2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

ASPECTOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EXTREMAIS

Simone Silva Araújo [1]
José Angel Dávalos Chuquipoma[2]

Resumo: O presente artigo tem a finalidade de utilizar o processo de modelagem matemática na resolução de problemas que envolvam máximos e mínimos, como um dos meios de incentivar os alunos a interpretar, compreender e assim determinar um modelo matemático que solucione problemas dessa natureza.

Palavras-chave: problematização, aprendizagem, função do 2º grau, modelagem matemática, processo da modelagem, modelo matemático.

1 Introdução

A matemática desde tempos mais remotos é utilizada como um instrumento facilitador para organizar a sociedade de várias formas, seja ela no âmbito comercial, tecnológico e na compreensão da natureza.

Como dizia Galileu Galilei (1626) "O universo (...) não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem matemática e os seus caracteres são o triângulo, o círculo e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes, ficamos às escuras, num labirinto escuro.".

Mas o processo de ensino ainda apresenta muitas falhas que desestimulam os alunos, e hoje o grande desafio dos educadores, que disputam a atenção com os meios de comunicação de forma muito acirrada é fazer com que seus alunos se sintam importantes, curiosos, atentos e tenham prazer em aprender e buscar novos desafios.

Pensando em melhorias para o processo de ensino e aprendizagem, utiliza-se a modelagem matemática de forma a incitar os alunos a buscar novas formas e soluções para os problemas.

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: silvaaraujo.simone@gmail.com
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: jadc13@ufsj.edu.br

Durante todo o processo da modelagem matemática vamos buscar formas para que os alunos desenvolvam o gosto pela matemática, o que vai melhorar significativamente a sua interpretação e compreensão do problema assim como desenvolver a sua capacidade de imaginação.

Neste trabalho, vamos abordar vários problemas que envolvem máximos e mínimos que estão sempre presentes em atividades cotidianas e situações reais. Podemos imaginar um trajeto que um taxista deve fazer, para que o passageiro pague um valor mínimo, qual o trajeto de um carteiro para que o tempo de distribuição seja mínimo, quais os gastos que uma empresa deve cortar para que sua receita seja máxima entre outros.

Muitos desses problemas são resolvidos de forma complexa, precisando inclusive de ter conhecimento de cálculo, mas muitos deles podem ser resolvidos utilizando uma equação do 2º grau que podem ser aplicados no ensino fundamental e médio que é o nosso objetivo neste trabalho.

2 Modelagem Matemática

Modelagem matemática não é novidade, há muitos anos vários estudiosos vêm procurando resolver problemas do cotidiano, com o uso de ferramentas próprias, ou seja, aquelas em que o próprio meio em que vive lhe proporciona, buscando para isso conhecê-la e compreendê-la.

Na visão de BASSANEZI (2002), a Modelagem Matemática pode ser utilizada como estratégia de ensino e aprendizagem, sendo um caminho para tornar a Matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável.

O ponto de partida para o processo da modelagem matemática é o reconhecimento da situação do problema, o seu fator de impacto, que quanto maior for à interação, mais claro vai ficando o assunto a ser modelado.

Segundo Bassanezi (BASSANEZI, 2002, p.24), "Modelagem é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".

Ele defende ainda que a modelagem de uma situação ou problema real deve seguir uma sequência de etapas, simplificadamente visualizadas na figura abaixo.

No esquema ilustrado na Figura 1, as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas.

1. **Experimentação:** É o momento onde se processa a obtenção de dados;

2. **Abstração:** É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Nesta fase procura-se estabelecer: Seleção de variáveis, problematização, formulação de hipóteses e simplificação.

3. **Resolução:** O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente - e como num dicionário, a

