



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO VALDEMIR PEREIRA JUNIOR

UMA ABORDAGEM SOBRE A TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

FORTALEZA

2018

ANTONIO VALDEMIR PEREIRA JUNIOR

UMA ABORDAGEM SOBRE A TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- P489a Pereira Junior, Antonio Valdemir.
Uma abordagem sobre a Teoria dos grafos no Ensino Médio / Antonio Valdemir Pereira Junior. – 2018.
56 f. : il.
- Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.
1. Grafo. 2. Caminho. 3. GPS. 4. Algoritmo. 5. Ensino de Matemática. I. Título.

CDD 372

ANTONIO VALDEMIR PEREIRA JUNIOR

UMA ABORDAGEM SOBRE A TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

Aprovada em: __/__/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Interno)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Tiago Caula Ribeiro (Externo à instituição)
Universidade Estadual de Ceará (UECE)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Marcos Ferreira de Melo, por sua orientação e excelente sugestão sobre o tema que foi desenvolvido neste trabalho.

Aos meus familiares, em especial, meus pais e minha esposa, que compreenderam minhas ausências e, mesmo distantes, estiveram tão presentes.

Aos meus amigos de trabalho, em especial, Jéssica, Simone, Bruno, Wanderlúcia, Camila e Ivonilce, pelas palavras de encorajamento e apoio.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo sugerir uma abordagem sobre o ensino de grafos no ensino médio, especialmente para turmas do segundo ano, tendo em vista a facilidade que os alunos apresentam para manusear instrumentos tecnológicos atualmente; despertar o interesse no aluno pela matemática a partir de determinados aplicativos de navegação terrestre, considerando que isso o instiga a verificar a matemática intrínseca em outros aplicativos; induzir a problematização para facilitar a aprendizagem desse conteúdo por parte dos discentes. Para tanto, foi utilizada como método para coleta de dados, a pesquisa bibliográfica, por meio do estudo apurado no referencial teórico sobre a abordagem de grafos no ensino médio e o estudo de caso, utilizando como instrumentos de coleta de dados alguns exercícios e experimentos disponibilizados no projeto, que foram aplicados na EEFM Professor Edmilson Guimarães de Almeida. A partir da análise de dados foi possível constatar a relevância de oportunizar aos alunos o acesso às tecnologias, visto que as características do Matrixcal e do aplicativo de navegação terrestre foram citadas por eles como um dos mais importantes instrumentos para facilitar a obtenção de resultados que, se calculados manualmente, demandariam muito esforço e tempo. O material tecnológico da escola, como o laboratório de informática apresentou-se como um grande desafio na execução de algumas tarefas. Enfim, baseado no estudo realizado e nos resultados obtidos foi possível confirmar que o estudo sobre grafos pode suscitar o desenvolvimento de algumas habilidades que, por vezes, estão inertes nos alunos, como capacidade de inovação, recriação a partir do conhecido, adaptabilidade ao novo, criatividade, autonomia e comunicação.

Palavras-chave: Grafo. Caminho. GPS. Algoritmo. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The current work purposes to suggest an approach in teaching Graphs in a High School, especially in second year classes, in view the easiness of the students handle technological instruments nowadays; stimulate interests in Mathematics from certain terrestrial applications, considering that instigates them to see intrinsic mathematics in other applications; to persuade the problematization to facilitate the understanding of this content for the students. It was used for this purpose a method for collecting data, the bibliographical research, through the study verified in the theoretical reference in approach to graphs in High School and case report by means of data collection instruments some exercises and experiments available in this project that were applied at EEFM Professor Edmilson Guimarães de Almeida. From the data analysis it was possible to find the relevance in creating opportunities for the students access to technologies, whereas characteristics of Matrixcal and the terrestrial navigation application were mentioned by the students as the most important instruments to facilitate gain of the results if manually calculated would require a lot of effort and time. The material technological of the school as the computer lab came up with a challenge in the enforcement of some tasks. In conclusion, based on the study carried out and the result obtained it was possible to ratify that the study of Graphs can evoke the development of some abilities which are inactive in the students, such as innovation capacity, recreation from familiar for them, adjustability, creativity, self-sufficiency and communication.

Key Words: Graphs. Way. GPS. Algorithm. Mathematics Teaching.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	08
2	A ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	11
2.1	Teoria dos grafos.....	13
2.2	Definição de grafo.....	15
2.3	Classificação dos grafos	16
2.4	Matriz de adjacência	19
2.5	Algoritmo de Dijkstra.....	21
2.6	Teorema de Euler.....	31
3	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	34
3.1	GPS (Global Positioning System).....	35
4	PROJETO – A TEORIA DOS GRAFOS INTRÍNSECA DOS APLICATIVOS DE NAVEGAÇÃO TERRESTRE.....	39
4.1	História	39
4.2	Grafos nas redes sociais	39
4.3	Objetivos do projeto	41
4.4	Justificativa	41
4.5	Metodologia.....	41
4.6	Exercícios e experimentos	42
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	54
	REFERÊNCIAS	55

1 INTRODUÇÃO

A análise combinatória presente nos livros do ensino médio possui várias ferramentas e métodos que resolvem os mais variados tipos de problemas de contagem. Entretanto, existem outras possibilidades para tais resoluções que não são contempladas nesses materiais. Um exemplo disso é a poderosa ferramenta que está ligada à análise combinatória: a teoria dos grafos. Não raro, observamos questões na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e problemas típicos do cotidiano do aluno que, se o mesmo estivesse de posse do conhecimento dessa teoria, as resoluções de tais questões ou problemas seriam mais fáceis e isso contribuiria para que ele compreendesse de forma mais ampla o mundo em que está inserido. Este trabalho é voltado para a teoria dos grafos, uma área da Matemática pouco abordada no ensino médio.

Existem situações que oferecem bastante dificuldade para a criação de uma modelagem matemática ou são bastante complexas e, muitas vezes, não temos os elementos para fazer uma representação adequada de tais situações. A teoria dos grafos trata da simplificação dessas situações em um esquema. Ela vem sendo estudada há mais de 280 anos e hoje tem ajudado a desenvolver novas tecnologias, como os sistemas de navegação por meio de aplicativos, por exemplo. Outro ponto a ser considerado é a importante relação entre os grafos e as redes sociais.

Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 42) indicam que “[...] à medida que surgem novos conhecimentos e novas aplicações da Matemática, têm surgido pesquisas sobre como estes poderiam ser ensinados e/ou aprendidos na escola”. Assim, considerando que a teoria dos grafos é um conhecimento matemático contemporâneo, viemos, por meio deste trabalho, sugerir a inserção desse conteúdo no ensino médio, de forma a possibilitar ao aluno novas formas de compreender a problematização do mundo que os cerca.

Segundo Braicovich (2013), os grafos são atrativos, pois podem ser estudados a partir de situações muito motivadoras para os alunos. Assim, propomos diversas situações-problema presentes no cotidiano dos discentes, em que, com o auxílio da teoria dos grafos, eles estarão muito mais preparados e apresentarão uma postura adequada, fazendo modelagens sem muitas dificuldades. Assim, é possível que encontrem motivação suficiente para dar sequência ao estudo dessa teoria.

As mídias, como computador, internet e celular, por exemplo, serão de fundamental importância para o desenvolvimento e aplicação do presente trabalho perante os alunos.

Borba e Penteado (2001) argumentam que

o acesso à informática na educação deve ser visto não apenas como um direito, mas como parte de um projeto coletivo que prevê a democratização de acessos a tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade. É dessas duas formas que a informática na educação deve ser justificada: alfabetização tecnológica e direito ao acesso. (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 17).

Costa e Oliveira (2012) afirmam que os estudantes são “[...] dotados de grandes competências digitais e têm uma elevada motivação para a utilização das tecnologias que pode e deve ser aproveitada pelos professores [...]”. Assim, esse contexto apresenta-se oportuno para que o professor motive seus alunos estabelecendo relações entre as redes sociais e os grafos, tendo em vista que tais redes podem ser modeladas por estes elementos. Ademais, a utilização frequente, por parte desses alunos, do aplicativo de navegação terrestre contribui para a contextualização da abordagem da teoria dos grafos. A facilidade que os jovens, em sua maioria, apresentam para o manuseio de mídias como o computador e celulares, por exemplo, nos instiga a propor ao aluno enxergar a matemática intrínseca em aplicativos de uso corriqueiro entre eles, como o caso dos aplicativos de navegação terrestre, especificamente o aplicativo MAPS: GPS e transporte público, por sua base de desenvolvimento estar relacionada à teoria dos grafos, mais especificamente ao algoritmo de Dijkstra.

Segundo Mercado (1998),

a sociedade atual passa por profundas mudanças caracterizadas por uma profunda valorização da informação. Na chamada Sociedade da Informação, processos de aquisição do conhecimento assumem um papel de destaque e passam a exigir um profissional crítico, criativo, com capacidade de pensar, de aprender a aprender, de trabalhar em grupo e de se conhecer como indivíduo. Cabe à educação formar esse profissional e para isso, esta não se sustenta apenas na instrução que o professor passa ao aluno, mas na construção do conhecimento pelo aluno e no desenvolvimento de novas competências, como: capacidade de inovar, criar o novo a partir do conhecido, adaptabilidade ao novo, criatividade, autonomia, comunicação. É função da escola, hoje, preparar os alunos para pensar, resolver problemas e responder rapidamente às mudanças contínuas”. (MERCADO, 1998, p.)

Visto que as características citadas anteriormente podem ser desenvolvidas com o estudo da teoria dos grafos é que se dá a importância do presente trabalho. Nesse sentido,

pretende-se propor ao aluno uma abordagem matemática, especificamente, a teoria dos grafos, inerente à construção de um determinado aplicativo (MAPS), de modo que seja possível despertar nele, senão todas em sua completude, pelo menos as bases para o desenvolvimento das qualidades citadas.

Para o desenvolvimento do presente trabalho foram utilizadas pesquisas bibliográficas, além de estudo de caso. A pesquisa bibliográfica baseou-se em publicações de dissertações, artigos e livros da área de educação. O estudo de caso foi desenvolvido, em sua totalidade, por meio de aplicação de projeto na Escola de Ensino Fundamental e Médio Professor Edmilson Guimarães de Almeida, localizada no estado do Ceará, município de Fortaleza, com as turmas de segundo ano do ensino médio.

Este trabalho estrutura-se em quatro capítulos, apresentando-se no primeiro uma introdução, onde podemos verificar algumas justificativas para o presente trabalho. No segundo capítulo, observa-se uma breve discussão sobre as ferramentas da análise combinatória em nível de ensino médio, a história e definição acerca da teoria dos grafos, sua evolução e importância; esse capítulo também apresenta a base de funcionamento dos aplicativos de navegação terrestre, algoritmo de Dijkstra, à medida que é proposto calcular a menor rota entre dois pontos distintos de uma localidade qualquer. No terceiro capítulo são apresentadas algumas definições de modelagem matemática, além disso, aborda-se a história do GPS, ferramenta indispensável para o funcionamento dos aplicativos de navegação terrestre, destacando origem, conceitos e comprovando a importância do mesmo para o mundo contemporâneo, além de descrever alguns recursos básicos para seu pleno funcionamento, como o posicionamento de satélites, por exemplo. O quarto capítulo caracteriza o estudo de caso, onde se descreve a abordagem da teoria em questão, a metodologia utilizada pelo professor, a coleta dos resultados e, por fim, a avaliação; nesse capítulo também são apresentados diversos itens obtidos a partir do projeto, como respostas dos alunos às atividades preliminares, interesse demonstrado por eles e resultados das avaliações acerca do conteúdo apresentado, todos desenvolvidos na EEFM Professor Edmilson Guimarães de Almeida, com o objetivo de responder o problema apresentado anteriormente.

2 A ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória, em nível de ensino médio, aborda vários problemas de contagem e proporciona ao estudante várias ferramentas para a obtenção exata do resultado. Por meio da árvore das possibilidades, por exemplo, é possível, quando conveniente, exibir todos os resultados dessa contagem, um a um. Segundo Cataldo (2013), “a análise combinatória é uma consequência do desenvolvimento de métodos que permitem contar, de forma indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições”.

A importância da análise combinatória em problemas de enumeração tem crescido enormemente nas últimas décadas. Com a explosão tecnológica, devida principalmente ao uso do computador como ferramenta capaz de fazer cálculos maciços em pouco tempo, essa área da Matemática pôde avançar com o auxílio de ferramentas que antes da invenção do computador não eram tão utilizadas, pois o tempo de resolução de problemas que requeriam essas novas ferramentas era demasiado, tornando descabível se debruçar em soluções que requeriam cálculos que demorariam muito tempo. Em particular, a teoria dos grafos produz ferramentas, como a determinação da quantidade de caminhos eulerianos entre dois pontos distintos de um grafo, que é determinado pela potência de sua matriz de adjacência, assim como, com o algoritmo de Dijkstra é possível determinar e apresentar o caminho mínimo entre esses dois pontos distintos do grafo.

A principal ferramenta da análise combinatória, em nível de ensino médio, é o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). De acordo com esse princípio, se um evento é composto por duas ou mais etapas sucessivas e independentes, então o número de combinações será determinado pelo produto das possibilidades de cada etapa. Também temos o Princípio Aditivo que nos diz que dados dois conjuntos A e B, não vazios e disjuntos, a união do número de elementos é dada por:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$, onde

$N(A \cup B)$ é o número de elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B;

$N(A)$ o número de elementos que pertencem ao conjunto A;

$N(B)$ o número de elementos que pertencem ao conjunto B.

