implícita no calculo destes números para marcação na reta numérica.

3.2. Alguns números irracionais particulares: $\boldsymbol{\pi, \phi, e}$

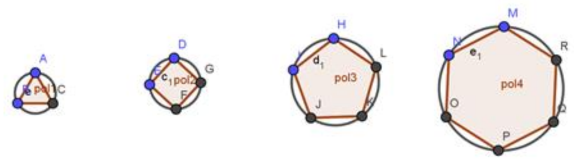
Quando se observa como os livros didáticos de matemática do ensino fundamental introduzem o número π, as ***coleções A*** e ***B***, e outras literaturas consultadas, todas as fazem pela exposição da representação decimal de π e <u>*sugerem que se comente*</u> que este número é resultado da divisão do perímetro do circulo pelo diâmetro do mesmo. Na teoria de abordagem dos irracionais da ***coleção B*** é exposto um total de quatro números irracionais, dentre estes o número π. Na ***coleção A*** ocorre uma pequena menção histórica aos pitagóricos, com uma figura fazendo alusão a Pitágoras, de forma superficial. O número π é citado exatamente como no primeiro parágrafo acima, apenas sugerido que se comente.

Nas duas coleções analisadas coincidentemente são apresentados exatamente quatro números irracionais nas duas páginas destinadas à abordagem teórica. Em livros de matemática de outras coleções destinadas ao ensino fundamental ocorreu a mesma quantidade de valores, porém estas outras coleções já não são mais vigentes segundo o PNLD.

O fato do número π ser a razão do perímetro pelo diâmetro está correto em ser afirmado nos livros, porém a maneira como é enunciado deve ser repensado, pois esta é uma razão em que incide a incomensurabilidade de pelo menos um dos números, geralmente o perímetro. A omissão da natureza desta razão é que pode levar a se entender que o perímetro e o diâmetro são números racionais, levando a dúvidas na natureza do número π, pois este não pode ser razão de números racionais.

O uso do método adaptado de Euclides se mostra bem eficaz para intuir sobre a natureza irracional do número π. Para isto consideremos os polígonos regulares inscritos no círculo, conforme a figura 5.

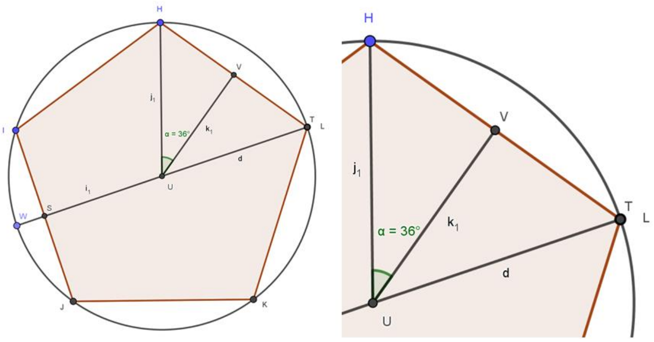
Figura 5 - Polígonos regulares inscritos



Fonte - autor

Para esta representação escolhemos pentágono, com um de seus triângulos isósceles que o formam destacado. Sem perda de generalidade, podendo ser escolhido outro polígono:

Figura 6 - pentágono regular caracterizado



Fonte – autor

Observe que para um polígono qualquer de lado "l", sendo n o número de lados, o ângulo α da figura será dado por: $\alpha = \frac{360}{2n} \Rightarrow \alpha = \frac{180}{n}$

Se aplicarmos a relação seno no triangulo UHT, onde "d" é a diagonal do circulo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{HV}}{j_1} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow sen\left(\frac{180}{n}\right) = \frac{l}{d} \Rightarrow l = d.sen\left(\frac{180}{n}\right).$$

O perímetro do polígono de n lados é dado por: $p_n = n.l \Rightarrow p_n = n\left(\frac{180}{n}\right)$.

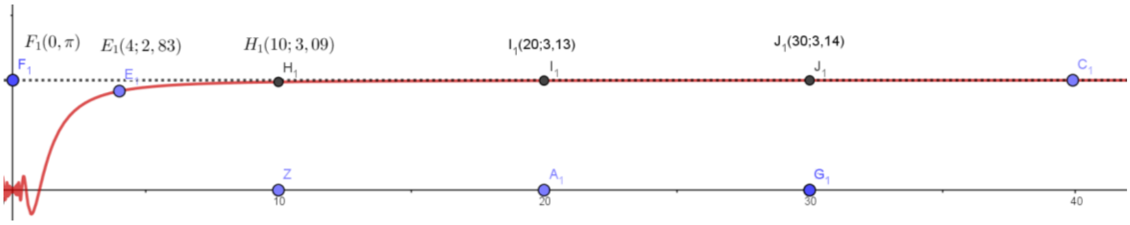
Fazendo R como a razão entre o perímetro do polígono de n lados e a diagonal do círculo que circunscreve este polígono tem-se:

$$R = \frac{n.d.sen\left(\frac{180}{n}\right)}{d} \Rightarrow .d.sen$$

$$R = n.sen\left(\frac{180}{n}\right)$$

Aplicando limite em *"R"*, vê-se que $R \to \pi$ quando $n \to \infty$. Como se pode observar na figura 7 seguinte:

Figura 7 - Aproximação gráfica pelo GEOGEBRA.



Fonte - autor

Note as aproximações para R, com n variando:

Tabela 1 - Aproximação para π.

n	R
4	2,8284271247461900976033774484194
10	3,0901699437494742410229341718282
20	3,1286893008046173802021063893433
30	3,1358538980296041419950246440749
99	3,1410654163086975963265830926788
π	3,1415926535897932384626433832795...

