UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FABIANO DA CONCEIÇÃO SILVA

UM ESTUDO SOBRE CÔNICAS:
aspectos históricos e seu ensino

São Luís
2018

FABIANO DA CONCEIÇÃO SILVA

UM ESTUDO SOBRE CÔNICAS:
aspectos históricos e seu ensino

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Atonio José da Silva

Co-orientador:Prof. Me. Anselmo Baganha Raposo Júnior

São Luís

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

DA CONCEIÇÃO SILVA, FABIANO.
UM ESTUDO SOBRE CÔNICAS : ASPECTOS HISTÓRICOS E SEU ENSINO / FABIANO DA CONCEIÇÃO SILVA. - 2018.
63 f.

Coorientador(a): ANSELMO BAGANHA RAPOSO JÚNIOR.
Orientador(a): ANTONIO JOSÉ DA SILVA.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, SÃO LUÍS-MA, 2018.

1. CÔNICAS. 2. GEOMETRIA. 3. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. I. BAGANHA RAPOSO JÚNIOR, ANSELMO. II. JOSÉ DA SILVA, ANTONIO. III. Título.

FABIANO DA CONCEIÇÃO SILVA

UM ESTUDO SOBRE CÔNICAS:

aspectos históricos e seu ensino

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 27 de julho de 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio José da Silva (Orientador)

Doutor em Informática na Educação

Prof. Me. Anselmo Baganha Raposo Júnior (Co-orientador)

Mestre em Matemática

Prof. Dr. José Santana Campos Costa

Membro do PROFMAT

Doutor em Matemática

Prof. Dr. Nilson Santos Costa

Membro Externo ao PROFMAT

Doutor em Engenharia Elétrica

A Jorge Valfredo Batista Ventura.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao Supremo Deus Criador por ter me guiado nessa caminhada e por ter sempre me iluminado em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis.

Ao meu orientador Antonio José da Silva, à professora Sandra Imaculada Moreira Neto, ao professor João de Deus Mendes da Silva, pelos apontamentos e correções sem os quais este trabalho não se realizaria.

Ao tenente coronel do corpo de bombeiros Crizantônio da Conceição Silva pelo apoio em São Luís.

Aos meus pais pelo dom da vida, e porque sempre acreditaram em mim e me deram todo o suporte para eu continuar estudando e chegar a esse mestrado.

À minha esposa Fagna Maria Mendes Silva, meu amor, pela companhia e apoio em todos os momentos.

A CAPES por ter me dado auxílio financeiro durante o curso.

A coordenação do PROFMAT que sempre se colocou a disposição para resolver quaisquer situações, tanto de ordem educacional, quanto de ordem administrativo.

Aos meus colegas de turma, que me mostraram que a união nos permitiu superar grandes dificuldades encontradas ao longo do curso, e assim conseguimos continuar com insistência e perseverança em busca de mais conhecimentos.

A todos aqueles que partilharam comigo a imensa alegria que foi ser aprovado, ter cursado, e ter concluído este mestrado.

"Ora com propósitos pacíficos, como utilizado por Newton na determinação da órbita de corpos celestes, ora com fins bélicos, na localização da arma inimiga a partir do som detectado em três pontos diferentes, o problema de Apolônio fez-se presente em diversos momentos e instigou muitas mentes criativas. . .".

Nathan Altshiller Court

RESUMO

Neste trabalho foi sistematizada a evolução dos conceitos sobre cônicas. Foi feita uma revisão bibliográfica em livros de referência sobre a História da Matemática. Buscou-se conhecer a evolução de conceitos sobre cônicas, desde períodos anteriores a Apolônio de Perga, até a concepção atual com sua base conceitual alicerçada na Geometria Analítica. Foi feita também uma descrição de atividades que visam obter as secções cônicas por meio de experimentações de baixo custo. As cônicas, à medida que foram sendo compreendidas pelo homem, tendo desvendada suas propriedades, começaram a marcar presença na arquitetura, na arte, na engenharia, e numa infinidade de áreas a mercê da criatividade humana. Isto é de impressionar, visto que, inicialmente, Apolônio, o grande nome vinculado a este tema, desenvolveu e sistematizou sua teoria sem se preocupar se havia ou não aplicações para aquilo que consumiria sua atenção quase que por completo por toda a vida. Sua persistência teve infinita importância, como sabemos, seu trabalho influenciou gerações de estudiosos nos séculos vindouros.

Palavras-chave: Cônicas. Geometria. História da Matemática.

ABSTRACT

In this work the evolution of concepts about conics was systematized. A bibliographic review was made in reference books on the History of Mathematics. It was sought to know the evolution of concepts on conics, from periods prior to Apollonius of Perga, to the current conception with its conceptual basis grounded in Analytical Geometry. A description was also given of activities aimed at obtaining the conic sections by means of low cost experiments. The conics, as they were being understood by man, having unveiled their properties, began to make a presence in architecture, art, engineering, in a multitude of areas at the mercy of human creativity. This is impressive, since, initially, Apollonius, the great name linked to this theme, developed and systematized his theory without worrying whether or not there were applications for what would consume his attention almost completely for the rest of his life. His persistence had infinite importance, as we know, his work influenced generations of scholars in the centuries to come.

Key words: Conics. Geometry. History of Mathematics.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1 Introdução

O que são as cônicas, como surgiram e quais os estudiosos que sistematizaram esse conhecimento? As cônicas são parte importante da Geometria em particular, e da Matemática em geral, porque estão vinculadas a resolução dos problemas, desde clássicos dessa área de conhecimento, como: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo, e a trissecção do ângulo. Também estão vinculadas a problemas de Engenharia e Astronomia, entre outras ciências. Fora isto, muitas de suas aplicações práticas são palpáveis e estão ao alcance de qualquer estudante do Ensino Básico.

O conceito de cônicas surge ainda na antiguidade, por volta de 300 a.C., ligados aos nomes de Aristeu, o Velho, Menaecmus, Euclides de Alexandria, e Apolônio de Perga, que escreveu As Cônicas, um tratado em 8 volumes que suplantou tudo que seus predecessores haviam escrito sobre o tema. Mas, como veremos, muitos estudiosos se dedicaram ao estudo das cônicas ao longo dos séculos posteriores, como Blaise Pascal, e Dandelin.

As cônicas são curvas obtidas a partir da interseção entre um cone e um plano. Apesar de existir outras linhas, estuda-se e costuma-se denominar por curvas cônicas apenas a elipse, a hipérbole e a parábola. Essas curvas estão muito presentes no nosso dia-a-dia, no entanto são poucas as pessoas que as percebem na natureza, nos objetos, na arquitetura, etc. Isso se deve à falta de conhecimento dessas curvas, ou por não as tê-las estudado, ou até pôr atê-las visto de forma insatisfatória e até de modo maçante. Pois bem, sem as cônicas fica difícil descrever a trajetória de um objeto lançando obliquamente no espaço, a trajetória dos planetas em torno de suas estrelas, de alguns corpos celestes, como cometas, que visitam nosso sistema solar uma única vez. Portanto, as cônicas são ferramentas que facilitam a compreensão da natureza, justamente por fazerem parte da natureza, e, por isso mesmo, formam um tema relevante. Nos últimos anos, com o advento do ENEM, Exame Nacional do Ensino Médio, temos percebido que essa parte da geometria tem sido gradativamente esquecida, e muitas vezes nem é apresentada para os estudantes do Ensino Básico.

Este trabalho tem como questão problema, conhecer e caracterizar como o conceito de Cônicas foi sendo desenvolvido até os dias atuais.

É notório que atualmente, no ensino de Matemática, pouca ou nenhuma importância tem sido dada aos conteúdos de Geometria. Segundo Pavanello (1993. p.1), "No Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula". Para Guimarães e Santos (2013, p.1), "Apesar de a geometria ser um ramo importante da matemática, [...], na prática ela não vem recebendo a devida atenção[...]". Ainda segundo os autores, o tema é tão complexo que sua discussão não se distancia do universo acadêmico, e até por segmentos dos governos vinculados à educação, produzindo inúmeros diagnósticos.

Este trabalho procura abordar a temática das Cônicas, partindo da antiguidade, procurando descrever de forma panorâmica, e atentando aos detalhes mais significativos, relatando não apenas o que são as cônicas, e suas propriedades, mas resgatar sua interessante história, vinculando-as a problemas históricos da Matemática.

Esta dissertação tem por objetivo a sistematização e produção de um material bibliográfico sobre o estudo de cônicas, abordando seu desenvolvimento histórico e matemático, assim como suas aplicações nas diversas áreas das ciências e da própria matemática. Especificamente será feito um estudo bibliográfico sobre o surgimento do conceito de Cônicas, definir cônicas e descrever suas características, apresentar algumas aplicações relevantes de cônicas que possam ser abordadas no Ensino Básico e elencar nomes de estudiosos relacionados às cônicas, assim como suas principais contribuições.

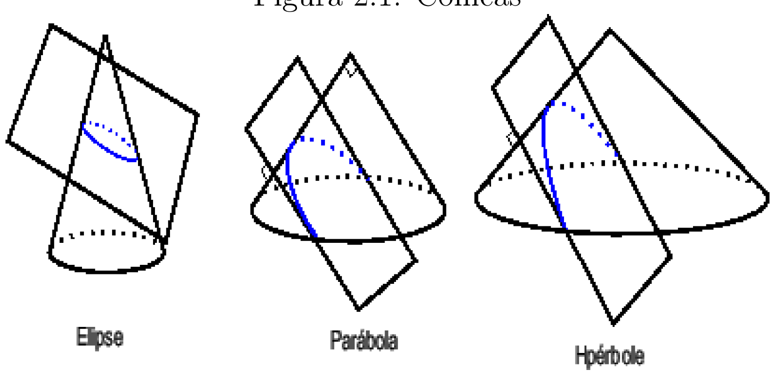
Esta pesquisa é de natureza bibliográfica. Foi realizada uma pesquisa em diversas fontes, objetivando conhecer a origem do conceito de Cônicas em seus aspectos histórico e matemático teórico. Especificamente será feito um estudo a partir dos precursores do tema e seu desenvolvimento ao longo das civilizações, até os tempos atuais.

2 Aspectos Históricos

A história da matemática é apresentada de forma panorâmica por muitos historiadores. Alguns fatos são conflitantes entre autores, outros se assemelham a histórias ou anedotas. Contudo, iremos nos ater aos fatos históricos e às fontes consultadas, considerando que essas são confiáveis no meio científico.

Sendo assim, existe mais de uma versão sobre o surgimento das secções cônicas, numa delas, segundo Boyer (1974) diz-se que essas originaram-se em Atenas, por volta do ano 430 a.C., como resultado dos esforços para se combater uma peste que assolava a cidade. Através do oráculo de Delfos, Zeus, o deus dos deuses, anunciou aos cidadãos que o fim da peste estava condicionado á construção de um novo altar para Apolo cujo tamanho fosse o dobro daquele que já existia, que tinha a forma de um cubo. Todas as tentativas para dobrar o cubo com régua e compasso, que eram os instrumentos usados pelos geômetras, fracassaram porque se dobrassem a medida do lado do cubo, verificavam que octuplicavam seu volume. Somente no séc. XIX verificou-se a impossibilidade de tal construção a partir da régua e do compasso. (RIZZATO, 2001)

Figura 2.1: Cônicas



Fonte: http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node2.html

Segundo Eves (1992), aproximadamente no ano 340 a.C. Menaecmus descobriu as três curvas: parábola, elipse e hipérbole, ver Figura (2.1), conhecidas como tríade menaecmiana. Essas curvas surgiram como resultado de sua tentativa de encontrar uma solução para o problema da duplicação do cubo. Acredita-se que ele tenha descoberto as três curvas seccionando cones retos com planos perpendiculares a uma secção meridiana cujo ângulo era, respectivamente, reto, obtuso ou agudo.

2.1 Antecessores a Apolônio de Perga

Antes de Apolônio viveu Tales de Mileto, filósofo e matemático da Grécia Antiga, sendo este a trazer o *Teorema de Tales*, dando início assim à matemática dedutiva. Para demonstrar seus teoremas, Tales definiu ângulo reto, triângulo isósceles e seus ângulos, ângulos opostos e ângulos congruentes.

Tales, portanto, é considerado o primeiro geômetra grego, conforme a citação:

> A principal fonte referente à geometria grega primitiva é o chamado Sumário Eudemiano de Proclus, que segundo ele, a geometria grega parece ter começado essencialmente com o trabalho de Tales de Mileto na primeira metade do século VI a.C. Esse gênio versátil, considerado um dos "sete sábios" da antiguidade, foi um digno fundador da geometria demonstrativa. A ele está associada a utilização de métodos dedutivos em geometria, residiu temporariamente no Egito, trazendo a geometria em sua volta para a Grécia, onde começou a aplicar à matéria procedimentos dedutivos da filosofia grega. Pela primeira vez um estudioso da geometria se comprometeu com uma forma de raciocínio dedutivo, por mais parcial e incompleto que fosse[...]. (EVES, 1992, p. 7).

Também Pitágoras, da mesma época que Tales, deu grandes contribuições a geometria grega.