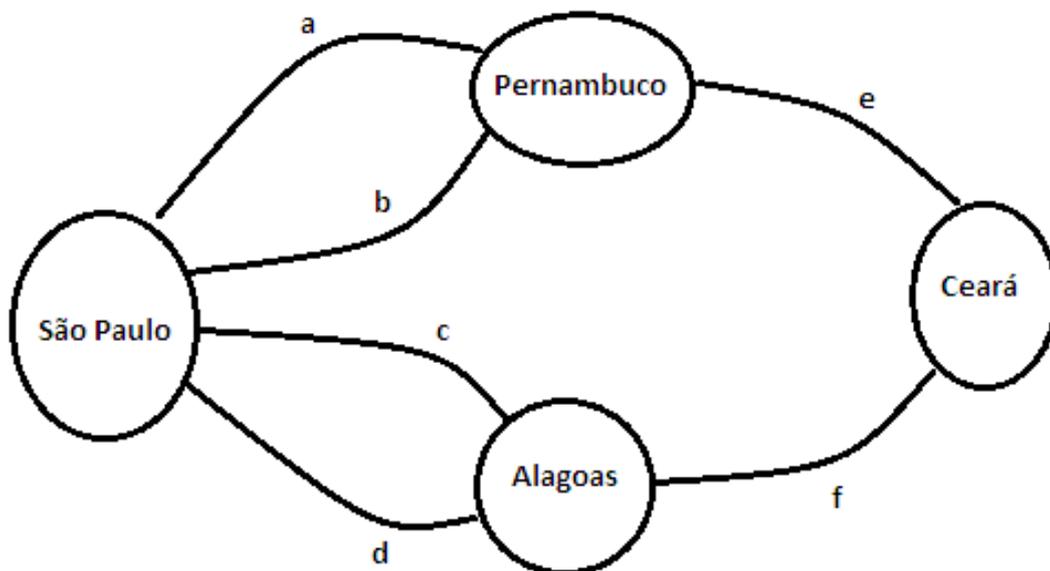
A seguir, temos um exemplo da utilização dessas ferramentas.

Exemplo 1: Pedro reside em São Paulo e pretende, nas férias, viajar para seu estado natal, Ceará. Ele pretende viajar de avião, mas no momento da compra de sua passagem descobriu que não havia voos que ligassem diretamente São Paulo ao Ceará. Os

voos disponíveis sairiam de São Paulo, fariam uma escala em Pernambuco ou Alagoas e depois seguiriam para o Ceará. Pedro também soube que existiam duas rotas distintas entre São Paulo e Pernambuco, mais duas distintas entre São Paulo e Alagoas, uma única rota entre Pernambuco e Ceará e também uma única rota entre Alagoas e o Ceará. Quantos e quais são os percursos que o avião que Pedro embarcou pode fazer para concluir a viagem de São Paulo ao Ceará?

Para a solução desse problema, seja o esquema da figura a seguir, onde as rotas entre as localidades estão representadas pelas letras minúsculas a, b, c, d, e, f.

Figura 1 – Possíveis rotas entre São Paulo e Ceará¹



Pelo esquema, podemos representar todos os percursos da seguinte forma:

Percurso 1: (a,e);

Percurso 2: (b,e);

Percurso 3: (c,f);

Percurso 4: (d,f).

Totalizando, a partir do exposto, quatro percursos distintos.

Utilizando o PFC, percebemos que basta encontrar quais são as possibilidades de cada etapa e multiplicá-las. Assim, se o caminho do avião de Pedro inclui passar por Pernambuco, então para essa primeira etapa há duas possibilidades. Chegando nessa localidade, ele tem, para a segunda etapa, uma única possibilidade de rota. Logo, multiplicando as quantidades de possibilidades de cada etapa, temos $2 \times 1 = 2$ percursos

¹As figuras 1, 3 a 17 e 23 a 36 foram elaboradas pelo autor.

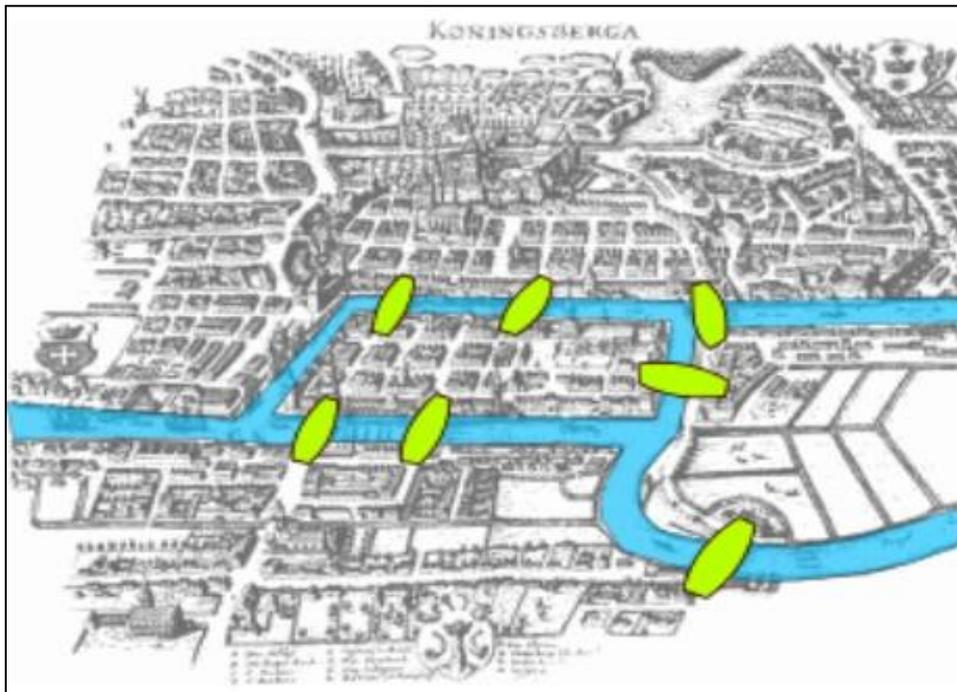
distintos entre São Paulo e Ceará. De forma análoga, encontraremos mais dois percursos distintos entre São Paulo e Ceará caso a rota inclua Alagoas, totalizando, pelo Princípio Aditivo, quatro percursos distintos.

O conhecimento de outras ferramentas, como as fórmulas de permutação, arranjos e combinações simples é de fundamental importância para o desenvolvimento da análise combinatória em nível de ensino médio. Para o presente trabalho, o conhecimento do PFC e a representação de esquemas que demonstrem as soluções encontradas a partir deste, servirão de base para o entendimento da teoria apresentada aqui.

2.1 Teoria dos grafos

A ideia para o estudo dos grafos surgiu na cidade de Königsberg, na antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado, na atual Rússia. Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler, apenas de passagem pela cidade, fora chamado para ajudar na solução de um problema que os moradores daquele lugar haviam identificado, mas sem solução até àquele momento. O problema consistia em viabilizar um passeio pelas sete pontes que interligavam as partes da cidade. As pontes eram cortadas por vertentes do rio Pregel, formando, assim, uma ilha na parte central, como na seguinte figura:

Figura 2 – Croqui da cidade de Königsberg²

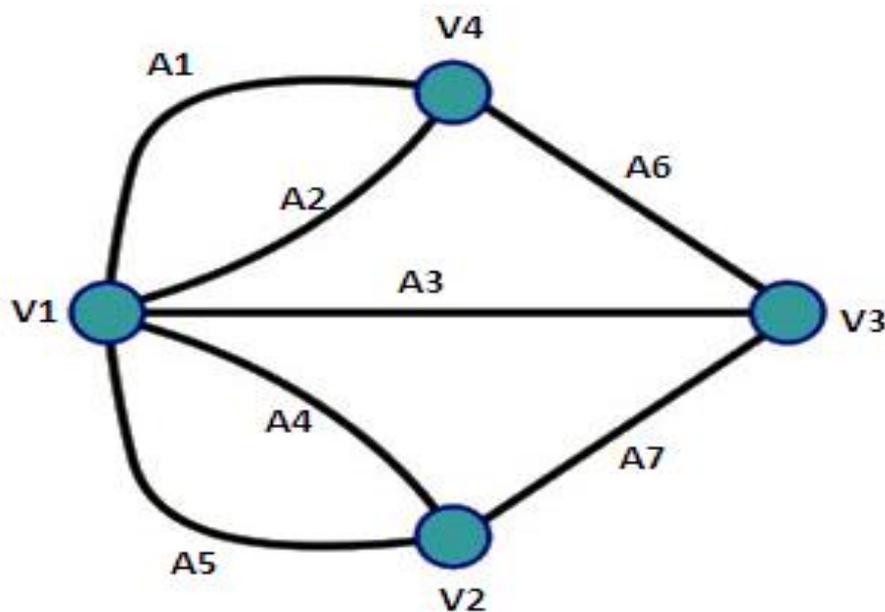


²Fonte: <https://goo.gl/fQRsKb>

O passeio deveria contemplar apenas uma única passagem por cada uma das sete pontes, de modo que, ao final, houvesse retorno para o ponto de partida. Leonhard Euler não só provou que esse problema não tinha solução, como, com sua ideia, deu início ao estudo da teoria dos grafos.

A solução dada por Euler consistia em representar o croqui da figura 2 no esquema a seguir.

Figura 3 – O grafo de Euler



Cada ponto do conjunto $\{V1, V2, V3, V4\}$ simboliza partes da cidade que estão ligadas pelas pontes, elementos do conjunto $\{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7\}$. Euler percebeu que não havia como passar por um ponto que tivesse um número ímpar de linhas ligadas a ele sem repetir uma das linhas ligadas a este ponto, pois se assim fosse, o passeio teria que, obrigatoriamente, visitar a última linha ligada a esse ponto e, no momento do retorno, obrigatoriamente, passaria por uma linha já visitada. O problema teria solução se, e somente se a quantidade de linhas ligadas a cada ponto fosse em número par. Daí, surgiu a ideia de grafos e se estabeleceu, por Euler, o primeiro teorema que será abordado posteriormente. Primeiramente, iremos definir grafos.

2.2 Definição de grafo

Um grafo é um par $G=(V,A)$, onde V é um conjunto de vértices e A é um conjunto de arestas. Na figura 3, os pontos $V1, V2, V3$ e $V4$ representam os vértices e as linhas $A1, A2, A3, A4, A5, A6$ e $A7$, as arestas. Já na figura 1, temos que as cidades são os vértices e as rotas a, b, c, d, e, f são as arestas.

No problema proposto a Euler, vimos que o passeio contava com a restrição de não passar duas vezes pela mesma ponte. A seguir, vamos definir o que são passeios, caminhos, trilhas e circuitos para mais adiante conceituarmos caminhos ou circuitos eulerianos.

Passeio: É uma sequência de vértices onde cada dois vértices consecutivos estão ligados por uma aresta, podendo haver repetição, tanto de vértices quanto de arestas.

Trilha: É um passeio onde não há repetição de arestas.

Trilha fechada: É uma trilha onde o ponto de partida coincide com o ponto de chegada.

Trilha não simples: É uma trilha onde pode haver repetição de vértices.

Trilha simples: É uma trilha onde não há repetição de vértices.

Caminho: É uma trilha simples.

Circuito: É um caminho que começa e termina no mesmo vértice. Simões Pereira (2009) estende o conceito de caminhos para permitir a repetição de vértices, desde que sejam apenas o primeiro e o último, destacando, assim, que circuitos podem ser chamados caminhos fechados.

No problema do passeio pelas pontes de Königsberg foram inseridas duas restrições:

- Não se pode passar pela mesma ponte mais de uma vez, o que se caracteriza como trilha;
- Ao final desse passeio tem-se que voltar ao ponto de partida, ou seja, uma trilha fechada.

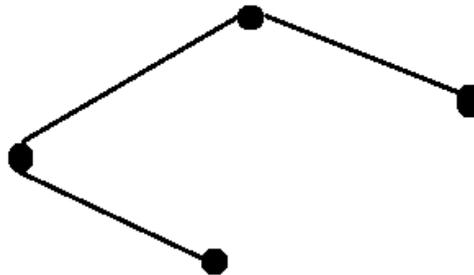
Nota-se, ainda, que há repetição de vértices, o que se caracteriza como uma trilha não simples. A esse tipo de passeio, onde devemos utilizar todas as arestas somente uma vez, deu-se o nome de **circuito euleriano**. Aos passeios com essas mesmas características sendo que não é preciso voltar ao ponto de partida, deu-se o nome de **caminho euleriano**. Como vimos na solução dada por Euler ao problema do passeio por Königsberg, o passeio só seria possível se a todos os vértices estivessem ligados um número par de arestas. Assim, faz-se necessária a definição de grau ou valência de um vértice.

Grau ou valência de um vértice é o número de arestas que nele concorrem. Diz-se que um vértice tem grau par se nele concorrem uma quantidade par de arestas e grau ímpar se nele concorre uma quantidade ímpar de arestas.

2.3 Classificação dos grafos

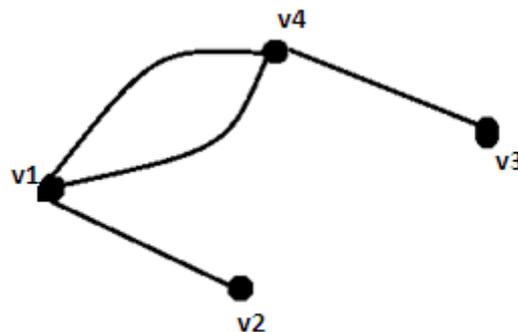
Grafo simples: É o grafo que não contém nem laço nem arestas paralelas. Exemplo:

Figura 4 - Grafo simples



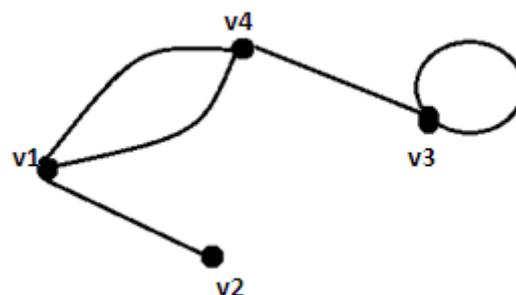
Multigrafo: É o grafo que contém pelo menos duas arestas paralelas, ou seja, arestas que partem de um ponto em comum e chegam noutro também em comum. Exemplo:

Figura 5 – Multigrafo



Pseudografo: É o grafo que contém pelo menos um laço, ou seja, uma aresta que parte de um vértice e chega nele próprio. Exemplo:

Figura 6 – Pseudografo

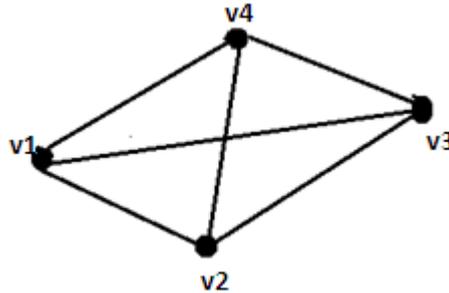


No grafo da figura 6, percebemos um laço em v_3 .

Grafo completo: É um grafo onde todos os vértices estão ligados por arestas entre si.

