Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $2^x = x^2$: Uma Motivação para o Estudo da Existência de Logaritmo de Números Negativos

Janio Cesar Alencar dos Santos

Catalão

2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: JANIO CESAR ALENCAR DOS SANTOS

Título do trabalho: O MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $2^X = X^2$: Uma Motivação para o Estudo da Existência de Logaritmos de Números Negativos.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Porfírio A. dos S. Júnior

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Prof. Dr. Porfirio A. dos Santos Júnior
SIAPE 2194845
RC/UFG

Data: 28 / 06 / 2018

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Janio Cesar Alencar dos Santos

O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $2^x = x^2$: Uma Motivação para o Estudo da Existência de Logaritmo de Números Negativos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior

Catalão

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

ALENCAR DOS SANTOS, JANIO CESAR
O MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO 2^x = X^2: Uma Motivação para o Estudo da Existência de Logaritmo de Números Negativos. [manuscrito] / JANIO CESAR ALENCAR DOS SANTOS. - 2018.
XXXVIII, 38 f.

Orientador: Prof. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RC), Catalão, 2018.
Bibliografia.
Inclui símbolos, gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Método de Newton- Raphson; Números Complexos; Fórmula de Taylor.. I. AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR, PORFÍRIO , orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás - UFG
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

Ata de Defesa da Dissertação

Em 28 de junho de 2018, às 14 h 05 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior (orientador), Dr. Deive Barbosa Alves, Dr. Marcos Napoleão Rabelo para, em sessão pública realizada por Webconferência no Bloco J - Sala 03, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação da Dissertação intitulado "O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $X^2 = 2^X$: Uma Motivação para o Estudo da Existência de Logaritmo de Números Negativos", de autoria de Janio Cesar Alencar dos Santos, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo(a) presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que, em 27 min procedeu a apresentação da Dissertação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado: **(X) Aprovado** ou **( ) Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 15 h 36 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Porfírio Azevedo dos Santos Júnior, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente.

Porfírio A. dos S. Júnior

Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Dr. Deive Barbosa Alves
UFT/Araguaina

Marcos N. Rabelo

Dr. Marcos Napoleão Rabelo
UFG/IMTec – Catalão

Janio Cesar Alencar dos Santos
Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RC/UFG

Janio Cesar Alencar dos Santos graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás, atualmente é professor de Matemática da Secretaria de Educação do Distrito Federal e do Colégio Ciman de Brasília.

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, pela vida e saúde, sabedoria e por ter me guiado sempre na minha vida acadêmica e profissional.

À minha querida família, papai, mamãe e todos meus irmãos por terem me oportunizado uma educação de qualidade e por estarem sempre ao meu lado como uma grande e abençoada família.

À minha querida esposa Claudilene que me fortalece a cada dia, sei que sem a ajuda e compreensão dela eu não teria conseguido, a qual eu amo muito e me deu muito apoio nas horas difíceis deste trabalho e de toda minha vida.

Aos minhas filhas Maria Eduarda e Ana Luísa que são na verdade o tesouro da minha vida e sei que sou um homem eternamente realizado por ser chamadas de pai de filhas abençoadas, que sempre estão ao meu lado apoiando em todos os momentos.

Aos meus amigos de turma, pois sei que sem eles eu não iria conseguir concluir com sucesso estes trabalho.

Aos professores da UFG Campus de Catalão pela dedicação neste ofício que é tão difícil, mas da mesma forma sempre com boa vontade e dedicação para com os alunos. Obrigado professores e ao coordenador do curso.

Ao meu orientador Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior pela paciência e participação muito efetiva na construção deste trabalho, e nunca mediu esforços para me orientar da melhor maneira possível.