Fonte – autor

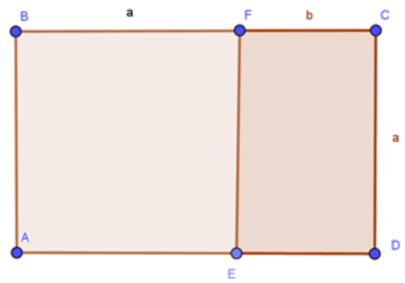
Usando o método da Tabela 1, a demonstração anterior fica viabilizada para a apresentação do irracional π no ensino fundamental, o que não foi encontrado nas coleções analisadas.

O número áureo, embora seja tratado como razão de segmentos no livro 6 dos "Elementos de Euclides", na proposição 30, seja aplicado na sequência de Fibonacci, não aparece nas coleções revisadas. Raramente é citado, mesmo como fato histórico. Nem mesmo são citados aplicações ou métodos empíricos, como razões de retângulos. Apenas em coleções antigas, com mais de cinco anos, e que segundo o PNLD não podem ser aplicadas nos dias atuais, tratam do número de ouro.

Dada a relevância do número áureo (φ) traz-se mais uma forma de representá-lo, visto que na seção 2.3 o mesmo foi apresentado como incomensurável. Para isto é apresentado o retângulo áureo.

Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo $ABCD$ *(Figura 8)* com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como $ABFE$, o retângulo restante, $CDEF$, será semelhante ao retângulo original.

Figura 8 - retângulo de ouro.



Fonte – autor

Se $(a + b)$ *e* "a" são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{a}{b} \Rightarrow$$

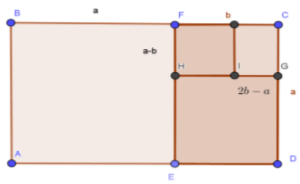
$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \frac{a-b}{(a+b)-b} \Rightarrow$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{(a+b)}$$

O que torna o retângulo de lados a e b áureo, pois a *e* $(a + b)$ o é.

Deste modo consegue-se uma sucessão infinita de retângulos menores.

Figura 9 - retângulo de ouro 2



Fonte - autor

Porem da equação:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = b^2 + ab \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow$$

Fazendo $\frac{a}{b} = x$:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ or \ x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \blacksquare$$

Observe que x deve ser positivo para equivaler ao numero de ouro φ.

O retângulo áureo está intimamente ligado com a chamada divisão áurea de um segmento, ou divisão em média e extrema razão, que é introduzido a seguir:

Diz-se que um ponto C de um segmento AB *(Figura 6)* divide este segmento:

Em média e extrema razão, conforme figura *10,* se: $\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{CB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$

Figura 10 - segmento da razão áurea

Fonte – autor

Observe que:

$\mathrm{AC} = \mathrm{a}, \mathrm{CB} = \mathrm{b}, \mathrm{AB} = (\mathrm{a} + \mathrm{b}),$ de sorte que os segmentos,

AC *e* CB da divisão áurea $(\text{ou } \mathrm{AB} = \mathrm{a} + \mathrm{b} \text{ e } \mathrm{AC} = \mathrm{a})$;

são os lados do retângulo áureo. ■

O numero de Euler, assim denominado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, não foi encontrado nas coleções matemáticas didáticas ***A*** e ***B*** do ensino fundamental, aparecendo apenas nas coleções do ensino médio como aplicação de exercícios, onde seu valor é uma como constante.

Como o PNLD associa o aprendizado do número de Euler apenas ao ensino médio, justificando isto no aprendizado de logaritmos, onde esta associação possa ser a razão do ensino ocorrer apenas no ensino médio.

A associação deste número ao cálculo diferencial é bastante ampla ganhando seu domínio extremo nas áreas de engenharias. Seu uso é incontestável pela sua importância ou vice-versa. Uma possibilidade de trabalhar este número no ensino fundamental pode ser considerada trabalhando sua aproximação por fração contínua. O seu cálculo pela somatória determinaria elementos fora dos estabelecidos pelo PNLD e antecipação de habilidades da BNCC, o que não é aceito em planos de aula.

Deste modo, entendendo que uma forma de trabalho deste número no ensino fundamental é via a aproximação deste pela sua fração contínua infinita, tal tratamento é dado a seguir.

Fração contínua do número de Euler:

$$e = [2; 1; ,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1, \dots ,2n, 1,1, \dots];$$

Ou:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}$$

O truncamento e ó cálculo desta equação pela sua forma fracionária fornece $\frac{87}{32}$ que é igual a $2{,}71875$, sendo o valor do número de Euler $2{,}718\,281\,828\dots$ O que nos dá uma aproximação considerável.

3.3. Incomensurabilidades dos irracionais no ensino fundamental

A incomensurabilidade tem seu entendimento entrelaçado ideologicamente com a comensurabilidade. Desta maneira, não ocorrendo estudo da comensurabilidade não se pode esperar a incomensurabilidade. Na verificação das coleções, como constatado nas coleções A e B, não ocorre referência ou abordagem ao assunto comensurabilidade. Verificado este fato ocorreu o questionamento: Ocorre alguma restrição do assunto no PNLD, CBC ou BNCC? Os parâmetros para educação não referenciaram contra, porém também não abordaram o assunto.

Mesmo não aparecendo nas referências e parâmetros de ensino, o trabalho com a comensurabilidade merece respaldo e pode ser uma ferramenta de grande auxílio para o ensino de números, tanto racionais quanto irracionais. Para tal veja a abordagem a seguir.