Exemplo:

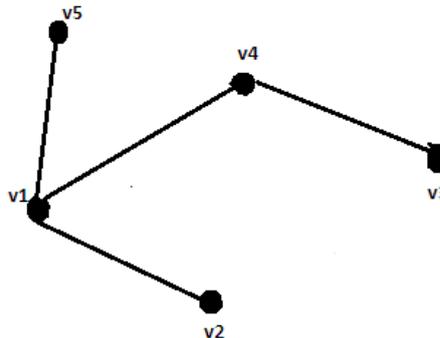
Figura 7– Grafo completo



No grafo da figura 7, percebemos que é possível, partindo de qualquer um dos vértices, chegar a outro sem precisar passar por um terceiro.

Grafo conexo: É um grafo onde há um caminho entre quaisquer dois vértices. Exemplo:

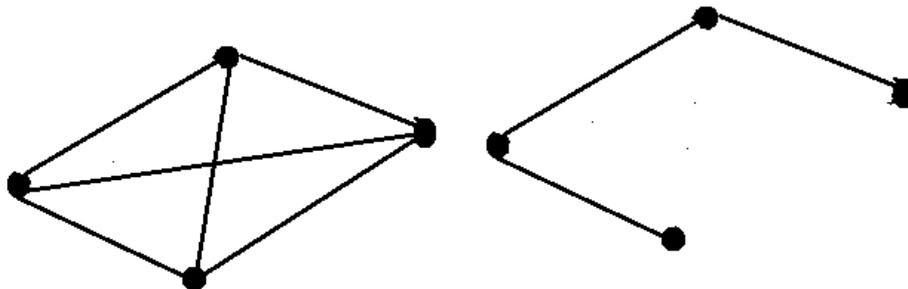
Figura 8 – Grafo conexo



No grafo da figura 8, percebemos que, por exemplo, há um caminho entre v_3 e v_5 . Basta sair de v_3 , passar por v_4 e v_1 e em seguida ir para v_5 .

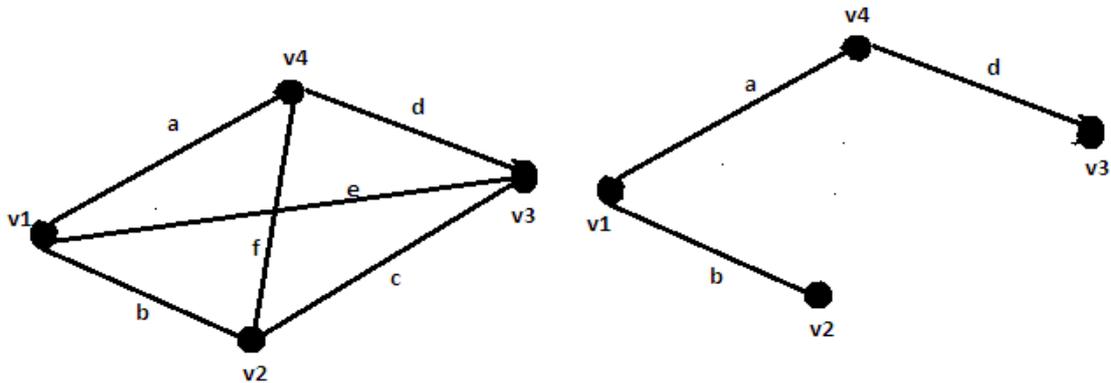
Grafo desconexo: É um grafo composto por duas ou mais componentes. Cada componente forma um grafo conexo e não há arestas que as conectem. Exemplo:

Figura 9– Grafo desconexo



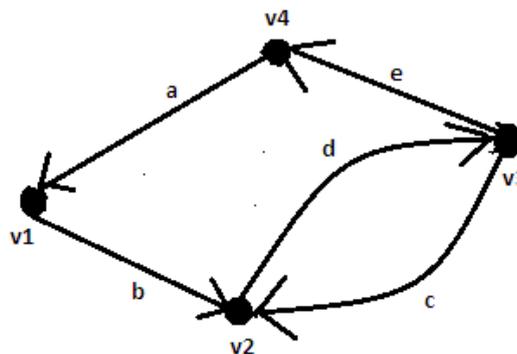
Subgrafo: Um grafo $G_2(V_2, E_2)$ é um subgrafo de um grafo $G_1(V_1, E_1)$ se V_2 é subconjunto de V_1 e E_2 é subconjunto de E_1 . Exemplo:

Figura 10 – Subgrafo: grafo G (à esquerda) e grafo H (à direita)



Grafo direcionado ou digrafo: Quando o sentido de orientação das arestas interfere na utilização de um grafo, dizemos que se trata de um grafo direcionado ou digrafo. Uma aresta que chega a um vértice é dita convergente a ele e uma aresta que sai de um vértice é dita divergente. O total de arestas divergentes é chamado grau de saída e o total de arestas convergentes é dito grau de entrada. Exemplo:

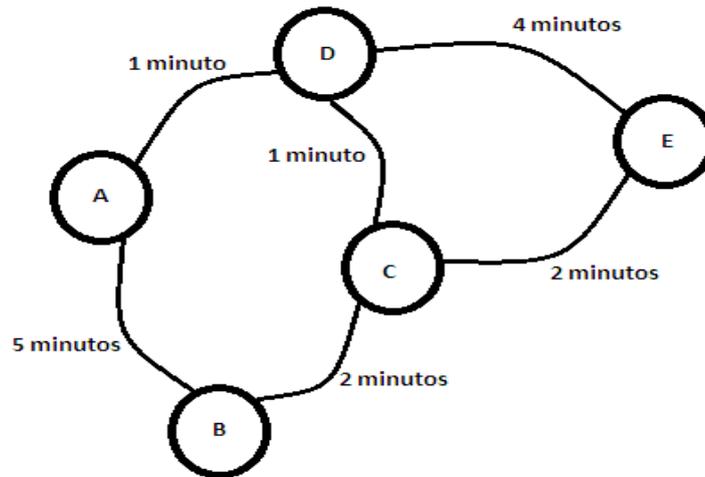
Figura 11– Grafo direcionado ou digrafo



No grafo da figura 11, vemos que os graus de saída e entrada são ambos iguais a cinco.

Grafo ponderado: É quando suas arestas possuem um peso. Esse peso pode ser dado por somente uma variável, como distância, por exemplo, ou por mais de uma variável, como distância, conforto e tempo. Exemplo:

Figura 12– Grafo ponderado



Pelo grafo da figura 12, vemos que um caminho de A até B é menos custoso se, primeiramente, formos para D, seguir para C, para depois chegar em B. Também seria menos demorado ir de D até E, passando, primeiramente, por C, para depois seguir para E.

Algumas perguntas são relevantes, tendo em vista as definições mencionadas. Considerando que nos grafos não ponderados podemos dar peso igual a um para todas as suas arestas, e ainda com a definição de que um caminho entre dois vértices tem tamanho k real não negativo, onde k representa a soma dos pesos de todas as arestas desse caminho, qual a quantidade de caminhos de tamanho k inteiro não negativo entre dois vértices quaisquer desse grafo? Note que essa última pergunta faz jus ao PFC, pois há um problema de contagem e enumeração. A resposta à primeira pergunta será dada com o auxílio de uma ferramenta da teoria dos grafos, a matriz de adjacência relacionada a um grafo, que iremos definir a seguir.

2.4 Matriz de adjacência

Dado um grafo G com n vértices, podemos representá-lo em uma matriz $n \times n$ $A = [a_{ij}]$. A definição precisa das entradas da matriz varia de acordo com as propriedades do grafo que se deseja representar, porém, de forma geral, o valor a_{ij} guarda informações sobre como os vértices v_i e v_j estão relacionados, isto é, informações sobre a adjacência de v_i e v_j . Para representar um grafo não direcionado, simples e sem pesos nas arestas, basta que as entradas a_{ij} da matriz A contenham 1, se v_i e v_j são adjacentes, e 0 caso contrário. Se as arestas do grafo tiverem pesos, a_{ij} pode conter, em vez de 1 quando houver uma aresta entre v_i e v_j , o peso dessa mesma aresta. A seguir, representaremos as matrizes de adjacência A e B dos grafos das figuras 3 e 12, que são grafos, respectivamente, não ponderado e direcionado.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Um resultado importante relacionado à matriz de adjacência de um grafo é apresentado a seguir.

Proposição: Se A é a matriz de adjacência de um grafo G com conjunto de vértices dado por $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, então, a entrada (i,j) de A_k , com $k \geq 1$, corresponde ao número de caminhos (distintos) de comprimento k existentes entre os vértices v_i e v_j .

Vejam um exemplo em que poderemos usar o resultado a partir do grafo da figura 3, que tem a matriz de adjacência, como visto antes, dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando $C = A^2$, obtemos

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix} = C.$$

Observando a matriz C , vemos, por exemplo, que o elemento c_{12} é igual a um. Assim, temos que a quantidade de caminhos de tamanho dois, que utiliza duas arestas distintas, entre os vértices V_1 e V_2 é um. A saber, esse único caminho é (A_3, A_7) . Novamente, analisando a matriz C , notamos que o elemento c_{23} é igual a dois. Assim, a quantidade de caminhos de tamanho dois entre os vértices V_2 e V_3 é dois. A saber, os caminhos (A_5, A_3) e (A_4, A_3) . Como o grafo desse exemplo não é direcionado, admite-se que cada aresta assume dois caminhos entre os vértices aos quais ela tem ligação. Assim, podemos concluir, por exemplo, que entre os vértices V_1 e V_1 há nove caminhos de tamanho dois, pois, por exemplo, saindo de V_1 a V_2 usamos a aresta A_4 e para voltar usamos a mesma aresta, dado que ela tem sentido duplo, ida e volta, já que esta não é direcionada.

Ainda observando a matriz C , vemos que o elemento c_{33} é igual a três. Assim, temos que a quantidade de caminhos de tamanho dois entre os vértices $V3$ e $V3$ é igual a três. A saber, os caminhos $(A7, A7)$, $(A3, A3)$ e $(A6, A6)$.

É importante ressaltar que dependendo da quantidade de vértices de um grafo, sua representação em uma matriz de adjacência e principalmente o cálculo das potências dessa matriz serão de elevado custo se efetuados pelos alunos sem o auxílio de uma ferramenta que pormenorize esses cálculos. Assim, neste trabalho, sugerimos aos alunos que utilizem a ferramenta disponível no site <https://matrixcalc.org/pt/>.

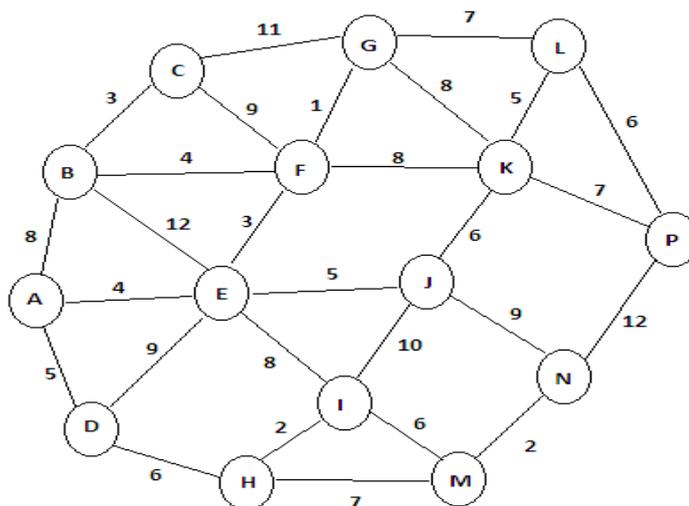
Retomando as definições relacionadas à classificação dos grafos, apresentadas no início desse capítulo, é imprescindível o seguinte questionamento. Em um grafo ponderado, com os valores dados às arestas sendo valores inteiros não negativos, qual o menor caminho entre dois vértices distintos? A resposta para essa pergunta será dada com o auxílio de um algoritmo, o algoritmo de Dijkstra, que definiremos a seguir.

2.5 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo considera um conjunto S de menores caminhos, iniciado com um vértice inicial I . A cada passo do algoritmo busca-se nas adjacências dos vértices pertencentes a S aquele vértice com menor distância relativa a I e adiciona-o a S e, então, repetindo os passos até que todos os vértices alcançáveis por I estejam em S . Arestas que ligam vértices já pertencentes a S são desconsideradas.

Vejamus um exemplo onde podemos aplicar e compreender melhor esse algoritmo. Seja o grafo a seguir, em que se pretende sair do vértice A e encontrar o menor caminho ao vértice P e descrever, vértice a vértice, tal caminho.

Figura 13 – Grafo ponderado



A coleta de dados feita com o algoritmo irá alimentar a seguinte tabela³, a qual, no final do processo, poderá gerar importantes conclusões.

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		
J		
K		
L		
M		
N		
P		

Ao calcularmos as distâncias entre nosso vértice inicial A até outro vértice, estaremos fazendo isso de modo temporal, assinalando essa distância na coluna TEMPORAL de nossa tabela. Quando essa distância for mínima, deverá ser assinalada também na coluna FINAL de nossa tabela. Iniciando nosso caminho pelo vértice A, vemos que sua distância a si próprio é 0, logo, temos a seguinte configuração:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		
J		

³ Todas as tabelas foram elaboradas pelo autor.