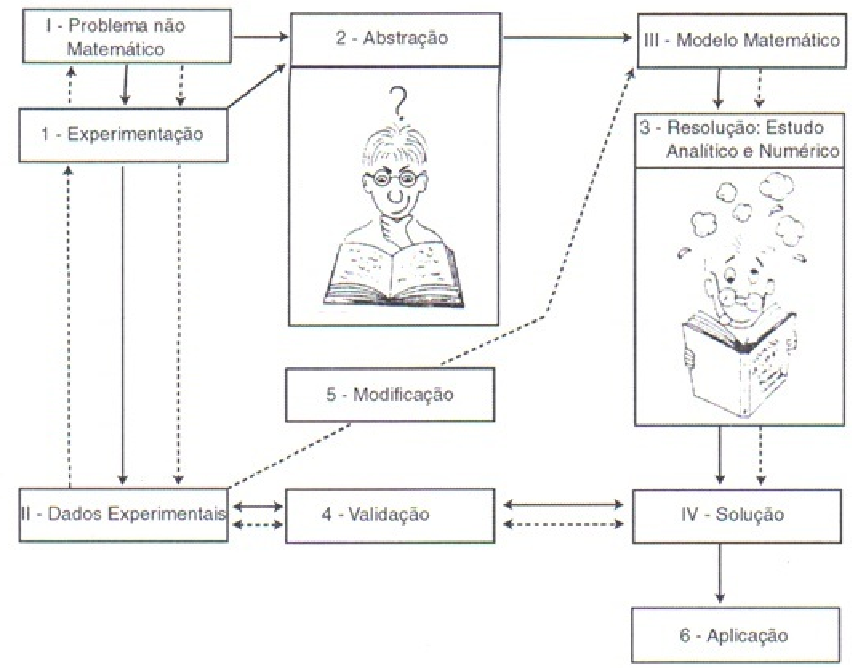

Figura 1: Esquema de uma modelagem proposta por BASSANEZI (2002).

linguagem matemática admite "sinônimos"que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural;

4. **Validação:** É o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para validação;

5. **Modificação:** Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não conduzem às previsões corretas e definitivas, pois o aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. Como nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado, agora poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos, sendo esta reformulação de modelos uma das partes fundamentais do processo de modelagem.

Maria Salett Biembengut e Nelson Hein (BIEMBENGUT e HEIN, 2005) concluem que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir.

A Figura 2 representa o esquema do processo de modelagem matemática proposta por Biembengut e Hein (BIEMBENGUT e HEIN, 2005).

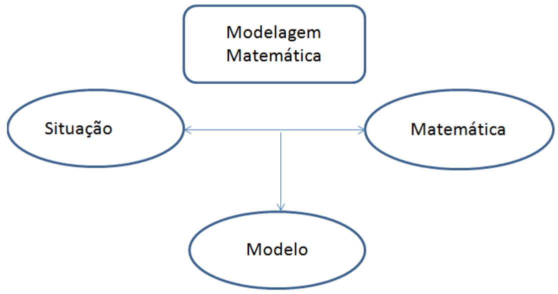

Figura 2: Esquema do processo de modelagem proposta por BIEMBENGUT e HEIN (2005).

Essa interação, que permite representar uma situação "real" com modelo matemático, envolve uma série de procedimentos.

Esses procedimentos que compõe o esquema de interação da Figura 2, podem ser agrupados em três etapas, subdivididas em seis subetapas, a saber:

a) **Interação**

- reconhecimento da situação problema;
- familiarização com o assunto a ser modelado referencial teórico;

b) **Interpretação matemática do problema**

- formulação do problema hipótese;
- resolução do problema em termos do modelo.

c) **Modelo matemático**

- Interpretação da solução;
- Validação do modelo avaliação.

Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa - Interpretação matemática do problema - mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis, etc.

A Figura 3 apresenta um esquema, mostrando a dinâmica do processo.

Para que haja uma melhor análise, compreensão e resolução de um problema proposto, George Pólya, chamado pai da moderna teoria da resolução de problemas propõe a aplicação da teoria dos 4 passos [3], exposto a seguir.

1º Passo - Compreensão do Problema

[3] Encontra-se em: http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap34.html

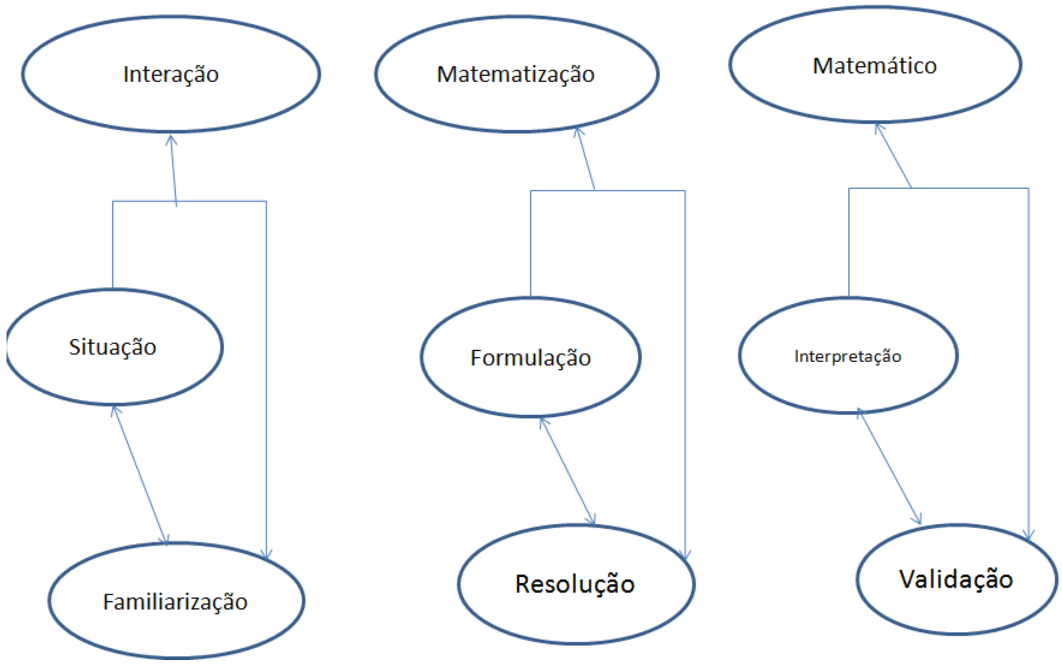

Figura 3: Dinâmica da modelagem matemática proposta por BIEMBENGUT e HEIN , (2005, p.15)

