



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DAVID MARQUES BISPO

A GEOMETRIA NO ENSINO DA PROBABILIDADE

FORTALEZA
2018

DAVID MARQUES BISPO

A GEOMETRIA NO ENSINO DA PROBABILIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área da concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B531g Bispo, David Marques.

A Geometria no Estudo da Probabilidade / David Marques Bispo. – 2018.
63 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede
Nacional, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Probabilidade. 2. Geometria. 3. Aplicações. I. Título.

CDD 510

DAVID MARQUES BISPO

A GEOMETRIA NO ENSINO DA PROBABILIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 16/07/18

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de toda a vida, por iluminar meu caminho e me dar forças para seguir sempre em frente.

À minha mãe e a todos os familiares por toda a força dada nos momentos difíceis.

À Patrícia Escossio, minha noiva, pelo carinho e companheirismo assim como toda a atenção destinada não só a este trabalho.

Ao meu orientador professor Marcelo Melo, pela paciência e pelo tempo destinado para o desenvolvimento do trabalho.

Aos professores Tiago Caúla e Marcos Melo por aceitarem o convite para participarem da banca.

A todos os professores do PROFMAT da Universidade Federal do Ceará.

Aos amigos, que de alguma forma contribuíram para que tudo se desenvolvesse dessa maneira.

“A persistência é o caminho do êxito.”
(CHARLES CHAPLIN)

RESUMO

O estudo sobre a história da probabilidade e a probabilidade geométrica tem sido pouco disseminado no cenário nacional. Há uma escassez de trabalhos científicos que abordam esses dois assuntos, muitas vezes a probabilidade é sinônimo de “jogos de azar”. Este trabalho terá como foco a probabilidade geométrica apresentando e discutindo problemas de natureza contínua relacionados a comprimentos de segmentos de retas, áreas de figuras planas ou volumes de sólidos. No trabalho foi apresentado uma retrospectiva histórica dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da probabilidade e em seguida, um estudo sobre probabilidade para ter um embasamento teórico para o objetivo principal da dissertação que é mostrar as aplicações da Probabilidade no campo da Geometria. O trabalho será desenvolvido com base na pesquisa bibliográfica, que consiste na descrição das características em estudos que recupera o conhecimento científico. Os problemas que serão propostos e trabalhados, muito embora sejam problemas clássicos da Probabilidade Geométrica, são, quase sempre, desconhecidos por muitos professores do ensino fundamental e do ensino médio e, ainda, pela maioria absoluta dos alunos que estão neste nível de escolaridade. Pretende-se assim, trabalhar conceitos de probabilidade geométrica através das aplicações. O tema proposto contribuirá para o aprimoramento do conhecimento matemático e, ainda, apresentará uma dinâmica metodológica diferenciada para o ensino de Probabilidade, uma vez que esse tópico não é muito explorado no Ensino Básico.

Palavras – chaves: Probabilidade. Geometria. Aplicações.

ABSTRACT

The study on the history of probability and geometric probability has been little disseminated on the national scene. There is a shortage of scientific papers that address these two issues, often the likelihood is synonymous with "gambling." This work will focus on the geometric probability presenting and discussing problems of a continuous nature related to lengths of straight segments, areas of flat figures or volumes of solids. In the paper was presented a historical retrospective of the mathematicians who contributed to the development of probability and then a study on probability to have a theoretical basis for the main purpose of the dissertation which is to show the applications of Probability in the field of Geometry. The work will be developed based on the bibliographical research, which consists of the description of the characteristics in studies that recover the scientific knowledge. The problems that will be proposed and worked, although they are classic problems of Geometric Probability, are almost always unknown by many elementary and high school teachers and also by the absolute majority of the students that are at this level of schooling. It is intended, therefore, to work concepts of geometric probability through the applications. The proposed theme contributed to the improvement of mathematical knowledge and also presented a differentiated methodological dynamics for Probability teaching, since this topic is not much explored in Basic Education.

Keywords: Probability. Geometry. Applications.

LISTA DE SÍMBOLOS

$+$	Adição
$-$	Diferença
$=$	Igualdade
\rightarrow	Implica
\pm	Mais ou menos
$>$	Maior que
$<$	Menor que
\leq	Menor ou igual que
\geq	Maior ou igual que
\forall	Para todo
\in	Pertence
\leftrightarrow	Se, somente se
Σ	Somatório
\cup	União
\cap	Interseção
\overline{AB}	Reta que passa pelos pontos A e B
\widehat{ABC}	Ângulo formado pelas semirretas \overline{AB} e \overline{AC}
ABC	Triângulo formado com os vértices A, B e C
ABCD	Quadrilátero formado com os vértices A, B, C e D
ε	Espaço amostral

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Evento relacionado ao lançamento de duas moedas.....	29
Figura 2 - Evento relacionado ao lançamento de dois dados.....	30
Figura 3 - Segmento AB.....	35
Figura 4 - Segmento OB.....	36
Figura 5 - Segmento unitário AB.....	37
Figura 6 - Quadrado FGHI.....	37
Figura 7 - Região formada pela inequação $y - x < 1/4$	38
Figura 8 - Interseção das Figura 6 e Figura 7.....	38
Figura 9 - Duas retas paralelas em \mathbb{R}^2	39
Figura 10 - Lugar geométrico que representa os casos favoráveis.....	39
Figura 11 - Área do triângulo ODF + Área limitada por uma hipérbole e o eixo-x ...	40
Figura 12 - Representação geométrica do espaço amostral.....	41
Figura 13 - Região alfa correspondente a solução do sistema de inequações.....	42
Figura 14 - Semicircunferência.....	42
Figura 15 - Interseção de duas circunferências com o raio em comum.....	42
Figura 16 - Ogiva.....	43
Figura 17 - Quadrado ABCD de lado unitário.....	44
Figura 18 - Quadrado com dois lados sobre os eixos cartesianos.....	44
Figura 19 - Município.....	46
Figura 20 - Triângulo Equilátero inscrito na circunferência.....	47
Figura 21 - Circunferência de centro O cortada por três cordas.....	48
Figura 22 - Circunferência de centro O cortada por uma corda.....	49
Figura 23 - Círculo de centro O e raio OM.....	50
Figura 24 - Segmento AB.....	51
Figura 25 - Equação da reta $y + x = 1$	51
Figura 26 - Triângulo ABC com lado AC prolongado.....	51
Figura 27 - Lados dos triângulos formados.....	52
Figura 28 - Duas retas paralelas.....	53
Figura 29 - Gráfico da função.....	54
Figura 30 - Triângulo de Sierpinski 1.....	56
Figura 31 - Triângulo de Sierpinski 2.....	56
Figura 32 - Triângulo de Sierpinski 3.....	56

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE A PROBABILIDADE GEOMÉTRICA	14
2.1	Matemáticos que ajudaram o desenvolvimento da probabilidade.....	15
2.1.1	Lucca Pacioli (1445 - 1517).....	16
2.1.2	Niccolo de Fontana “Tartaglia” (1499 - 1557).....	17
2.1.3	Girolamo Cardano (1501 - 1576).....	17
2.1.4	Pierre Fermat (1601 – 1665).....	18
2.1.5	Blaise Pascal (1623 – 1662).....	19
2.1.6	George-Louis Leclerc, o Conde de Buffon (1707 – 1788).....	20
3	PROBABILIDADE GEOMÉTRICA	21
3.1	Experimento Aleatórios.....	21
3.2	Espaço Amostral	22
3.3	Eventos.....	23
3.4	Frequência Relativa	25
3.5	Probabilidade	25
3.6	Eventos Equiprováveis	27
3.7	Probabilidade Geométrica	33
4	APLICAÇÕES DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA	35
4.1	O Paradoxo de Bertrand	46
4.2	Problema do “Macarrão”	50
4.3	O Problema das agulhas de Buffon.....	53
4.4	Triângulo de Sierpinski	55
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
	REFERÊNCIAS.....	62

1 INTRODUÇÃO

O estudo sobre a história da probabilidade e a probabilidade geométrica tem sido pouco disseminado no cenário nacional. Há uma escassez de trabalhos científicos que abordam esses dois assuntos, muitas vezes a probabilidade é sinônimo de “jogos de azar”. Este trabalho terá como foco a probabilidade geométrica apresentando e discutindo problemas de natureza contínua relacionados a comprimentos de segmentos de retas, áreas de figuras planas ou volumes de sólidos.

O conhecimento sobre probabilidade é de grande importância, pois pode ser aplicado em diversas áreas como na atividade humana, na política, na medicina, na economia, na análise populacional, etc. Exploradores de petróleo e de minerais também usam métodos semelhantes para estimar a quantidade do material precioso em uma jazida recém descoberta. Há muitos cálculos em Física Nuclear e de Altas Energias que precisam determinar quantidades equivalentes as áreas que são impossíveis de se calcular de maneira exata e muito demoradas para o computador calcular com alta precisão. Nestes casos, as estimativas fornecidas através de métodos que utilizam a probabilidade geométrica são cruciais para obter respostas razoáveis em tempos aceitáveis pelos cientistas. Portanto desenvolver a capacidade de analisar fenômenos de natureza aleatória torna-se muito importante.

Lopes (2010) afirma que o desenvolvimento do raciocínio probabilístico possibilita às pessoas uma maior desenvoltura frente as tomadas de decisões as quais elas são submetidas diariamente, requerendo que as façam de forma analítica sobre as possibilidades de ocorrências ou não dos fenômenos e/ou fatos. Portanto desenvolver nos estudantes essa capacidade é um dos principais objetivos no ensino de Probabilidade. Mas, o grande desafio no ensino de Matemática é despertar no estudante a curiosidade e o interesse em absorver os conhecimentos dessa disciplina que por muitas vezes parece ser para eles algo fora do contexto de suas vidas, algo que não vai lhes trazer nenhum uso no seu dia-a-dia. Então a resposta a esse desafio pode estar na forma como esses conteúdos são apresentados. De acordo com os PCNs:

O estudo da probabilidade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático". (BRASIL,1998).

Inicialmente o trabalho será desenvolvido com base na pesquisa bibliográfica, que consiste na descrição das características em estudos que recupera o conhecimento científico acumulado sobre o problema. Segundo Matos (2001, p. 40):

(...) à medida que desenvolvemos interesses por determinados temas, vamos nos familiarizando com literaturas a esse respeito. Assim, estabelecemos uma sintonia entre a nossa proposta de reflexão e o tratamento já dispensado ao assunto por outros pesquisadores. (...) A pesquisa bibliográfica é realizada a partir de um levantamento de material com dados já analisados, e publicados por meio escrito e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de Web site, sobre o tema que desejamos conhecer.

A melhor forma de se obter informações sobre probabilidade, objeto de estudo deste trabalho, é através de experimentos que possibilitam aos alunos uma visão mais prática do assunto trabalhado em sala de aula. Segundo D'Ambrósio (1986) os alunos em muitos momentos e situações se sentem mais confortáveis com o ensino através do uso de tecnologia como o computador e softwares educativos do que com o próprio professor. Desta forma o uso de novas tecnologias em sala de aula como experimentos probabilísticos tornam o estudo sobre probabilidade geométrica mais atrativo e significativo para o aluno, dinamizando o ensino.

O objetivo geral deste trabalho será expressar as diferentes aplicações da probabilidade geométrica. E para isso, teremos três capítulos nos quais será desenvolvido um objetivo específico em cada um:

- Apresentar uma retrospectiva histórica sobre probabilidade geométrica;
- Enumerar as propriedades e teoremas da probabilidade que serão utilizados;
- Aplicar a probabilidade no Ensino Médio e Ensino Superior.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE A PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

O homem já lidava com a incerteza desde as épocas mais antigas da humanidade. Previsões sobre o tempo, sobre o cultivo do campo ou mesmo sobre a vida e a morte já eram feitas, mesmo que baseadas apenas em crenças que não apresentavam uma ordem lógica mais apurada. Por muito tempo as pessoas tentaram compreender esses fenômenos que ocorriam de modo casual, buscando assim obter algum tipo de vantagem ou evitar perdas provenientes de fatores imprevisíveis.