> O próximo geômetra grego importante mencionado no Sumário eudemiano é Pitágoras, considerado como o continuador da sistematização da geometria iniciada por Tales, cerca de cinquenta anos antes. Pitágoras nasceu por volta do ano 572 a.C. na ilha de Samos, uma das ilhas do mar Egeu próximas de Mileto, a cidade natal de Tales. É bem possível que Tales e Pitágoras tenham estudado juntos. (EVES, 1992, p. 8).

Dessa forma, a geometria grega antes de Apolônio estava a se diferenciar na sua expressão, usando de raciocínios dedutivos.

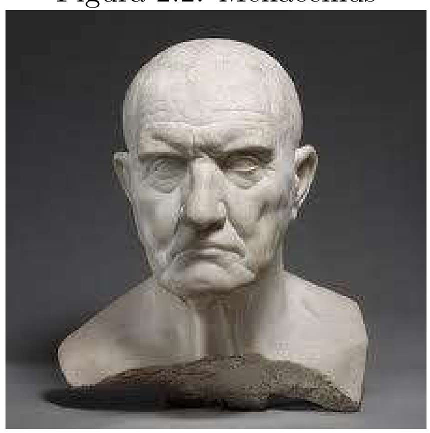
> Os gregos insistiram que fatos geométricos deveriam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos; verdades geométricas deviam ser obtidas no gabinete de estudos, e não no laboratório. Em suma, os gregos transformaram a geometria empírica ou científica dos egípcios e babilônios antigos no que poderíamos chamar de geometria "sistemática" ou "demonstrativa". (EVES, 1992, p. 7).

Dante (2005) confirma esse fato ao relatar que foram gregos como Tales e Pitágoras, os responsáveis pela introdução do raciocínio lógico dedutivo na Matemática e pela sistematização desse conhecimento.

2.1.1 Menaecmus

Menaecmus (380 - 320 a.C.), nascido em Alopeconnesus, Ásia Menor, hoje Turquia, no século IV a.C., foi um astrônomo e importante geômetra grego da Academia de Platão. Ele foi um dos primeiros matemáticos a oferecer uma solução para o problema clássico da duplicação do cubo. Com suas técnicas aperfeiçoou a geometria, contribuindo com ideias originais, fazendo emergir para o mundo prático os conceitos importantes de parábolas, hipérboles e elipses.

Figura 2.2: Menaecmus



Fonte: https://alchetron.com/Menaechmus

Menaecmus, Figura (2.2), foi Discípulo de Eudoxo de Cnido, o astrônomo, e irmão de Dinóstrato, este conhecido por empregar a quadratriz para resolver o problema da quadratura do círculo, um outro problema clássico. Menaecmus foi também um dos tutores de Alexandre, o Grande. Especialista na dedução de propriedades das seções cônicas e outras curvas, foi quem descobriu a elipse (350 a.C.), resolveu o problema da duplicação do cubo e deu os primeiros passos na direção da Geometria Analítica muitos séculos antes de René Descarte (EVES, 2011).

Não se sabe onde morreu Menaecmus, segundo Boyer (1974), ocorreu no século II a.C. em local desconhecido.

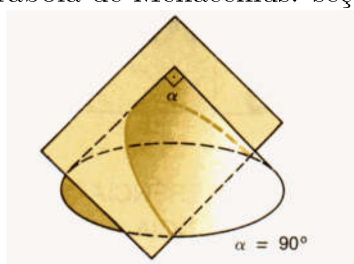
O problema da duplicação do cubo consistia em, a partir de um cubo de aresta unitária, construir um segmento de reta de comprimento x tal que $x^3 = 2$. Na solução que obteve, Menaecmus fez uso de duas curvas criadas por ele: uma parábola e uma hipérbole. Uma terceira curva dessa família, a elipse, apareceu como subproduto de sua invenção. Se hoje essas curvas são chamadas de secções cônicas, deve-se ao grande matemático grego, pois ele as imaginou secionando três superfícies cônicas por meio de um plano perpendicular à geratriz da superfície cônica.

As cônicas segundo Menaecmus

Segundo Boyer (1974), Menaecmus, obteve suas curvas de forma mecânica, e ao contrário do que se faz hoje, ele usava três tipos de cones, conforme o ângulo da superfície cônica, seccionando-os por um plano perpendicular a geratriz do cone:

Primeiro: quando o ângulo é reto, tem-se uma parábola.

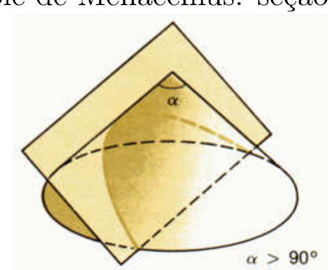
Figura 2.3: Parábola de Menaecmus: seção do cone reto



Fonte: Brolezzi e Talavera

Segundo: quando o ângulo é obtuso, tem-se uma hipérbole.

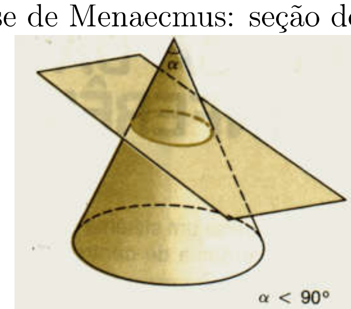
Figura 2.4: Hipérbole de Menaecmus: seção do cone obtusângulo



Fonte: Brolezzi e Talavera

Terceiro: quando o ângulo é agudo, tem-se uma hipérbole.

Figura 2.5: Elipse de Menaecmus: seção do cone acutângulo



Fonte: Brolezzi e Talavera

2.2 Contemporâneos a Apolônio de Perga

No período que viveu Apolônio, viveu também Arquimedes de Siracusa e Euclides de Alexandria, esses sendo os maiores matemáticos da antiguidade clássica. Segundo Eves (2011, p. 10):

> Os três geômetras gregos mais importantes da antiguidade foram Euclides (cerca de 300 a.C.), Arquimedes (287–212 a.C.) e Apolônio (aproximadamente 225 a.C.). Tudo que se fez até hoje em geometria tem sua semente em trabalhos de algum desses três grandes eruditos.

Apolônio de Perga (262 - 190 a.C.), escreveu um tratado definitivo sobre as secções cônicas. No seu trabalho, Apolônio reproduziu os conhecimentos de Menaecmus, e acrescentou centenas de novos teoremas sobre as secções cônicas, obtidos de forma puramente geométrica. Apolônio elevou a Geometria grega de forma e de posição à altura máxima, mas para isso, bebeu nas ideias originais de um dos desbravadores desse tema.

2.2.1 Euclides de Alexandria

Os primeiros estudos sistematizados das cônicas abarcaram as definições iniciais de Menaecmus, e a classificação e nomenclatura dessas curvas seguiram a classificação dos cones usados para as definir. Desse modo, tínhamos a “seção do cone acutângulo”, a “seção do cone obtusângulo” e a “seção do cone reto”, para nos referirmos a elipse, hipérbole e parábola respectivamente. Os termos “acutângulo”, “obtusângulo” e “reto” indicava ângulo entre duas geratrizes opostas no vértice do respectivo cone. Euclides e Arquimedes, também usaram essa nomenclatura, que se manteve quase completamente. As denominações atuais se devem a Apolônio

Segundo Eves (2011) o que Euclides escreveu sobre as cônicas se perdeu. Foram encontradas referências a uma obra de Euclides, num total de quatro livros, em que este aborda o tema das cônicas, cujos conteúdos foram verificados por trabalhos de estudiosos posteriores, notadamente, Arquimedes e Pappus.

Obras posteriores supõem que, como Os Elementos, as Cônicas de Euclides seriam também uma compilação de conhecimentos já existentes, principalmente das anotações perdidas de Aristeu.

As cônicas nesses trabalhos eram caracterizadas através do método de pro-

Figura 2.6: Euclides de Alexandria

Fonte: https://www.infoescola.com/biografias/euclides/

porções, como os postos por Euclides num de seus livros, o Livro V dos Elementos, e daí demonstravam suas propriedades fundamentais. Muitas dessas foram referidas por Arquimedes como presentes nos “Elementos das Cônicas”. Noutro de seus trabalhos, Nos FENÔMENOS, Euclides ainda observa que a “seção do cone acutângulo” é a seção formada por qualquer plano oblíquo cortando qualquer cilindro ou cone, todavia ele não expandiu isso nem generalizou às outras seções cônicas.

Euclides fez pouco avanço nos teoremas específicos no que se refere as secções cônicas, porém estabeleceu no seu trabalho as bases dos desenvolvimentos posteriores mais significativos sobre o tema, esses alcançados por Apolônio e Pappus. Pappus estudou entre os discípulos de Euclides em Alexandria, e ainda usou todo o trabalho Euclides sobre as cônicas como base dos primeiros livros do seu próprio tratado. Além disso, pelo que parece, Apolônio se inspirou no sexto livro dos Elementos de Euclides para dar um tratamento baseado em áreas para caracterizar as cônicas.

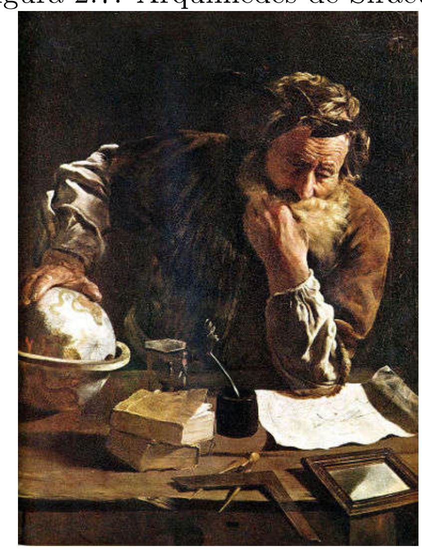
Euclides também seria o primeiro a trabalhar o problema dos lugares geométricos de três e quatro linhas, problema importante abordado por Apolônio, no livro perdido dos Porismas, indicado por Pappus. Este problema foi de grande importância não apenas nas evoluções futuras do tratamento das seções cônicas, mas também no da própria geometria.

Apesar de Euclides abordar, a seu modo, de forma exaustiva o tema das cônicas, os primeiros teoremas concatenados sobre essas curvas, confirmados e provados de forma rigorosa, apareceram nos trabalhos de Arquimedes (c. 287 – 212 a. C.). As contribuições de Arquimedes eram de tal modo definitiva que houve quem acusasse Apolônio de roubar seus teoremas para seu grande tratado, As Cônicas. Arquimedes em sua obra, faz as primeiras referências a afirmações contidas nos “Elementos das Cônicas”, conhecimentos atribuídos a Euclides e a Aristeu, no entanto ele determina de forma brilhante as áreas de elipses e de segmentos parabólicos, estabelecendo inclusive a quadratura da parábola. Arquimedes, no seu trabalho intitulado Sobre Conóides e Esferóides, se dedica a um estudo das superfícies de revolução, incluindo as quádricas, e as suas secções.

2.2.2 Arquimedes

Como visto, a primeira série de teoremas sobre as seções cônicas confirmados apareceram nos trabalhos de Arquimedes. Apesar de ser cerca de 20 anos mais velho que Apolônio, Arquimedes é o único da antiguidade, que pôde fazer frente a este, e por isso, ambos estão numa mesma seção neste trabalho.

Figura 2.7: Arquimedes de Siracusa



Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/arquimedes.htm

Arquimedes de Siracussa(c. 287 – 212 a.C.), ver Figura (2.7), fez contribuições em diversas áreas do conhecimento, como mostra essa pequena lista de seus trabalhos):

1. A medida de um círculo
2. A quadratura da parábola.
3. O contador dos grãos de areia
4. O método
5. Psamites

6. Sobre a esfera e o cilindro.
7. Sobre as espirais.
8. Sobre o equilíbrio das figuras planas.
9. Sobre os cones e os esferoides
10. Sobre os corpos flutuantes.

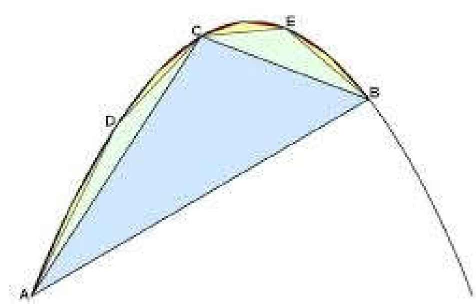
Esses são alguns dos trabalhos atribuídos a Arquimedes. (BOYER, 1974; EVES, 2011).

No tocante as secções cônicas, como já foi visto, não fez mudanças nas denominações, se interessou, no entanto, em determinar propriedades particulares, não de forma sistemática e geral como o fez Apolônio, mas de natureza extremamente fundamentais e rigorosas, como se pode ser visto na quadratura da parábola abaixo.

Quadratura da Párabola

A quadratura da parábola é um tratado sobre geometria plana reunindo vinte e quatro proposições. Nele aparece o teorema: *A área de um segmento parabólico é quatro terços da área do triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto em que a tangente é paralela à base.* Arquimedes faz sua prova utilizando um método geométrico, sobre os qual não entraremos nos detalhes.