Em acordo com a seção 2.3, dizer que dois segmentos distintos AB e CD são comensuráveis significa dizer que existe um segmento "u" e dois naturais $m\ e\ n$ com $mdc(n, m) = 1$, tais que $\overline{AB} = nu\ e\ \overline{CD} = mu.$ Deste modo, tomando $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, com estes segmentos sendo comensuráveis, então: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{nu}{mu}$, acarretando que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{n}{m}$. Seja $\overline{AB} = 16\ e\ \overline{CD} = 7$, para se verificar que estes segmentos são comensuráveis deve-se procurar um segmento w que "caiba" um número exato de vezes nos segmentos dados. A busca mais natural é tomar $w = \frac{1}{2}$, pois neste contexto se tratara de números racionais. Assim para $w = \frac{1}{2}$ tem-se que $\frac{\overline{CD}}{w} = \frac{7}{\frac{1}{2}} = 14\ e\ \frac{\overline{AB}}{w} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32,\ logo$

$w = \frac{\overline{cd}}{14}\ e\ \overline{AB} = 32w = 32\frac{\overline{CD}}{14},\ ou \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{32}{14}.$

Na abordagem anterior deve ser observado que esta intenciona levar a noção de comensurabilidade e racionalidade interligadas. Pois se um dos fatos não é verídico o outro também não o será. Esta evidência da interligação é que precisa ser explorada em atividades que envolvam comensurabilidade.

Caso a interligação da comensurabilidade e racionalidade seja assimilada pelo aluno, tornar-se-á mais plausível para ele que a incomensurabilidade entre duas grandezas refere-se ao fato de a sua razão não poder ser expressa por um número racional e, consequentemente, há a necessidade de outros números para se descrever completamente a realidade.

O trabalho com a incomensurabilidade depende de um bom trabalho com a comensurabilidade (vide atividade relativa a comensurabilidade no apêndice E). A definição da incomensurabilidade parte da negação da comensurabilidade, desta maneira deve se ter o mesmo cuidado de se colocar que esta negativa deve ficar limitada para números que estejam na reta numérica no ensino fundamental ou para números reais.

4. ANÀLISE DA ABORDAGEM DO ENSINO

De acordo com pesquisa realizada por SOUTO (2010), as dificuldades no trabalho com números reais e, por complemento, os irracionais, ocorre não só de forma nacional, visto que:

> Encontramos constatações que destacam dificuldades de alunos, professores e futuros professores sobre os conceitos de número real, tanto em pesquisas nacionais (e.g. SOARES, FERREIRA e MOREIRA, 1999; PENTEADO, 2004; DIAS, 2002), quanto internacionais (e.g. SIROTIC e ZAZKIS 2004, ZAZKIS e SIROTIC 2007; BERGÉ 2004, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b; BERGÉ e SESSA, 2003; FISCHBEIN, JEHIAN e COHEN, 1995). (SOUTO, 2010, p. 98)

Estas pesquisas evidenciam dificuldades de discentes e docentes em relação com o conceito e noção de número, principalmente os irracionais.

Uma maneira lógica de se abordar esta dificuldade é certamente através do material usado. Neste contexto:

O material didático está coerente ao proposto? SOUTO (2010) afirma que nos livros didáticos do ensino fundamental a abordagem "dos conteúdos é disposta de forma sequencial na ordem linear: número natural, número inteiro, número racional, número irracional e número real, sendo" os três primeiros conjuntos apresentados como revisão, visto que já foram abordados em anos escolares anteriores, porém se tem desta forma numero irracional trabalhado no sétimo ano. Ou seja, isto confirma a visão de Souto que explicita no seu trabalho que são apresentados em média 4,7 exemplos interligados a cada definição de número irracional e número real. Esse reduzido número de modelos autentica as dificuldades constatadas nos trabalhos de "SOARES, FERREIRA e MOREIRA (1999) e SIROTIC e ZAZKIS (2007) por parte de alunos e futuros professores em exibir exemplos desses tipos de números" (SOUTO, 2010, p. 98). Em uma amostra de 14 livros analisados por SOUTO (2010, p. 97-106) os exercícios resolvidos que são em média de 4,9 por livro servem de modelo de repetição ou algoritmo para serem seguidos nas atividades propostas. Deste modo, fica sombrio achar coerência neste material avaliado por SOUTO (2010).

Embora do trabalho de SOUTO (2010) já decorram oito anos, ao conferir a quantidade de páginas da ***coleção A*** que são dedicadas ao estudo dos irracionais o número coincidiu com a ***coleção B***. Este número foi de duas páginas dedicadas à teoria. Enquanto foi dedicada uma página de exercícios de irracionais na ***coleção A*** e nenhuma na ***coleção B***.

Pode-se ainda, segundo SOUTO (2010), padronizar como três as "definições" de números irracionais listadas em livros atuais ou contemporâneos:

- “irracional é o número que não pode ser escrito em forma de fração de inteiros” (D1).

- “dentre os números representados na forma decimal existem as dízimas não periódicas, chamados de irracionais” (D2).

- “qualquer número racional ou irracional é um número real” (D3).

Estas "definições" vistas com rigor matemático podem se tornar complicadores deste ensino, pois podem levar um aluno do ensino médio a pensar que números complexos da forma $(a + bi)$, b não nulo, seja um número irracional. Ou ainda, que tornam as definições de número irracional e o número real logicamente recorrente: “*irracional é todo número real que não é racional e número real é todo número irracional ou racional”*.

A definição (D3) é de uso mais comum no ensino médio, onde se pretende o trabalho com números complexos, saindo deste modo do foco deste trabalho.

Com toda certeza seria possível consultar novos autores e denotar mais variantes para esta discussão. Deste modo, o ensino deve levar em conta todos os pontos e fatos citados neste e nos tópicos anteriores. Ainda fica notório que se é possível identificar mais variáveis que influenciariam uma metodologia que se propusesse a questionar este dilema do ensino dos irracionais no ensino fundamental. Então, é cada vez mais evidente que uma abordagem para este ensino de números irracionais que pretenda viabilizar este ensino pode ser tão complexa quanto a própria questão em si. Por este motivo não se optou por aprofundar-se em rigores matemáticos extensos e sem propósito com o ensino fundamental. Procurou sim tornar este assunto permeável para o entendimento dos professores e ou educadores. Assim, por opção ideológica e também motivada pela observação durante a pesquisa realizada no trabalho, uma proposta de abordagem para ensino de números irracionais no ensino fundamental deve ser de viés simples e trabalhar as situações apreciadas também da forma mais simples possível. Devido ao nível de ensino, quanto mais complexo o contexto tanto maior será a chance de se complicar a aquisição de aprendizado a ser obtida pelo aluno.