À Universidade Federal de Goiás (UFG - Campus Catalão) por oportunizar o mestrado, juntamente com o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Resumo

Neste trabalho são discutidos dois problemas centrais: a solução da equação $2^x = x^2$ e a existência de logaritmos de números negativos. Nesse sentido, são apresentados de forma detalhada o método de Newton-Raphson, alguns tópicos sobre números complexos e o método de Taylor. A equação $2^x = x^2$ será resolvida por meio do método numérico de Newton-Raphson. A análise desta equação nos conduzirá à definição de logaritmos de números negativos. Nosso principal objetivo ao escrever este trabalho foi confeccionar uma bom material de pesquisa direcionado a professores da educação básica e estudantes de graduação de ciências exatas.

Palavras-chave

Método de Newton Raphson; Números Complexos; Fórmula de Taylor.

Abstract

In this work are discussed about two central problems: the solution for equation $2^x = x^2$ and the existence of logarithm of negative numbers. In this sense, the Newton-Raphson method, some aspects about complex numbers and Taylor's series are presented with detail. Our aim was produce a good research and study material directed for teachers of basic education and undergraduate students.

Keywords

Newton-Raphson method; complex numbers; Taylor's formula.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Este trabalho traz uma pesquisa bibliográfica sobre dois temas bastante interessantes, quais sejam: a procura por soluções de equações por métodos numéricos e o cálculo de logaritmos de números negativos. A escolha por este tema se deu por dois motivos principais: o primeiro devido ao interessante artigo do professor Elon Lages Lima (LIMA, 1983, p.20)[1]; e o segundo devido às dificuldades que os professores da educação básica enfrentam em relação a tais conteúdos, decorrente da escassez de materiais didáticos com linguagem simples. O trabalho é apresentado com linguagem mais simples possível, pois é direcionada a professores de matemática da educação básica, bem como a estudantes de graduação e a todos interessados nas temáticas apresentadas.

Encontrar raízes para uma dada equação nem sempre é uma tarefa fácil, embora seja imprescindível em grande parte das atividades humanas. Por exemplo, o desenvolvimento da economia, astronaútica, engenharia, dentre outras diversas áreas dependem da resolução de equações. A primeira evidência histórica da solução de equações que se tem registro data do ano 1650 a.C., a qual possui registro no Papiro de Rhind e supostamente foi realizada no Egito antigo. Os egípcios não utilizavam métodos algébricos na resolução das equações, por isso, o seu método de solução era considerado enfadonho e limitado (EVES, 2004, p.56)[2]. Os gregos também foram pioneiros na procura por solução de equações, porém,o método grego era obsoleto e sem abstração, baseado meramente em geometria. Os primeiros a utilizar álgebra na solução de equações foram os árabes já no século XI. Nesse sentido, Al-Khowarizmi escreveu um livro no qual apresenta técnicas de soluções para alguns tipos de equações. Contudo, o uso predominantemente de métodos algébricos só se tornou prática corriqueira e sistematizada no trabalho do matemático francês François Viète, datado do século XVI, no qual ele estudou equações em formatos mais gerais como $ax + b = 0$. A partir de então, as equações passaram a ser intepretadas como as entendemos atualmente (BOYER, 1973, p.66) [3].

De forma geral, nem toda equação é possível obter uma solução através de uma fórmula analítica, como a de Bháskara para polinômios de grau 2 da forma $ax^2 + bx + c = 0$. Já para grau 3, temos apenas soluções para alguns casos particulares, como por exemplo usando o método de Cardano e Tartaglia. E o que fazer quando não conseguimos resolver uma equação pelos métodos conhecidos? O que um professor pode falar a um estudante da educação básica sobre a resolução de equações que não possuem soluções fechadas? Será que os professores da educação básica estão preparados para explicar sobre isso aos seus estudantes? A resposta para a primeira pergunta está na possibilidade de se utilizar os métodos numéricos para resolver equações de forma aproximada. Nesse sentido, neste trabalho trazemos um capítulo sobre o método de Newton-Raphson para se calcular numericamente as raízes de uma dada equação. Apresentamos de forma pedagógica, para que o professor da educação básica tenha uma boa fonte bibliográfica, com possibilidade de transmitir tais ideias a seus estudantes. O leitor deve lembrar que o fato da solução ser aproximada não seja um empecilho, pois, conforme veremos no texto, podemos calcular a raiz com a precisão que desejarmos.