Figura 2.8: Segmento parabólico



Fonte: https://sites.google.com/site/matematicaeureka

Na expressão

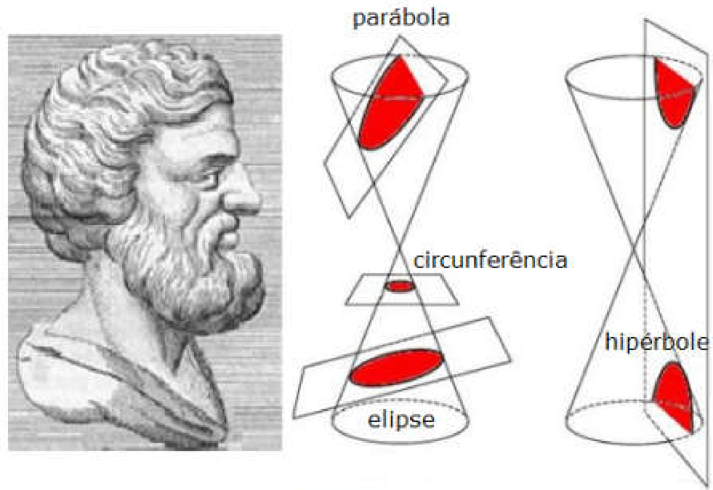
$$S_{ACB} = \frac{4}{3} S_{ABC},$$

S_{ACB} representa a área do segmento parabólico ACC e S_{ABC} representa a área do triângulo ABC, ambos constantes da Figura (2.8).

2.2.3 Apolônio de Perga

Apolônio de Perga, matemático grego que viveu durante os últimos anos do século III até princípios do século II a.C. Autor do insuperável *Tratado das Secções Cônicas*, que é considerado como uma das principais obras científicas da Antiguidade, o que lhe concedeu o direito de ser uma das mais eminentes figuras da ciência grega no campo da geometria pura.

Figura 2.9: Apolônio de Perga



Fonte: https://fatosmatematicos.com/2018/01/13/apolonio-de-perga/

Como já vimos, antes de Apolônio, ver Figura (2.9), a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas de forma independente como secções de três tipos diferentes de cone circular reto, sem que se notasse uma relação de maior proximidade entre as três curvas, que eram imaginadas surgindo da interação de um plano com cada um de três cones, de acordo com o ângulo do vértice: agudo, reto ou obtuso. Apolônio foi o primeiro a mostrar que não seria necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone e que de apenas um único cone era possível obter todas as três espécies de seções, bastando para isso, variar-se a inclinação do plano da secção, percebendo-se assim a relação das curvas umas com as outras.

Portanto, a Apolônio de Perga deve-se o primeiro estudo sistemático e abrangente sobre as cônicas em geral. Ele nasceu em Perga na Ásia Menor, fez estudos em Alexandria na escola platônica dos herdeiros de Euclides. Todavia, sabe-se muito pouco sobre a sua vida, mas o seu trabalho influenciou de forma permanente o desenvolvimento da Matemática, em especial pelo seu célebre tratado *As Cônicas*. Obra composta de oito volumes, constitui um estudo quase exaustivo das secções planas de um cone de revolução. A maestria com que Apolônio faz a demonstração de uma infinidade de teoremas recorrendo apenas aos métodos puramente geométricos de Euclides, até hoje é motivo de Admiração.

O "Pai das Cônicas", Apolônio apresentou pela primeira vez muitas das propriedades dessas curvas, por exemplo: *Se um ramo de uma hipérbole intersecta os dois ramos de uma outra hipérbole, o ramo aposto da primeira hipérbole não encontrará nenhum dos ramos da segunda em dois pontos.*

Apolônio, como citado acima, foi contemporâneo de Arquimedes e é considerado um dos matemáticos gregos de maior originalidade. Boyer (1974) afirma, que "Da Antiguidade Clássica, notáveis matemáticos se destacaram, como Pitágoras, Euclides, Arquimedes. No entanto, quem mereceu dos antigos o glorioso epíteto de "O Grande Geômetra" foi Apolônio. Desafortunadamente, boa parte de seus escritos desapareceram."

Portanto, Apolônio foi e é considerado um dos mais originais e profundos matemáticos da Grécia, assim, não é de se admirar que os estudiosos do assunto afirmem que a Matemática dos nossos dias se deve em grande parte a Apolônio de Perga.

O Professor Jacir J. Venturi se aventurou em fazer o seguinte epítome de As Cônicas de Apolônio, alegando, claro, compreensível superficialidade:

1. As seções cônicas não possuíam uma terminologia apropriada. Foi Apolônio quem introduziu os nomes elipse e hipérbole. A palavra parábola deve-se, provavelmente, à Arquimedes.

2. Pela primeira vez Apolônio mostrou que de um único cone podem ser obtidas a elipse, a parábola e a hipérbole, simplesmente variando a inclinação do plano de seção.

3. Até então, o cone utilizado era de uma só folha. Introduzindo o cone duplo (de duas folhas), Apolônio apresenta a hipérbole como uma curva de dois ramos, que nos é familiar.

4. As propriedades das curvas não diferem conforme sejam obtidas em cones retos ou oblíquos.

5. Embora Apolônio não se reportasse a um sistema de eixos (em Geometria Analítica ditos cartesianos), via de regra, utilizava um par de diâmetros conjugados como

equivalentes aos eixos oblíquos.

6. Apolônio conhecia a hipérbole equilátera, a hipérbole referida às assíntotas, o polo e a reta polar de um ponto externo à cônica.

7. O matemático de Perga descreve um profundo estudo sobre tangentes e normais a uma cônica.

2.3 Período após Apolônio de Perga

Conforme o que descreve Eves (1994), depois de Apolônio, a geometria grega passou a declinar. Vários foram os fatos que antecederam o enfraquecimento da influência grega no campo do conhecimento. No ano 47 a.C., devido a um incêndio na esquadra egípcia ancorada no porto de Alexandria, a biblioteca de Alexandria foi afetada, consumindo cerca de 500 mil textos. Apesar desse fato, Alexandria continuaria a deter a condição de capital cultural do mundo.

Podemos ver também, sobre o declínio da matemática grega, Eves afirmar:

> Com a morte de Apolônio, a época de ouro da Geometria grega chegou ao fim. Os geômetras que se seguiram, pouco mais fizeram do que preencher detalhes e talvez desenvolver independentemente certas teorias cujos germes já estavam contidos nos trabalhos de matemáticos que os antecederam [16]. Dentre esses geômetras destacam-se Menelaus (c. 100 a.C.), Cláudio Ptolomeu (127 - 150 d.C.) e Pappus (c. 300 d.C.), por terem feito grandes aplicações da Geometria. (Eves, 1992, p.11)

Pappus viveu cinco séculos após Apolônio, depois dele, teoremas sobre cônicas apareceriam de forma discreta em trabalhos puntuais como os de Blaise Pascal, no século XVII e Germinal Pierre Dandelin, no século XIX.

2.3.1 Pappus de Alexandria

Depois de um longo período sem que apresentasse um matemático do quilate dos antigos, a Grécia produziu um geômetra de gênio que se debruçou sobre os problemas das cônicas, Pappus de Alexandria (300 – 350). Na maior parte dos seus trabalhos, Pappus se refere aos estudos de seus antecessores. Em obras como *Coletânea* e o *Tesouro da Análise* se depreende o conhecimento indireto e possíveis reconstituições de muitos dos trabalhos perdidos de Euclides, como os Porismas e as Cônicas, além do oitavo livro das

Cônicas de Apolônio, também perdido. Pappus é considerado um grande comentador das obras matemáticas de seus antecessores, e foi numas de suas compilações que apareceu pela primeira vez a propriedade foco – diretriz das cônicas, que ele atribuiu a Euclides e não a Apolônio. (BOYER, 1974; EVES, 2011).

Figura 2.10: Coleção Matemática de Pappus (edição de 1589)

PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.

VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pappus_de_Alexandria

No seu trabalho, *Coleção Matemática*, ver Figura (2.10), um tratado em grego composto em oito livros, de extrema importância, pois, essa obra continha informações inéditas para época e é hoje imprescindível para a histórica da Matemática grega. É possível encontrar nele provas novas e lemas suplementares para as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu. Infelizmente o primeiro, e parte do segundo volume dessa obra perderam-se, mas no que se tem, pode-se encontrar relatos e novas provas e temas suplementares para várias proposições desses grandes estudiosos.

Pappus descobriu vários teoremas precursores da Geometria Projetiva, pesquisou o chamado Problema de Dido ou Isoperimétrico. Pappus tentou generalizar o chamado Problema de Apolônio, e acabou assim dando sua principal contribuição à geometria, discutindo o problema do lugar geométrico de três e quatro linhas, e seus estudos posteriores para mais linhas. Esse problema de lugar geométrico, em linguagem moderna, pode ser exposto desta maneira:

Pede-se o lugar geométrico de um ponto P, sabendo-se que as distâncias p_1, p_2, p_3 e p_4 de P a quatro retas dadas sejam proporcionais, isto é, $p_1p_2 = kp_3p_4$, sendo k uma constante.

A solução do problema é, como concluiu Apolônio, uma seção cônica. Para as versões do problema com 5, 6 ou mais linhas, devido a não haver solução com uso de apenas régua e compasso, o que Descartes vai provar no século XVII, Pappus encontrou soluções aproximadas, obviamente. Apesar da beleza extrema do tema, e do rico esforço de Pappus, seus contemporâneos não conseguiram ou não quiseram avançar com o desenvolvimento de seus trabalhos.

Já no século XVII, num movimento caracterizado por uma busca de inspiração nos autores clássicos, após recuperar os textos de Pappus, Descartes atacou o então chamado "Problema de Pappus". Inspirado por novas ideias, apoiado por uma álgebra mais maleável, Descartes desenvolve os embriões da geometria analítica, e não apenas resolve o problema de 4 linhas na sua Geometria de 1637, mostrando que esse era redutível à solução de uma equação de segundo grau, tendo como caso particular linear o problema de 3 linhas, mas também mostra que, para 5 linhas, a solução correspondente a resolver uma equação de terceiro grau, impossível portanto, construir a figura correspondente com régua e compasso. Descartes fez linhas corresponder a equações, inclusive as de graus mais elevados, e assim nascer o método cartesiano.

Vemos assim que as conclusões de Pappus foram diretamente ponto de partida para a invenção da geometria analítica por Descartes, aproximadamente treze séculos depois. Portanto, pode-se sentir na matemática de nossos dias a influência das ideias advindas com as cônicas.

2.3.2 Germinal Pierre Dandelin

Germinal Pierre Dandelin (1794 - 1847) foi um matemático belga, professor, militar e engenheiro. Seu pai, era francês, mas sua mãe veio de Hainaut, hoje, na Bélgica. Dandelin estudou em Ghent, em seguida, em 1813, entrou para a École Polytechnique, em Paris. Ao longo de sua atribulada vida política, que influenciou sobremaneira sua carreira científica, Dandelin tornou-se cidadão holandês, e, quando forças políticas contrárias às suas dominaram a França, ele se mudou para a Bélgica.

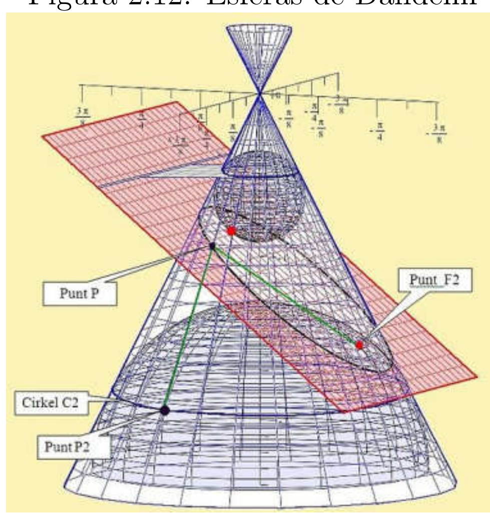
Figura 2.11: Germinal Dandelin

Fonte: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Dandelin.html

Desde cedo Dandelin teve seus interesses matemáticos voltados para a geometria, é dele o importante teorema de 1822 vinculado às secções cônicas:

Consideremos uma elipse, obtida como intersecção de um plano α *com um cone de revolução* C *, e duas esferas tangentes ao plano e ao cone no seu interior. Então os dois pontos de contato do plano com as esferas são os focos da elipse.*

Figura 2.12: Esferas de Dandelin



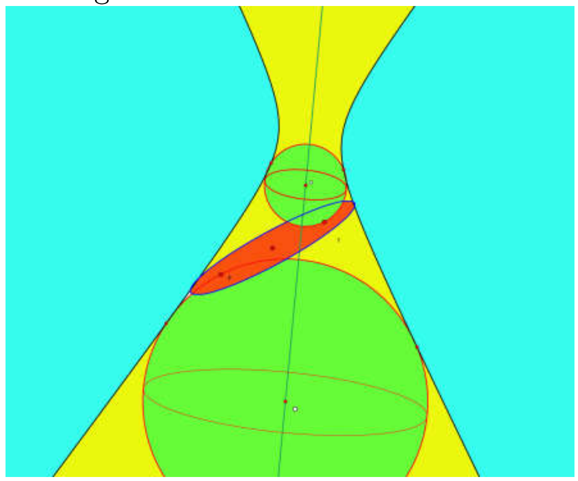
Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dandelin_spheres.jpg

Em 1826 ele fez a generalização desse teorema hiperbolóide de revolução, ao invés de um cone:

Consideremos duas esferas tangentes a um hiperbolóide de revolução, e um plano α *, tangente a essas esferas nos pontos* F *e* f *. Então o plano* α *intersecta o hiperbolóide segundo uma cónica de focos* F *e* f *.*

Dandelin também contribuiu para a projeção estereográfica, estática, álgebra e teoria da probabilidade. Os teoremas de Dandelin foram os últimos teoremas relevantes relacionados a visão clássica das cônicas, sendo ele, o extremo de uma origem começada

Figura 2.13: Esferas de Dandelin



Fonte: http://cmup.fc.up.pt/cmup/pascal/Dandelin.html

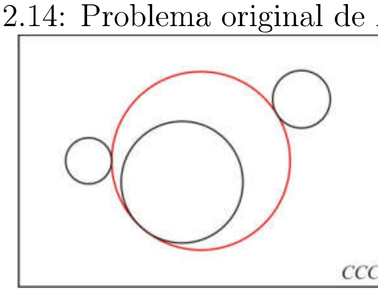
por Menaecmus. (BOYER, 1974; EVES, 2011)

2.4 O problema de Apolônio

O problema de Apolônio e a respectiva solução vêm numa das obras perdidas de Apolônio, *Sobre tangências*, que é uma daquelas da qual só temos a descrição feita por Pappus. Este problema consiste no seguinte:

Dados sucessivamente três elementos quaisquer entre pontos, retas e círculos, com certas posições, traçar um círculo que seja tangente a cada um desses elementos.

