



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**FRANCISCO JOSÉ DOS SANTOS MARTINS**

**NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES NA GEOMETRIA**

**FORTALEZA**

**2018**

FRANCISCO JOSÉ DOS SANTOS MARTINS

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES NA GEOMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M343n Martins, Francisco José dos Santos.  
Números complexos e suas aplicações na geometria / Francisco José dos Santos Martins. – 2018.  
87 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Números Complexos. 2. Geometria. I. Título.

CDD 510

---

FRANCISCO JOSÉ DOS SANTOS MARTINS

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES NA GEOMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

Aprovada em: 25/06/2018

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

## AGRADECIMENTOS

À Jeová, por me permitir ter saúde e capacidade de concluir mais esta etapa na minha vida.

À minha esposa Naylla Oliveira, pela paciência e apoio em todos os momentos em que precisei.

Aos meus pais, que dentro das duríssimas possibilidades, sempre me deram o suporte necessário para ter a melhor formação possível.

Aos meus colegas Augustavo Feitoza e Adriano Ávela pelas sugestões e reflexões, além da imensurável ajuda fornecida para conclusão deste trabalho.

À todos os professores que tive o prazer de ter aulas durante o curso, em especial, ao Prof. Marcelo Ferreira de Melo por ter aceitado me orientar na elaboração deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo, diferentemente do que se faz em muitos textos para o ensino médio, trazer uma definição rigorosa para números complexos e mostrar que, a abordagem destes números nesse nível de ensino não precisa ser estritamente algébrica, ou seja, também é possível fazer uma discussão sobre os complexos no campo da geometria. Para tanto, no capítulo 2 definimos números complexos como um par ordenado de números reais e introduzimos duas operações: soma e produto. Concluímos então que o conjunto dos números complexos é um corpo não ordenado. Definimos o conjugado e o módulo de um número complexo e discutimos algumas propriedades relacionadas. Passamos então a fazer uma abordagem dos complexos no plano complexo e sua representação na forma polar. No capítulo 3 definiremos algumas transformações no plano complexo, em destaque, faremos uma análise a respeito das transformações de Möbius e suas propriedades geométricas. No capítulo 4 provamos alguns resultados bastante interessantes da geometria utilizando os números complexos. Por fim, encerramos o trabalho mostrando como calcular a área de um polígono no plano complexo.

**Palavras-chave:** Números complexos. Geometria.

## ABSTRACT

This paper aims to bring a rigorous definition to complex numbers and to show that the approach to these numbers at this level of education does not have to be strictly algebraic, that is, it is also possible to discuss the complexities in the field of geometry. To do so, in Chapter 2 we define complex numbers as an ordered pair of real numbers and introduce two operations: sum and product. We conclude that the set of complex numbers is an unordered body. We define the conjugate and the module of a complex number and discuss some related properties. We then proceed to approach the complexes in the complex plane and their representation in the polar form. In chapter 3 we will define some transformations in the complex plane, in particular, we will make an analysis about the transformations of Möbius and its geometric properties. In Chapter 4 we prove some rather interesting results of geometry using the complex numbers. Finally, we conclude the work showing how to calculate the area of a polygon in the complex plane.

**Keywords:** Complex numbers. Geometry.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>NÚMEROS COMPLEXOS</b>	<b>10</b>
<b>2.1</b>	<b>O corpo dos números complexos</b>	<b>10</b>
2.1.1	Definição de números complexos	10
2.1.2	Relação de ordem no corpo complexo	12
2.1.3	Conjugado e módulo de um número complexo	12
2.1.4	O plano complexo	13
<b>2.2</b>	<b>Forma polar de um número complexo</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>TRANSFORMAÇÕES</b>	<b>24</b>
<b>3.1</b>	<b>Transformações elementares em <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>24</b>
<b>3.2</b>	<b>Transformações de Möbius</b>	<b>28</b>
<b>3.3</b>	<b>Determinação das transformações de Möbius</b>	<b>31</b>
<b>3.4</b>	<b>A esfera de Riemann</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES NA GEOMETRIA</b>	<b>38</b>
<b>4.1</b>	<b>Triângulos</b>	<b>38</b>
<b>4.2</b>	<b>O teorema de Ptolomeu-Euler</b>	<b>52</b>
<b>4.3</b>	<b>O círculo de nove pontos</b>	<b>56</b>
<b>4.4</b>	<b>A reta de Simson</b>	<b>59</b>
<b>4.5</b>	<b>Generalizações do teorema de Simson</b>	<b>63</b>
<b>4.6</b>	<b>Teoremas de Cantor</b>	<b>69</b>
<b>4.7</b>	<b>O teorema de Feuerbach</b>	<b>73</b>
<b>4.8</b>	<b>O teorema de Morley</b>	<b>78</b>
<b>5</b>	<b>ÁREA DE UM POLÍGONO NO PLANO COMPLEXO</b>	<b>82</b>
<b>5.1</b>	<b>Área do triângulo</b>	<b>82</b>
<b>5.2</b>	<b>Área de um polígono</b>	<b>83</b>
<b>5.3</b>	<b>Polígonos regulares</b>	<b>84</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>86</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>87</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Há algum tempo vem se discutindo a relevância do ensino dos números complexos no Ensino Médio brasileiro. Sua abordagem, que é feita quase em sua totalidade de forma algébrica, por vezes não deixa realmente claro o seu potencial. Por exemplo, calcular a raiz quadrada de um número negativo e resolver equações polinomiais são trabalhados em sala de aula sem dar nenhum significado a isto. Além disso, a porta de acesso a muitas universidades públicas, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), não contempla em sua matriz os números complexos.

O que de fato sabemos é que a importância dos números complexos vai além do que foi citado acima. Estes números desempenham um importante papel em diversos ramos da matemática, aparecendo em problemas que envolvem rotações, funções trigonométricas, movimentos periódicos entre outros.

O presente trabalho apresentará algumas aplicações significativas de números complexos na geometria plana. Tomamos a liberdade de utilizar resultados da geometria plana e analítica durante o texto sem demonstração formal e, ao contrário do que acontece em muitos textos, consideraremos um círculo como sendo o conjunto de pontos equidistantes de um ponto dado.

No segundo capítulo, trataremos de propriedades dos números complexos que nos servirão de base para provarmos os resultados que serão apresentados nos capítulos seguintes. Este capítulo nos familiarizará com técnicas de cálculo entre números complexos.

No terceiro capítulo faremos uma discussão sobre transformações no plano complexo, dando destaque para as transformações de Möbius. Discutiremos a respeito do plano complexo completado e da esfera de Riemann e suas propriedades geométricas.

No quarto capítulo, apresentaremos algumas propriedades e noções geométricas simples no plano complexo, tais como ângulo orientado, equações de reta, semelhança de triângulos. A partir daí, demonstraremos resultados clássicos da geometria, tais como os teoremas de Napoleão, Feuerbach e Morley entre outros. Concluímos o trabalho fazendo uma breve discussão a respeito do cálculo de áreas de polígonos convexos no plano complexo.

## 2 NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo estudaremos os números complexos desde sua definição até operações realizadas com estes sob a forma polar. Veremos propriedades interessantes a respeito destes números que serão de valiosa ajuda nos capítulos posteriores.

### 2.1 O corpo dos números complexos

Nesta seção procuraremos definir de forma rigorosa os números complexos e introduziremos duas operações no conjunto destes números, de onde decorrerão várias propriedades, que nos darão a base para obter alguns resultados no capítulo 2.

#### 2.1.1 Definição de números complexos

**Definição 2.1.1.** Um número complexo  $z$  é um par ordenado de números reais  $z = (x, y)$  satisfazendo as seguintes regras de manipulação para a soma e produto:

1.  $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .
2.  $z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$ .

A soma e o produto possuem as seguintes propriedades:

3. comutatividade:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  e  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ .
4. associatividade:  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  e  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ .
5.  $(0, 0)$  é elemento neutro aditivo:  $z + (0, 0) = z$  para todo  $z$  complexo.
6.  $(1, 0)$  é elemento neutro multiplicativo:  $z(1, 0) = z$  qualquer que seja o  $z$  complexo.
7. todo  $z = (x, y)$  tem um simétrico aditivo, sendo ele  $-z = (-x, -y)$ , ou seja,  $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$ .
8. todo  $z = (x, y) \neq (0, 0)$  tem um inverso multiplicativo, o número  $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ , ou seja,  $(x, y)(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}) = (1, 0)$ .
9. distributividade do produto em relação à soma:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Todas as propriedades acima decorrem de (1) e (2) e do fato dessas propriedades serem válidas para a soma e produto de números reais.

Um conjunto munido de uma soma e um produto onde as propriedades (3) a (9) são válidas é chamado de corpo. Assim, concluímos que o conjunto dos números complexos é um corpo e o representaremos pelo símbolo  $\mathbb{C}$ . Vale ressaltar também que,

dados dois números complexos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ ,  $z_1 = z_2$  se, e somente se,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ . Daí, decorrem as seguintes propriedades:

- (a) reflexiva:  $(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$  para todo complexo  $z_1 = (x_1, y_1)$ ;
- (b) simetria:  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$  para quaisquer dois complexos  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ ;
- (c) transitiva:  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ,  $(x_2, y_2) = (x_3, y_3) \implies (x_1, y_1) = (x_3, y_3)$  para quaisquer complexos  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ ,  $z_3 = (x_3, y_3)$ .

Identificaremos o número complexo  $(x, 0)$  com o número real  $x$ . Assim, temos:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

e

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Portanto, a identificação de  $(x, 0)$  com o real  $x$  é perfeitamente válida, pois preserva a soma e o produto. Assim, o corpo  $\mathbb{R}$  pode ser visto como um subconjunto de  $\mathbb{C}$ .

Chamaremos o número complexo  $(0, 1)$  de unidade imaginária e o representaremos pelo símbolo  $i$ . Notemos que

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Logo, podemos escrever  $i = \sqrt{-1}$ . Segue então que

$$(y, 0)(0, 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y)$$

e daí

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi,$$

logo todo complexo  $z = (x, y)$  também pode ser escrito como  $z = x + yi$ .

**Proposição 2.1.1.** Se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  e  $z_1z_2 = 0$  então  $z_1 = 0$  ou  $z_2 = 0$ .

*Demonstração.* Sejam  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ . Sem perda de generalidade, suponhamos  $z_1 \neq 0$ , portanto, temos  $x_1 \neq 0$  ou  $y_1 \neq 0$ . Segue então que

$$z_1z_2 = 0 \iff (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = 0$$

e multiplicando ambos os lados da segunda igualdade acima por  $(x_1 - y_1i)$ , ficamos com

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1 - y_1i)[(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)] \\ &= [(x_1 - y_1i)(x_1 + y_1i)](x_2 + y_2i) \\ &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2 + y_2i) \\ &= (x_1^2 + y_1^2)x_2 + (x_1^2 + y_1^2)y_2i. \end{aligned}$$

Da igualdade de números complexos, temos

$$(x_1^2 + y_1^2)x_2 = 0 \quad \text{e} \quad (x_1^2 + y_1^2)y_2 = 0.$$

Como  $z_1 \neq 0$ , temos  $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$ , de onde segue que  $x_2 = 0$  e  $y_2 = 0$ . Assim temos  $z_2 = 0$ .  $\square$

### 2.1.2 Relação de ordem no corpo complexo

Vimos anteriormente que o conjunto dos números complexos é um corpo. O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  também é um corpo e, dados dois números reais quaisquer  $x, y$ , podemos sempre compará-los, ou seja, temos sempre  $x > y$  ou  $x = y$  ou  $y > x$ . Como uma ordem num corpo  $\mathbb{K}$  consiste em dar um subconjunto  $\mathbb{K}^+$  de  $\mathbb{K}$  tal que:

- (i) se  $x, y \in \mathbb{K}^+$  então  $x + y \in \mathbb{K}^+$  e  $xy \in \mathbb{K}^+$  ( $\mathbb{K}^+$  é chamado o conjunto dos elementos positivos) e
- (ii) dado  $x \in \mathbb{K}$  então apenas uma das possibilidades se verifica: ou  $x \in \mathbb{K}^+$ , ou  $x = 0$  ou  $-x \in \mathbb{K}^+$ .

Assim, se  $x \in \mathbb{K}^+$  então  $x^2 = xx \in \mathbb{K}^+$  por (i). Agora, se  $-x \in \mathbb{K}^+$  então  $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 \in \mathbb{K}^+$ , por (i) novamente. Segue daí que o quadrado de qualquer elemento não nulo de  $\mathbb{K}$  é positivo.

Temos então que  $\mathbb{R}$  é um corpo ordenado, mas  $\mathbb{C}$  não é. De fato, se  $\mathbb{C}$  possuísse uma ordem, sendo  $i \neq 0$ , teríamos  $i > 0$  ou  $-i > 0$ . Se  $i > 0$ , então  $i^2 > 0$ , de onde teríamos que  $-1 > 0$ , o que é um absurdo. Da mesma forma, se  $-i > 0$  então  $(-i)^2 > 0$ , o que nos dá  $-1 > 0$ , novamente um absurdo. Portanto, o corpo  $\mathbb{C}$  não pode admitir uma ordem.

### 2.1.3 Conjugado e módulo de um número complexo

**Definição 2.1.2.** Dado o número complexo  $z = x + yi$  o **conjugado** de  $z$  é o número complexo  $\bar{z} = x - yi$ . Em particular, temos  $\bar{\bar{z}} = z$ .

Notemos ainda que, ao multiplicarmos  $z$  por  $\bar{z}$  obtemos como resultado o real

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2.$$

Denominaremos  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  o **módulo** de  $z$ . No caso em que  $z$  é um número real, a noção de módulo de um número complexo, como definida anteriormente, coincide com a definição de módulo de um número real. Em resumo, temos

$$z = x + yi \implies |z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

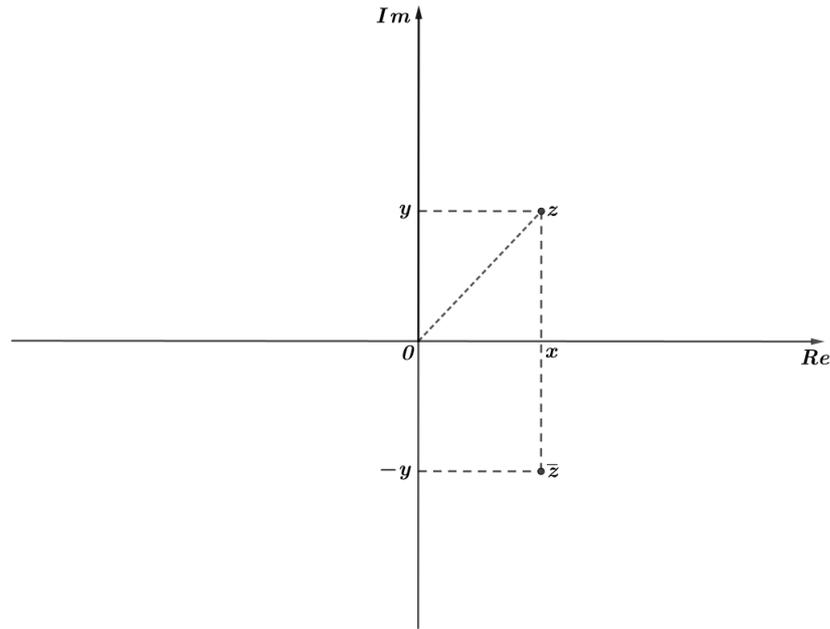


Figura 1 – Plano Complexo

#### 2.1.4 O plano complexo

Olhando os pontos do plano cartesiano como o conjunto  $\mathbb{C}$  dos complexos, obtemos a representação de  $\mathbb{C}$  conhecida como **plano complexo** (ou plano de Argand-Gauss).

O eixo horizontal do plano complexo é denominado eixo **real** e, é formado pelos números reais. O eixo vertical é denominado de eixo **imaginário** e é formado pelos números complexos da forma  $0 + yi$ , onde  $y \in \mathbb{R}$ . Neste caso, estes complexos são denominados de **imaginários puros**.

Notemos ainda que, em relação ao plano complexo, sendo  $z = x + yi = (x, y)$ , então  $\bar{z} = x - yi = (x, -y)$ , daí, temos que  $z$  e  $\bar{z}$  são simétricos em relação ao eixo real (veja a figura 1). Os números reais  $x$  e  $y$  são denominados de **parte real** e **parte imaginária** de  $z$  respectivamente, e os denotaremos, nesta ordem, por

$$x = \text{Re}(z), \quad y = \text{Im}(z).$$

Desta forma, temos

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2\text{Re}(z) \implies \text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

e

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = 2i\text{Im}(z) \implies \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

**Observação:** A distância  $d$  entre dois pontos  $z_1$  e  $z_2$  do plano coincide com o módulo  $|z_1 - z_2|$ .

Vejam na proposição seguinte, algumas propriedades dos números complexos que serão bastante utilizadas no decorrer deste trabalho.

**Proposição 2.1.2.** *Se  $z$ ,  $z_1$  e  $z_2$  são números complexos não nulos quaisquer e  $n \in \mathbb{N}$ , então:*

$$(a) z_1 \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z_1) = 0 \iff z_1 = \bar{z}_1.$$

$$(b) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

$$(c) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$$(d) \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2.$$

$$(e) \overline{z^n} = (\bar{z})^n.$$

$$(f) |z| = 1 \iff \bar{z} = 1/z.$$

*Demonstração.* (a) Seja  $z_1 = x_1 + y_1i$ . Temos

$$z_1 \in \mathbb{R} \iff y = 0.$$

Daí,

$$z_1 = x_1 + 0i = x_1 - 0i = \bar{z}_1 \iff z_1 = \bar{z}_1.$$

(b) Sejam  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , temos

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

(c) Sendo novamente  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , vem que

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2)i \\ &= (x_1 - y_1i)(x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2. \end{aligned}$$

(d) Sendo  $z_1$  e  $z_2$  complexos, pelo item anterior temos que

$$\overline{(z_1/z_2) \cdot z_2} = \overline{z_1/z_2} \cdot \overline{z_2} = \bar{z}_1,$$

segue então que

$$\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2.$$

(e) Façamos indução sobre  $n$ .

Para  $n = 1$  não há o que fazer. O caso  $n = 2$  segue do item (c). Suponhamos então que para dado  $n \in \mathbb{N}$  tenhamos  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ . Assim,

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n z} = \overline{z^n} \bar{z} = (\bar{z})^n \bar{z} = (\bar{z})^{n+1},$$

onde a penúltima igualdade acima decorre da hipótese de indução.

(f) Sendo  $z\bar{z} = |z|^2$ , se  $|z| = 1$ , segue que

$$z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = 1/z.$$

□

**Exemplo 2.1.1** (Espanha). Se  $z$  e  $w$  são números complexos de módulo 1 e tais que  $zw \neq -1$ , mostre que  $\frac{z+w}{1+zw}$  é um número real.

*Demonstração.* Seja  $a = \frac{z+w}{1+zw}$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\overline{z+w}}{\overline{1+zw}} = \frac{\bar{z} + \bar{w}}{1 + \bar{z} \cdot \bar{w}} \\ &= \frac{z^{-1} + w^{-1}}{1 + z^{-1}w^{-1}} = \frac{z+w}{1+zw} = a. \end{aligned}$$

Portanto,  $a \in \mathbb{R}$ .

□

A seguir, provaremos a desigualdade triangular para números complexos, mas para isto precisaremos do resultado do lema abaixo.

**Lema 2.1.1.** Para  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos:

(a)  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

(b)  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$ .

*Demonstração.* (a) Temos

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot \overline{(z_1 z_2)} = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2.$$

Como o módulo de um número complexo é um número real não negativo, vem que

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

(b) Da mesma forma,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2. \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.1.1.** (Desigualdade Triangular) Para  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , vale

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se,  $z_1 = kz_2$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \geq 0$ .

*Demonstração.* Para todo número complexo  $z$ , temos

$$|z| = |\bar{z}| \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}(z) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Isso, juntamente com o lema 2.1.1 nos dá

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |\bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$  e, como o módulo de um número complexo é um número real não negativo, vem que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Para o que falta, notemos que os casos em que  $z_1 = 0$  ou  $z_2 = 0$ , a igualdade se torna trivial. Consideremos então o caso em que  $z_1z_2 \neq 0$ . Pelo o que foi feito acima, teremos a igualdade se, e somente se,  $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2|$ . Agora, isso ocorre se, e somente se,  $z_1\bar{z}_2$  é um número real não negativo. Portanto, teremos a igualdade se, e somente se,

$$z_1\bar{z}_2 \geq 0.$$

Assumindo  $z_2 \neq 0$  e dividindo ambos os lados da desigualdade por  $|z_2|^2 (= z_2\bar{z}_2 > 0)$ , obtemos  $\frac{z_1}{z_2} = k \geq 0$ . □

Geometricamente a desigualdade triangular corresponde ao fato de que o comprimento de um dos lados de um triângulo é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. A igualdade só ocorre quando os complexos que representam os vértices do triângulo são colineares.

**Corolário 2.1.1.** Para todos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

*Demonstração.* Pela desigualdade triangular de números complexos temos:

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \implies |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

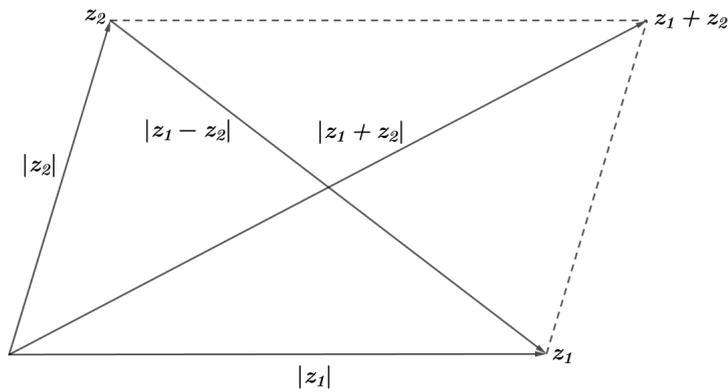


Figura 2 – interpretação geométrica da desigualdade triangular

Analogamente,

$$|z_2| = |(z_2 - z_1) + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \implies |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2| \implies |z_1| - |z_2| \geq -|z_1 - z_2|.$$

E pelas duas desigualdades acima, temos

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

□

**Exemplo 2.1.2 (OCM).** *Sejam  $a$  e  $z$  números complexos tais que  $|a| < 1$  e  $\bar{a}z \neq 1$ . Se*

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1,$$

*prove que  $|z| < 1$ .*

*Demonstração.* Se  $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1$ , então

$$\frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} < 1 \implies |z - a| < |1 - \bar{a}z|.$$

Daí, segue que

$$|z - a|^2 < |1 - \bar{a}z|^2,$$

de onde obtemos

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}a) + |a|^2 < 1 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z) + |\bar{a}z|^2.$$

Sendo

$$2\operatorname{Re}(\bar{z}a) = \bar{z}a + z\bar{a} \quad \text{e} \quad 2\operatorname{Re}(\bar{a}z) = \bar{a}z + a\bar{z},$$

concluimos que

$$2\operatorname{Re}(\bar{z}a) = 2\operatorname{Re}(\bar{a}z).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} |z|^2 + |a|^2 &< 1 + |\bar{a}|^2 |z|^2 \implies \\ |z|^2 + |a|^2 &< 1 + |a|^2 |z|^2 \implies \\ |z|^2 - 1 &< -(|a|^2 - |a|^2 |z|^2) \implies \\ 1 - |z|^2 &> |a|^2 (1 - |z|^2) \implies \\ 0 &> (|a|^2 - 1)(1 - |z|^2). \end{aligned}$$

Como  $|a|^2 - 1 < 0$ , vem que  $1 - |z|^2 > 0$ . De onde é fácil concluir que  $|z| < 1$ .  $\square$

## 2.2 Forma polar de um número complexo

Seja  $z = x_1 + y_1 i$  um número complexo diferente de zero, seja também  $\theta \in [0, 2\pi)$  o menor ângulo em radianos entre a semirreta que une 0 a  $z$  e o semieixo real positivo. Da trigonometria, temos que

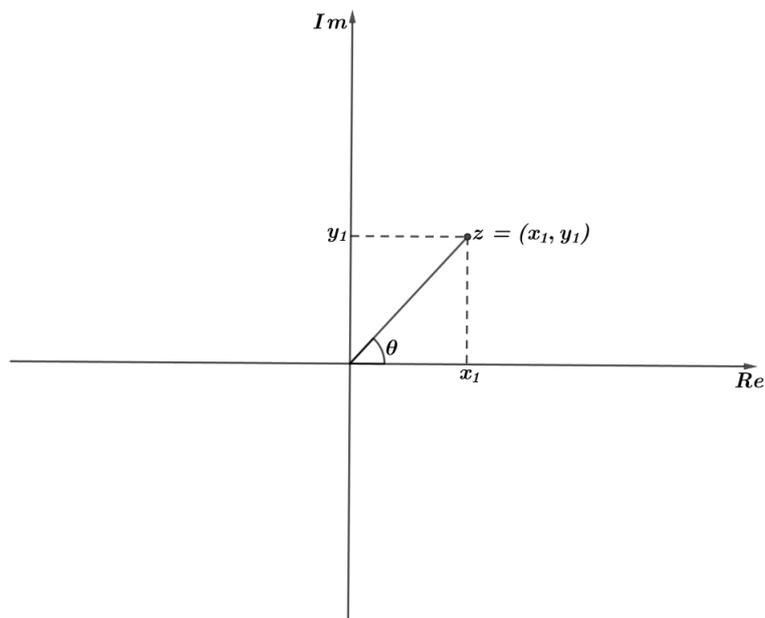


Figura 3 – forma polar de um número complexo

$$x_1 = |z| \cos \theta \quad \text{e} \quad y_1 = |z| \sin \theta.$$

Assim temos

$$z = x_1 + y_1 i = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Portanto,

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

é a **forma polar** do número complexo  $z$ .