Após leitura das obras citadas e da leitura de livros didáticos do ensino de matemática do ensino fundamental usados atualmente, além da experiência de anos trabalhando na área, observa-se facilmente que pouca coisa mudou na formulação dos livros didáticos, ficando recorrentes os mesmos modos, acepções e modelos de ensino. Mesmo com a defasagem de anos entre os livros analisados pelos autores citados e as ***coleções A*** e ***B***, o material didático não sofreu alterações. Ainda são usados os mesmos exercícios na ***coleção A***, a mais de uma década, sendo o mais relevante neste fato é que os exercícios sofreram empobrecimento teórico e de contextualização, principalmente nos modelos resolvidos. A ***coleção B*** se apresenta com data de 2015 e como 1ª edição, mesmo desta maneira compartilha exercícios semelhantes à ***coleção A***, ocorrendo, em alguns, quedas de contexto e aporte teórico.

A abordagem do ensino numérico irracional nas coleções analisadas, pessoalmente mostra que o ensino destes números ocorre de forma horizontal e sequência aleatória. Ou seja, não se nota a preocupação de se observar pré-requisitos para uma verticalização de conceitos a seguir, qual não pode ser apresentado previamente ou posteriormente, qual conceito não pode ser suprimido e etc.

Uma situação comparativa à abordagem usada nas coleções didáticas pode ser a de uma foto: Mostra-se a foto para o aluno e tudo que for parecido com a foto se torna identificável e igual, pela foto mostrada, não se preocupando com distorções que a foto possa ter tido como zoom, rotação e outros. Esta situação se caracteriza bem nos irracionais, pois se coloca uma raiz “quadrada” para o aluno e pronto, está trabalhado o conjunto irracional não se preocupando com as demais raízes: cúbica, quarta, quinta, lembrando que estas não são iguais à foto da raiz quadrada mostrada como exemplo.

Não se consegue identificar todos os elementos de um conjunto que não tenha todos os elementos iguais mostrando apenas um elemento. Embora isto seja bastante intuitivo, não é levado em conta na abordagem destas coleções de ensino, principalmente quando estas lidam com os irracionais. De modo geral, a abordagem nas coleções didáticas avaliadas não sofreu alterações na área conceitual para a introdução no estudo dos números na ultima década, apenas se observa a prática de modelos e repetição sem ordenação conceitual ou sequência e ainda optando por técnicas mínimas e não métodos para resolução. Observa-se então a troca da qualidade na aprendizagem pela repetição técnica.

E mesmo com a era da introdução da informática na educação, as redes públicas de ensino não têm ou têm quantidades insignificantes de equipamentos, ou não estão em funcionamento, ou ainda não conseguem dar manutenção no pouco equipamento que tem. Mas pode ser deixada de lado esta parte de informática, pois o conhecimento dos números irracionais deve ser significativo e isto pode ser conseguido sem estes equipamentos. Fica claro que com estes recursos poderia ser um objetivo mais fácil de ser atingido, mas dada às circunstâncias procura-se trabalhar sem estes para formulação de possibilidade de método.

Usando o exposto no trabalho coloca-se uma ideologia particular de abordagem a ser observada e tornar significativo os números irracionais para alunos do ensino fundamental.

Assim, um processo que envolva apostilas ou livros em grande escala ou equipamentos de mídias digitais como tabletes ou notebooks teriam que passar por processo de gestão e governo, fugindo assim do contexto pretendido.

Métodos matemáticos ricos em demonstrações, definições rigorosas e longas, aparentemente poderiam ser apontadas como ideais, porém teriam dificuldades em serem aplicadas de modo geral nas escolas, podendo esbarrar até em preparação de professores.

Com este aporte de informações, fica plausível que uma abordagem que dependa empiricamente do docente na sua aplicação, tenha mais conexão com a realidade observada. Assim, um processo que seja o conjunto de ações a serem adotadas por docentes e ideológicas em seu contexto fica mais perto da possibilidade de se obter êxito na ação, e dar significado aos números irracionais. Esta abordagem deve ser entendida como um fator complementar ao livro didático, isto devido ao aporte financeiro envolvido. Mesmo sabendo-se dos entraves que o livro possui, notadamente sem o livro didático seria pior.

Deste feito, uma ideologia particular de abordagem é apresentada em forma de itens a se percorrer, independente de hierarquia para simplificação do processo:

a) Buscar e tornar hábito o uso de exposições de situações da história da matemática como meio de estímulo à problematização de conteúdos dos números. O acontecimento histórico e o modo como ocorreram os fatos podem gerar interesse do aluno pelo conteúdo, e em conjuntos o interesse do aluno seria positivo, pois o interesse do aluno demandará atenção do mesmo. Quando o livro didático não fornecer o aporte, a busca destes fatos em mídias digitais deve ser levada em conta, principalmente em escolas que disponibilizam de laboratórios de informática.

b) Explorar o uso da reta numérica com racionais fracionários e irracionais por aproximação, denotando sempre a aproximação destes irracionais, sempre que possível feitas por frações contínuas, devido a sua precisão nas aproximações (Vide apêndices A, B e F).

c) Trabalhar com a comensurabilidade de segmentos nos números racionais. Exibir modelos de frações e seus segmentos, expondo método de resolução e não modelo fixo de reprodução matemática. Desta maneira, abrindo a ideia de que possa vir surgir segmentos que não são comensuráveis (Vide apêndice E).

d) Evidenciar com frações contínuas e finitas a identificação de números racionais (Vide apêndices A e F).