A probabilidade pode ser entendida como o ramo da matemática que pretende estudar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o 'acaso' representa um papel importante. O acaso tem um papel fundamental no estudo da probabilidade, e por isso, faz se necessário a explicação do termo "acaso". De acordo com Viali (2008) o termo "acaso" é um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno.

Há indícios de que os jogos de azar que são aqueles que não dependem totalmente do jogador, mas predominantemente de sua sorte ou azar colaboraram bastante para a origem do pensamento probabilístico. Estes jogos eram utilizados em cerimônias religiosas e adivinhações, e, também, eram empregados em situações de lazer. No início da era pré-Cristã os Babilônios, os Egípcios, os Gregos e os Romanos usavam o astrágalo que é um osso do calcânhar de um animal específico que possui o formato de um tetraedro irregular para os jogos de azar. Este objeto é considerado o ancestral do dado e continha quatro lados: o côncavo, o convexo, plano e o sinuoso.

Um tratamento mais formal dos jogos de azar pode ter sido iniciado com a "[...] enumeração de possibilidades de que o jogo fornecesse um determinado resultado" (VIALI, 2008). Uma das primeiras tentativas de realizar esta enumeração foi do bispo Wibold de Cambrai, que inventou um jogo moral de dados no qual enumerava as possibilidades de resultados e as relacionava com as virtudes.

A abordagem da probabilidade como Ciência Matemática se deu através de um desenvolvimento moderno, ou seja, recente, principalmente se compararmos com a formalização de outros ramos matemáticos, apesar dos jogos de azar serem jogados desde a Antiguidade e, com mais relatos, na Idade Média. Os primeiros cálculos probabilísticos foram realizados por estudiosos italianos dos séculos XV e XVI, dentre os quais destacamos frei Lucca Pacioli (1445 - 1517), Niccolo Fontana, mais conhecido como Tartaglia (1499 - 1557) e Girolamo Cardano (1501 - 1576). Eles realizaram estudos nos quais compararam as frequências dos eventos e estimaram as chances de se ganhar nos jogos de azar, mas não apresentaram teoremas que se baseassem em alguma teoria.

Desde o início do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade notou-se que a definição clássica, baseada em um conjunto finito de eventos igualmente prováveis era insuficiente para abranger todos os problemas de probabilidade. O desenvolvimento da matemática deve-se à necessidade de se resolver problemas novos que vão surgindo. O início do estudo da probabilidade geométrica se deu por volta do século XVIII a partir de um problema conhecido como problema da agulha de Buffon. O problema consistia em determinar algebricamente qual a probabilidade de uma agulha, lançada aleatoriamente em um assoalho com linhas paralelas cair sem haver interseção com essas linhas.

O termo Probabilidade tem origem latina e deriva de *probare*, significando provar ou testar. Segundo MORGADO, “A Teoria das probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios” (1991).

2.1 Matemáticos que ajudaram o desenvolvimento da probabilidade

Até meados do século XVII, algumas considerações filosóficas sobre a casualidade haviam sido redigidas e algumas investigações sobre eventos sujeitos ao acaso, em especial aos jogos de azar, haviam sido criadas de forma poética, mas sem um maior rigor ou formalismo. A sistematização de uma teoria, com o estabelecimento de algumas regras gerais que pudessem estimar uma medida da chance de ocorrência de um experimento aleatório se deu com a ajuda de alguns matemáticos que serão citados junto com a sua contribuição.

2.1.1 Lucca Pacioli (1445 - 1517)

Lucca Pacioli nasceu em Sansepolcro em Itália no ano de 1445. Pouco se sabe da sua infância exceto que recebeu a sua educação de um matemático Dominico Bragadino, e do seu amigo mais velho Piero della Francesca. Nascido de uma família pobre, o futuro de Pacioli era pouco promissor, juntou-se a um mosteiro Franciscano em Sansepolcro e tornou-se num aprendiz de um homem de negócios local e mais tarde veio a se torna Frei. O jovem Pacioli cedo abandonou o papel de homem de negócios para ir trabalhar como matemático.

Pacioli e o seu amigo Piero della Francesca foram para Appenines, onde Francesca conseguiu que Pacioli tivesse acesso à biblioteca de Frederico, Conde de Urbino. A coleção de cerca de 4000 livros permitiu-lhe aumentar os seus conhecimentos em matemática. Francesca apresentou Pacioli a Leon Baptist Alberti, que se tornou seu novo mentor e levou Pacioli para Veneza onde lhe arranjou um cargo como tutor dos três filhos de Antônio de Reimpose, um rico mercador. Durante este tempo, no ano de 1470, Pacioli escreveu o seu primeiro manuscrito sobre álgebra. Alberti também o apresentou ao Papa Paulo II que o encorajou a tornar-se monge e a dedicar a sua vida a Deus.

Em 1475, Pacioli tornou-se professor na universidade de Perugia, onde ficou durante seis anos, tendo sido o primeiro a leccionar uma cadeira de matemática nessa universidade. Depois de 1481, Pacioli andou por toda a Itália, e por alguns locais fora, até ser chamado de novo para a universidade de Perugia pelos Franciscanos, em 1486.

Frei Lucca Pacioli, conhecido como o Pai da Contabilidade, dedicou-se ao estudo do problema conhecido como o problema dos pontos (divisão de apostas) que apresenta a seguinte situação:

“Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da bala. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?”

A seguinte situação apresentada por Pacioli e debatida nos dias atuais em questões propostas por vestibulares nacionais. Destacamos que este problema dos

pontos pode ser considerado, segundo Coutinho (2007), como o problema fundador do cálculo das probabilidades e inspirou muitos outros pensadores da era Renascentista, como Tartaglia e Cardano.

2.1.2 Niccolo de Fontana “Tartaglia” (1499 - 1557)

Niccolo de Fontana mais conhecido como Tartaglia nasceu em Brescia no ano de 1499, filho de pais muito pobres, aprendeu a escrever por seus próprios meios, mas isso não foi obstáculo a que viesse a ser engenheiro e a ensinar matemática em cidades italianas como Verona, Veneza, Piacenza e Brescia. Além disso, fez trabalhos importantes onde demonstrou muitos conhecimentos de aritmética, geometria, álgebra, balística e estática.

Sendo o único professor de matemática em Veneza, Tartaglia gradualmente foi adquirindo uma reputação como promissor matemático pelas suas participações bem-sucedidas num largo número de debates. Em 1537, foi impressa a sua primeira obra “Nova scientia inventa” que se refere à balística. Seguiu-se em 1546, o “Quesiti et inventioni diverse”, que tem a forma dialogada e inúmeras notas autobiográficas de carácter geral, considerando questões que lhe tinham sido colocadas. Na sua maior parte tratavam-se de questões de engenharia e arte militar, mas produzia também questões matemáticas. Uma dessas questões conduzia a uma equação do 4º grau, precisamente aquela que viria a ser mais tarde resolvida por Ferrari. Histórica e tecnicamente importantes são as suas referências à resolução da equação cúbica. Por último figuram no “Quesiti et inventioni diverse” a sua disputa com Fior, algumas das questões que faziam parte dessa disputa, e o seu encontro com Cardano no qual Tartaglia lhe terá entregue os “Tercetos” com a solução da equação cúbica. Dedicou-se algumas páginas de seu livro General Trattato aos problemas de Pacioli. Tartaglia contribuiu para a probabilidade principalmente nos problemas propostos por Pacioli.

2.1.3 Girolamo Cardano (1501 - 1576)

Girolamo Cardano nasceu em Pávia em 1501, filho ilegítimo de um jurista é um dos personagens mais extraordinários da história da Matemática devido suas

contribuições, começou sua vida profissional como médico, mas, paralelamente dedicava-se a matemática, estudando, ensinando e escrevendo.

Obteve de Tartaglia o método destinado a solucionar equações de terceiro grau, em 1539, e o publicou seis anos depois, apesar de haver jurado solenemente guardar o segredo, atitude que manchou para sempre sua memória. Não obstante, atribuiu o método a Tartaglia. embora o processo continuasse a ser conhecido como a “regra de Cardano”.

Durante um período de sua vida, Cardano usou dos jogos de cartas, dados e xadrez para ganhar a vida, o que se tornou um vício. Destacamos que ele tinha um vasto conhecimento sobre probabilidades, fato que lhe proporcionou vantagens sobre seus adversários.

Em 1537, publicou seus dois primeiros livros, com assuntos variados que falavam sobre medicina, matemática, física, astronomia, astrologia, retórica, história natural, ética, dialética e música e episódios de sua vida. Publicou, ainda, o livro *Liber de Ludo Aleae* que apresentava estudos nas áreas de probabilidade, hidrodinâmica, mecânica e geologia. Enfatizamos, também, que Cardano publicou duas enciclopédias de ciência natural. Não seria exagerado dizermos que Cardano é o iniciador do estudo matemático das probabilidades. Com efeito, Cardano foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória para calcular a quantidade de probabilidades favoráveis num evento aleatório e, assim, poder calcular a probabilidade de ocorrência do evento como razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidade.

2.1.4 Pierre Fermat (1601 – 1665)

Pierre de Fermat nasceu no dia 17 de agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomages, França, e morreu no dia 12 de janeiro de 1665 em Castres, França. Foi advogado e oficial do governo em Toulouse pela maior parte de sua vida. A matemática era o seu maior passatempo. Pierre de Fermat foi o maior matemático do século XVII, mas sua influência foi limitada por falta de interesse em publicar suas descobertas que são conhecidas principalmente pelas cartas a amigos e anotações. Suas cartas sugerem que era um homem envergonhado e reservado, cortês e

afável, mas um pouco distante. Sua vida externa era tão calma e ordenada como se poderia esperar de um juiz de província com senso de responsabilidade e de seu trabalho.

Um capítulo menor mas significativo de sua vida intelectual começa quando Blaise Pascal, o diletante precoce de Matemática e Física, escreveu a ele em 1654 falando sobre algumas questões sobre certos jogos de azar jogados com dados. Na correspondência que se seguiu nos diversos meses seguintes, eles desenvolveram juntos os conceitos básicos da teoria das probabilidades. Fermat redescobriu e aperfeiçoou a técnica de Cardano, baseando o cálculo de probabilidades no cálculo combinatório, bem ao estilo que hoje empregamos rotineiramente.

2.1.5 Blaise Pascal (1623 – 1662)

Blaise Pascal foi um físico, matemático, filósofo e teólogo francês. Criador da Teoria das Probabilidades e da "Máquina Aritmética" que nasceu em Clermont-Ferrand, França, no dia 19 de junho de 1623. Recebeu uma boa educação, baseada em sólidos princípios morais, concomitante ao ensino da história e filosofia. Órfão de mãe desde cedo, teve a sua educação aos cuidados do pai. Prodígio, aos 11 anos escreveu um tratado sobre os sons, baseado nas suas experiências. Aos 17, inventou a "máquina aritmética", que evoluiria para a máquina de calcular.

