COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Leandro de Lima da Silva

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO: HISTÓRIA, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Rio de Janeiro
2018

Leandro de Lima da Silva

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO: HISTÓRIA, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S586 Silva, Leandro de Lima da

Equações algébricas: história, conceitos e aplicações /Leandro de Lima da Silva. – Rio de Janeiro, 2018.

85f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Marilis Bahr Karam.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – História. 3. Equações algébricas. 4. Polinômios – Propriedades básicas. I. Karam, Marilis Bahr. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692

Leandro de Lima da Silva

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO:
HISTÓRIA, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau
Colégio Pedro II - CPII

____
Dra. Luciana Santos da Silva Martino
Colégio Pedro II - CPII

____
Dr. Adilson Elias Xavier
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Rio de Janeiro
2018

À minha esposa, por seu amor e companheirismo.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço ao meu Deus que me fortaleceu nessa caminhada e me fez chegar até aqui.

À minha mãe que me criou com muita dificuldade e sempre esteve orando por mim.

À minha amada esposa, que além de amiga, companheira teve maior paciência em toda a caminhada do mestrado, principalmente antes das provas.

Aos meus filhos, cujo amor e carinho trouxeram alegria nos momentos de exaustão e desânimo.

Aos amigos que sempre me incentivaram na caminhada.

A todos os professores e colegas do mestrado PROFMAT pelo crescimento intelectual proporcionado.

À professora Marilis, minha orientadora, por toda a contribuição intelectual e pelas horas de empenho em busca de me mostrar os melhores caminhos da pesquisa e pela paciência com minhas dificuldades, que foram superadas pelo seu excelente apoio.

A todos do Colégio Pedro II que contribuíram direta ou indiretamente para minha conquista.

RESUMO

SILVA, Leandro de Lima da. **Equações Algébricas: História, Conceitos e Aplicações**. 2018. 92 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

No período entre os séculos dezesseis e dezoito, grandes avanços na Matemática resultaram da busca por métodos algébricos de solução para equações algébricas de grau superior a dois. Embora as de grau dois já serem conhecidas desde a Antiguidade. Com base na grande importância das equações algébricas dentro do estudo da Matemática, este trabalho começa com os aspectos históricos das equações, suas definições e seus conceitos com ênfase nas aplicações que podem ser desenvolvidas a partir dos anos finais do Ensino Fundamental. O objetivo é apontar como este conteúdo pode ser tratado de forma mais complexa, a fim de ajudar nas questões de nível mais elevado. Para isso, inicialmente, faz-se uma pesquisa sobre o tema, onde fala-se dos primeiros registros do conhecimento de equações matemáticas pelos povos antigos. A seguir, abordam-se conceitos, definições e operações entre polinômios, com destaque ao método de Descartes, dispositivo prático de Briot-Ruffini e teorema do resto, na sequência, são discutidas as resoluções de equações algébricas e estudados alguns resultados importantes como: o Teorema Fundamental da Álgebra, as Relações de Girard, etc. Como complemento, serão sugeridas aplicações que podem ser utilizadas em sala de aula referentes a este estudo.

Palavras-chave: Polinômio. Equações algébricas. História da Matemática. Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

SILVA, Leandro de Lima da. **Equações Algébricas: História, Conceitos e Aplicações**. 2018. 92 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

In the period between the sixteenth and eighteenth centuries, great advances in Mathematics resulted from the search for algebraic methods of solution for algebraic equations of degree higher than two, although the resolution of the algebraic equations of degree two have already been known since antiquity. Based on the great importance of algebraic equations within the study of Mathematics, this work begins with the historical aspects of the equations, their definitions and their concepts with emphasis on the applications that can be developed from the 9th year of Elementary Education. The goal is to point out how this content can be treated in a more complex way in order to help with higher level issues. For this, initially, a research is done on the subject, where the first records of the knowledge of mathematical equations by the ancient peoples are spoken. Then, concepts, definitions and operations between polynomials are discussed, with emphasis on the Descartes method, the Briot-Ruffini practical device and the remainder theorem, in the sequence, the resolutions of algebraic equations are discussed and some important results are studied, such as: The Fundamental Theorem of Algebra, Girard's Relations, etc. As a complement, applications that can be used in the classroom related to this study are suggested.

Keywords: Polynomial. Algebraic equations. History of Mathematics. Teaching and learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01- Dispositivo Pratico de Briot-Ruffini 36

Figura 02 - Representação de $(3x^3 - 5x^2 + x - 2) \div (x - 2)$ 36

Figura 03 - Representação de $(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (x - 2)$ 52

Figura 04 - Representação de $p(x) = x^3 - 3x + c$ 60

Figura 05 - Representação de $(x^4 - 5x - 6) \div (x + 1)$ 76

Figura 06 - Representação de $(x^3 - x^2 + x - 6) \div (x - 2)$ 77

Figura 07 - Representação de $[(x^4 + ax + b) \div (x - p)] \div (x - q)$ 77

Figura 08 - Representação de $[(x^3 - 2x^2 - x + 2) \div (x - 1)] \div (x - 2)$ 78

Figura 09 - Representação de $p(x) = (16x^5 - 48x^4 - 40x^3 + 120x^2 + 9x - 27) \div (x - 3)$ 80

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 01: Representação do gráfico de $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ 59

Gráfico 02: Representação do gráfico de $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ 60

Gráfico 03: Representação do gráfico de $p(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 3$ 61

Gráfico 04: Representação gráfica de $p(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$ 62

Gráfico 05: Representação gráfica de $p(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{8}{3}$ 62

Gráfico06: Representação gráfica de $p(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{12}$ 63

Gráfico 07: Representação gráfica de $p(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}$ 63

Gráfico 08: Representação gráfica de $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ 64

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO..12

2 ASPECTOS HISTÓRICOS..14

2.1 Equações de Primeiro Grau 14

2.2 Equações de Segundo Grau 15

2.2.1 Egito.. 15

2.2.2 Mesopotâmia... 16

2.2.3 Grécia.. 17

2.2.4 Índia 18

2.2.5 Arábia 19

2.2.6 A Arte Analítica de Viète 20

2.3 Equações de Terceiro e Quarto Grau... 22

2.4 Equações de Quinto ou maior Grau... 23

3 POLINÔMIOS...25

3.1 Algumas Conceitos e Resultados Iniciais. 25

3.2 Operações com Polinômios 29

3.2.1 Adição e Subtração 29

3.2.2 Multiplicação 30

3.2.3 Divisão de Polinômios 32

3.3 A Divisão de um polinômio por um binômio do tipo (x - a) 35

3.4. Teorema do Resto 36

4 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS...38

4.1 Definição.. 38

4.2 Resoluções de equações algébricas.. 38

4.2.1 Equação polinomial do 1° grau.. 39

4.2.2 Equação polinomial do 2° grau.. 39

4.2.3 Equação polinomial do 3° grau 40

4.2.4 Equação polinomial do 4° grau 43

4.3 Reduzindo o grau de uma equação algébrica 45

4.4 Teorema Fundamental da Álgebra 46

4.5 Teorema da Decomposição 47

4.6 Relações de Girard 49

4.7 Equações algébricas com coeficientes reais 53

4.8 Métodos de Aproximações Sucessivas 64

5 UM PANORAMA DO ENSINO MÈDIO, ENEM E ALGUNS EXAMES VESTIBULARES 70

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 83

REFERÊNCIAS 84

1 INTRODUÇÃO

A teoria das equações algébricas de grau *n*, sendo *n* natural, teve seu início na Antiguidade. Hoje em dia, constitui uma das partes da Álgebra superior, estando presente em várias áreas do conhecimento: Engenharia, Física e outras ciências. Porém, ela está ausente de muitos programas de Matemática do Ensino Médio, como já havia dito Carneiro (1998) e, nos dias atuais, isso é ainda mais notório quando se olha para o programa do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Temas como: números complexos, polinômios e resoluções de equações algébricas com grau superior a dois não constam em seu programa.

Em contrapartida, fala-se em problemas contextualizados e uso de tecnologias para tornar o ensino de Matemática mais atrativo e dinâmico para o aluno.

Este trabalho pretende reunir material necessário para mostrar que a teoria de equações algébricas é uma ferramenta útil e que pode propiciar tanto o uso de problemas contextualizados quanto o uso de tecnologias no ensino da Matemática. Para tal, este trabalho começa com uma revisão bibliográfica da história e conceitos da teoria das equações algébricas. Como ferramentas úteis na resolução de determinadas equações algébricas, utilizar-se-á o *software* Geogebra e um método de aproximações sucessivas muito útil. Assim, este trabalho será organizado em 6 capítulos.

No Capítulo 2, faz-se um estudo abordando os aspectos históricos, começando pelo conhecimento que se tem do povo egípcio, passando por outros povos, fazendo uma análise dos vários métodos de resoluções das equações, até chegar às fórmulas conhecidas nos dias atuais. Esse conhecimento da história proporcionará um melhor entendimento dos métodos empregados para resolver as equações algébricas.

No Capítulo 3, serão introduzidos os conceitos de polinômios, passando pelas quatro operações, com ênfase maior na divisão, onde também será visto o método de Descartes, método da chave, a divisão de um polinômio por um binômio do tipo $(x - a)$, dispositivo Prático de Briot-Ruffini e também o Teorema do Resto. Estes resultados proporcionarão subsídios para o desenvolvimento da teoria de equações algébricas que será apresentada no capítulo seguinte.

No Capítulo 4, será desenvolvida a teoria das equações algébricas, mostrando métodos para encontrar suas raízes e dicas para reduzir o grau de uma equação algébrica, usando a divisão dos polinômios. Serão apresentados o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema da Decomposição, bem como as relações entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes, conhecidas como as relações de Girard, culminando com a resolução de equações algébricas pelo emprego de método de aproximações sucessivas de Newton Raphson.

No capítulo 5, faz-se um panorama de como o tema equações algébricas é tratado no Ensino Médio, ENEM e alguns exames vestibulares. E por fim, no capítulo 6, algumas considerações serão feitas.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

A história dos polinômios nasce junto com a história da Matemática, mas não há um consenso histórico sobre onde nasceu e nem em que lugar teve origem a história da Matemática, normalmente associa-se o inicio da história à necessidade de contagem. Um dos exemplos mais utilizados é o do pastor de ovelhas que teria a necessidade de controlar a contagem de seu rebanho.

2.1 Equações de Primeiro Grau

Além das maravilhosas pirâmides de Gisé e da Esfinge, o povo egípcio, que se desenvolveu ao lado do rio Nilo, deixou os primeiros registros matemáticos: dois papiros são as fontes principais de informações referentes à Matemática egípcia antiga. Um deles é o papiro de Moscou, ou *Golonishev*, datado aproximadamente no ano 1850 a.C.. Neste encontra-se um texto matemático que contém 25 problemas. O outro, o papiro *Rhind* (ou *Ahmes*) datado aproximadamente no ano 1650 a.C. no qual encontra-se um texto matemático na forma de manual prático. Este manual contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba *Ahmes* de um trabalho mais antigo. O papiro *Rhind* está registrado no livro de Boyer (2002, p. 08) "Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind; por isso é conhecido Papiro Rhind, ou, menos frequentemente, chamado Papiro Ahmes em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 a.C." Nele encontram-se equações de primeiro grau. A incógnita era chamada de "*aha*".

Exemplo 1. Probl.24: *Pede-se o valor de aha, sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19. A solução Ahmes não é a dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido como o "método de falsa posição" ou "regra de falso".* (BOYER, 2002)

Resolução. Na linguagem de hoje tem-se:

$$x + \frac{x}{7} = 19,$$

Multiplicando ambos os termos por 7, obtém-se:

$$8x = 133,$$

e dividindo os dois lados por 8, conclui-se que:

$$x = \frac{133}{8}.$$

2.2 Equações de Segundo Grau

A equação de segundo grau passou por vários métodos de resoluções até chegar à fórmula que se tem hoje $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$. Sendo desenvolvida de diversas formas diferente pelos povos ao longo da história.

2.2.1 Egito

Ainda no Egito antigo, o papiro de Moscou, também apresenta um raciocínio para a resolução de equação de segundo grau. Um problema para calcular a base de um retângulo cuja altura ℓ é igual a $\frac{3}{4}$ de sua base e cuja área é igual a 12. Nesses casos usava-se o método da falsa posição, inicialmente tomando números múltiplos de quatro. Por sorte, nesse caso na primeira tentativa, tem-se a resposta $\ell = 4$.

Segundo Boyer, no Papiro de *Rhind,* é apresentada a resolução de problemas pelo método de falsa posição.

Exemplo 2. *A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é o quádruplo do lado do outro. Encontre os lados desse quadrado.* (BOYER, 2002, p. 12)

Resolução. Em simbologia atual o sistema de equações que representa o problema é:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{3x}{4} \end{cases}. \qquad (1)$$

A seguir o procedimento retórico dado pelo escriba para a resolução do problema.

Tome $x = 4$ e $y = 3$ como valores iniciais, e substituindo-os nas equações em (1).

$$3^2 + 4^2 = 25\,(25 \neq 100).$$

Como $25 \neq 100$ e $\sqrt{25} = 5; \sqrt{100} = 10$.

Sendo o quociente entre eles

$$\frac{10}{5} = 2.$$

Logo, é necessário que sejam

$$x = 3 \cdot 2 = 6 \text{ e } y = 4 \cdot 2 = 8.$$

2.2.2 Mesopotâmia

A Mesopotâmia foi habitada por vários povos: os sumérios, os amoritas, os assírios e os caldeus. Os registros matemáticos encontrados em tábuas de argila, por volta de 1700 a.C., são das antigas civilizações chamadas de babilônios (amoritas). O sistema de numeração usado por esses povos era o da base sexagesimal. Observe como funcionava o sistema.

Para representar o sistema sexagesimal será aplicada a notação moderna, tendo como exemplo o número: 3,14;6,40, indicado assim em nosso sistema decimal:

$$3 \cdot 60^1 + 14 \cdot 60^0 + 6 \cdot 60^{-1} + 40 \cdot 60^{-2} = 194\frac{19}{90}.$$

Segundo Boyer (2002), os egípcios tiveram dificuldades de encontrar a solução de uma equação quadrática com três termos. Em contrapartida, os mesopotâmicos tratavam as equações desse tipo com facilidade e eficiência.

Observe esse problema tirado de antigos textos.

Exemplo 3. *"Qual é o lado de um quadrado, se a área dele menos o lado dá 14,30?"* (BOYER, 2002, p. 22).

Resolução. É bom lembrar que era usada a base sexagesimal.

Tome a metade de 1que é0;50.

Multiplique 0;50 por 0;30, obtém 0;15.

Some 0;15 a 14,30, obtém 14,30;15. Como 14,30;15 é o quadrado de 29;30. (Na escrita de base 10, 14,30;15 = 870,25 tendo como raiz 29,5 que em base 60 se escreve como 29;30);

Somando 0;30 a 29;30 tem-se que o lado do quadrado é 30.

Agora em linguagem atual, mas antes de resolver essa equação é necessário transformar 14,30 na base 10.

$$14.60^1 + 30.60^0 = 870,$$

Assim, tem-se a seguinte equação:

$$x^2 - x = 870.$$

cuja a solução é dada pela forma a seguir:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} \\ &= \sqrt{0{,}25 + 870} + 0{,}5 \\ &= 29{,}5 + 0{,}5 \\ &= 30. \end{aligned}$$

2.2.3 Grécia

A Grécia teve grandes nomes matemáticos como: Euclides, Arquimedes, Apolônio, Platão, Pitágoras entre outros. Foram eles, que introduziram o método axiomático: as rigorosas provas dedutivas e o encadeamento sistemático de teoremas demonstrativos, tornando a Matemática uma ciência.

Segundo Roque (2012), na Grécia a contribuição para a equação do 2º grau mais conhecida é a de Diofanto. Ele introduziu uma forma de representar o valor desconhecido em um problema.

O método de abreviação representava a palavra usada para designar essas quantidades, sendo a sua primeira ou última letra de acordo com o alfabeto grego.

Exemplo 4. "*Encontrar dois números com soma igual a 20 e o produto 96.*" (ROQUE, 2012, p. 232)

Resolução. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2arithmoi, sendo arithmoi o valor desconhecido, dividi-se a soma desses números (que é 20) em duas partes iguais.

A partir desse resultado, considera-se10 um arithmos. Contudo, multiplicando-se esses resultados obtém-se 100, não sendo este o produto desejado no problema.

Para que o produto seja 96, subtrai-se 96 de 100 e extrai-se a raiz quadrada do resultado, tendo como resposta 2. Somando e subtraindo esse valor a cada arithmos, os valores procurados serão 12 e 8.

2.2.4 Índia

A Matemática indiana desenvolveu-se longe da influência externa, mas exportando seu conhecimento. No período do auge da Matemática indiana (400 a 1600 d.C.), foram feitas importantes contribuições por seus matemáticos.

Segundo Roque (2012), é de grande primazia citar o Matemático Bháskara, principalmente para mostrar que ele não é o inventor da conhecida fórmula de resolução de equações de 2° grau, que ganhou seu nome no Brasil. Apesar de possuir regras para resolver problemas que seriam hoje traduzidos por equações do segundo grau e também usar alguns símbolos para representar as quantidades desconhecidas, não há comprovações históricas que ele possuía uma fórmula de resolução de equações do segundo grau.

De forma geral, o método de resolução empregado por Bháskara consiste em:

- Completar o quadrado no primeiro membro para tornar o termo que contém a quantidade desconhecida um quadrado perfeito.
- Diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros.
- Resolver a equação de primeiro grau que daí resulta.

Exemplo 5. *"De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?"* (ROQUE, 2012, p. 241).