e) Evitar uso de exercícios e modelos como única justificativa de demonstrações, como é recorrente nos livros. Ou seja, quando se oferece mais de um ponto de vista sobre um conceito, o aluno se vê obrigado ou induzido a fazer comparações para uma escolha ou decisão.

f) Trabalhar, sempre que possível, com uma maior gama de números irracionais distintos dos exemplos triviais: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ e π nos demais conteúdos da matemática (Vide apêndices C e D).

g) Trabalhar e exibir subconjuntos formados por números irracionais algébricos, usando equações do segundo grau como geradoras de subconjuntos (Vide apêndices C e D).

h) Trabalhar a razão áurea, obtendo o número de ouro ϕ pela equação do segundo grau. Constatar que a razão áurea e o retângulo de ouro geram a mesma igualdade de frações (Vide págs. 39 e 40).

i) Quando se usar a geometria, como, por exemplo, a diagonal do quadrado unitário para se criar ou trabalhar a irracionalidade, não deixar que se torne como a única fonte ou maneira de se determinar um irracional, para que o aluno não associe um número irracional unicamente à geometria.

j) Colocar o cotidiano de trabalho com números irracionais evidenciando estes na jornada do aluno. Quando se trabalha o conteúdo ***operação com radicais*** não se cita ou se faz referência aos irracionais, no entanto se trabalha com estes. Uma potência de base prima e expoente de números inteiros fracionário não é citada como número irracional (Vide apêndice D).

Por mais simples que a ideologia de abordagem seja, a quantidade entremeada de informações nestas ações e procedimentos, desde que feitas de maneira hábil e corretas, criam uma gigantesca malha de conhecimento entrelaçado e interligados, da qual se espera surgir efeito positivo. Obviamente, espera-se por parte do aluno e aprendiz um mínimo de receptividade, pois a educação tem mais de um viés. O empirismo da proposta se dará pelo possível compromisso do docente em colocá-la em pauta.

A situação do livro didático quanto ao conteúdo e abordagem dos números irracionais fica clara no decorrer do próprio texto, que se resume em um material didático sem mudanças relacionadas na abordagem ou metodologia aplicada ao ensino dos números irracionais. Incorrendo desta forma nos resultados do ensino, porem não de maneira positiva.

Sendo o ano de 2019 o ano inicial de aplicação da BNCC, é de bom tom esperar mudanças nestes livros, entretanto há dez anos estes livros vêm sendo referenciados pelo PNLD.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As acepções e os caminhos para significar os números irracionais podem advir de várias formas. Neste trabalho procurou-se colocar em pauta através de pesquisa teórica como está sendo abordado o ensino de números irracionais no ensino fundamental. Neste contexto se focou em análise de obras sobre o assunto e avaliação de duas coleções para comparação. Discorreu-se sobre os conceitos para ensino destes números para embasamento.

As análises das duas coleções didáticas escolhidas, por estarem sendo utilizadas em rede pública, simplesmente validaram os relatos nas obras consultadas a respeito do assunto. Não foram evidenciadas distorções grotescas neste ensino. Porém as quantidades de elementos textuais destinados ao ensino dos números mostrou, tanto na pesquisa documental quanto nas coleções avaliadas, um percentual pequeno quando relacionado ao todo do livro, valores que estão entre 2% e 4,5% do total do livro destinados ao ensino destes conceitos. Nas coleções denominadas ***A*** e ***B***, a dependência e unicidade de se mostrar irracionais unicamente por geometria continua a ser propagada, não se observando nestas os termos como comensurabilidade e fração contínua. Os métodos de introdução dos irracionais continuam abordados como na década passada.

Comparando os fatos na pesquisa documental e nas coleções avaliadas, constatou-se que as metodologias de ensino entre estas não se modificaram desde 2010, com relação ao ensino dos números racionais e irracionais. Ou seja, não ocorreram mudanças significativas no ensino de números, estando este ensino congelado há quase uma década.

Dada a complexidade de como a educação ocorre atualmente no país (política, economia, cultura...) optou-se por não contextualizar nesta direção e se focar no simples e possível. Deste modo se sugere uma sequência de tópicos como no final da seção 4. Os procedimentos empíricos propostos pelos tópicos dessa sequência para o docente incidem no que os resultados da pesquisa documental, e constatados nas coleções ***A*** e ***B***, caracterizaram como não condizente ou não adequado.

Deste modo, a principal contribuição da pesquisa é exibir, nesta data, de fato a real abordagem no ensino fundamental do ensino dos números irracionais.

Consistindo na constatação da não mudança durante uma década dos livros didáticos, os quais são referenciados ideais pelo Ministério da Educação. Além de oferecer informações pedagógicas, acredita-se que revelam-se pontos cruciais a serem observados e trabalhados para mudanças neste ensino. Considera-se como contribuição a pequena sequência de procedimentos empíricos a serem aplicados. Finalmente a valoração dos números fica evidenciada neste trabalho.

Uma semente para germinar deve ser plantada. Com este trabalho tenciona-se plantar uma simples ideia de mudanças no ensino de números irracionais no ensino fundamental para melhorias na significação destes números.

Referências

AVILA, G. Cantor e a Teoria dos Conjuntos. **Revista do professor de Matemática**, Goiânia, 43, 2000. 7.

BAFFI, M. A. T. Modalidades de pesquisa: um estudo introdutório. **Pedagogia em foco: fundamentos da educação**, Rio de Janeiro, 2002. 6.

BELUSSI, G. M. et al. **NÚMERO DE OURO**. Universidade Estadual de Londrina. Londrina, p. 11. [200-].

BORGES, F.; PORTUGAL, R.; OLIVEIRA, J. C. D. Criptografia com números irracionais, 1, 2006. 2.

CERRI, C. **Desvendando os numeros Reais**. IME-USP. [S.l.], p. 26. 2006.