Pascal redescobriu e aperfeiçoou a técnica de Tartaglia, que se baseava no uso do que hoje, no Brasil e vários outros lugares, chama-se de triângulo aritmético de Pascal (na Itália, o triângulo aritmético é chamado de triângulo de Tartaglia, mas a verdade é que esse triângulo já era conhecido há séculos pelos indianos, chineses e pelos islamitas). Dessa maneira, conseguiram mostrar, cada um a seu modo, que:

- Em 24 lances de um par de dados, a probabilidade de ocorrer, ao menos uma vez, um duplo-seis é de 49,1%.
- Em 25 lances de um par de dados, a probabilidade de ocorrer, ao menos uma vez, um duplo-seis é de 50,6%.

Diz-se, geralmente, que a Teoria das Probabilidades originou-se com Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), devido à curiosidade de um cavalheiro, o Chevalier de Méré, jogador apaixonado, que em cartas discutiu com

Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas. Despertando seu interesse pelo assunto, Pascal correspondeu-se com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas. No entanto, percebeu-se imediatamente a utilidade da Teoria das Probabilidades para estudar situações como taxas de mortalidade, prêmios de seguros, etc. São inúmeras, ainda no século XVIII, as publicações estatísticas sobre impostos, doenças, condenações, etc., organizadas pelos governos, que viram logo o poder deste instrumento de observação social. Em correspondência com Fermat, durante o Verão de 1654, Pascal estabeleceu os fundamentos da Teoria das Probabilidades.

2.1.6 George-Louis Leclerc, o Conde de Buffon (1707 – 1788)

Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, nasceu em Montbard, França, em 7 de setembro de 1707. cursou direito, mas logo passou ao estudo das ciências naturais, da física e da matemática. Aos 26 anos ingressou na Academia de Ciências e em 1739 tornou-se responsável pelo Jardim do Rei, em Paris. Em 1749 saíram os três primeiros volumes de sua obra capital, *Histoire naturelle, générale et particulière*. Buffon usou um método de classificação natural ao estabelecer a existência dos princípios de continuidade e de afinidade entre as espécies. A carreira de Buffon centrava-se em um único e enorme projeto: uma enciclopédia que ele chamou *Histoire Naturelle*, na qual ele planejava que tivesse tudo que era conhecido na sua época sobre o mundo natural.

Em maio de 1733 o matemático e naturalista francês George-Louis Leclerc, o Conde de Buffon, realizava estudos sobre probabilidade e um dos problemas mais antigos da interseção entre Geometria e Probabilidade foi submetido por ele à Académie Royale des Sciences um artigo em que, dentre outros problemas geométricos, estabelecia o seguinte problema:

“Sobre um plano formado apenas por placas paralelas e iguais, joga-se uma haste de comprimento determinado e que suponhamos de largura desprezível. Quando este objeto cairá sobre uma única placa?”.

Buffon então determinou a probabilidade de um objeto, como uma agulha, de comprimento L intersectar uma das linhas paralelas separadas por uma distância d e

dispostas sobre o plano quando a agulha é jogada de forma aleatória sobre o plano. Tal proposição é por muitos considerada a primeira aplicação do Método de Monte Carlo. O problema é também conhecido como “Problema de Buffon-Laplace”, pois no ano de 1812 Laplace o considerou em seu tratado Teoria de Probabilidades, em que não atribui a origem do problema ao conde de Buffon.

3 PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

O presente trabalho tem o interesse de apresentar as aplicações da probabilidade geométrica com ênfase no problema das agulhas de Buffon, problemas com fractais e o problema do Macarrão. Para isso faremos um pequeno estudo sobre probabilidade e mais adiante sobre geometria. Estudo este que nos possibilitará a uma maior compreensão a respeito das aplicações que serão apresentadas nos próximos capítulos.

3.1 Experimento Aleatórios

Podemos encontrar dois tipos de fenômenos na natureza: deterministas e aleatórios. Os fenômenos deterministas são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de ocorrências verificadas. Nos fenômenos aleatórios, mesmo que as condições sejam sempre as mesmas, os resultados finais de cada tentativa do fenômeno ou experimento serão diferentes e não previsíveis. Abaixo, citaremos alguns experimentos aleatórios:

1. Lançamento de uma moeda
2. Lançamento de um dado e observar o número da face de cima
3. Sexo do filho de um casal
4. De um baralho de cartas, selecionar uma carta ou um naipe.
5. Um termômetro que registra a temperatura continuamente, num período de 24 horas em determinada localidade e em uma data específica.
6. Selecionar, ao acaso, um habitante do Ceará e medir sua altura em metros.
7. Escolher, ao acaso, um ponto do círculo de raio 1 centrado na origem.

Os exemplos trazem consigo características que só aparecem no experimento aleatório como:

(A) Cada experimento poderá ser repetido várias vezes sob condições essencialmente inalteradas.

(B) Muito embora não sejamos capazes de afirmar que resultado particular ocorrerá, seremos capazes de descrever o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento.

(C) Quando o experimento for executado repetidamente, os resultados individuais parecerão ocorrer de uma forma acidental. Contudo, quando o experimento for repetido um grande número de vezes, uma configuração definida ou regularidade surgirá. É esta regularidade que torna possível construir um modelo matemático preciso, com o qual se analisará o experimento.

3.2 Espaço Amostral

Para cada experimento aleatório definiremos o espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis. Seja ε o espaço amostral do experimento.

Dos experimentos aleatórios acima, vamos destacar o espaço amostral de cada um:

1. Lançamento de uma moeda: {Cara, Coroa}
2. Lançamento de um dado e observar o número da face de cima: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
3. Sexo do filho de um casal: {menino, menina}
4. De um baralho de cartas, selecionar um naipe: {copas, ouros, espadas, paus}
5. Um termômetro que registra a temperatura continuamente: podemos admitir que a temperatura em determinada localidade nunca possa ocorrer acima ou abaixo de certos valores. Fora esta restrição, poderemos aceitar a possibilidade de que qualquer temperatura em um intervalo entre o valor mínimo e máximo.

Com o intuito de descrever um espaço amostral associado a um experimento aleatório; devemos ter uma ideia bem clara daquilo que estamos observando. Por

isso, devemos falar de “um” espaço amostral associado a um experimento e não de “o” espaço amostral associado a um experimento. Um mesmo experimento pode apresentar mais de um espaço amostral.

3.3 Eventos

Seja ε o espaço amostral do experimento aleatório. Todo subconjunto $A \subset \varepsilon$ será chamado de evento.

O espaço amostral e o evento são conceitos importantes relacionados ao conteúdo de probabilidade e análise combinatória, segundo Morgado *et al.* (1991).

Quando explicitamos qual é o conjunto dos possíveis resultados do experimento e calculamos o número de elementos contidos nele, este conjunto é chamado de espaço amostral, ou seja, espaço amostral que é representado usualmente pela letra grega ε , é o conjunto de todos os resultados possíveis. Os elementos do espaço amostral são chamados eventos elementares. Os subconjuntos do espaço amostral serão eventos. Morgado *et al.* (1991, p. 121).

No lançamento de um “dado”, isto é, um cubo com faces numeradas de 1 a 6, temos que o espaço amostral ε é composto de seis resultados possíveis: $\varepsilon = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, analisando o espaço amostral ε , podemos definir inúmeros eventos que serão subconjuntos do espaço amostral, a exemplo de:

- Número par: $A = \{2,4,6\}$;
- Número primo: $B = \{2,3,5\}$;
- Número menor que 2: $C = \{1\}$;
- Número maior que 6: $D = \emptyset$;
- Número menor que 7: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Um casal tem três filhos, isto é, o espaço amostral ε quanto ao sexo dos filhos deste casal é composto por oito resultados possíveis, usando H para representar menino e M para representar menina, temos: $\varepsilon = \{HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH, MMM\}$, analisando o espaço amostral ε , podemos definir inúmeros eventos que serão subconjuntos do espaço amostral, a exemplo de:

- Dois filhos de um sexo e um de outro: $A = \{HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH\}$;
- Três do mesmo sexo: $B = \{HHH, MMM\}$.

Como um evento é um subconjunto de um experimento aleatório, vamos apresentar a notação de conjuntos para a linguagem de conjuntos. Iremos apresentar as combinações de eventos para adquirir novos eventos.

- ✓ Se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem.

$$\text{Notação: } A \cup B = \{x \in \mathcal{E} / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- ✓ Se A e B forem eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem.

$$\text{Notação: } A \cap B = \{x \in \mathcal{E} / x \in A \text{ e } x \in B\}$$

- ✓ Se A for um evento, \bar{A} será o evento que ocorrerá se, e somente se, *não* ocorrer A .

- ✓ Se A_1, A_2, \dots, A_n for qualquer coleção finita de eventos, então, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, *ao menos* um dos eventos A_i ocorrer.

- ✓ Se A_1, A_2, \dots, A_n for qualquer coleção finita de eventos, então, $\bigcap_{i=1}^n A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, *todos* os eventos A_i ocorrerem.

Dois eventos, A e B , são denominados mutuamente excludentes, se eles não puderem ocorrerem juntos.

Os eventos podem ser simples ou compostos. Evento simples é aquele associado a apenas um resultado presente em um espaço amostral. No lançamento de uma moeda temos dois eventos simples: $A = \{\text{cara}\}$ e $B = \{\text{coroa}\}$. Evento composto, por sua vez, é aquele associado a mais de um resultado presente em um espaço amostral. No lançamento de um dado podemos considerar, entre outros, os seguintes eventos compostos: $C = \{2, 4, 6\}$, $D = \{2, 3, 5\}$ e $E = \{1, 2, 4, 5\}$.

Evento certo é aquele que ocorre em qualquer realização do experimento não-determinístico.

Evento impossível é aquele que não ocorre em nenhuma realização de um experimento não-determinístico.

Evento complementar – para um evento A qualquer, um evento \bar{A} é chamado de evento complementar de A quando ele é formado por elementos que pertencem ao espaço amostral ε e não pertencem ao evento A .

3.4 Frequência Relativa

Uma das características fundamentais do conceito de experimento não-determinístico baseia-se no fato de que não é possível saber qual resultado particular ocorrerá a partir de uma realização deste experimento. Em outras palavras, se A for um evento associado à um experimento não-determinístico ε , então não é possível afirmar com certeza que A irá ocorrer ou não. Por esta razão, torna-se importante tentar associar um valor numérico ao evento A que indique a possibilidade de que este evento venha a ocorrer.

Suponha um experimento ε , repetido n vezes, com A sendo um evento associado à este experimento. Considerando $n(A)$ o número de vezes que o evento A ocorreu nas n repetições, a razão $\frac{n(A)}{n}$ é denominada frequência relativa do evento A durante as n repetições do experimento Ω .

A Frequência relativa f_A apresenta as seguintes propriedades, de fácil verificação:

- ✓ $0 \leq f_A \leq 1$
- ✓ $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorrer em todas as n repetições.
- ✓ $f_A = 0$ se, e somente se, A for impossível de ocorrer nas n repetições.
- ✓ Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, e se $f_{A \cup B}$ for a frequência relativa que corresponde ao evento $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

3.5 Probabilidade

Probabilidade é uma função P que associa a cada evento A de um experimento ε um número real pertencente ao intervalo $[0,1]$, satisfazendo aos axiomas:

$$I) \quad P(\varepsilon) = 1.$$

II) $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, se A_1, A_2, \dots, A_n forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos.

Teorema 1: Se os eventos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma partição do espaço amostral,

então $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$

Demonstração: Pela definição de partição, os eventos A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente exclusivos e $\bigcup_{i=1}^n A_i = \varepsilon$. Logo $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(\varepsilon)$. Usando os axiomas I e II da definição,

temos que: $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$

Teorema 2: Se A é o evento impossível, então $P(A) = 0$.