- Ler atentamente o problema, quantas vezes forem necessárias até ter certeza de total entendimento de todos os termos analisados.
- Reescrever o problema com as suas próprias palavras e se possível discutir com outras pessoas.
- Identificar as informações necessárias para a resolução do problema e verificar se todas elas podem ser encontradas no problema.

2º Passo - Dedução de um modelo matemático que descreva o problema

- Dar nomes as variáveis do problema e classificá-las em dependentes e independentes.
- Traduzir o problema para uma linguagem matemática usando uma equação ou inequação.

3º Passo - Resolução do modelo matemático e verificação da solução encontrada

- Resolver a equação utilizando métodos algébricos e verificar a veracidade do resultado encontrado ou
- Com um computador, resolver graficamente o problema e se possível através de métodos algébricos verificar a veracidade do resultado, ou

- Caso não haja outra forma de resolução, resolver o problema graficamente ou numericamente.

4º Passo - Fazendo a interpretação da solução encontrada

- Interprete o resultado encontrado e verifique se ele é possível dentro do problema proposto.

3 Modelos Matemáticos

É a representação através de uma linguagem de símbolos e de relações matemáticas de um problema criado por uma situação real.

Segundo BASSANEZI (2002, p.20), Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado e a importância desse modelo consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades.

Na visão de BIEMBENGUT e HEIN (2005, p.11) a criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente ao ser humano, sendo que a noção de modelo está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura, Matemática. Aliás, a história da Ciência é testemunha disso! O objetivo de um modelo pode ser explicativo, pedagógico, heurístico, diretivo, de previsão, dentre outros.

Dessa forma, a criação de um modelo matemático sugere a simplificação de uma determinada situação, fazendo com que o aluno participe de todas as etapas e se sinta importante no processo de ensino e aprendizado.

4 Máximos e Mínimos

Para a resolução de problemas que envolvam a determinação de máximos e mínimos é necessário que tenhamos conhecimentos prévios de algumas definições e de estabelecer critérios para calcular esses pontos.

Na Matemática, o conceito de função [4] é inteiramente ligado às questões de dependência entre grandezas variáveis. Toda função possui uma lei de formação algébrica que relaciona dois ou mais conjuntos através de cálculos matemáticos.

Definição 4.1 *Dizemos que para toda função temos um conjunto denominado domínio e sua respectiva imagem, isto é $f : X \to \mathbb{R}$ que tem como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e cujos valores de $f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, são números reais.*

Definição 4.2 *Seja [5] $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Um ponto c pertencente ao intervalo $[a, b]$ é chamado ponto de máximo absoluto de f ou, simplesmente,*

[4] Encontra-se em: http://www.brasilescola.com/matematica/introducao-funcao.htm

[5] Encontra-se em: http://http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo1/calculo1pdf/capitulo_15.pdf

ponto de máximo se $f(x) \leq f(c)$ para todo x em $[a, b]$. O valor $f(c)$ é chamado de valor máximo absoluto de f neste intervalo ou, simplesmente, valor máximo de f.

Um ponto d de $[a, b]$ é chamado ponto de mínimo absoluto de f ou, simplesmente, ponto de mínimo de f se $f(d) \leq f(x)$ para todo x em $[a, b]$. O valor $f(d)$ é chamado valor mínimo absoluto de f neste intervalo ou, simplesmente, valor mínimo de f.

Assim, se $f(c)$ é o máximo e $f(d)$ é o mínimo de f em $[a, b]$, teremos

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c),$$

para todo x em $[a, b]$. Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f.

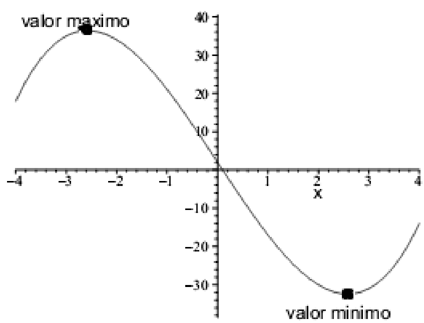

Figura 4: Ponto de mínimo e máximo

O teorema seguinte garante a existência de máximos e mínimos de uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.

Teorema 4.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então existem números c e d no intervalo $[a, b]$, tais que, $f(c)$ é o valor máximo e $f(d)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$.*

A questão natural que se coloca agora é saber onde, exatamente, se localizam estes máximos e mínimos?