Notemos que  $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta$  e  $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta$  qualquer que seja  $k \in \mathbb{Z}$ , assim, temos que a igualdade obtida acima ainda vale quando trocamos  $\theta$  por  $\theta + 2k\pi$ , portanto chamaremos de **argumentos** do número complexo  $z$  os números da forma  $\theta + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$  onde  $\theta$  é o **argumento principal** de  $z$  e o denotaremos por  $\arg(z)$ .

A seguir, serão apresentados resultados que estabelecem as vantagens computacionais da representação dos números complexos na forma polar. Adotamos, desde já, a convenção de que  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , então  $z^0 = 1$ .

**Proposição 2.2.1.** *Se  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  é um número complexo não nulo e  $n \in \mathbb{Z}$ , então*

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (2.1)$$

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente que  $n > 0$ , e façamos indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$  temos

$$z^1 = z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|^1(\cos 1 \cdot \theta + i \sin 1 \cdot \theta).$$

Portanto, a igualdade 2.1 vale para  $n = 1$ . Suponhamos que o resultado seja válido para um determinado  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z \cdot z^n = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \\ &= |z|^{n+1}(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot (\cos n\theta + i \sin n\theta) \\ &= |z|^{n+1}[\cos \theta \cdot \cos n\theta - \sin \theta \cdot \sin n\theta + i(\sin \theta \cdot \cos n\theta + \cos \theta \cdot \sin n\theta)] \\ &= |z|^{n+1}[\cos(\theta + n\theta) + i \sin(\theta + n\theta)] \\ &= |z|^{n+1}[\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta]. \end{aligned}$$

Assim, por indução,  $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . O caso  $n = 0$  é trivial. Consideremos o caso em que  $n < 0$ . Seja então  $n = -m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ . Para  $\theta \in \mathbb{R}$  temos

$$(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \overline{(\cos \theta + i \sin \theta)} = |\cos \theta + i \sin \theta|^2 = 1$$

Segue então que

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

. Portanto, como 2.1 vale para todo natural  $m$ , segue que

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-m} = [|z|(\cos \theta + i \sin \theta)]^{-m} = |z|^{-m}[\cos(m\theta) + i \sin(m\theta)]^{-1} \\ &= |z|^m[\cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta)] = |z|^m(\cos n\theta + i \sin n\theta). \end{aligned}$$

□

A igualdade 2.1 é conhecida como a **primeira fórmula de de Moivre**.

**Corolário 2.2.1.** Se  $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  e  $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$  são complexos não nulos quaisquer, então

$$zw = |zw|[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] \quad e \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)].$$

Em particular, temos que  $\arg(zw) = \alpha + \beta = \arg(z) + \arg(w)$  e  $\arg(z/w) = \alpha - \beta = \arg(z) - \arg(w)$ .

*Demonstração.* Para  $zw$  temos

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot |w|(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= |z||w|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= |zw|[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

Da mesma forma, para  $\frac{z}{w}$  temos

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= zw^{-1} = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot |w|^{-1}[\cos(-\beta) + i \sin(-\beta)] \\ &= |z||w|^{-1}(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot [\cos(-\beta) + i \sin(-\beta)] \\ &= \frac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.2.2.** Seja  $\alpha$  um real dado e  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se  $v$  é o vetor de origem 0 e extremidade  $z$ , então o ponto do plano complexo que representa  $(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot z$  é a extremidade do vetor obtido mediante a rotação trigonométrica de  $v$  pelo ângulo  $\alpha$ .

*Demonstração.* Sendo  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , segue então que

$$\begin{aligned} z \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= |z|[\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)] \end{aligned}$$

Ora, esse último complexo é exatamente a extremidade do vetor obtido pela rotação de  $v$  do ângulo  $\alpha$  no sentido anti-horário. □

É interessante notar que multiplicar um vetor no plano complexo por  $i$  é equivalente a rotacioná-lo de um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ .

Entendemos por uma **raiz n-ésima** do número complexo não nulo  $z$  um complexo  $w$  tais que  $w^n = z$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ . Diferente do que ocorre com os números reais, cada número complexo  $z$ , com  $z \neq 0$ , tem exatamente  $n$  raízes  $n$ -ésimas, as quais serão denotadas de modo genérico por  $\sqrt[n]{z}$ . A fórmula a seguir é conhecida como a **segunda fórmula de de Moivre**, e nos ensina a calcular as raízes  $n$ -ésimas da unidade.

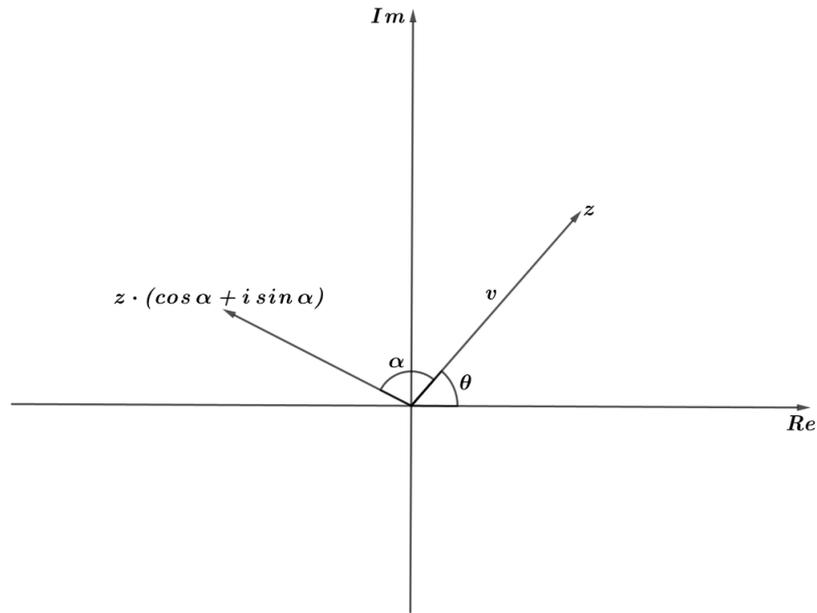


Figura 4 – interpretação geométrica da multiplicação

**Proposição 2.2.2.** Se  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  é um complexo não nulo e  $n$  é um inteiro positivo qualquer, então há exatamente  $n$  valores complexos distintos para a raiz  $n$ -ésima de  $z$  e, tais valores são dados por

$$\sqrt[n]{|z|} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]; \quad 0 \leq k < n, k \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

onde  $\sqrt[n]{|z|}$  é a raiz real de  $|z|$ .

*Demonstração.* Se  $w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , então

$$\begin{aligned} w^n = z &\Leftrightarrow [r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &\Leftrightarrow r^n [\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)] = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &\Leftrightarrow r^n = |z| \quad \text{e} \quad n\alpha = \theta + 2k\pi, \quad \exists k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

As duas últimas igualdades ocorrem se, e somente se,  $r = \sqrt[n]{|z|}$  e  $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim, haverá tantas raízes  $n$ -ésimas de  $z$  quantos forem os números  $\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$  distintos. Agora, notemos que

$$\cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) = \cos \left( \frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} \right)$$

e

$$\cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \neq \cos \left( \frac{\theta + 2l\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2l\pi}{n} \right)$$

para  $0 \leq k < l < n$ , portanto, basta considerarmos os inteiro  $k$  tais que  $0 \leq k < n$ .  $\square$

É sempre importante observar que, nem sempre a fórmula 2.2 se constitui na melhor maneira de se calcular a raiz de um determinado índice de um número complexo;

isso porque nem sempre a forma trigonométrica de um número complexo é útil para cálculos, basta notar alguns casos em que os arcos não são notáveis por exemplo.

Dizemos que o número complexo  $\omega$  é uma **raiz da unidade** se existir um natural  $n$  tal que  $\omega^n = 1$ . Neste caso,  $\omega$  é denominado uma **raiz  $n$ -ésima da unidade**. Sendo  $1 = \cos 0 + i \sin 0$ , pela segunda fórmula de de Moivre temos precisamente  $n$  raízes  $n$ -ésimas da unidade, que são dadas por

$$\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right); 0 \leq k < n, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Façamos  $\omega = \omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ . Assim, da primeira fórmula de de Moivre e de (1.3) segue que os números complexos

$$1, \omega, \dots, \omega^{n-1} \quad (2.4)$$

são as raízes  $n$ -ésimas da unidade.

**Proposição 2.2.3.** Para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , temos

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

*Demonstração.* Seja  $w = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ , multiplicando ambos os membros da igualdade por  $z$  obtemos,  $zw = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$ . Segue então que

$$\begin{aligned} zw - w &= (z + z^2 + z^3 + \dots + z^n) - (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = z^n - 1 \\ \implies w(z - 1) &= z^n - 1 \\ \implies w &= \frac{z^n - 1}{z - 1} \end{aligned}$$

□

Notemos que, se  $\omega \neq 1$  é uma raiz  $n$ -ésima da unidade, então  $\omega^n = 1$ , de modo que

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0. \quad (2.5)$$

O resultado a seguir nos dá uma interpretação geométrica para as raízes  $n$ -ésimas da unidade de um complexo não nulo.

**Proposição 2.2.4.** Se  $z$  é um número complexo não nulo e  $n > 2$  é um número natural, então as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  são os vértices de um  $n$ -ágono regular centrado na origem do plano complexo.

*Demonstração.* Seja  $\theta$  um argumento de  $z$ , da segunda fórmula de de Moivre temos que as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  são os complexos  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  tais que

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right],$$

para  $0 \leq k < n$ .

Agora, notemos que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos

$$|\cos \alpha + i \sin \alpha| = 1.$$

Assim, segue que

$$|z_k| = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left| \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right| = \sqrt[n]{|z|},$$

portanto, todos os pontos  $z_k$  estão sobre o círculo de centro 0 e raio  $\sqrt[n]{|z|}$  no plano complexo. Pelo corolário 2.2.1 temos que

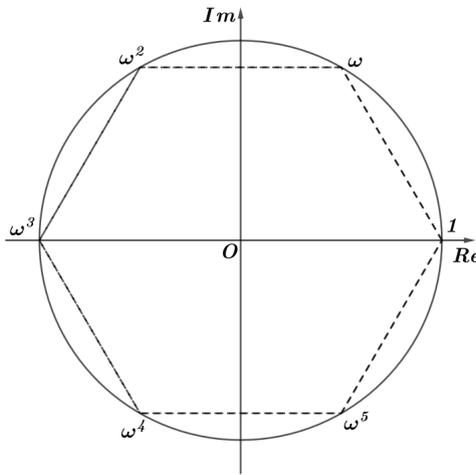


Figura 5 – raízes sextas da unidade

$$\begin{aligned} \frac{z_{k+1}}{z_k} &= \cos \left( \frac{\theta + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \\ &= \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

para  $0 \leq k < n$ . Assim, sendo  $v_k$  o vetor de origem 0 e extremidade  $z_k$ , segue do corolário 2.2.2 que o ângulo entre  $v_k$  e  $v_{k+1}$ , no sentido anti-horário e medido em radianos, é, para  $0 \leq k < n$ , igual a  $\frac{2\pi}{n}$ .

Portanto, desses dois fatos segue a proposição.  $\square$

Da proposição anterior, segue de imediato o seguinte corolário.

**Corolário 2.2.3.** *As raízes  $n$ -ésimas da unidade se dispõem, no plano complexo, como os vértices do polígono regular de  $n$  lados, inscrito no círculo de raio 1 centrado na origem e tendo o número 1 como um de seus vértices.*

Na figura 5 temos  $\omega = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ .

### 3 TRANSFORMAÇÕES

Neste capítulo, analisaremos certas funções particulares de uma variável complexa, as **transformações de Möbius**, que possuem propriedades geométricas, algébricas e aritméticas muito ricas. Vamos desenvolver aqui alguns aspectos geométricos dessas transformações.

#### 3.1 Transformações elementares em $\mathbb{C}$

As funções complexas de variável complexa, também chamadas de transformações do plano complexo, são de grande importância, tanto teórica, quanto as aplicações. Diversos problemas práticos da Física e da Engenharia envolvem estudar o comportamento de certos fenômenos em alguma região do plano que devem satisfazer condições especiais na fronteira dessa região.

Para fixarmos o conceito, uma função complexa de variável complexa é uma função  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $S$  é um subconjunto de  $\mathbb{C}$ .

Nesta seção, estudaremos cinco transformações com propriedades importantes: as translações, as homotetias (multiplicação por um número real  $r > 0$ ), as rotações, a multiplicação por um número complexo  $\alpha \neq 0$  e a inversão.

**Definição 3.1.1** (Translações). *Fixado um  $\beta \in \mathbb{C}$ . Definimos a **translação por  $\beta$**  como sendo a transformação  $T_\beta(z) = z + \beta$ .*

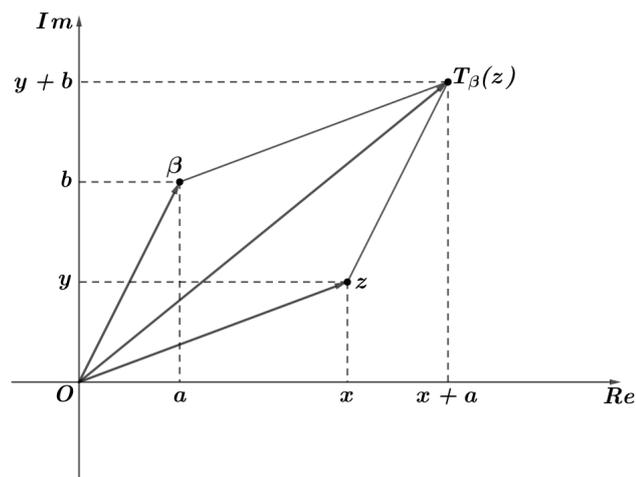


Figura 6 – translação por  $\beta$

O domínio  $T_\beta$  é claramente  $\mathbb{C}$ . Notemos que para qualquer complexo  $w$ , existe um único complexo  $z$  tal que  $w = T_\beta(z) = z + \beta$ , a saber,  $z = w - \beta$ . Logo, concluímos que  $T_\beta$  é uma bijeção de  $\mathbb{C}$  e sua inversa é  $T_{-\beta}$ .

Escrevendo  $z = x + yi$ ,  $\beta = a + bi$  e  $T_\beta(z) = u + vi$ , temos, pela igualdade de números complexos, que

$$u + vi = z + \beta = (x + a) + (y + b)i \iff u = x + a \text{ e } v = y + b.$$

Assim, em coordenadas do plano complexo, a transformada por  $T_\beta$  de cada ponto  $(x, y)$  de cada ponto do plano é a sua translação de  $(a, b)$ .

**Definição 3.1.2** (Homotetia). *Seja  $r$  um real positivo. Definimos a homotetia com fator  $r$  como sendo a transformação de  $\mathbb{C}$  dada por  $H_r(z) = rz$ .*

O domínio de  $H_r$  é claramente  $\mathbb{C}$ . Agora, notemos que para qualquer complexo  $w$ , existe um único complexo  $z$  tal que  $w = rz$  a saber,  $z = \frac{1}{r}w$ . Logo, concluímos que  $H_r$  é uma bijeção de  $\mathbb{C}$  e sua inversa é  $H_{\frac{1}{r}}$ .

Sendo  $|H_r(z)| = |rz| = r|z|$  e  $\arg(H_r(z)) = \arg(rz) = \arg(z)$ , temos que a transformação  $H_r$  é uma contração de  $|z|$ , quando  $0 < r < 1$ , e uma dilatação de  $|z|$ , quando  $r > 1$ , sempre mantendo fixo o argumento de  $z$ .

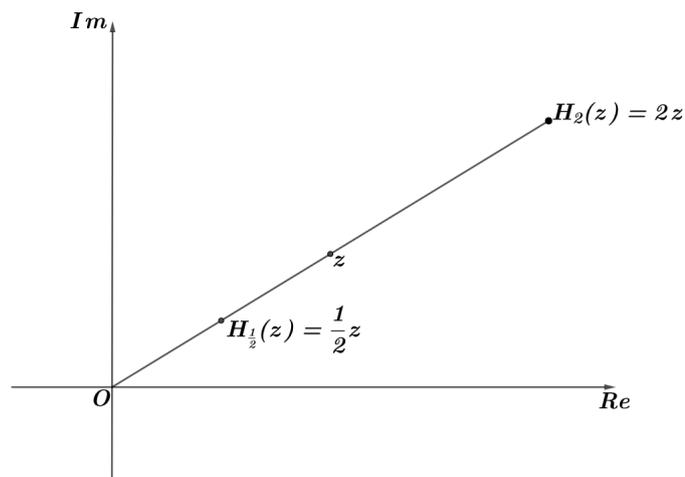


Figura 7 – homotetias de fatores 2 e  $\frac{1}{2}$ .

**Definição 3.1.3** (Rotação). *Seja  $\theta \in \mathbb{R}$ . Definimos a rotação de  $\theta$  radianos como sendo a transformação  $R_\theta(z) = (\cos \theta + i \sin \theta)z$ .*

O domínio de  $R_\theta$  é claramente  $\mathbb{C}$ . Agora, notemos que para qualquer complexo  $w$ , existe um único complexo  $z$  tal que  $w = R_\theta(z)$  a saber,  $z = (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))w$ . Logo, concluímos que  $R_\theta$  é uma bijeção de  $\mathbb{C}$  e sua inversa é a rotação  $R_{-\theta}$ .

Como  $|R_\theta(z)| = |z|$  e  $\arg(R_\theta(z)) = \theta + \arg(z)$ , a transformação de  $z$  por  $R_\theta$  é efetivamente uma rotação, em torno da origem no plano complexo, de  $\theta$  radianos do ponto  $z$ .

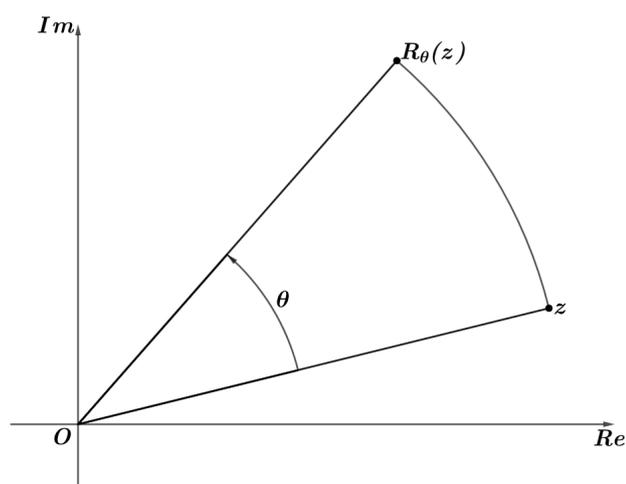


Figura 8 – rotação de  $\theta$  radianos.

**Definição 3.1.4** (Multiplicação por complexo não nulo). *Seja  $\alpha \in \mathbb{C}$  um complexo não nulo. Definimos a **multiplicação por  $\alpha$**  como sendo a transformação  $H_\alpha(z) = \alpha z$ .*

O domínio de  $H_\alpha$  é claramente  $\mathbb{C}$ . A transformação  $H_\alpha$  é bijetiva e a sua inversa é  $H_{\frac{1}{\alpha}}$ .

Escrevendo  $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , com  $r, \theta \in \mathbb{R}$  e  $r > 0$ , na forma polar, podemos interpretar a transformação  $H_\alpha$  como sendo a composição da homotetia  $H_r$  com fator multiplicativo  $r$ , e da rotação  $R_\theta$  de  $\theta$  radianos,

$$H_\alpha(z) = r(\cos \theta + i \sin \theta)z = rR_\theta(z) = H_r(R_\theta(z)), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como a multiplicação de números complexos é comutativa, as funções homotetia  $H_r$  e rotação  $R_\theta$  comutam, o que nos permite escrever

$$H_\alpha = H_r \circ R_\theta = R_\theta \circ H_r.$$

**Definição 3.1.5** (Inversão). *Seja  $z$  um número complexo não nulo. Definimos a **inversão** como sendo a transformação dada por  $J(z) = \frac{1}{z}$ .*

O domínio de  $J$  é  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ;  $J$  é claramente um bijeção de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e sua inversa é a própria transformação  $J$ .

Podemos decompor a inversão como a composta de duas transformações que introduziremos a seguir.

**Definição 3.1.6** (Conjugação). *A transformação  $C$  definida pela expressão  $C(z) = \bar{z}$  é chamada de **conjugação**.*

É evidente que  $C$  é um bijeção de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ , cuja inversa é a própria  $C$ . Geometricamente,  $C$  transforma cada ponto  $z$  na sua reflexão com relação ao eixo real.

**Definição 3.1.7** (Inversão em relação ao círculo unitário). *Seja dado  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ . A transformação inversão em relação ao círculo unitário é definida como sendo*

$$I(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Notemos que esta transformação leva  $z$  no número complexo com mesmo argumento e com módulo igual a  $\frac{1}{|z|}$ . Logo,  $I(z)$  está situado na reta que passa pela origem e por  $z$ .

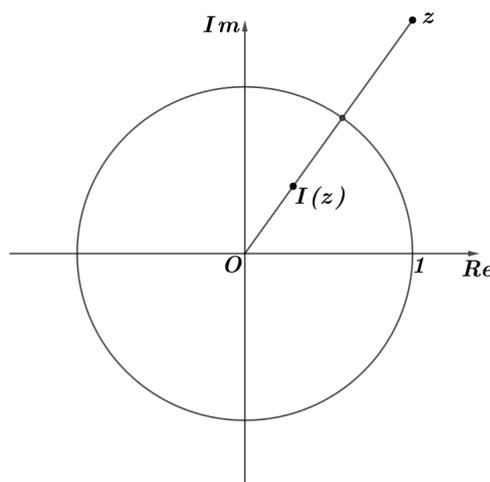


Figura 9 – inversão em relação ao círculo unitário.

Vale notar que um número complexo não nulo situado no interior do círculo unitário é transformado por  $I$  em um número complexo no exterior do círculo, colinear com  $z$  e  $0$ , e vice-versa. Um ponto do círculo unitário é transformado nele próprio.

Agora, voltando à inversão  $J$ , temos que

$$J(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \overline{I(z)}.$$

Assim, a transformação  $J$  pode ser interpretada como a composição da inversão  $I$  em relação ao círculo unitário com a conjugação  $C$ .

É óbvio que as translações, homotetias, rotações, multiplicação por  $\alpha \neq 0$  e conjugação transformam retas em retas e círculos em círculos. Vamos analisar o que a transformação  $J$  faz com círculos e retas. Denotemos por  $z$  a coordenada complexa no domínio de  $J$  e por  $w$  a coordenada no seu contradomínio. Veremos no próximo capítulo que a equação (veja a equação 4.15) de um círculo será dada por

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (1)$$

com  $A, C$  imaginários puros. Seja dado o círculo, no sentido amplo (reta, círculo, círculo degenerado ou círculo imaginário). Dividindo a equação (1) por  $z \cdot \bar{z} \neq 0$ , obtemos

$$A + B \frac{z}{z \cdot \bar{z}} - \bar{B} \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} + C \frac{1}{z \cdot \bar{z}} = 0.$$

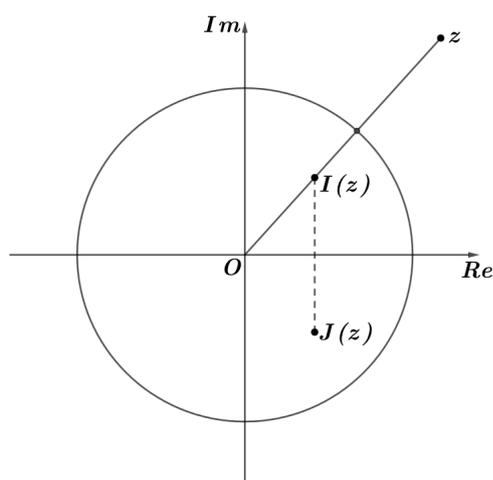


Figura 10 – inversão.

Efetuando as substituições  $\frac{1}{z} = w$ ,  $\frac{1}{\bar{z}} = \bar{w}$  e  $\frac{1}{z \cdot \bar{z}} = w \cdot \bar{w}$ , obtemos

$$A'w\bar{w} + B'w - \bar{B}'\bar{w} + C' = 0, \quad (2)$$

onde  $A' = C$ ,  $B' = -\bar{B}$  e  $C' = A$ , que é a equação de um círculo no sentido amplo.