Demonstração: Como $A \cup \varepsilon = \varepsilon$, temos:

$$P(A \cup \varepsilon) = P(\varepsilon)$$

$$P(A) + P(\varepsilon) = P(\varepsilon)$$

$$P(A) = 0$$

Teorema 3: Para todo evento $A \subset \varepsilon$, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Demonstração

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = \varepsilon$$

Temos que:

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\varepsilon)$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Teorema 4: Se $A \subset \varepsilon$ e $B \subset \varepsilon$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração: Expressando os eventos $(A \cup B)$ e A como reunião de eventos mutuamente exclusivos, temos que:

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) & \text{(I)} \\ P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) temos que:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Substituindo em (I) segue que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3.6 Eventos Equiprováveis

Consideremos o espaço amostral $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ associando a um experimento aleatório.

Sendo $P(e_i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Temos que:

$$\sum_{i=1}^n P(e_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Os eventos e_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ são equiprováveis quando $P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n) = p$, isto é, quando todos têm a mesma probabilidade de ocorrer. Assim,

$$\sum_{i=1}^n p = 1 \Rightarrow np = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Logo, se os n eventos são equiprováveis, a probabilidade de cada um deles acontecer é $\frac{1}{n}$.

Para calcular a probabilidade de um evento $A \subset \varepsilon$, vamos supor que A tenha K pontos amostrais

$$A = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}, 1 \leq k \leq n$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(e_i) = \sum_{i=1}^k kp = k \frac{1}{n}$$

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Este método de avaliar a probabilidade de um evento A acontecer pode ser visto da seguinte maneira:

$$P(A) = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{n(A)}{n(\varepsilon)}$$

Exemplo: Uma moeda equilibrada é arremessada duas vezes. Seja A o evento: {aparecer uma única cara}.

Sabemos que para calcular a probabilidade de um evento acontecer devemos utilizar a razão acima; caso não se faça uma análise do espaço amostral poderia se chegar à seguinte conclusão:

O espaço amostral $\varepsilon = \{0, 1, 2\}$, onde cada resultado representa o número de caras que ocorre. Portanto a probabilidade de aparecer cara seria uma em três. Isto é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\varepsilon)} = \frac{1}{3}$$

Esta análise é incorreta pois no espaço amostral não está sendo considerados todos os casos possíveis, existem casos que não são igualmente prováveis.

A fim de aplicar a definição de probabilidade para o cálculo devemos considerar o seguinte espaço amostral:

Seja o par ordenado (M_1, M_2) , com $M_1, M_2 \in \{\text{cara, coroa}\}$, onde M_1 é o resultado obtido na face, voltada para cima, da 1ª moeda e M_2 é o resultado obtido na face, voltada para cima, do 2ª moeda.

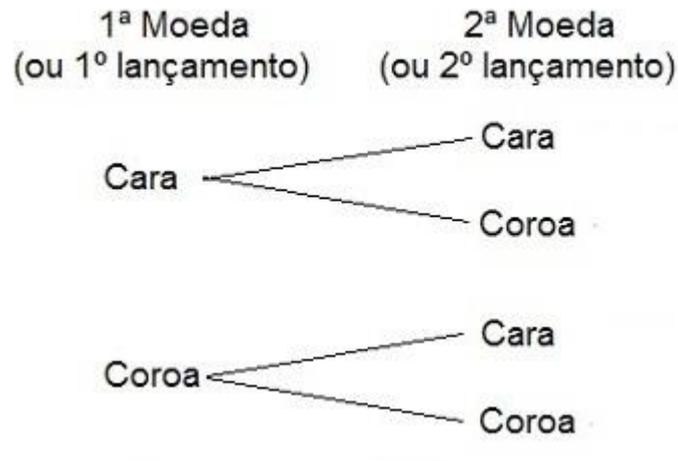


Figura 1: Evento relacionado ao lançamento de duas moedas.

Desse modo, temos 4 resultados possíveis e podemos escrever o espaço amostral do experimento como:

$$\varepsilon = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}.$$

Observe que, esperamos que cada par de resultados tenha a mesma chance de ocorrer que todos os outros pares. Dessa maneira, estamos considerando ε equiprovável. No lançamento de duas moedas o resultado de aparecer cara pode ser nenhuma vez, uma única vez e duas vezes. Assim, representemos o evento A_n como sendo:

$$A_n = \{\text{o número de aparecer cara é } n\}, \text{ com } n \in \{0, 1, 2\}.$$

$$A_0 = \{(coroa, coroa)\}.$$

$$A_1 = \{(cara, coroa), (coroa, cara)\}.$$

$$A_2 = \{(cara, cara)\}$$

A probabilidade de cada evento acontecer é:

$$P(A_0) = \frac{n(A_0)}{n(\varepsilon)} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(\varepsilon)} = \frac{2}{4}$$

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(\varepsilon)} = \frac{1}{4}$$

De acordo com os eventos destacados acima, podemos observar que o resultado de obter uma única cara é

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Exemplo: Para ganhar no jogo de dados, num único lançamento de dois dados honestos com faces numeradas de 1 a 6, um jogador precisa acertar a soma dos resultados das faces voltadas para cima. Para qual valor da soma dos resultados das faces, esse jogador tem mais chances de ganhar o jogo?

Seja o par ordenado (D_1, D_2) , com $D_1, D_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, onde D_1 é o resultado obtido na face, voltada para cima, do 1º dado e D_2 é o resultado obtido na face, voltada para cima, do 2º dado.

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Figura 2:Evento relacionado ao lançamento de dois dados.

Desse modo, temos 36 resultados possíveis e podemos escrever o espaço amostral do experimento como:

$$\varepsilon = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}.$$

Observe que, esperamos que cada par de resultados tenha a mesma chance de ocorrer que todos os outros pares. Dessa maneira, estamos considerando ε equiprovável. A soma dos resultados das faces voltadas para cima pode assumir qualquer valor inteiro de 2 até 12. Assim, representemos o evento A_n como sendo:

$A_n = \{\text{a soma dos resultados das face é } n\}$, com $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,

ou seja:

$A_n = \{(D_1, D_2) \in \varepsilon \mid D_1 + D_2 = n\}$. Dessa maneira, temos:

$$A_2 = \{(1, 1)\}.$$

$$A_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

$$A_4 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}.$$

$$A_5 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$A_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}.$$

$$A_7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

$$A_8 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}.$$

$$A_9 = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}.$$

$$A_{10} = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}.$$

$$A_{11} = \{(5, 6), (6, 5)\}.$$

$$A_{12} = \{(6, 6)\}.$$

A probabilidade de cada evento acontecer é:

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(\varepsilon)} = \frac{1}{36}.$$

$$P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(\varepsilon)} = \frac{2}{36}.$$

$$P(A_4) = \frac{n(A_4)}{n(\varepsilon)} = \frac{3}{36}.$$

$$P(A_5) = \frac{n(A_5)}{n(\varepsilon)} = \frac{4}{36}.$$

$$P(A_6) = \frac{n(A_6)}{n(\varepsilon)} = \frac{5}{36}.$$

$$P(A_7) = \frac{n(A_7)}{n(\varepsilon)} = \frac{6}{36}.$$

$$P(A_8) = \frac{n(A_8)}{n(\varepsilon)} = \frac{5}{36}.$$

$$P(A_9) = \frac{n(A_9)}{n(\varepsilon)} = \frac{4}{36}.$$

$$P(A_{10}) = \frac{n(A_{10})}{n(\varepsilon)} = \frac{3}{36}.$$

$$P(A_{11}) = \frac{n(A_{11})}{n(\varepsilon)} = \frac{2}{36}.$$

$$P(A_{12}) = \frac{n(A_{12})}{n(\varepsilon)} = \frac{1}{36}.$$

De acordo com os eventos destacados acima, podemos observar que o resultado 7 é o que tem mais chances de ocorrer, com a seguinte probabilidade:

$$P(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 16,7\%.$$

Exemplo: O seguinte grupo de pessoas está numa sala: 5 rapazes com mais de 21 anos, 4 rapazes com menos de 21 anos, 6 moças com mais de 21 anos e 3 moças com menos de 21 anos. Os seguintes eventos são definidos:

A: a pessoa tem mais de 21 anos (a);

B: a pessoa tem menos de 21 anos (b);

C: a pessoa é um rapaz (c);

D: a pessoa é uma moça (d).

Desse modo, temos 18 resultados possíveis para o espaço amostral:
 $\varepsilon = \{5a, 4b, 6c, 3d\}$.

E os seguintes eventos e suas probabilidades:

$$A = \{5a, 6c\} \rightarrow P(A) = \frac{11}{18}$$

$$B = \{4b, 3d\} \rightarrow P(B) = \frac{7}{18}$$

$$C = \{5a, 4b\} \rightarrow P(C) = \frac{9}{18}$$

$$D = \{6c, 3d\} \rightarrow P(D) = \frac{9}{18}$$

Determine:

(A) $P(B \cup D)$

Como $B \cap D = 3d$, temos que $P(B \cap D) = \frac{3}{18}$.

Logo, pelo **teorema 4** temos que:

$$P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = \frac{7}{18} + \frac{9}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}.$$

(B) $P(\bar{A} \cap \bar{C})$

Usando os **Teorema 3** e o **Teorema 4**, temos que

$$P(\bar{A} \cap \bar{C}) = P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - \{P(A) + P(C) - P(A \cap C)\}$$

Como $A \cap C = 5a$ e $P(A \cap C) = \frac{5}{18}$, temos que:

$$P(\bar{A} \cap \bar{C}) = 1 - \left\{ \frac{11}{18} + \frac{9}{18} - \frac{5}{18} \right\} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

3.7 Probabilidade Geométrica

O conceito de Probabilidade Geométrica é pouco trabalhado no Ensino Médio. Na escola, frequentemente o ensino de probabilidade se restringe apenas à contagem de casos favoráveis e casos possíveis. Wagner (1997), ao admitir que, no Ensino Médio, a abordagem de probabilidade se restringe aos casos finitos e problemas, na maioria das vezes, de contagem de casos possíveis e favoráveis, embora uma grande problemática: no Ensino Médio, conteúdos essenciais para a formação acadêmica são insuficientemente ministrados. Porém, o trabalho com Probabilidade Geométrica pode ser muito interessante para que os alunos associem estudos de probabilidade e conhecimentos geométricos. A união da geometria com a probabilidade pode proporcionar uma visão mais ampla destes conceitos, pois possibilita a junção de dois temas distintos. Além disso, estabelece conexões que envolvem valores contínuos para eventos e espaços amostrais.

A probabilidade geométrica é uma parte do estudo da probabilidade na qual se faz necessário associar noções geométricas à resolução de problemas

probabilísticos. As noções geométricas mais utilizadas na resolução desses problemas são as de comprimento, área e volume. Segundo Eisen (1969):

Em problemas de probabilidade geométrica, os possíveis acontecimentos podem ser representados por pontos de um segmento de reta, por figuras planas ou ainda por sólidos. Desde que o número de acontecimentos seja usualmente não contável, não podemos definir probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos. Todavia, podemos ainda definir a probabilidade de um evento de uma maneira natural e calculá-la por meio de considerações geométricas.

No próximo capítulo, para a absorção do tema considera-se que a metodologia de resolução de problemas é adequada, pois desperta no leitor, o hábito do questionamento sobre suas próprias construções e estratégias de resolução. A probabilidade, como um todo consiste em resolver uma infinidade de problemas, desde os mais simples até os mais complexos, desde o lançamento de uma moeda, até o cálculo de lançamentos ou escolhas aleatórias em espaços envolvendo medidas contínuas, sejam elas de comprimento, área ou volume.