Definição 4.3 *Seja*[6] *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in [a, b]$.*

1. *f possui um ponto máximo relativo ou de máximo local no ponto x_0, se existe um pequeno intervalo aberto I que contém x_0 tal que:*

$$f(x_0) \geq f(x), \text{ para todo } x \in I \cap Dom(f).$$

A imagem de x_0, $f(x_0)$, é chamada valor máximo local de f.

[6]Encontra-se em: http://www.ime.uerj.br/∼ calculo/LivroX/maxmin.pdf

2. *f possui um ponto de mínimo relativo ou de mínimo local no ponto x_0, se existe um pequeno intervalo aberto I que contém x_0 tal que:*

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ para todo } x \in I \cap Dom(f).$$

A imagem de $x_0, f(x_0)$, é chamada valor mínimo local de f.

Em geral, um ponto de máximo ou de mínimo é chamado ponto extremo.

Um ponto de máximo absoluto é um ponto de máximo local. A recíproca é falsa; analogamente para mínimo absoluto.

5 Funções Deriváveis

Proposição 5.1 *Se* [7] *$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é uma função derivável no intervalo (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ é um extremo relativo de f, então $f'(x_0) = 0$.*

A proposição nos indica que num ponto de máximo ou de mínimo relativo de uma função f, a reta tangente ao gráfico de f nesses pontos é paralela ao eixo dos x.

Observe que a proposição não garante a existência de pontos extremos.

Definição 5.1 *Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto $x_0 \in Dom(f)$. Se $f'(x_0) = 0$, x_0 é chamado ponto crítico de f.*

Pela Proposição 5.1, todo ponto extremo é ponto crítico. A recíproca é falsa.

Na verdade um ponto “candidato”a máximo ou mínimo relativo de uma função derivável f sempre deve satisfazer à equação:

$$f'(x_0) = 0$$

Teorema 5.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), exceto possivelmente num ponto x_0.*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de máximo de f.*

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de mínimo de f.*

Do teorema acima segue que num ponto de máximo ou de mínimo de uma função contínua nem sempre existe derivada.

Teorema 5.2 *Seja $f :]a, b[\to R$ uma função duas vezes derivável e $x_0 \in Dom(f)$ um ponto crítico de f. Se:*

1. *$f''(x) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo relativo de f.*

[7] Encontra-se em: http://www.ime.uerj.br/∼ calculo/LivroX/maxmin.pdf

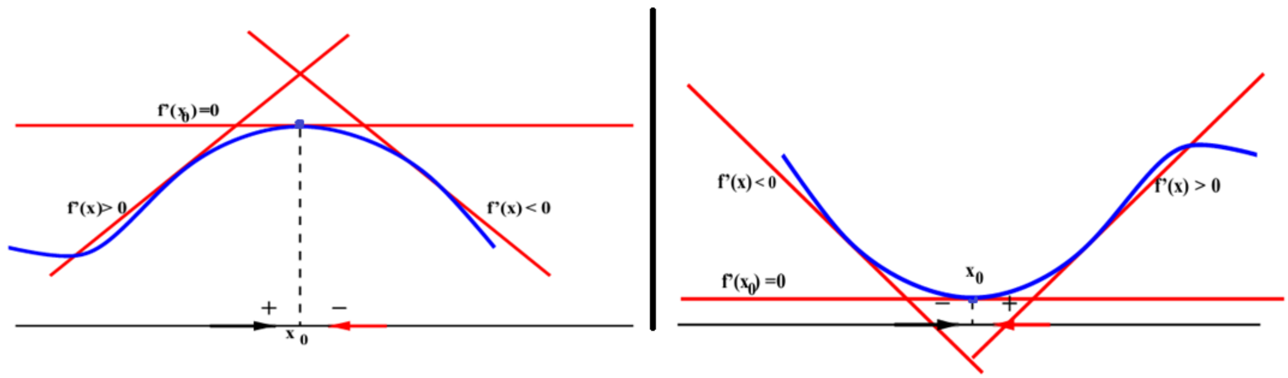

Figura 5: Exemplo de máximo e mínimo local

2. $f''(x) < 0$, *então* x_0 *é um ponto de máximo relativo de* f*.*

Dos teoremas 5.1 e 5.2 temos que os candidatos a pontos de máximos e mínimos são não só os pontos críticos, mas também, podem ser os pontos do domínio onde a função não é derivável.

No caso em que o domínio de f é um intervalo do tipo $[a, b]$, após determinar os pontos de máximo e de mínimo no intervalo (a, b), devemos calcular os valores da função nos extremos do intervalo e comparar estes valores com os valores máximos e mínimos obtidos anteriormente nos pontos críticos; o maior valor corresponderá ao máximo absoluto e o menor valor ao mínimo absoluto da função e os pontos correspondentes serão, respectivamente, os pontos de máximo e de mínimo absolutos.