### 3.2 Transformações de Möbius

Nesta seção estudaremos um classe especial de funções complexas de variável complexa, as chamadas transformações de Möbius, que têm muitas propriedades geométricas.

**Definição 3.2.1.** *Um transformação de Möbius é um função racional da forma*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

É válido notar que as transformações vistas na seção anterior são casos particulares de transformações de Möbius. Agora, note que se multiplicarmos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  por um número complexo não nulo  $\lambda$ , obtemos

$$\frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Portanto, as transformações de Möbius são iguais.

Agora, vejamos o significado da condição  $ad - bc \neq 0$ , na definição 3.2.1. De início, esta ondição garante queo domínio  $D(f)$  de  $f$  não é vazio. De fato,  $D(f) = \emptyset$  s, e somente se,  $cz + d = 0$ , par todo  $z$  complexo, o que equivale a  $c = d = 0$ , o que implicaria  $ad - bc = 0$ .

Por outro lado, sejam  $z', z'' \in D(f)$ . É fácil verificar que  $f(z') = f(z'')$  se e somente se  $(ad - bc)z' = (ad - bc)z''$ , o que nos faz concluir que  $f$  é injetora no seu domínio, quando  $ad - bc \neq 0$ . Em particular,  $f$  não é constante.

Agora, façamos uma análise da imagem de  $f$ . Para tanto, dividamos esta análise em dois casos:  $c = 0$  e  $c \neq 0$ . Para o primeiro, temos que  $a \neq 0$ ,  $d \neq 0$  e

$$f(z) = \frac{az + b}{d} = az + \beta, \quad \text{onde } \alpha = \frac{a}{d} \neq 0 \text{ e } \beta = \frac{b}{d}. \quad (3.1)$$

Daí, é imediato ver que  $D(f) = \mathbb{C}$  e  $f$  é sobrejetora.

Para o caso em que  $c \neq 0$ , temos que  $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ . Por outro lado, a equação  $f(z) = \lambda$ , quando  $z \in D(f)$ , é equivalente à equação  $(a - \lambda c)z = \lambda d - b$ , que só admite solução quando  $\lambda = \frac{a}{c}$ . Portanto, o conjunto imagem de  $f$  é  $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ .

Quando compomos transformações de Möbius há pontos do plano complexo que são problemáticos por não estarem no domínio ou na imagem de algumas delas. Para não nos preocuparmos com esses pontos excepcionais, vamos ampliar o domínio das transformações de Möbius. Para isto, consideramos o **plano complexo completado**, denotado por  $\mathbb{C}_\infty$ , como a união do plano complexo  $\mathbb{C}$  com um *ponto virtual* que não está em  $\mathbb{C}$  e que será denotado por  $\infty$ . Assim,

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

A transformação de Möbius  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , com  $ad - bc \neq 0$  e  $c \neq 0$ , será agora uma transformação definida em  $\mathbb{C}_\infty$ , pondo

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

Podemos definir  $f(\infty)$  da seguinte maneira: o ponto  $w = \frac{a}{c}$  que não era imagem de nenhum ponto de  $\mathbb{C}$  por  $f$ , será considerado com  $f(\infty)$ ; ou seja,

$$f(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Assim,  $f$  passa a ser um bijeção de  $\mathbb{C}_\infty$  em  $\mathbb{C}_\infty$ .

No caso em que  $c = 0$ , temos que  $f$  é da forma  $f(z) = az + \beta$ , com  $a \neq 0$ , que é um bijeção de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ . Portanto, definindo  $f(\infty) = \infty$ , temos, neste caso, também que  $f$  é um bijeção de  $\mathbb{C}_\infty$  em  $\mathbb{C}_\infty$ .

Estas definições podem ser justificadas com o processo de limite, como segue.

Se  $c \neq 0$ ,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \rightarrow \frac{a}{c}, \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty.$$

Se  $c = 0$ , neste caso,  $a \neq 0$  e

$$f(z) = az + \beta \rightarrow \infty, \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty.$$

Daqui por diante, uma transformação de Möbius será uma bijeção  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  definida por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{com } ad - bc \neq 0,$$

onde

$$\begin{cases} f(\infty) = \frac{a}{c} & \text{e } f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, & \text{se } c \neq 0 \\ f(\infty) = \infty, & & \text{se } c = 0. \end{cases}$$

Para as transformações de Möbius estudadas na seção anterior, temos  $T_\beta(\infty) = \infty$ ;  $H_\alpha(\infty) = \infty$ ;  $J(0) = \infty$  e  $J(\infty) = 0$ .

Assim, podemos agora compor transformações de Möbius sem termos de nos preocupar com os pontos onde elas não estavam anteriormente definidas.

**Teorema 3.2.1.** *Toda transformação de Möbius é obtida por composição de translações, multiplicação por números complexos e a inversão.*

*Demonstração.* Observemos a equação 3.1. No caso em  $c = 0$ , quando  $f(z) = \alpha z + \beta$ , onde  $\alpha = \frac{a}{d}$  e  $\beta = \frac{b}{d}$ , temos que

$$f = T_\beta \circ H_\alpha.$$

Por outro lado, se  $c \neq 0$ , podemos escrever

$$f(z) = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(z + \frac{d}{c}\right) - \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{c} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}. \quad (3.2)$$

Portanto, definindo  $\alpha = -\frac{ad-bc}{c^2}$ ,  $\gamma = \frac{d}{c}$  e  $\beta = \frac{a}{c}$ , temos que

$$f = T_\beta \circ H_\alpha \circ J \circ T_\gamma.$$

□

**Corolário 3.2.1.** *Toda transformação de Möbius é invertível.*

*Demonstração.* De fato, pelo teorema 3.2.1, toda transformação de Möbius é composição de transformações elementares, que são transformações invertíveis. □

No caso  $c = 0$ , pela equação 3.1,  $f$  pode ser reescrita na forma  $f(z) = \alpha z + \beta$ , com  $\alpha \neq 0$ . Para cada  $w \in \mathbb{C}$ , escrevendo  $w = \alpha z + \beta$ , temos  $w - \beta = \alpha z$ , logo  $z = \alpha^{-1}(w - \beta)$ . Portanto, a inversa de  $f$  é a transformação de Möbius

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{\alpha}z - \frac{\beta}{\alpha}, \quad f^{-1}(\infty) = \infty.$$

No caso  $c \neq 0$ , escrevemos  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ , para  $z \neq -\frac{d}{c}$ , e podemos resolver a igualdade obtendo  $z$  com função de  $w$ :

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad \text{para } w \neq \frac{a}{c}.$$

A função inversa de  $f$  é a transformação de Möbius dada por

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}, \quad f^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \quad \text{e} \quad f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}.$$

As transformações de Möbius possuem uma propriedade geométrica interessante. De fato, dado um círculo generalizado em  $\mathbb{C}$  determinado pela equação

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (1)$$

onde  $A, C$  são imaginários puros, para estender essa equação a  $\mathbb{C}_\infty$ , convencionamos que  $\infty$  é solução de (1) se, e somente se,  $A = 0$  (notemos que, de certa forma, é natural que só as retas possam passar por  $\infty$ . Esta afirmação será melhor explicada mais adiante, quando faremos a identificação de  $\mathbb{C}_\infty$  com *esfera de Riemann*).

Assim, com a convenção acima, definimos então que a equação (1) é a equação geral dos círculos em  $\mathbb{C}_\infty$ .

**Proposição 3.2.1.** *Toda transformação de Möbius transforma círculos em  $\mathbb{C}_\infty$  em círculos em  $\mathbb{C}_\infty$ .*

*Demonstração.* De fato, sendo toda transformação de Möbius uma composição de transformações elementares, e como essas transformações possuem tal propriedade, segue o resultado.  $\square$

### 3.3 Determinação das transformações de Möbius

Nesta seção procuraremos mostrar que a transformação de Möbius fica determinada por seus valores em três pontos distintos.

**Definição 3.3.1.** *Um elemento  $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$  é chamado um **ponto fixo** da transformação de Möbius  $f$  se, e somente se,  $f(z_0) = z_0$ .*

Notemos, por exemplo, que todos os pontos de  $\mathbb{C}_\infty$  são pontos fixos da transformação identidade em  $\mathbb{C}_\infty$ ; 1 e -1 são pontos fixos da inversão  $J$  e  $\infty$  é o ponto fixo de  $f$  definida por  $f(z) = az + \beta$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $\alpha \neq 0$ .

**Proposição 3.3.1.** *Seja  $f$  uma transformação de Möbius. Então,  $f(\infty) = \infty$  se, e somente se,  $f(z) = az + \beta$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $\alpha \neq 0$ .*

*Demonstração.* De fato, seja  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  uma transformação de Möbius tal que  $c \neq 0$ . Então,  $f(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$ , logo  $\infty$  não é ponto fixo de  $f$ . Assim, se  $f$  é uma transformação de Möbius e  $f(\infty) = \infty$ , então  $c = 0$  e  $f$  é da forma  $f(z) = az + \beta$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $\alpha \neq 0$ .  $\square$

**Proposição 3.3.2.** *Uma transformação de Möbius distinta da identidade tem um ou dois pontos fixos em  $\mathbb{C}_\infty$ .*

*Demonstração.* Seja  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , com  $ad - bc \neq 0$ . Temos que os pontos fixos de  $f$  em  $\mathbb{C}$  são as soluções da equação

$$\frac{az + b}{cz + d} = z.$$

Quando  $c = 0$ , temos que  $\infty$  é ponto fixo de  $f$ . Qualquer outro ponto fixo deve satisfazer a equação  $(a - d)z = -b$  em  $\mathbb{C}$ . Ora, mas esta equação tem infinitas soluções quando  $a = d$  e  $b = 0$  ( $f = Id$ ); não tem solução quando  $a = d$  e  $b \neq 0$ ; tem solução única quando  $a \neq d$ , a saber  $z = \frac{b}{d-a}$ . Portanto, para o caso em que  $c = 0$  a proposição fica provada.

Para o que falta, temos que se  $c \neq 0$ , então  $f(\infty) = \frac{a}{c}$ , e assim  $\infty$  não é ponto fixo de  $f$ . Logo, os pontos fixos de  $f$  estão necessariamente em  $\mathbb{C}$ . Como,  $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ , vem que  $z = -\frac{d}{c}$  não é ponto fixo e, portanto, os pontos fixos de  $f$  devem satisfazer a equação

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

que tem uma ou duas raízes em  $\mathbb{C}$ . Assim, a proposição fica também provada para o caso em que  $c \neq 0$ .  $\square$

Da proposição acima é fácil concluir o seguinte:

**Corolário 3.3.1.** *Uma transformação de Möbius com mais de dois pontos fixos é a identidade.*

**Corolário 3.3.2.** *Duas transformações de Möbius que possuem o mesmo valor em três pontos distintos em  $\mathbb{C}_\infty$  são iguais.*

*Demonstração.* Sejam  $z_1, z_2, z_3$  três pontos distintos em  $\mathbb{C}_\infty$  e sejam  $f$  e  $g$  duas transformações de Möbius tais que  $f(z_i) = g(z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Logo,

$$(g^{-1} \circ f)(z_i) = g^{-1}(f(z_i)) = g^{-1}(g(z_i)) = z_i,$$

o que implica que a transformação de Möbius  $g^{-1} \circ f$  tem três pontos fixos. Então, pelo corolário 3.3.1, temos  $g^{-1} \circ f = Id$  e, portanto,  $f = g$ .  $\square$

Assim, temos que dadas duas ternas de pontos distintos  $z_1, z_2, z_3$  e  $w_1, w_2, w_3$ , se existir uma transformação de Möbius  $f$  tal que  $f(z_i) = w_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ela é única.

**Teorema 3.3.1.** *Dados dois pares de ternas de pontos distintos  $z_1, z_2, z_3$  e  $w_1, w_2, w_3$  de  $\mathbb{C}_\infty$ , existe uma única transformação de Möbius  $f$ , tal que  $f(z_1) = w_1$ ,  $f(z_2) = w_2$  e  $f(z_3) = w_3$ .*

*Demonstração.* Sabemos que se  $f$  existe, ela é única. Resta então provar a existência de  $f$ . Sejam  $z_1, z_2, z_3$  três pontos distintos de  $\mathbb{C}_\infty$ . Definimos  $g : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  por

$$g(z) = \left( \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z} \right) / \left( \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z} \right) \quad \text{se } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

$$g(z) = \frac{z_2 - z}{z_2 - z_3} \quad \text{se } z_1 = \infty \quad \text{e } z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

$$g(z) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z} \quad \text{se } z_2 = \infty \quad \text{e } z_1, z_3 \in \mathbb{C}$$

$$g(z) = \frac{z_2 - z}{z_1 - z} \quad \text{se } z_3 = \infty \quad \text{e } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Temos que  $g$  satisfaz  $g(z_1) = \infty$ ,  $g(z_2) = 0$ ,  $g(z_3) = 1$  e é única. Ora, se agora  $w_1, w_2, w_3$  são três pontos distintos de  $\mathbb{C}_\infty$ , então existe uma única transformação  $h$  de Möbius tal que  $h(w_1) = \infty$ ,  $h(w_2) = 0$ ,  $h(w_3) = 1$ . Então, a transformação de Möbius  $f = h^{-1} \circ g$  é tal que  $f(z_i) = (h^{-1} \circ g)(z_i) = h^{-1}(g(z_i)) = w_i$ .  $\square$

**Definição 3.3.2.** Dados  $z_1, z_2, z_3, z_4$  quatro pontos distintos de  $\mathbb{C}_\infty$ , definimos a *razão cruzada* de  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , como sendo

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = g(z_4) = \left( \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \right) / \left( \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right),$$

com a mesma interpretação dada no teorema 3.3.1, quando algum dos  $z_i$  é igual a  $\infty$ .

A razão cruzada é um invariante para as transformações de Möbius conforme diz a próxima proposição.

**Proposição 3.3.3.** Se  $f$  é uma transformação de Möbius, então

$$(f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2; z_3, z_4),$$

para quaisquer quatro pontos distintos  $z_1, z_2, z_3, z_4$  de  $\mathbb{C}_\infty$ .

*Demonstração.* Seja  $g$  a transformação de Möbius tal que  $g(z_1) = \infty$ ,  $g(z_2) = 0$ ,  $g(z_3) = 1$ . Então,  $g \circ f^{-1}$  leva  $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$  em  $\infty, 0, 1$ . Pela definição de razão cruzada,

$$\begin{aligned} (f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)) &= (g \circ f^{-1})(f(z_4)) \\ &= g(z_4) \\ &= (z_1, z_2; z_3, z_4). \end{aligned}$$

$\square$

Pela proposição anterior, a única transformação de Möbius  $f$  que leva os três pontos distintos  $z_1, z_2, z_3$  nos três pontos distintos  $w_1, w_2, w_3$  satisfaz

$$(w_1, w_2; w_3, f(z)) = (z_1, z_2; z_3, z), \quad (3.3)$$

para todo  $z \in \mathbb{C}_\infty$  diferente de  $z_1, z_2, z_3$ .

A equação 3.3 fornece o método prático para a determinação explícita de  $f(z)$ .

Olhemos o caso especial em que  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  e  $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), w_3 = f(z_3) \in \mathbb{C}$ . Nesse caso, fazendo  $w = f(z)$ , a equação 3.3 é

$$\left( \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w} \right) / \left( \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w} \right) = \left( \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z} \right) / \left( \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z} \right),$$

podemos então resolver a igualdade acima para obter  $w$  como função de  $z$ , isto é,  $w = f(z)$ .

**Exemplo 3.3.1.** Determine a transformação de Möbius  $f$  que leva os pontos  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = -1$  em  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = i$ ,  $w_3 = -i$ .

Como  $(w_1, w_2; w_3, f(z)) = (z_1, z_2; z_3, z)$ , fazendo  $w = f(z)$ , temos

$$\left( \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w} \right) / \left( \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w} \right) = \left( \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z} \right) / \left( \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z} \right).$$

Substituindo pelos valores dados, temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{1+i}{1-w} \right) / \left( \frac{2i}{i-w} \right) &= \left( \frac{2}{1-z} \right) / \left( \frac{i+1}{i-z} \right) \iff \\ \frac{1+i}{1-w} \cdot \frac{i-w}{2i} &= \frac{2}{1-z} \cdot \frac{i-z}{i+1} \iff \\ \frac{1-i}{2} \cdot \frac{i-w}{1-w} &= (1-i) \cdot \frac{i-z}{1-z} \iff \\ i(1-z) - w(1-z) &= 2(i-z) - 2w(i-z) \iff \\ w &= \frac{i-2z+iz}{2i-z-1}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f(z) = \frac{i-2z+iz}{2i-z-1}$ .

**Exemplo 3.3.2.** Determine a transformação de Möbius  $f$  que leva os pontos  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = \infty$  em  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = \infty$ ,  $w_3 = 0$ .

Como  $(w_1, w_2; w_3, f(z)) = (z_1, z_2; z_3, z)$ , fazendo  $w = f(z)$ , temos

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w} = \frac{z_2 - z}{z_1 - z}.$$

Substituindo os valores dados e fazendo as operações necessárias obtemos

$$f(z) = -\frac{1}{z-1}.$$

### 3.4 A esfera de Riemann

Nesta seção, procuraremos estabelecer o modelo geométrico para o plano complexo completado  $\mathbb{C}_\infty$ , o que tornará mais claro algumas conveções que fizemos até aqui.

**Definição 3.4.1.** A esfera unitária  $S^2$ , de centro  $(0, 0, 0)$  e raio 1, é o subconjunto do  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Seja  $N = (0, 0, 1)$  o polo norte de  $S^2$  e identifiquemos cada  $x + yi$  do plano complexo  $\mathbb{C}$  com o ponto  $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$  do plano em  $\mathbb{R}^3$  de equação  $z = 0$ . Vale notar que a variável  $z$  aqui assume apenas valores reais representando a terceira coordenada de um ponto de  $\mathbb{R}^3$ .

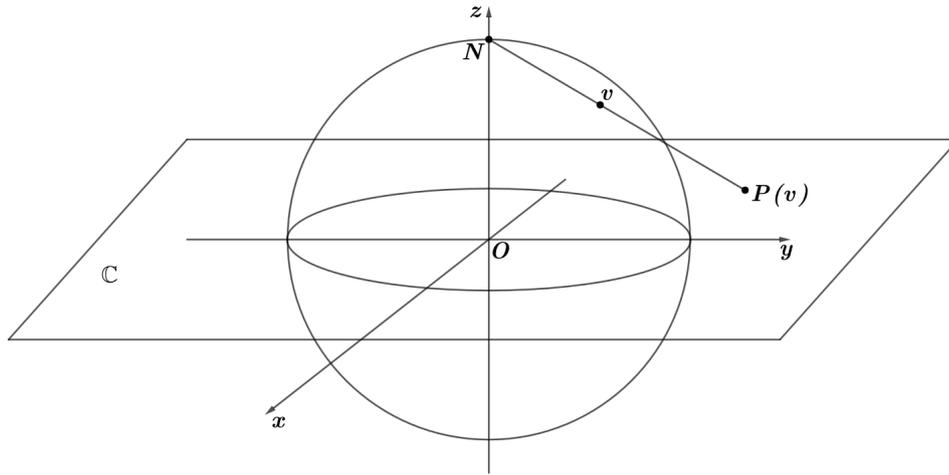


Figura 11 – esfera unitária e o plano complexo.

Notemos que o plano  $\pi$ , de equação  $z = 0$ , divide a esfera unitária em duas partes iguais, o hemisfério norte ( $z > 0$ ) que contém o polo norte e o hemisfério sul ( $z < 0$ ).

Seja  $v \in S^2 \setminus \{N\}$ . Então,  $N$  e  $v$  determinam uma reta  $l$  em  $\mathbb{R}^3$ , que intersecta o plano  $\pi$  em um único ponto  $(a_v, b_v, 0)$ .

**Definição 3.4.2.** A *projeção estereográfica*  $P : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  é a função definida por  $P(v) = a_v + b_v i$ .

Determinemos então a expressão de  $P$ . Para tanto, tomemos o vetor  $v - N$  como o vetor diretor da reta  $l$  que passa por  $N$ . Supondo  $v = (x, y, z)$ . Temos que  $Q \in l$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} Q &= N + t(v - N) \\ &= (0, 0, 1) + t(x, y, z - 1) \\ &= (tx, ty, 1 + t(z - 1)), \quad \text{onde } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Q \in l \cap \pi &\iff 1 + t(z - 1) = 0 \\ &\iff t = \frac{1}{1 - z} \\ &\iff Q = \left( \frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0 \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(v) = P(x, y, z) = \frac{x}{1 - z} + \frac{y}{1 - z}i,$$

para todo  $v = (x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$ .

Enunciemos agora uma propriedade da projeção estereográfica  $P$ .

**Lema 3.4.1.** A função  $P : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma bijeção.

*Demonstração.* Para provarmos a bijetividade de  $P$  vamos exibir a sua função inversa  $P^{-1}$ .

Seja  $w = w' + w''i \in \mathbb{C}$  tal que  $w = P(v)$ , onde  $v = (x, y, z)$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e  $z \neq 1$ . logo,

$$w' + w''i = \frac{x}{1-z} + \frac{y}{1-z}i \iff w' = \frac{x}{1-z} \quad \text{e} \quad w'' = \frac{y}{1-z}. \quad (3.4)$$

É possível resolver as igualdades à direita em 3.4, em virtude das condições sobre coordenadas de  $v$ , notando que

$$\begin{aligned} |w|^2 + 1 &= \frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} + 1 \\ &= \frac{x^2 + y^2 + (1-2z+z^2)}{(1-z)^2} \\ &= \frac{2-2z}{(1-z)^2} = \frac{2}{1-z}. \end{aligned}$$

Logo,  $1-z = \frac{2}{|w|^2+1}$ . isto nos dá  $z = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}$  e, com as igualdades de 3.4, obtemos  $x = \frac{2w'}{|w|^2+1}$  e  $y = \frac{2w''}{|w|^2+1}$ . Portanto,

$$P^{-1}(w) = \left( \frac{2w'}{|w|^2+1}, \frac{2w''}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1} \right), \quad \text{onde} \quad w = w' + w''i. \quad (3.5)$$

□

Notemos que, quando  $v$  se aproxima de  $N = (0, 0, 1)$ , temos que  $z \rightarrow 1$  e  $|w| = |P(v)| \rightarrow \infty$ . Então, é natural definir  $P(N) = \infty$ , estendendo  $P$  a toda esfera  $S^2$  e obtendo uma bijeção  $P : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ . Tal função permite identificar  $\mathbb{C}_\infty$  com a esfera unitária. o plano complexo completado,  $\mathbb{C}_\infty$ , é também conhecido como a **esfera de Riemann**.

A projeção estereográfica uma propriedade geométrica notável: transforma um círculo em  $S^2$  que não passa por  $N$  em um círculo em  $\mathbb{C}$  e transforma um círculo em  $S^2$  que passa por  $N$  em uma reta em  $\mathbb{C}$  unida com  $\{\infty\}$ .

De fato, um círculo em  $S^2$  é a interseção de  $S^2$  com um plano de  $\mathbb{R}^3$  que corta  $S^2$  e não lhe é tangente. Caracterizemos tais planos. Da Geometria Analítica temos que a distância entre um plano  $\Pi$  de equação  $ax + by + cz + d = 0$ , onde  $n = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , à origem  $O$  de  $\mathbb{R}^3$  é dada por

$$d(O, \Pi) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Portanto,  $\Pi$  corta a esfera  $S^2$  se, e somente se,  $d(O, \Pi) \leq 1$ , sendo-lhe tangente se, somente se,  $d(O, \Pi) = 1$ .

Vejamos como a projeção estereográfica projeta os pontos do plano  $\Pi$  com equação  $ax+by+cz+d = 0$  em  $\mathbb{C}_\infty$ . Usando a fórmula de função inversa da projeção estereográfica obtida em 3.5, segue que o ponto  $w = w' + w''i$ , projeção de  $(x, y, z) \in \Pi$ , no plano deve satisfazer à equação

$$a \frac{2w'}{|w|^2 + 1} + b \frac{2w''}{|w|^2 + 1} + c \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} + d = 0.$$

Agora, escrevendo esta equação nas coordenadas  $w$  e  $\bar{w}$ , obtemos

$$a \frac{w + \bar{w}}{|w|^2 + 1} + b \frac{i\bar{w} - iw}{|w|^2 + 1} + c \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} + d = 0.$$

De onde obtemos

$$A'w\bar{w} + B'w + \bar{B}'\bar{w} + C' = 0, \quad (3.6)$$

onde  $A' = c + d$ ,  $C' = d - c \in \mathbb{R}$ ,  $B' = a - bi$ . Multiplicado por  $i$  a equação 3.6 temos

$$Aw\bar{w} + Bw - \bar{B}\bar{w} + C = 0, \quad (3.7)$$

onde  $A, D$  são imaginários puros e  $B = -\bar{B}$ . Portanto, a equação 3.7 é a equação de um círculo generalizado em  $\mathbb{C}_\infty$ . Analisemos agora, a natureza deste círculo em função de  $a, b, c$  e  $d$ .