Figura 2.14: Problema original de Apolônio



Fonte: https://www.obaricentrodamente.com/2013/04/os-10-problemas-de-apolonio.html

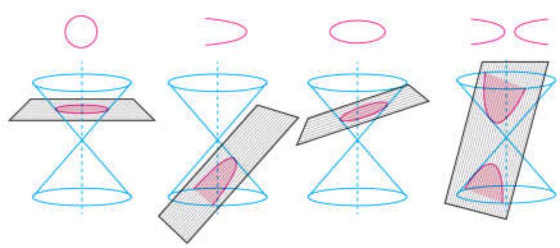
Na figura 2.14, vemos que uma circunferência é a solução para problema original de Apolônio.

Originalmente, segundo Eves (1994), os elementos eram três círculos, ver Figura (2.14), no entanto, por ser um problema instigante, geômetras posteriores deram todas as soluções possíveis, num total de 10.

3 Forma analítica das cônicas

As cônicas podem ser definidas de três formas, conforme consideremos a geometria espacial, a plana, ou a analítica.

Figura 3.1: Seções do Cone: Círculo, Elipse, Parábola e Hipérbole



Fonte: http://pensevestibular.com.br/category/topicosdematematica/geometria-analitica/conicas

Secções de um cone por um plano (Geometria Espacial)

1. ELIPSE: plano corta somente um dos ramos do cone e não é paralelo à geratriz (forma uma figura finita);

2. HIPÉRBOLE: plano corta os dois ramos do cone; as partes de "baixo" e de "cima" (forma uma figura infinita).

3. PARÁBOLA: plano corta somente um dos ramos do cone e é paralelo à geratriz (forma uma figura infinita).

Lugar geométrico (Geometria Plana)

1. ELIPSE: Lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias até dois pontos F_1 e F_2 é constante.

2. HIPÉRBOLE: Lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença, em valor absoluto, das distâncias até dois pontos F_1 e F_2 é constante.

3. PARÁBOLA: Lugar geométrico dos pontos do plano cuja a distância até um ponto F é igual a distância até uma reta r.

Soluções de equação polinomial do segundo grau (Geometria Analítica)

Na geometria analítica plana, as cônicas são dadas como soluções da seguinte equação polinomial do segundo grau a duas variáveis:

$$\text{Cônica} = \{(x, y) \in R^2 \text{ tais que } \quad Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0\} \tag{3.1}$$

A classificação das soluções desse polinômio do segundo grau em x e y, equação 3.1, é feita em duas etapas: eliminação do termo bxy, por rotação; eliminação dos termos lineares, por translação.

3.1 René Descartes

René Descartes, no século XVII lança sua Geometria, um apêndice de O Método, na qual aborda de forma genial o problema de Pappus, derivado do problema de Apolônio, e o resolve com maestria, mostrando assim o poder que tinha a nova forma de abordar os problemas geométricos através da álgebra.

Figura 3.2: René Descartes

Fonte: https://fr.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

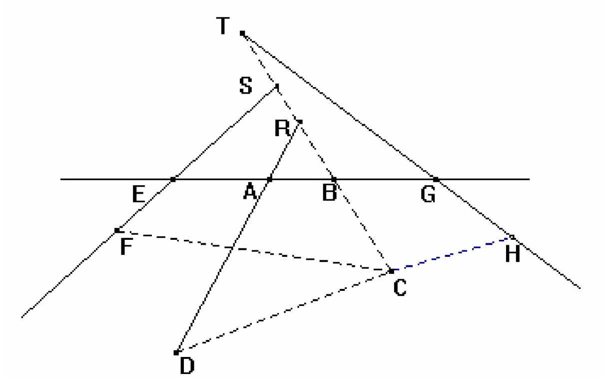
Segue uma apresentação do problema, acompanhada da solução de Descartes.

Problema de Pappus:

Sejam dadas as quatro linhas AB, AD, EF, GH, encontrar um ponto C tal que, dados ângulos x, y, z e t, linhas possam ser traçadas de C até AB, AD, EF, GH fazendo ângulos z, y, z, t respectivamente, tal que $CB \cdot CF = CD \cdot CH$, veja Fig. 3.3. *Mais ainda, traçar e conhecer a curva contendo tais pontos.*

Descartes inova no tratamento desse problema reduzindo-o a duas variáveis, o que permite, atribuindo-se valores a uma delas, determinar os valores correspondentes da outra variável e, a partir daí, conhecer o lugar geométrico dos pontos.

Figura 3.3: Problema de Pappus



Fonte: (VAZ, 2010)

Solução. Pela primeira vez, Descartes aplica seu método na resolução desse problema:

> Primeiramente, supondo o problema resolvido e, para sair da confusão de todas estas linhas, considero uma das dadas e uma das que há que encontrar, por exemplo, AB e CB, como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Designe por x o segmento de linha AB compreendido entre os pontos A e B; e seja CB designado por y; e prolonguem-se todas as demais linhas até que cortem também estas duas, prolongadas se necessário e se não lhe são paralelas; como se vê elas cortam a linha AB nos pontos A, E, G e a linha BC nos pontos R, S, T. Ora bem, como todos os ângulos do triângulo ARB são dados, a proporção dos lados AB e RB é também dada, e indico-a como de z para b; de maneira que representando AB por x, RB será bx/z e a linha total CR será $y+bx/z$, pois o ponto B cai entre C e R; se R caísse entre C e B seria $CR = y - bx/z$ e se caísse entre B e R, seria $CR = -y + bx/z$. Analogamente, os três ângulos do triângulo DRC são dados e, por conseguinte, também a proporção que há entre os lados CR e CDF, indico como z para c, de modo que sendo $CR = y+bx/z$, será $CD = cy/z+bcx/z^2$. Após isto, como as linhas AB, AD, e EF são dadas em posição, a distância entre os pontos A e E também é dada e, designando- as por k, ter-se-á EB igual a $x+k$; que seria $k - x$ se o ponto B caísse entre E e A; e $-k + x$ se E caísse entre A e B. E como todos os ângulos do triângulo ESB são dados, e estabelecendo que BE está para BS assim como z está para d, tem-se: $BS = (dk + dx)/z$ e a linha CS é $(zy + dk + dx)/z$. Se o ponto S caísse entre B e C seria $CS = (zy - dk - dx)$: e quando C cai entre B e S teremos $CS = (-zy + dk + dx)/z$. Além disso os três ângulos do triângulo FSC também são conhecidos, e portanto, é dada a proporção de CS para CF, que z para e, e será $CF = (ezy+dek+dex)/z^2$. Analogamente, AG ou l é dada e BG é $l - x$, pois no triângulo BGT é também conhecida a proporção BG: $BT = z/t$, teremos: $BT = (fl - fx)/z$, sendo $CT = (zy + fl - fx)/z$. Agora, como a proporção de TC para CH está dada pelo triângulo TCH, fazendo-a como z para g, tem – se $CH = (gzy + fgl - fgx)/z^2$ ". (DESCARTES apud VAZ, 2010 p.13 e 14.)

Conforme a solução de Descartes, substituindo em $CB.CF = CD.CH$, encontramos, na nomenclatura atual, uma equação do segundo grau em x e y. Atribuindo valores a qualquer uma das variáveis, encontramos o correspondente valor da segunda. Isso nos permite determinar uma infinidade de pontos e, a partir deles poderemos construir a curva que representa o lugar geométrico.

Essa resolução do problema de Pappus dada por Descartes é reconhecida como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica.

3.2 Equações cartesianas das cônicas

As cônicas são curvas planas obtidas da interseção de um cone circular com um plano, e sendo dividas em cônicas não-degeneradas, que seriam a elipse, hipérbole e parábola, e as cônicas degeneradas que incluem um único ponto e um par de retas. A Circunferência, é um caso particular de elipse, como sabemos, quando os focos coincidem com o centro.

Entre os muitos tipos de equações que uma cônica pode ter, a depender do sistema que se toma por referência, seja o polar, um par de retas concorrentes, entre outros, vamos abordar suas equações no sistema cartesiano ortogonal, por ser esse sistema apresentado aos nossos estudantes desde o Ensino Fundamental.

Pois então, dito isso, chamamos de Cônica o conjunto de pontos no plano cartesiano ortogonal que se estabelecem a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.2}$$

onde esta equação é completa quando todos os termos A, B, C, D e E são reais e não nulos. É possível provar que a equação 3.2 represetará uma elipse, hipérbole ou parábola conforme o fator $B^2 - 4AC$ seja nulo, positivo ou negativo.

De acordo com isso, a equação 3.2 respeita a seguinte correlação:

a) Se $B^2 - 4AC = 0$, então tem-se uma parábola;

b) Se $B^2 - 4AC > 0$, então tem-se uma hipérbole;

c) Se $B^2 - 4AC < 0$, então tem-se uma elipse.

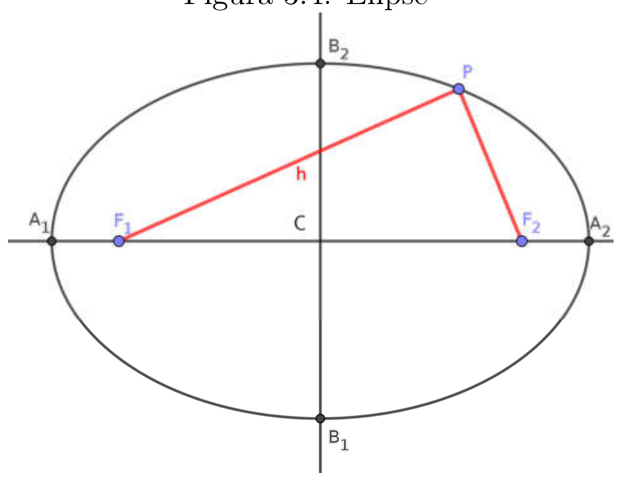
3.2.1 Elipse

Definição 3.1. A Elipse é formada pelos pontos P no plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2, que são os focos, é constante

Ou seja, se $F_1F_2 = 2c$, então a elipse é o conjunto de todos os pontos P tais que:

$$PF_1 + PF_2 = 2a, \quad \text{com} \quad a > c. \tag{3.3}$$

Figura 3.4: Elipse



Fonte: Da autoria

São seus elementos:

- C é o centro
- A_1, A_2, B_1 *e* B_2 *vertices*
- F_1 *e* F_2 *focos*
- $\overline{A_1A_2} = 2a$ eixo maior
- $\overline{B_1B_2} = 2b$ eixo menor
- $\overline{F_1F_2} = 2c$ distância focal

Proposição 3.1. *Se os focos da* ***elipse*** *são* $F_1 = (-c, 0)$ *e* $F_2 = (c, 0)$ *então sua equação é:*

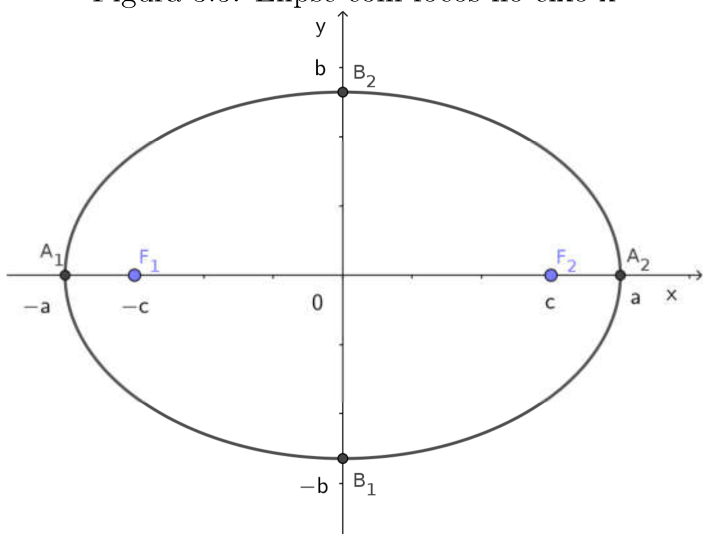
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Proposição 3.2. *Se os focos da **elipse** são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ então sua equação é:*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Nestes dois casos temos que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Figura 3.5: Elipse com focos no eixo x