Resolução. Em simbologia atual:

O enxame é representado por $2x^2$, a raiz da metade é x e os oito nonos do todo são $\frac{16x^2}{9}$, que aumentados do casal de abelhas e da raiz, devem ser iguais a $2x^2$. Sendo, assim, tem-se a equação:

$$x + \frac{16x^2}{9} + 2 = 2x^2.$$

Aplicando, nos dois lados da igualdade, a multiplicação por 9 e depois a subtração de $16x^2 + 9x$ tem-se:

$$2x^2 - 9x = 18.$$

Usando o método de resolução empregado por Bháskara, obtém-se a seguinte solução:

$$16x^2 - 72x + 81 = 225$$
$$(4x-9)^2 = 225$$
$$4x - 9 = 15$$
$$x = 6.$$

Logo, o número de abelhas é 72.

2.2.5 Arábia

No estudo da história tradicional, a Matemática árabe, é vista pelo seu papel de tradução da Matemática grega e pela transmissão da mesma para a Europa, mas atualmente, com novos estudos, essa versão vem sendo desfeita.

Após terem se tornados conhecedores das obras gregas, os árabes ampliaram seu conhecimento, e assim, o desenvolvimento da álgebra foi algo que permitiu independência, ao romper com a hegemonia do conhecimento grego.

Segundo Roque (2012), a linguagem empregada por Al-Khwarizmi (780 - 850), que era um erudito na Casa da Sabedoria em Bagdá de, não empregava nenhum simbolismo; ao contrário de Diofanto, sua linguagem era exclusivamente retórica. Contudo, existia uma linguagem padrão para indicar os objetos que apareciam nos problemas, para cada termo desconhecido havia um nome: o valor ao desconhecido ao quadrado era chamado de *Mal*e o valor desconhecido era dado o nome de *Jidhr*.

Exemplo 6. *Al-Khwarizmi considera o exemplo "um Mal e dez Jidhrigualam trinta e nove denares".* (ROQUE, 2012, p. 250).

Resolução. Em nossa notação algébrica está representada como $x^2 + 10x = 39$. O algoritmo de resolução era descrito do seguinte modo:

- Tome a metade da quantidade de *Jidhr* (que neste exemplo é 5).
- Multiplique esta quantidade por si mesma (obtendo 25).
- Chamando este valor de *Adad*.
- Some no resultado os *Adad* (faz-se 39 + 25 = 64).
- Extraia a raiz quadrada do resultado (que dá 8).
- Subtraia deste resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução (esta solução é 8 – 5 = 3).

2.2.6 A Arte Analítica de Viète

François Viète (1540 - 1603), era advogado e matemático, nasceu na França e era apaixonado por Álgebra. Esse matemático foi responsável pela introdução da primeira notação algébrica sistematizada, sendo depois completada por René Descartes. Por essas contribuições ficou conhecido como o Pai da Álgebra.

Segundo Roque (2012, p. 269), foi Viète o primeiro a tomar as vogais para ocupar o lugar dos valores desconhecidos. Foi ele quem também simplificou as relações trigonométricas, podendo ser ainda considerado uns dos precursores da Geometria Analítica.

Ele queria expor a Álgebra de forma útil aos problemas de construção, da mesma forma que faziam os gregos, querendo assim, com o mesmo prestígio da Geometria, fundar uma nova Álgebra.

O método de Viète: Considere a equação $ax^2+bx+c=0$. Com parâmetros *a*, *b*, *c* $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e *x* é uma variável real.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}$ tal que $x = u + v$. Então:

$$a\ (u+v)^2 + b.(u+v) + c = 0$$

$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0$$

$$au^2 + u.(2av+b) + (av^2 + bv + c) = 0. \qquad (2)$$

Quer-se anular o termo $u.(2av+b)$, fazendo $2av+b=0$. Assim, há a transformação da equação do 2º grau completa em uma equação do 2º grau incompleta para determinar o valor de *v* em função de *a* e *b.* Então

$$2av + b = 0$$

$$v = \frac{-b}{2a}. \qquad (3)$$

Fazendo-se a substituição da fórmula (3) na fórmula (2), obtém-se:

$$au^2 + \left(a.\left(\frac{-b}{2a} \right)^2 + b.\left(\frac{-b}{2a} \right) + c \right) = 0$$

$$au^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$u = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (4)$$

Como $x = u + v$, tomando a fórmula (3) e a fórmula (4), tem-se:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Exemplo 7. *Obtenha as raízes da equação $6x^2 - 5x + 1 = 0$.*

Resolução. Considerando $x = u + v$, tem-se:

$$6\,(u + v)^2 - 5.(u + v) + 1 = 0$$

$$6u^2 + 12uv + 6v^2 - 5u - 5v + 1 = 0$$

$$6u^2 + u.(12v - 5) + (6v^2 - 5v + 1) = 0.$$

Desejando-se anular o termo $u.(12v - 5)$, tem-se:

$$12v - 5 = 0$$

$$v = \frac{5}{12}.$$

Substituindo $v = \frac{5}{12}$ na equação anterior, obtemos:

$$6u^2 + u.(12v - 5) + (6v^2 - 5v + 1) = 0$$

$$6u^2 + \left(6.\left(\frac{5}{12} \right)^2 - 5.\left(\frac{5}{12} \right) + 1 \right) = 0$$

$$6u^2 + \frac{25}{24} - \frac{25}{12} + c = 0$$

$$u = \pm \frac{\sqrt{25 - 4.6.1}}{12}$$

$$u = \pm \frac{1}{12}.$$

Como $x = u + v$, então

$$x = \pm \frac{1}{12} + \frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Para algumas equações do segundo grau, como $x^2 + 1 = 0$, não havia solução até o século XVI. Os matemáticos da época não conheciam a raiz quadrada de números negativos.

2.3 Equações de Terceiro e Quarto Grau

Segundo Boyer (2002, p.18), o conhecimento de equações cúbicas existe desde a Mesopotâmia antiga. O registro deixado pelos babilônicos mostra que além da equação quadrática da forma $ax^2 + bx = c$ eles também dominavam as cúbicas mistas $x^3 + x^2 = c$.

> Não há registro no Egito de resolução de uma equação cúbica, mas entre os babilônicos há muitos exemplos. Cúbicas puras como $x^3 = 0; 7, 30$ eram resolvidas por referências diretas às tabelas de cubos e raízes cúbicas, onde a solução de x = 0; 30 era encontrada. [...] As cúbicas mistas na forma padrão $x^3 + x^2 = a$ eram resolvidas de modo semelhante, por referências às tabelas disponíveis, que davam valores para a combinação $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n entre 1 e 30. Com ajuda dessas tabelas viam facilmente que a solução de, por exemplo, $x^3 + x^2 = 4{,}12$ é igual a 6.[...] A solução de equações quadráticas e cúbicas na Mesopotâmia é um fato notável, admirável não tanto pelo alto nível de habilidade técnica quanto pela maturidade e flexibilidade dos conceitos algébricos envolvidos. (BOYER, 2002, p. 24).

Outro a resolver a equação cúbica foi Leonardo de Pisa (1170 – 1250), conhecido como Fibonacci, em seu livro *Liberabaci* (1228). Fibonacci teve grande influência da Matemática dos árabes, enquanto viveu com o seu pai no Norte de África. Fibonacci tentou provar que nenhuma raiz da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ pode ser expressa irracionalmente na forma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, ou seja, nenhuma raiz pode ser construída com régua e compasso. Esta prova está no tratado intitulado *Flos* (*Floração* ou *Flor*). (BOYER, 2002).

A solução da equação cúbica veio por Cardano (1501 - 1576), Em 1545 a forma de resolução das equações cúbicas torna-se conhecida com a publicação de *Ars Magna*. A publicação dessa obra causou tal impacto que o ano de 1545 foi tomado como marco inicial do período moderno da Matemática. Deve-se frisar que Cardano não foi quem descobriu originalmente as soluções das equações cúbicas. Ele próprio admitiu isso em seu livro. A sugestão para resolver as cúbicas, ele afirma, lhe havia sido dada por Niccolo Tartaglia (1499 - 1557). O que Cardano deixou de mencionar foi o solene juramento que havia feito a Tartaglia de não revelar o seu segredo. Este pretendia firmar sua reputação publicando a solução das cúbicas, até então desconhecida, em um tratado sobre Álgebra. Sobre a regra para resolver equações quárticas, o aluno de Cardano, Luigi Ferrari (1522 - 1560), nascido em Bologna, foi quem encontrou a fórmula para resolvê-las por meio de radicais em 1540.

2.4 Equações de Quinto ou maior Grau

Depois da descoberta de Ferrari, o método de resolução das equações quárticas, em 1540, passaram-se dois séculos e meio até alguém demonstrar que a equação geral de grau superior a quatro não pode ser resolvida por meio de radicais.

Havia um matemático, Lagrange (1736 - 1813), que chegou perto do resultado de Abel e Ruffini, contudo usando outro método. Ele usou o método de resolver a equação criando outras de grau menor. Ele achou funções com as simetrias necessárias para 3 e 4 raízes, embora não para 5 raízes. Quando tinha 5 parâmetros, as funções não reduziam, e sim passavam para 6 resultados diferentes. Sendo assim, Lagrange pode ter pensado, mesmo não tendo provado isso, que a equação de quinto grau não teria solução.

Em 1799, Paolo Ruffini (1765 - 1822) publicou em Bolonha um livro. Neste, demonstrou que a equação geral de grau superior ao quarto não poderia ser resolvida por meios de radicais. Em 1821, Niels Henrik Abel (1802 - 1829) achava ter descoberto a fórmula que expressava as raízes da equação de quinto grau. Percebendo que havia um erro em sua demonstração, voltou ao problema, em 1824, provando que as equações de grau superior ao quarto grau não possuem fórmula geral de resolução por radicais. A demonstração de Abel é considerada satisfatória enquanto a de Ruffini nem tanto.

O problema geral de determinar quais equações de grau n tem suas raízes expressas sob forma de radicais teve uma solução definitiva em 1829. Evariste Galois (1811 - 1832) demonstrou que a impossibilidade descoberta por Abel se estendia a todas as equações polinomiais de grau maior que 4. Existem, no entanto, critérios que determinam quais equações são solúveis por operações algébricas analisando-se casos específicos.

A fórmula de Tartaglia-Cardano teve sua importância lógica, mas os métodos de aproximações sucessivas são muito mais úteis para as aplicações do que sua fórmula. A consequência mais importante das descobertas publicadas na *Ars magna* foi o grande impulso dado à pesquisa em Álgebra em várias direções. (FANTIN, 2009).

Os métodos numéricos para resolução de equações polinomiais começaram a ser desenvolvidos no século XVII. Para obter as raízes de uma equação, os métodos numéricos procuram determinar uma sequência de valores aproximados que possibilita obter as raízes com qualquer grau de aproximação desejada. Newton (1642-1727) foi um dos que utilizou esse tipo de método com sucesso. Tal método não se aplica apenas a equações algébricas, mas também a equações transcendentais. (CARNEIRO, 1998 apud GOLDSTEIN, 1994).

3 POLINÔMIOS

O estudo, a seguir, é baseado nas seguintes referências: Iezziet et al (2011); Elon et al (2006); Dante (2008) e Shine (2009).

3.1 Algumas Conceitos e Resultados Iniciais.

Definição 1. Todo polinômio na variável x, $x \in \mathbb{C}$, é uma expressão do tipo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

Em relação a p, tem-se que:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números complexos chamados coeficientes do polinômio;
- O grau do polinômio é o número natural correspondente ao maior expoente de x, com coeficiente a_n não nulo, ou seja, o valor de n.
- a_n, é chamado de coeficiente dominante;

Com isso,

1º) $f(x) = 2x - 3$ é um polinômio de grau 1.

2º) $g(x) = x^2 - 3x + 4$ é um polinômio de grau 2.

3º) $h(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ é um polinômio de grau 3.

Então, todo polinômio definido por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com $a_n \neq 0$ é definido de grau n.

É importante lembrar também que os polinômios recebem nomes particulares em alguns casos:

- Binômio: quando possuem dois termos. Exemplo: $p(x) = 2x - 5$.
- Trinômio: quando possuem três termos. Exemplo: $h(x) = x^2 + 4x - 15$.
- A partir de quatro termos, usam-se a designação geral, polinômios.

Definição 2. Seja a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

A função f é chamada de **função polinomial**.

Sendo assim,

1º) $f(x) = 3x - 1$ é uma função polinomial de grau 1.

2º) $g(x) = 2x^2 - x + 1$ é uma função polinomial de grau 2.

3º) $h(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ é uma função polinomial de grau 3.

Então, toda função definida por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com $a_n \neq 0$ é definida uma função polinomial de grau n.

Como a cada polinômio está associada uma única função e vice- versa, pode-se usar sem distinção, os termos polinômio ou função polinomial.

Definição 3. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e o polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

Chama-se de **valor numérico de *p*** para $x = \alpha$ o número

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 .$$

Se $p(\alpha) = 0$, diz-se que α é a raiz do polinômio.

Se $\alpha = 1$, tem-se que $p(\alpha)$ é igual a soma dos coeficientes de *p*.

Se $\alpha = 0$, tem-se que $p(\alpha) = a_0$.

Exemplo 8. *Seja o polinômio* $p(x) = 5x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 7x - 3$. *Determine os valores numéricos de p para x = 3 e para x = i.*

Resolução. Substituindo *x = 3* em *p*, tem-se que:

$$\begin{aligned} p(3) &= 5.3^4 - 2.3^3 + 9.3^2 - 7.3 - 3 \\ &= 5.81 - 2.27 + 9.9 - 7.3 - 3 \\ &= 405 - 54 + 81 - 21 - 3 \\ &= 408. \end{aligned}$$

Substituindo *x = i* tem-se que:

$$\begin{aligned} p(i) &= 5i^4 - 2i^3 + 9i^2 - 7i - 3 \\ &= 5 + 2i - 9 - 7i - 3 = -7 - 5i. \end{aligned}$$

Teorema 1. *Se existem* $n+1$ *números complexos distintos que anulam a expressão*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

então $a_i = 0, \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ os $n+1$ números complexos distintos que anulam a expressão $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, ou seja:

$$a_n(x_1)^n + a_{n-1}(x_1)^{n-1} + ... + a_2(x_1)^2 + a_1(x_1) + a_0 = 0,$$

$$a_n(x_2)^n + a_{n-1}(x_2)^{n-1} + ... + a_2(x_2)^2 + a_1(x_2) + a_0 = 0,$$

$$\vdots$$

$$a_n(x_n)^n + a_{n-1}(x_n)^{n-1} + ... + a_2(x_n)^2 + a_1(x_n) + a_0 = 0,$$

$$a_n(x_{n+1})^n + a_{n-1}(x_{n+1})^{n-1} + ... + a_2(x_{n+1})^2 + a_1(x_{n+1}) + a_0 = 0.$$

Este é um sistema linear homogêneo, que apresenta $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas $(a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0)$. Os coeficientes para a resolução do sistema formam um determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & ... & {x_1}^{n-1} & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & ... & {x_2}^{n-1} & {x_2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & ... & {x_n}^{n-1} & {x_n}^n \\ 1 & x_{n+1} & {x_{n+1}}^2 & ... & {x_{n+1}}^{n-1} & {x_{n+1}}^n \end{vmatrix}$$

Como, por hipótese, $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ são valores distintos, o determinante é diferente de zero. Com isso, o sistema linear homogêneo possui solução única, ou seja, a solução trivial

$$a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1 = a_0 = 0.$$

Corolário 1. *Um polinômio de grau n possui, no máximo, n raízes complexas.*

Demonstração. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau *n*. Suponha que esse polinômio possua *n+1* raízes complexas. Pelo Teorema 1, $a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Isso é um absurdo, pois como o polinômio é de grau *n*, $a_n x^n \neq 0$. Logo, o polinômio possui, no máximo, *n* raízes complexas.

Definição 4. Um polinômio *p* é dito ser **identicamente nulo** quando tem-se que $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$. Escreve-se:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \equiv 0.$$

Verifica-se que *p* possui infinitas raízes, pois todo número complexo é raiz de *p(x)*, e, portanto, $n \in \mathbb{N}$, tal que *n* é grau de *p.* Com isso, afirma-se que

$$a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1 = a_0 = 0.$$

De fato, se houvesse algum $a_n \neq 0$, poderia definir-se o grau do polinômio e ele possuiria um número finito de raízes, o que seria um absurdo. Desta forma, também se pode escrever o polinômio identicamente nulo como:

$$p(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x^2 + 0x + 0 \equiv 0.$$

Exemplo 9. *Determine os valores de a, b, c e d sabendo que é identicamente nulo o polinômio*

$$p(x) = ax^4 + (a+b+3)x^3 + (a-b+3c)x^2 + (d-c+a)x + (a+b+c+d+e).$$

Resolução. Sabendo que $p(x)$ é identicamente nulo, pode-se observar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a+b+3 = 0 \\ a-b+3c = 0 \\ d-c+a = 0 \\ a+b+c+d+e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0+b+3 = 0 \Rightarrow b = -3 \\ 0-(-3)+3c = 0 \Rightarrow c = -1 \\ d-(-1)+0 = 0 \Rightarrow d = -1 \\ 0-3-1-1+e = 0 \Rightarrow e = 5 \end{cases}$$

Dessa forma, tem-se que $a = 0,\ b = -3,\ c = -1,\ d = -1\ e\ e = 5$.

Definição 5. Dois polinômios *p* e *q* são **iguais (idênticos)** quando $p(x) = q(x), \forall x \in \mathbb{C}$. Neste caso, diz-se que $p(x) \equiv q(x)$.