CORBO , O. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica**. Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, p. 313. 2012.

DEMO, P. **Metodologia do conhecimento ciêntifico**. São Paulo: Atlas, 2000.

ENAGO, E. B. enagoacademy. **ulatusblog**, 2014. Disponivel em: <http://www.enago.com.br/blog/pesquisa-teorica-vs-pesquisa-empirica/>. Acesso em: 10 feverreiro 2018.

FARIAS, E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. **Zetetike**, 7, jul. 1999. 95-117.

FISCHBEIN, E.; JEHIAN, R.; COHEN , D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, 29, 1 Julho 1995. 29-44.

GARCIA, V. C.; FRONZA, J.; SOARES, D. D. S. **ENSINO DOS NÙMEROS IRRACIONAIS NO NÌVEL FUNDAMENTAL**. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Porto alegre. 2005.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2014.

LÚDKE, M.; ANDRE, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária - EPU, 1986. 99 p.

MOREIRA, C. G. T. D. A. **Frações Contínuas, Representações de Números**. IMPA. [S.l.]. 2011.

MOSCIBROSKI , T. M. **A Amplitude do conjunto dos números irracionais**. Universidade Federal de Santa - UFSC. Florianópolis, p. 71. 2002. (02681743).

NÍVEN, M. **Números Racionais e Irracionais**. SBM. Rio de Janeiro, p. 215. 1984. (N734n).

POMMER, M.; POMMER, C. P. A abordagem de alguns números irracionais notáveis nos livros didaticos do ensino fundamental e médio. **INTERFACES DA EDUCAÇÂO**, São Paulo, n. 6, p. 22, setembro 2012. ISSN ISSN2177-7691.

POMMER, W. M. **Frações Contínuas no Ensino Médio?** FEUSP. São Paulo, p. 14. 2009.

POMMER, W. M. NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ÁLISE EM LIVROS DIDÁTICOS. **Encontro Paraense de Educação Matemática, Belém**, Belem, 01 set. 2011. 1-11.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico:uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais**. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 235. 2012. (s.n.).

POMMER, W. M. **O NÚMERO DE OURO: A ABORDAGEM NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO**. Universidade do Estado da Bahia - UNEB. Salvador, p. 11. 2013.

PONTE, J. P. D. Números e álgebra no currículo escolar, Lisboa, p. 27, Julho 2006. Disponivel em: <http://hdl.handle.net/10451/4525>. Acesso em: 5 novembro 2017.

SANTOS, L. F. D. C.; ROQUE, T. M. **Contrastes e Similaridades nas abordagens de Dedekind e Tannery no que se refere à construção dos Números Irracionais.** [S.l.].

RIPOLL, C. C. A CONSTRUC AO DOS NUMEROS REAIS NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO. 2001.

SA-SILVA, J. R.; ALMEIDA, D. D.; GUINDANI, F. G. Revista Brasileira de História & Ciências Sociais. **Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas**, n. 1, p. 14, julho 2009.

SAVIANI, D. O debate teórico e metodológico no campo da história e sua importância para a pesquisa educacional, n. 12, p. 11, Dezembro 1997.

SCHUBRING, G. **Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition**. Tradução de Proprio. 1. ed. New York: Springer-Verlag New York, 2005.

SCHUBRING, G.; SILVA, P. E. D. CÁLCULO EM MATEMÁTICA: UM ASSUNTO

PARA O ENSINO EM GERAL OU ESPECÍFICO PARA O ENSINO TÉCNICO., n. 20, Maio 2016.

SILVA, J. C. R. D. **Estudo das frações continuas**. UCB. Brasilia, p. 11.

SOUTO, A. M. **Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos**. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 106. 2010.

VIGOTSKI, L. S. A Educação do comportamento emocional. **Psicologia pedagógica: edição comentada. Porto Alegre: Artmed**, Porto Alegre, 13 out. 2003. 113-124.

ZAZKIS, R.; SIROTIC, N. Making Sense of Irrational Numbers: Focusing on Representation., Cabo, 4, 2004. 497-504.

Apêndice A

Para aproximação ou cálculo de raízes aproximadas, as frações contínuas são uma opção no ensino fundamental, além de fornecerem boas aproximações. Assim:

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots$

Seja o algoritmo (5):

$$b_n = \frac{1}{b_{n-1} - a_{n-1}}\ , n \geq 1\ e\ a_0 = \lfloor b_0 \rfloor, a_1 = \lfloor b_1 \rfloor, a_2 = \lfloor b_2 \rfloor, \ldots\ a_n = \lfloor b_n \rfloor, \ldots$$

Para $b_0 = \sqrt{2}\ e\, a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$:

$$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow a_1 = \lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor = 2$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow a_2 = \lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor = 2$$

Observe que o processo sempre vai fornecer $a_n = 2,$ deste modo teremos:

$$\sqrt{2} = [1; 2,2,2, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ldots}}}}}}}$$

Aproximação para $[1; 2,2,2,2,2]$:

$$x = [1; 2,2,2,2,2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} \Rightarrow$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} \Rightarrow x = \frac{99}{70} = 1{,}4142857142857142857142857142857$$

b) $\sqrt{3}$=*1,7320508075688772935274463415059...*

Para $b_0 = \sqrt{3}\ e\, a_0 = \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$:

$$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$$

$$\Rightarrow a_2 = \lfloor\sqrt{3}+1\rfloor = 2$$

$$b_3 = \frac{1}{b_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\Rightarrow a_3 = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1$$

Observe que o processo é recorrente e fornecera: $\sqrt{3} = [1; 1,2,1,2,1, \dots]$