Fonte: Da autoria

Demonstração: Sabemos que a elipse, figura 3.5, é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ que satisfazem a equação 3.3 da definição. Portanto, temos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo os termos, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

Isolando o radical

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Dividindo por 4 e elevando ao quadrado

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2 \tag{3.4}$$

Mas como $a^2 - c^2 = b^2$, a equação 3.4 fica assim:

$$b^2x^2 + c^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.5}$$

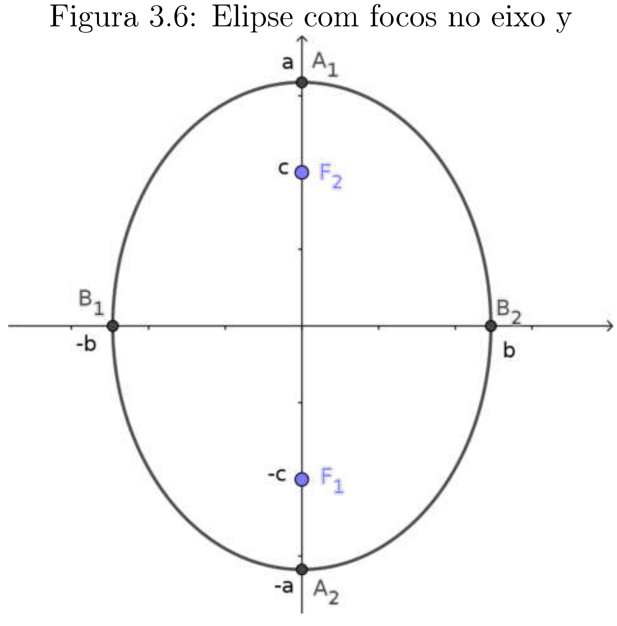
■

A equação 3.5 é denominada **equação canônica** ou **equação reduzida** da elipse que tem centro na origem do sistema cartesiano e focos localizados no eixo x.

De forma análoga, pode-se mostrar que uma elipse que tem centro na origem e focos no eixo y, vide figura 3.6, tem equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{3.6}$$

Figura 3.6: Elipse com focos no eixo y



Fonte: Da autoria

A excentricidade da elipse é o valor $e = \dfrac{c}{a}$, como $c < a$ a excentricidade será um valor real não negativo menor que 1. Note que quando $F_1 = F_2$, a elipse se torna uma circunferência de raio a. Em última análise a elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma reta geratriz e que corta apenas uma das folhas da superfície.

Exemplo: Dada a elipse de equação $16x^2 + 9y^2 = 144$, calcule sua equação canônica e sua excentricidade.

a) Para determinar a equação reduzida dessa cônica deve dividir todos os membros por 144:

$$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144},$$

o que nos dá

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) Da equação reduzida obtemos:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

e

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3.$$

Logo,

$$c^2 = a^2 + b^2 = 7,$$

ou seja, $c = \sqrt{7}$ e, consequentemente,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

3.2.2 Hipérbole

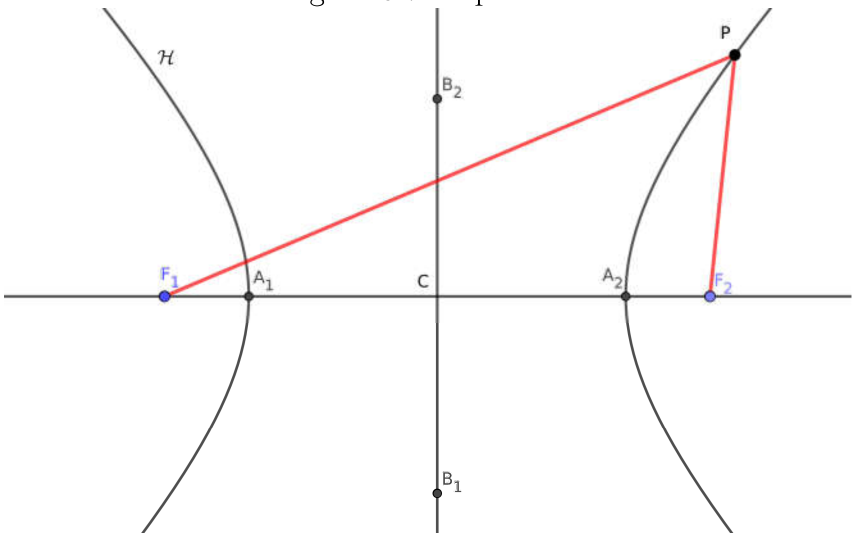
Definição 3.2. A Hipérbole é formada por um conjunto de pontos $P = (x, y)$ do plano, onde o módulo da diferença entre as distancias de P entre os dois pontos fixos F_1 e F_2, denominados focos, é constante.

Em outras palavras a hipérbole é uma curva com dois ramos, onde o valor absoluto pode ser desconsiderado desde que notemos a diferença entre a maior e a menor distância. Então:

$$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 2a \; em \; que \; a < c$$

Seus elementos são:

Figura 3.7: Hipérbole



Fonte: Da autoria

- C é o centro;
- A_1, A_2 são os vértices;
- F_1 e F_2 são os focos;
- $\overline{A_1A_2} = 2a$ é o eixo real;
- $\overline{B_1B_2} = 2b$ é o eixo imaginário;
- $\overline{F_1F_2} = 2c$ é a distância focal;
- Relação notável do triângulo CA_2B_2: $c^2 = a^2 + b^2$.

Proposição 3.3. *A equação de uma hipérbole que tem como focos os pontos* $F_1 = (-c, 0)$ *e* $F_2 = (c, 0)$ *é:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demonstração: A hipérbole é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$dist(P, F_1) - dist(P, F_2) = \pm 2a.$$

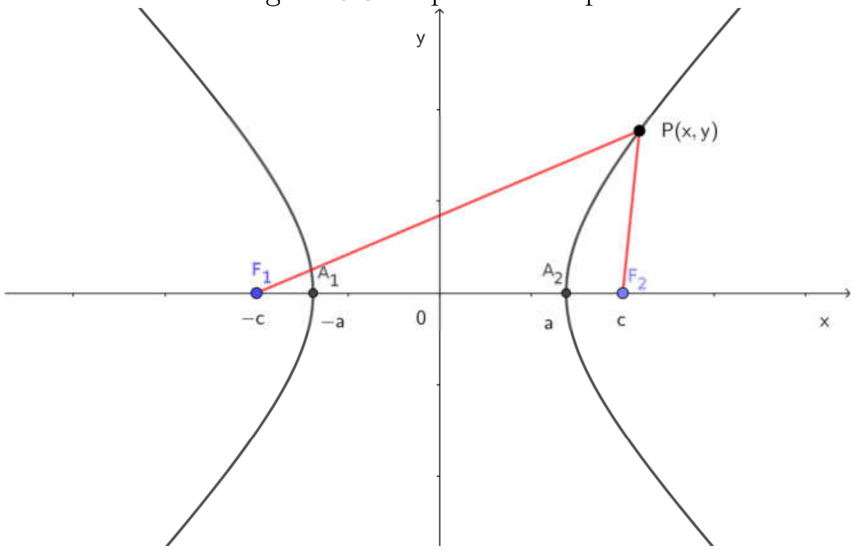
Assim,

$$\left\|\overline{F_1P}\right\| - \left\|\overline{F_2P}\right\| = \pm 2a.$$

Nesse caso, temos que

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Figura 3.8: Hipérbole no plano cartesiano



Fonte: Da autoria

e, elevando-se ambos os membros ao quadrado e fazendo-se as devidas simplificações, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como a < c, temos $c^2 - a^2 > 0$. Portanto, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e dividindo-se ambos os membros desta última igualdade por $-a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

■

Isolando-se y na equação da hipérbole obtemos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Para $x > 0$, pode-se escrever

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Quanto maior o valor de x, mais próximo de 1 fica o radical no segundo membro. Assim, quando $x \to \infty$, $y \to \pm\frac{b}{a}x$. O mesmo ocorre para $x < 0$. As retas

$$r_1 : y = \frac{b}{a}x \qquad \text{e} \qquad r_2 : y = -\frac{b}{a}x$$

são denominadas de **assíntotas** da hipérbole.

Os pontos A_1 e A_2 são chamados de vértices da hipérbole e a reta que passa pelos focos é chamada de **eixo focal**. A excentricidade é $e = \frac{c}{a}$.

Exemplo: Dada a hipérbole de equação $16x^2 - 25y^2 = 400$, pede-se que se determinem sua equação canônica e sua excentricidade.

a) Didividindo-se ambos os membros por 400, obtemos

$$\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400},$$

o que nos dá

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) Da equação reduzida obtemos que a = 5 e b =4. Assim,

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41}$$

e, consequentemente,

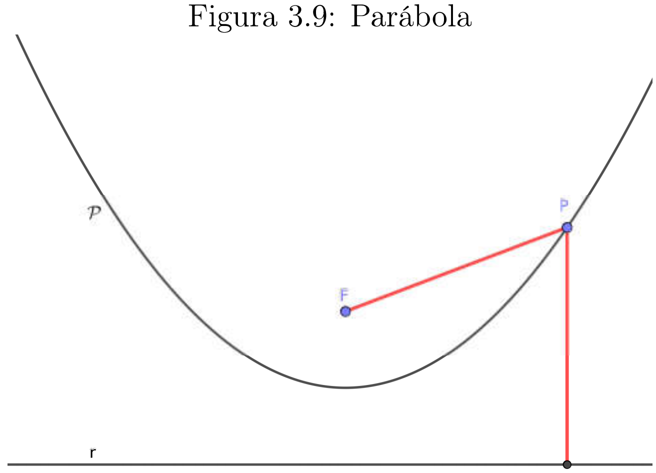
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5}.$$

3.2.3 Parábola

Definição 3.3. Uma parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano equidistantes de uma reta r e de um ponto F, denominado foco, não pertencente a r. Assim,

$$dist(P, F) = dist(P, r).$$

Figura 3.9: Parábola



Fonte: Da autoria

Proposição 3.4. *A equação de uma parábola de foco $F = (p, 0)$ e reta diretriz $r\colon x = -p$ é*

$$y^2 = 4px$$

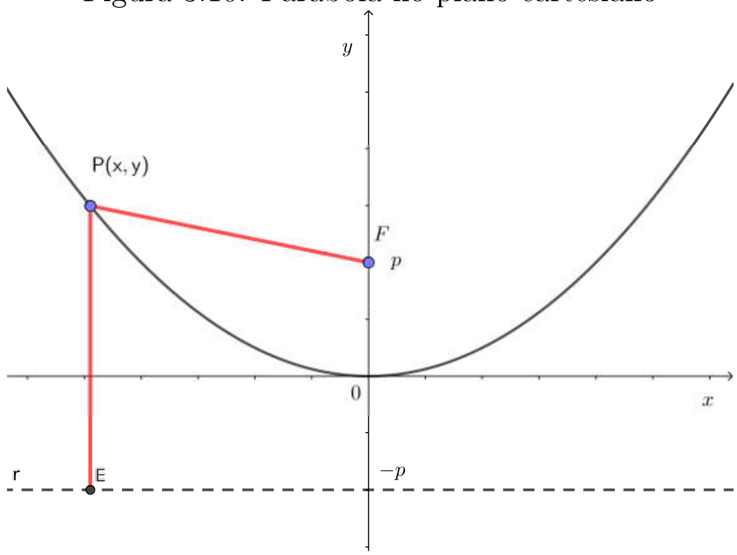
Proposição 3.5. *A equação de uma parábola de foco $F = (0, p)$ e reta diretriz $r: y = -p$ é*

$$x^2 = 4py$$

Demonstração: A parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$, tais que

$$dist(P, F) = dist(P, r)$$

Figura 3.10: Parábola no plano cartesiano



Fonte: Da autoria

Neste caso, denotando por P' o ponto $(0, p)$, temos que

$$dist(P, r) = dist(P, P')$$

e, consequentemente,

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p))^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p)^2},$$

fornecendo-nos

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2,$$

de onde se extrai

$$x^2 = 4py$$

O outro caso é análogo. ■

O ponto P_0 de uma parábola mais próximo de sua reta diretriz é denominado de **vértice** da parábola.

Exemplo: Dada a parábola de equação $y^2 = -8x$, calcular as coordenadas do seu foco.

Solução: Sendo x o eixo de simetria, temos $F = (p, 0)$. A equação $y^2 = -8x$ é da forma $y^2 = 4px$ e, comparando-se os coeficientes, temos que

$$4p = -8 \Rightarrow p = -2.$$

Então, $F = (-2, 0)$.