K		
L		
M		
N		
P		

Estando no vértice A, temos três opções de arestas. Podemos ir de A até B, ou de A até D ou de A até E. Assim, temos a seguinte configuração:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B		8
C		
D		5
E		4
F		
G		
H		
I		
J		
K		
L		
M		
N		
P		

Observando a coluna TEMPORAL, vemos que o menor valor é 4, que está relacionado ao vértice E. Assim, analisaremos esse vértice, o qual dispõe de cinco opções de arestas, B, D, F, I e J. Constatamos que 16 é a soma do valor da aresta de A até E com o valor da aresta de E até B, valor maior do que 8, por isso não o colocaremos na tabela. Analogamente, o mesmo raciocínio para o valor 13, que é a soma da aresta de A até E com o valor da aresta de E até D. Assim, temos a seguinte configuração para nossa tabela:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B		8
C		
D		5
E		4

F		7
G		
H		
I		12
J		9
K		
L		
M		
N		
P		

À medida que formos avançando em nossas análises, vértices que já foram analisados terão seu valor na coluna TEMPORAL repetido na coluna FINAL. Assim, nosso próximo passo, no algoritmo, é procurar, nessa coluna, o menor valor que ainda não repetimos na coluna FINAL. Portanto, o próximo vértice a ser analisado será o vértice D, para o qual há apenas uma opção, o vértice H, pois, pela definição, vértices já visitados não precisam ser analisados novamente. Assim, temos a nova configuração:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B		8
C		
D		5
E	4	4
F		7
G		
H		11
I		12
J		9
K		
L		
M		
N		
P		

Nossa próxima análise será feita no vértice F, pois entre os valores da coluna TEMPORAL que não foram reescritos na coluna FINAL, ele é o menor. Estando em F, temos quatro opções, B, C, G e K. Vemos que 11 é a soma do valor da aresta de A até E com o valor

da aresta de E até F mais o valor da aresta de F até B, valor maior do que 8, por isso não o colocaremos na tabela. Assim, temos a nova tabela:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B		8
C		16
D	5	5
E	4	4
F		7
G		8
H		11
I		12
J		9
K		15
L		
M		
N		
P		

Nossa próxima análise será feita nos vértices B e G, pois entre os valores da coluna TEMPORAL que não foram reescritos na coluna FINAL, eles são os menores. Estando em B, temos apenas uma opção, C. Vemos que, acumuladamente, temos o valor $11 < 16$, logo, substituiremos esse valor na coluna TEMPORAL, produzindo a nova configuração:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B		8
C		11
D	5	5
E	4	4
F	7	7
G		8
H		11
I		12
J		9
K		15
L		
M		

N		
P		

Estando em G, temos duas opções, L e K. Note que, de G até K, acumuladamente, temos o valor $16 > 15$, logo, não o substituiremos na tabela. Assim, temos a nova configuração:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B	8	8
C		11
D	5	5
E	4	4
F	7	7
G		8
H		11
I		12
J		9
K		15
L		15
M		
N		
P		

Nossa próxima análise será feita no vértice J, pois, entre os valores da coluna TEMPORAL que não foram reescritos na coluna FINAL, ele é o menor. Estando em J, temos três opções: I, K e N. Observe que, de J até I, acumuladamente, temos o valor $20 > 12$, logo, não o substituiremos na tabela. De J até K, acumuladamente, percebemos o mesmo valor 15. Assim, temos a nova tabela:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B	8	8
C		11
D	5	5
E	4	4
F	7	7
G	8	8
H		11

I		12
J	9	9
K		15
L		15
M		
N		18
P		

Nossa próxima análise será feita nos vértices C e H, pois entre os valores da coluna TEMPORAL que não foram reescritos na coluna FINAL, eles são os menores. Estando em C, não há análise a ser feita, pois os vértices que estão ligados a este, já foram analisados, basta observar na coluna TEMPORAL que os vértices B, F e G têm valores de cor vermelha. Estando em H, temos duas opções, I e M. De H até I temos, acumuladamente, o valor $13 > 12$, logo, não o substituiremos na tabela. Assim, temos a nova tabela:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B	8	8
C	11	11
D	5	5
E	4	4
F	7	7
G	8	8
H	11	11
I		12
J	9	9
K		15
L		15
M		18
N		18
P		

Nossa próxima análise será feita no vértice I, pois, entre os valores da coluna TEMPORAL que não foram reescritos na coluna FINAL, ele é o menor. Estando em I, há apenas uma opção, M. De I até M, acumuladamente, temos o valor 18. Assim, temos a nova tabela:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B	8	8
C	11	11
D	5	5
E	4	4
F	7	7
G	8	8
H	11	11
I	12	12
J	9	9
K		15
L		15
M		18
N		18
P		

Nossa próxima análise será feita nos vértices K e L, pois entre os valores da coluna TEMPORAL que não foram reescritos na coluna FINAL, eles são os menores. Estando em K, temos duas opções, L e P. De K até L, acumuladamente, temos $20 > 15$, logo, não o substituiremos na tabela. De K até P, acumuladamente, temos 22. Estando em L, temos duas opções, K e P. De L até K, acumuladamente, temos $20 > 15$, logo, não o substituiremos na tabela. De L até P, acumuladamente, temos $21 > 22$. Assim, temos a nova tabela:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B	8	8
C	11	11
D	5	5
E	4	4
F	7	7
G	8	8
H	11	11
I	12	12
J	9	9
K	15	15
L	15	15
M		18
N		18

P		21
---	--	----

Nossa próxima análise será feita nos vértices M e N, pois entre os valores da coluna TEMPORAL que não foram reescritos na coluna FINAL, eles são os menores. Estando em M, temos apenas uma opção, N. De M até N, acumuladamente, temos $20 > 18$, logo, não o substituiremos na tabela. Estando em N, temos apenas uma opção, P. De N até P, acumuladamente, temos $30 > 21$. Assim, temos a tabela completa:

VÉRTICE	FINAL	TEMPORAL
A	0	0
B	8	8
C	11	11
D	5	5
E	4	4
F	7	7
G	8	8
H	11	11
I	12	12
J	9	9
K	15	15
L	15	15
M	18	18
N	18	18
P	21	21

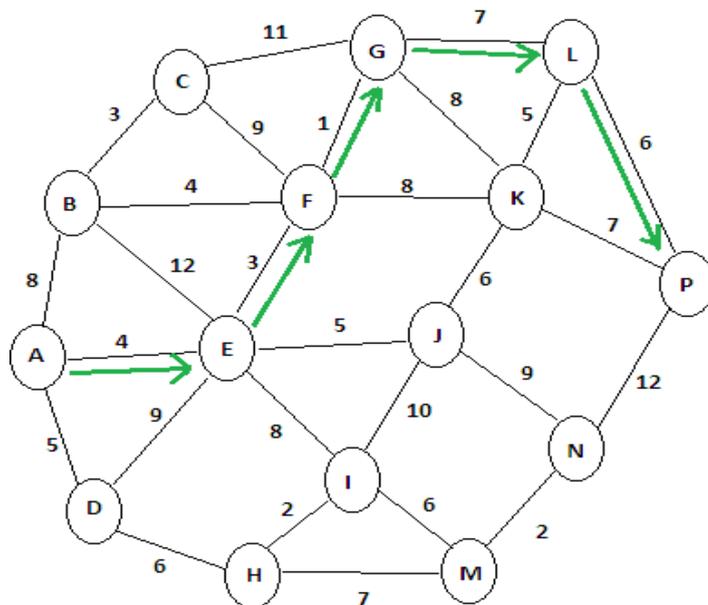
Portanto, pela tabela, a resposta para nossa pergunta é 21. Mas ainda precisamos encontrar qual caminho corresponde a esse valor. Para tanto, basta proceder da seguinte maneira. Faremos um caminho contrário, partindo de P até chegar em A. Estando em P, temos três opções, K, L e N.

- De P para N, temos 12, mas $21 - 12 < 18$ (valor acumulado para N), logo, não convém.
- De P para K, temos 7, mas $21 - 7 = 14 < 15$ (valor acumulado para K), logo, não convém.
- De P para L, temos 6. Como $21 - 6 = 15$ (valor acumulado para L), temos nosso caminho, até o momento, de L para P.
Estando em L, temos duas opções, G e K.

- De L para K, temos 5, mas $15 - 5 = 10 < 15$ (valor acumulado para K), logo, não convém.
- De L para G, temos 7. Como $15 - 7 = 8$ (valor acumulado para G), temos nosso caminho, até o momento, de G para L e de L para P.
Estando em G, temos duas opções, C e F.
- De G para C, temos 11, mas $8 - 11 = -3 < 11$ (valor acumulado para C), logo, não convém.
- De G para F, temos 1. Como $8 - 1 = 7$ (valor acumulado para F), temos nosso caminho, até o momento, de F para G, de G para L e de L para P.
Estando em F, temos três opções, B, C e E.
- De F para B, temos 4, mas $7 - 4 = 3 < 8$ (valor acumulado para B), logo, não convém.
- De F para C, temos 9, mas $7 - 9 = -2 < 11$ (valor acumulado para C), logo, não convém.
- De F para E, temos 3. Como $7 - 3 = 4$ (valor acumulado para E), temos nosso caminho, até o momento, de E para F, de F para G, de G para L e de L para P.
Estando em E, temos três opções, A, B e D.
- De E para B, temos 12, mas $4 - 12 = -8 < 8$ (valor acumulado para B), logo, não convém.
- De E para D, temos 9, mas $4 - 9 = -5 < 5$ (valor acumulado para D), logo, não convém.
- De E para A, temos 4. Como $4 - 4 = 0$ (valor acumulado para A), temos nosso caminho, até o momento, de A para E, de E para F, de F para G, de G para L e de L para P.

Portanto, temos o caminho:

Figura 14 – Grafo ponderado



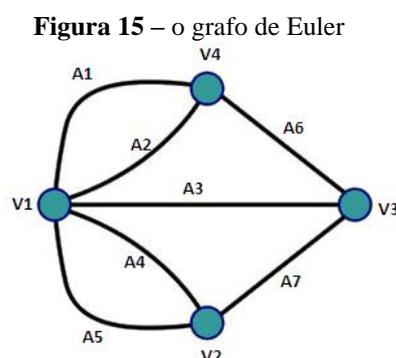
A completude do algoritmo de Dijkstra se dá pelo fato, não somente dele demonstrar o menor caminho entre dois vértices quaisquer, mas também demonstrar quais são todos os menores caminhos entre o vértice de partida e os demais vértices. A última tabela de nosso exemplo nos fornece todas as distâncias mínimas entre o vértice de partida A e os demais vértices do grafo. Analisando a tabela, vemos que a menor distância entre A e B é 8, entre A e C é 11, entre A e D é 5, entre A e E é 4, entre A e F é 7, entre A e G é 8, entre A e H é 11, entre A e I é 12, entre A e J é 9, entre A e K é 15, entre A e L é 15, entre A e M é 18, entre A e N é 18 e entre A e P é 21.

2.6 Teorema de Euler

Um grafo conexo $G(V, A)$ é euleriano se, e somente se, o grau de cada vértice de G for par. Demonstração: (\rightarrow) Seja T um circuito euleriano de G . Cada vez que um vértice V ocorre no circuito T , há uma contribuição de duas unidades para o grau de V (uma aresta para chegar a V e outra para sair). Isto vale não só para os vértices intermediários, mas também para o vértice final, pois “saímos” e “entramos” no mesmo vértice no início e no final do trajeto. Como cada aresta ocorre exatamente uma vez em T , cada vértice possui grau par.

Corolário: Um grafo $G(V, A)$ conexo possui caminho euleriano se, e somente se, ele tiver exatamente zero ou dois vértices de grau ímpar. Neste caso, o caminho se inicia em um desses vértices e termina no outro. Demonstração: (\rightarrow) Suponhamos que G possui um caminho euleriano e , começando em um vértice v_1 termine em um vértice v_2 . Como $v_1 \neq v_2$, fica claro que ambos tem grau ímpar. Cada vez que um dos outros vértices aparece em G , temos duas arestas incidentes e, além disso, cada aresta ocorre exatamente uma vez em G , logo o grau desses vértices é par. (\leftarrow) Suponhamos que G é conexo e possui exatamente dois vértices v_1 e v_2 de grau ímpar. Seja o grafo G' , obtido de G por junção de uma nova aresta ligando v_1 a v_2 . A este novo grafo podemos aplicar o Teorema de Euler e concluir que ele admite um circuito euleriano. Apagando deste circuito a aresta previamente adicionada a G , obtemos um caminho euleriano ligando v_1 e v_2 , como desejávamos.

Baseado na figura 3, calculemos os graus de cada vértice.



Grau de $V1 = 5$

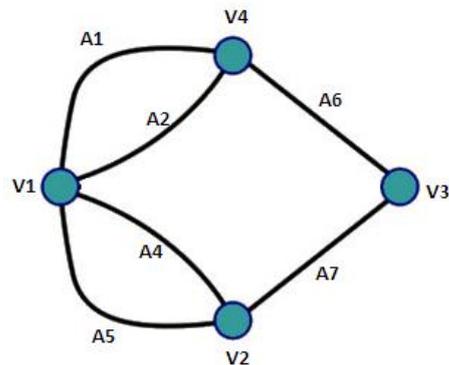
Grau de $V2 = 3$

Grau de $V3 = 3$

Grau de $V4 = 3$.

Assim, vemos que há mais de dois vértices com grau ímpar, logo, esse grafo não contém caminhos eulerianos. Supondo que não houvesse a aresta $A3$, teríamos o seguinte grafo:

Figura 16 – grafo de Euler alterado



Nesse grafo, temos:

Grau de $V1 = 4$

Grau de $V2 = 3$

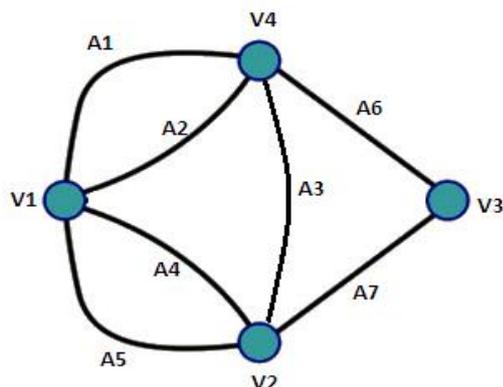
Grau de $V3 = 2$

Grau de $V4 = 3$.

Assim, vemos que há exatamente dois vértices com grau ímpar ($V2, V4$), logo, esse grafo contém caminhos eulerianos.

Agora, suponhamos que a aresta $A3$ fosse deslocada para servir de ligação entre os vértices $V2$ e $V4$. Nesse caso, teríamos o seguinte grafo:

Figura 17 – grafo de Euler alterado



Nesse grafo, temos:

- Grau de $V1 = 4$
- Grau de $V2 = 4$
- Grau de $V3 = 2$
- Grau de $V4 = 4$.

Vemos que nesse grafo todos os vértices têm grau par, logo, esse grafo é euleriano.

A Teoria dos grafos nos auxilia na resolução de situações-problema do cotidiano em várias áreas do conhecimento, desde logística, como traçar uma rota para que um determinado caminhão faça as entregas de suas mercadorias em tempo mínimo ou que o faça sem precisar passar em um mesmo lugar mais de uma vez, até nas ligações dos elementos químicos, formando determinados compostos químicos.