A resolução de problemas, como metodologia de ensino da Matemática, pode fazer com que os conceitos e princípios matemáticos fiquem mais compreensivos para os estudantes uma vez que eles serão elaborados, adquiridos, investigados de maneira ativa e significativa. É a apropriação compreensiva do conteúdo, pois é uma Matemática mais qualitativa em destaque. (ROMANATTO, 2012, p.303).

Na probabilidade geométrica, se tivermos uma região B do plano contida em uma região A , admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A . Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A , a probabilidade de que ele pertença a B será:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{área}A}{\text{área}B}$$

4 APLICAÇÕES DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

O objetivo deste capítulo é apresentar problemas de Probabilidade como fator de estímulo na assimilação de conceitos geométricos. Vamos apresentar uma sequência de problemas geométricos que serão resolvidos através da probabilidade.

O cálculo de probabilidades, à primeira vista, parece não ter relação com a Geometria, pois o foco central das probabilidades é calcular as chances de ocorrência de um determinado evento através da razão entre o número total de casos favoráveis e o número total de casos possíveis, enquanto a Geometria estuda as medidas e as formas. Mas essa união, aparentemente improvável, pode vir a ser muito rica do ponto de vista pedagógico. O tipo de probabilidade explorado neste capítulo é ligeiramente diferente dos problemas clássicos dos livros didáticos. Apesar disso, a forma de calcular essas probabilidades segue a definição clássica, ou seja, através de uma razão entre as situações favoráveis e as situações possíveis. Mas alguns problemas aqui apresentados quantificam os termos dessa razão em função de medidas de áreas de figuras planas ou volumes de sólidos geométricos, o que ajuda no aprendizado de fórmulas e relações de pertinência e continência. Além disso, apresentaremos outros problemas que demandam, no processo de contagem, o domínio de conceitos geométricos teóricos como raio e diâmetro da circunferência, classificação de triângulos, inscrição e circunscrição, paralelismo e perpendicularismo, intersecção de retas concorrentes e distância entre pontos.

Problema 01: Considere um segmento \overline{AB} e E, C e D pontos pertencentes a esse segmento



Figura 3: Segmento AB.

onde $\overline{AB} = 2\overline{AC} = 3\overline{AE} = 4\overline{DB}$. Escolhendo um ponto aleatoriamente em \overline{AB} , qual a probabilidade que esteja entre:

- A e C?

Seja F o evento em que se escolhe, aleatoriamente, um ponto no segmento \overline{AB} . Assim,

$$P(F) = \frac{\text{comprimento de } AC}{\text{comprimento de } AB} = \frac{AC}{2AC} = \frac{1}{2} = 50\%$$

- C e D?

Seja G o evento em que se escolhe, aleatoriamente, um ponto no segmento AB. Assim, Comprimento de \overline{CD} = comprimento de \overline{CB} - comprimento de \overline{BD} = $\frac{\overline{AB}}{2} - \frac{\overline{AB}}{4} = \frac{\overline{AB}}{4}$. Dessa forma:

$$P(G) = \frac{\text{comprimento de } \overline{CD}}{\text{comprimento de } \overline{AB}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{4}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4} = 25\% .$$

- E e C?

Seja H o evento em que se escolhe, aleatoriamente, um ponto no segmento AB. Assim, Comprimento de \overline{EC} = comprimento de \overline{AC} - comprimento de \overline{AE} = $\frac{\overline{AB}}{2} - \frac{\overline{AB}}{3} = \frac{\overline{AB}}{6}$. Dessa forma:

$$P(H) = \frac{\text{comprimento de } \overline{EC}}{\text{comprimento de } \overline{AB}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{6}}{\overline{AB}} = \frac{1}{6} \approx 16,7\% .$$

Problema 02: Seja B um ponto escolhido ao acaso sobre um segmento \overline{OA} de comprimento L. Encontrar a probabilidade P de que o comprimento do menor dos segmentos \overline{OB} e \overline{BA} seja superior a $\frac{L}{3}$. Admite-se que a probabilidade de um ponto situar-se num segmento é proporcional ao comprimento deste e não depende da posição que o ponto ocupa.



Figura 4: Segmento OB.

Consideremos os pontos $X, Y \in \overline{OA}$, com $\overline{OX} = \overline{XY} = \overline{YA} = \frac{L}{3}$.

Se B é interior a \overline{XY} , tem-se que $\text{Min}\{\overline{OB}, \overline{BA}\} > \frac{L}{3}$. Desse modo:

$$P = \frac{\overline{XY}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{L}{3}}{L} = \frac{1}{3}$$

Problema 03: Seja M o ponto médio de um segmento \overline{AB} . C é escolhido aleatoriamente em \overline{AM} e D é escolhido aleatoriamente em \overline{MB} , qual a probabilidade de que $\overline{CD} < \frac{1}{4}\overline{AB}$?

Seja L o evento em que $\overline{CD} < \frac{1}{4}\overline{AB}$. Adotando um sistema de coordenadas na reta \overline{AB} de tal forma que a coordenada de A seja o 0 e a de B seja 1. Sejam x e y, respectivamente, as coordenadas de C e D.

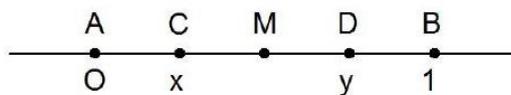


Figura 5: Segmento unitário AB.

De acordo com as hipóteses, temos que:

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2} < y < 1$$

Adotando agora um sistema de eixos ortogonais, temos que o conjunto de pares ordenados que satisfazem as condições acima formam o quadrado FGHI.

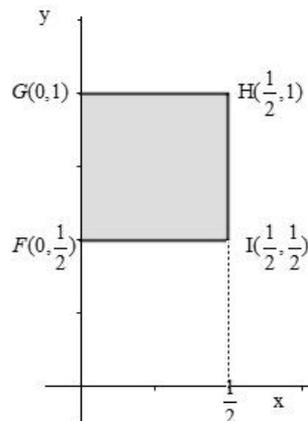


Figura 6: Quadrado FGHI.

Como $\overline{CD} = y - x$ e $\overline{AB} = 1$, temos que a condição $\overline{CD} < \frac{1}{4}\overline{AB}$ é equivalente a

$$y - x < \frac{1}{4}, \text{ ou seja}$$

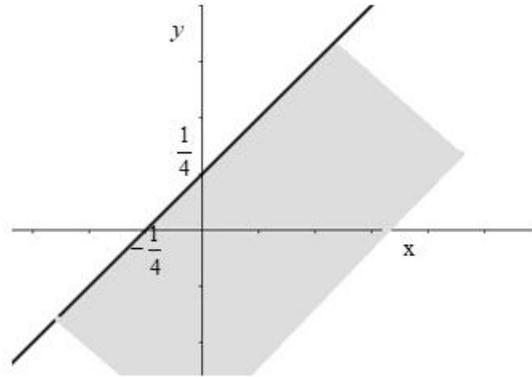


Figura 7: Região formada pela inequação $y - x < 1/4$.

Lembrando que $x > 0$ e $y > 0$ e representando os dois gráficos simultaneamente temos que

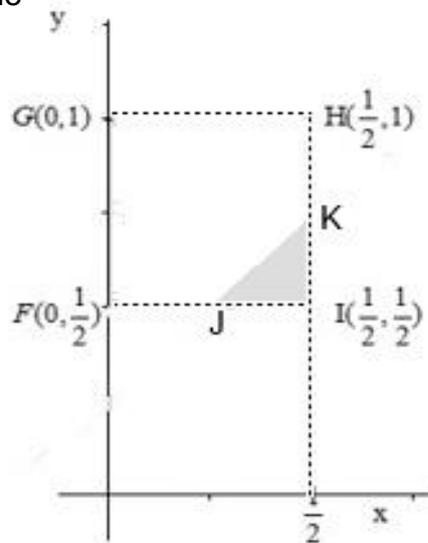


Figura 8: Interseção das Figura 6 e Figura 7.

Com $J = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $K = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Assim, a probabilidade será

$$P(A) = \frac{\text{área do triângulo } JKI}{\text{área do quadrado } FGHI} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{8}$$

Problema 04: Consideremos uma família de retas paralelas em \mathbb{R}^2 , onde quaisquer duas adjacentes são distantes de $2a$. Determinar a probabilidade P de que uma moeda de raio r ($r < a$), lançada ao acaso sobre o plano, não intercepte nenhuma das retas.

Chamando de y a distância entre o centro da moeda e um eixo equidistante das duas paralelas mais próximas

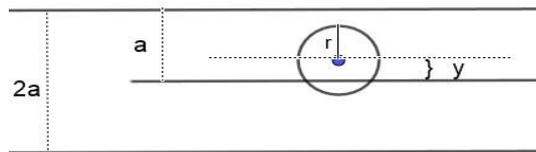


Figura 9: Duas retas paralelas em \mathbb{R}^2 .

É fácil observar que a moeda não intercepta retas, desde que $y < a - r$. Assim, o lugar geométrico do centro da moeda deverá ser a região retângular infinita, como apresentada abaixo.

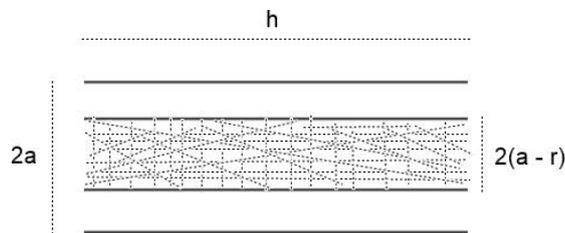


Figura 10: Lugar geométrico que representa os casos favoráveis.

Assim:

$$P(A) = \frac{\text{área hachurada}}{\text{área total}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{2(a-r)h}{2ah} = \frac{a-r}{a}$$

Problema 05: Tendo-se tomado, ao acaso, dois números positivos x e y , que não excedem a dois, determinar a probabilidade P de que o produto xy não exceda à unidade e o quociente $\frac{y}{x}$ não exceda a dois.

A partir do enunciado do problema, temos que $x, y \in]0, 2]$, $y \leq \frac{1}{x}$ e $y \leq 2x$.

Representando e analisando essas restrições no sistema cartesiano, temos que a

região formada representa os casos favoráveis, enquanto que a região $]0, 2] \times]0, 2]$ representa os casos possíveis.

A região que representa os casos favoráveis é dada por: $A = \text{Área do triângulo ODF} + \text{Área limitada pela hipérbole } y < \frac{1}{x}$, o eixo das abscissas, a reta $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ e a reta $x = 2$.

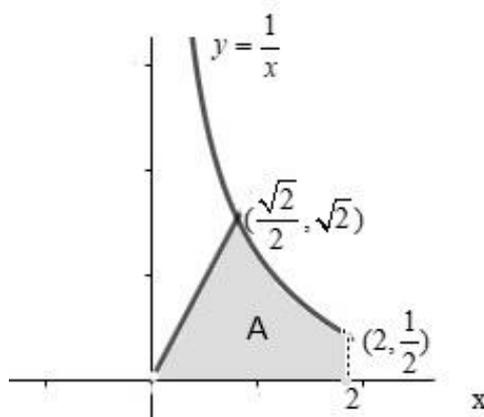


Figura 11: Área do triângulo ODF + Área limitada por uma hipérbole e o eixo-x

A região dos casos possíveis é o quadrado de lado 2. Assim, a probabilidade pedida é igual a:

$$P(A) = \frac{\text{área da região } A}{4}$$

A região A tem área igual a área do triângulo OFD mais a área limitada pela hipérbole $y < \frac{1}{x}$, o eixo das abscissas a reta $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e a reta $x = 2$. Assim, temos que:

$$\text{Área } A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\ln 2 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3 \ln 2}{2} = \frac{1 + 3 \ln 2}{2}$$

Dessa forma, a probabilidade pedida é igual a

$$P(A) = \frac{\frac{1 + 3 \ln 2}{2}}{4} = \frac{1 + 3 \ln 2}{8} \cong 0,385 = 38,5\%$$

Problema 06: Duas pessoas, que não são pessoas muito pontuais, marcaram um encontro às 16 horas. Se cada uma delas chegará ao encontro em um instante entre 16 e 17 horas e se dispõe a esperar no máximo 10 minutos pela outra, qual é a probabilidade delas se encontrarem.