3.3 Definição das cônicas conforme a excentricidade

Denomina-se cônica o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão entre as distâncias a um ponto fixo F e a uma reta fixa d é igual a uma constante não negativa e. O ponto fixo F é chamado de **foco**, a reta fixa d de **diretriz** e a razão constante e de **excentricidade** da cônica.

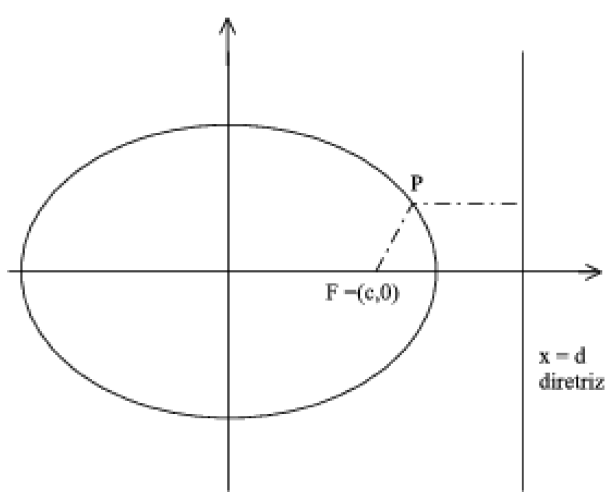
Veremos adiante que:

(i) Se $e = 1$, então é uma parábola.

(ii) Se $0 < e < 1$, então é uma elipse.

(iii) Se $e > 1$, então é uma hipérbole.

Figura 3.11: Cônica definida conforme a excentricidade



Fonte: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_excentricidade/excen_teoria.html

Proposição 3.6. *Sejam fixados no plano uma reta r e um ponto F que não pertence a r. O conjunto Γ dos pontos $P=(x,y)$ do plano tais que*

$$dist\,(P,F) = e \cdot dist\,(P,r)\,,$$

onde $e>0$ é uma constante, é uma cônica.

Demonstração: Do que vimos, se $e=1$, então Γ é uma parábola. Consideremos, pois, o caso em que $e>0$, $e\neq 1$. Assim, fazendo-se $d = dist(F,r)$, tomemos um sistema de eixos no qual r seja a reta vertical $r\colon x=\dfrac{p}{e^2}$ e F tenha coordenadas $(p,0)$. Teremos, então, $p=\dfrac{de^2}{1-e^2}$ se a reta r estiver à direita de F e $p=\dfrac{de^2}{e^2-1}$ se a reta r estiver à esquerda de F. A igualdade

$$dist\,(P,F) = e \cdot dist\,(P,s)$$

onde $P=(x,y)$, pode ser colocada soba forma

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = e\left|x-\frac{p}{e^2}\right|.$$

Elevando-se ambos os membros desta igualdade ao quadrado, após simplificações temos

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2 = p^2\left(\frac{1}{e^2-1}\right)$$

que pode ser escrito na forma

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2\left(1-e^2\right)}{e^2}} = 1$$

Se $0<e<1$, esta é a equação de uma elipse e, se $e>1$, será de uma hipérbole. ■

3.4 Rotação e translação das cônicas

Proposição 3.7. (Rotação) *Consideremos um sistema cartesiano com coordenadas ortogonais xOy, onde se mantém fixa a origem O. Faz-se uma rotação nos eixos Ox e Oy de um mesmo ângulo θ no sentido anti-horário para que, dessa maneira, obtenhamos um novo sistema $x'Oy'$. Se (x',y') são as coordenadas de (x,y) neste novo sistema, então*

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta,$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

Exemplo: A equação

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

representa uma elipse no sistema xOy. Calcule a equação após a rotação de eixos de $\theta = 45^o$

Solução: Temos que

$$x = x' \cos 45^o - y' \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

e que

$$y = x' \sin 45^o + y' \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Substituindo x e y por seus valores na equação dada temos:

$$5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right]^2 + 6\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right] + 5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right]^2 - 8 = 0$$

Desenvolvendo e simplificando, temos:

$$4x'^2 + y'^2 = 4.$$

Proposição 3.8. (Translação) *No plano cartesiano xOy um ponto $O' = (x_0, y_0)$, que introduza um novo sistema $x'O'y'$ de tal modo que O' seja a nova origem e o eixo $O'x'$ tenha o mesmo sentido e direção de Ox e $O'y'$ tenha o mesmo sentido e direção de Oy. A fórmula de translação é:*

$$x = x_0 + x'$$

$$y = y_0 + y'$$

Exemplo: Considere a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

no sistema xOy. então é pedido para que se realize uma translação de eixo de modo que a nova origem seja $O' = (3, 4)$ e se calcule a nova equação para a circunferência.

Solução: Usando a fórmula de translação, obtemos

$$x = x' + 3y = y' + 4$$

Substituindo x e y na equação da circunferência, temos:

$$(x' + 3)^2 + (y' + 4)^2 - 6(x' + 3) - 8(y' + 4) + 21 = 0$$

Desenvolvendo, obtemos

$$x'^2 + y'^2 = 4.$$

4 Ensino e Construções das Cônicas

Dada a relação estreita da matemática com a história das civilizações e da própria humanidade, muitos fatos são desconhecidos ou tem sua origem associada a algum fato cuja explicação beira o fantasioso e com forte apelo místico. Fatos como a dúvida da existência do próprio Pitágoras é notório, assim como a motivação pela origem do estudo das cônicas. (EVES, 1994; BOYER, 1974; ROQUE, 2012).

> Diz-se que os deuses enviaram uma peste ao povo de Atenas. O povo então enviou uma delegação ao oráculo de Delos para indagar sobre o que poderia ser feito para apaziguar os deuses. Foi lhes dito que, se dobrassem o tamanho do altar cúbico de Apolo, a peste cessaria. Eles então construíram um novo altar, em que as arestas eram o dobro das arestas do altar antigo. Mas, como as exigências dos deuses não foram satisfeitas, a peste continuou. A história não revela o que acabou sendo feito para apaziguar os deuses, mas é evidente que a peste acabou deixando a cidade. (EVES, 1994, p.34)

As cônicas, apesar de terem uma origem ligada a resolução de um problema prático, após serem sistematizadas por Apolônio, não se encontrou aplicações de imediato. No entanto, como se sabe, constituem hoje uma ferramenta essencial para muitas áreas do conhecimento moderno.

Suas inúmeras propriedades, unidas a suas formas de estética mais complexa que a circunferência, fez com que geômetras de alto escopo se dedicassem, ao longo dos séculos, ao seu estudo. Hoje, mesmo com fartos exemplos de aplicações práticas, as cônicas ainda não constituem um tema essencial no Ensino Básico brasileiro, conforme podemos ver nesta passagem de orientação para o estudo da geometria nos PCN+ Ensino Médio (BRASIL, 2002):

> mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe. Para isso, o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1^o e 2^o graus e seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas. (BRASIL, 2002. p 124)

Sabendo da importância da matemática, a escolha de seus conteúdos precisa considerar diferentes propósitos para a formação do estudante de Ensino Básico, pois dele espera-se:

> que os alunos saibam usar a matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da matemática no desenvolvimento científico e tecnológico." (BRASIL, 2006, p.69)

É nesse sentido que julgamos o tema deste trabalho relevante, pois como afirma Boyer:

> Foi a Matemática Pura de Apolônio que permitiu, cerca de 1800 anos mais tarde, o *Principia* de Newton; este, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível. (BOYER, 1974, p. 114).

A importância das cônicas é assinalada em obras brasileiras, como podemos ver nesta passagem:

> Séculos mais tarde, a obra de Apolônio teria importantes aplicações nos estudos de astronomia de Kepler e na teoria mecânica de Newton. Trata-se de um exemplo notável de como uma teoria matemática produzida a partir de motivações puramente filosóficas e estéticas pode se revelar fundamental para o avanço global da ciência e da técnica (MOL, 2013, p.56)

Há muitas formas de abordar esse tema, algumas de suas propriedades podem ser verificadas fisicamente, ou com auxílio de material variado. No entanto, como vem ocorrendo com a geometria de maneira geral, que já não é abordada de forma clássica, o tema das cônicas tem definhado ao longo dos anos, quase sumindo, ou desaparecendo completamente do rol de conteúdo vistos no Ensino Básico. Para Venturi (2018) citando Leibniz, Apolônio e Arquimedes tem grande destaque nas obras e feitos de outros pensadores matemáticos.

Portanto, vemos o quão importante é trazer à tona esse assunto, não apenas como mero conceito, mas em abordagem que revela um pouco de sua rica história, assim como fazendo uma apresentação, mesmo que breve, das mentes por trás do desenvolvimento de suas propriedades e aplicações.

As cônicas podem ser obtidas hoje de inúmeras formas. A seguir, mostramos como construir as cônicas, com base em Hartung (2018), onde há uma proposta experimental simples para construir as cônicas (parábola, elipse e hipérbole) usando régua, esquadro, fio, madeira e prego. Pode-se verificar as características e propriedades das cônicas nesses modelos experimentais. Facilmente passíveis de exploração não só por professores, mas principalmente por alunos. Cabendo ao docente o ajuste às atividades a serem desenvolvidas em sala e fora dela.

4.1 Desenhando as cônicas

Nesta seção é proposta uma forma experimental simples para construção das cônicas (parábola, elipse e hipérbole) com régua, esquadro, fio, madeira e prego. Pode-se verificar as características e propriedades das cônicas nesses modelos experimentais.

4.1.1 Uma construção da elipse

Material necessário

1. Uma cartolina;
2. Uma prancha de compensado de 40 x 40 cm;
3. Dois pregos;
4. Martelo;
5. Lápis;
6. Barbante.

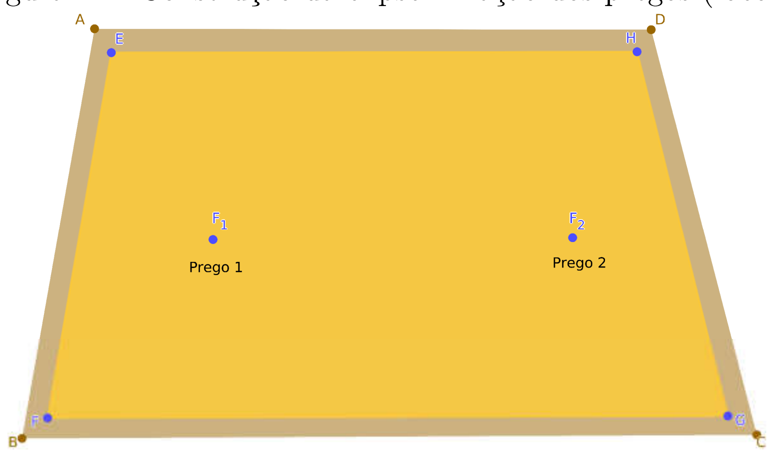
Etapas da construção

1. Cola-se a cartolina $EFGH$ no compensado $ABCD$, conforme a figura 4.1
2. Fincam-se dois pregos, que serão os focos da elipse, conforme a figura 4.2.
3. Fixam-se as pontas de um pedaço de barbante maior que F_1F_2 nos pregos, conforme a figura 4.3.

Figura 4.1: Construção da elipse: colando a cartolina

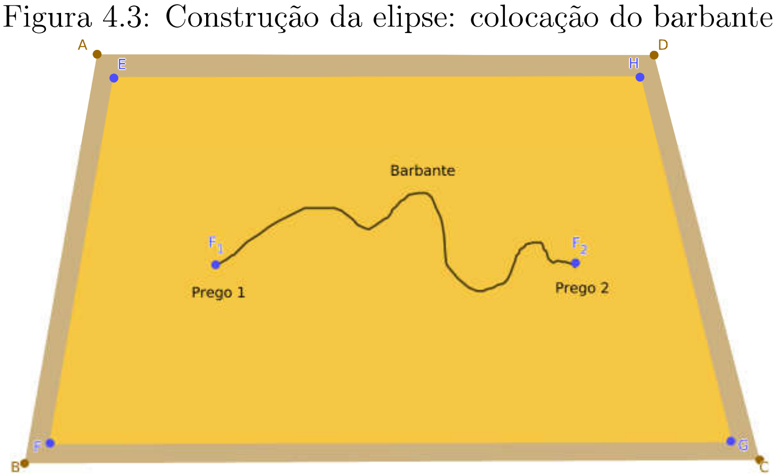
Fonte: Da autoria

Figura 4.2: Construção da elipse: fixação dos pregos (focos)



Fonte: Da autoria

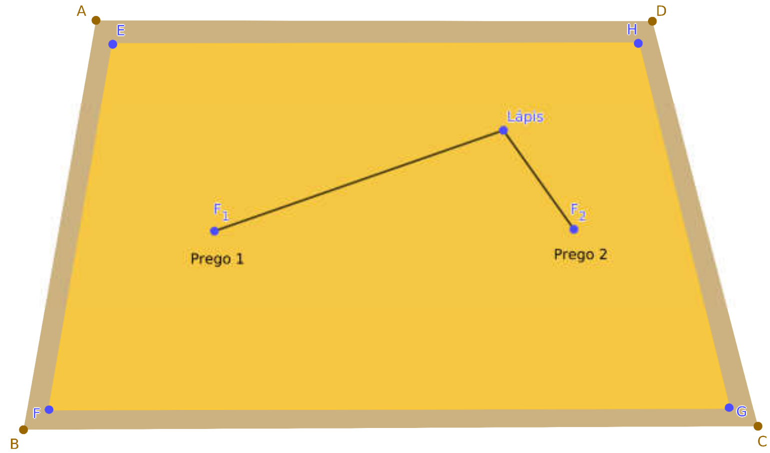
Figura 4.3: Construção da elipse: colocação do barbante