O presente trabalho não pretende esgotar o assunto sobre grafos, mas dar uma sugestão, por meio de alguns problemas e definições que servirão de base para tal objetivo. Baseado no fato de que o aluno contemporâneo, como foi mencionado por Costa e Oliveira(2012), é dotado de grandes competências digitais e tem uma elevada motivação para a utilização das tecnologias que pode e deve ser aproveitada pelos professores, o objetivo deste trabalho também consiste em aguçar, nesse indivíduo, seu senso crítico, sua criatividade, sua capacidade de pensar, de aprender a aprender, de trabalhar em grupo e de se reconhecer como indivíduo, além de despertar no estudante sua capacidade de inovar, de criar o novo a partir do conhecido, de conseguir adaptar-se ao novo, de ser autônomo e de melhorar sua comunicação em relações com o próximo.

Assim, mesmo sabendo da amplitude do conteúdo principal desse trabalho, a Teoria dos grafos, manteremos o foco somente nas definições, proposições, teoremas e corolários apresentados até o momento. Algumas de nossas referências bibliográficas aprofundam o assunto, portanto, constituem uma sugestão para o leitor.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo Costa e Ghedin, (2007),

“A modelagem matemática está presente na vida do homem desde os tempos remotos, ao utilizar conhecimentos matemáticos para modelar e resolver situações problemáticas com as quais se deparava. Quando esses conhecimentos se mostravam insuficientes, a busca de novos objetos e/ou relações matemáticas fazia-se necessário”.

Para Bassanezi (2004),

“Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”.

Podemos dizer que a modelagem matemática é um conjunto de etapas que tem como objetivo fornecer uma descrição matemática de um dado fenômeno do mundo real. O problema das pontes de Königsberg é um exemplo fiel de modelagem matemática feita por Euler em sua representação do problema por meio de um grafo. A seguir, citaremos alguns benefícios de trabalharmos com modelagem matemática.

- 1) Por, na maioria das vezes, tratarmos de problemas reais, do cotidiano tanto do professor quanto do aluno, há uma motivação de ambas as partes no desenvolvimento dessa modelagem;
- 2) O conteúdo matemático passa a ter significação, deixa de ser abstrato e passa a ser concreto;
- 3) O grau de interdisciplinaridade é elevado, pois os problemas de modelagem matemática não são oriundos somente dessa área;
- 4) Desenvolvimento de várias habilidades, inclusive já citadas neste trabalho, como aprimoramento do raciocínio lógico e capacidade de adaptação ao novo;
- 5) Formação do aluno como cidadão crítico e conhecedor do mundo em que vive, dos problemas que o cerca e das soluções que pode sugerir utilizando-se de suas capacidades de modelagem.

3.1 Global Positioning System (GPS)

Segundo Faria (2018), GPS, *Global Positioning System*, em inglês, ou Sistema de Posicionamento Global, é um sistema eletrônico de navegação civil e militar que emite coordenadas em tempo real e é alimentado por informações de um conjunto de 24 satélites chamado NAVSTAR e controlado pelo DoD, *Department of Defence*, o Departamento de Defesa dos EUA. Ela afirma que o GPS, inicialmente, era um projeto militar dos EUA chamado de “NAVSTAR” e que foi criado na década de 1960, mas que só foi considerado completo em 1995, depois de 35 anos de trabalho que custaram 10 bilhões de dólares aos cofres americanos. Conclui que, com o GPS é possível estabelecer a posição praticamente exata, com margem de erro mínima, cerca de 1 metro, de qualquer ponto do planeta a qualquer momento. Alguns receptores bastante acurados conseguem chegar, depois de alguns dias, a uma precisão de até 10 mm, utilizando-se de técnicas de processamento específicas. Assim, destaca-se a importância desse sistema em nossas vidas de uma forma geral.

Figura 17 - Sistema de Posicionamento Global⁴



O GPS, basicamente, funciona com uma constelação de 24 satélites (NAVSTAR) que orbitam a Terra duas vezes por dia, emitindo sinais de rádio a uma dada frequência para receptores localizados na Terra, que podem ser até portáteis, como um “*tablet*”, conforme ilustrado na figura 17.

⁴ Fonte: Ilustração Designua / Shutterstock.com

Cada satélite, identificado por um código pseudorrandômico, aparentemente aleatório, de 1 a 32, emite um sinal que contém o código CA (geral), o código P (de precisão) e uma informação de status (dia, hora, mês) que são captados pelo receptor. Os receptores de uso civil captam apenas o código CA emitido em uma frequência, enquanto que os receptores militares recebem cada código emitido em duas frequências, garantindo maior precisão. Esse fator, juntamente com a interferência proposital inserida pelo DoD na transmissão para aparelhos civis (*Selective Availability* – Disponibilidade Seletiva) e o atraso causado pelos elétrons livres presentes na ionosfera, comum a qualquer transmissão de rádio, na transmissão do sinal, fazem com que a precisão dos dados seja ainda menor para uso civil.

Já para uso militar, o sinal de todos os satélites é emitido ao mesmo tempo com uma precisão impressionante, garantida devido a um relógio atômico presente em cada satélite e que é o sistema de medição de tempo mais preciso já criado até hoje. Os seus receptores não sofrem a interferência da ionosfera nem da Disponibilidade Seletiva. Todas essas interferências na transmissão civil são devidas a possibilidade desse sistema ser utilizado inadequadamente por terroristas, ou situação semelhante. Então, o DoD criou uma hierarquia de acesso aos dados em que os “usuários autorizados” recebem dados com extrema precisão, enquanto que os “usuários não-autorizados”, civis, recebem dados com precisão de 15 a 100 metros.

Nascimento (2010) afirma que:

o GPS tem como objetivo o auxílio à navegação em três dimensões com elevada precisão nos cálculos de posição mesmo que o usuário esteja sujeito às mais variadas intensidades de dinâmica, permitindo inclusive informações em tempo real. Apresenta ainda alta imunidade às interferências eletromagnéticas, uma vez que as variações de relevo não têm influência sobre suas transmissões e por operar em altas frequências, estas são mais precisas se comparadas com as transmissões de rádio em baixas frequências. O GPS permite ainda uma cobertura global 24 horas por dia, além de possibilitar uma rápida obtenção das informações transmitidas por sua constelação.

Assim, não podemos confundir o aplicativo de navegação terrestre que está instalado em nossos aparelhos, como o celular, por exemplo, com o GPS. O que temos em mãos é somente um receptor do sinal que é enviado pelos satélites que orbitam nosso planeta, como visto anteriormente.

Este trabalho aborda parte da Matemática presente no funcionamento do aplicativo instalado no celular, que é um sistema de navegação. Existem vários sistemas de navegação disponíveis para consumo. Utilizaremos aqui o aplicativo MAPS: GPS e transporte público.

Os primeiros sistemas de localização e navegação para veículos foram desenvolvidos, em nível comercial, há poucas décadas. Eles substituem, com vasta vantagem, os mapas convencionais. Esse sistema é composto, basicamente, de um dispositivo, em geral celulares conectados à internet, que recebe um sinal de satélites que, por sua vez, informa a posição do veículo através do monitor do celular. O posicionamento desses satélites associado a mapas digitais representados nos monitores de celulares tem sido utilizado na concepção de navegação terrestre.

Segundo Ferreira (1998), no Brasil, “o primeiro sistema de navegação é datado de 1991, por Cruz, chamado de módulo carta eletrônica de um Sistema de Informações Gerenciais (SIG), desenvolvido pelo Instituto Militar de Engenharia – IME”. Em 1993, o protótipo de Ferreira objetivava validar o trabalho de Estrutura de Dados para Carta Eletrônica Terrestre.

Em 1998, ele propôs o termo Carta Eletrônica para um mapa digital que exhibe feições cartográficas simultaneamente à posição georreferenciada de um dado móvel, em monitor de vídeo, em tempo real. Esse tipo de sistema conta com uma base de dados denominada base cartográfica, entendida como um conjunto mínimo de representações das feições necessárias à realização da navegação, ou seja, o conjunto de informações básicas e fundamentais para localizar um móvel na região de interesse. Em outras palavras, corresponde à malha viária, compreendendo todos os tipos de vias. É necessário, então, um projeto cartográfico. Robinson (1984) citado por Pugliesi *et all* (2004), diz que “o projeto gráfico é uma parte vital da cartografia porque requer uma comunicação efetiva aos vários sinais (representações geométricas, letras, sinais etc.) modulados e representados cuidadosamente”.

Para Morita (1993), “os principais componentes da navegação são: o usuário, a informação e a máquina de processamento da informação”. Em nosso caso, o aplicativo MAPS, que deve estar instalado no celular do usuário.

Segundo Gonçalves, (2007, p.11), “Qualquer situação que possa ser modelada em função de estados e onde haja alteração de estados ao longo do tempo é possível de ser resolvida mediante a utilização de grafos”. Assim, a grosso modo, um aplicativo de navegação terrestre, em nosso caso o MAPS, funciona em associação com o GPS (constelação

de satélites), um receptor (celular, em nosso caso) e mapas digitais pré-desenhados como um dos componentes desse aplicativo.

No receptor, após o navegador ter descrito seus pontos de origem e destino, o GPS (constelação de satélites) informa essas localizações ao aparelho que, por sua vez, por meio do algoritmo de Dijkstra traça uma melhor rota entre esses dois pontos, baseando-se em algumas variáveis. O presente trabalho não tem acesso a todas essas variáveis, por isso, de modo fictício, iremos propor, sem a perda de nossos objetivos, aos alunos, que somente uma das variáveis será considerada na criação de nossas rotas. A saber: ou distância ou tempo.

4 PROJETO – A TEORIA DOS GRAFOS ÍNTRINSECA NOS APLICATIVOS DE NAVEGAÇÃO TERRESTRE

4.1 História

A teoria dos grafos propiciou o surgimento de um novo ramo da Matemática, chamado Topologia. Com a invenção dos computadores e seu aperfeiçoamento, ela tem sido ferramenta indispensável para a solução de vários problemas, tais como:

- Desenhar redes de circuitos elétricos que tenham menor custo;
- Definir trajetos mínimos em malhas aéreas, náuticas e terrestres;
- Desenhar ligações entre elementos químicos;
- Determinar quantidades de caminhos entre dois pontos quaisquer de um grafo conexo que possua determinado tamanho k inteiro não negativo.

Com o objetivo de motivar os alunos e embasar teoricamente, antes de tratarmos diretamente sobre a teoria dos grafos intrínseca nos sistemas de navegação terrestre, vamos analisar um exemplo de grafo que está relacionado às redes sociais.

4.2 Grafos nas redes sociais

Redes sociais, como o Facebook, Instagram, *Youtube* entre outros, são redes que conectam pessoas que por algum motivo ou circunstância compartilham diversos tipos de experiências através de imagens, áudios e até vídeos. Algumas dessas redes sociais até rendem valores financeiros para o usuário que obtiver certos parâmetros quando da utilização dessa rede, como é o caso do *Youtube*, por exemplo.

Com a ajuda de um software chamado Gephi é possível visualizar e fazer análises do grafo gerado pela rede de amigos de uma determinada pessoa no Facebook.

Figura 18 – Logomarca do software Gephi⁵



⁵ Fonte: <https://gephi.org/users/download/> Acesso em 12 fev 2018.

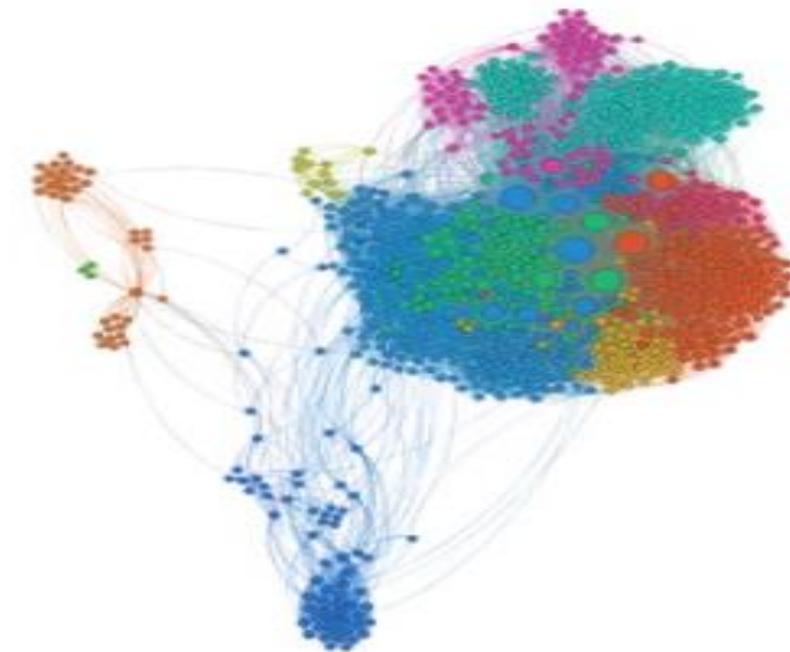
Para isto, basta, no aplicativo Facebook, digitar na guia “procura” o nome Netvizz.

Figura 19 – Pesquisando o netvizz⁶



Após sua instalação, deve-se baixar a lista de amigos e salvar no seu computador. Em seguida, abrir o programa Gephi, clicar em novo projeto e na guia arquivo, clicar em abrir. A partir daí, basta explorar seus recursos para a apresentação do grafo que a pessoa preferir, de acordo com o parâmetro que se deseja criar o grafo. Por exemplo, grafo dos amigos que participam de determinado grupo ou grafo gerado pelos amigos do sexo masculino.

Figura 20 -Exemplo de grafo construído por meio do aplicativo Gephi.⁷



⁶ Fonte: https://www.facebook.com/search/str/netvizz/keywords_apps. Acesso em 12 fev 2018

⁷ Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=zxQgaRUbl6g>. Acesso em 12 fev 2018

Assim, percebemos que a construção de grafos com a ajuda de aplicativos pode tornar a análise do mesmo mais simples.

4.3 Objetivos do projeto

- Analisar a matemática intrínseca nos aplicativos de navegação terrestre;
- Interpretar os caminhos que o aplicativo pode gerar entre dois pontos quaisquer de um mapa;
- Determinar a quantidade de caminhos de tamanho k inteiro não negativo entre dois pontos específicos de um grafo;
- Determinar o menor caminho entre dois pontos quaisquer de um grafo utilizando o algoritmo de Dijkstra.