- O círculo é uma reta se, e somente se,  $A' = (c + d) = 0$ . Isto equivale à condição do plano  $ax + by + cz + d = 0$  passar pelo polo norte  $N = (0, 0, 1)$ .
- O círculo é um círculo real se e somente se,  $|B'|^2 - A'D' = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 > 0$ . Esta última condição é equivalente à condição  $d(\Pi) < 1$ . Ou seja, que o plano  $\Pi$  intersecta a esfera  $S^2$ , sem tangenciá-la.
- O círculo é um círculo degenerado se e somente se,  $|B'|^2 - A'D' = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 0$ . Esta última condição é equivalente à condição  $d(\Pi) = 1$ . Ou seja, que o plano  $\Pi$  tangencia a esfera  $S^2$ .
- O círculo é um círculo imaginário se e somente se,  $|B'|^2 - A'D' = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 < 0$ . Esta última condição é equivalente à condição  $d(\Pi) > 1$ . Ou seja, que o plano  $\Pi$  não corta a esfera  $S^2$ .

## 4 APLICAÇÕES NA GEOMETRIA

Os números complexos se mostram particularmente eficazes para certos tipos de problemas da geometria plana que podem ser resolvidos por métodos elementares. O objetivo deste capítulo é discutir sobre esses problemas usando as ferramentas coletadas no capítulo anterior.

### 4.1 Triângulos

Iniciaremos nossa discussão a partir do conceito de semelhança de dois triângulos em termos de números complexos. Dizemos que um triângulo é orientado se a ordem dos seus vértices é especificada. Essa orientação é dita positiva se seu sentido é anti-horário e negativa se for horário. Dois triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  possuem a mesma orientação se ambos possuem sentido positivo ou negativo. Caso eles possuam sentidos contrários, dizemos que eles possuem orientação oposta.

Dois triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  são semelhantes se, e somente se, o ângulo em  $z_k$  for igual ao ângulo em  $w_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$  e escrevemos

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$$

caso eles possuam mesma orientação. Se eles possuem orientação oposta escrevemos

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{OP} \Delta w_1 w_2 w_3.$$

Dados três pontos distintos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , dizemos que

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1)$$

é o ângulo orientado do vetor  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  para  $\overrightarrow{z_1 z_3}$  no sentido anti-horário (veja figura 12).

**Observação:** Chamaremos o número complexo

$$(z_3, z_2; z_1) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

de razão dos três pontos  $z_3, z_2, z_1$ . Portanto, o ângulo entre os vetores  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  e  $\overrightarrow{z_1 z_3}$  tem argumento igual a razão  $(z_3, z_2; z_1)$ .

**Proposição 4.1.1.** *Três pontos distintos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  são colineares se, e somente se,  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Se  $z_1, z_2, z_3$  são colineares, então o ângulo entre  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  e  $\overrightarrow{z_1 z_3}$  é 0 ou  $\pi$ . Segue então que

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \pi,$$

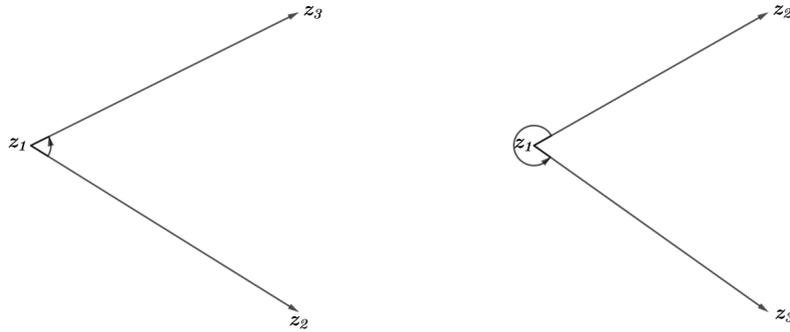


Figura 12 – ângulo orientado

o que equivale a  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ , pois

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| (\cos 0 + i \sin 0) = \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| \in \mathbb{R}$$

ou

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| (\cos \pi + i \sin \pi) = - \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| \in \mathbb{R}.$$

Reciprocamente, se  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ , então  $\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$  ou  $\pi$ , onde  $\theta = \arg \left( \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right)$ , portanto  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  são colineares.  $\square$

**Proposição 4.1.2.** Dados três pontos distintos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , então  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$ .

*Demonstração.* Se  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ , então temos

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left( \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right)} = \frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Reciprocamente, se  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$ , então  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left( \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right)}$ , sendo  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\alpha + i\beta = \alpha - i\beta \iff 2i\beta = 0 \iff \beta = 0$$

. Portanto,  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \alpha \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Com base nas proposições listadas acima, é fácil ver que a equação de uma reta, no plano complexo, que passa por dois pontos distintos  $z_1$  e  $z_2$  é dada por

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}, \quad (4.1)$$

que é equivalente a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2. \quad (4.2)$$

É interessante observar que no caso particular em que  $|z_1| = |z_2| = 1$  a equação 4.2 pode ser escrita como

$$z + z_1 z_2 \bar{z} = z_1 + z_2. \quad (4.3)$$

De 4.2 podemos escrever a equação de uma reta como

$$\bar{B}\bar{z} - Bz + C = 0,$$

onde  $B = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$ ,  $\bar{B} = z_2 - z_1$ ,  $C = z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$  e como  $C = -\bar{C}$ , temos que  $C$  é um imaginário puro.

Agora, é interessante observar que a equação 4.1 é equivalente a

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De fato, pelas propriedades de determinantes, temos

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \bar{z}_1 & 0 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \iff$$

$$\begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \bar{z}_1 \\ z_2 - z_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Assim, a equação da reta que passa pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$  pode ser obtida desenvolvendo o determinante

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Da equação 4.2, podemos determinar também a equação de uma reta paralela a  $z_1 z_2$  passando por  $z_3$ . De fato, se os vetores  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  e  $\overrightarrow{z_3 z_4}$  são paralelos, então

$$\arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) = 0.$$

Daí, vem que

$$\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z}_4 - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Portanto, a equação da reta paralela a  $z_1z_2$  passando por  $z_3$  é dada por

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1},$$

que é equivalente a

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - (z_2 - z_1)\bar{z} = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z_3 - (z_2 - z_1)\bar{z}_3. \quad (4.4)$$

No caso particular em que  $|z_1| = |z_2| = 1$ , temos que 4.4 pode ser escrita da seguinte forma

$$z + z_1z_2\bar{z} = z_3 + z_1z_2\bar{z}_3. \quad (4.5)$$

A seguir trataremos da ortogonalidade no plano complexo.

**Proposição 4.1.3.** *Sejam  $z_1, z_2, z_3$  três pontos distintos no plano complexo. Os vetores  $\overrightarrow{z_1z_2}$  e  $\overrightarrow{z_1z_3}$  são ortogonais se, e somente se,  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  é imaginário puro.*

*Demonstração.* Se  $\overrightarrow{z_1z_2} \perp \overrightarrow{z_1z_3}$ , então temos que o ângulo entre  $\overrightarrow{z_1z_2}$  e  $\overrightarrow{z_1z_3}$  é igual a  $\frac{\pi}{2}$  ou a  $\frac{3\pi}{2}$ . Isso equivale a

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{3\pi}{2},$$

e pela forma polar de um número complexo, é fácil concluir que  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  é imaginário puro.

Reciprocamente, se  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  é imaginário puro, então  $\cos \theta = 0$ , onde  $\theta = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$ , daí vem que  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2}$ . Portanto os vetores  $\overrightarrow{z_1z_2}$  e  $\overrightarrow{z_1z_3}$  são ortogonais.  $\square$

**Proposição 4.1.4.** *Sejam  $z_1, z_2, z_3$  três pontos distintos no plano complexo. Então,  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  é imaginário puro se, e somente se,*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0.$$

*Demonstração.* Se  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  é imaginário puro, então

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = -\overline{\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)} = -\frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = -\frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1},$$

que é equivalente a

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0.$$

Reciprocamente, sendo  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \alpha + i\beta$ , então

$$\alpha + i\beta + \alpha - i\beta = 0 \iff 2\alpha = 0 \iff \alpha = 0.$$

Logo,  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  é imaginário puro.  $\square$

**Proposição 4.1.5.** *A equação da reta que passa por  $z_3$  e é perpendicular à reta que passa pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$  é dada por*

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0,$$

que equivale a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1). \quad (4.6)$$

*Demonstração.* Seja  $zz_3$  a reta que passa pelos pontos  $z$  e  $z_3$  e é perpendicular a  $z_1z_2$ . Sendo  $zz_3 \perp z_1z_2$ , temos que  $\overrightarrow{zz_3}$  e  $\overrightarrow{z_1z_2}$  são ortogonais, logo, pela proposição 4.1.3  $\frac{z - z_3}{z_2 - z_1}$  é imaginário puro. Então, pela proposição 4.1.4 segue que

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0,$$

que é equivalente a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1).$$

□

**Exemplo 4.1.1.** *Seja um triângulo  $\triangle ABC$ . Consideremos os quadrados (externos ao triângulo)  $ABDE$  e  $ACFG$  sobre os lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente.*

(a) *Seja  $M$  o ponto médio do lado  $BC$ . Mostre que*

$$EG \perp AM \quad e \quad \overline{EG} = 2\overline{AM}.$$

(b) *Seja  $H$  o pé da perpendicular traçada do vértice  $A$  ao lado  $BC$ . Mostre que o prolongamento de  $AH$  bissecta  $EG$ .*

*Demonstração.* (a) Representemos  $A, B, C, E, G$  pelos complexos  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \lambda$  respectivamente. Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \lambda - \alpha &= i(\gamma - \alpha) = i\gamma - i\alpha \\ \mu - \alpha &= -i(\beta - \alpha) = -i\beta + i\alpha. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= i(\gamma + \beta) - 2i\alpha \\ &= i(\gamma + \beta - 2\alpha) \\ &= 2i \left( \frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha \right). \end{aligned}$$

De onde vem que,

$$\frac{\lambda - \mu}{\frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha} = 2i,$$

que é imaginário puro. Logo,  $EG \perp AM$ . Daí, segue então que

$$\left| \frac{\lambda - \mu}{\frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha} \right| = |2i| \iff$$

$$|\lambda - \mu| = 2 \cdot \left| \frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha \right|.$$

Portanto,  $\overline{EG} = 2\overline{AM}$ .

(b) Agora, notemos que

$$\lambda + \mu - 2\alpha = i(\gamma - \beta) \iff$$

$$2 \left( \frac{\lambda + \mu}{2} - \alpha \right) = i(\gamma - \beta) \iff$$

$$\frac{\lambda + \mu}{2} - \alpha = \frac{1}{2}i \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \beta} = \frac{1}{2}i.$$

Portanto, sendo  $\frac{\lambda + \mu}{2}$  o ponto médio de  $EG$ , segue que o prolongamento de  $AH$  bissecta  $EG$ .  $\square$

No caso particular em que  $|z_1| = |z_2| = 1$ , temos que 4.6 pode ser reescrita como

$$z - z_1 z_2 \bar{z} = z_3 - z_1 z_2 \bar{z}_3. \quad (4.7)$$

**Corolário 4.1.1.** Se  $z_1, z_2$  são dois pontos distintos no plano complexo, a equação da reta *mediatriz* do segmento  $z_1 z_2$  é dada por

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = |z_2|^2 - |z_1|^2. \quad (4.8)$$

*Demonstração.* Fazemos na equação 4.6  $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ , que é o ponto médio do segmento  $z_1 z_2$ ; segue então que a **mediatriz** do segmento  $z_1 z_2$  é dada por

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = \frac{z_1 + z_2}{2}(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2}(z_2 - z_1)$$

que é equivalente a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = |z_2|^2 - |z_1|^2.$$

$\square$

A seguir, provaremos um resultado envolvendo semelhança de triângulos no plano complexo.

**Proposição 4.1.6.**  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$  (triângulos semelhantes com mesma orientação) se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \iff \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, as proporções dos comprimentos dos dois lados correspondentes forem iguais e, os ângulos (correspondentes) entre eles são os mesmos (incluindo a orientação). Ou seja,  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$

$$\iff \left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \quad \text{e} \quad \arg \left( \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right) = \arg \left( \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right).$$

E pela forma polar de números complexos é fácil concluir que

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}.$$

Para o que falta, basta procedermos de maneira análoga ao que foi feito no caso da reta da equação 4.2, assim concluiremos que

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \iff \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

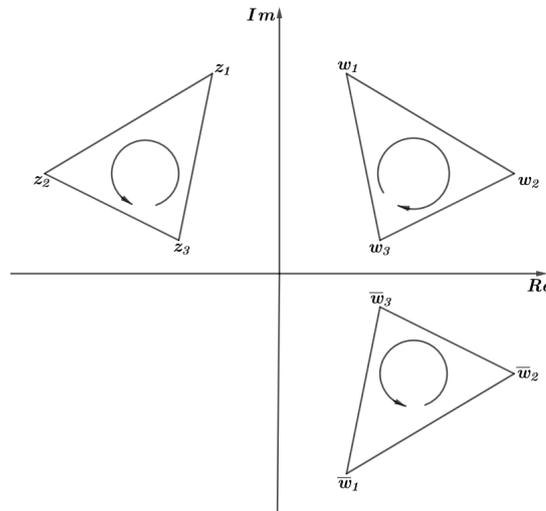


Figura 13 – semelhança entre triângulos

**Corolário 4.1.2.**  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{OP} \Delta w_1 w_2 w_3$  se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1} \iff \begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* A reflexão em relação ao eixo real transforma os pontos  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  em  $\bar{w}_1$ ,  $\bar{w}_2$  e  $\bar{w}_3$ , respectivamente (veja a figura 13). Assim,  $\Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \sim_{OP} \Delta w_1 w_2 w_3$ , portanto  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{OP} \Delta w_1 w_2 w_3 \iff \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$ . E pela proposição 4.1.6 segue que

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1} \iff \begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

As proposições a seguir mostrarão como se obter o **circuncentro**, o **ortocentro** e o **baricentro** de um triângulo qualquer no plano complexo.

**Observação:** A discussão sobre o **incentro** de um triângulo qualquer no plano complexo será feita posteriormente, durante a demonstração do Teorema de Feuerbach.

**Proposição 4.1.7 (Circuncentro).** *As mediatrizes dos três lados de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto, chamado de **circuncentro** do triângulo.*

*Demonstração.* Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  os vértices do triângulo. Então, pela equação 4.8, a equação

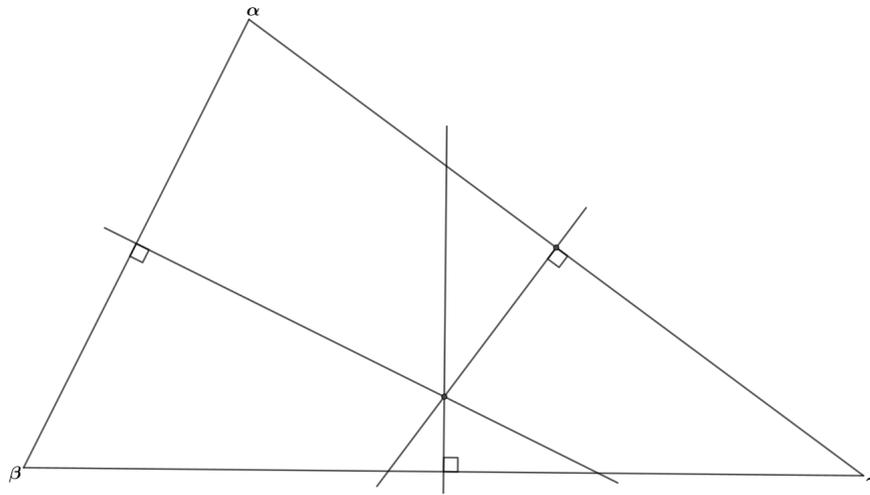


Figura 14 – circuncentro

da mediatriz relativa ao lado  $\alpha\beta$  é dada por

$$(\alpha - \beta)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z = |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$

Analogamente, obtemos as equações das mediatrizes dos lados  $\gamma\alpha$  e  $\beta\gamma$ . Assim, podemos montar o seguinte sistema

$$\begin{cases} (\alpha - \beta)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z = |\alpha|^2 - |\beta|^2 & (1) \\ (\gamma - \alpha)\bar{z} + (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})z = |\gamma|^2 - |\alpha|^2 & (2) \\ (\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = |\beta|^2 - |\gamma|^2 & (3) \end{cases}$$

Observe que, ao somarmos as equações (1) e (2) obtemos a equação (3). Da mesma forma, se somarmos as equações (1) e (3) ou (2) e (3), obtemos as equações (2) e (1) respectivamente. Assim, temos que a interseção de duas equações quaisquer deste sistema pertence à terceira. Logo, concluímos que as mediatrizes de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. □

Determinemos agora o circuncentro, resolvendo o sistema formado pelas equações (1), (2) e (3). Da equação (1), segue que

$$\bar{z} = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z}{\alpha - \beta}.$$

Substituindo na equação (2), obtemos

$$(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})z + \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z}{\alpha - \beta}(\gamma - \alpha) = |\gamma|^2 - |\alpha|^2$$

$$(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(\alpha - \beta)z + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\gamma - \alpha) - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\gamma - \alpha)z = (|\gamma|^2 - |\alpha|^2)(\alpha - \beta)$$

$$z[\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)] = |\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)$$

$$z = \frac{|\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)} \quad (4.9)$$

Observemos que, dada a simetria do resultado, a equação (3) é satisfeita pela relação 4.9.

**Proposição 4.1.8 (Ortcentro).** *As três alturas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto, chamado de **ortocentro** do triângulo.*

*Demonstração.* Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os vértices de um triângulo. A altura relativa ao lado  $\beta\gamma$

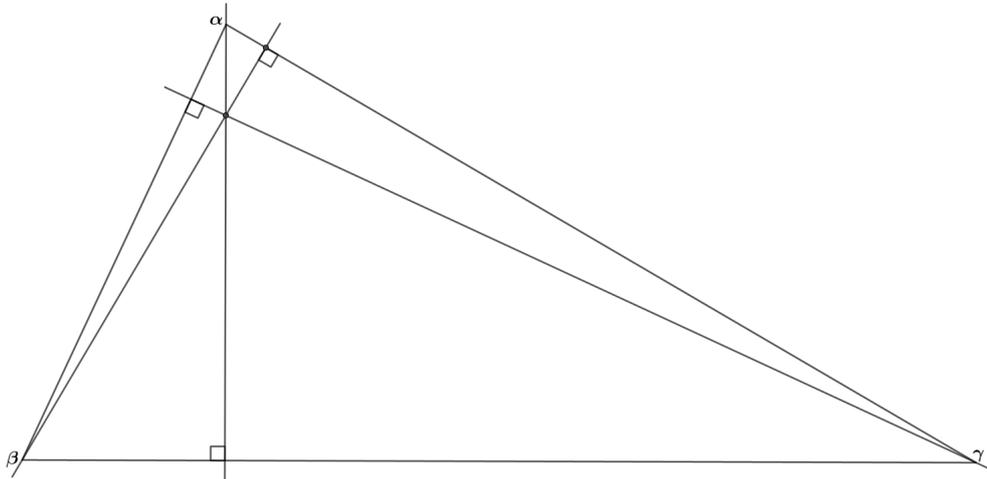


Figura 15 – ortocentro

pertence a reta de equação

$$(\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma)$$

pela relação 4.6. Analogamente, podemos obter as retas que contêm as alturas relativas aos vértices  $\beta$  e  $\gamma$ . Assim, com as três equações obtidas podemos formar o seguinte

sistema

$$\begin{cases} (\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma) & (1) \\ (\alpha - \gamma)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})z = \beta(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{\beta}(\alpha - \gamma) & (2) \\ (\alpha - \beta)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z = \gamma(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta) & (3) \end{cases}$$

Notemos que qualquer uma das três equações é combinação linear das outras duas. Assim, a interseção de duas dessas equações pertence à terceira delas, ou seja, as três alturas de um triângulo se encontram em um único ponto.  $\square$

Vamos calcular o ortocentro do triângulo inscrito no círculo de raio  $R$  com centro na origem. Nesse caso, temos  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = R$ , logo  $\bar{\alpha} = \frac{R^2}{\alpha}$ ,  $\bar{\beta} = \frac{R^2}{\beta}$  e  $\bar{\gamma} = \frac{R^2}{\gamma}$ . Substituindo essas relações e isolando  $\bar{z}$  nas equações (2) e (3), temos

$$\bar{z} = R^2 \left( \frac{z}{\alpha\gamma} - \frac{\beta}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta} \right) \quad (4)$$

e

$$\bar{z} = R^2 \left( \frac{z}{\alpha\beta} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (5)$$

De (4) e (5), segue que

$$\begin{aligned} R^2 \left( \frac{z}{\alpha\gamma} - \frac{\beta}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta} \right) &= R^2 \left( \frac{z}{\alpha\beta} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \\ \iff \frac{z}{\alpha} \cdot \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta} \right) &= \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} \right) + \frac{\beta - \gamma}{\gamma\beta} \\ \iff z \cdot \left( \frac{\beta - \gamma}{\gamma\beta} \right) &= \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\gamma\beta} + \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma}{\gamma\beta} \\ \iff z &= \frac{(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) + \alpha(\beta - \gamma)}{\beta - \gamma} \\ \iff z &= \alpha + \beta + \gamma. \end{aligned} \quad (4.10)$$

**Proposição 4.1.9** (Baricentro). *As três medianas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto, chamado de **baricentro**.*

*Demonstração.* Seja um triângulo de vértices  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . De acordo com a equação 4.2, temos que a reta suporte da mediana relativa ao lado  $\beta\gamma$  que passa por  $\alpha$  tem equação

$$\left( \alpha - \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \bar{z} - \left( \bar{\alpha} - \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{2} \right) z = \alpha \left( \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{2} \right) - \bar{\alpha} \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right),$$

segue então que

$$(2\alpha - \beta - \gamma)\bar{z} - (2\bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} + \bar{\gamma}) - \bar{\alpha}(\beta + \gamma). \quad (1)$$

Analogamente, obtemos as equações das medianas relativas aos lados  $\alpha\gamma$  e  $\alpha\beta$ , que são dadas, respectivamente, por

$$(2\beta - \alpha - \gamma)\bar{z} - (2\bar{\beta} - \bar{\alpha} - \bar{\gamma})z = \beta(\bar{\alpha} + \bar{\gamma}) - \bar{\beta}(\alpha + \gamma) \quad (2)$$

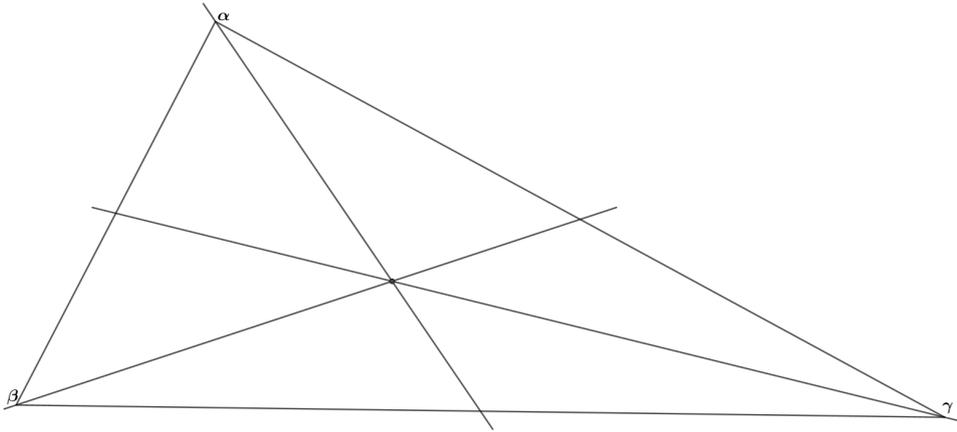


Figura 16 – baricentro

e

$$(2\gamma - \alpha - \beta)\bar{z} - (2\bar{\gamma} - \bar{\alpha} - \bar{\beta})z = \gamma(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) - \bar{\gamma}(\alpha + \beta). \quad (3)$$

Notemos que qualquer uma das três equações é combinação linear das outras duas. Logo, a interseção de duas dessas equações pertence também à outra. Portanto, as três medianas se encontram em um único ponto.  $\square$

Antes de obtermos o baricentro de um triângulo, determinemos a equação paramétrica de uma reta no plano complexo.

Consideremos uma reta que passa pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$ . Seja  $z$  um ponto pertencente a esta reta, pela proposição 4.1.1 podemos escrever

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t, \quad \text{onde } t \in \mathbb{R}.$$

De onde segue que

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1),$$

daí

$$z = (1 - t)z_1 + tz_2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

A equação 4.11 é chamada de **equação paramétrica da reta** que passa pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$ . De posse da equação 4.11, temos que as equações paramétricas das medianas relativas aos lados  $\beta\gamma$  e  $\alpha\gamma$  são dadas por

$$\begin{aligned} z &= (1 - t)\alpha + t\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) \quad (0 \leq t \leq 1) \\ z &= (1 - t)\beta + t\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \quad (0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações acima, obtemos  $t = \frac{2}{3}$ . Portanto, substituindo esse valor em qualquer uma das duas equações acima, temos

$$z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}. \quad (4.12)$$

É fácil verificar que este ponto também pertence a mediana relativa ao lado  $\alpha\beta$ .