Seja o evento $A = \{\text{As duas pessoas se encontrarão dentro do tempo previsto}\}$ e considere x e y os tempos decorridos a partir das 16 h, em minutos, até o momento em que as duas chegarão ao local do encontro. Vamos analisar o problema através dos valores possíveis para os tempos x e y , representado pelo par ordenado (x,y) no plano cartesiano. Para isso, vamos supor que:

(I) Espaço amostral do experimento: $0 \leq x \leq 60$ e $0 \leq y \leq 60$, com x e y em minutos. Este espaço amostral ε fica representado da seguinte maneira.

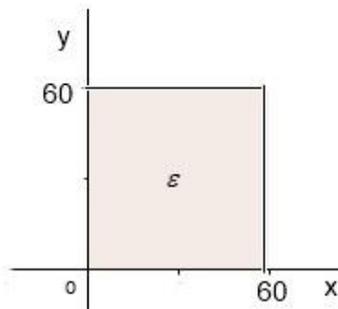


Figura 12: Representação geométrica do espaço amostral.

(II) Casos favoráveis para que o evento A ocorra: para que as duas pessoas se encontrem, a diferença entre os tempos de chegada no local de encontro deve ser menor ou igual que 10 minutos, ou seja $|x - y| \leq 10$, com x e y em minutos.

$$\text{Segue que } -10 \leq x - y \leq 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 10 \\ x - y \geq -10 \end{cases}$$

Chamando de α a região do plano cartesiano que corresponde a solução do sistema acima, isto é, a região compreendida entre as retas paralelas $x - y = -10$ e $x - y = 10$. A região representa os casos favoráveis do evento A acontecer.

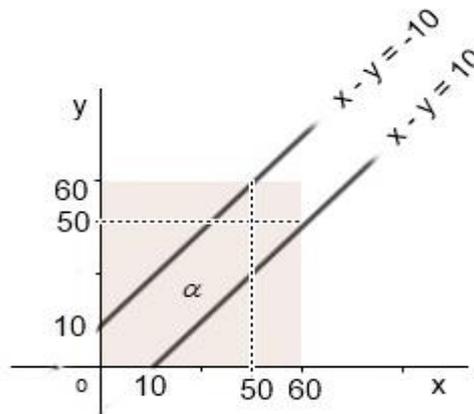


Figura 13: Região alfa correspondente a solução do sistema de inequações.

Logo, a probabilidade das amigas se encontrarem dentro do tempo estipulado é dado por

$$P(A) = \frac{\text{Área de } \alpha}{\text{Área de } \varepsilon} = \frac{60^2 - \frac{2 \cdot (60-10)(60-50)}{2}}{60^2} = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} \approx 30,5\%$$

Problema 07: Escolhem-se, aleatoriamente, três pontos não colineares num plano. Ache a probabilidade de serem os vértices de um triângulo obtusângulo.

Sejam A, B e M três pontos quaisquer do plano tais que \overline{AB} é o maior lado do triângulo formado por estes três pontos. Utilizando esse lado para base do triângulo, traçaremos uma semicircunferência AFB.

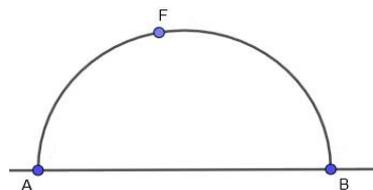


Figura 14: Semicircunferência.

Tracemos também duas circunferências com centros em A e B e com raio $\overline{AB} = r$.

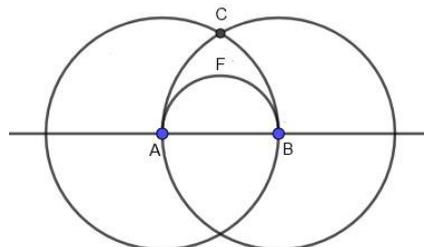


Figura 15: Interseção de duas circunferências com o raio em comum.

As circunferências se interceptaram em um ponto C; chamaremos de ogiva a figura abaixo.

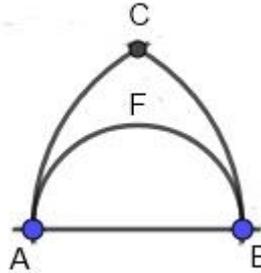


Figura 16: Ogiva.

Concluimos que o outro vértice do triângulo não pode estar no exterior ogiva, representada de base \overline{AB} e vértice C, uma vez que, por hipótese, \overline{AB} é o maior lado do triângulo.

Se o terceiro vértice M pertence a ogiva e não pertence a semicircunferência, então o triângulo ABM é isósceles e acutângulo.

Se o terceiro vértice M pertence a semicircunferência, então o triângulo formado será retângulo em M.

Se M pertence ao semicírculo, então pelo Axioma da Tricotomia, concluimos que o triângulo será obtusângulo.

Assim, para calcularmos a probabilidade precisamos ter a área do semicírculo AFB e área da ogiva.

$$P = \frac{\text{Área do semicírculo}}{\text{Área da ogiva}} = \frac{\text{Área do semicírculo}}{2 \cdot \text{Área do setor circular} - \text{Área do } \triangle ABC}$$

$$P = \frac{\pi r^2}{2 \cdot \frac{60^\circ \cdot \pi r^2}{360^\circ} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}}$$

$$P = \frac{\pi r^2}{\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}}$$

$$P = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$P = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}}$$

Problema 08: O quadrado ABCD abaixo, de lado 1 m, representa um alvo. M, N, P e Q são os pontos médios dos lados desse quadrado. Lançando uma flecha aleatoriamente nesse alvo, qual a probabilidade de ela atingir a parte hachurada?

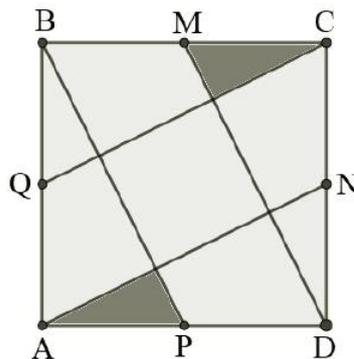


Figura 17: Quadrado ABCD de lado unitário.

Tracemos os eixos cartesianos de tal maneira que o lado \overline{AB} esteja apoiado no eixo-y e o lado \overline{AD} apoiado no eixo-x.

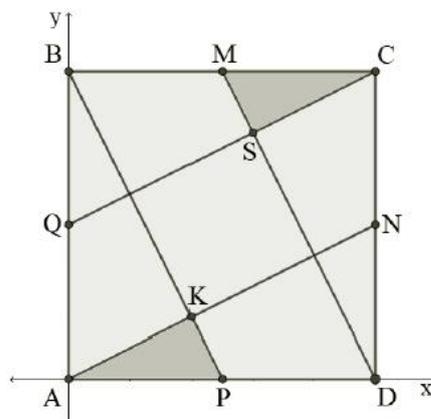


Figura 18: Quadrado com dois lados sobre os eixos cartesianos.

Encontraremos a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos $B = (0,1)$ e $P = (\frac{1}{2}, 0)$.

Chamaremos de $n_{\overline{BP}}$ o coeficiente angular da reta \overline{BP} . Assim,

$$n_{\overline{BP}} = \frac{0-1}{\frac{1}{2}-0} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2,$$

$$y = -2x + b.$$

Como $(0,1) \in \overline{BP} \Rightarrow 1 = -2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$. Dessa forma a equação reduzida da reta r é $y = -2x + 1$.

Agora, encontraremos a equação reduzida da reta s que passa pelos pontos $A = (0,0)$ e $N = (1, \frac{1}{2})$.

Chamaremos de $m_{\overline{AN}}$ o coeficiente angular da reta \overline{AN} . Assim,

$m_{\overline{AN}} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ desse modo a reta \overline{AN} será representada pela equação

$$y = \frac{1}{2}x + b.$$

Como $(0,0) \in \overline{AN} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$. Dessa forma a equação reduzida da reta s é $y = \frac{1}{2}x$.

Seja k o ponto de interseção entre as retas r e s .

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ e } y = \frac{1}{5}.$$

$$k = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

$S_{AKP} = \text{Área do triângulo } AKP$

$$S_{AKP} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_{AKP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$$

$$S_{AKP} = \frac{1}{20} m^2$$

De maneira análoga, podemos concluir que a área do triângulo MSC é $\frac{1}{20}m^2$.

Dessa forma, a probabilidade P é dada por:

$$P = \frac{2 \cdot \frac{1}{20}}{1} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 10\% .$$

Problema 09: (ENEM 2001) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município (Figura 8). Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente:

- (A) 20%
- (B) 25%
- (C) 30%
- (D) 35%
- (E) 40%

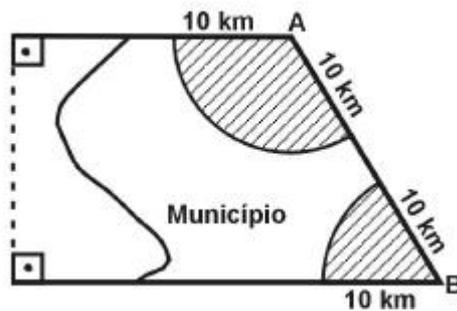


Figura 19: Município.

Observe que o ângulo A e o ângulo B são suplementares, logo, juntando as duas regiões que são atendidas pelas emissoras temos um semicírculo.

A probabilidade pedida é determinada por

$$P = \frac{\text{Área do semicírculo}}{\text{Área total}} = \frac{\frac{\pi r^2}{2}}{628} = \frac{3,14 \cdot 50}{628} = 0,25 = 25\% .$$

4.1 O Paradoxo de Bertrand

O problema proposto pelo matemático francês, Joseph Bertrand, conhecido como Paradoxo de Bertrand, que a rigor não é um paradoxo, é passível de mais de uma interpretação. O problema consiste em obter

a probabilidade para que uma corda gerada aleatoriamente em um círculo de raio $r = 1$ tenha um comprimento $x > \sqrt{3}$.

Para este problema, três possíveis soluções distintas são apresentadas, o que a princípio parece contraditório. Todavia, o que se procura esclarecer é que tais soluções surgem por causa das diferentes interpretações feitas sobre o problema.

Tomemos uma circunferência de raio 1. O lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência mede $\sqrt{3}$ e o menor arco que a corda determina mede 120° . Como estamos buscando cordas maiores que o lado do triângulo equilátero, então o seu comprimento x é tal que $\sqrt{3} < x \leq 2$ e o menor arco α que ela determina sobre a circunferência é tal que $120^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

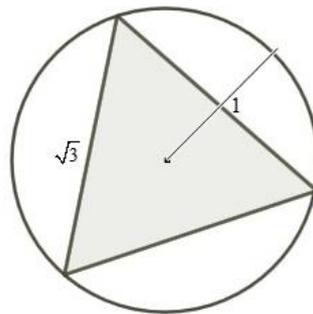
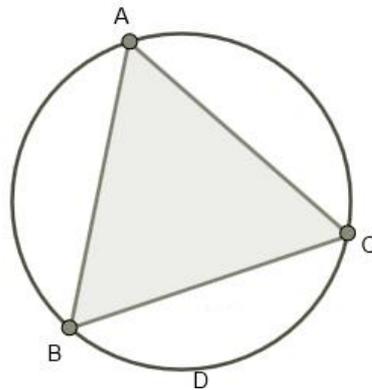


Figura 20: Triângulo Equilátero inscrito na circunferência.