Fonte: Da autoria

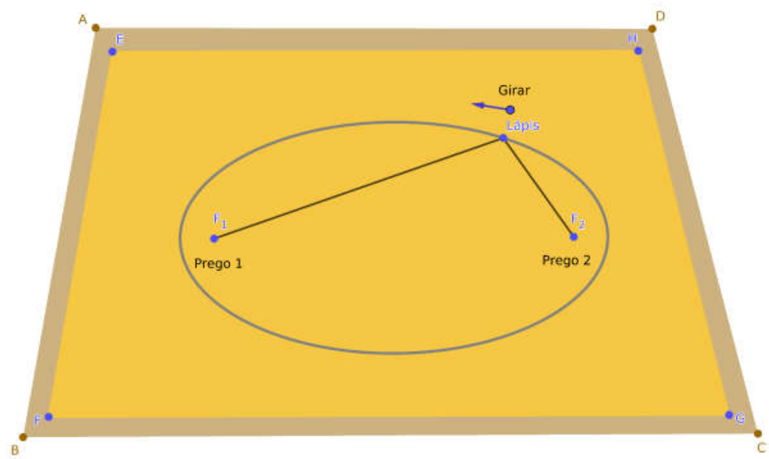
4. Posiciona-se um lápis na cartolina tensionando o barbante com sua ponta, conforme a figura 4.4

Figura 4.4: Construção da elipse: colocação do barbante



Fonte: Da autoria

Figura 4.5: Construção da elipse: desenhando a elipse



Fonte: Da autoria

5. Segurando-se firmemente o lápis tensionando o barbante, faz-se um giro de $360\,°$, conforme a figura 4.5

4.1.2 Uma construção da hipérbole

Material necessário

1. Uma cartolina;
2. Uma régua de 30 cm, preferencialmente uma régua que possua furos em suas extremidades;
3. Uma prancha de compensado de 40 x 40 cm;

4. Dois pregos;

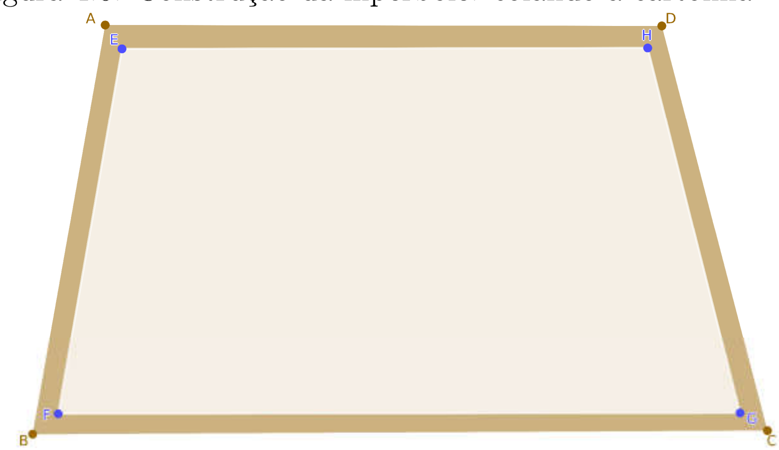
5. Martelo;

6. Lápis;

7. Barbante.

Etapas da construção

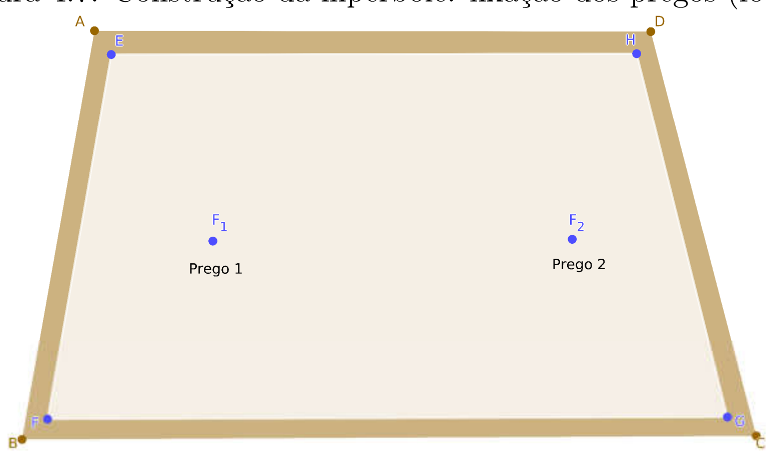
Figura 4.6: Construção da hipérbole: colando a cartolina



Fonte: Da autoria

1. Cola-se a cartolina $EFGH$ no compensado $ABCD$, conforme a figura 4.6

Figura 4.7: Construção da hipérbole: fixação dos pregos (focos)



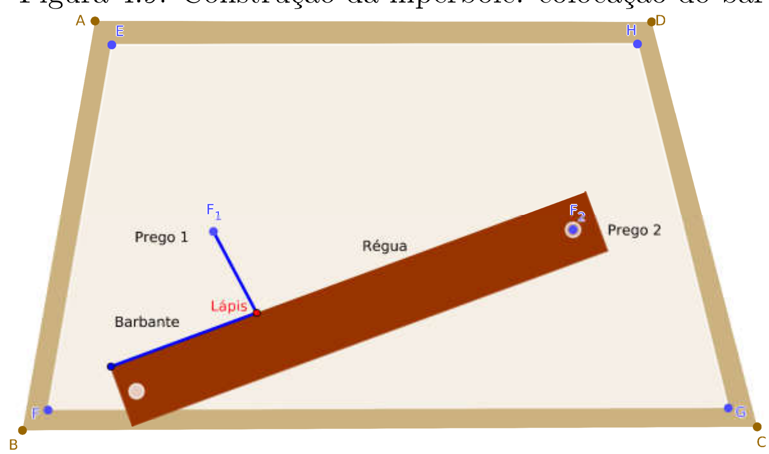
Fonte: Da autoria

2. Fincam-se dois pregos onde vão ser os focos da elipse, conforme a figura 4.7.

Figura 4.8: Construção da hipérbole: fixação do barbante na régua

Fonte: Da autoria

Figura 4.9: Construção da hipérbole: colocação do barbante



Fonte: Da autoria

3. Fixa-se uma das pontas de um pedaço de barbante menor que o comprimento da régua numa das extremidades da régua: 4.8.

4. Amarra-se a extremidade livre do fio em um dos pregos(foco) e coloca-se a extremidade oposta da régua no outro prego(foco) da hipérbole, conforme figura. 4.9

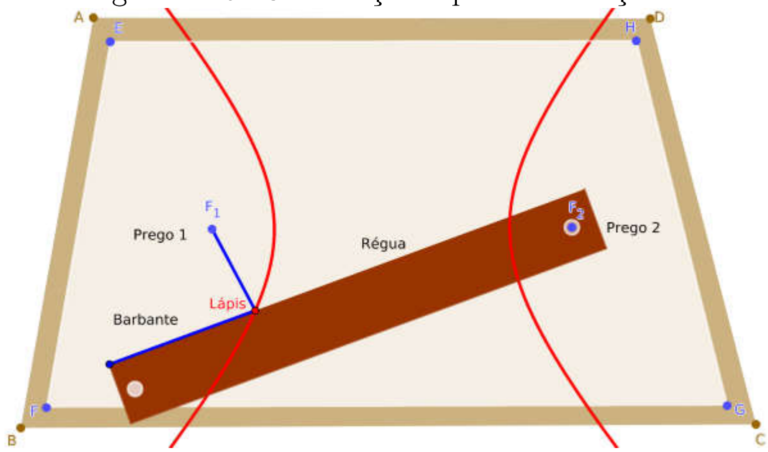
5. Traça-se a hipérbole mantendo o lápis encostado na régua e o fio esticado. Depois faça o mesmo invertendo a posição da régua. 4.10

4.1.3 Uma construção da parábola

Material necessário

1. Uma cartolina;

Figura 4.10: Construção hipérbole: traçado



Fonte: Da autoria

2. Uma régua de 30 cm, preferencialmente uma régua que possua furos em suas extremidades;

3. Uma prancha de compensado de 40 x 40 cm;

4. Um esquadro escaleno;

5. Um prego;

6. Martelo;

7. Lápis;

8. Barbante.

Etapas da construção

1. Cola-se a cartolina EFGH no compensado ABCD, conforme a figura 4.11

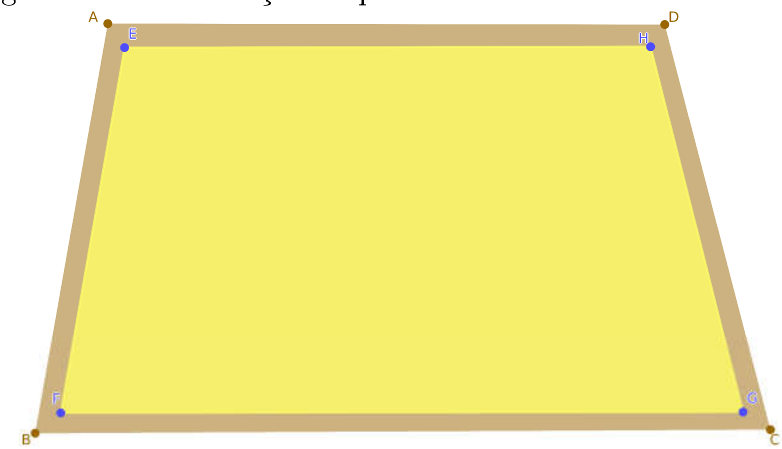
2. Finca-se o prego onde vai ser o foco da parábola, conforme a figura 4.12.

3. Prende-se uma das extremidades do barbante próximo do ângulo agudo do esquadro. Para ficar firme, faz-se um furo no esquadro para amarrar o fio, ver Figura 4.13.

4. Corta-se o fio para que o mesmo tenha o tamanho do cateto maior do esquadro, e amarra-se a extremidade livre do fio no prego, conforme figura 4.14.

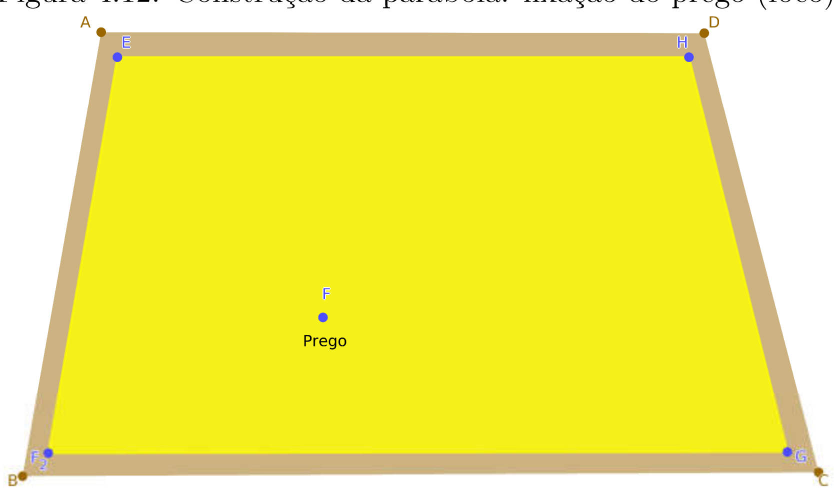
5. Traça-se a parábola com o fio esticado, com o lápis encostado na esquadro, este apoiado numa régua fixa, conforme figura 4.15

Figura 4.11: Construção da parábola: colando a cartolina



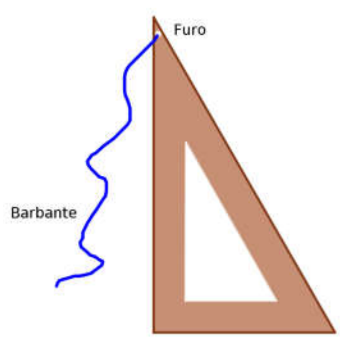
Fonte: Da autoria

Figura 4.12: Construção da parábola: fixação do prego (foco)