A outra temática considerada nesta dissertação é a existência de logaritmo de números negativos. Na maioria dos livros didáticos do ensino médio, quando os logaritmos são apresentados aos estudantes, há apenas discussão da definição de logaritmo no conjunto dos números reais, daí comenta-se da impossibilidade de se calcular logaritmo de números negativos. Porém, quando ainda no ensino médio introduz-se os números complexos, geralmente não há retorno ao estudo dos logaritmos, para assim se fazer uso do cálculo de logaritmos de números negativos. Sendo assim, trazemos este assunto segundo uma abordagem didática, com o intuito de fomentar a discussão no âmbito do ensino médio.

Sendo assim, este trabalho possui caráter teórico, tendo como base um artigo do professor Elon Lages Lima (LIMA, 1983, p.20)[1]. Nesse sentido, determinaremos a raiz negativa da equação $2^x = x^2$ via métodos numéricos, em especial o método de Newton-Raphson com interações sucessivas.

Dessa forma, a apresentação deste trabalho está dividida nos seguintes tópicos: no capítulo 2 apresentaremos os conceitos elementares que serão utilizados nos demais capítulos. Em particular, o principal assunto utilizado serão os números complexos, bem como apresentamos a série de Taylor e a fórmula de Euler, a qual será muito útil, pois faz-se necessária na sequência para chegarmos aos logaritmos de números negativos.

No capítulo 3 veremos um pouco da história do método de Newton Raphson, explorando-o de forma bem simples com a resolução de algumas equações com exemplos.

No capítulo 4 investigaremos a raiz negativa da equação $2^x = x^2$. Tal raiz negativa trata-se de um logaritmo de número negativo, conceito este que não é abordado no currículo do ensino médio. Contudo, iremos mostrar que de fato a solução existe, assim como os logaritmos de números negativos.

No capítulo 5, serão definidos os logaritmos de acordo com que aprendemos no ensino médio e iremos provar que os mesmos existem para os números negativos, para isso usaremos a fórmula de Euler e faremos alguns exemplos.

Para fnalizar, apresentamos nossas conciderações finais e perspectivas no capítulo 6.

2 Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos, definições e propriedades que serão utilizados nos demais capítulos. Nesse sentido, abordaremos os números complexos e suas propriedades.

2.1 Algumas palavras sobre os números complexos

Neste capítulo apresentaremos o referencial teórico que embasará a resposta à segunda indagação deste trabalho, qual seja: Existe logaritmo de números negativos? Nesse sentido, apresentaremos uma rápida revisão sobre os números complexos, enfatizando a obtenção da fórmula de Euler. No caminho, faremos uma breve revisão sobre série de Taylor, a fim de escrever as expansões das funções seno, cosseno e exponencial, as quais serão úteis em nossas análises. O exposto aqui será baseado nas referências (BROWN E CHURCHILL, 2015, p.30; AVILA, 2000, 27; SPIEGEL, 1972, 45)[6, 7, 8]

2.1.1 Um pouco da história dos números complexos

Os números complexos desempenham um papel extremamente importante nos mais diversos ramos da matemática e têm aplicação em outras áreas do conhecimento, tais como na engenharia, em especial na teoria de controle.

Em geral, o estudante se depara com eles, pela primeira vez, no ensino médio. A sua introdução é justificada pela necessidade de resolver equações do segundo grau com discriminante negativo. As equações do segundo grau aparecem em muitas tabuletas de argila da Suméria, por volta do ano 1700 a.C. e, ocasionalmente, levaram a radicais negativos; porém não foram elas, em momento algum, que sugeriram o uso dos números complexos. Foram sim as equações do terceiro grau que impuseram a necessidade de trabalhar com esses números. Os números complexos foram definidos usando uma unidade imaginaria i, onde $\sqrt{-1} = i$ (EVES, 2004, p.101; BOYER, 1973, p.84)[2, 3].