Teorema 2. *Dados dois polinômios p e q,* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *e* $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$. *Eles são iguais se todos os seus coeficientes são idênticos, ou seja,* $a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Demonstração. Como p e q são idênticos, $p(x) = q(x), \forall x \in \mathbb{C}$, assim sendo:

$$p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow p(x) - q(x) \equiv 0.$$

Seja $d(x) = p(x) - q(x)$, que será identicamente nulo. Como já visto, todos os seus coeficientes devem ser iguais a zero.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \equiv 0$$

$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) \equiv 0.$$

De onde se pode concluir que

$$a_i - b_i = 0, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

ou seja,

$$a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Exemplo 10. *Determine os valores de a, b, c e d para que f(x) seja igual a g(x), sendo* $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ *e* $g(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + (a - b + 3c)x + (a + b - c + d)$.

Resolução. Para que $f(x) = g(x)$,deve-se resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a = 4 \\ a + b = -3 \\ a - b + 3c = 2 \\ a + b - c + d = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ 4 + b = -3 \Rightarrow b = -7 \\ 4 - (-7) + 3c = 2 \Rightarrow c = -3 \\ 4 - 7 + 3 + d = -3 \Rightarrow d = -3 \end{cases}$$

Dessa forma, tem-se $a = 4$, $b = -7$, $c = -3$, $d = -3$.

3.2 Operações com Polinômios

3.2.1 Adição e Subtração

Dados dois polinômios $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, define-se a soma entre p e q através de:

$$p(x)+q(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i \ ,$$

onde,

$$p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+(a_n+b_n)x^n=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i \ .$$

E define-se a diferença entre p e q através de:

$$p(x)-q(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i-b_i)x^i \ ,$$

onde,

$$p(x)-q(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+...+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+(a_n-b_n)x^n=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i \ .$$

Exemplo 11. *Sendo os polinômios* $p(x)=4x^3-3x^2+2x-3$ e $q(x)=-x^2-9x+12$, *efetue* $p(x)+q(x)$ *e* $p(x)-q(x)$.

Resolução.

$$\begin{aligned}
p(x)+q(x) &= 4x^3-3x^2+2x-3 \ + \ (-x^2-9x+12) \\
&= 4x^3-3x^2+2x-3-x^2-9x+12 \\
&= 4x^3-3x^2-x^2+2x-9x-3+12 \\
&= 4x^3-4x^2-7x+9. \\
p(x) \ - \ q(x) &= 4x^3-3x^2+2x-3 \ \text{-}(-x^2-9x+12) \\
&= 4x^3-3x^2+2x-3+x^2+9x-12 \\
&= 4x^3-3x^2+x^2+2x+9x-3-12 \\
&= 4x^3-2x^2+11x-15.
\end{aligned}$$

3.2.2 Multiplicação

Dados dois polinômios $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ e $q(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$, define-se o produto de p por q através de:

$$p(x).q(x)=\sum_{i=0}^{m+n}c_ix^i \ ,$$

onde:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0, \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\
&\vdots \\
c_i &= a_0 b_i + a_1 b_i + \ldots + a_i b_0, \\
&\vdots \\
c_{n+n} &= a_n b_m.
\end{aligned}
$$

Exemplo 12. *Determine o produto dos polinômios* $p(x) = x^2 + 4x - 5$ e $q(x) = -x - 2$.

Resolução.

$$
\begin{aligned}
p(x)\ .\, q(x) &= (x^2 + 4x - 5)\,.\,(-x - 2) \\
&= x^2.(-x) + x^2.(-2) + 4x.(-x) + 4x.(-2) - 5.(-x) - 5.(-2) \\
&= -x^3 - 2x^2 - 4x^2 - 8x + 5x + 10 \\
&= -x^3 - 6x^2 - 3x + 10.
\end{aligned}
$$

Logo, tem-se que $p(x).q(x) = -x^3 - 6x^2 - 3x + 10.$

Teorema 3. *Sejam*

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, *dois polinômios de graus n e m, respectivamente. Afirma-se que:*

$$grau(p.q) = grau(p) + grau(q).$$

Demonstração. Como *p* tem grau *n* e *q* tem grau *m*, tem que $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.

Efetuando o produto *p.q*, o termo de variável com maior expoente será $a_n b_m x^{n+m}$. Como $a_n b_m \neq 0$, $gr(p.q) = n + m = gr(p) + gr(q)$.

Observação. Após a verificação dos exemplos de adição e multiplicação de polinômios, têm-se válidas as seguintes propriedades:

- Comutatividade: $p + q = q + p$ e $p \cdot q = q \cdot p$.
- Associatividade: $(p + q) + h = p + (q + h)$ e $(p \cdot q) \cdot h = p \cdot (q \cdot h)$.
- Distributividade: $(p + q) \cdot h = p.h + q.h\ \forall q, p, h \in \mathbb{N}$.

3.2.3 Divisão de Polinômios

Dividir o polinômio *p(x)* por *h(x),* não identicamente nulo, é obter dois novos polinômios *q(x)* e *r(x),* de modo que satisfaçam as seguintes condições $\forall x \in \mathbb{C}$:

- $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x),$
- $gr(p.q) = n + m = gr(p) + gr(q),$

onde *p(x)* será o dividendo, *h(x)* o divisor, *q(x)* o quociente enquanto *r(x)* é o resto.

Observações.

1) Se $p(x) \equiv h(x) \cdot q(x)$, ou seja, $r(x) \equiv 0$, diz-se que $p(x)$ é divisível por *h(x)* e por *q(x).*

2) Se $gr(h(x)) > gr(p(x))$, o resultado é imediato, com $q(x) \equiv 0$ e $r(x) \equiv p(x)$.

Lema 1. *Seja* $p(x) = x^n - a^n$, *com* $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{C}$, *tem-se que p(x) é divisível por x – a.*

Demonstração. Basta verificar que

$$x^n - a^n = (x-a).(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

Aplicando a propriedade distributiva e simplificando os termos semelhantes obtém-se:

$$x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x - ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - ... - a^{n-1}x - a^n = x^n - a^n.$$

Como $x - a$ é um fator de *p(x),* o resultado é concluído.

Teorema 4. *Se um número complexo k é raiz de um polinômio*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

então p(x) é divisível por (x – k).

Demonstração. Como *p(k) = 0*, tem que:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(k) \\ &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 - (a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + ... + a_2k^2 + a_1k + a_0) \\ &= a_n(x^n - k^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - k^{n-1}) + ... + a_2(x^2 - k^2) + a_1(x - k). \end{aligned}$$

Pelo lema anterior, cada uma das parcelas da expressão acima é divisível por *(x - k)*, ou seja, *p(x)* é divisível por *(x - k)* e pode ser expresso por:

$$p(x) = (x-k).q(x).$$

Generalizando este resultado, diz que se $k_1, k_2, ..., k_m$ são raízes distintas de um polinômio *p* de grau *n,* então existe um polinômio *q,* de grau *n – m,* tal que:

$$p(x) = (x - k_1).(x - k_2)...(x - k_m)q(x).$$

Método de Descartes

Este também é conhecido como *Método dos coeficientes a determinar*. Ele se baseia na existência e unicidade da divisão de polinômios, além de trabalhar com as propriedades de polinômios idênticos. Será ilustrado no exemplo abaixo.

Exemplo 13. *Verificar se o polinômio* $f(x) = x^3 - x^2 + x$ *é divisível por* $g(x) = x^2 - x$.

Resolução. Como o $gr(f(x)) = 3$ e o $gr(g(x)) = 2$, logo o q(x) terá grau 1, ou seja $q(x) = ax + b$, e o r(x) = 0 , tal que:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot q(x) \\ x^3 - 2x^2 + x &= (x^2 - x).(ax + b) \\ &= ax^3 - ax^2 + bx^2 - bx \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 - bx. \end{aligned}$$

Como os coeficientes devem ser iguais, tem-se que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ -b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Logo, existem *a* e *b* que satisfazem a relação estabelecida, tem que $f(x) = x^3 - x^2 + x$ é divisível por $g(x) = x^2 - x$, tal que:

$$x^3 - 2x^2 + x = (x^2 - x).(x - 1), \forall x \in \mathbb{C}.$$

Método da Chave

O método segue o mesmo algoritmo da divisão proposta por Euclides entre números inteiros, no qual dado um inteiro, dividendo *p*, e um inteiro, divisor $h \neq 0$, dividir *p* por *h* consiste em encontrar inteiros *q* e *r, tais* que (onde $0 \leq r \leq |h| - 1$), chamando respectivamente de quociente e resto da divisão, que cumpram $p = h \cdot q + r$.

Devido à semelhança existente entre a divisão com inteiros e entre polinômios, pode-se utilizar um algoritmo semelhante. Sendo $gr(p(x)) \geq gr(h(x))$, utiliza-se o seguinte procedimento:

1. Divide-se o termo de maior grau de *p(x)* pelo termo de maior grau de *h(x),* obtendo o quociente parcial $q_1(x)$;

2. Subtraindo o produto de $q_1(x)$ por *h(x)* de *p(x),* obtém resto parcial $r_1(x)$;
3. Se $gr(r_1(x)) < gr(h(x))$, tem que $r_1(x) = r(x)$ e $q_1(x) = q(x)$;
4. Se $gr(r_1(x)) \geq gr(h(x))$, divide-se o termo de maior grau de $r_1(x)$; pelo termo de maior grau de *h(x),* obtendo o quociente parcial $q_2(x)$;
5. Repetindo os passos 2, 3 e 4, aumentando uma unidade nos índices dos quocientes e restos parciais.

Seguindo esse processo, até que $gr(r_k(x)) < gr(h(x))$, situação na qual se tem que $r_k(x) = r(x)$ e $q_k(x) = q(x)$.

Exemplo 14. *Determine a divisão dos polinômios* $p(x) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$ *por* $h(x) = 2x^2 + 4x - 3$*, usando o método da chave e faça a verificação:*

Resolução. Seguindo o passo a passo anterior, tem-se que:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 & 2x^2 + 4x - 3 \\
\underline{-2x^4 - 4x^3 + 3x^2 \qquad\qquad\quad} & \overline{x^2 - 3x + 1} \\
-6x^3 - 10x^2 + 10x - 1 & \\
\underline{+6x^3 + 12x^2 - 9x \qquad\;} & \\
+2x^2 + x - 1 & \\
\underline{-2x^2 - 4x + 3} & \\
-3x + 2 &
\end{array}
$$

Fazendo a verificação, tem-se:

$$
\begin{aligned}
h(x) \cdot q(x) + r(x) &= p(x) \\
(2x^2 + 4x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 1) + (-3x + 2) &= p(x) \\
(2x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 3x^2 + 9x - 3) + (-3x + 2) &= p(x) \\
2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 &= p(x).
\end{aligned}
$$

3.3 A Divisão de um polinômio por um binômio do tipo (x - a)

A divisão de um polinômio por um binômio do tipo *(x - a)* terá grande importância na teoria de equações algébricas. Como visto anteriormente, se a for raiz de um polinômio, logo, este polinômio será divisível por *(x - a)*.

Ao dividir-se um polinômio de grau n por *(x - a)*, seu quociente terá grau $n - 1$ e seu resto será da forma $r(x) = r_0 \in \mathbb{C}$ ou $r(x) = 0$. Nesse caso, além do Método de Descartes e do Método da Chave, haverá outro método para obtenção do quociente e do resto.

Considere um polinômio p, de grau n, tal que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

que será dividido por $h(x) = x - a$. Seja $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ o quociente de grau $n - 1$ e $r(x) = r_0$, o resto da divisão. Se $r_0 = 0$, o resto será o polinômio identicamente nulo.

Pela definição da divisão, tem-se $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x).$$

Ou seja,

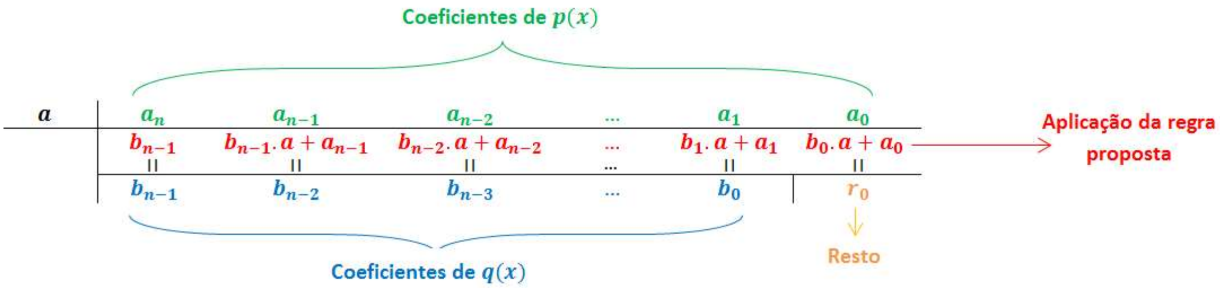
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$
$$b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2}).x^{n-2} + ... + (b_0 - ab_1)x + (r_0 - ab_0)$$

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 = b_0 - ab_1 \\ a_0 = r_0 - ab_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1} \\ b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 = a_1 + ab_1 \\ r_0 = a_0 + ab_0. \end{cases}$$

Nota-se que o primeiro coeficiente (em ordem decrescente dos expoentes) de *q(x)* é igual ao primeiro coeficiente de *p(x)*. A partir do segundo coeficiente de *q(x)* até o resto da divisão, multiplica-se o coeficiente anterior de *q (x)* por a e soma-se ao coeficiente de *p(x)*.

Pode-se resumir essa regra num dispositivo para cálculo desse tipo de divisão que ficou conhecido como Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, conforme ilustrado na figura 01.

Figura 01 - Dispositivo Prático de Briot-Ruffini



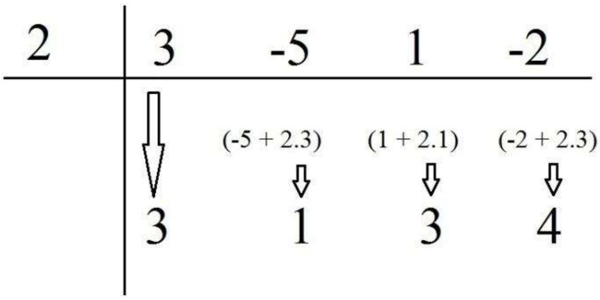
Fonte: O Autor, 2018.

Observe a aplicação do dispositivo no exemplo a seguir.

Exemplo 15. *Efetue a divisão de* $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ *por* $h(x) = x - 2$.

Resolução. Aplicando o algoritmo proposto:

Figura 02 - Representação de $(3x^3 - 5x^2 + x - 2) \div (x - 2)$



Fonte: O Autor, 2018.

Sendo assim, a divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $h(x) = x - 2$, tem como quociente $q(x) = 3x^2 + x + 3$ de grau *n - 1* e resto $r(x) = 4$.

3.4 Teorema do Resto

Teorema 5. *O resto da divisão de um polinômio p(x) por x – a é igual a p(a).*

Demonstração. Dividindo o polinômio *p(x)* por *x – a*, tem-se $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r.$$

Calculando o valor de *p(x)* para $x = a$, tem-se:

$$p(x) = q(x).(x-a)+r$$
$$p(a) = q(a).(a-a)+r$$
$$p(a) = q(a).0+r$$
$$p(a) = r.$$

Obtendo-se assim o resultado desejado.

Corolário 2. *O número complexo k é raiz de um polinômio p(x) se, somente se, p(x) é divisível por (x - k).*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Como *k* é raiz de *p(x)*, tem-se que *p(k) = 0*. Efetuando a divisão de *p(x)* por *(x – k)*, tem-se que $p(x) = (x-k)\cdot q(x)+r$. Pelo teorema anterior, $p(k) = 0 \Rightarrow r = 0$, ou seja, $p(x) = (x-k)\cdot q(x)$. Assim, nota-se que *p(x)* é divisível por $(x-k)$.

$(\Leftarrow)$Suponha que *p(x)* é divisível por $(x-k)$, ou seja, pode-se escrever $p(x) = (x-k)\cdot q(x)$. Calculando *p(k),* tem-se $p(k) = (k-k)\cdot q(x) = 0$, concluindo assim que *k* é a raiz do polinômio *p(x)*.

Exemplo 16. *Sabendo que o resto da divisão do polinômio* $p(x) = x^a - 5x - 2$ *por x – 2 é 4, determine o grau do polinômio p(x).*

Resolução. Usando o teorema do resto tem-se que $p(x) \div (x-a) \Rightarrow p(a) = r$, sendo assim, na divisão do polinômio $p(x) = x^a - 5x - 2$ por x – 2, tem-se:

$$p(2) = 4$$
$$p(2) = 2^a - 5.2 - 2 = 4$$
$$= 2^a = 4 + 12$$
$$= 2^a = 2^4.$$

Logo a = 4 e $p(x) = x^4 - 5x - 2$, então *p(x)* é um polinômio de quarto grau.

4 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

4.1 Algumas Definições Básicas

Definição 6. Uma equação algébrica ou equação polinomial é toda sentença aberta que pode ser escrita da forma $p(x) = 0$, onde *p(x)* é um polinômio com coeficientes complexos.

Exemplo 17. $x^4 - x^2 = 2x^3 - x - 1$ *é uma equação algébrica, pois pode ser escrita na forma* $x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$.

Definição 7. O número $r \in \mathbb{C}$ é chamado de raiz da equação algébrica $p(x) = 0$ se, e somente se, $p(r) = 0$.

Exemplo 18. *Observa–se que 1 é raiz da equação algébrica* $x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$, *pois* $1^4 - 2.1^3 - 1^2 + 1 + 1 = 0$.

Definição 8. O conjunto solução ou conjunto verdade de uma equação algébrica $p(x) = 0$ é o conjunto de todas as raízes da equação, representado por *S* ou *V*, respectivamente. Simbolicamente, tem-se $S = \{r \in \mathbb{C} / p(r) = 0\}$ ou $V = \{r \in \mathbb{C} / p(r) = 0\}$. Quando se resolve uma equação, na verdade se está à procura do seu conjunto solução.