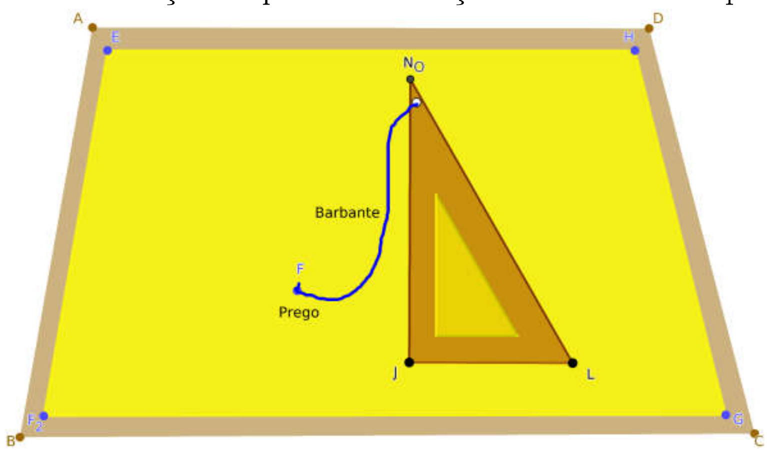
Fonte: Da autoria

Figura 4.13: Construção da hipérbole: fixação do barbante no esquadro



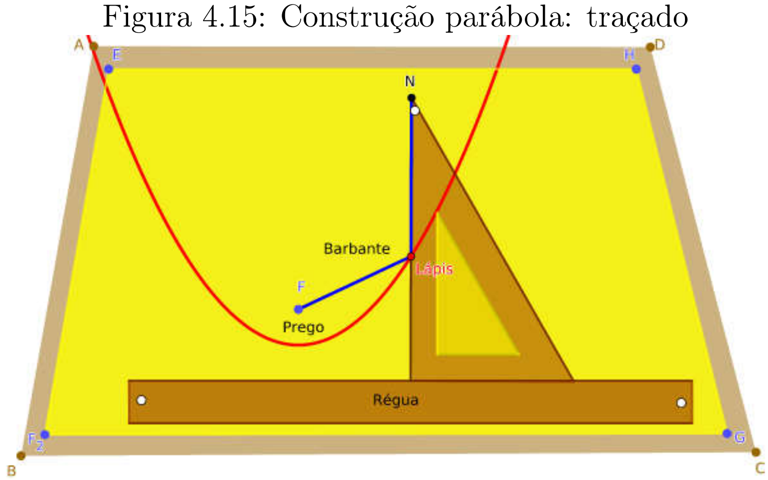
Fonte: Da autoria

Figura 4.14: Construção da parábola: fixação do barbante no prego (foco)



Fonte: Da autoria

Figura 4.15: Construção parábola: traçado



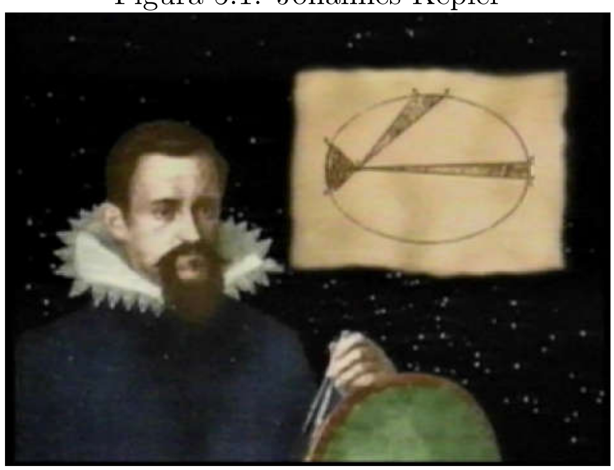
Fonte: Da autoria

5 Algumas aplicações das cônicas

5.1 Na Física: Gravitação

Entre as muitas aplicações das cônicas, na gravitação, Johannes Kepler (1571-1630), astrônomo e matemático habilidoso, adepto do heliocentrismo, discípulo de Tycho Brahe, este considerado o maior astrônomo observacional antes da invenção do telescópio, descobriu[1] que as órbitas dos planetas ao redor do sol são elípticas, e não circulares, como se pregavam. Este fato constitui a primeira lei de Kepler.

Figura 5.1: Johannes Kepler



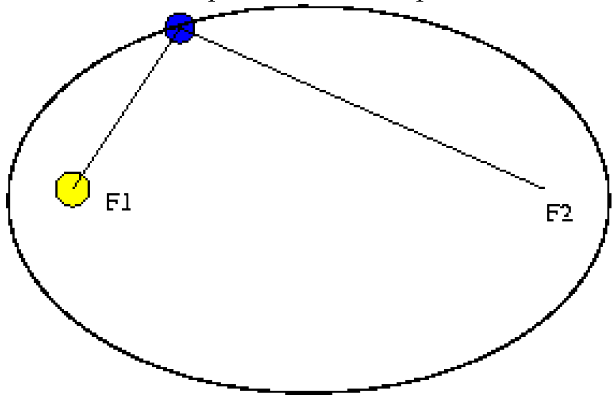
Fonte: http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/aula_tykega.htm

É importante ressaltar que nem todos os objetos que se movimentam no espaço têm suas órbitas elípticas, más curiosamente já foram observados cometas que percorrem trajetórias hiperbólicas, os quais ao passarem perto de algum planeta com grande densidade, alteram a sua trajetória para outra hipérbole com um foco situado nesse planeta.

> Um visitante muito raro passou pelo nosso sistema solar no mês passado. Era pequeno, um objeto com 400 metros de diâmetro, mas veio de muito longe, da constelação da Lira. Observado pelo telescópio Pan-STARRS 1, situado no Havaí, o A/2017 U1 é o primeiro objeto interestelar a ser detectado cruzando o nosso sistema solar. Ao contrário dos cometas e asteroides comuns, a trajetória hiperbólica e sua direção indicam que o A/2017 U1 não pertence ao nosso sistema solar e veio de longe, muito longe.

[1]O que Isaac Newton viria a provar matematicamente em 1679 em seu *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

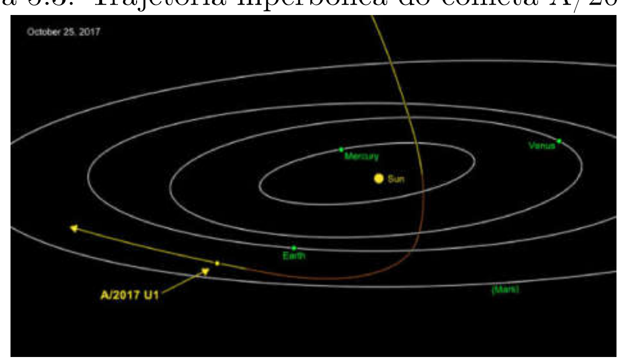
Figura 5.2: 1.a lei: as órbitas dos planetas são elipses tendo o Sol em um dos focos



Fonte: http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/aula_tykega.htm

> Há décadas que os astrônomos admitem a possibilidade de existirem cometas, asteroides e até planetas que escapam da atração de seus sóis e ficam vagando pelo espaço interestelar. Mas um objeto assim nunca tinha sido detectado fora dos romances de ficção científica. O A/2017 U1 se aproximou do nosso sistema em um ângulo quase reto com o plano formado pelas órbitas dos planetas. No dia 9 de setembro ele passou por entre Mercúrio e o Sol e foi desviado pela gravidade solar. Viajando com uma velocidade de 156.400 quilômetros horários ele mudou de rumo, passou por entre Marte e a Terra em outubro e foi embora para as vastidões escuras de onde veio. (CALIFE, 2017).

Figura 5.3: Trajetória hiperbólica do cometa A/2017 U1



Fonte: http://diariodovale.com.br/colunas/um-visitante-do-espaco-interestelar

5.2 Na Engenharia e Arquitetura

Tanto na engenharia quanto na arquitetura, a matemática é fonte de inspiração e literalmente fonte de sustentação.

Figura 5.4: Fachada da Catedral de Brasília

Fonte: flickr.com

Um caso muito conhecido é o projeto da cidade de Brasília, cujas estruturas de prédios e ruas foram inspiradas em formas geométricas. A fachada da Catedral de Brasília, ver Figura (5.4), lembra um hiperbolóide.

Figura 5.5: Estrutura de Sustentação em Aço

Fonte: wikipedia.com

Estruturas mais altas exigem uma base maior de sustentação com maior rigidez dada a altura, ver Figura (5.5).

Figura 5.6: Estrutura de Sustentação em Aço

Fonte: wikipedia.com

Torre de refrigeração de usina de energia (termoelétricas e nucleares) necessita dissipar muito calor e para isto deve ser construída com material forte. Partindo de um cilindro, cujas laterais são formadas por arames, rodando uma das bases, obtemos um hiperboloide de revolução (uma superfície quádrica cujos cortes formam hipérboles) cujas laterais são segmentos de retas que podem ser feitos de barra de aço, formando uma estrutura bastante resistente. Na Figura (5.6) é possível observar a disposição dos cabos. Para sustentar a estrutura reta de base pequena, dispõe de cabos tensionados em bases circulares, oferecendo maior sustentação na observância das retas.

6 Considerações Finais

Vimos neste trabalho que as cônicas são importantes conceitos da Matemática cujas primeiras formas apareceram ainda na antiga Grécia, como resultado do esforço dos sábios daquela época, entre eles, Menaecmus e Apolônio.

O percurso histórico do desenvolvimento dos estudos sobre as secções cônicas mostrou-se bem rico com diversas participações de matemáticos notórios até o ponto que temos as secções cônicas com a sustentação de seus conceitos firmados na Geometria analítica.

Foi possível organizar historicamente os principais fatos e ideias que fomentaram o desenvolvimento dos conceitos das secções cônicas, além de localizar no tempo o desenvolvimento desse conceito no próprio desenvolvimento da Matemática.

Mesmo sendo por meio das tecnologias uma forma atraente de tratar os conceitos matemáticos, foi possível pesquisar e organizar alternativas de construção da hipérbole, da parábola e da elipse. Essas construções mostraram-se acessíveis a professores e alunos, o que permite também a exploração e aprofundamento de conceitos próprios das secções cônicas.

Foi constatado a necessidade de estudo das secções no ensino básico, desde o fundamental até o ensino médio, dada a sua importância no ensino superior nas disciplinas de base de muitas áreas de formação como as Engenharias, a Arquitetura, a Física e a própria Matemática.

Este trabalho contribui com o ensino básico pois organiza e relata historicamente o surgimento do conceito das cônicas, o que permite ao professor utilizar os fatos e recursos históricos como metodologia para o ensino de matemática. Contribui também pois agrupa os conceitos das cônicas e seu tratamento analítico mais atual para o ensino básico. Descrevendo historicamente, algebricamente ou analiticamente e graficamente os conceitos das cônicas, de forma despretensiosa, este trabalho sustenta-se como uma fonte de consulta para docentes e discentes do ensino básico.

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1984.

[2] BOYER, C.B. **História da Matemática**. Ed. da Universidade de São Paulo, São Paulo-1974 .

[3] BRASIL. **P**arâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Básica, 2000b. Disponível em $< http : //portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf >$. Acesso em: 18 jun. 2016.

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

[5] CABRAL, Marco Aurélio P. *Cônicas V1.40* Departamento de Matemática Aplicada. Instituto de Matemática-UFRJ. Documento PDF, julho de 2011. Disponível em: $< http : //www.labma.ufrj.br/\ mcabral/textos/conicas.pdf >$

[6] CALIFE, Jorge Luiz. **Um visitante do espaço interestelar**. 2017. Disponível em: $< http : //diariodovale.com.br/colunas/um - visitante - do - espaco - interestelar >$. Acesso em: 2 abr. 2018

[7] EVES, Howard. **T**ópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v.3; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. São Paulo: Atual Editora, 1994.

[8] EVES, Howard. **I**ntrodução à história da matemática; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

[9] HARTUNG, Guilherme Erwin; MEIRELLES, Rita. *Construindo as secções cônicas*. Portal do Professor. Disponível em $< http : //portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula = 28532 >$. Acesso em 19/03/2018.

[10] LIMA, Elon L. et. al. **A** Matemática do Ensino Médio. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2004. v. 2. p. 1 - 40.

[11] MOL, Rogério S.*Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

[12] NETO, Francisco Quaranta. **T**radução comentada da obra "Novos elementos das seções Cônicas" (PHILIPPE de LA HIRE – 1679) e sua relevância para o ensino médio de matemática. Dissertação (Mestrado) – UFRJ – RJ. Rio de Janeiro, 2008.

[13] RIZZATO, Fernanda Buhrer**D**uplicação do cubo. Imática: a matemática interativa na internet. Disponível em $http://www.matematica.br/historia/duplica-cubo.html$. Acesso em 19/03/2018

[14] ROQUE, Tatiana. **H**istória da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[15] OSA, Milton; OREY, Daniel Clark. **D**e Pappus a Polya: da heurística grega à resolução de problemas. Disponível em: $< http://www.csus.edu/indiv/o/oreyd/De.Tales.de.Mileto.a.Georg.Polya.doc >$. Acesso em: 10 maio de 2018.

[16] STEWART, Ian.. **História de las matemáticas en los últimos 10 000 años**. Tradução de Javier Garcia Sanz. 1 ed. Barcelona: Crítica, 2008.

[17] UFCG. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/Menaecmu.html. Acessado em 10/02/2018.

[18] VAZ, Duelci A. de Freitas **M**atemática e Filosofia de René Descartes Produção Virtual do Governo do Estado do Paraná, 2010. Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/FILOSOFIA/Arti

[19] VENTURI, Jacir J. **A** nova biblioteca de Alexandria: uma fênix que renasce das cinzas. Portal Aprende Brasil, Curitiba. 2018. Disponível em: $http://www.aprendebrasil.com.br/articulistas/imprimirOutros.asp?artigo=jacir$0002. Acesso em: 10 de maio de 2018.