4.4 Justificativa

Como explicitado por Costa e Oliveira (2012), os estudantes são dotados de grandes competências digitais e têm uma elevada motivação para a utilização das tecnologias que pode e deve ser aproveitada pelos professores; o aspecto lúdico e investigador, trazendo um enorme efeito motivador; a riqueza de conteúdos abordados, tanto na Matemática, como em outras áreas. Por isso, é de grande valia atrelar o conhecimento sobre grafos ao cotidiano do aluno, já que ele é permeado de situações que envolvem tecnologia.

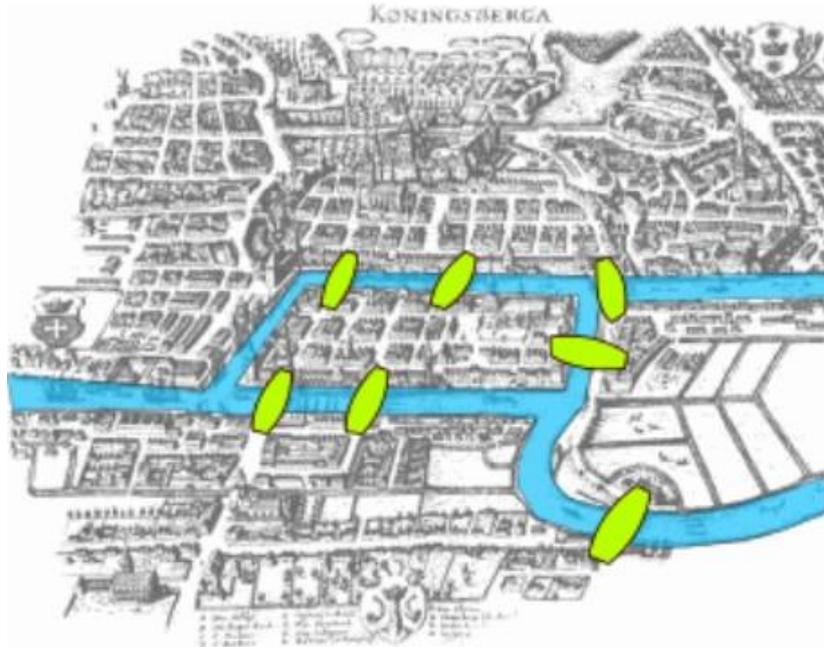
4.5 Metodologia

Serão efetuadas multiplicações de matrizes de ordem quadrada com o auxílio do software *Matrixcalc*, a fim de calcular a quantidade de caminhos de tamanho k inteiro não negativo entre dois pontos quaisquer de um grafo. Serão apresentados aos alunos grafos conexos ponderados e não ponderados elaborados pelo professor para que eles possam, utilizando o algoritmo de Dijkstra, determinar o menor caminho entre dois pontos específicos desses grafos. Ainda com base nesses grafos será feita a pergunta sobre a existência de caminhos ou circuitos eulerianos. Após os estudos, haverá apresentações dos resultados obtidos pelos alunos.

4.6 Exercícios e experimentos

Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler, apenas de passagem pela cidade, fora chamado a ajudar na solução de um problema que os moradores daquele lugar haviam observado, mas sem solução até àquele momento. O problema consistia em fazer um passeio pelas sete pontes que interligavam as partes da cidade que eram cortadas por vertentes do rio Pregel, formando assim, uma ilha na parte central como na figura a seguir:

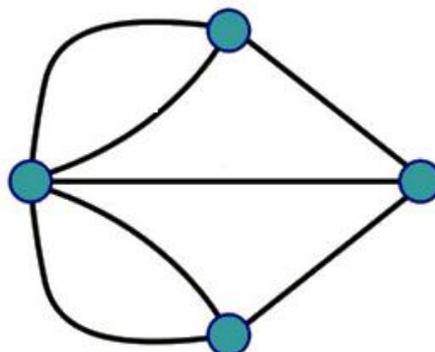
Figura 22 – Pontes de Königsberg



O passeio só poderia passar uma única vez pelas sete pontes, retornando, ao final, para o ponto de partida.

EXERCÍCIO 1 – Observando o grafo gerado pelo problema das pontes de Königsberg, faça o que se pede.

Figura 23 – Grafo gerado a partir do problema das pontes de Königsberg

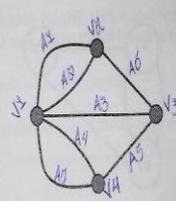


- Classificar os pontos do grafo abaixo por vértices V1, V2, V3 e V4 e as linhas por arestas A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7.
- Traçar caminhos eulerianos no grafo obedecendo às restrições dadas no problema enunciado.
- Determinar o grau de cada vértice do grafo.

Observemos que em um grafo conexo só é possível desenhar um caminho euleriano se, e somente se, todos os vértices tiverem grau par ou exatamente dois vértices de grau ímpar. Nesse exercício, percebemos que os alunos não apresentaram grandes dificuldades de aprendizagem, como podemos constatar nas soluções dadas por alguns deles:

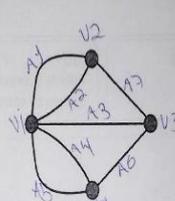
Figura 24 – Exercícios solucionados pelos alunos

EXERCÍCIO 1 – Observando o grafo gerado pelo problema das pontes de Königsberg, determine:



- Classificar os pontos do grafo abaixo por vértices V1, V2, V3 e V4 e as linhas por arestas A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7.
- Traçar caminhos eulerianos no grafo obedecendo às restrições dadas no problema enunciado acima. *Não é possível.*
- Determinar o grau de cada vértice do grafo. *grau (v1)=5, grau (v2)=3, grau (v3)=3, grau (v4)=3.*

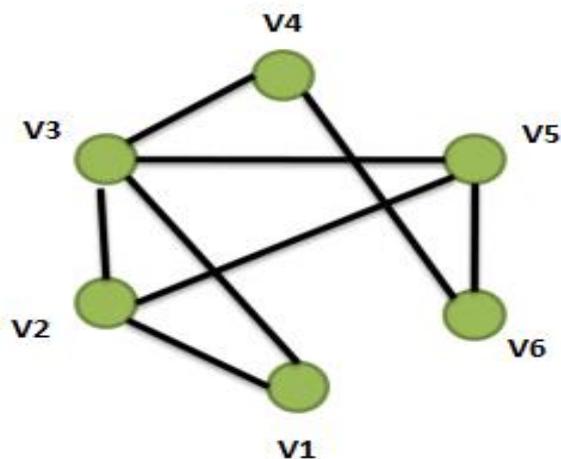
EXERCÍCIO 1 – Observando o grafo gerado pelo problema das pontes de Königsberg, determine:



- Classificar os pontos do grafo abaixo por vértices V1, V2, V3 e V4 e as linhas por arestas A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7.
- Traçar caminhos eulerianos no grafo obedecendo às restrições dadas no problema enunciado acima. *não é possível*
- Determinar o grau de cada vértice do grafo.

EXERCÍCIO 2 – Observando o grafo a seguir, determine:

Figura 25 – Grafo conexo



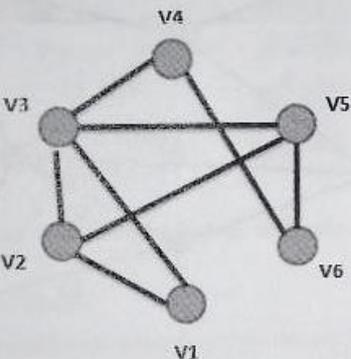
- O grau de cada vértice.
- Existem caminhos eulerianos nesse grafo? Justifique.
- Determine a matriz de adjacência relacionada a esse grafo.
- Determine a quantidade de caminhos com tamanho 2 entre os vértices V3 e V6.

A quantidade de caminhos de tamanho k entre dois vértices i e j quaisquer de um grafo é determinada quando fazemos o cálculo k -ésima potência da matriz de adjacência e observamos o valor do elemento que ocupa a i -ésima linha com j -ésima coluna.

Nesse exercício, percebemos que, para os itens a e c não houve grandes dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos. No item b alguns alunos demonstraram não entender por completo o corolário da proposição de Euler que diz que pode haver caminhos eulerianos também se o grafo tiver exatamente dois vértices de grau ímpar. O item d também foi resolvido pelos alunos sem muitas dificuldades. Porém, como exercício extra, foi proposto aos alunos que calculassem a quantidade de caminhos com tamanhos 3, 4 e 5 entre os vértices V3 e V6. Dessa vez, os alunos sentiram certo desconforto por terem que fazer muitos cálculos. Assim, os estudantes foram levados ao laboratório de informática, onde aprenderam a manusear e utilizar o programa *Matrixcalc*. Depois da prática, os alunos sentiram-se mais confiantes em saber que existia tal ferramenta. Alguns deles fizeram testes para matrizes de ordem ainda maior, ficando, ao final, impressionados com o poder dessa ferramenta em efetuar cálculos, considerados por eles, impraticáveis.

Figura 26 - Alguns dos resultados obtidos por alunos

EXERCÍCIO 2 – Observando o grafo abaixo, determine:



a) O grau de cada vértice. $\text{grau}(V1)=2, \text{grau}(V2)=3, \text{grau}(V3)=4, \text{grau}(V4)=3, \text{grau}(V5)=3$

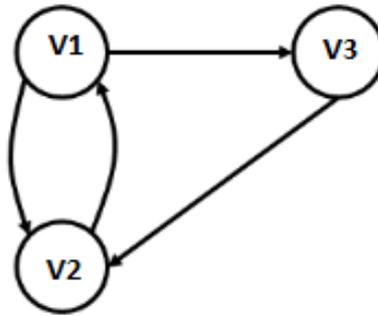
b) Existem caminhos eulerianos nesse grafo? Justifique. *não pois existem 4 vértices de grau ímpar*

c) Determine a matriz de adjacência relacionada a esse grafo.

d) Determine a quantidade de caminhos com tamanho 2 entre os vértices V3 e V6.

EXERCÍCIO 3—Observando o grafo direcionado a seguir, determine:

Figura 27 – Grafo direcionado

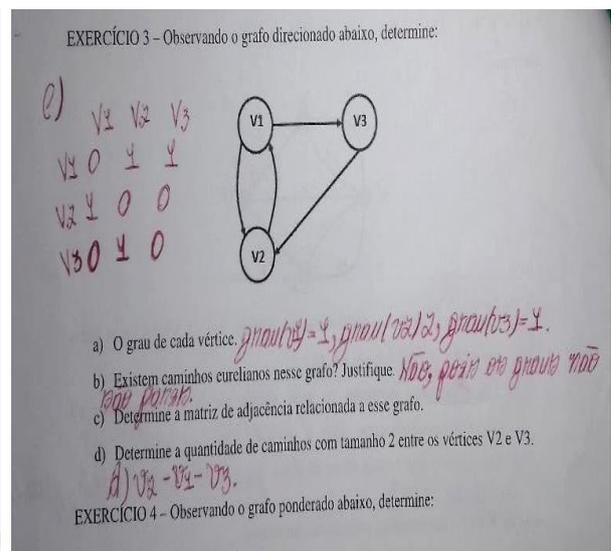
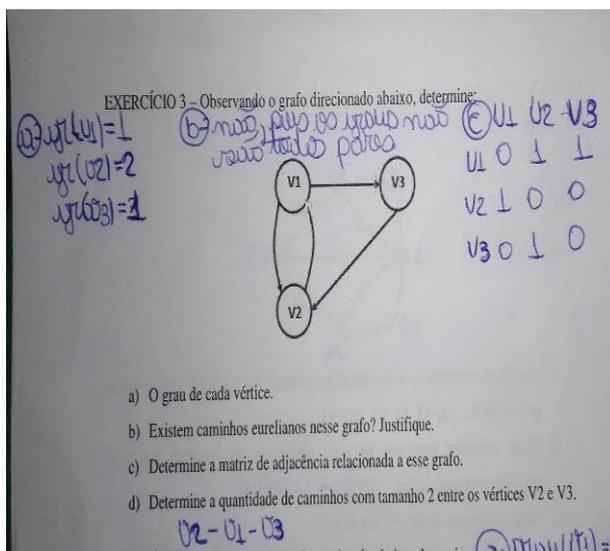


- a) O grau de cada vértice.
- b) Existem caminhos eulerianos nesse grafo? Justifique.
- c) Determine a matriz de adjacência relacionada a esse grafo.
- d) Determine a quantidade de caminhos com tamanho 2 entre os vértices V2 e V3.

Em um grafo direcionado, o grau de um vértice é definido como a quantidade de arestas que nele concorrem.

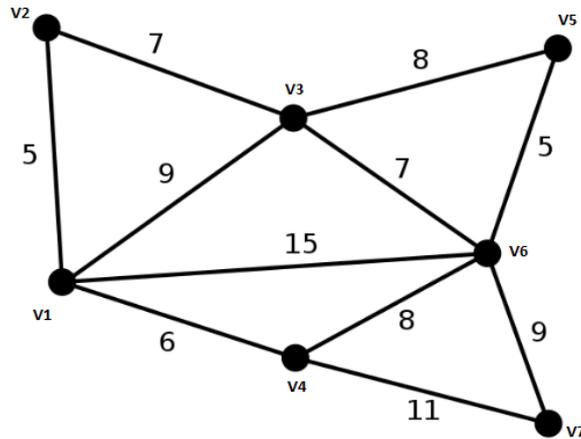
Da mesma forma que no exercício anterior, os alunos não sentiram grandes dificuldades em responder os itens. Exceto, no item b, ao afirmarem, erroneamente, que não havia caminhos eulerianos nesse grafo.

Figura 28 – Resultados obtidos por alunos (grafo direcionado)



EXERCÍCIO 4—Observando o grafo ponderado abaixo, determine:

Figura 29 – Grafo ponderado



- a) O grau de cada vértice.
- b) Existem caminhos eulerianos nesse grafo? Justifique.
- c) Determine o menor caminho entre os vértices V1 e V5.

O algoritmo de Dijkstra é uma ferramenta apropriada para determinar caminhos mínimos entre dois vértices quaisquer de um grafo ponderado. Além disso, com sua utilização, podem ser obtidas informações valiosas.