4.2 Resoluções de equações algébricas

Nessa seção, irão ser explorados os métodos de resoluções de equações polinomiais do tipo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, para $n \leq 4$. Para $n \geq 4$, pelo Teorema de Abel-Ruffini, não é possível resolver uma equação através de transformações algébricas dos radicais. Existem, no entanto, critérios que determinam quais equações são solúveis por operações algébricas analisando-se casos específicos.

4.2.1 Equação polinomial do 1° grau

Sendo $p(x) = ax + b$ um polinômio do primeiro grau, a resolução da equação *p(x) = 0* é a seguinte, sendo $a \neq 0$:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}.$$

Assim, tem-se que $S = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$.

Exemplo 19. *Obtenha o conjunto solução da equação 4x – 10 = 2x +18.*

Resolução. Para resolver esse problema realiza-se uma sequência de operações nos dois lados da equação. Primeiro subtrai-se 2x e soma-se 10 nos dois lados.

$$4x - 2x - 10 + 10 = 2x - 2x + 18 + 10$$
$$2x = 28.$$

Agora divide-se os dois lados por 2.

$$\frac{2x}{2} = \frac{28}{2} = 14.$$

Assim tem-se $S = \{14\}$.

4.2.2 Equação polinomial do 2° grau

Para uma equação do segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$,tem-se:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Com isso, tem-se que:

$$S = \left\{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}.$$

Observação. *Chama-se* $b^2 - 4ac$ *de discriminante da equação do 2° grau e denota-se por* Δ. *Note que:*

- *Se* $\Delta > 0$, *a equação possui duas raízes reais distintas;*
- *Se* $\Delta = 0$, *a equação possui apenas um valor de x que satisfaz a equação, sendo igual a* $-\frac{b}{2a}$. *Consideram-se duas raízes reais iguais;*
- *Se* $\Delta < 0$, *a equação possui duas raízes complexas conjugadas e não reais.*

4.2.3 Equação polinomial do 3° grau

Seja a equação geral do terceiro grau dada por $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (caso o coeficiente a_3 de x^3 seja diferente de 1, dividi-se a equação por a_3 para chegar na equação anterior).

Por meio de uma mudança de variável, coloca-se o polinômio em uma forma onde não tenha o termo do segundo grau.

Substituindo $x = y + d$ na Equação $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ tem-se:

$$(y+d)^3 + a_2(y+d)^2 + a_1(y+d) + a_0 = 0$$
$$y^3 + (3d + a_2)y^2 + (3d^2 + 2da_2 + a_1)y + (d^3 + d^2 + a_2 + da_1 + a_0) = 0.$$

Como o objetivo é anular o valor do coeficiente de y^2, tem-se:

$$(3d + a_2) = 0$$
$$3d = -a_2$$
$$d = -\frac{a_2}{3}.$$

Sendo assim, usando $d = -\frac{a_2}{3}$, na expressão anterior, tem-se que:

$$y^3 + \left[3.\left(-\frac{a_2}{3}\right) + a_2\right]y^2 + \left[3\left(-\frac{a_2}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{a_2}{3}\right)a_2 + a_1\right]y + \left[\left(-\frac{a_2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{a_2}{3}\right)^2 + a_2 + \left(-\frac{a_2}{3}\right)a_1 + a_0\right] = 0$$

$$y^3 + (-a_2 + a_2)y^2 + \left(\frac{a_2{}^2}{3} - \frac{2a_2{}^2}{3} + a_1\right)y + \left(-\frac{a_2{}^3}{27} + \frac{a_2{}^2}{9} + a_2 - \frac{a_2a_1}{3} + a_0\right) = 0$$

$$\left(y^3 - y^2a_2 + \frac{ya_2{}^2}{3} - \frac{a_2{}^3}{9}\right) + \left(y^2 - \frac{2a_2}{3} + \frac{a_2{}^2}{3}\right)a_2 + \left(y - \frac{a_2}{3}\right)a_1 + a_0 = 0$$

$$\left(y-\frac{a_2}{3}\right)^3+\left(y-\frac{a_2}{3}\right)^2\cdot a_2+\left(y-\frac{a_2}{3}\right)a_1+a_0=0.$$

fazendo-se $x=y-\frac{a_2}{3}$,logo tem-se:

$$x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=y^3+py+q\ ,$$

O que implica em:

$$p=a_3-\frac{a_2{}^2}{3}\qquad \text{e}\qquad q=\frac{2a_2{}^3}{27}-\frac{a_3a_2}{3}+a_0.$$

Portanto, para achar as raízes da Equação $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, basta resolver $y^3+py+q=0$.

Sejam u e v duas novas indeterminadas. Fazendo $y = u + v$. Obtém-se então:

$$0=(u+v)^3+p(u+v)+q \Leftrightarrow u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+pu+pv+q \Leftrightarrow$$

$$(u^3+v^3+q)+3uv(u+v)+p(u+v) \Leftrightarrow (u^3+v^3+q)+(u+v)(p+3uv)=0.$$

Segue se daí a solução *(u, v)* do sistema

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u\cdot v \quad =-\dfrac{p}{3}. \end{cases}$$

Elevando ao cubo a segunda equação do sistema acima, têm-se então u^3 e v^3 suas soluções na seguinte equação do segundo grau:

$$u^3+\left(-\frac{p}{3u}\right)^3=-q \quad \Rightarrow u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}.$$

Tomando $u^3 = z$ tem-se:

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0.$$

Fixando uma das raízes quadradas de $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ e assim demonstrado por $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, tem-se que as raízes são:

$$z_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$$z_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\ .$$

Pela simetria do papel que desempenham *u* e *v*, pode-se supor que $u^3 = z_1$ e $v^3 = z_2$.

Escolhendo uma das raízes cúbicas de z_1 e denotando-a por $\sqrt[3]{z_1}$, segue-se que as soluções de $u^3 = z_1$ são $\sqrt[3]{z_1}$, $w\sqrt[3]{z_1}$ e $w^2\sqrt[3]{z_1}$, em que se tem $w = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, uma das raízes cúbicas da unidade.

Denotando agora por $\sqrt[3]{z_2}$ a raiz cúbica de z_2 tal que $\sqrt[3]{z_1}\sqrt[3]{z_2} = -\dfrac{p}{3}$, de modo que a segunda equação do sistema seja satisfeita, o referido sistema admite as seguintes soluções:

$$u_1 = \sqrt[3]{z_1}\,, \quad v_1 = \sqrt[3]{z_2}\,;$$

$$u_2 = w\sqrt[3]{z_1}\,, \quad v_2 = w^2\sqrt[3]{z_2}\,;$$

$$u_3 = w^2\sqrt[3]{z_1}\,, \quad v_3 = w\sqrt[3]{z_2}\,.$$

Segue-se, então, que a equação possui como soluções as chamadas ***fórmulas de Cardano***:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,,$$

$$y_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,.$$

No ensino médio, essas fórmulas não são apresentadas.

Exemplo 20. *Obtenha as raízes da equação do polinômio p(x) = x³ + 12x² +3 x – 4.*

Resolução. Primeiramente elimina-se o termo do segundo grau do polinômio *p(x) = x³ + 12x² +3 x – 4*, para encontrar uma equação da forma $y^3 + py + q = 0$.

Para isso usa-se

$$p = a_3 - \frac{{a_2}^2}{3} \quad \text{e} \quad q = \frac{2{a_2}^3}{27} - \frac{a_3 a_2}{3} + a_0,$$

logo, tem-se que

$$p = 3 - \frac{(+12)^2}{3} = -45 \quad \text{e} \quad q = \frac{2(+12)^3}{27} - \frac{3.12}{3} + (-4) = +112,$$

obtendo assim o polinômio *p(x) = y³ - 45y +112.*

Com isso tem-se que:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{-56+\sqrt{3136-3375}} + \sqrt[3]{-56-\sqrt{3136-3375}} =$$

$$= \sqrt[3]{-56+\sqrt{-239}} + \sqrt[3]{-56-\sqrt{-239}}.$$

$$y_2 = u_2 + v_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$= w\cdot\sqrt[3]{-56+\sqrt{3136-3375}} + w^2\cdot\sqrt[3]{-56-\sqrt{3136-3375}} =$$

$$= w\cdot\sqrt[3]{-56+\sqrt{-239}} + w^2\cdot\sqrt[3]{-56-\sqrt{-239}}.$$

$$y_3 = u_3 + v_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$= w^2\cdot\sqrt[3]{-56+\sqrt{3136-3375}} + w\cdot\sqrt[3]{-56-\sqrt{3136-3375}} =$$

$$= w^2\cdot\sqrt[3]{-56+\sqrt{-239}} + w\cdot\sqrt[3]{-56-\sqrt{-239}}.$$

obtendo assim esses resultados.

4.2.4 Equação polinomial do 4° grau

Considere-se a equação geral do quarto grau com coeficientes complexos, que sem perda de generalidade, pode-se supor que esteja na forma:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

podendo ser reescrita como

$$x^4 + a_3x^3 = -(a_2x^2 + a_1x + a_0).$$

Completando o quadrado no primeiro membro desta equação e ajustando o segundo membro, tem-se:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a_3{}^2 - a_2\right)x^2 - a_1x - a_0.$$

Se o segundo membro dessa equação fosse um quadrado perfeito, a resolução da equação recairia na resolução de duas equações do segundo grau. O objetivo é transformar o segundo membro em um quadrado perfeito sem destruir o quadrado perfeito do primeiro membro.

Somando a expressão $y^2 + 2y\,(x^2 + \frac{1}{2}a_3x)$ a ambos os membros, obtém-se:

$$\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right) + y\right]^2 = \left(2y + \frac{1}{4}a_3{}^2 - a_2\right)x^2 + (ya_3 - a_1)x + (y^2 - a_0)\,.$$

A partir daí determina-se os valores de y que transformaram o segundo membro em um quadrado perfeito. Para que isso ocorra, deve-se ter o discriminante do segundo membro, como trinômio do segundo grau em x, nulo. Ou seja,

$$(ya_3 - a_1)^2 - 4\cdot\left(2y + \frac{1}{4}a_3^2 - a_2\right)\cdot\left(y^2 - a_0\right) = 0.$$

Assim,

$$8y^3 - 4a_2y^2 + (2a_1a_3 - 8a_0)y + (4a_0a_2 - a_0a_3^2 - a_1^2) = 0\,.$$

Escolhendo y como sendo uma das raízes da equação, tem-se:

$$\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right) + y\right]^2 = (\alpha x + \beta)^2,$$

Com α e β conveniente, esta equação se resolve mediante a resolução das duas seguintes equações do segundo grau:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right) + y = (\alpha x + \beta) \text{ ou}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right) + y = -(\alpha x + \beta)\,.$$

Com isso, tem-se que a resolução de uma equação do quarto grau pode ser reduzida à resolução de equações de graus dois e três.

Exemplo 21. *Resolva a equação* $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$.

Resolução. Resolvendo $8y^3 - 4a_2 y^2 + (2a_1 a_3 - 8a_0)y + (4a_0 a_2 - a_0 a_3^2 - a_1^2) = 0$, tem-se como resposta $8y^3 + 4y^2 + 24y + 12 = 0$. Dividindo os dois lados por 4, obtém-se $2y^3 + y^2 + 6y + 3 = 0$. Determinando um y favorável, encontrando $y = -\frac{1}{2}$ que é solução desta equação. Com isso, substitui o valor de y tem-se:

$$\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3 x\right) + y\right]^2 = \left(2y + \frac{1}{4}a_3{}^2 - a_2\right)x^2 + (ya_3 - a_1)x + (y^2 - a_0)$$

$$\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2.$$

Obtém-se assim, as seguintes equações do segundo grau:

$$x^2 - x - \frac{1}{2} = x + \frac{3}{2},$$

$$x^2 - x - \frac{1}{2} = -\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Assim:

$$x^2 - 2x - 2 = 0,$$

$$x^2 + 1 = 0,$$

cujas raízes são as da equação proposta. Assim, a equação tem como solução:

$$S = \left\{1 + \sqrt{3},\quad 1 - \sqrt{3},\quad i \quad e \quad -i\right\}.$$

4.3 Reduzindo o grau de uma equação algébrica

Teorema 06. *Se um polinômio p pode ser escrito como o produto de* $p = p_1 p_2$ *de dois polinômios* p_1 *e* p_2, *então o complexo k é raiz de p se, somente se, k for raiz de* p_1 *ou raiz de* p_2.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que k seja raiz de p_1, assim $p_1(k) = 0$. Como $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, tem-se que $p(k) = p_1(k)p_2(k) = 0.p_2(k) = 0$, ou seja, k é raiz de *p(x).* Suponha que k seja raiz de p_2, assim $p_2(k) = 0$. Como $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, tem-se que

$p(k) = p_1(k)p_2(k) = 0.p_1(k) = 0$, ou seja, *k* é raiz de *p(x)*. Assim, se *k é* raiz de p_1 ou p_2, tem-se que *k* é raiz de *p.*

$(\Leftarrow)$ Suponha que *k* seja raiz de *p*, assim $p(k) = 0$. Como $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, tem-se que $p(k) = p_1(k)p_2(k) = 0$, ou seja, $p_1(k) = 0$ ou $p_2(k) = 0$. Assim, se *k* é raiz de *p*, tem-se que *k* é raiz de p_1 ou raiz de p_2.

Como visto no capítulo anterior, se *a* é raiz de um polinômio *p* de grau *n,* então *p* é divisível por *(x – a).* Desse modo, pode-se escrever $p(x) = (x - a).q(x)$, onde *q(x)* é um polinômio de grau *n – 1.*

Com isso, basta encontrar uma raiz *a* de *p(x)*, podendo depois efetuar a divisão deste *p(x)* por *(x – a)* e, em seguida, procurar as outras raízes no quociente *q(x).*

Exemplo 22. *Resolva a equação* $x^3 - 6x^2 + x - 6 = 0$.

Resolução. Neste caso, pode reescrever a equação da seguinte forma:

$x^2.(x - 6) + x - 6 = 0$, colocando o termo x^2 em evidência,

$(x^2 + 1).(x - 6) = 0$, colocando o termo (x – 6) em evidência.

Assim, a equação tem como solução: $S = \{6, \quad i, \quad -i\}$.

4.4 Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.) é de extrema importância para o trabalho das equações algébricas. A demonstração desse teorema necessita de conceitos de Análise, sendo que sua demonstração se baseia na continuidade das funções polinomiais complexas.

Podendo também encontrar demonstração analítica e topológica, mas todas tratam de conceitos que são trabalhados após o ensino básico. Assumindo o teorema como verdadeiro, não será feita a demonstração.

Teorema 07. *T.F.A. No universo dos números complexos, toda equação algébrica, de grau maior ou igual a1, admite pelo menos uma raiz.*

4.5 Teorema da Decomposição

Teorema 08. *Todo polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$*, com* $a_n \neq 0$*, pode ser decomposto e fatorado da seguinte forma* $p(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n)$*, onde* r_1*,* $r_2,..., r_n$*, são raízes complexas de p(x) (podendo haver raízes repetidas). Exceto pela ordem dos fatores, esta fatoração é única.*

Demonstração. (Existência)

De acordo com o T.F.A., a equação *p(x)=0* tem pelo menos uma raiz r_1, Dividindo $p(x)$ por $(x - r_1)$, tem-se $p(x) = (x - r_1).q_1(x)$, onde $q_1(x)$ é um polinômio de grau *n – 1* e coeficiente inicial a_n. Se $n - 1 \geq 1$, a equação $q_1(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz r_2 e, utilizando o mesmo procedimento que foi feito anteriormente, pode-se escrever $p(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2).q_2(x)$, onde $q_2(x)$ é um polinômio de grau *n – 2* e coeficiente a_n. Após *n* aplicações sucessivas do T.F.A., obtém-se $p(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n).q_n(x)$ onde $q_n(x)$ é um polinômio de grau *n – n = 0* com coeficiente a_n, ou seja, polinômio constante $q_n(x) = a_n$. Logo, $p(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n)$.

(Unicidade) Suponha que *p(x)* possua duas decomposições distintas $p(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n)$ e $p(x) = a'_n(x - r'_1).(x - r'_2)...(x - r'_n)$. Comparando os termos de maior grau de ambas as expressões, conclui-seque $a_n = a'_n$. Assim, $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$(x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n) = (x - r'_1).(x - r'_2)...(x - r'_n).$$

Tomando $x = r_1$, obtém-se:

$$0 = (x - r'_1).(x - r'_2)...(x - r'_n).$$

Ou seja, pelo menos um dos r'_1, $r'_2,..., r'_n$ é igual a r_1. Suponha, sem perda de generalidade, que $r_1 = r'_1$. Deste modo, na igualdade:

$$(x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n) = (x - r'_1).(x - r'_2)...(x - r'_n),$$

os fatores $(x - r_1)$ e $(x - r'_1)$ são iguais. Fazendo o cancelamento desses termos, tem-se que:

$$(x - r_2)...(x - r_n) = (x - r'_2)...(x - r'_n).$$

Repetindo esse argumento n vezes, faz-se o cancelamento de cada termo correspondente, concluindo que $r_1 = r'_1, r_2 = r'_2, ..., r_n = r'_n$, ou seja, exceto pela ordem dos fatores, esta fatoração é única.

Exemplo 23. Observe os polinômios a seguir e suas raízes:
1º) $f(x) = 2x - 4$ de raiz 2.
2º) $g(x) = x^2 - 3x + 2$ de raízes 1 e 2.
3º) $h(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ de raízes 1 , 2 e 3.