Na resolução de uma equação do 2^o grau, se o discriminante é negativo, ela não admite raízes reais. Por exemplo, a equação

$$x^2 + 9 = 0,$$

não admite raízes reais. Se usarmos os métodos que conhecemos para resolvê-la, obtemos

$$x^2 = -9$$

$$x = \pm\sqrt{-9}.$$

Mas é inaceitável tal resultado para x; os números negativos não têm raiz quadrada definida no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Para superar tal impossibilidade e poder, então, resolver todas equações do 2^o grau, os matemáticos ampliaram o sistema de números, propondo os números complexos. Primeiro, eles definiram um novo número

$$i = \sqrt{-1}.$$

Isso conduz a $i^2 = -1$. Um número complexo é então um número da forma $a + bi$ onde a e b são números reais. Para a equação acima fazemos

$$x = \pm\sqrt{(9) \cdot (-1)}$$

$$x = \pm\sqrt{(9)} \cdot \sqrt{(-1)}$$

$$x = \pm 3i.$$

As raízes da equação $x^2 + 9 = 0$ são $3i$ e $-3i$.

Os números complexos apareceram no século XVI ao longo das descobertas de procedimentos gerais para resolução de equações algébricas de terceiro e quarto grau. No século XVII os complexos foram usados de maneira incipiente para facilitar alguns cálculos. Enquanto no século XVIII tais números, mais utilizados tendo se descoberto que os complexos permitem a conexão de vários resultados, até então dispersos da Matemática, no conjunto dos números reais. No entanto, nada é feito para esclarecer o significado desses novos números. Já no século XIX, surge a representação geométrica dos números complexos, motivada pela necessidade em Geometria, Topologia e Física, de se trabalhar com o conceito de vetor no plano. Os números complexos passam a ser aplicados em várias áreas do conhecimento humano, dentro e fora da Matemática, como por exemplo na dinâmica de fluidos e eletrônica.

Por exemplo, uma aplicação na Física e na engenharia foi proposta por Hadamard (1883), o qual estudou sobre distribuição de temperatura, resolveu equações diferenciais (funções de Bessel) usando $i^2 = -1$. Nesse contexto, os números complexos conquistaram novos domínios para Matemática (EVES, 2004, p.121)[2].

Enquanto isso, Hamilton (1843), também buscando aplicações em Física e explicações para a origem dos produtos, escalar e vetorial, introduziu uma multiplicação de vetores no espaço de quatro dimensões, construindo a álgebra, não comutativa, dos Quatérnions $(a, b, c, d) = a + bi + cj + dk$ em que a,b,c,d são números reais e $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ [3].

Os números complexos também são muito úteis na Aerodinâmica. Por exemplo, Joukowski (1906) utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexas, deduziu a fórmula que permite calcular a força de levantamento responsável pela sustentação do vôo de um avião. Os números complexos permitiram uma explicação matemática para o vôo. Daí em diante o progresso aeronáutico foi rápido (EVES, 2004, p.56; BOYER, 1973, p.66)[2, 3].

Já na eletrônica e na eletricidade, a análise de circuitos de corrente alternada, ou seja a análise fasorial, é feita com a ajuda de números complexos. Grandezas como a impedância (em ohms) e a potência aparente (em volt-ampére) são exemplo de quantidades complexas. Os procedimentos (algoritmos) recursivos (iterativos ou recorrentes) no plano complexo criaram na maioria das vezes figuras invariantes por escala denominadas fractais. Estas formas geométricas de dimensão fracionária servem como ferramenta para: descrever as formas irregulares da superfície da terra; modelar fenômenos, aparentemente imprevisíveis (teoria do caos), de natureza meteorológica, astronômica, econômica, biológica, etc (EVES, 2004, p.95; BOYER, 1973, p.116)[2, 3].