É válido notar que o circuncentro, o ortocentro e o baricentro de um triângulo qualquer são colineares. De fato, sem perda de generalidade, tomando o  $\Delta z_1 z_2 z_3$  inscrito num círculo unitário centrado na origem, temos que o circuncentro, o ortocentro e o baricentro são dados respectivamente por

$$0, z_1 + z_2 + z_3, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Assim, temos

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3 - 0}{\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} - 0} \in \mathbb{R}.$$

A reta que passa por estes pontos é chamada de **Reta de Euler** em homenagem ao matemático suíco Leonhard Euler.

As próximas proposições caracterizarão triângulos equiláteros, o que servirá de base para demonstrarmos o teorema de Napoleão.

**Proposição 4.1.10.** *O  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* Notemos que o triângulo  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se,  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z_2 z_3 z_1$ , então pela proposição 4.1.6 segue que

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Agora, ao desenvolvermos o determinante, obtemos

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3 &= 0 \iff \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3, \end{aligned} \tag{4.13}$$

o que é uma outra caracterização para triângulos equiláteros.

**Proposição 4.1.11.** *O  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se,*

$$z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0 \quad \text{ou} \quad z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0,$$

onde  $\omega$  é uma das raízes complexas da unidade ( $\omega^3 = 1$ ).

*Demonstração.* Lembrando que as raízes complexas da unidade são vértices de um triângulo equilátero, temos então que  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se,

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega \omega^2 \quad \text{ou} \quad \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \bar{\omega} \bar{\omega}^2.$$

Segue da proposição 4.1.10 que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \iff z_1(\omega - \omega^2) + z_2(\omega^2 - 1) + z_3(1 - \omega) = 0 \\ & \iff z_1(\omega - \omega^2) + z_2(\omega^2 - \omega^3) + z_3(\omega^3 - \omega) = 0 \\ & \iff z_1\omega(1 - \omega) + z_2\omega^2(1 - \omega) - z_3\omega(1 - \omega)(1 + \omega) = 0 \\ & \iff z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, prova-se o segundo caso. □

Encerramos esta seção demonstrando um resultado clássico da Geometria: o Teorema de Napoleão.

**Teorema 4.1.1** (Napoleão). *Sobre cada lado de um triângulo qualquer, desenhe na parte exterior um triângulo equilátero. Então os baricentros dos três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero.*

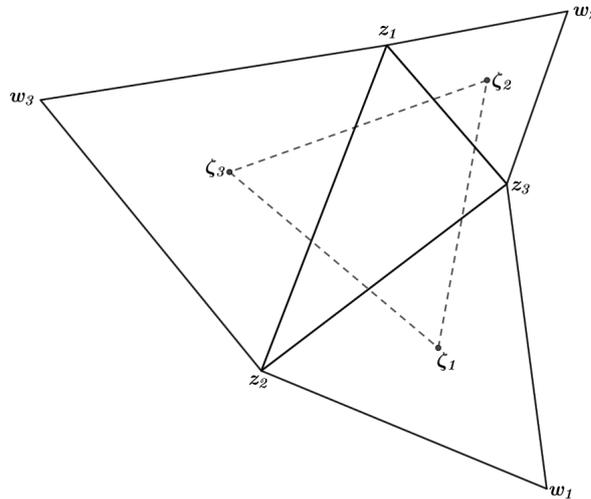


Figura 17 – Teorema de Napoleão

*Demonstração.* Seja  $\Delta z_1 z_2 z_3$  um triângulo dado e,  $\Delta w_1 z_3 z_2$ ,  $\Delta z_3 w_2 z_1$ ,  $\Delta z_2 z_1 w_3$  os triângulos equiláteros construídos exteriormente sobre os lados de  $\Delta z_1 z_2 z_3$  com a mesma orientação que  $\Delta 1 \omega \omega^2$ , onde  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ . Pela proposição 4.1.11 segue que

$$\begin{aligned} w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 &= 0, \\ z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 &= 0, \\ z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sendo  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  os baricentros de  $\Delta w_1 z_3 z_2, \Delta z_3 w_2 z_1, \Delta z_2 z_1 w_3$  respectivamente, mostremos que  $\Delta \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$  é equilátero. De fato,

$$\begin{aligned} \zeta_1 + \omega \zeta_2 + \omega^2 \zeta_3 &= \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{\omega}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3) \\ &= \frac{(w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3)}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Novamente pela proposição 4.1.11 concluímos que  $\Delta \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$  é equilátero.  $\square$

**Exemplo 4.1.2.** *Sejam  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  dois triângulos equiláteros com a mesma orientação. Mostre que os pontos médios dos segmentos  $AA', BB', CC'$  são vértices de um triângulo equilátero.*

*Demonstração.* Representemos os pontos  $A, B, C, A', B', C'$  pelos complexos  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  respectivamente. Temos então que os pontos médios dos segmentos  $AA', BB', CC'$  são dados por

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2}, \quad \frac{\beta + \beta'}{2}, \quad \frac{\gamma + \gamma'}{2}.$$

Como, por hipótese, os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são equiláteros com mesma orientação, vem que

$$\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha' + \beta'\omega + \gamma'\omega^2 = 0.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \alpha'}{2} + \frac{\beta + \beta'}{2}\omega + \frac{\gamma + \gamma'}{2}\omega^2 &= \\ \frac{\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2}{2} + \frac{\alpha' + \beta'\omega + \gamma'\omega^2}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, temos o resultado.  $\square$

**Exemplo 4.1.3.** *Sejam  $\Delta ABC, \Delta DEF, \Delta GHI$  três triângulos equiláteros com a mesma orientação. Sendo  $P, Q, R$  os baricentros dos triângulos  $\Delta ADG, \Delta BEH, \Delta CFI$  respectivamente, mostre que o triângulo  $\Delta PQR$  é equilátero.*

*Demonstração.* Representemos os pontos  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, P, Q, R$  pelos complexos  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  respectivamente. Por hipótese, temos que

$$u_1 + u_2\omega + u_3\omega^2 = 0, \quad v_1 + v_2\omega + v_3\omega^2 = 0 \quad \text{e} \quad w_1 + w_2\omega + w_3\omega^2 = 0.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \zeta_1 + \zeta_2\omega + \zeta_3\omega^2 &= \frac{u_1 + v_1 + w_1}{3} + \frac{u_2 + v_2 + w_2}{3}\omega + \frac{u_3 + v_3 + w_3}{3}\omega^2 \\ &= \frac{u_1 + u_2\omega + u_3\omega^2}{3} + \frac{v_1 + v_2\omega + v_3\omega^2}{3} + \frac{w_1 + w_2\omega + w_3\omega^2}{3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o triângulo  $\Delta \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$  é equilátero.  $\square$

**Exemplo 4.1.4.** *Seja ABCD um paralelogramo qualquer. Consideremos os triângulos equiláteros  $\Delta AEB$  e  $\Delta BFC$  externos ao paralelogramo em questão. Mostre que o triângulo  $\Delta DEF$  é equilátero.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, tomemos  $A$  na origem do plano complexo e representemos os pontos  $B, C, D, E, F$  pelos complexos  $\beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$  respectivamente. Sendo  $\Delta AEB$  e  $\Delta BFC$  equiláteros, temos

$$\lambda\omega + \beta\omega^2 = 0 \quad \text{e} \quad \gamma + \beta\omega + \mu\omega^2 = 0.$$

Notemos que  $\gamma = \beta + \delta$  (interpretação geométrica da soma de dois complexos), segue então que

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma + \beta\omega + \mu\omega^2 + \lambda\omega + \beta\omega^2 \\ &= \beta + \delta + \beta\omega + \mu\omega^2 + \lambda\omega + \beta\omega^2 \\ &= \delta + \lambda\omega + \mu\omega^2 + \beta + \beta\omega + \beta\omega^2 \\ &= \delta + \lambda\omega + \mu\omega^2 + \beta(1 + \omega + \omega^2) \\ &= \delta + \lambda\omega + \mu\omega^2. \end{aligned}$$

Logo, o triângulo  $\Delta DEF$  é equilátero. □

## 4.2 O teorema de Ptolomeu-Euler

Nesta seção demonstraremos outro resultado clássico da Geometria, além de introduzir alguns conceitos sobre pontos concíclicos.

**Proposição 4.2.1.** *Quatro números complexos  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , são concíclicos (ou colineares) se, e somente se,*

$$\left( \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right) / \left( \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \right) \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Supondo que os pontos estejam sobre um círculo, da geometria euclidi-ana plana, temos que os quatro pontos  $z_1, z_2, z_3, z_4$  estão sobre um mesmo círculo se, e somente se,  $\widehat{z_1 z_3 z_2} = \widehat{z_1 z_4 z_2}$ , quando os pontos  $z_3$  e  $z_4$  estão no mesmo semiplano com relação à reta  $z_1 z_2$ , ou  $\widehat{z_1 z_3 z_2} + \widehat{z_1 z_4 z_2} = \pi$ , quando os pontos  $z_3$  e  $z_4$  estão em semiplanos opostos em relação à reta  $z_1 z_2$ .

Inicialmente, provemos o primeiro caso. Temos que  $\widehat{z_1 z_3 z_2} = \widehat{z_1 z_4 z_2}$ , então

$$\begin{aligned} \arg \left( \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right) &= \arg \left( \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \right) \implies \\ \arg \left( \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right) - \arg \left( \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \right) &= 0 \implies \\ \left( \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right) / \left( \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \right) &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

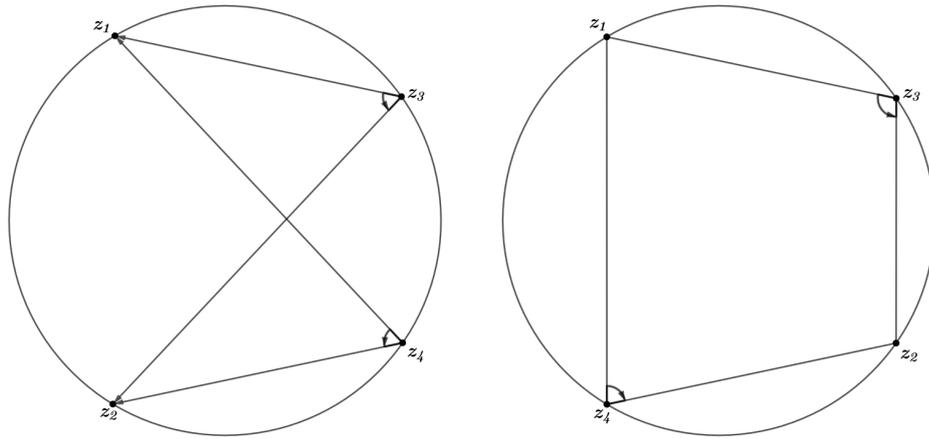


Figura 18 – pontos concíclicos

Reciprocamente, se  $\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) / \left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right) \in \mathbb{R}$ , segue que  $\arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right) = k\pi$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ . Como  $z_3$  e  $z_4$  estão no mesmo semiplano em relação à reta  $z_1z_2$ , temos  $k = 0$ , já que os módulos dos argumentos é menor do que  $\pi$ . Assim, temos

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right) = 0 \implies \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right) \implies \widehat{z_1z_3z_2} = \widehat{z_1z_4z_2}.$$

Provemos agora o segundo caso. Temos  $\widehat{z_1z_3z_2} + \widehat{z_1z_4z_2} = \pi$ . Segue então que

$$\begin{aligned} & \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) + \arg\left(\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right) = \pi \\ \iff & \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right) = \pi \\ \iff & \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} / \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right) = \pi \\ \iff & \left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) / \left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

**Proposição 4.2.2.** A equação do círculo (ou reta) que passa pelos pontos  $z$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  é dada por

$$\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) / \left(\frac{z - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}\right) / \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3}\right) \quad (4.14)$$

*Demonstração.* Como os pontos  $z$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  pertencem a um mesmo círculo (reta), temos pela proposição 4.2.1 que

$$\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) / \left(\frac{z - z_3}{z_2 - z_3}\right)$$

é um número real, daí segue que

$$\left( \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) / \left( \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \right) = \left( \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \right) / \left( \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} \right)$$

que equivale a

$$(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_3)[(z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)] = (z - z_3)(\bar{z} - \bar{z}_1)[(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)].$$

□

Agora, podemos reescrever a relação acima como

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= (z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3), \\ B &= \bar{z}_1(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) - \bar{z}_3(z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1), \\ C &= z_1\bar{z}_3(z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_3\bar{z}_1(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3). \end{aligned}$$

É fácil verificar que os complexos  $A$  e  $C$  são imaginários puros. A equação 4.15 representa uma reta se, e somente se,  $A = 0$ , ou seja, se

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

**Teorema 4.2.1** (Ptolomeu-Euler). *Para quatro pontos quaisquer  $A, B, C, D$  do plano, temos*

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

*A igualdade é válida se, e somente se, esses quatro pontos são concíclicos (ou colineares) e estão em ordem alfabética (sentido horário ou anti-horário).*

*Demonstração.* Façamos a correspondência dos pontos  $A, B, C, D$  com os números complexos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  respectivamente. Para estes números complexos temos que

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta) \cdot (\gamma - \delta) + (\alpha - \delta) \cdot (\beta - \gamma) &= \alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\delta + \beta\delta + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\delta + \gamma\delta \\ &= (\alpha - \gamma) \cdot \beta - (\alpha - \gamma) \cdot \delta \\ &= (\alpha - \gamma) \cdot (\beta - \delta). \end{aligned}$$

Da desigualdade triangular segue que

$$|\alpha - \beta| \cdot |\gamma - \delta| + |\alpha - \delta| \cdot |\beta - \gamma| \geq |\alpha - \gamma| \cdot |\beta - \delta|.$$

Para o que falta, segue do Teorema 2.1.1 que a igualdade ocorrerá se, e somente se,  $\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)}$  é um número real não negativo. Agora,

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)} \text{ é um número real não negativo} \\ \iff & \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} / \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta} \text{ é um número real não positivo.} \end{aligned}$$

Daí, pela proposição 4.2.1, segue que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são concíclicos ( ou colineares).  $\square$

**Corolário 4.2.1** (Pitágoras). *Em um triângulo retângulo ABC, com o ângulo em B sendo reto, temos*

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$

*Demonstração.* Tomemos um ponto  $D$  de forma que  $ABCD$  seja um retângulo. Da geometria euclidiana plana segue que  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  são concíclicos e, pelo teorema de Ptolomeu-Euler, temos

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} &= \overline{AC} \cdot \overline{BD} \\ \overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{BC} &= \overline{AC} \cdot \overline{AC} \\ \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2. \end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 4.2.1.** *Seja  $\Delta ABC$  um triângulo equilátero. Para qualquer ponto  $P$  no circuncírculo de  $\Delta ABC$ , mostre que o comprimento do segmento mais longo entre  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  é igual à soma dos comprimentos dos dois mais curtos.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, consideremos  $P$  e  $B$  em semiplanos opostos com relação à reta que passa por  $A$  e  $C$ . Sendo estes quatro pontos concíclicos, temos, pelo Teorema de Ptolomeu-Euler, que

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{PC} + \overline{BC} \cdot \overline{PA} &= \overline{AC} \cdot \overline{PB} \\ \overline{AB} \cdot \overline{PC} + \overline{AB} \cdot \overline{PA} &= \overline{AB} \cdot \overline{PB} \\ \overline{PC} + \overline{PA} &= \overline{PB}. \end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 4.2.2.** *Suponha que um ponto  $P$  esteja sobre o arco  $AD$  do circuncírculo de um quadrado  $ABCD$ . Mostre que*

$$\overline{PB} \cdot (\overline{PB} + \overline{PD}) = \overline{PC} \cdot (\overline{PC} + \overline{PA}).$$

*Demonstração.* Considerando o quadrilátero  $PBCD$ , temos, pelo teorema 4.2.1, que

$$\begin{aligned}\overline{PB} \cdot \overline{CD} + \overline{PD} \cdot \overline{BC} &= \overline{PC} \cdot \overline{BD} \iff \\ \overline{CD} \cdot (\overline{PB} + \overline{PD}) &= \overline{PC} \cdot \overline{CD} \sqrt{2} \iff \\ \sqrt{2} &= \frac{\overline{PB} + \overline{PD}}{\overline{PC}}.\end{aligned}$$

Analogamente, considerando o quadrilátero  $ABCP$  chegamos em

$$\sqrt{2} = \frac{\overline{PC} + \overline{PA}}{\overline{PB}}.$$

Logo, é fácil ver que

$$\overline{PB} \cdot (\overline{PB} + \overline{PD}) = \overline{PC} \cdot (\overline{PC} + \overline{PA}).$$

□

### 4.3 O círculo de nove pontos

**Teorema 4.3.1** (Círculo de Nove Pontos). *Em qualquer triângulo, os pés das três alturas, os pontos médios dos três lados e os pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos três vértices, estão todos sobre o mesmo círculo, cujo centro está no ponto médio do segmento que une o ortocentro e o circuncentro e o raio tem medida igual a metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo.*

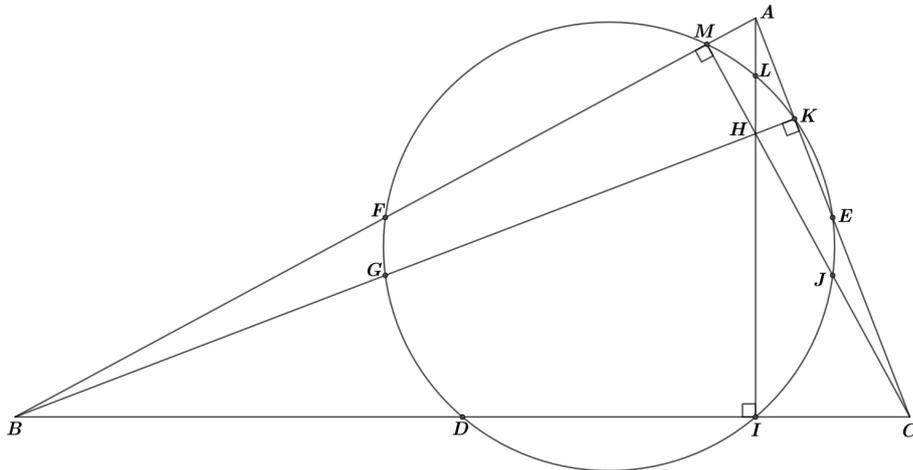


Figura 19 – círculo dos nove pontos

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, consideremos o triângulo  $ABC$  circunscrito a um círculo cujo centro  $O$  coincida com a origem do plano complexo e o raio seja unitário. Sejam os complexos  $\alpha, \beta, \gamma$  os representantes dos vértices  $A, B, C$  respectivamente, com  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ .

Sabemos que o ortocentro  $H$  do triângulo  $ABC$  é representado pelo complexo  $\sigma =$

$\alpha + \beta + \gamma$ , assim, temos que  $\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$  é o ponto médio do segmento que liga o circuncentro  $O$  ao ortocentro  $H$ . Agora, a distância de  $\frac{\sigma}{2}$  ao ponto médio  $D$  do lado  $BC$  é

$$\left| \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, teremos que as distâncias de  $\frac{\sigma}{2}$  ao ponto médio  $E$  do lado  $CA$  e, ao ponto médio  $F$  do lado  $AB$  são iguais à  $\frac{1}{2}$ .

Mostremos agora que  $\frac{\sigma}{2}$  equidista dos três pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro  $H$  aos três vértices. Temos que a distância de  $\frac{\sigma}{2}$  ao ponto médio do segmento que une  $H$  ao vértice  $A$  é

$$\left| \frac{\alpha + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Da mesma forma, temos que as distâncias de  $\frac{\sigma}{2}$  ao ponto médio de  $BH$  e, ao ponto médio de  $CH$  são iguais à  $\frac{1}{2}$ .

Por fim, mostremos que  $\frac{\sigma}{2}$  também equidista dos três pés das alturas. Para isso, consideremos o pé  $\lambda$  da altura traçada a partir do vértice  $A$  em relação ao lado  $BC$ . Temos que  $\lambda$  é dado pela interseção das retas suportes da altura relativa ao vértice  $A$  e do lado  $BC$ . As equações dessas retas são dadas respectivamente por

$$(\beta - \gamma)\bar{z} - (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \bar{\gamma}\beta - \gamma\bar{\beta} \quad (1)$$

$$(\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma). \quad (2)$$

Multiplicando por  $-1$  a equação (1) e depois somando com a equação (2), obtemos

$$2z(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \gamma\bar{\beta} - \bar{\gamma}\beta,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \left[ \alpha + \bar{\alpha} \left( \frac{\beta - \gamma}{\bar{\beta} - \bar{\gamma}} \right) + \frac{\gamma\bar{\beta} - \bar{\gamma}\beta}{\bar{\beta} - \bar{\gamma}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \alpha + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\beta - \gamma}{\bar{\beta} - \bar{\gamma}} \right) \left( \frac{\beta\gamma}{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \right) + \left( \frac{\gamma\bar{\beta} - \bar{\gamma}\beta}{\bar{\beta} - \bar{\gamma}} \right) \left( \frac{\beta^2\gamma^2}{\bar{\beta}^2\bar{\gamma}^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \alpha + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\beta - \gamma}{\gamma - \beta} \right) \beta\gamma + \left( \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\beta\gamma} \right) \left( \frac{\beta\gamma}{\gamma - \beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \alpha + \beta + \gamma - \frac{\beta\gamma}{\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ \sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha} \right].$$

De onde segue que

$$\left| \lambda - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{\beta\gamma}{2\alpha} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| -\frac{\beta\gamma}{2\alpha} \right| = \frac{1}{2}.$$

De forma semelhante, obtemos os pés das outras alturas do triângulo  $ABC$  e as distâncias entre eles e  $\frac{\sigma}{2}$ , que também serão iguais a  $\frac{1}{2}$ .

Concluimos então que os nove pontos citados estão situados a uma mesma distância de  $\frac{\sigma}{2}$ , portanto, estão sobre um mesmo círculo de raio igual a  $\frac{1}{2}$  e centro  $\frac{\sigma}{2}$ , provando assim o teorema.  $\square$

Estendamos um pouco mais nossa discussão a respeito do círculo de nove pontos. Inicialmente, tomemos três pontos  $z_1, z_2, z_3$  quaisquer do círculo unitário  $|z| = 1$ . Sabemos que o circuncentro, o baricentro, o centro do círculo de nove pontos e o ortocentro são dados respectivamente por

$$0, \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3), \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3), (z_1 + z_2 + z_3),$$

onde o raio do círculo de nove pontos é  $\frac{1}{2}$ . Observe que o centro do círculo de nove pontos também pertence à reta de Euler.

Sejam então  $z_1, z_2, z_3, z_4$  quatro pontos sobre um mesmo círculo unitário com centro na origem. Escolhendo três dos quatro pontos por vez, obtemos quatro triângulos (todos inscritos no círculo unitário). Temos que o centro do círculo de nove pontos do  $\Delta z_2 z_3 z_4$  é  $\tau_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3 + z_4)$ . Analogamente, os centros dos círculos de nove pontos dos triângulos  $\Delta z_1 z_3 z_4$ ,  $\Delta z_1 z_2 z_4$  e  $\Delta z_1 z_2 z_3$  são dados respectivamente por

$$\tau_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3 + z_4), \tau_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_4) \text{ e } \tau_4 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3),$$

onde todos estes círculos possuem raios iguais a  $\frac{1}{2}$ . Consideremos agora o ponto

$$\tau = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4).$$

É fácil verificar que

$$|\tau - \tau_1| = |\tau - \tau_2| = |\tau - \tau_3| = |\tau - \tau_4| = \frac{1}{2}.$$

Daí, vem que os círculos de nove pontos de  $\Delta z_2 z_3 z_4$ ,  $\Delta z_1 z_3 z_4$ ,  $\Delta z_1 z_2 z_4$ ,  $\Delta z_1 z_2 z_3$  passam pelo ponto  $\tau = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$ ; em particular, os centros dos quatro círculos de nove pontos estão sobre o círculo com centro em  $\tau$  e raio igual a  $\frac{1}{2}$ . Chamaremos este círculo de **círculo de nove pontos do quadrilátero**  $z_1 z_2 z_3 z_4$ .

De forma similar, façamos a mesma discussão, considerando agora os pontos  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ , todos sobre um mesmo círculo unitário com centro na origem. Temos, pelo o que foi feito anteriormente, que os centros dos círculos de nove pontos do quadriláteros

$$z_2 z_3 z_4 z_5, z_1 z_3 z_4 z_5, z_1 z_2 z_4 z_5, z_1 z_2 z_3 z_5, z_1 z_2 z_3 z_4$$

são dados respectivamente por

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3 + z_4 + z_5), \dots, \mu_5 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4),$$

e a distância de cada um destes pontos ao ponto  $\mu = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$  é

$$|\mu - \mu_1| = \dots = |\mu - \mu_5| = \frac{1}{2}.$$

Assim, os centros dos círculos de nove pontos dos quadriláteros

$$z_2z_3z_4z_5, z_1z_3z_4z_5, z_1z_2z_4z_5, z_1z_2z_3z_5, z_1z_2z_3z_4$$

estão sobre um mesmo círculo com centro em  $\mu = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$  e raio igual a  $\frac{1}{2}$ . Chamaremos este círculo de **círculo de nove pontos do pentágono**  $z_1z_2z_3z_4z_5$ .