Cada um dos polinômios acima pode ser escrito na forma fatorada:
1º) $f(x) = 2x - 4 \Leftrightarrow 2.(x-2)$.
2º) $g(x) = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow (x-1).(x-2)$.
3º) $h(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \Leftrightarrow (x-1).(x-2).(x-3)$.

Definição 9. O número $r \in C$ é raiz múltipla da equação $p(x) = 0$ com multiplicidade m se, e somente se:

$$p(x) = (x-r)^m.q(x) \text{ e } q(r) \neq 0 .$$

- Se $m = 1$, r é uma raiz simples de p;
- Se $m = 2$, r é uma raiz dupla de p;
- Se $m = 3$, r é uma raiz tripla de p;

  $\vdots$
- E assim sucessivamente.

Exemplo 24. Observe o polinômio $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, tem-se que $r = -1$ é raiz múltipla de $p(x)$, com multiplicidade 3, logo $p(x) = (x + 1)^3$.

Teorema 09. Se as raízes complexas de um polinômio de grau n, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, *forem* $r_1, r_2, ..., r_p$, com $p \leq n$, distintas duas a duas, cada uma com multiplicidade $m_1, m_2, ..., m_p$, respectivamente, tem-se que $m_1 + m_2 + ... + m_p = n$.

Demonstração. Pelo Teorema da decomposição, tem que $p(x) = a_n(x-r_1).(x-r_2)...(x-r_n)$, podendo haver repetições entre as raízes. Como no enunciado, tem-se que as raízes são

$r_1, r_2, ..., r_p$, distintas duas a duas, as raízes $r_{p+1}, r_{p+2}, ..., r_n$ são repetidas. Agrupando os fatores iguais numa potência, tem que:

$$p(x) = a_n (x - r_1)^{m_1}.(x - r_2)^{m_2} ...(x - r_p)^{m_p}.$$

Onde $m_1, m_2, ..., m_p$ são as multiplicidades das raízes $r_1, r_2, ..., r_p$, respectivamente. Como o polinômio tem grau *n*, segue que $m_1 + m_2 + ... + m_p = n$.

Exemplo 25. Observe o polinômio $p(x) = 2.(x-1).(x-1).(x-2).(x-2).(x-2).(x-3)$.

Note que a raiz 1 aparece duas vezes, a raiz 2 aparece três vezes e a raiz 3 aparece uma vez. Logo, o polinômio *p(x)* tem a raiz 1 com multiplicidade 2, a raiz 2 com multiplicidade 3 e a raiz 3 com multiplicidade 1.

4.6 Relações de Girard

Albert Girard (1595 - 1632) era um Matemático que fez contribuições na Álgebra, Trigonometria e Aritmética. Em 1626, publicou um tratado sobre trigonometria, sendo o primeiro a usar as abreviaturas sen, cos e tag também famoso por ser o primeiro a formular $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, que é a definição de sucessão de Fibonacci.

Considere um polinômio de grau *n*, que pode ser escrito como $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n)$, onde $r_1, r_2, ..., r_n$ são as raízes de *p(x)* (podendo haver repetição). Observe as fórmulas de Girard a seguir, para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e depois será generalizada para um valor arbitrário de *n*.

Polinômio de grau 2: Tem-se $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} a\,x^2 + bx + c &= a.(x - r_1).(x - r_2) \\ &= a.(x^2 - r_1 x - r_2 x + r_1 r_2) \\ &= a.x^2 - a.(r_1 + r_2)x + a.r_1 r_2. \end{aligned}$$

Como os polinômios são idênticos, igualam-se os coeficientes:

$$\begin{cases} b = -a.(r_1 + r_2) \\ c = a.r_1.r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a} \\ r_1.r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Polinômio de grau 3: Tem-se $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
a\ x^3 + bx^2 + cx + d &= a.(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3) \\
&= a.[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_3r_2)x - r_1r_2r_3] \\
&= a.x^3 - a.(r_1 + r_2 + r_3)x^2 + a.(r_1r_2 + r_1r_3 + r_3r_2)x - a.r_1r_2r_3.
\end{aligned}
$$

Como os polinômios são idênticos, igualam-se os coeficientes:

$$
\begin{cases}
b = -a.(r_1 + r_2 + r_3) \\
c = +a.(r_1r_2 + r_1r_3 + r_3r_2) \\
d = -a.r_1r_2r_3.
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{-b}{a}. \\
r_1r_2 + r_1r_3 + r_3r_2 = \dfrac{c}{a}. \\
r_1r_2r_3 = \dfrac{-d}{a}.
\end{cases}
$$

Polinômio de grau 4: Tem-se $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
a\ x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= a.(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3).(x - r_4) \\
&= a.(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3).(x - r_4) \\
&= a.[x^4 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x^3 +
\end{aligned}
$$

$$
(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + +r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)x^2 - (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)x + r_1r_2r_3r_4]
$$

$$
= a.x^4 - a.(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x^3 +
$$

$$
a.(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)x^2 - a.(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)x + a.r_1r_2r_3r_4.
$$

Como os polinômios são idênticos, igualam-se os coeficientes:

$$
\begin{cases}
b = -a.(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \\
c = +a.(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + +r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) \\
d = -a.(r_1r_2r_3 + r_1r_4r_2 + r_2r_4r_3) \\
e = a.r_1r_2r_3r_4
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \dfrac{-b}{a}. \\
r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + +r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \dfrac{c}{a} \\
r_1r_2r_3 + r_1r_4r_2 + r_2r_4r_3 = \dfrac{-d}{a}. \\
r_1r_2r_3r_4 = \dfrac{e}{a}.
\end{cases}.
$$

.

Polinômio de grau n: Sejam $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, a forma desenvolvida de *p(x),* e $p(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n)$, a sua forma fatorada, com $r_1, r_2, ..., r_n$ as raízes do polinômio. Analisando os casos, percebe-se que os coeficientes de x^n será a_n, tanto na forma desenvolvida, quanto na forma fatorada.

Em seguida, é formado o termo x^{n-1}, obtido através da distributiva na forma fatorada, multiplicando *x* em cada fator, exceto em um deles. Tendo:

$$a_n(-r_1 - r_2 - ... - r_n).x^{n-1} = -a_n \underbrace{(r_1 + r_2 + ... + r_n)}_{S_1}.x^{n-1} = -a_n S_1 x^{n-1},$$

onde S_1 denota a soma das raízes de p.

Para formar o termo x^{n-2}, fazendo o mesmo de antes, mas agora escolhendo apenas duas raízes na distributiva. Assim:

$$\begin{aligned} &a_n[(-r_1)(-r_2) + (-r_2)(-r_3) + ...(-r_{n-1})(-r_n)].x^{n-2} \\ &= a_n \underbrace{(r_1.r_2 + r_2..r_3 + ... + r_{n-1}.r_n)}_{S_2}.x^{n-2} = a_n S_2 x^{n-2}. \end{aligned}$$

Na formação do termo x^{n-k}, escolhe-se *k* fatores da forma $(-r_1)(-r_2)...(-r_n)$ e, sendo S_k a soma dos produtos das raízes de *p*, tomadas *k* a *k*, tem que:

$$a_n(-1)^k S_k x^{n-k}.$$

O termo independente será formado com o produto das *n* raízes, sendo a_0 dado por:

$$a_n(-r_1)(-r_2)...(-r_n) = a_n(-1)^n \underbrace{r_1.r_2...r_n.}_{S_n} = a_n(-1)^n S_n.$$

Desta forma, pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_{n-k}x^{n-k} + ... + a_0 \\ &= a_n x^n - a_n S_1 x^{n-1} + ... + a_n(-1)^k S_k x^{n-k} + ... + a_n(-1)^n S_n, \end{aligned}$$

de onde tiram-se as relações: $\begin{cases} S_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ S_2 = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \vdots \\ S_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\ \vdots \\ S_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$

Juntamente com outras relações auxiliares, as relações de Girard formam uma ferramenta muito útil para resolverem-se algumas equações. Veja alguns exemplos que ilustram esse fato.

Exemplo 26. *Se a, b e c são raízes da equação x^3- $4x^2$- 31x + 70 = 0, calcule o valor de* $\log_2(x_1 + x_2 + x_3)$.

Resolução. Aplicando as Relações de Girard para a soma das raízes da equação de 3º grau tem-se:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3) &= -\frac{b}{a}\\ &= -(-4)\\ &= +4\end{aligned}$$

Portanto, ocorre que

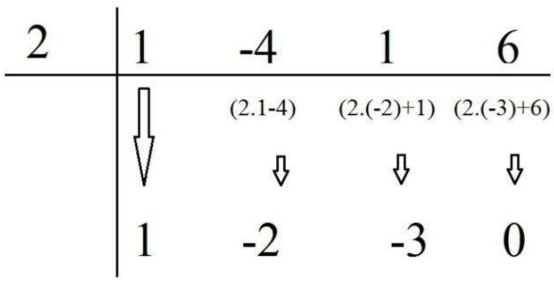
$$\log_2 4 = 2.$$

Concluindo que a resposta de $\log_2(x_1 + x_2 + x_3)$ é 2.

Exemplo 27. *Resolver a equação x^3 - $4x^2$ + x + 6 = 0, sabendo que uma raiz é igual a soma das outras duas.*

Resolução. Usando as Relações de Girard, sabe-se que $r_1 r_2 r_3 = -6$ e que $r_1 + r_2 + r_3 = +4$, pelo enunciado tem-se que $r_1 + r_2 = r_3$, ou seja, $r_3 + r_3 = 4 \Rightarrow r_3 = 2$. Sabendo que 2 é raiz da equação, será usado o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

Figura 03 - Representação de (x^3 - $4x^2$ + x + 6)$\div(x-2)$



Fonte: O Autor, 2018.

As outras raízes estão no quociente x^2 - $2x$ - 3, que são iguais a *3* e – *1*. Assim, tendo como solução final $S = \{-1, 2, 3\}$.

Exemplo 28. *Formar uma equação do 4° grau com coeficientes inteiros cujas raízes sejam -1, 2, -3* e *4.*

Resolução. Com a notação utilizada nas relações de Girard, tem-se que uma equação do 4° grau pode ser escrita como:

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x \ + S_4 = 0,$$

onde

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2$$

$$S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + +r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = -12$$

$$S_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_4r_2 + r_2r_4r_3 = -26$$

$$S_4 = r_1r_2r_3r_4 = +24.$$

Obtém-se como equação:

$$x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 26x \ + 24 = 0.$$

4.7 Equações algébricas com coeficientes reais

Antes de serem apresentados alguns resultados envolvendo equações algébricas com coeficientes reais, será enunciado o seguinte lema:

Lema 2. *Sejam* $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$*, dois números complexos com a, b, c, d* $\in$ $\mathbb{R}$*. Então* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ e também $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Demonstração: Para a soma, tem-se que:

$$\begin{aligned}\overline{z_1} + \overline{z_2} &= \overline{(a + bi)} + \overline{(c + di)} \\ &= a - bi + c - di \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= \overline{z_1 + z_2}.\end{aligned}$$

Para a multiplicação:

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} &= \overline{(a+bi)}\cdot\overline{(c+di)}\\ &= (a-bi)\cdot(c-di)\\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i\\ &= \overline{z_1\cdot z_2}.\end{aligned}$$

Observação. Generalizando o Lema acima, pode-se demonstrar por indução que dado $a \in \mathbb{R}$, z $\in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem:

$$a.\left(\overline{z}\right)^n = a.\underbrace{\overline{z}.\overline{z}.....\overline{z}}_{n\ \ vezes} = a.\overline{z.z....z} = \overline{a.z^n}\ .$$

Teorema 10. *Se o complexo a + bi é uma raiz complexa não real de uma equação algébrica com coeficientes reais, então seu complexo conjugado a – bi também é raiz da equação com a mesma multiplicidade.*

Demonstração. A partir do Lema e observações anteriores, como uma equação algébrica é do tipo $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, envolvendo apenas soma, potências e multiplicação por um número real, tem-se que:

$$p(a-bi) = p(\overline{a+bi}) = \overline{p(a-bi)} = \overline{0} = 0.$$

Deste modo, se $z = a+bi$ é raiz de uma equação algébrica, $\overline{z} = a-bi$ também o será.

Para verificar a multiplicidade, divide-se *p(x)* por:

$$(x-a-bi)(x-a+bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2\ .$$

Como o divisor tem coeficientes reais, o quociente também terá. Assim, eliminam-se duas raízes de *p(x),* sendo que $a+bi$ e $a-bi$ estarão, ambas, presentes ou ausentes como raízes do novo polinômio. Conclui-se então, que as raízes $a+bi$ e $a-bi$ ocorrem o mesmo número de vezes.

Exemplo 29. *Os números complexos 1 e 2 + i são raízes do polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais. Qual é o valor de c?*

Resolução. Um resultado importante é que se um complexo “z” é raiz de uma equação, então seu conjugado também é raiz. Logo, as raízes do polinômio são: *1, 2 + i* e *2 – i.*

Usando as Relações de Girard, tem-se que o valor de *c* corresponde ao produto das raízes com valor negativo.

Assim, sendo:

$$r_1r_2r_3 = -\frac{c}{a},$$

Ocorre que

$$\begin{aligned} c &= -[(1).(2+i).(2-i)] \\ &= -[2^2 - i^2] \\ &= -5. \end{aligned}$$

Portanto, obtém-se o valor de $c = -5$.

Corolário 3. *Equações algébricas de grau ímpar com coeficientes reais sempre possuem, pelo menos, uma raiz real.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, as raízes não reais ocorrem aos pares, mas as equações de grau impar possuem um número ímpar de raízes, ou seja, uma dessas raízes é real.

O teorema a seguir discute a existência de raiz racionais de uma equação algébrica de coeficientes racionais.

Teorema 11. Se $a, b \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{c} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $a + b\sqrt{c}$ é raiz de uma equação algébrica de coeficientes racionais, então $a - b\sqrt{c}$ também é uma raiz. Além disso, elas possuem a mesma multiplicidade.

Demonstração. A demonstração é análoga a feita no teorema de raízes complexas.

O teorema a seguir é conhecido como Teorema do Anulamento ou Teorema de Bolzano (1781 - 1848). Ele não é válido para polinômios, mas para funções contínuas em intervalos fechados. Sua demonstração usa conceitos de limites e não será apresentada.

Teorema 12. *Seja p(x) uma função polinomial de coeficientes reais e* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *com* $x_1 < x_2$. *Se* $p(x_1) \cdot p(x_2) \leq 0$, *então a equação algébrica p(x) = 0 terá pelo menos uma raiz real r, tal que* $r \in [x_1; x_2]$.

Teorema 13. *Se o número racional* $\frac{p}{q}$, *com p e q primos entre si, for uma raiz da equação* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, *com* $a_i \in \mathbb{Z}$ *e* $a_n \neq 0$, *então p é primo e divisor de* a_0 *e q é divisor de* a_n.

Demonstração. Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação, tem-se:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n.\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}.\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_2.\frac{p^2}{q^2} + a_1.\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

$$a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1}.q + ... + a_2.p^2.q^{n-2} + a_1.p.q^{n-1} + a_0.q^n = 0.$$

Isolando $a_n.p^n$, tem-se:

$$\begin{aligned} a_n.p^n &= -a_{n-1}.p^{n-1}.q - ... - a_2.p^2.q^{n-2} - a_1.p.q^{n-1} - a_0.q^n \\ &= q.\underbrace{(-a_{n-1}.p^{n-1} - ... - a_2.p^2.q^{n-3} - a_1.p.q^{n-2} - a_0.q^{n-1})}_{k\in Z} \\ &= q.k. \end{aligned}$$

Isolando $a_0.q^n$, tem-se

$$\begin{aligned} a_0.q^n &= -a_n.p^n - a_{n-1}.p^{n-1}.q - ... - a_2.p^2.q^{n-2} - a_1.p.q^{n-1} \\ &= p\underbrace{(-a_n.p^{n-1} - a_{n-1}.p^{n-2}.q - ... - a_2.p.q^{n-2} - a_1..q^{n-1})}_{l\in Z} \\ &= p.l. \end{aligned}$$

Assim, obtém-se:

$$\begin{cases} a_n.p^n = q.k \\ a_0.q^n = p.l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \text{ é divisor de } a_n.p^n \\ p \text{ é divisor de } a_0.q^n \end{cases}.$$

Como *p* e *q* são primos entre si, conclui-se que *q* divide a_n e também *p* divide a_0.

Exemplo 30. *Sabendo que i é raiz da equação algébrica* $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$, *encontre seu conjunto solução e escreva a equação como produto de polinômios com coeficientes reais.*

Resolução. Como *i* é raiz da equação, pelo teorema 10 tem-se que –*i* também é raiz da equação. Usando a divisão pelo método de chaves, encontra-se o quociente de grau dois, que contém as outras duas raízes.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 & x^2 + 1 \\
-x^4 \qquad\quad -x^2 & \overline{} \\
\overline{} & x^2 - 5x + 6 \\
\quad -5x^3 + 6x^2 - 5x + 6 & \\
\quad +5x^3 \qquad\; +5x & \\
\quad \overline{} & \\
\qquad\quad +6x^2 + 6 & \\
\qquad\quad -6x^2 - 6 & \\
\qquad\quad \overline{} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Assim, o quociente é $x^2 - 5x + 6$, cujas raízes são 2 e 3. Logo, o conjunto solução é:

$$S = \{i, -i, 2, 3\}.$$

E,escrevendo a equação na forma fatorada, obtém-se:

$$\begin{aligned}
x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 &= 0 \\
(x - i).(x + i).(x - 2).(x - 3) &= 0 \\
(x^2 + 1).(x - 2).(x - 3) &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, tem-se a equação escrita na forma solicitada.