No caso em que $f''(x_0) = 0$, o Teorema 5.2 não afirma nada; quando acontecer isto, é recomendável usar o Teorema 5.1.

6 Aplicação do Processo da Modelagem Matemática no Ensino

Nesta seção será feito o desenvolvimento principal do trabalho. Nos problemas citados abaixo, é mostrado todo o processo da modelagem matemática, bem como a sua aplicação. O aluno em um primeiro momento faz a leitura do problema de forma a se inteirar do assunto a ser modelado para em seguida fazer a matematização, ou seja, formular e resolver o problema em termos do modelo, para finalmente interpretar a solução encontrada, validando-se assim o seu modelo.

Problema 1: Analisando Formas e Tipos - Embalagens

Através da necessidade de transportar uma infinidade de mercadorias, foi necessário criar os primeiros recipientes e bolsas que podemos considerar como as primeiras formas de embalagens, que muitas vezes eram confeccionadas com peles de animais.

Com o tempo foram surgindo novas formas de embalagens, devido a necessidade de adequação aos mais diversos tipos de produtos. Em uma embalagem convém destacar a aparência, o custo, eficiência e comunicação. Para criar uma embalagem é necessários sabermos para que fins ela será utilizada e como será o transporte, só assim podemos adequar a melhor forma. A ideia da atividade proposta foi retirada de BIEMBENGUT e HEIN (2005) *e foi subdividida em quatro questões de modo a levar o aluno a desenvolver conceitos de geometria plana e espacial; sistemas de medidas: linear, superfície, volume, capacidade e massa e função do 2º grau, podendo ser adaptada para qualquer período escolar.*

Modelagem Matemática do Problema 1:

Confeccionando uma caixa

Essa atividade pode ser proposta em qualquer faixa etária, se for aplicada apenas para crianças, vale como exercício de coordenação motora e dependendo da faixa etária, podem ser introduzidos vários conceitos geométricos, noção de geometria espacial e se necessário, introdução de medidas lineares e de números racionais na forma decimal.

1. Fazer um desenho em perspectiva de uma caixa na forma retangular

2. Tomar uma folha de papel na forma retangular, e fazer uma caixa com medidas previamente definidas.

3. Com o uso de régua e lápis, fazer as marcações adequadas em todas as bordas.

4. Fazer as dobraduras necessárias.

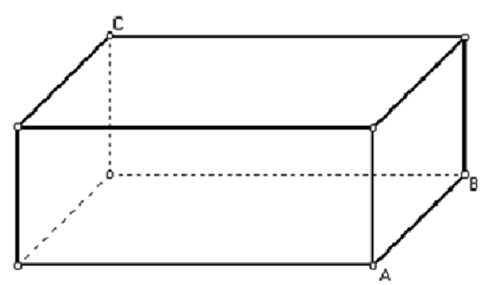

Figura 6: Caixa no formato de um paralelepípedo

Quantidade de Material utilizado

Essa parte pode ser introduzida a partir do 6º ano, aproveitando para falar da preocupação em confeccionar embalagens funcionais, de baixo custo e onde se utilize a quantidade mínima de material.

Abrir a embalagem, mostrando a sua planificação e calculando as áreas das figuras planas que a compõem.

Se essa atividade for desenvolvida em séries iniciais é conveniente o uso de quadrados de 1 cm de lado onde será oportuno cobrir toda a superfície planificada com quadrados sem sobreposição.

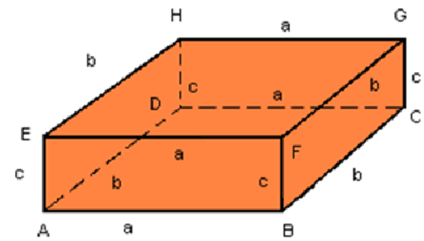

Figura 7: Paralelepípedo de arestas medindo a, b e c.

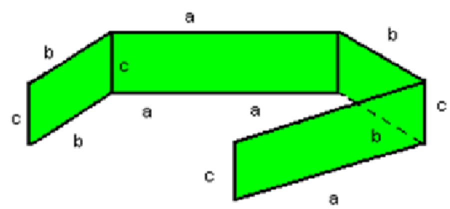

Figura 8: Área lateral do paralelepípedo $A_l = 2ac + 2bc$

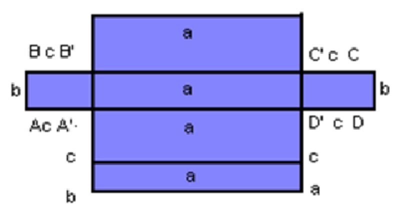

Figura 9: Área total do paralelepípedo $A_t = 2(ab + ac + bc)$

A preocupação agora é mostrar para os alunos que podemos confeccionar uma caixa a partir de uma folha quadrada de modo que seja utilizando uma quantidade mínima de material, mas que haja um máximo de aproveitamento, neste momento é oportuno apresentar o conceito de função, função polinomial, pontos críticos e domínio e no curso superior pode ser explorado a ideia de volume máximo com a aplicação da derivada.