Aproximação para $[1; 1,2,1,2,1]$:

$$x = [1; 1,2,1,2,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}}$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}} \Rightarrow x = \frac{71}{41} = 1{,}73170731707317073170731707$$

c) $\sqrt{5} = 2{,}2360679774997896964091736687313$

Para $b_0 = \sqrt{5}\ e\, a_0 = \lfloor\sqrt{5}\rfloor = 2$:

$$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$$

$$\Rightarrow a_1 = \lfloor\sqrt{5}+2\rfloor = 4$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{\sqrt{5}+2-4} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$$

$$\Rightarrow a_2 = \lfloor \sqrt{5}+2 \rfloor = 4$$

$$b_3 = \frac{1}{b_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2-4} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$$

$$\Rightarrow a_2 = \lfloor \sqrt{5}+2 \rfloor = 4$$

Observe que o processo é recorrente e fornecera*:* $\sqrt{5} = [2; 4,4,4,4,4, \dots]$

Aproximação para $[2; 4,4,4,4,4, \dots]$:

$$x = [2; 4,4,4,4,4, \dots] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}}}$$

$$x = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}}} \Rightarrow x = \frac{2889}{1292} = 2{,}2360681114551083591331269349845$$

Com o mesmo procedimento obtemos:

d) $\sqrt{6} = [2; 2,4,2,4, \overline{2,4,2,4}, \dots] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}} = 2{,}449489742783178098197 \dots$

e) $\sqrt{7} = [2; 1,1,1,4, \overline{1,1,1,4}, \dots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}} = 2{,}645751311064590590 50 \dots$

f) $\sqrt{8} = [2; 1,4,1,4, \overline{1,4,1,4}, \dots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}} = 2{,}8284271247461900976 0 \dots$

Apêndice B

A representação de um número racional da forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}^{+}$, por fração contínua pode auxiliar na compreensão destes. Pois se o mesmo for representado por uma fração contínua finita é dito racional. Usando de mesma forma o algoritmo *(5)*, pode-se pegar frações da forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}^{+}$ e representá-las como abaixo:

a) $\frac{14}{8}$:

$$b_n = \frac{1}{b_{n-1} - a_{n-1}}\ , n \geq 1\ e\ a_0 = \lfloor b_0 \rfloor, a_1 = \lfloor b_1 \rfloor, a_2 = \lfloor b_2 \rfloor, \dots\ a_n = \lfloor b_n \rfloor, \dots$$

$para\ b_0 = \frac{14}{8}\ \ e\, a_0 = \left\lfloor \frac{14}{8} \right\rfloor = 1\, ,$ o algoritmo nos da:

$$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\frac{14}{8} - 1} = \frac{1}{\frac{6}{8}} = \frac{8}{6} \Rightarrow a_1 = \lfloor b_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{8}{6} \right\rfloor = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{8}{6} - 1} = \frac{1}{\frac{2}{6}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow a_2 = \lfloor 3 \rfloor = 3$$

$$\frac{14}{8} = [1; 1{,}3] == \ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}.$$

b) $\frac{117}{37}$:

Pelo algoritmo (5) tem-se:

$$\frac{117}{37} = [3; 6{,}6] = \ 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6}}$$

c) Para $\frac{346}{29}$:

$$\frac{346}{29} = [11; 1{,}13{,}1{,}1] = 11 + \frac{1}{1 + \frac{1}{13 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

d) Para $\frac{256}{13}$:

$$\frac{256}{13} = [19{,}1{,}2{,}3{,}1] = 19 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}$$

Observe que quando o numerador for menor que o denominador de uma fração racional da forma $\frac{a}{b}$, tem-se que o inverso desta é dado por $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$. Deste modo, tem-se a representação por fração contínua de $\frac{a}{b}$ dada pela representação de $\frac{1}{\frac{b}{a}}$. Desta maneira, para $\frac{13}{256}$:

e) $\frac{13}{256} = \frac{1}{\frac{256}{13}} = 0 + \frac{1}{\frac{256}{13}} = 0 + \cfrac{1}{19+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{1}}}}} = [0; 19,1,2,3,1]$.

f) Para $\frac{29}{346}$:

$$\frac{29}{346} = [0; 11,1,13,1,1] = 0 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}$$

g) Para $\frac{37}{117}$:

$$\frac{37}{117} = [0; 3,6,6] = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{6}}}$$

Sabendo-se a representação de $\sqrt{7}$ *e* $\sqrt{8}$ usando o método do inverso:

h) $\frac{1}{\sqrt{7}} = [0; 2,1,1,1,4,\overline{1,1,1,4,}\ldots] = 0 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{\ldots}}}}}}}}$

i) $\frac{1}{\sqrt{8}} = [0; 2,1,4,1,4,\overline{1,4,1,4,}\ldots] = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{\ldots}}}}}}}$

Apêndice C

A construção de números irracionais ou subconjuntos de irracionais pode ser conseguido através de números algébricos. Para o ensino fundamental uma forma de se obter estes números é através de equação do segundo grau. A escolha de uma equação própria ajuda neste contexto. Seja a equação:

$$x^2 + bx + 1 = 0$$

Analisando Baskara, o delta (Δ) desta equação. Tem que se: $\Delta \neq 4k$; $k \in \mathbb{N}$, então Δ não é quadrado perfeito. Assim:

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4$$

Seja $b = 2k + 1$, ou seja, b seja um número impar. Deste modo:

$$\Delta = (2k + 1)^2 - 4 = 4k^2 + 4k + 1 - 4 \Rightarrow$$
$$\Delta = 4k^2 + 4k - 3 = 4(k^2 + k) - 3$$
$$\Delta = 4m - 3.$$

Deste modo se k é impar, Δ não é quadrado perfeito, gerando equações do segundo grau com raízes irracionais. Deste modo, para $k = 1 \Rightarrow b = 3$.