Exemplo 27. *Sabendo que* i *e* $\sqrt{2}$ *são raízes da equação algébrica* $x^5 - 5x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$*, encontre seu conjunto solução.*

Resolução. Utilizando os Teoremas das Raízes Complexas e o das Raízes Irracionais, e sabendo que *i* e $\sqrt{2}$ são raízes da equação algébrica, então -*i* e $-\sqrt{2}$ também são raízes. Tendo assim 4 raízes, faltando apenas a quinta, que será descoberta efetuando-se o método de chave na divisão de $x^5 - 5x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 10$ por $(x - \sqrt{2}).(x + \sqrt{2}).(x - i).(x + i) = x^4 - x^2 - 2$.

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - 5x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 10 & x^4 - x^2 - 2 \\
-x^5 \qquad\quad +x^3 \qquad +2x & \overline{} \\
\overline{} & x - 5 \\
\quad -5x^4 \qquad +5x^2 \qquad +10 & \\
\quad +5x^4 \qquad -5x \qquad -10 & \\
\quad \overline{} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Assim, encontra-se o conjunto solução: $S = \left\{i, -i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 5\right\}$.

Exemplo 31. *Determine se* $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ *é irracional.*

Resolução. Supondo que $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ seja uma solução racional de um polinômio *p(x)*, pretende-se determinar este polinômio.

Se

$$x=\sqrt{5}+\sqrt{7} \Leftrightarrow x^2=12+2\sqrt{35} \Leftrightarrow x^4-24x^2+144=140$$

com isso

$$p(x)=x^4-24x^2+4=0.$$

Tem-se que, pelo teorema 13, se a equação *p(x)* tiver uma solução racional $\frac{p}{q}$, com *p* e *q* primos entre si,teria-se

$$q=\pm 1 \text{ e } p=\pm 1, \pm 2, \pm 4.$$

Sendo assim, visto que $2<\sqrt{5}<3$ e que $2<\sqrt{7}<3$, logo $4<\sqrt{5}+\sqrt{7}<6$.

Portanto, somente o 5 seria conveniente para $\frac{p}{q}$, contudo 5 não é solução da equação, sendo assim, $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ é irracional.

Definição 12. A partir do estudo de polinômio e equações algébricas, pode-se ter uma ideia mais clara de como esboçar gráficos de funções polinomiais.

Irá ser feita uma abordagem superficial sobre gráficos e funções, pois esse assunto só é trabalhado por completo num curso de cálculo. Deste modo, serão trabalhadas as funções do tipo $p:\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ tal\ que\ \ p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$, com $a_i\in\mathbb{R}$, $i\in\mathbb{N}$ e $0\le i\le n$.

Se houver uma raiz real x_1, a interseção do gráfico com o eixo das abscissas será neste ponto x_1, uma vez que $p(x_1)=0$. Se houver uma raiz real x_1 de multiplicidade ímpar *k*, ao se escrever *p(x)* na forma fatorada, tem-se um fator $(x-x_1)^k$, que possui sinais contrários para $x<x_1$ e $x>x_1$.

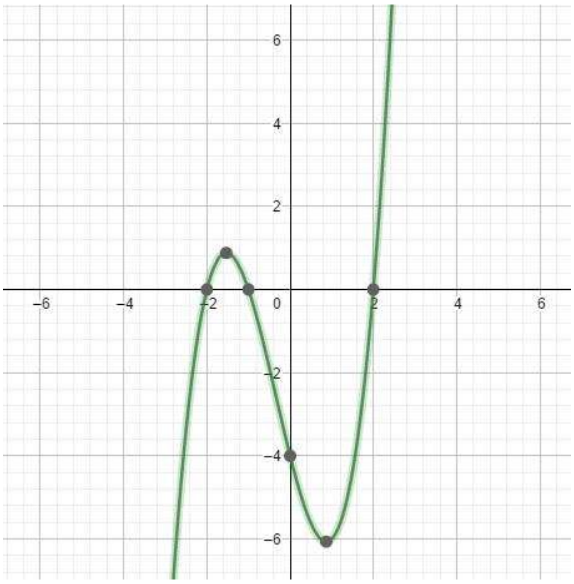
Como consequência, o gráfico da função polinomial corta o eixo *x* em raízes de multiplicidade ímpar.

Exemplo 32. Abaixo está representado o gráfico do polinômio $p(x)=x^3+x^2-4x-4$. Tendo sua forma fatorada escrita na forma:

$$p(x) = (x-2).(x+2).(x+1).$$

Observe que todas as raízes têm multiplicidade ímpar e o gráfico toca no eixo x nesses pontos.

Gráfico 01 - Representação do gráfico de $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.



Fonte: O Autor, 2018.

No caso de se ter uma raiz real x_2, de multiplicidade par m, ao escrever-se *p(x)* na forma fatorada, tem-se um fator $(x-x_2)^m$, que possui o mesmo sinal para $x < x_2$ e $x > x_2$.

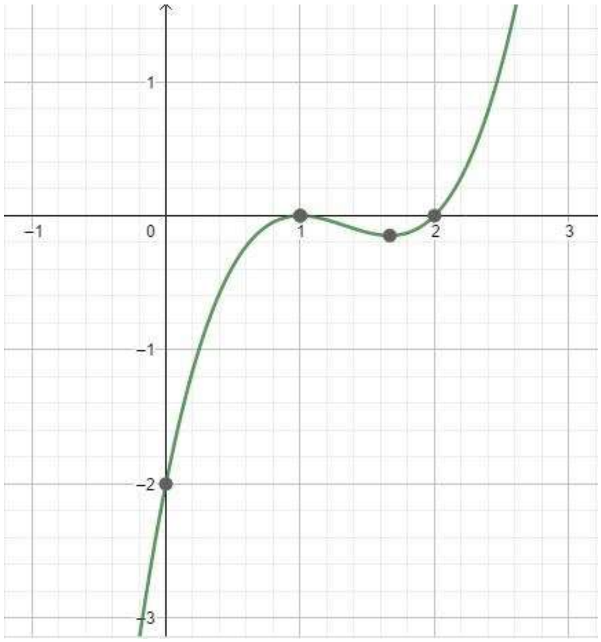
Como consequência, o gráfico da função polinomial reflete no eixo x em raízes de multiplicidade par.

Exemplo 33. Abaixo está representado o gráfico do polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Tendo sua forma fatorada escrita como:

$$p(x) = (x-2).(x-1)^2.$$

Observe que a raiz + *2* tem multiplicidade ímpar e o gráfico toca no eixo x nesse ponto. A raiz +*1* tem multiplicidade par e o gráfico reflete no eixo x nesse ponto.

Gráfico 02 - Representação do gráfico de $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

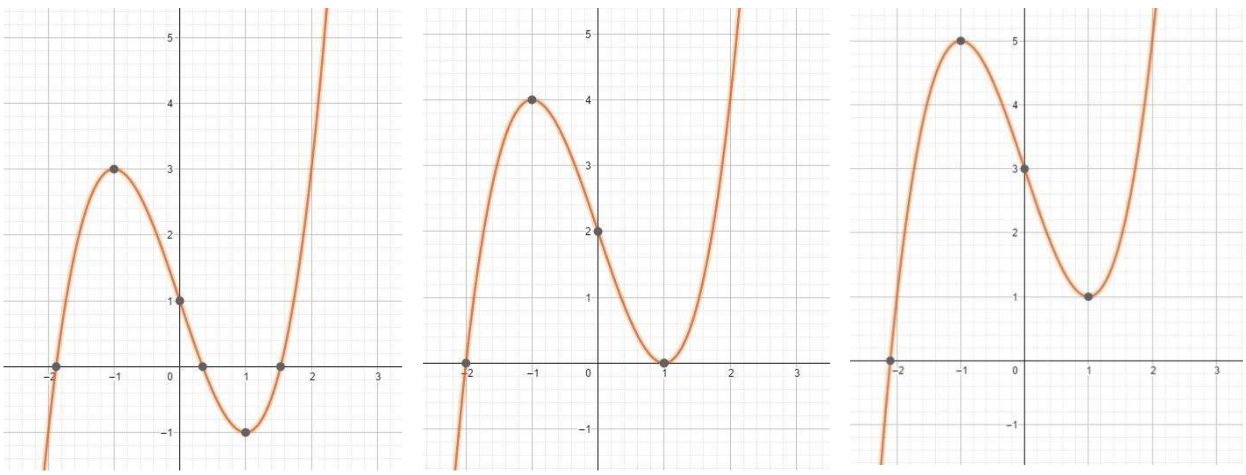


Fonte: O Autor, 2018.

Pontos de inflexão, máximos e mínimos globais e locais, assíntotas verticais e horizontais necessitam de uma teoria com limites e derivadas. Como já foi dito, não será feito este estudo avançado. Contudo na Figura 04, a seguir, mostrar-se-á a comparação de três gráficos da função polinomial de 3° grau:

$p(x) = x^3 - 3x + c$, para valores de $c = 1$ (i), $c = 2$ (ii) e $c = 3$ (iii) .

Figura 04 - Representação de $p(x) = x^3 - 3x + c$.



(i) $p(x) = x^3 - 3x + 1$ (ii) $p(x) = x^3 - 3x + 2$ (iii) $p(x) = x^3 - 3x + 3$

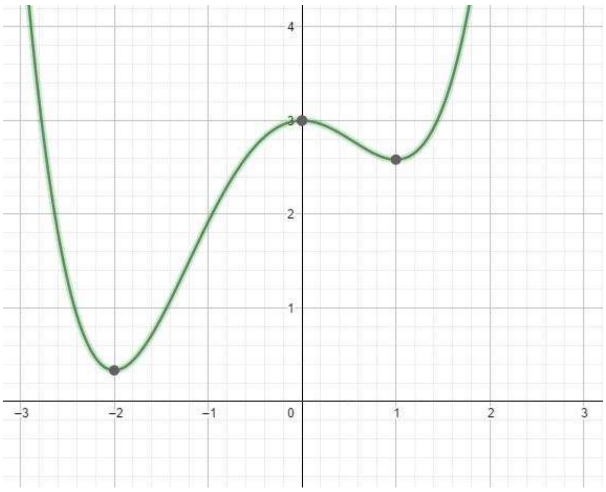
Fonte: O Autor, 2018.

Na Figura 4 *(i),* o Gráfico da função polinomial *p(x)* atravessa o eixo do *x* em três pontos, sendo assim, existem três raízes complexas reais de multiplicidade ímpar. Na ilustração acima, o Gráfico *(ii),* reflete no eixo *x* em um ponto, isso ocorre porque existe uma raiz de multiplicidade par em *+1* e multiplicidade ímpar em *-2*. Já na figura *(iii),* o gráfico atravessa o eixo *x* em apenas um ponto, sendo assim, existe apenas uma raiz complexa real de multiplicidade ímpar, conclui-se assim que as outras duas raízes são complexas. Pelo Teorema 10, já se sabe que as raízes são complexas conjugadas.

Serão analisadas, a seguir, funções polinomiais reais de grau quatro, que já foi visto que têm um número par de raízes.

No gráfico a seguir, Gráfico 03, as raízes são todas complexas não reais e observa-se que o gráfico não toca o eixo dos *x*.

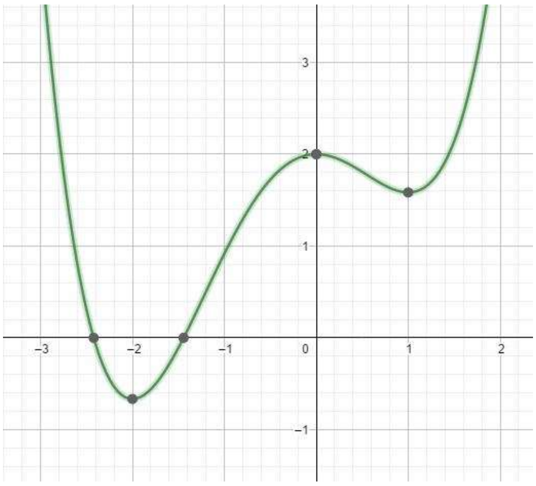
Gráfico 03 - Representação do gráfico de $p(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2+3.$



Fonte: O Autor, 2018.

No gráfico a seguir existem duas raízes complexas não reais e duas reais distintas, observando que estas raízes reais são de multiplicidade ímpar cortam o eixo dos *x* no gráfico.

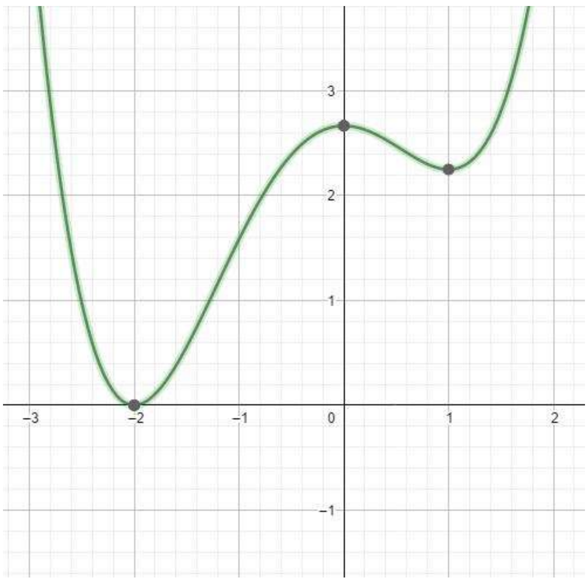
Gráfico 04 - Representação gráfica de $p(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2+2.$



Fonte: O Autor, 2018.

No gráfico a seguir as raízes são duas complexas não reais e uma raiz de multiplicidade par, observando que nesse ponto o gráfico rebate no eixo *x*.

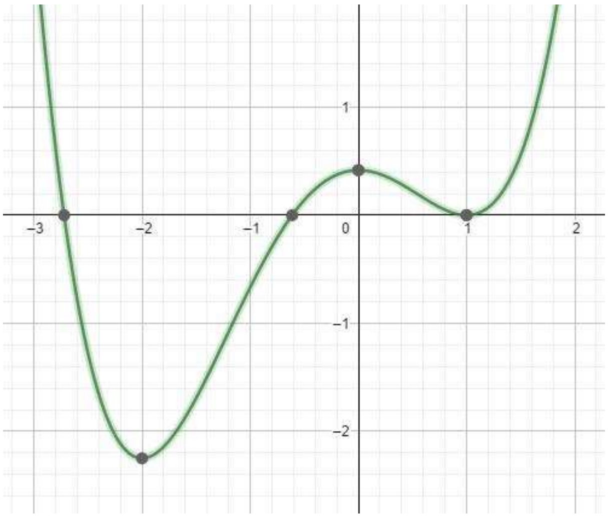
Gráfico 05 - Representação gráfica de $p(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2+\dfrac{8}{3}.$



Fonte: O Autor, 2018.

No gráfico a seguir existem duas raízes complexas reais de multiplicidade ímpar e uma raiz de multiplicidade par, sendo assim o gráfico rebate em um ponto e corta o eixo de *x* em dois.

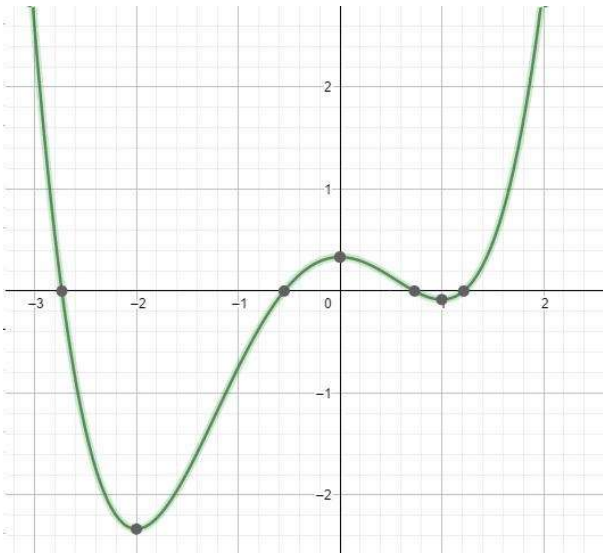
Gráfico 06 - Representação gráfica de $p(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{5}{12}$.



Fonte: O Autor, 2018.

No gráfico a seguir, Gráfico 07, as raízes são todas complexas reais de multiplicidade ímpar, o gráfico assim corta o eixo de *x* em quatro pontos distintos.

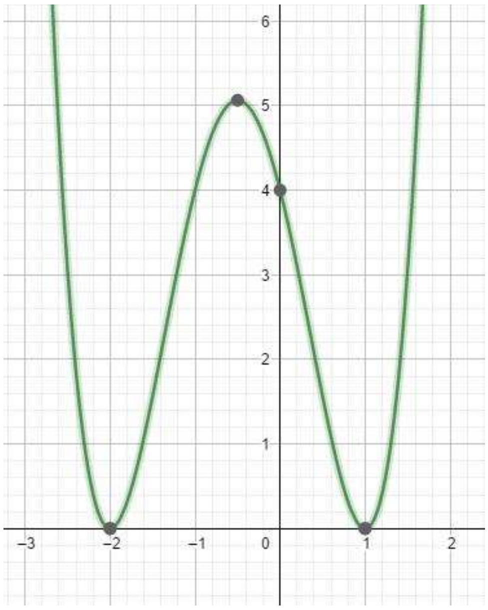
Gráfico 07 - Representação gráfica de $p(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{1}{3}$.



Fonte: O Autor, 2018.

No gráfico a seguir, Gráfico 08, existem duas raízes complexas reais de multiplicidade par, observando assim que o gráfico rebate no eixo do x em dois pontos distintos.

Gráfico 08 - Representação gráfica de $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.



Fonte: O Autor, 2018.