Nesse exercício não foram percebidas grandes dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos em relação aos itens a e b. Quanto ao item c, alguns alunos demoraram mais que outros para resolver sozinhos. Porém, com a intervenção e orientação individual do professor, todos conseguiram atingir o objetivo. A seguir, alguns dos resultados obtidos por alguns dos alunos:

Figura 30 - Resultados obtidos por alunos (grafo ponderado)

EXERCÍCIO 4 – Observando o grafo ponderado abaixo, determine:

$g(v_1) = 4$
 $g(v_2) = 2$
 $g(v_3) = 4$
 $g(v_4) = 3$
 $g(v_5) = 2$
 $g(v_6) = 5$
 $g(v_7) = 2$

Vértice	FINAL	TEMPORAL
v1	0	0
v2	5	5
v3	9	9
v4	6	6
v5	17	17
v6	14	15
v7	17	24

a) O grau de cada vértice.

b) Existem caminhos eulerianos nesse grafo? Justifique. Não, pois existem vértices com graus ímpares.

c) Determine o menor caminho entre os vértices V1 e V5.
 $v_1 - v_3 - v_5$

EXERCÍCIO 4 – Observando o grafo ponderado abaixo, determine:

$g(v_1) = 4$
 $g(v_2) = 2$
 $g(v_3) = 4$
 $g(v_4) = 3$
 $g(v_5) = 2$
 $g(v_6) = 5$
 $g(v_7) = 2$

vértice final temporal

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
v1	0	0					
v2	5	5					
v3	9	9					
v4	6	6					
v5	17	17					
v6	14	15					
v7	17	24					

a) O grau de cada vértice.

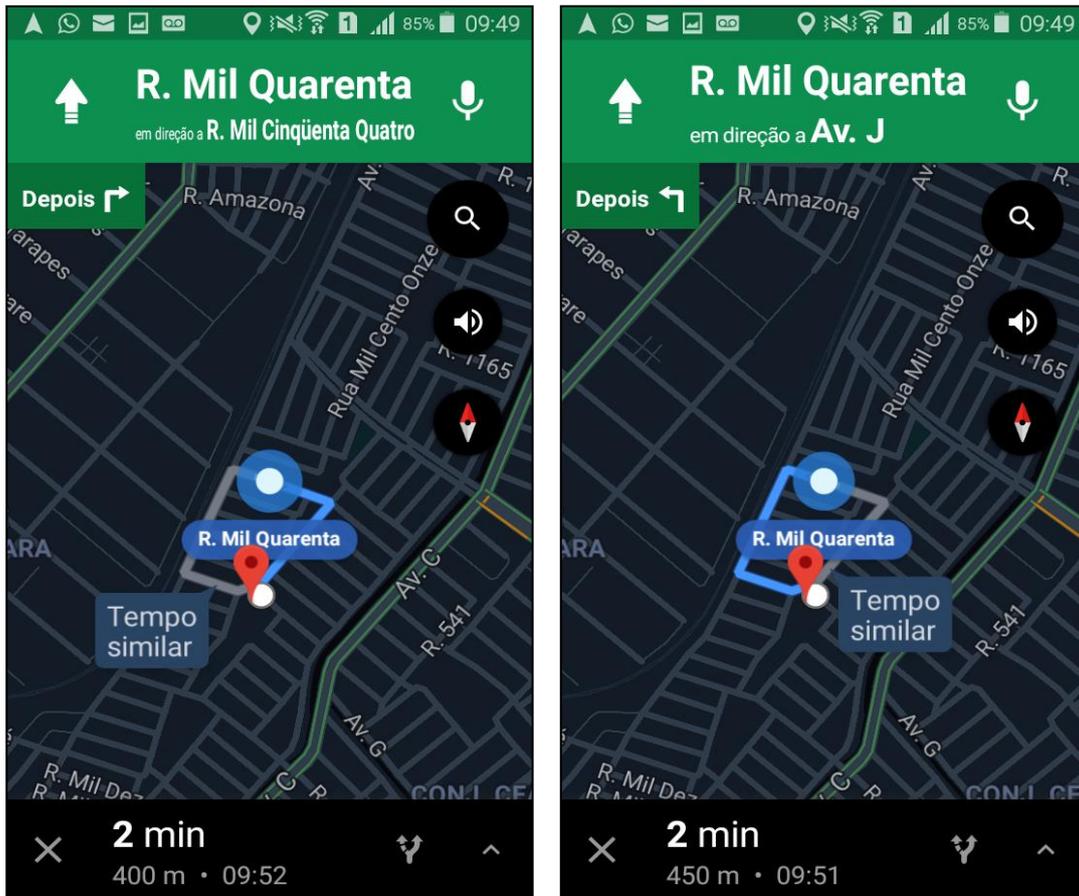
b) Existem caminhos eulerianos nesse grafo? Justifique. Não, pois existem vértices com graus ímpares.

c) Determine o menor caminho entre os vértices V1 e V5.
 $v_1 - v_3 - v_5$

EXPERIMENTO 1 – Trajeto da casa de um aluno à escola

Com a utilização do aplicativo (MAPS: GPS e transporte público) criamos o caminho virtual da casa do aluno à escola onde ele estuda, EEFM Edmilson Guimarães de Almeida, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 31 – Caminhos 1 e 2⁸



Como podemos ver, o aplicativo sugeriu dois caminhos distintos:

- Caminho 1, de tamanho 400 metros e tempo para execução de 2 minutos;
- Caminho 2, de tamanho 450 metros e mesmo tempo de execução.

A seguir será apresentada a descrição e os métodos de execução do experimento.

Considerando, no mapa, que cada rua representa a aresta e cada cruzamento entre ruas representa um vértice de um grafo, os alunos dispuseram-se a construir esse grafo com

⁸ Aplicativo MAPS. Último acesso em 19 fev de 2018.

suas medidas reais. Para isso, com uma fita métrica, três equipes de três alunos mediram cada rua e assim, construíram os respectivos grafos:

Figura 32 – Construção de grafos feita por alunos

EXPERIMENTO 1 – TRAJETO DA CASA DE UM ALUNO À ESCOLA

Com a utilização do aplicativo (MAPS, GPS e transporte público) criar o caminho visual de sua casa à escola neste estado (EEP/UFPA - Belém/Guimarães de Almeida).

OBS: O aplicativo irá sugerir mais de um caminho.

Represente, em um único grafo, todos os caminhos sugeridos pelo aplicativo.

Agora, baseado no grafo que você desenhou acima, responda:

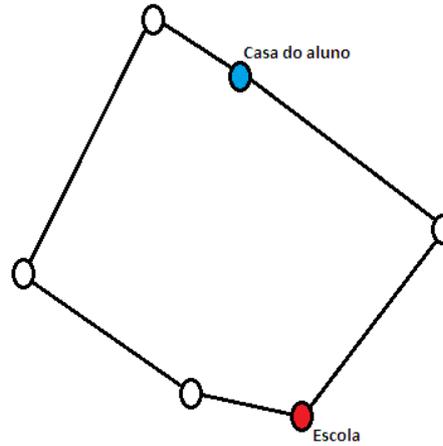
- Qual o grau de cada vértice?
- Existem caminhos eulerianos nesse grafo? Justifique.
- Utilizando o algoritmo de Dijkstra, determine o menor caminho entre a casa do aluno e a escola.
- Considerando o grafo não-ponderado da figura acima, ou seja, grafo em que cada aresta tem valor 1, determine a matriz de adjacência relacionada a esse grafo.
- Determine a quantidade de caminhos com tamanho 4 entre os vértices que representam a casa do aluno e a escola utilizando a multiplicação de matrizes de adjacência. Sugestão: Utilize o programa *Matrixcalc*.

Depois de construídos os grafos, cada equipe deveria responder os seguintes itens, baseadas no grafo gerado pela junção dos dois já construídos por eles (figura 33).

- O grau de cada vértice.
- Existem caminhos eulerianos nesse grafo? Justifique.
- Utilizando o algoritmo de Dijkstra, determine o menor caminho entre a casa do aluno e a escola.
- Considerando o grafo não-ponderado da figura anterior, ou seja, grafo em que cada aresta tem valor 1, determine a matriz de adjacência relacionada a esse grafo.
- Determine a quantidade de caminhos com tamanho 4 entre os vértices que representam a casa do aluno e a escola, utilizando a multiplicação de matrizes de adjacência. Sugestão: utilize o programa *Matrixcalc*.

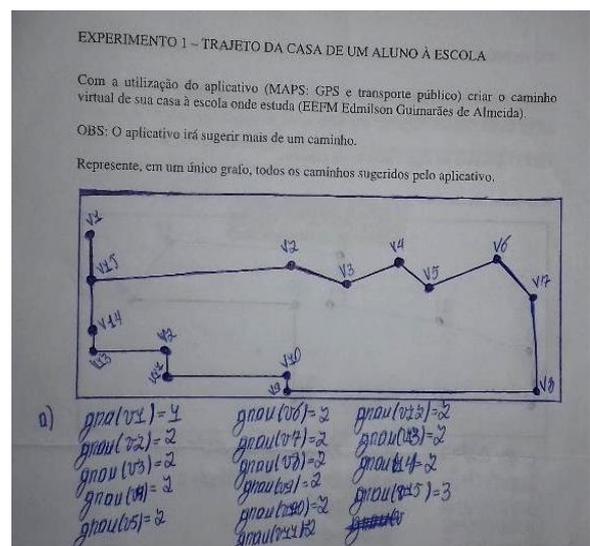
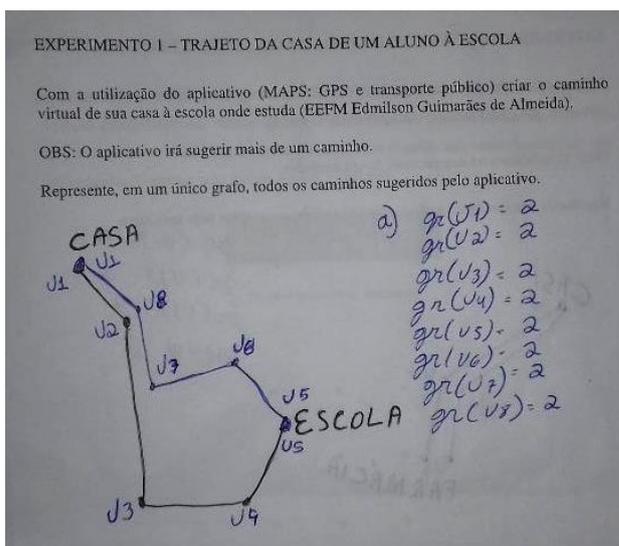
Nesse experimento, os alunos demonstraram empolgação com o fato de constatarem se, realmente, o algoritmo iria gerar uma solução igual à do aplicativo.

Figura 33 – Junção de grafos construídos pelos alunos⁹.



Os alunos demonstraram-se hábeis e práticos nesse experimento ao concluírem que não era preciso medir, por inteiro, uma rua, bastando, apenas, medir o comprimento da frente de uma casa e multiplicar o valor encontrado pela quantidade de casas que havia em um dos lados da rua. Para o comprimento a considerar nas esquinas, perceberam que bastava medir a largura de uma rua. Assim, eles chegaram, aproximadamente, nos valores expostos pelo aplicativo.

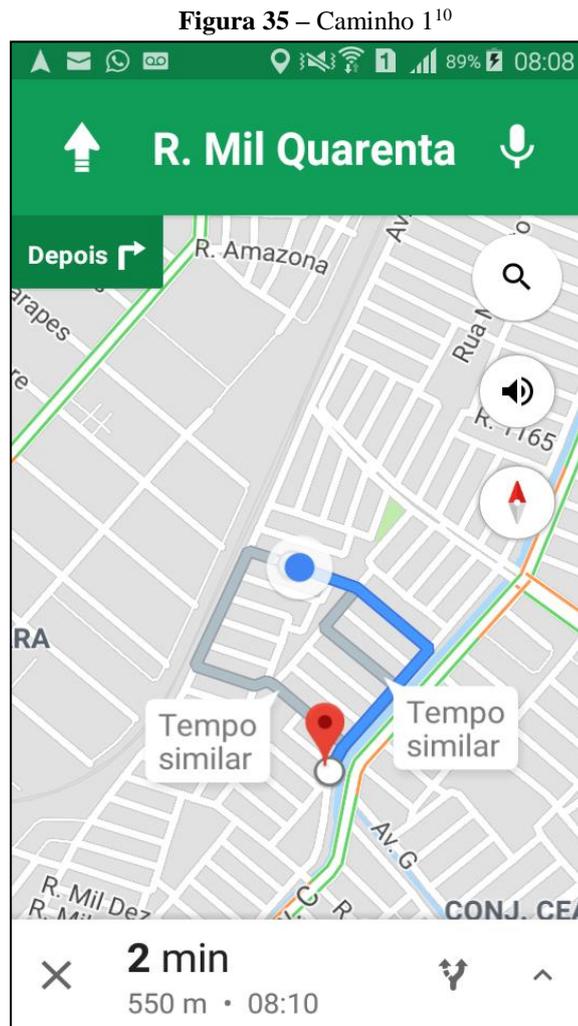
Figura 34 – Alguns grafos gerados pelos alunos na experiência prática



⁹ Fonte: As figuras 33 e 37 foram elaboradas por alunos da EEFM Professor Edmilson Guimarães de Almeida.

EXPERIMENTO 2 – Caminho da casa de um aluno à farmácia.