Este processo pode ser estendido a mais pontos sobre um mesmo círculo, e é devido à J.L.Coolidge.

#### 4.4 A reta de Simson

**Teorema 4.4.1.** *Dados um  $\Delta ABC$  e um ponto  $D$ , sejam  $P, Q, R$  os pés das perpendiculares traçadas por  $D$  aos lados (ou seus prolongamentos)  $BC, CA, AB$  respectivamente. Os pontos  $P, Q, R$  são colineares se, e somente se,  $D$  pertence ao círculo circunscrito do  $\Delta ABC$ .*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponhamos que o  $\Delta ABC$  esteja inscrito em um círculo unitário com centro na origem. Representemos os pontos  $A, B, C, D$  pelos números complexos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  respectivamente. Temos que a equação da reta que passa pelos pontos  $B$  e  $C$  é

$$z + \beta\gamma\bar{z} = \beta + \gamma. \quad (1)$$

Daí, a equação da reta perpendicular à (1) por  $D(\delta)$  é dada por

$$z - \beta\gamma\bar{z} = \delta - \beta\gamma\bar{\delta}. \quad (2)$$

Assim, resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2) obtemos a interseção  $P(\lambda)$  destas duas retas:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta}).$$

Analogamente,  $Q(\mu)$  e  $R(\nu)$  são dados por

$$\mu = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta}),$$

$$\nu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta}).$$

Agora, temos que  $P(\lambda), Q(\mu), R(\nu)$  são colineares se, e somente se,

$$\frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} \in \mathbb{R}.$$

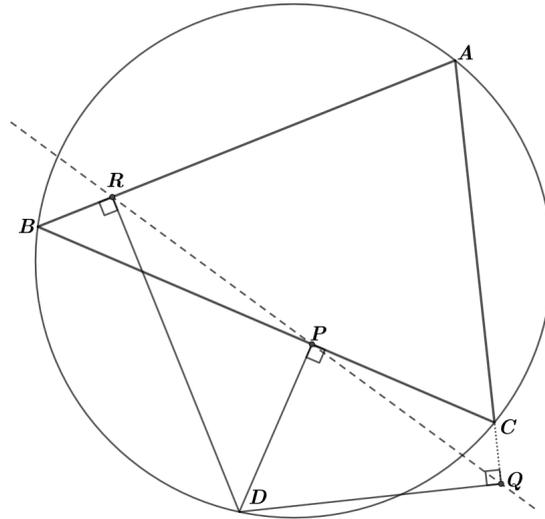


Figura 20 – reta de Simson

Usando a notação  $r = |\delta|$  (portanto  $\bar{\delta} = \frac{r^2}{\delta}$ ), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} &= \frac{(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta}) - (\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta})}{(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta}) - (\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta})} \\
 &= \frac{\gamma - \alpha + (\alpha\beta - \beta\gamma)\bar{\delta}}{\gamma - \beta + (\alpha\beta - \gamma\alpha)\bar{\delta}} \\
 &= \frac{(\gamma - \alpha) \cdot (1 - \beta\bar{\delta})}{(\gamma - \beta) \cdot (1 - \alpha\bar{\delta})} \\
 &= \left( \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \right) / \left( \frac{\alpha - \delta r^{-2}}{\beta - \delta r^{-2}} \right) \\
 &= (\alpha, \beta; \gamma, \delta r^{-2}).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 P(\lambda), Q(\mu), R(\nu) \text{ são colineares} &\iff (\alpha, \beta; \gamma, \delta r^{-2}) \in \mathbb{R} \\
 &\iff \alpha, \beta, \gamma, \delta r^{-2} \text{ são concíclicos} \\
 &\iff |\delta r^{-2}| = 1 \\
 &\iff \frac{|\delta|}{|\delta|^2} = 1 \\
 &\iff |\delta| = 1.
 \end{aligned}$$

Logo,  $D(\delta)$  está sobre o círculo, provando assim o teorema.  $\square$

Essa reta é chamada usualmente de reta de Simson do ponto  $D$  com respeito ao triângulo  $\Delta ABC$ .

Determinaremos agora a equação da reta de Simson. Manteremos as mesmas notações usadas no teorema 4.4.1; em particular, assumiremos que o  $\Delta ABC$  está inscrito

no círculo unitário centrado na origem e o ponto  $D(\delta)$  está sobre este círculo. Temos que o pé  $P$  da perpendicular traçada de  $D(\delta)$  ao lado  $BC$  é dado por

$$z = \frac{1}{2} \left( \beta + \gamma + \delta - \frac{\beta\gamma}{\delta} \right).$$

Introduzamos agora as seguintes notações:

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma;$$

segue que

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3},$$

$$\bar{\sigma}_3 = \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sigma_3}.$$

Assim, na expressão para  $z$  temos

$$z = \frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha} \right),$$

e

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{2} \left( \bar{\sigma}_1 - \bar{\alpha} + \bar{\delta} - \frac{\bar{\sigma}_3}{\bar{\delta}\bar{\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\alpha}{\sigma_3} \right). \end{aligned}$$

Agora, multiplicando  $z$  e  $\bar{z}$  por  $\delta$  e  $\sigma_3$  respectivamente e fazendo as simplificações necessárias, obtemos

$$\delta z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2} \left( \delta^2 + \sigma_1 \delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta} \right). \quad (4.16)$$

A relação 4.16 é satisfeita pelo pé  $P(\lambda)$  da perpendicular por  $D(\delta)$  ao lado  $BC$ . Repetindo o mesmo procedimento para  $Q(\mu)$  e  $R(\nu)$  chegaremos à mesma expressão. Sendo então 4.16 a equação de uma reta, vem que  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  são colineares e, portanto, esta relação representa a equação da reta de Simson.

**Proposição 4.4.1.** *Sejam  $L$ ,  $M$ ,  $N$  três pontos sobre o círculo circunscrito ao  $\Delta ABC$ . A condição necessária e suficiente para que as retas de Simson dos pontos  $L$ ,  $M$ ,  $N$  com relação ao  $\Delta ABC$  se encontrem em um ponto é*

$$\widehat{AL} + \widehat{BM} + \widehat{CN} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Demonstração.* Seja o circuncírculo do  $\Delta ABC$  um círculo unitário centrado na origem e,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  os números complexos que representam os pontos  $L$ ,  $M$ ,  $N$  respectivamente.

Temos que as equações das três retas de Simson em consideração são dadas por

$$\begin{aligned} u_1 z - \sigma_3 \bar{z} &= \frac{1}{2} \left( u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1} \right), \\ u_2 z - \sigma_3 \bar{z} &= \frac{1}{2} \left( u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_2} \right), \\ u_3 z - \sigma_3 \bar{z} &= \frac{1}{2} \left( u_3^2 + \sigma_1 u_3 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_3} \right). \end{aligned}$$

Daí, segue que a interseção das duas primeiras retas de Simson é

$$z = \frac{1}{2} \left( u_1 + u_2 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{u_1 u_2} \right),$$

e das duas últimas

$$z = \frac{1}{2} \left( u_2 + u_3 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{u_2 u_3} \right).$$

Notemos que a condição necessária e suficiente para que os dois pontos coincidam é que  $\sigma_3 = u_1 u_2 u_3$ , ou seja,  $\alpha \beta \gamma = u_1 u_2 u_3$ . Sendo  $\alpha, \beta, \gamma, u_1, u_2, u_3$  números complexos com módulo igual a 1 e, definindo seus argumentos por  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + 2k\pi \iff \\ (\theta_1 - \varphi_1) + (\theta_2 - \varphi_2) + (\theta_3 - \varphi_3) &= 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Temos então a condição desejada. □

**Corolário 4.4.1.** *Sejam  $A, B, C, L, M, N$  seis pontos sobre um círculo. Então as retas de Simson dos pontos  $L, M, N$  com relação ao  $\Delta ABC$  se encontram em um ponto se, e somente se, as retas de Simson de  $A, B, C$  com relação ao  $\Delta LMN$  se encontram em um ponto. Além disso, nesse caso, todas as seis retas de Simson se encontram no ponto médio do segmento de reta que une os ortocentros dos triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta LMN$ .*

*Demonstração.* Da condição obtida na Proposição 4.4.1 segue, por simetria, que as retas de Simson dos pontos  $L, M, N$  com relação ao  $\Delta ABC$  se encontram em um ponto se, e somente se, as retas de Simson de  $A, B, C$  com relação ao  $\Delta LMN$  se encontram em um ponto. Temos ainda, nas notações das demonstrações anteriores, que o ponto de interseção das retas de Simson dos pontos  $L, M, N$  é dado por:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + u_1 + u_2 + u_3) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + u_1 + u_2 + u_3). \end{aligned}$$

Novamente, por simetria, vemos que este é o mesmo ponto de interseção das retas de Simson de  $A, B, C$  com relação ao  $\Delta LMN$ . E sendo  $\alpha + \beta + \gamma$  e  $u_1 + u_2 + u_3$  os complexos que representam os ortocentros de  $\Delta ABC$  e  $\Delta LMN$  respectivamente, segue o resultado. □

**Corolário 4.4.2.** *Sejam  $D, E, F$  os pontos médios dos lados  $BC, CA, AB$  do  $\Delta ABC$  respectivamente. Sejam também  $L, M, N$  os pés das perpendiculares pelos vértices  $A, B, C$  aos seus lados opostos respectivamente. Então os seis pontos  $D, E, F, L, M, N$  estão sobre o círculo de nove pontos do  $\Delta ABC$ , e as retas de Simson dos pontos  $L, M, N$  com relação ao  $\Delta DEF$  encontram-se em um ponto. A recíproca também é verdadeira.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, consideremos o  $\Delta ABC$  inscrito num círculo unitário centrado na origem. Representemos os vértices  $A, B, C$  pelos complexos  $\alpha, \beta, \gamma$  respectivamente. Da discussão sobre o círculo de nove pontos, temos que os pontos  $L, M, N$  são dados respectivamente por

$$\frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha} \right), \quad \frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \frac{\gamma\alpha}{\beta} \right), \quad \frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma} \right);$$

e os pontos  $D, E, F$  são dados respectivamente por

$$\frac{1}{2}(\beta + \gamma), \quad \frac{1}{2}(\gamma + \alpha), \quad \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Agora, representando o ponto  $K$  por  $\frac{\sigma_1}{2}$ , e observando que todos os módulos dos vetores abaixo são iguais a  $\frac{1}{2}$ , concluímos que de fato estes seis pontos estão sobre o círculo de nove pontos do  $\Delta ABC$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KL} &: -\frac{\beta\gamma}{2\alpha}, & \overrightarrow{KM} &: -\frac{\gamma\alpha}{2\beta}, & \overrightarrow{KN} &: -\frac{\alpha\beta}{2\gamma}, \\ \overrightarrow{KD} &: -\frac{\alpha}{2}, & \overrightarrow{KE} &: -\frac{\beta}{2}, & \overrightarrow{KF} &: -\frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

Para o que falta, notemos que

$$\left( -\frac{\beta\gamma}{2\alpha} \right) \cdot \left( -\frac{\gamma\alpha}{2\beta} \right) \cdot \left( -\frac{\alpha\beta}{2\gamma} \right) = \left( -\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left( -\frac{\beta}{2} \right) \cdot \left( -\frac{\gamma}{2} \right),$$

e sendo  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  os argumentos de  $-\frac{\beta\gamma}{2\alpha}, -\frac{\gamma\alpha}{2\beta}, -\frac{\alpha\beta}{2\gamma}, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}$  respectivamente, vem que

$$(\theta_1 - \varphi_1) + (\theta_2 - \varphi_2) + (\theta_3 - \varphi_3) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

O que satisfaz a condição da Proposição 4.4.1. □

#### 4.5 Generalizações do teorema de Simson

Para darmos uma outra prova ao Teorema 4.4.1 consideremos inicialmente o seguinte resultado:

**Lema 4.5.1.** *Suponhamos que hajam quatro círculos  $C_1, C_2, C_3, C_4$  no plano, com  $C_1$  e  $C_2$  se intersectando em  $z_1$  e  $w_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  se intersectando em  $z_2$  e  $w_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  se intersectando em  $z_3$  e  $w_3$ ,  $C_4$  e  $C_1$  se intersectando em  $z_4$  e  $w_4$ . Então os pontos  $z_1, z_2, z_3, z_4$  são concíclicos se, e somente se,  $w_1, w_2, w_3, w_4$  são concíclicos.*

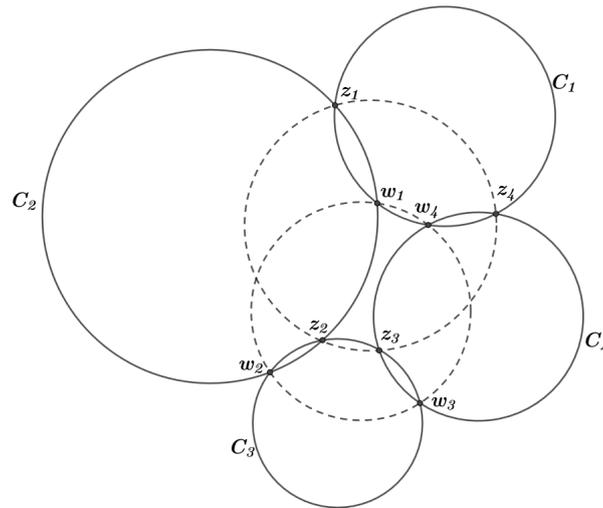


Figura 21 – lema 2.5.1

*Demonstração.* Suponhamos que as quatro relações cruzadas a seguir são reais:

$$(z_1, w_2; z_2, w_1) = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} \Big/ \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1},$$

$$(z_2, w_3; z_3, w_2) = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} \Big/ \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2},$$

$$(z_3, w_4; z_4, w_3) = \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} \Big/ \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3},$$

$$(z_4, w_1; z_1, w_4) = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} \Big/ \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{(z_1, w_2; z_2, w_1)}{(z_2, w_3; z_3, w_2)} \cdot \frac{(z_3, w_4; z_4, w_3)}{(z_4, w_1; z_1, w_4)} \\ &= \left[ \frac{\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right)}{\left(\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right)} \right] \cdot \left[ \frac{\left(\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2}\right)}{\left(\frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4}\right)} \right] \\ &= (z_1, z_3; z_2, z_4) \cdot (w_1, w_3; w_2, w_4) \end{aligned}$$

é real. Logo,  $(z_1, z_3; z_2, z_4)$  é real se, e somente se,  $(w_1, w_3; w_2, w_4)$  é real. Portanto, segue o resultado.  $\square$

**Teorema 4.5.1.** *Sejam  $P, Q, R$  os pés das perpendiculares traçadas de um ponto arbitrário  $D$  ao respectivos lados (ou seus prolongamentos)  $BC, CA, AB$  do  $\triangle ABC$ . Então  $P, Q, R$  são colineares se, e somente se, o ponto  $D$  está sobre o cicuncírculo do  $\triangle ABC$ .*

*Demonstração.* Sendo  $\widehat{DPC} = \widehat{DRB}$  (ambos são retos), temos que  $P, R, B, D$  são concíclicos (ver proposição 4.2.1). Denotemos o círculo que contém estes pontos por  $S_B$ . Analogamente, os pontos  $P, Q, C, D$  são também concíclicos. Vamos denotar o

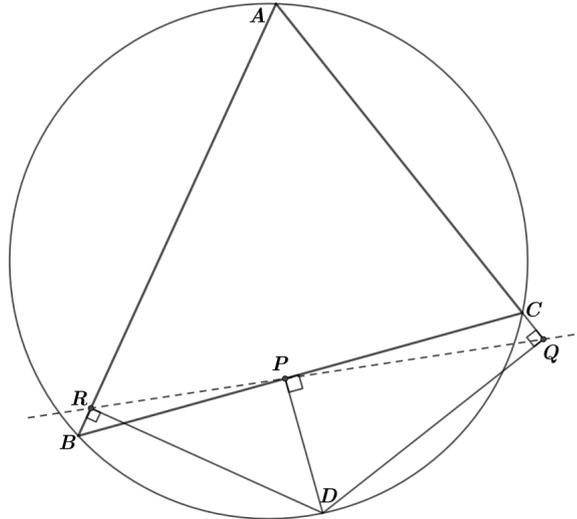


Figura 22 – teorema 2.5.1

círculo que os contém por  $S_C$ . Apliquemos agora o lema 4.5.1 a  $S_B, AB, AC, S_C$  (as retas em questão estão relacionadas com os "círculos" que passam pelos pontos  $A, B, \infty$  e  $A, C, \infty$ ). Temos que o círculo  $S_B$  intersecta a reta  $AB$  em  $B$  e  $R$ ; as retas  $AB$  e  $AC$  se intersectam em  $A$  e no  $\infty$ ; a reta  $AC$  e o círculo  $S_C$  se intersectam em  $C$  e  $Q$ ; os círculos  $S_C$  e  $S_B$  se intersectam em  $D$  e  $P$ . Assim,

$$\begin{aligned} B, A, C, D \text{ são concíclicos} &\iff R, \infty, Q, P \text{ são concíclicos} \\ &\iff P, Q, R \text{ são colineares.} \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.5.2 (Aubert).** *Sejam  $A, A', B, B', C, C', D$  sete pontos concíclicos tais que  $AA' \parallel BB' \parallel CC'$  e  $P, Q, R$  são as interseções de  $A'D$  e  $BC, B'D$  e  $CA, C'D$  e  $AB$ , respectivamente. Então,  $P, Q, R$  são colineares e a reta passando por estes três pontos é paralela à  $AA', BB'$  e  $CC'$ .*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, vamos assumir que o círculo em consideração é o círculo unitário centrado na origem. Sejam os pontos  $A, B, C, D$  representados pelos complexos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  respectivamente. Lembrando que a equação da reta paralela à reta  $z_1z_2$  passando por  $z_3$  é dada por  $z + z_1z_2\bar{z} = z_3 + z_1z_2\bar{z}_3$ , onde  $|z_1| = |z_2| = 1$ , temos então que as equações das retas paralelas  $AA', BB', CC'$  são dadas por

$$z + k\bar{z} = \alpha + k\bar{\alpha}, \quad z + k\bar{z} = \beta + k\bar{\beta}, \quad z + k\bar{z} = \gamma + k\bar{\gamma}$$

respectivamente, sendo  $k$  um número complexo adequado, onde  $|k| = 1$ . Segue que os pontos  $A', B', C'$  são dados pelos complexos  $k\bar{\alpha}, k\bar{\beta}, k\bar{\gamma}$  respectivamente. Assim, a interseção  $P$  das retas  $BC$  e  $A'D$  é obtida solucionando o sistema de equações

$$\begin{cases} z + \beta\gamma\bar{z} = \beta + \gamma \\ z + \delta k\bar{\alpha}\bar{z} = \delta + k\bar{\alpha}. \end{cases}$$

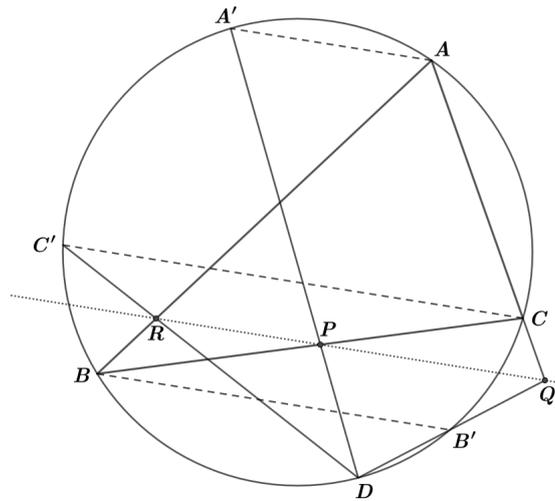


Figura 23 – teorema 2.5.2

Subtraindo as equações, obtemos

$$(\beta\gamma - k\delta\bar{\alpha})\bar{z} = \beta + \gamma - \delta - k\bar{\alpha}.$$

Agora, multiplicando ambos os lados por  $\alpha$ , temos

$$(\alpha\beta\gamma - k\delta)\bar{z} = \alpha\beta + \gamma\alpha - \delta\alpha - k.$$

Façamos

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma,$$

podemos então escrever a igualdade anterior da seguinte forma

$$(\sigma_3 - k\delta)\bar{z} = \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\alpha} - \delta\alpha - k.$$

Tomando o conjugado e multiplicando ambos os lados por  $k\delta\sigma_3$ , temos

$$(k\delta - \sigma_3)z = \sigma_1k\delta - k\delta\alpha - \frac{k\sigma_3}{\alpha} - \sigma_3\delta.$$

Resulta das duas últimas igualdades que

$$(k\delta - \sigma_3)(z + k\bar{z}) = k^2 + \sigma_1k\delta - \sigma_2k - \sigma_3\delta.$$

Esta é uma relação que o ponto  $P$  deve satisfazer. Contudo, notemos que ela é simétrica com relação a  $\alpha, \beta, \gamma$ , portanto os pontos  $Q$  e  $R$  também a satisfazem. Por outro lado, sendo esta relação uma equação de uma reta paralela à  $AA', BB', CC'$  (desde que  $k\delta - \sigma_3 \neq 0$ ), segue que os pontos  $P, Q, R$  são colineares e a reta que passa por estes três pontos é paralela à  $AA', BB', CC'$ .

No caso em que  $k\delta = \sigma_3$ , nós temos

$$BC \parallel A'D, \quad CA \parallel B'D, \quad AB \parallel C'D,$$

e assim os pontos  $P, Q, R$  coincidem com o ponto no infinito, e a conclusão é trivialmente verdadeira.  $\square$

Encerramos esta seção demonstrando o teorema a seguir, onde se mostra como podemos estender o conceito da reta de Simson para outros polígonos além dos triângulos.

**Teorema 4.5.3.** *Seja  $A_1A_2A_3A_4$  um quadrilátero inscrito num círculo e  $P$  um ponto qualquer sobre o circuncírculo de  $A_1A_2A_3A_4$ . Então os pés  $D_1, D_2, D_3, D_4$  das perpendiculares de  $P$  às retas de Simson relativas aos triângulos*

$$\Delta A_2A_3A_4, \Delta A_1A_3A_4, \Delta A_1A_2A_4, \Delta A_1A_2A_3$$

*são colineares. Esta reta é chamada de reta de Simson do ponto  $P$  com relação ao quadrilátero  $A_1A_2A_3A_4$ .*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, assumiremos que o circuncírculo do quadrilátero  $A_1A_2A_3A_4$  é um círculo unitário centrado na origem e os complexos  $u_1, u_2, u_3, u_4$  e  $u$  representam os pontos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  e  $P$  respectivamente. Temos que a equação da reta de Simson do ponto  $P(u)$  com relação ao  $\Delta A_2A_3A_4$  é

$$uz - u_2u_3u_4\bar{z} = \frac{1}{2} \left[ u^2 + (u_2 + u_3 + u_4)u - (u_3u_4 + u_4u_2 + u_2u_3) - \frac{u_2u_3u_4}{u} \right].$$

Segue então que a equação da perpendicular de  $P(u)$  a esta reta de Simson é

$$uz + u_2u_3u_4\bar{z} = u^2 + \frac{u_2u_3u_4}{u}.$$

Assim sendo, a interseção  $D_1$  destas duas retas é dada por

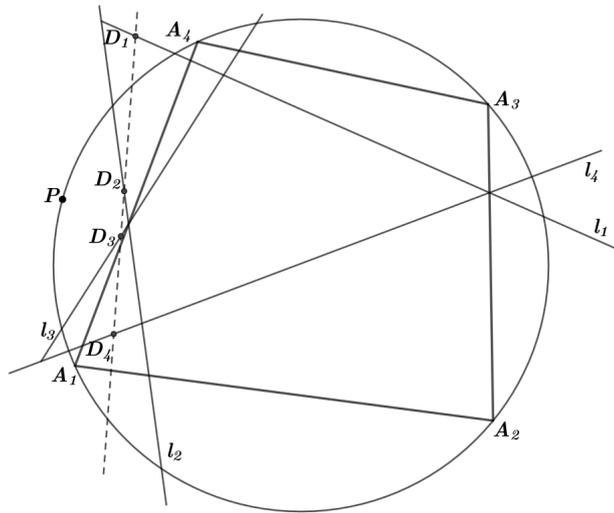


Figura 24 – reta de Simson relativa a um quadrilátero

$$2uz = \frac{1}{2} \left[ 3u^2 + (u_2 + u_3 + u_4)u - (u_3u_4 + u_4u_2 + u_2u_3) + \frac{u_2u_3u_4}{u} \right].$$

Usando as notações

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ \sigma_2 &= u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4, \\ \sigma_3 &= u_2u_3u_4 + u_1u_3u_4 + u_1u_2u_4 + u_1u_2u_3, \\ \sigma_4 &= u_1u_2u_3u_4,\end{aligned}$$

a última relação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}u^2z &= \frac{1}{4} \left[ 3u^3 + (\sigma_1 - u_1)u^2 - (\sigma_2 - \sigma_1u_1 + u_1^2)u + \frac{\sigma_4}{u_1} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ (3u^3 + \sigma_1u^2 - \sigma_2u) - (u_1u^2 - \sigma_1u_1u + u_1^2u) + \frac{\sigma_4}{u_1} \right].\end{aligned}$$

Tomando o conjugado em ambos os lados e usando as relações

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_3}{\sigma_4}, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_4}, \quad \bar{\sigma}_4 = \frac{1}{\sigma_4},$$

temos

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{u^2}{4} \left[ \left( \frac{3}{u^3} + \frac{\sigma_3}{\sigma_4u^2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_4u} \right) - \left( \frac{1}{u_1u^2} - \frac{\sigma_3}{\sigma_4u_1u} + \frac{1}{u_1^2u} \right) + \frac{u_1}{\sigma_4} \right] \Rightarrow \\ \sigma_4\bar{z} &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{3\sigma_4}{u} + \sigma_3 - \sigma_2u \right) - \left( \frac{\sigma_4}{u_1} - \frac{\sigma_3u}{u_1} + \frac{\sigma_4u}{u_1^2} \right) + u_1u^2 \right].\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}u^2z + \sigma_4\bar{z} &= \frac{\left( 3u^3 + \sigma_1u^2 - \sigma_2u + \sigma_3 + \frac{3\sigma_4}{u} \right) + u \left( \sigma_1u_1 - u_1^2 - \sigma_2 + \frac{\sigma_3}{u_1} - \frac{\sigma_4}{u_1^2} \right)}{4} \\ &= \frac{\left( 3u^3 + \sigma_1u^2 - \sigma_2u + \sigma_3 + \frac{3\sigma_4}{u} \right) - \frac{u}{u_1^2}(u_1^4 - \sigma_1u_1^3 + \sigma_2u_1^2 - \sigma_3u_1 + \sigma_4)}{4}.\end{aligned}$$

Desde que  $u_1$  é uma raiz de

$$u^4 - \sigma_1u^3 + \sigma_2u^2 - \sigma_3u + \sigma_4 = 0,$$

obtemos

$$u^2z + \sigma_4\bar{z} = \frac{1}{4} \left( 3u^3 + \sigma_1u^2 - \sigma_2u + \sigma_3 + \frac{3\sigma_4}{u} \right).$$

Essa relação é satisfeita por  $D_1$ . Todavia, por simetria, deve ser satisfeita também por  $D_2, D_3, D_4$ . Por outro lado, sendo esta uma equação de uma reta, segue que os pontos  $D_1, D_2, D_3, D_4$  são colineares.  $\square$

#### 4.6 Teoremas de Cantor

Nesta seção demonstraremos uma variedade de resultados, devidos em sua maioria, a Moritz Benedikt Cantor (1829-1920). Começemos pelo mais simples.