4.8 Métodos de Aproximações Sucessivas

Há, ainda, alguns métodos numéricos iterativos para obtenção de raízes reais de equações − não somente as algébricas, mas também as transcendentais − que podem ser apresentados aos estudantes do Ensino Médio, podendo-se destacar o Método de Newton adaptado (CARNEIRO, 1994), o Método da bissecção (SATUF, 2004) e o Método da falsa posição (NOVAES, 2018). No livro de NOVAES (2018, p.01), ele explica do que se consiste o método numérico.

> Um método (numérico) iterativo consiste em uma sequência finita de instruções que são executadas passo a passo, segundo algum critério, algumas das quais são repetidas em ciclos. A execução de um ciclo é denominada iteração. Cada iteração utiliza resultados das iterações anteriores e efetua determinados testes que permitem verificar se foi atingido um resultado próximo e suficiente do resultado esperado. A esse respeito, a seguinte observação é fundamental: métodos (numéricos) iterativos para obtenção de raízes de equações fornecem apenas uma aproximação para a solução exata.

Existem muitos métodos “numéricos”, isto é, aproximados, para determinar as raízes de uma equação algébrica. Porém, o procedimento básico de cada um deles consiste em:

(i) Localizar as raízes - ter uma primeira ideia, ainda que vaga, de onde se encontram as raízes.

(ii) Escolher por tentativa um valor inicial x_0 pertencente ao domínio onde se localizou uma raiz.

(iii) Obter um processo iterativo, ou seja, repetitivo que gere, a partir de x_1, uma sequência de valores $x_1, \dots, x_n, \dots$ que se aproximam tanto quanto se quiser dessa raiz (convergem).

Uma forma para situar raízes de um polinômio é aplicando o Teorema 12. Embora seja muito útil, este teorema não é suficiente para localizar as raízes. Esboçar o gráfico da função polinomial $y = p(x)$ associada à equação polinomial $p(x) = 0$, é um outro procedimento útil para ter uma ideia onde estão localizados os pontos em que esse gráfico corta o eixo dos x.

Em problemas contextualizados, a localização das possíveis raízes da equação derivada do problema é dada, muitas vezes, pelos dados do problema. Assim, não se faz necessário traçar o gráfico do polinômio.

Definindo um intervalo que contém a raiz procurada, deve-se escolher um valor inicial x_0 dentro deste intervalo e criar uma sequência $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, que gere valores aproximados da raiz procurada.

Como exemplo de um desses métodos de aproximações sucessivas, será mostrado o método de Newton-Raphson adaptado para encontrar raízes de polinômios, conforme apresentado em Carneiro (1996).

Para introduzir o método de Newton-Raphson, inicia-se com a equação geral do 3º grau

$$p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0,$$

e executam-se os passos seguintes:

- Divide-se $p(x)$ por $x - x_0$, obtendo-se o quociente $q_1(x)$, do 2º grau, e um resto $A_0 = p(x_0)$.
- Divide-se $q_1(x)$ por $x - x_0$, obtendo-se o quociente $q_2(x)$, do 1º grau, e um resto $B_0 = q_1(x_0)$.
- Divide-se $q_2(x)$ por $x - x_0$, obtendo-se o quociente $q_3(x)$, de grau 0, e um resto $D_0 = q_2(x_0)$.

Neste caso, as divisões podem ser feitas utilizando-se de um mesmo dispositivo de Briot-Ruffini, que produz o quociente e o resto da divisão de um polinômio por $x\!-\!x_0$, como mostrado abaixo:

	c_3	c_2	c_1	c_o
x_0	c_3	...	...	A_0
x_0	c_3	...	B_0	
x_0	c_3	D_0		

As divisões realizadas implicam nas seguintes igualdades:

$$p(x) = (x\text{-}x_0)q_1(x) + A_0,\ q_1(x) = (x\text{-}x_0)q_2(x) + B_0 \quad \text{e} \quad q_2(x) = (x\text{-}x_0)q_3(x) + D_0,$$

onde percebe-se que $q_3(x) = c_3$.

Estas equações podem ser manipuladas para se obter a seguinte expressão:

$$p(x) = c_3(x\text{-}x_0)^3 + D_0(x\text{-}x_0)^2 + B_0(x\text{-}x_0) + A_0.$$

Se x_0 for uma primeira aproximação da raiz de $p(x) = 0$, e $x_1 = x_0 + h$ for uma segunda aproximação (melhor), tem-se que:

$$p(x_1) = p(x_0{+}h) = c_3h^3 + D_0h^2 + B_0h + A_0 = 0.$$

Se x_0 estiver realmente próximo da raiz exata, tem-se que h será muito pequeno e, em uma primeira aproximação, os termos em h com expoente maior ou igual a dois podem ser desprezados, resultando em uma equação do 1º grau aproximada $B_0h + A_0 \approx 0$, o que implica em $h \approx -A_0/B_0$. Pode-se então obter uma segunda aproximação da raiz fazendo-se:

$$x_1 = x_0 - (A_0/B_0).$$

Este processo pode ser iterado, calculando-se $x_2 = x_1 - (A_1/B_1)$, com A_1 e B_1 calculados partindo-se de x_1, da mesma forma como A_0 e B_0 foram calculados partindo-se de x_0, e assim sucessivamente. Apesar do desenvolvimento acima ter sido feito com um polinômio de 3º grau, ele também é válido para graus maiores que três.

O método de Newton-Raphson aplicado para se encontrar a raiz da equação $p(x) = 0$ pode então ser enunciado como:

1) Escolhe-se uma primeira aproximação x_0 para a raiz.

2) Tendo-se x_n, para $n=0,1,...,$ utiliza-se Briot-Ruffini para dividir duas vezes $p(x)$ por $x\!-\!x_n$, obtendo-se os restos A_n e B_n.

3) Calcula-se então $x_{n+1} = x_n - (A_n/B_n)$.

Exemplo 34. Determinar uma raiz real da equação $x^3 - 5x + 1 = 0$, *sabendo-se ela está entre 0 e 1. Temos que* $p(x) = x^3 - 5x + 1$.

Começando o processo com $x_0 = 0$:

	1	0	-5	1
0	1	0	-5	1
0	1	0	-5	

Então,

$$x_1 = x_0 - (A_0/B_0) = 0 - (-1/5) = 0{,}2.$$

Retornando ao processo com esse valor:

$$x_2 = x_1 - (A_1/B_1) = 0{,}2 - (-0{,}008/4{,}88) = 0{,}2016393 \text{ .}$$

E o processo continua:

	1	0	-5	1
0,2016393	1	0,201639	-4,959342	0,000002
0,2016393	1	0,403279	-4,878025	

O próximo valor é

$$x_3 = x_2 - (A_2/B_2) = 0{,}2 - (-0{,}008/4{,}88) = 0{,}2016397$$

que a não difere de x_2 nas suas seis primeiras casas decimais, o que mostra a grande velocidade de convergência do método.

Logo, $x \approx 0{,}2016397$ é a raiz de $p(x) = 0$ procurada.

Método da Bisseção

Suponha o seguinte exemplo, um casal amigos brincam de adivinhar números naturais entre 1 e 80. O menino pensa em um número e a menina deve descobri-lo. Ela começa perguntando se o número é 40 e ele responde que é maior que 40. Ela pergunta se o número é 60 e ele responde que é menor que 60. Em seguida ela pergunta se o número é 50 ele diz que é maior que 50. É possível observar que a menina escolhe os números que estão no ponto médio dos intervalos. Com esse procedimento, em poucas tentativas, ela irá descobrir o número que o menino pensou.

O objetivo do método da bisseção é reduzir o intervalo de incerteza [a, b] até que a convergência seja obtida. De maneira geral o método consiste em reduzir o intervalo em divisões sucessivas apresentadas pelo critério dado na equação

$$x_{k+1} = \frac{b_k + a_k}{2}.$$

É possível visualizar que o intervalo é reduzido sempre o resultado de uma média aritmética, ou seja, o intervalo é sempre dividido ao meio.

Exemplo 35. Obtenha a raiz real da equação $x^3 - 5 = 0$, que se encontra no intervalo [1,2], com $\varepsilon < 10^{-1}$, sendo o ε o erro aceitável.

Tendo *f(1)* = 4 e *f(2)* = 3, a raiz real

$$x_{k+1} = \frac{b_k + a_k}{2}.$$

$[a_0,b_0] = [1,2]$	$x_1 = 1,5$	$f(x_1) = - 1,625$
$[a_1,b_1] = [1,5;2]$	$x_2 = 1,75$	$f(x_2) = 0,359375$
$[a_2,b_2] = [15;1,75]$	$x_3 = 1,625$	$f(x_3) = - 0,708984$
$[a_3,b_3] = [1,625;1,75]$	$x_4 = 1,6875$	$f(x_4) = - 0,194580$
$[a_4,b_4] = [1,6875;1,75]$	$x_5 = 1,71875$	$f(x_5) = 0,07362$

Com o exemplo anterior, pode-se observar que uma das metades é desprezada e com a outra, encontra-se um novo ponto médio. O processo prossegue de forma iterativa. O Método da Bissecção gera duas sequências (a_n) e (b_n), com as seguintes propriedades:

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq b$$

$$b = b_0 \geq b_1 \geq \ldots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \ldots \geq b$$

$$f(a_n)f(b_n) < 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Reescrevendo o algoritmo e introduzindo as sequências (a_n) e (b_n), em que *n* representa a n-ésima iteração. Se $f(b_0)f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) < 0$ defina $a_1 = \left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)$ e $b_2 = b_1$, caso contrário defina $a_1 = a_0$ e $b_1 = \left(\dfrac{a_0 + b_0}{2}\right)$. Prosseguindo o processo de maneira iterativa, isto é, se $f(b_n)f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ defina $a_{n+1} = \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$ e $b_{n+1} = b_n$, caso contrário defina $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$. Como visto no exemplo, o Método de Bisseção gera uma sequência de intervalos encaixantes.

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \ldots.$$

Como o comprimento de cada intervalo é sempre a metade do intervalo anterior, pode-se concluir que:

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como o $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, conclui que o Método da Bisseção é um caso particular do Teorema dos Intervalos Encaixantes, apresentado em Figueiredo (1996).

5 UM PANORAMA DO ENSINO MÈDIO, ENEM E ALGUNS EXAMES VESTIBULARES

A resolução de equações algébricas de grau superior a dois em livros didáticos da educação básica, por exemplo, Dante (2008); Iezzi et al (2011) e Paiva (2013) se restringe à 3ª série do Ensino Médio, somente casos particulares são tratados em séries anteriores. Nestes, para resolver equações desse tipo, essencialmente, usa-se o Teorema da Decomposição e o Teorema de Briot-Ruffini; ou as Relações de Girard ou o Teorema das raízes racionais. Os exercícios propostos são basicamente teóricos com algumas aplicações relacionadas à vida prática. Porém, seus enunciados são adaptados a fim de se utilizar os métodos citados acima.

Carneiro (1998) sugeriu em seus artigos abordar problemas contextualizados no Ensino Médio que necessitem da resolução de equações algébricas de grau superior a dois. Mais ainda, sua proposta era resolver essas equações utilizando o método de Newton, um método de aproximações sucessivas. Com auxilio de calculadoras ou planilhas eletrônicas, tal método seria fácil implementar quando o objetivo fosse apenas resolver uma equação algébrica de grau superior a dois para solucionar um problema dado. Outros, como Satuf (2004) e Novaes (2018), também sugerem abordar equações algébricas de grau superior a dois utilizando métodos de aproximações sucessivas para resolvê-las.

Mas o que acontece na prática?

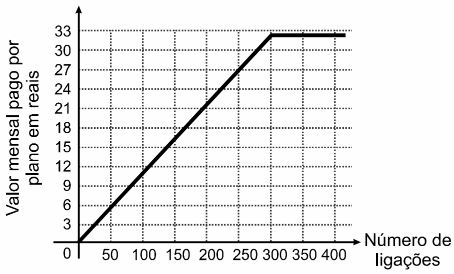
É fato que os autores dos livros didáticos – como exemplos, os citados no início do capítulo – passaram a incluir em suas obras mais problemas contextualizados e a enfatizar mais as aplicações, assim como mencionar mais os fatos históricos. No ENEM, todas as questões envolvendo o tema são questões contextualizadas que abordam problemas do cotidiano, porém estas se limitam somente a serem aplicações das equações polinomiais de primeiro e segundo graus. Números complexos, polinômios e equações algébricas de grau superiores a dois não constam no programa do ENEM. Com isso, muitas escolas de Ensino Médio, que visam somente ao ENEM, tendem a abolir esses tópicos de seus programas de Matemática.

Por outro lado, escolas militares ou algumas universidades continuam avaliando o conhecimento dos candidatos sobre esses três assuntos em seus exames vestibulares. Porém, se limitam, em geral, a tratar de equações algébricas de terceiro e quarto graus.

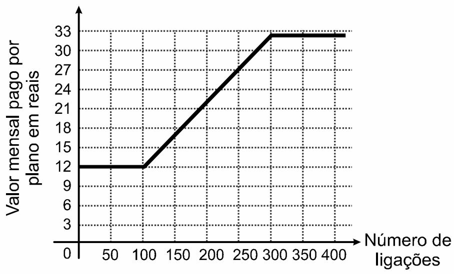
A seguir apresenta-se uma coletânea de questões, com suas respectivas soluções do ENEM e de alguns exames vestibulares a fim de validar o que foi dito anteriormente.

Exercício 1. (ENEM, 2015) *Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00.*

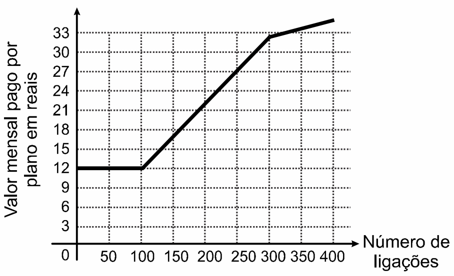
Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:



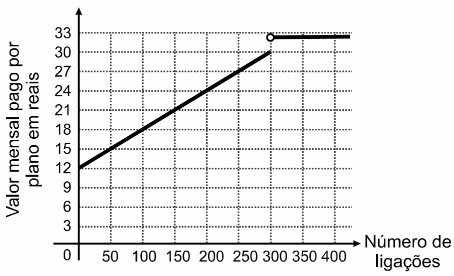
a)



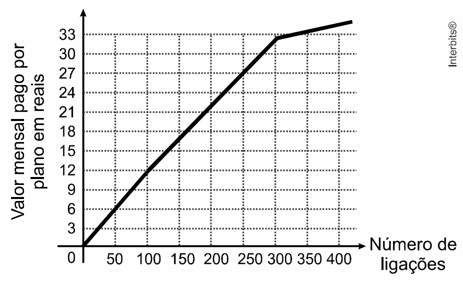
b)



c)



d)

e) 

Resolução. Seja $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ a função que relaciona o valor mensal pago, *f(x)* com o número de ligações, x efetuadas no mês. Tem-se que:

$$f(x)=\begin{cases}12,\ se\ 0\le x\le 100\\ 0{,}1.(x-100)+12,\ se\ 100\le x\le 300\\ 32,\ se\ 300\le x\le 500\end{cases}$$

$$=\begin{cases}12,\ se\ 0\le x\le 100\\ 0{,}1x+2,\ se\ 100\le x\le 300\\ 32,\ se\ 300\le x\le 500.\end{cases}$$

Portanto, dentre os gráficos apresentados, se tem a alternativa B.

Exercício 2. (ENEM, 2017) *A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.*

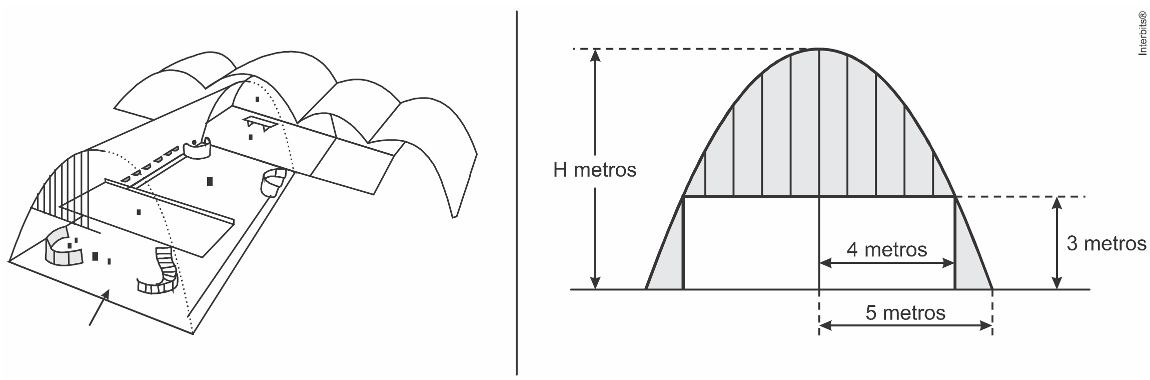


Figura 1 Figura 2

Qual a medida da altura H em metro, indicada na Figura 2?

a) $\frac{16}{3}$

b) $\frac{31}{5}$

c) $\frac{25}{4}$

d) $\frac{25}{3}$

e) $\frac{75}{2}$

Resolução. Sendo observado que a função é uma Parábola e tendo os pontos (5,0) e (4,3) f(x) = $ax^2 + bx + c$. Como $b = 0 \Rightarrow$ parábola simétrica ao eixo y .

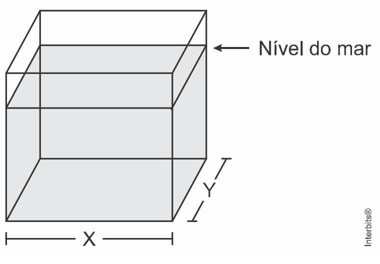
$$Y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = c.$$

Logo, H = c

$$\begin{cases} 0 = a.5^2 + H \\ 3 = a.4^2 + H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 25.a + H \\ -3 = -16.a - H \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow H = \frac{25}{3}.$$

Tem-se como resposta a letra D.