Formulação e Resolução

Dispondo de uma folha de papel na forma quadrada com lado medindo 30 cm, queremos saber qual a medida da altura para que a caixa a ser construída tenha volume máximo, o tipo de função e seu domínio de validade.

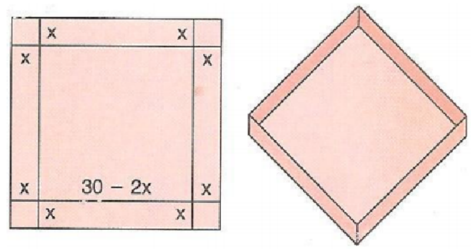

Figura 10: Construção da caixa no forma de um paralelepípedo de altura x.

Primeiro passo é encontrar a equação que determina o volume da caixa em função da altura. Nesse momento, utilizamos a primeira etapa da modelagem, que consiste num reconhecimento da atividade proposta e também de uma familiarização com o assunto a ser modelado, onde pode ser atribuído valores para cada uma das dimensões, para que os alunos possam observar a variação do volume de acordo com os valores atribuídos.

$$V(x) = A_b \times h,$$

onde A_b é área da base e h é a sua altura.

A segunda etapa do processo de modelagem inicia-se com a formulação da atividade proposta e com a resolução da atividade em termos de modelo.

Logo, temos para o volume a função:

$$V(x) = (30 - 2x)^2 x, \quad 0 < x < 15$$
$$V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

Representação Gráfica da Função

No gráfico representado na Figura 11, podemos observar seus pontos críticos ou seja de máximo local e mínimo local, justificando que a derivada é igual a zero.

Através da derivada de $V(x)$, calculamos a altura que permite encontrar um volume máximo da caixa a ser construída.

Sendo $V(x) = (30 - 2x)^2 x,\ 0 < x < 15$, ao calcular a derivada temos:

$$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900.$$

Utilizando a proposição 5.1, temos que $V'(x) = 0$, encontramos $x_1 = 15$ e $x_2 = 5$ e como $0 < x < 15$ o valor de x_1 não atende ou estabelecido (**validação da solução**), portanto $x_2 = 5$ será o valor da altura procurada para que tenhamos o volume máximo.

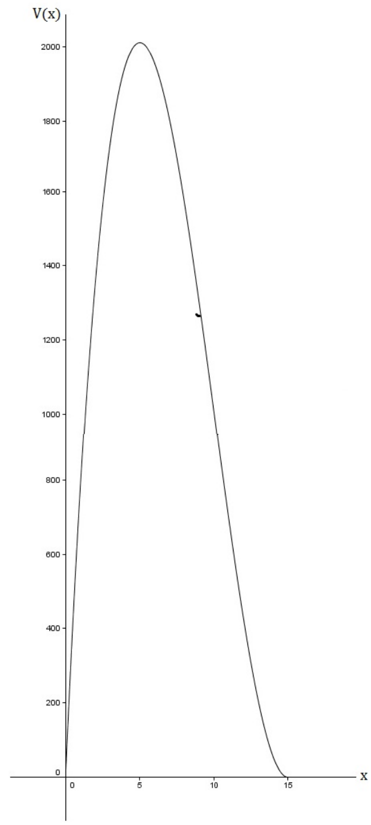

Figura 11: Representação do Volume

Avaliação

Nesse momento é pertinente fazer o uso da terceira etapa de modelagem para analisar a atividade proposta. Verificando a capacidade de interpretar e solucionar problemas e mostrando aos alunos, a importância da Matemática em seu cotidiano.

Problema 2:

Considere as parábolas [8] $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 4$. Determine as dimensões de um retângulo cujos vértices inferiores estão sobre a parábola $y = x^2 - 4$ e os superiores sobre a parábola $y = -x^2 + 4$, de tal forma que a área desse retângulo seja máxima.

Modelagem Matemática do Problema 2:

Faz-se uma leitura da situação problema proposta, utilizando o primeiro passo da modelagem, onde é feita a interação com o mesmo e verifica - se que os modelos matemáticos apresentados são funções do 2º grau com concavidades distintas.

[8] Encontra-se em: http://http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo1/calculo1pdf/capitulo_15.pdf

Espera-se que o aluno faça as seguintes considerações:

$y = x^2 - 4$ é uma parábola cuja concavidade é voltada para cima, logo possui um valor mínimo e $y = -x^2 + 4$ é uma parábola cuja concavidade é voltada para baixo, logo possui valor máximo.

De forma a fazer com que o aluno se inteire mais da situação, é conveniente propor a eles que desenhem possíveis situações de forma a chegar a uma resolução para o problema proposto, utilizando-se assim da segunda etapa do processo de modelagem que consiste na formulação e resolução da atividade em termos de modelo.