2.1.2 Definição dos Números Complexos

Um número complexo z é definido como $z = x + iy$, em que x é denominado parte real e y é a parte imaginária de z. Podemos escrever $Rez = x$ e $Imz = y$. O parâmetro i é denominado unidade imaginária, definido de forma que $i^2 = -1$.

2.1.3 Adição e Subtração de números complexos

A adição de números complexos é definida da seguinte forma: Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, a soma $z_1 + z_2$ é dada por

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Ou seja, para adicionarmos dois números complexos basta somarmos a parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária. É fácil mostrar que a adição dos números complexos satisfaz as seguintes propriedades:

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Em que z_1, z_2 e z_3 são três números complexos.

A multiplicação de uma número real por um número complexo é realizada de forma trivial, ou seja, basta multiplicarmos a parte real e a parte imaginária pelo número real, conforme pode ser visualizado

$$\alpha z_1 = \alpha(x_1 + iy_1) = \alpha x_1 + i\alpha y_1.$$

A operação de multiplicação por escalar satisfaz as seguintes propriedades:

- $\alpha(z_1 + z_2) = \alpha z_1 + \alpha z_2$,
- $\alpha(\beta z_1) = \alpha\beta z_1$,

em que z_1, z_2 são dois números complexos e α e β são números reais. Nesse caminho, definimos o oposto de um número complexo $z = x + iy$ como $-z = -x - iy$.

A subtração de números complexos $z_1 - z_2$ pode ser compreendida como a soma de z_1 com o oposto de z_2, ou seja,

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Exemplo: Dados $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = 1 + i$, calculemos (a) $z_1 + z_2$, (b) $2z_1 - 3z_2$.
Resolução: (a) $z_1 + z_2 = (3 + 1) + i(-2 + 1) = 4 - i$.
(b) $2z_1 - 3z_2 = (6 - 4i) - (-3 + 3i) = (6 - 3) + i(-4 - 3) = 3 - 7i$.

2.1.4 Multiplicação de números complexos

A multiplicação de dois números complexos pode ser realizada via a propriedade distributiva da multiplicação e utilizando o fato que $i^2 = -1$. Ou seja, dados $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, calculemos z_1z_2:

$$z_1z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+i^2y_1y_2 = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Podemos mostrar que dados os números complexos z_1, z_2 e z_3, a multiplicação de números complexos satisfaz as seguintes propriedades:

1. Comutatividade: $z_1z_2 = z_2z_1$.
2. Associatividade: $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$.
3. Elemento Neutro: $\mathbf{1}z_1 = z_1\mathbf{1} = z_1$, em que $\mathbf{1} = 1 + 0i$.
4. Distributividade: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Como exemplo, dados $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = 1 + i$, calculemos z_1z_2.

$$z_1z_2 = (3 - 2i)(1 + i) = 3 + 3i - 2i - 2i^2 = 3 + i + 2 = 5 + i.$$

2.1.5 Conjugação Complexa

Definimos o conjungado complexo de um número complexo $z = x + iy$ como $\overline{z} = x - iy$. Ou seja $\overline{z}$ é simplesmente z com o sinal da parte imaginária trocado. Uma importante propriedade desta operação diz respeito quando multiplicamos um número complexo por seu conjungado. Seja $z = x + iy$, então, $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Percebemos que $z\overline{z}$ será sempre um número real positivo. Ao resultado $z\overline{z}$ denominados módulo de z, e denotaremos por $|z| = r^2$.