Exercício 3. (ENEM, 2017) *Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.*



Quais devem ser os valores de X e de Y em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a) 1 e 49

b) 1 e 99

c) 10 e 10

d) 25 e 25

e) 50 e 50

Resolução. Pode-se lembrar que a área máxima de um retângulo é quando este retângulo é um quadrado, com isso teria 4x = 100, daí x = 25, ou também

Calculando:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x.y = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ x.y = S \end{cases} \Rightarrow x.(50 - x) = S \Rightarrow x_{máx} = y_{máx} = 25.$$

Sendo assim, tem-se como resposta a letra D.

Exercício 4. (ENEM, 2016) *Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:*

$$y = 9 - x^2$$

sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ *da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.*

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18

b) 20

c) 36

d) 45

e) 54

Resolução. Tem-se que y = (3 – x).(3 + x) em que as raízes são -3 e 3. Assim, a parábola intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0,9).

A resposta é dada por:

$$\frac{2}{3}.(3-(-3)).9 = 36m^2$$

Conclui-se que a resposta é a letra C.

Exercício 5. (ENEM, 2014) *Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f de grau menor que 3 para alterar as notas x da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:*

- *A nota zero permanece zero.*
- *A nota* 10 *permanece* 10.
- *A nota* 5 *passa a ser* 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é:

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$

e) $y = x$

Resolução. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = ax^2 + bx + c$. São dados os pontos (0,0), (10,10) e (5,6) desse modo, tem-se:

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(5)=6 \\ f(10)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 25a+5b=6 \\ 100a+10b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -100a-20b=-24 \\ 100a+10b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{25} \\ b=-\dfrac{7}{5} \\ c=0 \end{cases}$$

Portanto, segue que:

$$f(x)=-\frac{1}{25}x^2+\frac{7}{5}x.$$

Assim, a resposta é a letra A.

Exercício 6. (Unicamp, 2016) *Considere o polinômio p(x) =* x^4 *- 5x - 6 = 0 e responda as questões abaixo:*

a) *Resolva a equação p(x) e encontre o seu conjunto solução.*

b) *Mostre que, se a e b são números reais e se não são ambos nulos, então as raízes da equação* $x^4 + ax + b = 0$ *não podem ser todas reais.*

Resolução. a) Como todos os coeficientes são inteiros, utiliza-se o Teorema das Raízes Racionais, Teorema 13, para se obter as possíveis raízes racionais dessa equação.

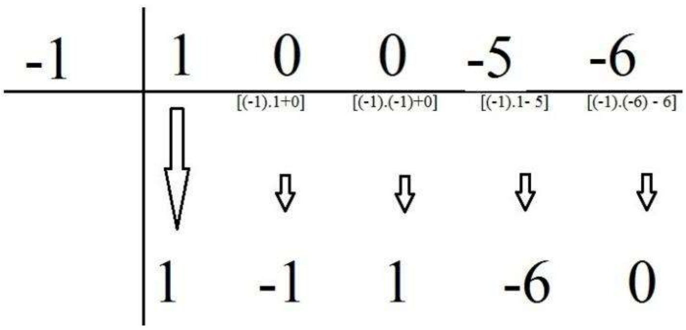
Divisores de 1: ±1.

Divisores de – 6 : ±1, ±2, ±3, ±6.

Possíveis raízes racionais: ±1, ±2, ±3, ±6.

Com isso já identificam-se as raízes -1 e 2. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, tem-se:

Figura 05 - Representação de $(x^4-5x-6)\div(x+1)$.



Fonte: O Autor, 2018.

Tendo como $q_1 = x^3 + x^2 + x + 6$, novamente usando o dispositivo Briot-Ruffini, tem-se:

Figura 06 - Representação de $(x^3 - x^2 + x - 6) \div (x - 2)$.

2	1	-1	1	-6
	$\Downarrow$	(2.1-1) $\Downarrow$	(2.1+1) $\Downarrow$	(2.3 - 6) $\Downarrow$
	1	1	3	0

Fonte: O Autor, 2018.

Pode-se reescrever *p(x)* = x^4 - *5x* - *6* = *0* na forma fatorada $(x^2 + x + 3).(x - 2).(x + 1) = 0$.Com isso, resolvendo a equação de 2° grau $x^2 + x + 3$ tem-se como conjunto solução de *p(x)*: $S = \left\{ -1,\, 2,\, \frac{-1 - \sqrt{11}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{11}i}{2} \right\}$.

b) A equação $x^4 + ax + b = 0$ admite, no máximo, uma raiz nula, pois *a* e *b* não são ambos nulos.

Irá se provar que a equação $x^4 + ax + b = 0$ admite, no máximo, duas raízes reais. Se os números reais, *p* e *q* forem raízes, então a equação $x^4 + ax + b = 0$ pode ser fatorada na forma $(x - p).(x-q).[x^2 + (p + q).x + (p^2 + pq + q^2)] = 0$ pois, de acordo com o dispositivo de Briot-Ruffini, tem-se:

Figura 07 - Representação de $\left[(x^4 + ax + b) \div (x - p)\right] \div (x - q)$.

1	0	0	a	b	p
1	p	p^2	p^3+a	p^4+ap+b=0	q
1	p+q	p^2+pq+q^2	q^3+pq^2+p^2q+p^3+a=0		

Fonte: O Autor, 2018.

A equação $x^2+(p + q).x + (p^2 + pq + q^2) = 0$ não admite raízes reais, pois

$$\Delta = (p + q)^2 - 4\,(p^2 + pq + q^2) =$$

$$-\,3p^2 - 3q^2 - 2pq = -\,2\,(p^2 + q^2) - (p + q)^2 < 0.$$

Assim para qualquer p e q não simultaneamente nulos, $\Delta < 0$.

Exercício 7. (Col. Naval, 2014) *A equação* $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ *possui três raízes reais. Sejam p e q números reais fixos, onde* p *é não nulo. Trocando x por py + q a quantidade de soluções reais da nova equação é:*

a) 1

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Resolução. Pelo Teorema das Raízes Racionais, pode-se obter as possíveis raízes racionais dessa equação.

Divisores de 1: ± 1.

Divisores de 2: ±1, ±2.

Possíveis raízes racionais: ±1, ±2.

Com isso já se identifica as raízes *+1* e *+ 2*. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, tem-se:

Figura 08 - Representação de $[(x^3 - 2x^2 - x + 2) \div (x-1)] \div (x-2)$.

1	1	-2	-1	2
2	1	-1	-2	0
	1	1	0	

Fonte: O Autor, 2018.

Tendo como a ultima raiz *-1*.

Portanto,

$$px + q = 1 \Leftrightarrow x = (1-q)/p$$
$$px + q = -1 \Leftrightarrow x = (-1-q)/p$$
$$px + q = 2 \Leftrightarrow x = (2-q)/p.$$

A quantidade de soluções reais da nova equação é 3.

Resposta letra B.

Exercício 8. (EPCAR (Afa), 2014) *A equação* $x^3 - 4x^2 + 5x + 3 = 0$ *possui as raízes m, p e q. O valor da expressão* $\frac{m}{pq} + \frac{p}{mq} + \frac{q}{mp}$ *é*

a) −2

b) −3

c) 2

d) 3

Resolução. Pelas Relações de Girard sabe-se que:

$$m.p.q = -3$$
$$m.p + m.q + p.q = 5$$
$$m + p + q = 4$$

Desenvolvendo a expressão dada no enunciado, tem-se:

$$\frac{m}{pq} + \frac{p}{mq} + \frac{q}{mp} = \frac{m^2 + p^2 + q^2}{m.p.q}$$

Utilizando as Relações de Girard para desenvolver $(m + p + q)^2$ tem-se:

$$(m + p + q)^2 = 4^2$$
$$(m + p + q)^2 = m^2 + p^2 + q^2 + 2mp + 2mq + 2pq$$
$$16 = m^2 + p^2 + q^2 + 2.(mp + mq + pq)$$
$$16 = m^2 + p^2 + q^2 + 2.5$$
$$m^2 + p^2 + q^2 = 6$$

Assim:

$$\frac{m}{pq} + \frac{p}{mq} + \frac{q}{mp} = \frac{m^2 + p^2 + q^2}{m.p.q} = \frac{6}{-3} \Leftrightarrow \frac{m}{pq} + \frac{p}{mq} + \frac{q}{mp} = -2$$

Resposta letra A

Exercício 9. (UFJF, 2015) *Considere o polinômio*

$$p(x) = 16x^5 - 48x^4 - 40x^3 + 120x^2 + + 9x - 27.$$

a) *Sabendo que o p(x) possui uma raiz r natural menor que 5, determine r.*

b) *Determine o polinômio* $q(x) = \dfrac{p(x)}{x - r}$.

c) *Determine todas as raízes de q(x), especificando suas multiplicidades.*

Resolução. a) Pelo Teorema das Raízes Racionais, como *r* é natural, *r* deve ser um divisor de *– 27*. Como *r* é natural e menor que *5*, então *r = 1* ou *r = 3*. Calculando *p(1)*, tem-se que *p(1) = 30*. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini para *p(3)* tem-se:

Figura 09 - Representação de $p(x) = (16x^5 - 48x^4 - 40x^3 + 120x^2 + 9x - 27) \div (x - 3)$.

3	16	-48	-40	120	9	-27
	16	0	-40	0	9	0

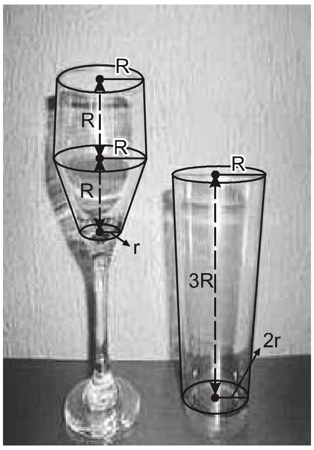
Fonte: O Autor, 2018.

Assim, r = 3 uma das raízes de p(x).

b) O valor de $q(x) = \dfrac{p(x)}{x - r}$, já foi demonstrado na questão anterior.

c) Como $q(x) = 16x^4 - 40x^2 + 9$, pode-se usar o conceito de equações biquadrada, substituindo $x^2 = y$, obtém-se uma equação de segundo grau $q(y) = 16y^2 - 40y + 9$, com conjunto solução igual a $S = \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{9}{4}\right\}$. Assim $x^2 = \dfrac{1}{4}$ *e* $x^2 = \dfrac{9}{4}$, de onde se conclui que as quatro raízes simples de q(x) são: $-\dfrac{1}{2},\ +\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}\ e\ +\dfrac{3}{2}$.

Exercício 10. (Unesp, 2014) *A imagem mostra uma taça e um copo. A forma da taça é, aproximadamente, de um cilindro de altura e raio medindo R e de um tronco de cone de altura R e raios das bases medindo R e r. A forma do copo é, aproximadamente, de um tronco de cone de altura 3R e raios das bases medindo R e 2r.*



Sabendo que o volume de um tronco de cone de altura h e raios das bases B e b é $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot(B^2+B\cdot b+b^2)$ *e dado que* $\sqrt{65}\cong 8$, *determine o raio aproximado da base do copo, em função de R, para que a capacidade da taça seja* $\frac{2}{3}$ *da capacidade do copo.*

Resolução. A taça é formada por um cilindro mais um tronco de cone, e o copo por apenas um tronco de cone.

O objetivo é ter o $V_{TAÇA}=\frac{2}{3}V_{COPO}$.

O volume da taça é dado por

$$\begin{aligned} V_{TAÇA} &= V_{cilindro}+V_{tronco\ cone} \\ &= \pi R^2.R+\frac{1}{3}.\pi.R(R^2+R.r+r^2) \\ &= \frac{\pi.(4R^3+R^2.r+R.r^2)}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{COPO} &= \frac{1}{3}.\pi.3R(R^2+R.2r+4r^2) \\ &= \pi.R(R^2+R.2r+4r^2) \\ &= \pi.(R^3+2R^2.r+4Rr^2). \end{aligned}$$

Tendo pelo enunciado que

$$V_{TAÇA} = \frac{2}{3} V_{COPO}$$

$$\frac{\pi.(4R^3 + R^2.r + R.r^2)}{3} = \pi \frac{2}{3}.(R^3 + 2R^2.r + 4Rr^2)$$

$$4R^3 + R^2.r + R.r^2 = 2R^3 + 4R^2r + 8Rr^2$$

$$7Rr^2 + 3R^2r - 2R^3 = 0.$$

Obtendo-se uma equação de segundo grau com incógnita r, com raízes $\frac{5R}{14}$ e $-\frac{11R}{14}$, sendo que a raiz negativa não convém.

Portanto, o raio do copo será:

$$2.\frac{5R}{14} = \frac{5R}{7}.$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de equações algébricas de grau superior a dois é deixada de lado na maioria dos programas de Ensino Médio. E quando consta de algum, se limita, essencialmente, a usar o Teorema da Decomposição e o Teorema de Briot- Ruffini; ou as Relações de Girard ou o Teorema das raízes racionais. Ora, como visto anteriormente neste trabalho, o último teorema só determina as raízes racionas de equações polinomiais de coeficientes reais. As relações de Girard necessitam de uma informação a mais sobre as raízes da equação, além das que elas mesmas fornecem. Para se decompor o polinômio associado a uma equação polinomial, através do Dispositivo de Briott-Rufini; aplicar o Teorema da Decomposição e determinar as raízes dessa equação, também precisa-se conhecer uma de suas raízes. Decorre disso que, ou os exercícios propostos contêm uma informação necessária para resolver a equação com os métodos citados ou recaem em equações mais simples onde facilmente podem-se achar as raízes. Também foi visto que aplicar fórmulas por meio de radicais para determinar raízes de equações polinomiais, como se faz usualmente com as equações do segundo grau, não é possível para equações de grau maior que quatro. Tais fórmulas não existem. Mesmo para equações de grau três ou quatro, as fórmulas disponíveis são complicadas, exigindo transformações prévias das equações, uso de trigonometria e ou números complexos. Já os métodos de aproximações sucessivas são métodos mais práticos para determinar aproximações para as raízes. Porém, por várias razões, o ensino de equações algébricas acaba sendo restringido às equações de primeiro e segundos graus.

Por outro lado, debate-se há alguns anos a necessidade da utilização de problemas ligados à realidade do aluno e o uso de tecnologias para motivar o ensino da Matemática.

Ora, a teoria de equações algébricas explorada neste estudo, utilizando-se métodos de aproximações sucessivas, proporciona ferramentas suficientes para o emprego de problemas contextualizados, o uso de calculadoras, planilhas eletrônicas ou programas que traçam gráficos. Enfim, espera-se que este trabalho motive a exploração desta teoria no Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo, Blucher, 1996.

CARNEIRO, José Paulo Q. Equações algébricas de grau maior que dois: assunto para o ensino médio?**Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 40, p. 15 – 22, 1º semestre de 1994.

DANTE, Luiz; **Matemática Dante**. 1ª ed. São Paulo, Editora Ática, 2008.

FANTIN, Silas. Um passeio histórico pelas resoluções de equações algébricas de graus 2 e 3. **Revista Eletrônica do Vestibular UERJ,** Rio de Janeiro, v. 2, n. 4,2009. Disponível em: <http://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo.php?seq_artigo=8>. Acesso em 19 fev. 2018.

FIGUEIREDO, D.G. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: L.T.C., 1996.

FREEMAN, Larry. **Prova de Impossibilidade de Abel**. 01 Out. 2008. Disponível em :<http://fermatslasttheorem.blogspot.com.ar/2008/10/abels-impossibility-proof.html>. Acesso em 30 Out. 2017.

FREEMAN, Larry. **Teorema de Cauchy nas permutações de uma função**. 02 Ago. 2008. Disponível em :<http://fermatslasttheorem.blogspot.com.br/2008/08/cauchys-theorem-on-permutations-of.html>. Acesso em 30 Out. 2017.

GOLDSTINE, H.H. **A history of numerical analysis from the 16^{th} Century trough the 19^{th} Century.** New York: Springer-Verlag, 1977.

GUIDORIZZI, H.L. **Um curso de cálculo – v. 1.** 5. ed. Rio de Janeiro: LCT Editora, 2001.

HAMILTON, William Rowan. **"On the Argument of Abel":** Transactions of the RoyalIrishAcademy. 18. ed. Ireland: Royal Irish, 1839.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, M.L.Torres. **Polinômios e Equações Algébricas**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

IEZZI, Gelson. Et al. **Matemática:** ciências e aplicações Volume 3. 2. ed. Rio de Janeiro: Atual, 2013.

LIMA, E. Lages. A equação do terceiro grau.**Revista Matemática Universitária,** Rio de Janeiro, n. 5, p. 09-23, 1987.

LIMA, E. Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 1**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 3**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. Lages. et al. **Temas e Problemas Elementares – Coleção Profmat**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NOVAES, Gilmar Pires. O Método da Falsa Posição no Ensino de Equações Algébricas.**Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 95, p. 37, 2018.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva Volume 3**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PESIC, Peter.**Abel's Proof:** An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability. 1. ed. Massachusetts: MIT Press, 2004.

PFUTZENREUTER, Elvys. **Equações do quinto grau:** portais para outra dimensão. [2015]. Disponível em:<https://epxx.co/artigos/quinticas.html>. Acesso em: 02 nov. 2017.

PIAGET, Jean. **Epistemologia Genética**. São Paulo: Editora Vozes, 1978.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SATUF, Francisco O Método da Bissecção. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 36, p. 39 – 49, junho de 2004.

SHINE, Carlos. **21 Aulas de Matemática Olímpica.**1. ed. Rio de Janeiro:SBM, 2009.