1º Interpretação:

Para desenhar uma corda \overline{AD} maior que o lado do triângulo equilátero inscrito, assinale um ponto A sobre a circunferência. Considere então os pontos B e C de forma que A, B e C dividam a circunferência em três partes iguais, isto é, A, B e C sejam vértices de um triângulo equilátero.

Para que a corda \overline{AD} subtenda um menor arco maior que 120° , o ponto D deve pertencer ao menor arco BC . A probabilidade de que um ponto da circunferência, escolhido ao acaso, pertença ao arco BC é igual a $\frac{1}{3}$.



Logo, a probabilidade de que uma corda de uma circunferência seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito é igual a $\frac{1}{3}$.

2° Interpretação:

Seja O o centro da circunferência e seja \overline{PQ} um diâmetro. Vamos considerar todas as cordas perpendiculares a \overline{PQ} . É claro que PQ contém todos os pontos médios dessas cordas. Sejam M e N os pontos médios dos raios \overline{OP} e \overline{OQ} .

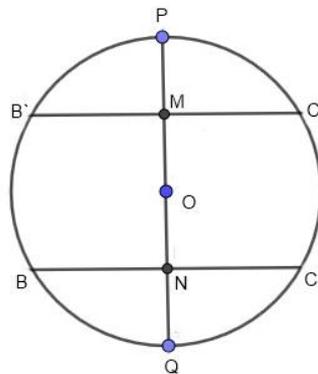


Figura 21: Circunferência de centro O cortada por três cordas.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo COM reto em M, temos que

$$\overline{OC}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{CM}^2$$

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{CM}^2$$

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Análogo para \overline{CN} . Assim, as cordas perpendiculares a \overline{PQ} que passam por M e N têm comprimentos iguais a $\sqrt{3}$. Observe que \overline{BC} e $\overline{B'C'}$ são lados de dois triângulos equiláteros rotacionados.

Portanto, todas as cordas perpendiculares a \overline{PQ} cujos pontos médios estão no segmento \overline{MN} possuem comprimentos maiores que o lado do triângulo equilátero inscrito. Dessa forma, escolher uma corda de comprimento $x > \sqrt{3}$ significa escolher um ponto do diâmetro \overline{PQ} , e é claro que a probabilidade de que um ponto de \overline{PQ} , escolhido ao acaso, pertença ao segmento MN é igual a $\frac{1}{2}$.

Concluimos que a probabilidade de que uma corda de uma circunferência seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito é igual a $\frac{1}{2}$.

3° Interpretação:

Seja O o centro da circunferência. Para cada ponto M no interior dessa circunferência, considere a corda \overline{BC} que passa por M e é perpendicular a OM. Dessa forma, desenhar uma corda significa escolher um ponto M, médio dessa corda, no interior da circunferência.

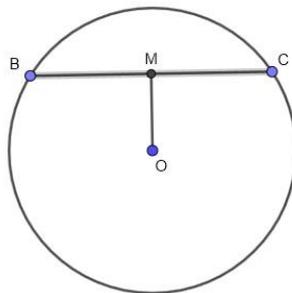


Figura 22: Circunferência de centro O cortada por uma corda

Quando $\overline{OM} = \frac{1}{2}$, temos que a corda $\overline{BC} = \sqrt{3}$, como mostrada na 2ª interpretação.

Observe que, se $120^\circ < \alpha \leq 180^\circ$, então \overline{BC} é maior que $\sqrt{3}$ e que, se $\overline{OM} > \frac{1}{2}$, então $\overline{BC} < \sqrt{3}$. Portanto, para que uma corda seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito, a sua distância ao centro da circunferência deve ser menor que $\frac{1}{2}$.

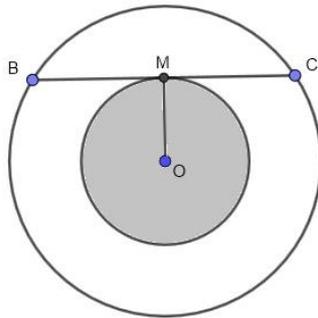


Figura 23: Círculo de centro O e raio OM.

Ora, a probabilidade de que um ponto interior à circunferência de raio 1, escolhido ao acaso, esteja no interior da circunferência concêntrica de raio $\frac{1}{2}$ é dada por

$$P = \frac{\text{área do círculo menor}}{\text{área do círculo maior}} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi 1^2} = \frac{1}{4}$$

Podemos observar que o mesmo problema gera três respostas distintas e corretas, isso se deve devido a forma de interpretar a escolha da corda ao acaso.

4.2 Problema do “Macarrão”

Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

Tomemos um segmento de reta \overline{AB} de comprimento 1. Vamos dividi-lo em três partes: uma, \overline{AP} , de comprimento x , outra \overline{PQ} , de comprimento y e a terceira, \overline{QB} de comprimento $1-x-y$.

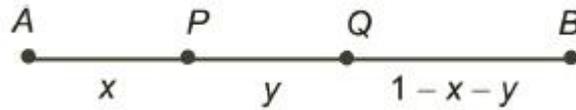
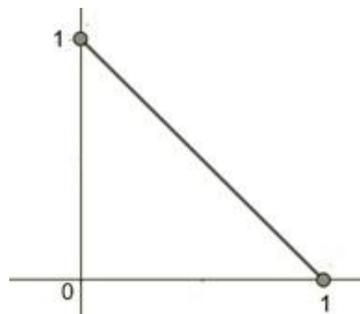


Figura 24: Segmento AB.

Para cada forma de dividir o segmento de comprimento unitário temos um par ordenado (x, y) associado a essa divisão de forma que: $x > 0$, $y > 0$ e $x + y < 1$.

Essa relação corresponde, no plano cartesiano, à região triangular que mostramos ao lado. Portanto, cada forma de dividir um segmento em três partes está agora representada por um ponto interior ao triângulo da figura.

Figura 25: Equação da reta $y + x = 1$.

É válido lembrar que nem sempre três segmentos formam um triângulo. Assim, pela desigualdade triangular, temos que:

Proposição: *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Demonstração:

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Vamos mostrar que $a < b + c$, sendo a prova das demais desigualdade análoga a esta.

Seja D um ponto sobre o prolongamento do lado \overline{AC} tal que $A \in \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$

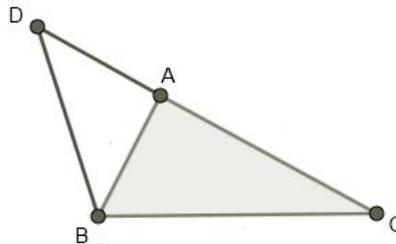


Figura 26: Triângulo ABC com lado AC prolongado.

Assim, temos que $\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c$

I) O triângulo ABD é isósceles de base \overline{BD} , assim o $\hat{A}DB \equiv \hat{A}BD$

II) A é interno ao ângulo $\hat{C}BD$, logo $\hat{C}BD > \hat{A}BD$

De I e II, concluímos que $\hat{C}BD > \hat{A}DB \equiv \hat{C}DB$.

$$\overline{BC} < \overline{DC} \Rightarrow \overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB} \text{ ou ainda, } a < b + c.$$

Assim:

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Corolário: Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que o semiperímetro do triângulo.

$$a < b + c$$

$$a + a < a + b + c$$

$$a < \frac{a + b + c}{2}$$

Análogo para todos os lados do triângulo.

Para termos um triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois. Isso é equivalente a dizer que, em um triângulo, cada lado é menor que o seu semiperímetro, que no caso do triângulo do problema o semiperímetro é igual a $\frac{1}{2}$.

Dessa forma:

$$x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2} \text{ e } 1 - x - y < \frac{1}{2}$$

ou

$$x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2} \text{ e } x + y > \frac{1}{2}$$

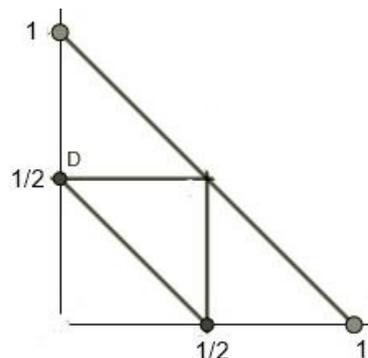


Figura 27: Lados dos triângulos formados.

O triângulo formado pelos pontos médios tem área igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo grande; assim a probabilidade de que os três segmentos formem um triângulo é 0,25, ou seja 25%.

4.3 O Problema das agulhas de Buffon

No século XVIII o matemático e naturalista francês George-Louis Leclerc, o Conde de Buffon, realizava estudos sobre probabilidade, os quais chamavam a atenção devido à sua abordagem geométrica dos problemas. Em maio de 1733 submeteu à Académie Royale des Sciences um artigo em que, dentre outros problemas geométricos, estabelecia o seguinte problema:

“Um plano é marcado por linhas paralelas equidistantes entre si. A distância entre uma linha e outra mede d e uma agulha de comprimento L ($L < a$) e de espessura desprezível será lançada aleatoriamente sobre esse plano. Qual é a probabilidade da agulha cruzar uma das linhas do plano?”.

Sejam x a distância do ponto médio da agulha à reta mais próxima e α o ângulo formado pela agulha e por esta reta.

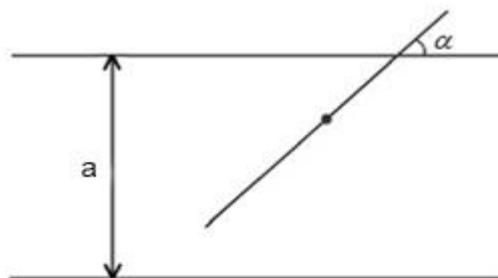
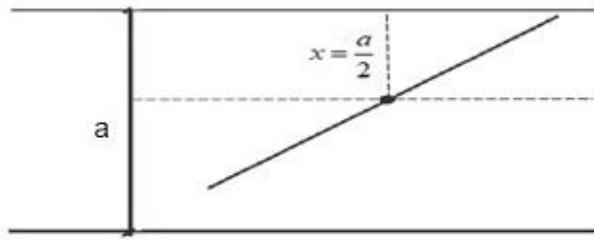


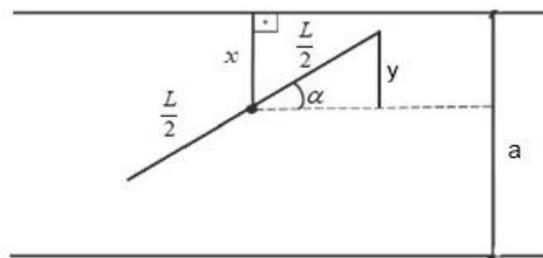
Figura 28: Duas retas paralelas.

Esses dois valores, $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$, $\alpha \in [0, \pi]$, determinam a posição da agulha em relação à reta mais próxima. Note que $x=0$, se o ponto médio da agulha cai exatamente sobre uma das retas paralelas e $x = \frac{a}{2}$ se este ponto médio interceptar a reta bissetora de duas paralelas.



Quando a agulha interceptará a reta mais próxima?

Considere uma linha imaginária passando pelo ponto médio da agulha, paralela às linhas paralelas. Seja y a distância entre uma das extremidades da agulha e tal linha imaginária. Assim, $\text{sen}\alpha = \frac{y}{\frac{L}{2}} \Rightarrow y = \frac{L\text{sen}\alpha}{2}$.



Observe que a agulha tocará a linha paralela mais próxima do seu centro se $y \geq x$.