2.1.6 Divisão de Números Complexos

A divisão de números complexos pode ser definida como a operação inversa da multiplicação. Ou seja, se tivermos $\frac{z_1}{z_2} = z_3$, em que $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $z_3 = x_3 + iy_3$. Se multiplicarmos ambos os lados por z_2, devemos obter como resultado z_1. Fazendo isso, obtemos

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \Rightarrow z_1 = z_2z_3,$$

e nosso objetivo é descobrir quem é z_3.

$$(x_1 + iy_1) = (x_2x_3 - y_2y_3) + i(x_2y_3 + x_3y_2),$$

isso nos leva ao seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x_3 - y_2y_3, \\ y_1 &= x_2y_3 - x_3y_2. \end{aligned} \tag{1}$$

A solução para este sistema é

$$x_3 = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$y_3 = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Este resultado pode ser obtido a partir de $\frac{z_1}{z_2}$ multiplicando o numerador e o denominador por $\overline{z}_2$. E esta é uma forma prática de se calcular a divisão de dois números complexos.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}.$$

Compreenderemos melhor a divisão de números complexos por meio do seguinte exemplo. Sejam $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = 4 + 3i$, calculemos $\frac{z_1}{z_2}$. Conforme vimos, basta multiplicar o numerador e o denominador por $\overline{z}_2 = 4 - 3i$. Fazendo isso, obtemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = -\frac{2}{25} - \frac{11}{25}i.$$

2.1.7 Representação Geométrica ou Polar de um Número Complexo

Nesta seção, o nosso objetivo será escrever um número complexo na forma polar ou geométrica. De forma análoga ao que é feito com vetores no plano, podemos rerpresentar um número complexo utilizando um sistema de eixos perpendiculares. Para isso, representamos a parte real do número complexo no eixo horizontal e a parte imaginária no eixo vertical. Para esse fim, considere o gráfico apresentado na Figura (1). Nela está representado o número complexo $z = x + iy$. Observe que a parte real x está sobre o eixo horizontal, e a parte imaginária y está sobre o eixo vertical. O número complexo z é então representado pelo vetor dado na Figura (1), em que o comprimento de tal vetor é simplesmente o módulo de z, ou seja, $r = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A representação de uma número complexo z na forma polar é baseada no módulo de z, representado por r, e no ângulo que o vetor forma com o eixo horizontal

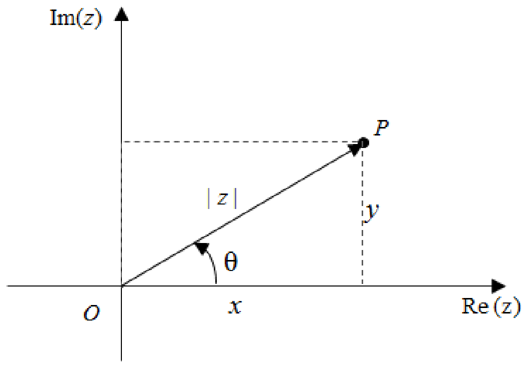

Figura 1: Forma polar do número complexo $z = x + iy$

no sentido anti-horário, representado por θ. Sendo assim, observando a Figura (1), podemos escrever

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Dessa forma, o número complexo $z = x + iy$ é escrito na forma trigonométrica como $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Como exemplo, vamos representar o número complexo $z = 1 - i$ na forma trigonométrica. Para isso, calculemos $r^2 = |z| = 1^2 + (-1)^2 = 2$, portanto $r = \sqrt{2}$. E ainda $\tan\theta = y/x = -1$, por isso, $\theta = 315^o = 7\pi/4$. Note que tínhamos duas opções de ângulo para os quais $\tan\theta = y/x = -1$, os quais eram 315^o e 135^o, mas apenas um deles satisfazia a condição de y ser negativo e x positivo, pois o número complexo analisado é $z = 1 - i$.

Dessa forma, $z = 1 - i = \sqrt{2}(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4))$.

No entanto, perceba que qualquer valor do ângulo encontrado somado a um múltiplo de 2π nos leva à mesma forma algébrica do número complexo z. Ou seja, se tormarmos $\theta = 7\pi/4 + 2\pi$, $\theta = 7\pi/4 + 4\pi$, ..., $\theta = 7\pi/4 + k\pi$, em que $k = 0, 1, 2, 3...$, obteremos a mesma forma algébrica de z. Para evitar essa pluraridade de resultados, restringimos o domínio de θ. Usualmente tomamos $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Apesar da forma polar apresentada ser bastante útil, muitas vezes é ainda mais proveitoso escrever um número complexo na forma de Euler. Antes disso, lembraremos um pouco da série de Taylor.