**Teorema 4.6.1** (M.B. Cantor). *Tomemos um triângulo qualquer inscrito num círculo. Consideremos as três retas tangentes a este círculo que passam pelos vértices do triângulo inscrito. As três perpendiculares às retas tangentes, passando pelos pontos médios dos lados do triângulo, se encontram no centro do círculo de nove pontos do triângulo.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, vamos assumir que o  $\Delta A_1 A_2 A_3$  está inscrito num círculo unitário com centro na origem. Temos que a equação da reta que passa pelos pontos  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta.$$

Assim, quando  $\alpha$  e  $\beta$  coincidem, temos que esta equação é a da reta tangente ao círculo no ponto  $\alpha$ , que é dada então por

$$z + \alpha^2\bar{z} = 2\alpha.$$

Representemos  $A_1, A_2, A_3$  pelos complexos  $u_1, u_2, u_3$  respectivamente. Temos que a

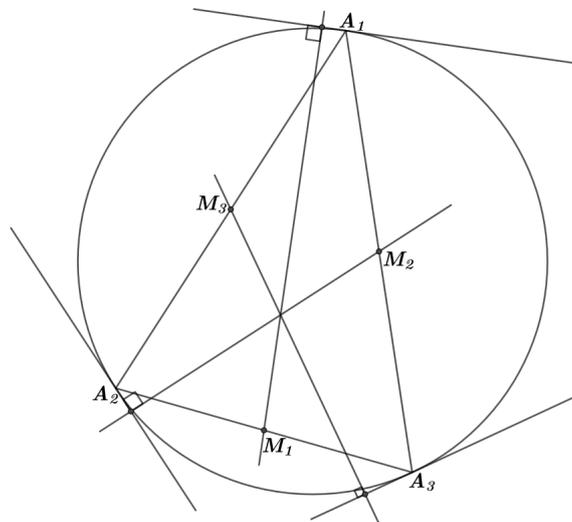


Figura 25 – teorema de Cantor

equação da reta tangente em  $A_1$  é

$$z + u_1^2\bar{z} = 2u_1.$$

Daí, a equação da reta perpendicular que passa pelo ponto médio  $M_1 \left( \frac{u_2 + u_3}{2} \right)$  do lado  $A_2 A_3$  à esta reta tangente é

$$z - u_1^2\bar{z} = \frac{1}{2}[(u_2 + u_3) - u_1^2(\bar{u}_2 + \bar{u}_3)]. \quad (1)$$

Substituindo o centro  $\frac{1}{2}(u_1 + u_2 + u_3)$  do círculo de nove pontos do  $\Delta A_1 A_2 A_3$  no primeiro membro de (1), obtemos

$$\frac{1}{2}[(u_1 + u_2 + u_3) - u_1^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3)] = \frac{1}{2}[(u_2 + u_3) - u_1^2(\bar{u}_2 + \bar{u}_3)]$$

que coincide com o segundo membro da equação (1). Logo, o centro do círculo de nove pontos satisfaz a equação da perpendicular que passa por  $M_1$  à reta tangente em  $A_1$ . Analogamente, conclui-se que o centro do círculo de nove pontos pertence às retas perpendiculares por  $M_2$  e  $M_3$  às retas tangentes nos respectivos vértices opostos.  $\square$

**Teorema 4.6.2** (M.B. Cantor). *Dados  $n$  pontos sobre um círculo. Trace, a partir do baricentro de  $n - 1$  destes pontos, uma perpendicular à reta tangente ao círculo no ponto restante. Temos que as  $n$  retas perpendiculares traçadas às tangentes ao círculo nos pontos dados se encontram em um único ponto.*

*Demonstração.* Faremos a demonstração deste teorema de forma muito parecida com a do teorema anterior. Sejam  $u_1, u_2, \dots, u_n$  pontos sobre um círculo unitário com centro na origem. Então a equação da reta tangente em  $u_k$ , onde  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  é  $z + u_k^2 \bar{z} = 2u_k$ , assim a equação da perpendicular à esta reta tangente pelo baricentro

$$\frac{1}{n-1}(u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} + u_{k+1} + \dots + u_n) = \frac{(\sigma_1 - u_k)}{n-1} \quad (\sigma_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_n),$$

dos pontos  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n$  é

$$\begin{aligned} z - u_k^2 \bar{z} &= \frac{(u_1 + \dots + u_{k-1} + u_{k+1} + \dots + u_n) - u_k^2(\bar{u}_1 + \dots + \bar{u}_{k-1} + \bar{u}_{k+1} + \dots + \bar{u}_n)}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1} [(\sigma_1 - u_k) - u_k^2(\bar{\sigma}_1 - \bar{u}_k)] \\ &= \frac{1}{n-1} (\sigma_1 - u_k^2 \bar{\sigma}_1). \end{aligned}$$

Agora, é evidente que para todo  $k$ , o ponto

$$\frac{1}{n-1}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{\sigma_1}{n-1}$$

satisfaz esta equação. Daí, segue o resultado.  $\square$

**Teorema 4.6.3.** *Dados seis pontos  $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2$  concíclicos. Então, as quatro interseções dos quatro pares de retas de Simson dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  com relação aos  $\Delta A_2 A_3 A_4, \Delta A_1 A_3 A_4, \Delta A_1 A_2 A_4, \Delta A_1 A_2 A_3$  são colineares. Esta é chamada **reta de Cantor** do par de pontos  $P_1$  e  $P_2$  com relação ao quadrilátero  $A_1 A_2 A_3 A_4$ .*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, assumiremos que todos os seis pontos estão sobre um círculo unitário com centro na origem e que estes estão representados pelos

números complexos  $u_1, u_2, u_3, u_4$  e  $t_1, t_2$  respectivamente. Então as equações das retas de Simson dos pontos  $P_1(t_1)$  e  $P_2(t_2)$  com relação ao  $\Delta A_2A_3A_4$  são dadas por

$$\begin{aligned} t_1z - u_2u_3u_4\bar{z} &= \frac{1}{2} \left[ t_1^2 + (u_2 + u_3 + u_4)t_1 - (u_3u_4 + u_4u_2 + u_2u_3) - \frac{u_2u_3u_4}{t_1} \right], \\ t_2z - u_2u_3u_4\bar{z} &= \frac{1}{2} \left[ t_2^2 + (u_2 + u_3 + u_4)t_2 - (u_3u_4 + u_4u_2 + u_2u_3) - \frac{u_2u_3u_4}{t_2} \right]. \end{aligned}$$

Daí, temos que sua interseção é dada por

$$z = \frac{1}{2} \left[ t_1 + t_2 + (u_2 + u_3 + u_4) + \frac{u_2u_3u_4}{t_1t_2} \right].$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ \sigma_2 &= u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4, \\ \sigma_3 &= u_2u_3u_4 + u_1u_3u_4 + u_1u_2u_4 + u_1u_2u_3, \\ \sigma_4 &= u_1u_2u_3u_4, \end{aligned}$$

podemos reescrever a relação anterior da seguinte forma

$$z = \frac{1}{2} \left[ t_1 + t_2 + \sigma_1 - u_1 + \frac{\sigma_4}{t_1t_2u_1} \right],$$

de onde vem que

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{\sigma_3}{\sigma_4} - \frac{1}{u_1} + \frac{t_1t_2u_1}{\sigma_4} \right].$$

Multiplicando  $z$  e  $\bar{z}$  por  $t_1t_2$  e  $\sigma_4$  respectivamente e somando-os, obtemos a seguinte igualdade

$$t_1t_2z + \sigma_4\bar{z} = \frac{1}{2} \left[ (t_1 + t_2)t_1t_2 + \sigma_1t_1t_2 + \sigma_3 + \frac{\sigma_4(t_1 + t_2)}{t_1t_2} \right].$$

Esta igualdade deve ser satisfeita pela interseção das retas de Simson dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  com relação ao  $\Delta A_2A_3A_4$ . Como essa igualdade é simétrica com relação a  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , temos que ela é satisfeita também pelas interseções dos pares de retas de Simson de  $P_1$  e  $P_2$  com relação aos  $\Delta A_1A_3A_4, \Delta A_1A_2A_4, \Delta A_1A_2A_3$ . Por outro lado, sendo esta igualdade a equação de uma reta, temos que as quatro interseções são colineares.  $\square$

**Teorema 4.6.4.** *Sejam  $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2, P_3$  sete pontos concíclicos. Então as três retas de Cantor dos três pares de pontos  $P_2$  e  $P_3, P_3$  e  $P_1, P_1$  e  $P_2$  com relação ao quadrilátero  $A_1A_2A_3A_4$  se encontram em um ponto. Este ponto é chamado de **ponto de Cantor** do trio de pontos  $P_1, P_2, P_3$  com relação ao quadrilátero  $A_1A_2A_3A_4$ .*

*Demonstração.* Representaremos os pontos  $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2, P_3$  pelos complexos  $u_1, u_2, u_3, u_4, t_1, t_2, t_3$  respectivamente e, sem perda de generalidade, consideraremos todos sobre um círculo unitário centrado na origem. Temos que as retas de Cantor

dos pares pontos  $P_2$  e  $P_3$ ,  $P_3$  e  $P_1$  com relação ao quadrilátero  $A_1A_2A_3A_4$  são dadas, conforme o teorema anterior, por

$$\begin{aligned} t_2t_3z + \sigma_4\bar{z} &= \frac{1}{2} \left[ (t_2 + t_3)t_2t_3 + \sigma_1t_2t_3 + \sigma_3 + \frac{\sigma_4(t_2 + t_3)}{t_2t_3} \right], \\ t_3t_1z + \sigma_4\bar{z} &= \frac{1}{2} \left[ (t_3 + t_1)t_3t_1 + \sigma_1t_3t_1 + \sigma_3 + \frac{\sigma_4(t_3 + t_1)}{t_3t_1} \right]. \end{aligned}$$

Segue então que suas interseções são dadas por

$$z = \frac{1}{2} \left[ t_1 + t_2 + t_3 + \sigma_1 - \frac{\sigma_4}{t_1t_2t_3} \right].$$

Como esta igualdade é simétrica com relação a  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , temos que a reta de Cantor do par de pontos  $P_1$  e  $P_2$  com relação quadrilátero  $A_1A_2A_3A_4$  também passa por este ponto. Assim, este ponto é o ponto de Cantor do trio de pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  com relação ao quadrilátero  $A_1A_2A_3A_4$ .  $\square$

**Teorema 4.6.5.** *Sejam  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  oito pontos concíclicos. temos que os cinco pontos de Cantor do trio de pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  com relação aos quadriláteros  $A_2A_3A_4A_5$ ,  $A_1A_3A_4A_5$ ,  $A_1A_2A_4A_5$ ,  $A_1A_2A_3A_5$ ,  $A_1A_2A_3A_4$  são colineares. Esta reta é chamada de **reta de Cantor** do trio de pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  com relação ao pentágono  $A_1A_2A_3A_4A_5$ .*

*Demonstração.* Consideremos o círculo em questão um círculo unitário centrado na origem. Representemos os pontos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  pelos complexos  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ ,  $u_5$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  respectivamente. Temos que o ponto de Cantor do trio de pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  com relação ao quadrilátero  $A_2A_3A_4A_5$  é dado por

$$z = \frac{1}{2} \left[ t_1 + t_2 + t_3 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - \frac{u_2u_3u_4u_5}{t_1t_2t_3} \right].$$

Façamos

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5, \\ \sigma_2 &= u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_1u_5 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_2u_5 + u_3u_4 + u_3u_5 + u_4u_5, \\ \sigma_3 &= u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_1u_3u_5 + u_1u_4u_5 + u_2u_3u_4 + u_2u_4u_5 + u_3u_4u_5, \\ \sigma_4 &= u_1u_3u_4u_5 + u_1u_2u_4u_5 + u_1u_2u_3u_4, \\ \sigma_5 &= u_1u_2u_3u_4u_5. \end{aligned}$$

Assim, da relação anterior obtemos as seguintes relações

$$z = \frac{1}{2} \left[ t_1 + t_2 + t_3 + \sigma_1 - u_1 - \frac{\sigma_5}{u_1t_1t_2t_3} \right]$$

e

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{\sigma_4}{\sigma_5} - \frac{1}{u_1} - \frac{u_1t_1t_2t_3}{\sigma_5} \right].$$

Multiplicando  $z$  e  $\bar{z}$  por  $t_1 t_2 t_3$  e  $\sigma_5$  respectivamente, obtemos

$$t_1 t_2 t_3 z - \sigma_5 \bar{z} = \frac{1}{2} \left[ (t_1 + t_2 + t_3) t_1 t_2 t_3 + \sigma_1 t_1 t_2 t_3 - \sigma_4 - \frac{\sigma_5 (t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2)}{t_1 t_2 t_3} \right].$$

Esta igualdade é satisfeita pelo ponto de Cantor do trio de pontos  $P_1, P_2, P_3$  com relação ao quadrilátero  $A_2 A_3 A_4 A_5$ . Sendo esta relação simétrica com respeito à  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , vem que também é satisfeita pelos pontos de Cantor do trio  $P_1, P_2, P_3$  com relação aos quadriláteros

$$A_1 A_3 A_4 A_5, A_1 A_2 A_4 A_5, A_1 A_2 A_3 A_5, A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Sendo esta igualdade a equação de uma reta, temos que os cinco pontos de Cantor são colineares.  $\square$

Nos casos posteriores em que o número de pontos concíclicos é maior do que a considerada até agora, podemos proceder de modo análogo ao que foi feito anteriormente.

#### 4.7 O teorema de Feuerbach

**Teorema 4.7.1.** *O círculo de nove pontos de um triângulo é tangente ao círculo inscrito e aos três círculos excritos.*

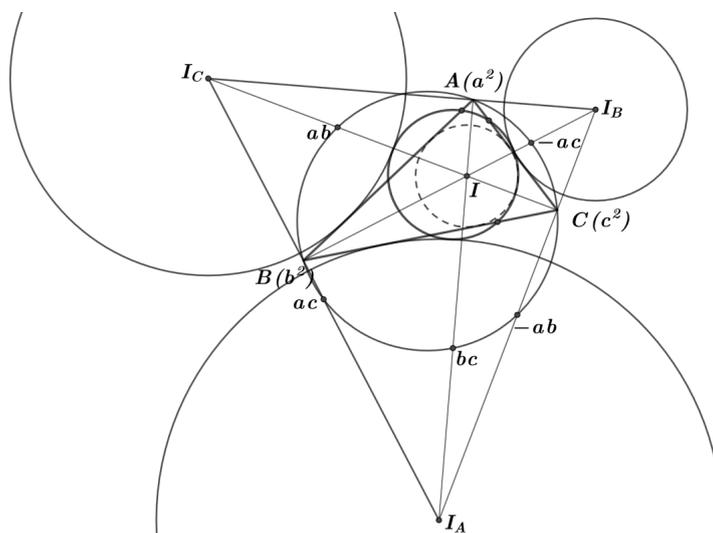


Figura 26 – teorema de Feuerbach

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, assumiremos que o  $\Delta ABC$  está inscrito num círculo unitário com centro na origem. Representaremos os vértices  $A, B, C$  pelos complexos  $a^2, b^2, c^2$  respectivamente, afim de facilitar nossos cálculos.

Sejam  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$  os argumentos de  $a^2, b^2, c^2$  respectivamente. Consideraremos então  $\arg(a) = \alpha, \arg(b) = \beta, \arg(c) = \gamma$ . Temos que a bissetriz do ângulo interno do

vértice  $A$  passa pelo ponto médio do arco  $\widehat{BC}$  que não contém o vértice  $A$ . Portanto, esse complexo tem argumento igual

$$2\beta + \frac{2\gamma - 2\beta}{2} = \beta + \gamma = \arg(bc).$$

Concluimos então que o complexo  $bc$  representa o ponto médio do arco  $\widehat{BC}$  que não contém o vértice  $A$ . Da mesma forma, temos que a bissetriz do ângulo interno do vértice  $B$  passa pelo ponto médio do arco  $\widehat{CA}$  que não contém o vértice  $B$ . Esse complexo tem argumento igual a

$$2\gamma + \frac{2\pi - 2\gamma + 2\alpha}{2} = \alpha + \gamma + \pi = \arg(-ac).$$

Temos então que o complexo  $-ac$  representa o ponto médio do arco  $\widehat{CA}$  que não contém o vértice  $B$ . Analogamente, o argumento do complexo que representa o ponto médio do arco  $\widehat{AB}$  que não contém o vértice  $C$  é dado por

$$2\alpha + \frac{2\beta - 2\alpha}{2} = \alpha + \beta = \arg(ab).$$

Assim, o complexo  $ab$  representa tal ponto. Temos que as equações da três bissetrizes

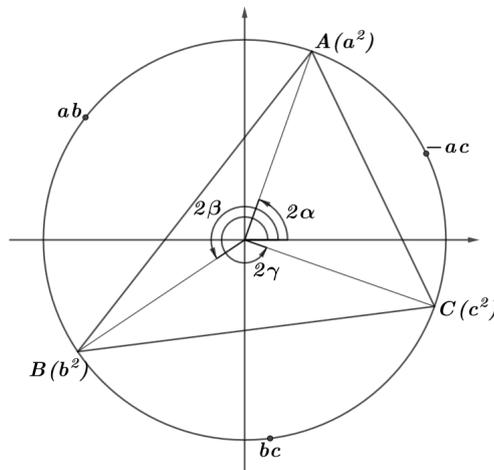


Figura 27 – argumentos de  $a^2$ ,  $b^2$  e  $c^2$

dos ângulos internos são dadas por

$$\begin{aligned} z + a^2bc\bar{z} &= a^2 + bc, \\ z - ab^2c\bar{z} &= b^2 - ac, \\ z + abc^2\bar{z} &= c^2 + ab. \end{aligned}$$

Escolhendo quaisquer duas equações e resolvendo o sistema por elas formado, obtemos

$$z = ab - ac + bc.$$

É fácil verificar que  $z = ab - ac + bc$  satisfaz as três equações acima. Mostramos então que as três bissetrizes de um triângulo se encontram em um ponto, o qual é chamado de *incentro*  $I$  do triângulo.

Agora, lembremos que o centro do círculo de nove pontos é dado por  $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ . Segue então que a distância entre o centro do círculo de nove pontos e o incentro do triângulo será dada por

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - (ab - ac + bc) \right| \\ &= \frac{1}{2} |a^2 + b^2 + c^2 + 2(ac - ab - bc)| \\ &= \frac{1}{2} |(a - b + c)^2|. \end{aligned}$$

Lembrando que  $|a| = |b| = |c| = 1$ , vem que

$$|a - b + c| = |\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}| = \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{ab - ac + bc}{abc} \right| = |ab - ac + bc|.$$

Sendo  $I : ab - ac + bc$  o incentro do triângulo, temos que  $I$  é interior ao triângulo, portanto interior ao próprio círculo de raio 1. Daí, vem que

$$|ab - ac + bc| < 1,$$

de onde concluímos que

$$d = \frac{1}{2} |(a - b + c)^2| < \frac{1}{2}.$$

Agora, as equações das retas que passam por  $A$  e  $B$  e da reta perpendicular a esta passando por  $I$  são dadas respectivamente por

$$z + a^2 b^2 \bar{z} = a^2 + b^2$$

e

$$cz - a^2 b^2 c \bar{z} = c^2 b - ac^2 - a^2 b + ab^2.$$

Multiplicando a primeira destas equações por  $c$  e somando com a segunda obtemos

$$2cz = a^2 c + b^2 c + bc^2 - ac^2 - a^2 b + ab^2 \iff z = \frac{1}{2} \left[ a^2 + b^2 + bc - ac + \frac{ab}{c}(b - a) \right],$$

que é a interseção entre as retas consideradas. Temos então que o raio do círculo inscrito no  $\Delta ABC$  é dado por

$$\begin{aligned} r &= \left| ab - ac + bc - \frac{1}{2} \left[ a^2 + b^2 + bc - ac + \frac{ab}{c}(b - a) \right] \right| \\ &= \frac{1}{2|c|} |2abc - 2ac^2 + 2c^2 b - a^2 c - b^2 c - c^2 b + ac^2 - ab^2 + a^2 b| \\ &= \frac{1}{2} |(a^2 b - a^2 c - ab^2 - cb^2 + bc^2 - ac^2 + 3abc) - abc|. \end{aligned}$$

E como  $|abc| = 1$ , segue que

$$r = \left| \frac{a^2b - a^2c - ab^2 - cb^2 + bc^2 - ac^2 + 3abc}{2abc} - \frac{1}{2} \right|.$$

Como  $d = \frac{1}{2}|(a - b + c)^2|$ , temos que

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}(a - b + c)(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) \\ &= \frac{1}{2}(a - b + c) \left( \frac{bc - ac + ab}{abc} \right) \\ &= \frac{1}{2abc}(a^2b - a^2c - ab^2 - cb^2 + bc^2 - ac^2 + 3abc). \end{aligned}$$

Daí, vem que

$$r = \left| d - \frac{1}{2} \right|.$$

Como  $d < \frac{1}{2}$ , segue que  $r = \frac{1}{2} - d \iff d = \frac{1}{2} - r$ . Como o círculo circunscrito ao  $\Delta ABC$  é um círculo unitário, temos que o raio do círculo de nove pontos é igual a  $\frac{1}{2}$ . Da geometria euclidiana plana, temos que dois círculos são tangentes internamente se, e somente se, a distância entre os seus centros é igual a diferença entre o raio do círculo maior e o raio do círculo menor. Logo o círculo de nove pontos e o círculo inscrito são tangentes internamente.