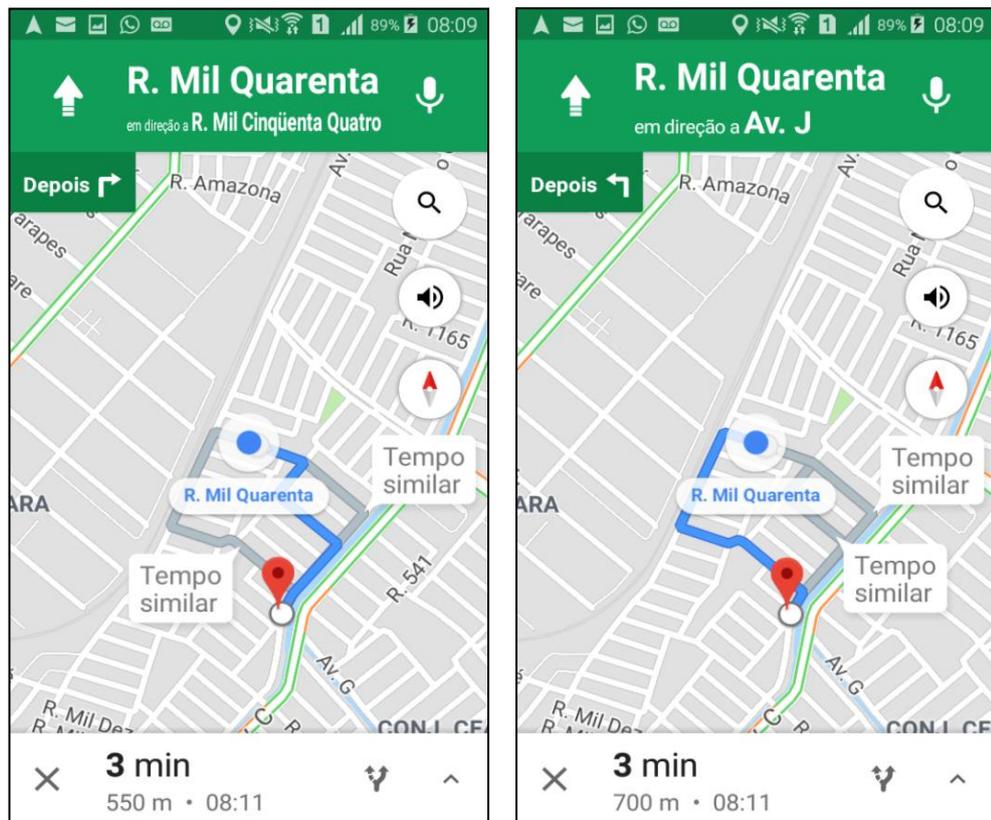
Com a utilização do aplicativo (MAPS: GPS e transporte público) criamos o caminho virtual da casa de um determinado aluno que mora próximo à escola, mais especificamente na rua mil e quarenta, à farmácia mais próxima, como podemos ver na figura a seguir:



No caminho anterior, sugerido pelo aplicativo, vemos que o tamanho do percurso é de 550 metros e que o tempo para executá-lo é de 2 minutos. Outros dois caminhos, com tempos similares, são sugeridos pelo aplicativo.

¹⁰ Fonte: Aplicativo MAPS. Último acesso em 19.fev de 2018.

Figura 36 – Caminhos 2 e 3¹¹



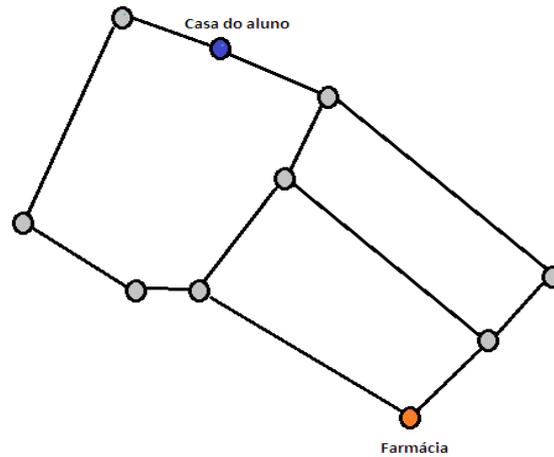
No caminho 2, vemos que o percurso mede 550 metros e que seu tempo de execução é de 3 minutos; já o caminho 3, mede 700 metros e demora 3 minutos para ser executado.

A seguir será apresentada a descrição e os métodos de execução do experimento.

Considerando, no mapa, que cada rua representa a aresta e cada cruzamento entre ruas representa um vértice de um grafo, os alunos dispuseram-se a construí-lo com suas medidas reais. Para isso, com uma fita métrica, três equipes de três alunos mediram cada rua. Depois de construídos os grafos, foi solicitado a cada equipe que respondesse os seguintes itens, baseadas no grafo gerado pela junção dos três já construídos por eles, como na figura:

¹¹ Fonte: Aplicativo MAPS. Último acesso em 19 fev de 2018.

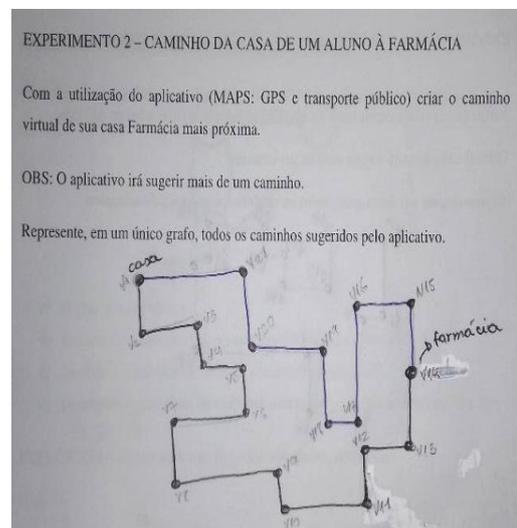
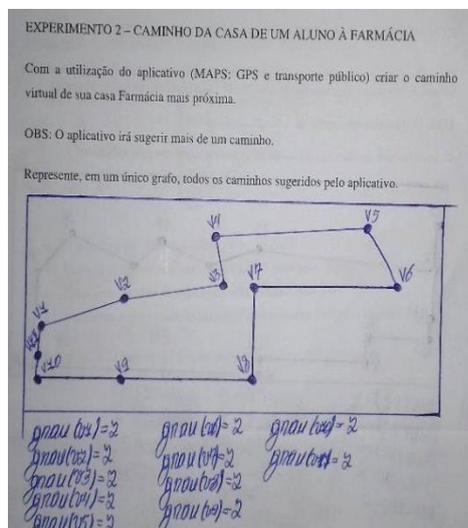
Figura 37 – Junção dos gráficos construídos por alunos



- O grau de cada vértice.
- Existem caminhos eulerianos nesse grafo? Justifique.
- Utilizando o algoritmo de Dijkstra, determine o menor caminho entre a casa do aluno e a farmácia.
- Considerando o grafo não-ponderado da figura anterior, ou seja, grafo em que cada aresta tem valor 1, determine a matriz de adjacência relacionada a esse grafo.
- Determine a quantidade de caminhos com tamanho 4 entre os vértices que representam a casa do aluno e a farmácia, utilizando a multiplicação de matrizes de adjacência. Sugestão: Utilize o programa *Matrixcalc*.

Da mesma forma que no experimento anterior, os alunos demonstraram agilidade na solução do exercício. A seguir, estão alguns grafos gerados pelos alunos.

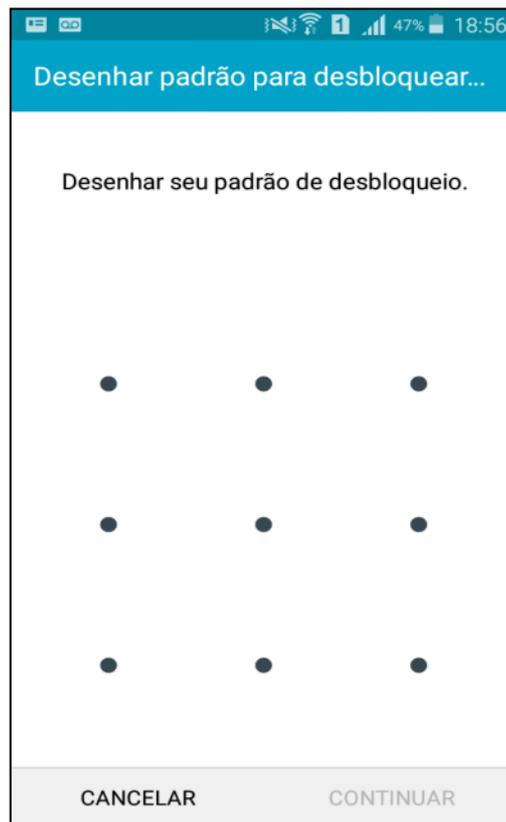
Figura 38 – Alguns grafos gerados pelos alunos na experiência prática



EXPERIMENTO 3 – Senhas em aparelhos de celular

Em aparelhos celulares modernos com tela *touchscreen* (tela sensível ao toque), temos a opção de construir senhas de bloqueio da tela. A figura a seguir, retirada de um celular com essa característica, sugere que o usuário desenhe sua senha baseado em um pré-requisito: conectar pelo menos 4 pontos distintos.

Figura 39 – Print de tela inicial do smartphone¹²



Solicitamos aos alunos que trouxessem seus celulares para que pudéssemos responder às seguintes perguntas:

- Ao criar um grafo, a partir das conexões feitas com os vértices disponíveis na tela do celular, é possível afirmar que toda senha (grafo criado) é conexa?
- É possível criar senhas que são circuitos eulerianos?

Nesse experimento, os alunos concluíram, com certo grau de facilidade, que:

- Era possível criar somente senhas conexas;
- Não era possível criar senhas que são circuitos eulerianos.

¹² Fonte: Autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou uma análise de como o conteúdo sobre grafos pode ser abordado em turmas de segundo ano do ensino médio nas escolas. Também possibilitou uma reflexão acerca dos benefícios que os recursos didáticos, como o programa *Matrixcalc*, por exemplo, podem proporcionar no auxílio da resolução e facilidade para a compreensão do conteúdo. Possibilitou verificar as dificuldades encontradas ao trabalhar esse conteúdo, além disso, também permitiu utilizar diferentes recursos didáticos e avaliar como esses recursos auxiliam na aprendizagem.

De um modo geral, os alunos demonstraram interesse em desenvolver o tema em sala e buscaram, constantemente, participar, fazendo perguntas inerentes ao conteúdo, mas ainda apresentam algumas dificuldades, como encontrar, com mais agilidade, o menor caminho entre dois vértices de um grafo, utilizando o algoritmo de Dijkstra. Também foram detectadas dificuldades na utilização de recursos didáticos, como os computadores do laboratório de informática, pois não havia computadores funcionando em quantidade igual ao número de alunos daquela turma, causando uma limitação para a utilização do programa *Matrixcalc*.

O interesse pelo tema, por parte dos alunos, mostrou-se pelo fato das mais variadas perguntas e discussões acerca do conteúdo durante a apresentação e execução dos exercícios. Diante de tais perguntas e discussões proveitosas, ficou evidente que os objetivos do presente trabalho foram realmente alcançados.

REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2004
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA. **Guia de Normalização de Trabalhos Acadêmicos da Universidade Federal do Ceará**. Disponível em: <<http://www.biblioteca.ufc.br/wp-content/uploads/2015/08/guia-normalizacao-trabalhos-ufc-2013.pdf>>. Acesso em 18 de abr. de 2018.
- BRAICOVICH, T. **Algunos Conceptos de Grafos em la Enseñanza**. In: Anais do VI CIEM - VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2013.
- CATALDO, J. C. **Análise combinatória: a importância dos métodos de contagem**. In: Revista Eletrônica do Vestibular. 2013. Rio de Janeiro, ano 06, n. 18. Disponível em: <http://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo.php?seq_artigo=31>. Acesso em: 23 jan. 2018
- COSTA, H. OLIVEIRA, I. **O uso das tecnologias no ensino das ciências: resultados preliminares de um estudo no âmbito de cursos de natureza**. In: Atas do II Congresso Internacional TIC e Educação. Lisboa, Portugal, 2012. 30 nov - 02 dez. p. 1765-1782. Disponível em: <<http://copec.eu/congresses/wcca2016/proc/works/7.pdf> >. Acesso em: 23 jan. 2018
- COSTA, H. R. E GHEDIN, E. **Epistemologia do Ensino de Matemática**. Universidade Luterana do Brasil (Org.), Anais, 4º Congresso Internacional de Ensino de Matemática, Canoas/RS: Universidade Luterana do Brasil de Canoas, 2007. p. 1 – 8 .
- FARIA, C. **GPS (Sistema de Posicionamento Global)**. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/cartografia/gps-sistema-de-posicionamento-global/>> Acesso em: 30 jan 2018.
- FERREIRA DA SILVA, F. L. C. **Avaliação e integração de bases cartográficas para cartas eletrônicas de navegação terrestre**. 1998. 58 f. Tese (Doutorado em Transportes Públicos). Departamento de Engenharia de Transportes. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1998.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teórico e Metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).
- GONÇALVES, A. L. **Grafos: Aplicações ao Jogo**. 2007. 98 f. Dissertação (Mestrado em Matemática/Educação). Centro de Ciências. Universidade Portucalense. Porto, 2007. Disponível em: <<http://repositorio.uportu.pt/xmlui/bitstream/handle/11328/539/TMMAT%20102.pdf?sequence=2&isAllowed=y>> Acesso em: 23 jan de 2018.

MATRIX CALCULATOR. Disponível em:
 <<https://matrixcalc.org/pt/#%7B%7B0,2,1,2%7D,%7B2,0,1,0%7D,%7B1,1,0,1%7D,%7B2,0,1,0%7D%7D%5E1000>>. Acesso em 29 jan.2018

MERCADO, L. P. L. **Formação Docente e Novas Tecnologias.** In: IV Congresso RIBIE, Brasília: 1998. p 1 – 8. Disponível em:
 <http://www.ufrgs.br/niee/eventos/RIBIE/1998/pdf/com_pos_dem/210M.pdf> Acesso em: 23 de jan 2018.

MORITA, T. **Grading of the Map Functions in Navigation System.** In: 16TH INTERNACIONAL CONFERENCE, 1993. Cologne – Koln. Internation Cartographic Association. 1993.

NASCIMENTO, J. M. **Utilização da solução de navegação do GPS para determinação de órbita de satélites.** 2010. Dissertação de mestrado. São José dos Campos: INPE, 2010. Disponível em <http://mtc-m16d.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc_m19/2010/11.10.12.50/doc/publicacao.pdf> Acesso em 30 jan 2018.

PUGLIESI, E. A; DECANINI, M. M. S.; IMAI, N. N. **Projeto e implementação da interface visual de um sistema de navegação terrestre para veículo.** In: Anais I Simpósio De Ciências Geodésicas E Tecnologias Da Geoinformação. Recife: UFPE, 2004. (CD Rom). Disponível em:
 <<https://www3.ufpe.br/cgtg/ISIMGEO/CD/html/cartografia%20e%20sig/Artigos/C32.pdf>>. Acesso em: 30 jan 2018

SIMÕES PEREIRA, J. M. S. **Matemática Discreta: Grafos, Redes e Aplicações.** Lisboa: Luz da vida, 2009.