2.2 Série de Taylor

Nesta seção nos recordaremos de como podemos expandir uma função por meio de uma série, denominada série de Taylor. Este estudo nos será útil para escrevermos um número complexo na forma exponencial. O abordado aqui foi baseado nas referências [9, 10].

2.2.1 A fórmula de Taylor

O nosso objetivo nesta seção é dada uma função $f(x) \in R$, representá-la na forma

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ..., \tag{3}$$

em que os coeficientes a_k são números reais. Para esse fim, devemos descobrir os coeficientes a_k. A expansão da série é em torno de x_0, em outras palavras, dizemos que a função $f(x)$ está sendo expandida em torno de x_0. A condição para que a função $f(x)$ possa ser expandida com a fórmula de Taylor de ordem n é que f seja derivável até a ordem n no intervalo I e o ponto x_0 pertença a I. Quando expandimos uma função utilizando a série de Taylor, estamos fazendo uma aproximação, tal que se n tender ao infinito, temos que a função é igual a série.

Note que $f(x_0) = a_0$, ou seja, já sabemos a relação entre o primeiro coeficiente e a função considerada.

Derivemos uma vez a Equação (3), obtendo

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + ... + na_n(x - x_0)^{n-1} + ... \tag{4}$$

Se tormarmos $f'(x_0)$, obtemos que $f'(x_0) = a_1$.

Derivando agora a Equação (4), obtemos

$$f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3(x - x_0) + ... + n.(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + ... \tag{5}$$

Se tormarmos $f''(x_0)$, obtemos que $f''(x_0) = 2a_2$, ou seja, $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$.

Derivando agora a Equação (5), obtemos

$$f'''(x) = 3.2a_3 + 4.3.2a_4(x - x_0)... + n.(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + ... \tag{6}$$

Se tormarmos $f'''(x_0)$, obtemos que $f'''(x_0) = 3.2a_3$, ou seja, $a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$.

Fazendo isso recursivamente, encontraremos que

$$a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!},$$

em que $f^n(x_0)$ representa a enésima derivada de $f(x)$ calculada em $x = x_0$.

Dessa forma, podemos escrever a Equação (3) como

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ... \quad (7)$$

Podemos tomar a expansão dada na Equação (7) sempre que a $f(x)$ for analítica[1] em $x = x_0$ [10]. Observação: podemos definir a série de Taylor para uma função $f(z)$ pertencente ao conjunto dos números complexos C, em que $z \in C$.

2.3 A série de Taylor de algumas funções importantes

Nesta seção escreveremos a série de Taylor de algumas funções que serão importantes mais tarde, quais sejam: a função exponencial, a função seno e a função cosseno. Faremos todas essas expansões em torno de $x_0 = 0$.

Desenvolveremos em seguida a expansão na forma de Taylor das seguintes funções:

1. $f(x) = e^x$. Para escrever a série de Taylor da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$, precisamos da função e de suas derivadas calculadas em $x_0 = 0$. A derivada de qualquer ordem de $f(x) = e^x$ é igual a ela mesma, ou seja,

$$f'(x) = f''(x) = ... = f^n(x) = e^x.$$

Dessa forma,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^n(0) = f^{n+1}(0) = ... = 1.$$

Com isso, usando a Equação (7), obtemos

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (8)$$

[1] uma função é denominada analítica se ela é contínua num intervalo I e possuir derivadas de ordem n também contínuas em I. Uma função analítica é uma função infinitamente diferenciável num intervalo se ela possui derivada de todas as ordens.

A Equação (8) é a série de Taylor de e^x com centro em $x_0 = 0$. É possível mostrar, usando por exemplo o teste da raiz, que o raio de convergência desta série é infinito, ou seja, ela converge para qualquer valor de x.