Assim:

a) $x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{5}-3}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$

b) $x^2 + 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{21}-5}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{21}-5}{2}$

c) $x^2 + 7x + 1 = 0$ $x = \frac{-3\sqrt{5}-7}{2}$ ou $x = \frac{3\sqrt{5}-7}{2}$

d) $x^2 + 9x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{77}-9}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{77}-9}{2}$

e) $x^2 + 11x + 1 = 0$ $x = \frac{-3\sqrt{13}-11}{2}$ ou $x = \frac{3\sqrt{13}-11}{2}$

f) $x^2 + 13x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{165}-13}{2}\ ou\ x = \frac{\sqrt{165}-13}{2}$

g) $x^2 + 15x + 1 = 0x = \frac{-\sqrt{221}-15}{2}\ or\ x = \frac{\sqrt{221}-15}{2}$

Apêndice D

O trabalho com expoentes racionais e fracionários pode fornecer números irracionais, e deste modo subconjuntos irracionais. Seja a expressão abaixo:

$$\sqrt[n]{p^m} = p^{\frac{m}{n}}; mdc(m, n) = 1\ e\ "p"\ \text{é primo.}$$

Desta forma pode-se expor números irracionais:

$$\sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}},\ \sqrt[3]{7^8} = 7^{\frac{8}{3}},\ \sqrt[3]{7^4} = 7^{\frac{4}{3}},\ \ldots$$

Ou conjunto:

$$A = \left\{2^{\frac{1}{2}}, 7^{\frac{2}{3}}, 7^{\frac{3}{2}}, 3^{\frac{7}{5}}, 5^{\frac{9}{4}}, 3^{\frac{2}{3}}, \ldots\right\}$$

Números compostos da forma: $a^{\frac{m}{n}}$ podem ser decompostos pelo teorema fundamental da álgebra. Deste modo $a^{\frac{m}{n}} = (pq)^{\frac{m}{n}} = p^{\frac{m}{n}}.q^{\frac{m}{n}}$.

Deve-se lembrar que os irracionais não são fechados para multiplicação, para que não ocorra o processo abaixo:

$$5^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{4}{1}} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$$

A soma de racional com irracional, embora extremamente simples, mostra-se a ferramenta mais intuitiva para a construção de números irracionais.

Apêndice E

A ligação da comensurabilidade com a racionalidade justifica o trabalho com exercícios desta ordem. Sejam os exemplos:

a) Desenhe dois segmentos AB e CD quaisquer. Qual dos segmentos é maior?

b) Como você fez para dizer qual é o maior?

c) Crie um nome ou símbolo para cada segmento de tal forma que seja possível saber a posição na sequência do menor segmento para o maior.

d) Talvez você tenha percebido que criar nomes significativos para os segmentos não é uma tarefa fácil. Você tem alguma sugestão para tornar essa tarefa mais fácil?

e) O que você acha de se comparar o tamanho dos segmentos com um segmento fixo?

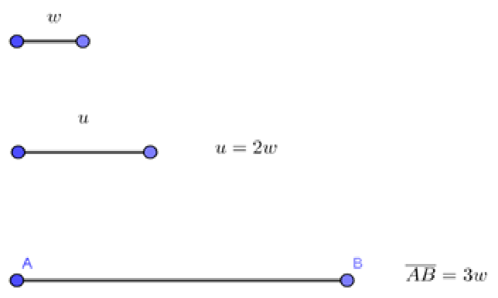
Uma das soluções para esse problema é escolher um segmento para ser o padrão de comparação. Chame-o de U. Agora todos os outros segmentos serão comparados com o segmento U. Fica combinado que o tamanho do segmento padrão é um (1).

f) Você conseguiu medir todos os segmentos com o segmento "U"?

g) É possível criar um segmento menor que "U" para medir os segmentos que não foram possíveis de serem medidos com "U"?

h) Quantas vezes este segmento menor que "U" cabe em "U" e nos que não foram possíveis de medir por "U"?

i) Observe o exemplo abaixo:



Suponha que $u = 2w$, o que torna $w = \frac{u}{2}$. Agora suponha que o segmento AB contenha o segmento "w" 3 vezes, isto é:

$$\overline{AB} = 3\overline{w} = 3\frac{\overline{u}}{2}$$

É possível repetir a ideia acima com os segmentos que você não conseguiu medir com o segmento “U”?

j) Quais as medidas que você encontrou?

Apêndice F

A estreita relação do algoritmo de Euclides e frações contínuas pode contribuir de forma positiva para o estudo dos irracionais e racionais. Veja o uso do algoritmo para a construção de fração continua:

Observe a tabela do algoritmo de Euclides:

Tabela 2 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 1

		a_0	a_1	a_2	a_3
		4	1	7	2
83	17	15	2	1	0
Numerador	Denominador	Resto 1	Resto 2	Resto 3	Resto 4

Observe que os quocientes dados pelo algoritmo fornecem os índices das convergentes da fração contínua: $\frac{83}{17} = [a_{0;}a_1, a_2, a_3] = [4; 1,7,2] = 4 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{2}}}$

Para as frações seguintes tem-se:

Tabela 3 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 2

		a_0	a_1	a_2
		2	1	8
26	9	8	1	0
numerador	denominador	resto 1	resto 2	resto 3

$$\frac{26}{9} = [2; 1,8] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8}}$$

Tabela 4 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 3

		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
		5	2	2	1	2
103	19	8	3	2	1	0
numerador	denominador	resto 1	resto 2	resto 3	resto 4	resto 5

$$\frac{103}{19} = [5; 2,2,1,2] = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Tabela 5 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 4

		a_0	a_1	a_2
		3	1	31
254	64	62	2	0
numerador	denominador	resto 1	resto 2	resto 3

$$\frac{254}{64} = [3; 1,31] = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{31}}$$

Tabela 6 - Algoritmo de Euclides para fração contínua 5

		a_0	a_1	a_2	a_3
		2	3	9	2
137	59	19	2	1	0
numerador	denominador	resto 1	resto 2	resto 3	resto 4

$$\frac{137}{59} = [2; 3,9,2] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2}}}$$