Podemos concluir que a agulha tocará a linha paralela mais próxima do seu centro se $x \leq y = \frac{L\text{sen}\alpha}{2}$, ou seja, $x \leq \frac{L\text{sen}\alpha}{2}$, em que $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$, $\alpha \in [0, \pi]$. Temos que

o gráfico da função $x(\alpha) = \frac{L\text{sen}\alpha}{2}$.

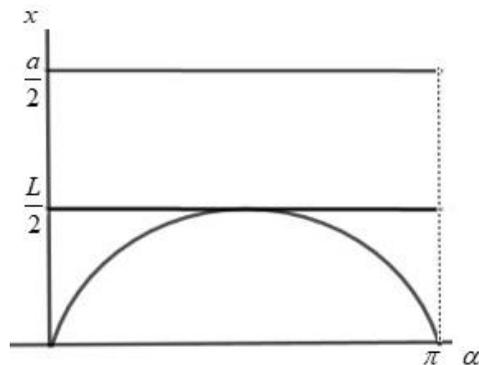


Figura 29: Gráfico da função.

O retângulo com vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(\pi, \frac{a}{2})$ e $(0, \frac{a}{2})$ corresponde a todos os possíveis pares ordenados (α, x) no lançamento da agulha. Pela inequação $x \leq \frac{L \sin \alpha}{2}$ a região sob o gráfico $x(\alpha) = \frac{L \sin \alpha}{2}$ é a região na qual a agulha toca uma linha paralela. A área desta região é dada por:

$$\int_0^{\pi} \frac{L \sin \alpha}{2} d\alpha = -\frac{L}{2} \cos \alpha \Big|_0^{\pi} = \frac{L}{2} (1+1) = L$$

Sendo A o evento dos pontos onde a agulha toca uma linha, temos que, a probabilidade de que a agulha toque uma linha é dada por

$$P(A) = \frac{L}{\pi \frac{a}{2}} = \frac{2L}{a\pi}$$

4.4 Triângulo de Sierpinski

A geometria fractal é um importante ramo da investigação matemática, sendo fonte de pesquisas, como o estudo geométrico que aparecem em sistemas dinâmicos e com aplicações em várias áreas da ciência como, por exemplo, em modelos para reconhecimento de padrões, na compressão de imagens, na detecção automática de falhas em produtos industriais, na análise da rugosidade e medição da densidade de objetos, na evolução da economia e de populações, das oscilações do coração, de problemas ecológicos e demais formas da natureza que apresentam irregularidades.

O Triângulo de Sierpinski pertence a essa classe de objetos matemáticos conhecidos como fractais, cuja principal característica é não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado. Esta característica é bem visível na figura 32. Este triângulo foi descrito por Waclaw Sierpinski em 1915 e obtem-se como limite de um processo recursivo.

A construção do Triângulo de Sierpinski pode ser feita da seguinte forma: começamos com um triângulo equilátero de lado medindo 1 unidade; o triângulo e sua região interior será chamado de S_0 .



Figura 30: Triângulo de Sierpinski 1

Esse triângulo será subdividido em 4 triângulos equiláteros menores de lados medindo $\frac{1}{2}$ unidade, por meio dos pontos médios dos lados. A região a ser removida é o interior do triângulo central (seus lados e vértices permanecem). Após esta remoção, o conjunto remanescente é chamado de S_1 .

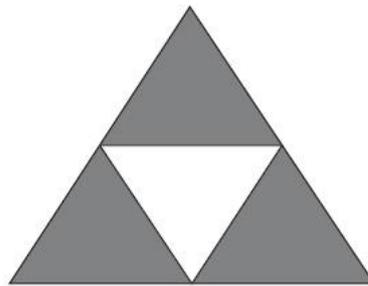


Figura 31: Triângulo de Sierpinski 2

Agora, cada um dos três triângulos restantes é dividido em triângulos ainda menores com lado medindo $\frac{1}{4}$ unidade, e os três triângulos centrais são removidos. O resultado é S_2 .

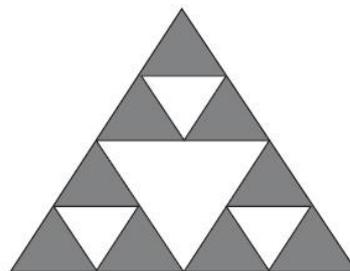


Figura 32: Triângulo de Sierpinski 3

Podemos observar que o comprimento do lado do triângulo varia conforme uma potência de $\frac{1}{2}$.

Esse processo de remoção possui alguns aspectos interessantes, observe que, inicialmente, temos um triângulo, após a primeira iteração obtemos três triângulos, na segunda, obtemos nove triângulos, e assim sucessivamente. Podemos facilmente mostrar, por indução, que o número de triângulos T_n na iteração n é dada por $T_n = 3^n$. Quando n cresce indefinidamente, o número de triângulos tende ao infinito, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.

Vamos analisar a área do triângulo de Sierpinski. Denotemos por A_0 a área do primeiro triângulo, determinaremos a área de cada um dos triângulos obtidos após as iterações.

S_n (triângulo de Sierpinski)	T_n (quantidade de triângulos)	l_n (lado do S_n)	A_n (área do triângulo de Sierpinski)
S_0	$T_0 = 1$	$l_0 = 1$	$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$
S_1	$T_1 = 3^1$	$l_1 = \frac{1}{2}$	$A_1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$
S_2	$T_2 = 3^2$	$l_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$A_2 = 3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_n	$T_n = 3^n$	$l_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$A_n = 3^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{\sqrt{3}}{4}$

Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0 qual a probabilidade de esse ponto pertencer a S_n quando $n \rightarrow \infty$?

Primeiramente, vejamos o que acontece com casos particulares:

- Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0 qual a probabilidade de esse ponto pertencer a S_1 ?

$$P = \frac{S_1}{S_0} = \frac{A_1}{A_0}$$

$$P = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$P = \frac{3}{4}.$$

- Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0 qual a probabilidade de esse ponto pertencer a S_2 ?

$$P = \frac{S_2}{S_0} = \frac{A_2}{A_0}$$

$$P = \frac{3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$P = \frac{3^2}{2^4}$$

$$P = \frac{9}{16}.$$

Assim, a probabilidade do ponto pertencer ao S_1 é de 75% e de pertencer ao S_2 é de 56,25%.

Voltando ao problema inicial:

Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0 qual a probabilidade de esse ponto pertencer a S_n quando $n \rightarrow \infty$?

$$P = \frac{S_n(n \rightarrow \infty)}{S_0} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}{A_0}$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Observe que quando n tende ao infinito o valor de $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge para zero.

Assim, a probabilidade do ponto pertencer a S_n quando $n \rightarrow \infty$ é nula.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de probabilidade, tanto em espaços discretos (quantificar) como em espaços contínuos (medir) aparece em diversas situações no cotidiano, situações voltadas ao “acaso” ou fenômenos não-determinísticos que devemos analisar para melhor compreender ou julgar de forma mais coerente o que está ocorrendo. O presente trabalho foi, especialmente, para mostrar a professores de Ensino Médio e alunos de licenciatura em matemática, o quão importante a Probabilidade Geométrica pode ser para o estudo da Geometria. O estudo diverge um pouco do que é abordado no ensino da Probabilidade dando ao leitor uma nova abordagem do assunto.

Além da probabilidade em espaços discretos (enumeráveis finitos), a abordagem da probabilidade geométrica é também de interesse, resolvendo problemas de natureza contínua, realizando cálculos probabilísticos em problemas que envolveram comprimento, área ou volumes; situações que não seriam possíveis quantificar casos favoráveis sobre casos possíveis. Espero ter contribuído para que esses problemas de geometria sejam inseridos no estudo de probabilidade e possam ser mostrados em sala de aula, tanto em nível de ensino médio quanto em nível de licenciatura, tentando atingir um dos grandes objetivos do PROFMAT, que é a melhoria do ensino da matemática no nosso país.

O trabalho é caracterizado por apresentar aplicações da probabilidade geométrica e para isso foi feito uma retrospectiva entre os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da probabilidade e também foi feito um estudo como pré-requisito para que as aplicações pudessem ser desenvolvidas.

No futuro, pretende-se dar continuidade nos estudos da probabilidade geométrica, visando experiências em sala de aula onde os alunos possam ter um convívio mais prático com o assunto estudado em sala de aula.

A elaboração deste trabalho trouxe enriquecimento à minha formação acadêmica. Espera-se que o mesmo venha a servir como fonte de apoio ou pesquisa a quem se interessar. Encerro, certo de que disponibilizo um material para

aqueles que querem conhecer um pouco mais sobre as aplicações da probabilidade geométrica.

REFERÊNCIAS

ABE, T. S.; BITTAR, M. **O ensino de probabilidade nas visões clássica, frequentista e geométrica.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador: SBEM, 2010. 1 CD-ROM.

AMARAL, Antonio (Org.). **Contribuição da SBM para a discussão sobre Currículo de Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2014. 64 slides, color. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Contribui%C3%A7%C3%A3o_da_SBM_Ensino_Meio_FIN_AL.pdf>. Acesso em: 03 abril. 2018.

BEMFICA, Andrios; ALVES, Cassiana. **Fractais: progressão e série geométrica, uma metodologia de ensino.** Osório: Revista Modelos, Vol. 1, N. 1. Agosto de 2011. ISSN 2237-7077. Disponível em: <http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf>. Acesso em: 09 jun. 2018.

BUSETTO, Daniele Trentin. **Propostas ao estudo de probabilidade no Ensino Médio.** 2010. Erechim: Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, ERECHIM, 2010. Disponível em: <http://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1260.pdf>. Acesso em: 07 mar. 2018.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.

FUGITA, F. et al. **Matemática, 2ª Série: Ensino médio.** 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2009.

GADELHA, Augusto. **Uma pequena história da probabilidade.** NOTA DE AULA TEORIA DE PROBABILIDADE I. DME/IM/UFRJ: 2004. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf>. Acesso em: 07 mar. 2018.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória Probabilidade.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. V.9.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar.** São Paulo: Atual .1985.

JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário.** Rio de Janeiro: IMPA, 1981.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.2.

KALOS, Malvin H. WHITLOCK, Paula A. **Monte Carlo Methods**. Second, Revised and Enlarged Edition. Weinheim: Wiley-VCH, 2008.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento; LIMA, Antônio Carlos Pedroso de. **Noções de probabilidade e estatística**. 7. ed. São Paulo: Edusp, 2011.

MEYER, Paul, L. **Probabilidade: Aplicação à Estatística**. São Paulo: Ed. Livro Técnico, 2000.

MORETTIN, L. G. **Estatística Básica: probabilidade e inferência**. São Paulo: PEARSON, 2010.

MOREIRA, J. A.; SALSA, I. S. **Probabilidade e estatística**. Natal: EDUFRN, 2008.

MORGADO, Augusto César de Oliveira. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro: Fundação VITAE, 2006.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. 1 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. Coleção PROFMAT.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. 2016. Disponível em: <<http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf> >. Acesso em: 19 mai. 2018.

PAIVA, M. R. **Matemática 2**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2009.

TUNALA, N. **Determinação de probabilidades por métodos geométricos**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 20, p. 16-22, 1992.

WAGNER, Eduardo. **Probabilidade Geométrica**. Revista do Professor de Matemática – n. 34. São Paulo: Editora SBM, 1997.

WELSS, David. **Antologia puzzles**. Lisboa: Replicação, 1992. 355 p.

WOODWARD, E.; HOEHN, L. **Probabilidade na Geometria do Segundo Grau**. In: LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. (Org). Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual Editora, 1994.

WAGNER, Eduardo. **O problema do macarrão e um paradoxo famoso**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, v. 34, 1997.