O valor da área depende da posição dos vértices do retângulo.

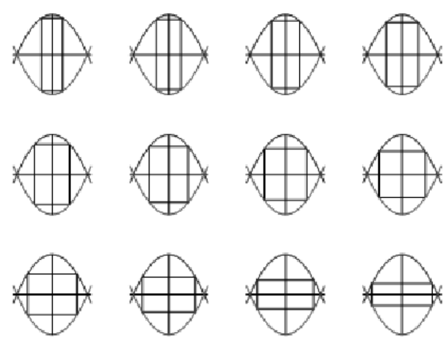

Figura 12: Alguns exemplos de retângulos no contexto do problema.

Passamos então ao processo de resolução do problema.

Neste momento de resolução,de acordo com a Figura 13, convém lembrar ao aluno sobre simetria para que ele consiga criar um modelo matemático.

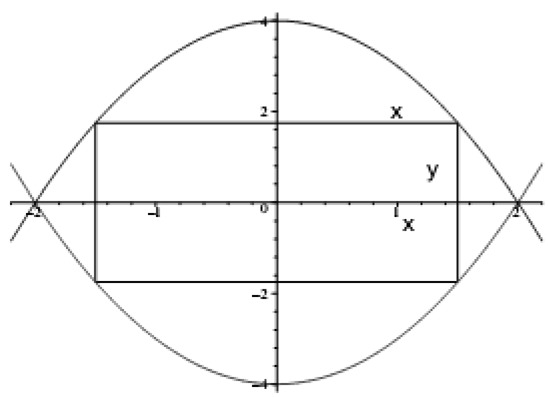

Figura 13: Uso da simetria no processo de resolução do problema.

Devemos determinar as dimensões que fornecerá a área máxima. Pela simetria da figura abaixo, temos que a área $A(x)$ é dada por $A(x) = 4xy = 4(-x^2 + 4) = -4x^3 + 16x$, para x variando no intervalo [0,2]. Como $A(x)$ é contínua nesse intervalo, o teorema dos valores extremos garante que esta função tem um máximo absoluto em [0, 2]. Além disso, este máximo ocorre em um dos extremos do intervalo ou num ponto crítico da função. Como a derivada da função $A(x)$ é um polinômio do segundo grau, os únicos pontos críticos de A são os pontos onde a sua derivada se anula. Determinar estes pontos críticos, portanto, é equivalente a resolver à equação $A'(x) = 0$.

Fazendo a **resolução do problema** em termos de modelo. Sendo $A'(x) = -12x^2 + 16 = 0$ então:

$$-12x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Nesse momento, vamos fazer o uso da terceira etapa da modelagem, onde interpretamos a solução e fazemos a **validação do modelo**.

O ponto crítico que nos interessa é o ponto $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, pois o outro não pertence ao intervalo [0, 2]. Comparando os valores da função A neste ponto e nos pontos 0 e 2 (extremidades do intervalo), obtemos:

$$A(0) = -4.0^3 + 16.0 \Leftrightarrow A(0) = 0$$

$$A(2) = -4.2^3 + 16.2 \Leftrightarrow A(2) = 0$$

$$A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -4\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 + 16\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ simplificando obtemos } A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{64\sqrt{3}}{9}$$

Portanto, o ponto de máximo para esta função ocorre em $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, consequentemente, o retângulo de área máxima terá as seguintes medidas para as suas dimensões:

Retângulo de base $2x = 2(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ e de altura $2y = 2[-(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + 4] = 2(\frac{-12}{9} + 4) = \frac{16}{3}$.

Problema 3: Optimização na Biologia

Um peixe nada contra a corrente a uma velocidade constante v, em relação a água. A própria água tem uma velocidade v_1 em relação ao fundo. O peixe tenciona alcançar um ponto a uma distância s rio cima. A energia requerida é essencialmente determinada pelo atrito com água e pelo tempo t necessário para alcançar o objetivo. Experiências tem demonstrado que esta energia é $E = c.v^k.t$ onde $c > 0$ e $k > 2$ são certas constantes (k depende da forma do peixe). Sendo dado v_1, que velocidade v minimiza a energia?

Modelagem Matemática do Problema 3:

Após fazer uma leitura do problema utilizamos o primeiro passo da modelagem onde é feito o reconhecimento e a familiarização com o assunto.

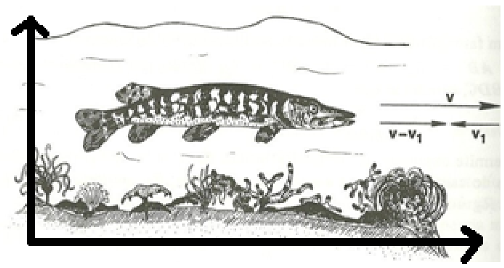

Figura 14: A velocidade mais econômica de um peixe que nada contra a corrente depende da velocidade v_1 e de um parâmetro k relacionado com a forma do peixe. BATSCHELET (1978).