Para o que falta, lembremos que em um triângulo qualquer, o ângulo interno e o ângulo externo adjacente são suplementares, de onde é fácil concluir que o ângulo entre as bissetrizes desses dois ângulos é  $\frac{\pi}{2}$ . Assim, o triângulo formado pelos pontos  $A$ ,  $bc$  e  $K$ , onde  $K$  é o ponto de interseção da bissetriz do ângulo externo com vértice em  $A$  com o círculo circunscrito é retângulo e, portanto, o ponto  $K$  é diametralmente oposto ao ponto  $bc$ , isto é,  $K$  é o ponto  $-bc$ . Da mesma forma, concluímos que as bissetrizes dos ângulos externos com vértices em  $B$  e  $C$  intersectam o círculo circunscrito nos pontos  $ac$  e  $-ab$  respectivamente. Segue então que as equações das bissetrizes dos ângulos externos serão dadas por

$$\begin{aligned} z - a^2bc\bar{z} &= a^2 - bc, \\ z + ab^2c\bar{z} &= b^2 + ac, \\ z - abc^2\bar{z} &= c^2 - ab. \end{aligned}$$

Assim, resolvendo o sistema formado pelas duas últimas equações, obtemos o excentro  $I_A$  do círculo excrito oposto ao ângulo  $A$ . Resolvendo o sistema formado pela primeira e terceira equações, obtemos o excentro  $I_B$  do círculo excrito oposto ao ângulo  $B$ . Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtemos o excentro

$I_C$  do círculo excrito oposto ao ângulo  $C$ . De onde temos:

$$\begin{aligned} I_A &: ac - ab + bc; \\ I_B &: -ab - ac - bc, \\ I_C &: ab + ac - bc. \end{aligned}$$

Lembremos que a equação da reta que passa por  $A$  e  $B$  é dada por

$$z + a^2 b^2 \bar{z} = a^2 + b^2,$$

assim a perpendicular a esta reta por  $I_C$  tem equação

$$cz - a^2 b^2 c \bar{z} = ac^2 - bc^2 - ab^2 + a^2 b.$$

Resolvendo o sistema formado por estas duas equações encontramos o pé da perpendicular de  $I_C$  ao lado  $AB$  que é dado por

$$z = \frac{1}{2} \left[ a^2 + b^2 + ac - bc + \frac{ab}{c}(a - b) \right].$$

Agora, a distância  $D$  entre o centro do círculo de nove pontos e o excentro  $I_C$  é

$$\begin{aligned} D &= \left| \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - (ab + ac - bc) \right| \\ &= \frac{1}{2} |a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc - ab - ac)| \\ &= \frac{1}{2} |(-a + b + c)^2| \\ &= \frac{1}{2} (-a + b + c)(-\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \\ &= \frac{1}{2} (-a + b + c) \left( \frac{-bc + ac + ab}{abc} \right) \\ &= \frac{1}{2abc} (-a^2 b - a^2 c + ab^2 - cb^2 - bc^2 + ac^2 + 3abc). \end{aligned}$$

De forma análoga ao que foi feito no caso das bissetrizes internas, concluímos que  $D > \frac{1}{2}$ .

Calculemos agora o raio  $R_C$  do círculo excrito ao  $\Delta ABC$  com centro em  $I_C$ . Temos

$$\begin{aligned} R_C &= \left| ab + ac - bc - \frac{1}{2} \left[ a^2 + b^2 + ac - bc + \frac{ab}{c}(a - b) \right] \right| \\ &= \frac{1}{2|c|} |2abc + 2ac^2 - 2c^2 b - a^2 c - b^2 c - ac^2 + bc^2 + ab^2 - a^2 b| \\ &= \frac{1}{2} |(-a^2 b - a^2 c + ab^2 - cb^2 + ac^2 - bc^2 + 3abc) - abc| \\ &= \left| \frac{-a^2 b - a^2 c + ab^2 - cb^2 + ac^2 - bc^2 + 3abc}{2abc} - \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| D - \frac{1}{2} \right|. \end{aligned}$$

Como  $D > \frac{1}{2}$ , segue que  $R_C = D - \frac{1}{2} \iff D = R_C + \frac{1}{2}$ . Como o círculo circunscrito ao  $\Delta ABC$  é um círculo unitário, temos que o raio do círculo de nove pontos é igual a  $\frac{1}{2}$ . Da geometria euclidiana plana, temos que dois círculos são tangentes externamente se, e somente se, a distância entre os seus centros é igual a soma de seus raios. Logo o círculo de nove pontos e o círculo excrito de centro  $I_C$  são tangentes externamente. Analogamente, concluimos que o círculo de nove pontos é tangente externamente aos círculos excritos de centros  $I_A$  e  $I_B$ .  $\square$

#### 4.8 O teorema de Morley

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o teorema de Morley, provaremos o seguinte lema:

**Lema 4.8.1.** *Suponhamos que os pontos  $t_1, t_2, t_3, t_4$  estejam sobre um círculo unitário. Temos que os segmentos (ou seus prolongamentos) que ligam os pontos  $t_1, t_2$  e  $t_3, t_4$  encontram-se em*

$$z = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1\bar{t}_2 - \bar{t}_3\bar{t}_4}.$$

*Demonstração.* Temos que as retas que passam pelos pontos  $t_1$  e  $t_2$  e pelos pontos  $t_3$  e  $t_4$  tem equações respectivamente dadas por

$$z + t_1 t_2 \bar{z} = t_1 + t_2, \quad z + t_3 t_4 \bar{z} = t_3 + t_4.$$

Agora, é fácil verificar que a interseção dessas duas retas é dada por

$$z = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1\bar{t}_2 - \bar{t}_3\bar{t}_4}.$$

$\square$

A seguir, provaremos o teorema devido a Frank Morley (1860-1934), que pode ser qualificado com um dos mais belos teoremas da matemática.

**Teorema 4.8.1 (Morley).** *As interseções dos pares adjacentes de trissecrizes dos ângulos de um triângulo qualquer são vértices de um triângulo equilátero.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, assumiremos que o  $\Delta ABC$  está inscrito em um círculo unitário centrado na origem e que o vértice  $A$  está no ponto 1. Sejam

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} &= 3\gamma \quad \left(0 < \gamma < \frac{2\pi}{3}\right), \\ \widehat{AOC} &= 3\beta \quad \left(-\frac{2\pi}{3} < \beta < 0\right), \\ \widehat{BOC} &= 3\alpha \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma > 0\right). \end{aligned}$$

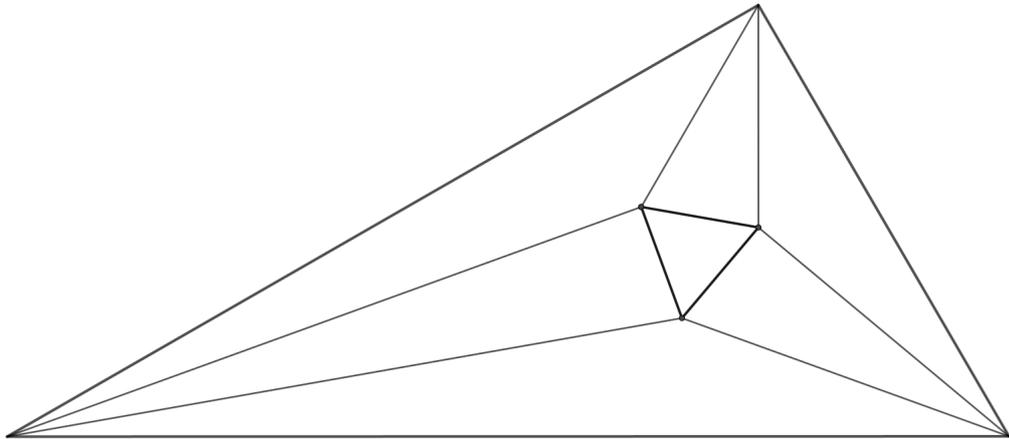


Figura 28 – teorema de Morley

Então os argumentos principais dos pontos que trissectam  $\widehat{BC}$  (que não contém o ponto  $A$ ) são

$$\alpha + 3\gamma = \beta + 2\gamma + \frac{2\pi}{3},$$

e

$$2\alpha + 3\gamma = 2\beta + \gamma + \frac{4\pi}{3},$$

já que  $\alpha - \beta + \gamma = \frac{2\pi}{3}$  pois  $\beta$  está no sentido horário. Assim, se definirmos os pontos

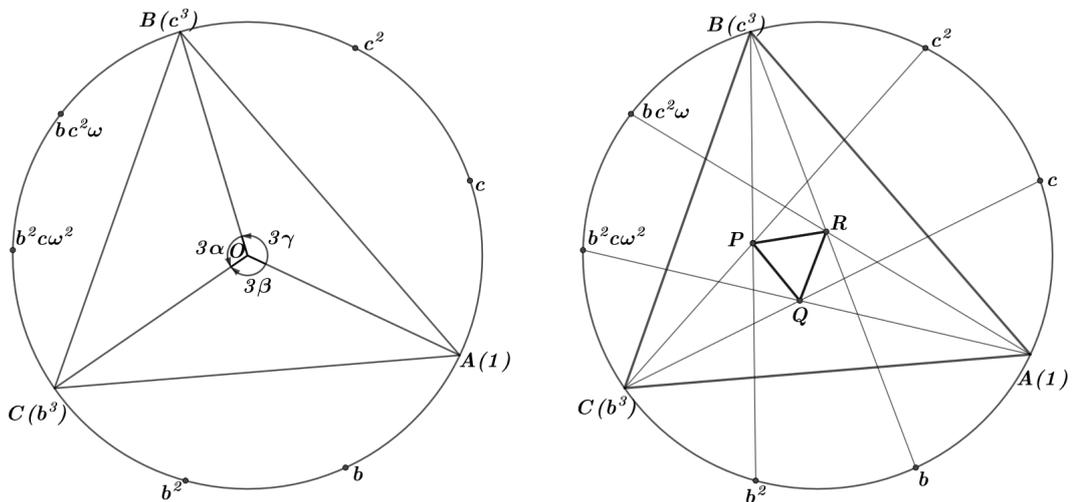


Figura 29 – interseções das trissectrizes com o círculo

que trissectam  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$  por  $c$ ,  $c^2$  e  $b$ ,  $b^2$  respectivamente, temos que  $B$ ,  $C$  são  $c^3$  e  $b^3$  e os pontos que trissectam  $\widehat{BC}$  são dados por  $bc^2\omega$  e  $b^2c\omega^2$ , onde  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ .

Sejam  $P(\lambda)$ ,  $Q(\mu)$ ,  $R(\nu)$  as interseções das trissectrizes adjacentes dos ângulos em  $B$  e  $C$ ,

$C$  e  $A$ ,  $A$  e  $B$  respectivamente. Então pelo lema 4.8.1, temos

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{b^{-2} + c^{-3} - b^{-3} - c^{-2}}{b^{-2}c^{-3} - b^{-3}c^{-2}} = \frac{bc^3 + b^3 - c^3 - b^3c}{b - c} \\ &= \frac{(b - c)(b^2 + bc + c^2) - bc(b^2 - c^2)}{b - c} = b^2 + bc + c^2 - bc(b + c), \\ \mu &= \frac{1 + b^{-2}c^{-1}\omega^{-2} - b^{-3} - c^{-1}}{b^{-2}c^{-1}\omega^{-2} - b^{-3}c^{-1}} = \frac{b^3c + b\omega - c - b^3}{b\omega - 1} \\ &= \frac{c(b^3 - 1) - b(b^2 - \omega)}{\omega(b - \omega^2)} = \omega^2[c(b^2 + b\omega^2 + \omega) - b(b + \omega^2)], \\ \nu &= \frac{1 + b^{-1}c^{-2}\omega^{-1} - b^{-1} - c^{-3}}{b^{-1}c^{-2}\omega^{-1} - b^{-1}c^{-3}} = \frac{bc^3 + c\omega^2 - c^3 - b}{c\omega^2 - 1} \\ &= \frac{b(c^3 - 1) - c(c^2 - \omega^2)}{\omega^2(c - \omega)} = \omega[b(c^2 + c\omega + \omega^2) - c(c + \omega)].\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\lambda + \omega\mu + \omega^2\nu &= b^2 + bc + c^2 - b^2c - bc^2 + b^2c + bc\omega^2 + \\ &\quad c\omega - b^2 - b\omega^2 + bc^2 + bc\omega + b\omega^2 - c^2 - c\omega \\ &= bc(\omega^2 + \omega + 1) = 0.\end{aligned}$$

Portanto, o triângulo é equilátero.

Vamos agora considerar o caso dos ângulos externos. Observemos inicialmente que as trissectrizes internas e externas formam um ângulo de  $\frac{\pi}{3}$  entre elas e que o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito. Determinemos as interseções da trissectriz do ângulo externo em  $B$  com o círculo.

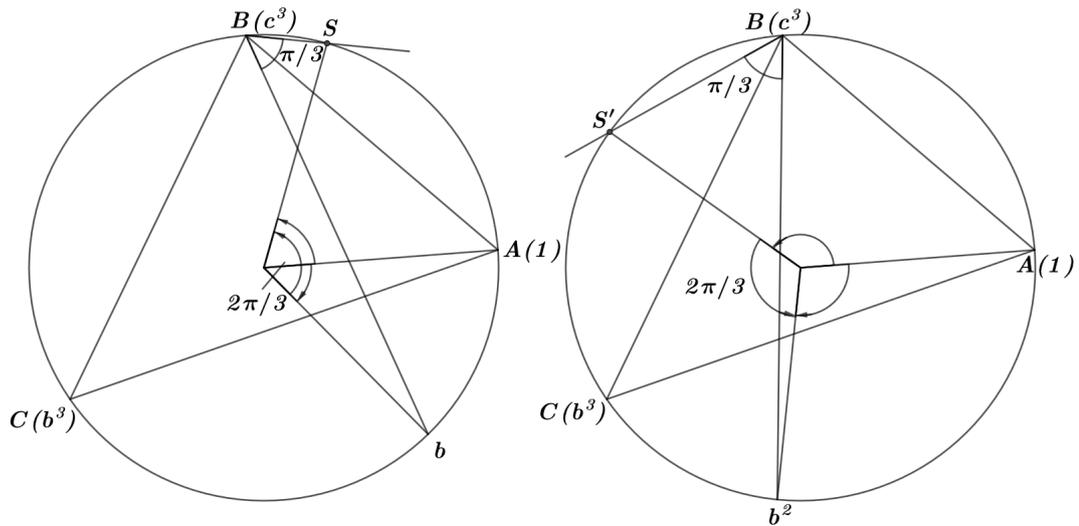


Figura 30 – trissectriz do ângulo externo em  $B$

Sendo  $S$  e  $S'$  as interseções da trissectriz do ângulo externo em  $B$ , temos que

$$\frac{2\pi}{3} = \arg(S) - \arg(b) \iff \arg(S) = \frac{2\pi}{3} + \arg(b),$$

de onde temos

$$\arg(S) = \arg(\omega) + \arg(b) = \arg(b\omega).$$

E

$$\frac{2\pi}{3} + \arg(S') - \arg(b^2) = 2\pi,$$

de onde temos

$$\arg(S') = \arg(1) + \arg(b^2) - \arg(\omega) = \arg(b^2\omega^2).$$

Assim, a trissectriz do ângulo externo em  $B$  (adjacente ao lado  $AB$ ) intersecta o círculo em  $b\omega$  e a trissectriz do ângulo externo em  $B$  (adjacente ao lado  $BC$ ) intersecta o círculo em  $b^2\omega^2$ .

Analogamente, as trissectrizes do ângulo externo em  $C$  (adjacentes aos lados  $BC$  e  $AC$ ) intersectam o círculo em  $c^2\omega$  e  $c\omega^2$  respectivamente e, as trissectrizes do ângulo externo em  $A$  (adjacentes aos lados  $AB$  e  $AC$ ) intersectam o círculo em  $bc^2$  e  $b^2c$  respectivamente.

Assim,  $P$  (que era a interseção das retas que passam por  $b^3$ ,  $c^2$  e  $c^3$ ,  $b^2$ ) se torna a interseção das retas que passam por  $b^3$ ,  $c^2\omega$  e  $c^3$ ,  $b^2\omega^2$ ;  $Q$  (que era a interseção das retas que passam por  $b^3$ ,  $c$ , e  $1$ ,  $b^2c\omega^2$ ) se torna a interseção das retas que passam por  $b^3$ ,  $c\omega^2$  e  $1$ ,  $b^2c$  e  $R$  (que era a interseção das retas que passam por  $c^3$ ,  $b$  e  $1$ ,  $bc^2\omega$ ) se torna a interseção das retas que passam por  $c^3$ ,  $b\omega$  e  $1$ ,  $bc^2$ . Mas isso é equivalente a substituir  $b$  por  $b\omega$  e  $c$  por  $c\omega^2$  na demonstração do caso para ângulos internos, que claramente continua válida mediante esta transformação. Portanto, segue o resultado. □

## 5 ÁREA DE UM POLÍGONO NO PLANO COMPLEXO

Neste capítulo mostraremos como obter expressões que nos forneçam a área de um polígono convexo no plano complexo.

### 5.1 Área do triângulo

Já vimos anteriormente uma coleção de resultados a respeito de triângulos. Buscaremos aqui determinar a área de um triângulo qualquer, levando em consideração os seus vértices.

**Proposição 5.1.1.** *Seja  $\Delta z_1 z_2 z_3$  um triângulo qualquer no plano complexo. Então sua área  $A(\Delta z_1 z_2 z_3)$  é dada por*

$$A(\Delta z_1 z_2 z_3) = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}.$$

*Demonstração.* Sejam  $z_1 = x_1 + y_1 i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2 i$ ,  $z_3 = x_3 + y_3 i$  três números complexos quaisquer no plano complexo. Observando a figura (3.1), notamos que

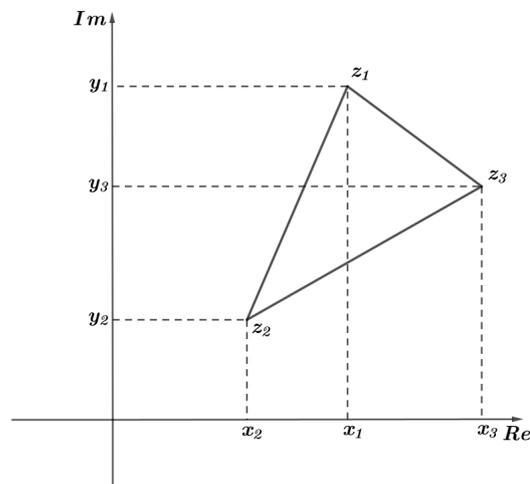


Figura 31 – Triângulo  $z_1 z_2 z_3$

$$\begin{aligned} A(\Delta z_1 z_2 z_3) &= A(y_1 y_2 x_2 x_1) + A(y_1 x_1 x_3 y_3) - A(y_2 x_2 x_3 y_3) \\ &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2) \\ &= \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) + (x_3 y_1 - y_3 x_1)], \end{aligned}$$

onde  $y_1y_2x_2x_1$ ,  $y_1x_1x_3y_3$ ,  $y_2x_2x_3y_3$  são trapézios. Agora, notemos que

$$\begin{aligned} x_1y_2 - y_1x_2 &= \operatorname{Im}[(x_1 - y_1i)(x_2 + y_2i)] = \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2) = \frac{1}{2}i(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2); \\ x_2y_3 - y_2x_3 &= \operatorname{Im}[(x_2 - y_2i)(x_3 + y_3i)] = \operatorname{Im}(\bar{z}_2z_3) = \frac{1}{2}i(z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3); \\ x_3y_1 - y_3x_1 &= \operatorname{Im}[(x_3 - y_3i)(x_1 + y_1i)] = \operatorname{Im}(\bar{z}_3z_1) = \frac{1}{2}i(z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_3z_1). \end{aligned}$$

Assim, vem que

$$\begin{aligned} A(\Delta z_1z_2z_3) &= \frac{i}{4}(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3 + z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_3z_1) \\ &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

No caso em que  $\frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}$  for um número real negativo, devemos tomar o seu

módulo.

Observe que aplicando o teorema de Laplace na primeira linha do determinate acima, temos que a área do  $\Delta z_1z_2z_3$  também pode ser dada por

$$A(\Delta z_1z_2z_3) = \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right). \quad (5.1)$$

## 5.2 Área de um polígono

A partir do que foi discutido na seção anterior, vamos determinar uma expressão para o cálculo da área de um polígono convexo formado por  $n$  pontos.

**Proposição 5.2.1.** *Seja  $z_1z_2 \dots z_n$  um polígono qualquer convexo no plano complexo. Então*

$$A(z_1z_2 \dots z_n) = \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right).$$

*Demonstração.* Lembremos que a área de um polígono convexo é igual a soma das áreas dos triângulos em que este polígono pode ser decomposto. Assim, considerando o polígono convexo  $z_1z_2 \dots z_n$  com os pontos  $z_1z_2 \dots z_n$  dispostos no sentido anti-horário, temos

$$A(z_1z_2 \dots z_n) = A(z_1z_2z_3) + A(z_1z_3z_4) + \dots + A(z_1z_{n-1}z_n)$$

onde a área do  $k$ -ésimo triângulo  $z_1z_kz_{k+1}$ , pela expressão 5.1, é dada por

$$A(z_1z_kz_{k+1}) = \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & z_k \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_{k+1} & z_1 \\ \bar{z}_{k+1} & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right).$$

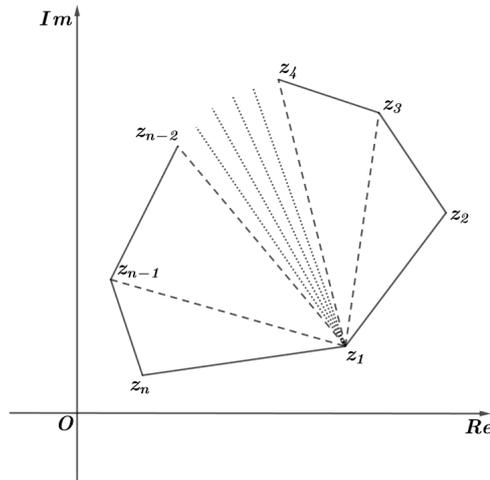


Figura 32 – Polígono convexo no plano complexo

Assim, temos

$$\begin{aligned}
 A(z_1 z_2 \dots z_n) &= \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right) \\
 &+ \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_4 & z_1 \\ \bar{z}_4 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right) + \dots \\
 &+ \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & z_{n-1} \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_{n-1} & z_n \\ \bar{z}_{n-1} & \bar{z}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Notemos que o último determinante de  $A(z_1 z_k z_{k+1})$  se anula com o primeiro determinante de  $A(z_1 z_{k+1} z_{k+2})$ . Portanto,

$$A(z_1 z_2 \dots z_n) = \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right). \quad (5.2)$$

□

### 5.3 Polígonos regulares

Sabemos que as raízes  $n$ -ésimas de um número complexo  $z \neq 0$  representam geometricamente os vértices de um polígono regular de  $n$  lados. Sabemos também da seção anterior, que sendo essas raízes representadas por  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ , a área desse polígono formado pelos afixos dessas raízes é dada por

$$A(z_0 z_1 \dots z_{n-1}) = \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_0 & z_1 \\ \bar{z}_0 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_{n-1} & z_0 \\ \bar{z}_{n-1} & \bar{z}_0 \end{vmatrix} \right). \quad (5.3)$$

A proposição a seguir nos diz que é possível determinar uma expressão que determina a mesma área acima do complexo  $z \neq 0$  sem que haja necessidade de calcular suas raízes.

**Proposição 5.3.1.** *Seja  $z = x + yi$  um número complexo não nulo. Temos que a área do polígono regular  $z_0z_1 \dots z_{n-1}$  onde  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  são as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  é dada por*

$$A(z_0z_1 \dots z_{n-1}) = \frac{n \sqrt[n]{x^2 + y^2} \sin \frac{2\pi}{n}}{2}.$$

*Demonstração.* Temos que a raiz  $n$ -ésima de um número complexo  $z$  é dada por

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right],$$

onde  $0 \leq k < n$ .

Assim, valendo-se das propriedades dos determinantes, o  $k$ -ésimo determinante de 5.3 é

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} z_{k-1} & z_k \\ \bar{z}_{k-1} & \bar{z}_k \end{vmatrix} = \\ &= \sqrt[2n]{|z|} \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \left( \frac{\theta + 2(k-1)\pi}{n} \right) & \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \\ \sin \left( \frac{\theta + 2(k-1)\pi}{n} \right) & \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \end{vmatrix} \\ &= -2i \sqrt[2n]{|z|} \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Notemos que o resultado obtido acima independe de  $k$ , portanto, os demais determinantes de 5.3 possuem o mesmo resultado. Logo, como são  $n$  determinantes, vem que

$$\begin{aligned} A(z_0z_1 \dots z_{n-1}) &= n \frac{i}{4} \left[ -2i \sqrt[2n]{|z|} \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right] \\ &= \frac{n \sqrt[n]{|z|^2}}{2} \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \\ &= \frac{n \sqrt[n]{x^2 + y^2} \sin \frac{2\pi}{n}}{2}. \end{aligned}$$

□

## 6 CONCLUSÃO

Percebemos então que a aplicação de números complexos na resolução de problemas de geometria, realmente simplificam as demonstrações, além de mostrar que as operações com estes números ganham um significado geométrico, estabelecendo uma relação entre estas duas áreas de estudo que a princípio pareciam tão distantes uma da outra.

Boa parte do conteúdo discutido no trabalho pode ser trabalhada em sala de aula mediante a um conhecimento prévio de resultados simples da geometria plana. Assim, tem-se um nova possibilidade de se abordar esse importante tópico da Matemática no Ensino Médio, de forma que se possa assim dar a relevância merecida por este importante ramo matemático.

## REFERÊNCIAS

HAHN, L. **Complex Numbers and Geometry**. Washington: The Mathematical Association of America, 1994.

HEFEZ, A.; VILLELA, M.L.T. **Polinômios e Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: polinômios**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.6.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma Variável Complexa**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.