É possível verificar através da figura que a velocidade do peixe é dada por $v - v_1$, porque num tempo t, a distância percorrida s é coberta com a velocidade do peixe em relação ao fundo.

Nesse momento, passamos para a segunda etapa do processo de modelagem, onde inicia-se com a formulação da atividade proposta e com a resolução da atividade em termos de modelo.

Como é sabido que a velocidade também pode ser calculada como $\frac{s}{t}$, onde s é o deslocamento e t é o tempo decorrido, então de $v - v_1 = \frac{s}{t}$ obtemos:

$$t = \frac{s}{v - v_1} \tag{1}$$

Da hipóteses do problema temos que $E = c.v^k.t$, logo substituindo t dado por (1) em E temos:

$$E = \frac{cv^k s}{v - v_1} \tag{2}$$

Como a variável t foi eliminada de E, conclui-se então que a velocidade ótima a ser obtida é função de k e de v_1.

Já que c e k são constantes, e que s e v_1 são valores dados, deduzimos que $E : (v_1, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função de v onde E é a variável dependente e v é a variável independente, pois a energia depende da velocidade.

Como queremos a energia mínima despendida, é necessário calcular a derivada de E em relação à v.

$$\frac{dE}{dv} = \frac{(csv^k)'(v - v_1) - (csv^k)(v - v_1)'}{(v - v_1)^2} = \frac{kcsv^{k-1}(v - v_1) - csv^k 1}{(v - v_1)^2}$$

de onde obtemos:

$$\frac{dE}{dv} = \frac{csv^{k-1}[v.(k-1) - kv_1]}{(v - v_1)^2} \tag{3}$$

Como queremos calcular a velocidade v que minimiza a energia E devemos ter $\frac{dE}{dv} = 0$.

$$\frac{dE}{dv} = \frac{csv^{k-1}[v.(k-1) - kv_1]}{(v - v_1)^2} = 0$$

Sendo $csv^{k-1} \neq 0$, temos $v(k-1) - kv_1 = 0$, por tanto a velocidade ótima será

$$v = v_0 \quad = \quad \frac{kv_1}{k-1}. \tag{4}$$

Interpretando a solução e fazendo a validação do modelo.

Nesse momento estamos fazendo uso da terceira etapa de modelagem para analisar a atividade proposta. De (3) podemos observar que E alcança um mínimo para o valor particular v_0. Para $v = v_0$, o termo entre colchetes se anula, enquanto que para $v < v_0$ o termo é negativo e para $v > v_0$ o termo é positivo.

Logo, a velocidade mais econômica em relação à água é dada por (4). Por exemplo, se $k = 3$, em (4) obtemos:

$$v = v_0 = \frac{3}{2}v_1$$

Isso indica que o peixe deve tentar manter uma velocidade, que é $\frac{3}{2}$ da velocidade do rio em relação ao fundo.

7 Considerações Finais

A proposta desse trabalho é incentivar o uso da modelagem matemática no processo ensino e aprendizagem, de forma a criar situações que favoreçam o desenvolvimento de suas habilidades para resolver determinados problemas, utilizando o processo da construção do conhecimento.

Foram apresentados alguns problemas e sua respectiva resolução usando-se a metodologia de Polya.

8 Agradecimentos

Agradeço primeiro a DEUS, por ter me dado força para chegar aqui.

Ao meu esposo Marcelo de Barros Araújo, pela sua paciência e companheirismo.

À minha família pelo incentivo.

Ao meu professor orientador José Dávalos Chuquipoma, por sua dedicação e paciência.

A todos os professores do PROFMAT da UFSJ, que contribuíram para a minha formação.

Aos colegas de curso, pelos momentos compartilhados.

À Escola Batista de Acesita pelo incentivo e apoio financeiro.

Ao colega de profissão Bruno Bragança que foi o maior incentivador.

Enfim, a todas as pessoas que de alguma forma colaboraram para essa conclusão.

Referências

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BATSCHELET, E. Introdução à Matemática para biocientistas. São Paulo: Interciência, 1978.

BIEMBENGUT, Maria Salett. HEIN, Nelson. Modelagem matemática no ensino. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2005.

LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio Volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Brasil Escola. Disponível em: <http://www.brasilescola.com/matematica/introducao-funcao.htm>. Acesso em: 12 fev. 2013.

Aplicações da Derivada. Disponível em: <http://www.ime.uerj.br/∼ calculo/LivroX/maxmin.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2013.

Relações quantitativas e suas representações. Disponível em:<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap34.html>. Acesso em: 12 fev. 2013.

Máximos e Mínimos em intervalos fechados. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo1/calculo1pdf/capitulo_15.pdf>. Acesso em: fev. 2013.