2. $f(x) = \cos x$. Para escrever a série de Taylor da função $f(x) = \cos x$ em torno de $x_0 = 0$, precisamos da função e de suas derivadas calculadas em $x_0 = 0$. Temos então que $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{iv}(x) = \cos x$, $f^{v}(x) = -\sin x$ e assim em diante. E ainda, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{iv}(0) = 1$, $f^{v}(0) = 0$, e assim por diante. Com isso, usando a Equação (7), obtemos

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{9}$$

A Equação (9) é a série de Taylor de $\cos x$ com centro em $x_0 = 0$. Note que é uma série alternada (o sinal das parcelas se alternam) com expoentes pares. É possível mostrar que o raio de convergência desta série é infinito, ou seja, ela converge para qualquer valor de x.

3. $f(x) = \sin x$. Para escrever a série de Taylor da função $f(x) = \sin x$ em torno de $x_0 = 0$, precisamos da função e de suas derivadas calculadas em $x_0 = 0$. Temos então que $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{iv}(x) = \sin x$, $f^{v}(x) = \cos x$ e assim em diante. E ainda, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{iv}(0) = 0$, $f^{v}(0) = 1$, e assim por diante. Com isso, usando a Equação (7), obtemos

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{10}$$

A Equação (10) é a série de Taylor de $\sin x$ com centro em $x_0 = 0$. Note que é uma série alternada (o sinal das parcelas se alternam) com expoentes ímpares. É possível mostrar que o raio de convergência desta série é infinito, ou seja, ela converge para qualquer valor de x.

2.3.1 A Fórmula de Euler

De posse das funções reais dadas nas Equações (8), (9) e (10), podemos obter a fórmula de Euler $e^{i\theta}$, expressão que nos será útil na análise de uma das grandes questões que norteiam este trabalho. A fórmula de Euler nos permite escrever a forma trigonométrica de uma número complexo no formato exponencial.

O ponto de partida é escrevermos a expansão em Taylor para $e^{i\theta}$, para isso utilizamos a Equação (8), ou seja [2]

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5}(i\theta)^5 + ... \tag{11}$$

Desenvolvendo as potências da unidade imaginária, temos

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - i\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + i\frac{1}{5!}\theta^5 + ... \tag{12}$$

Na Equação (12), se separarmos a parte imaginária da parte real, obtemos

$$e^{i\theta} = \left(1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + ...\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + ...\right). \tag{13}$$

Os termos entre parenteses são identificados como as expressões em série para as funções reais $\cos\theta$ e $\sin\theta$. Dessa forma, chegamos a

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{14}$$

Com este resultado, dado um número complexo $z = x + iy$ que na forma polar é escrito como $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, utilizando a Equação (14), podemos escrever este mesmo número como

$$z = re^{i\theta}. \tag{15}$$

Esta expressão nos será muito útil na sequência deste trabalho.

3 Encontrando raízes reais de equações via métodos numéricos - O método de Newton-Raphson

Neste capítulo apresentaremos a primeira parte do estudo proposto neste trabalho. Discutiremos de forma pedagógica o método de Newton-Raphson, o qual é utilizado para se estimar as raízes reais de uma equação não linear. Abordaremos desde uma digressão histórica do método até um exemplo de sua aplicação.

[2] Apesar de a expressão $e^{i\theta}$ representar uma função complexa, a sua expansão em série de Taylor é possível, pois ela é uma função analítica, satisfazendo as condições de Cauchy

3.1 Um pouco da história do método

Encontrar as raízes de uma equação é uma tarefa que envolve as mais diversas áreas do conhecimento desde os primórdios das civilizações. Dentre os profissionais que trabalham mais frequentemente com essa temática estão matemáticos, físicos, engenheiros, químicos, economistas, dentre outros. Contudo, é de conhecimento comum que nem sempre é possível calcular de forma exata as raízes de uma dada equação. Por exemplo, Abel (1802-1829) mostrou que mesmo para polinômios não é possível obter uma forma algébrica para calcular as raízes caso o grau do polinômio seja maior ou igual a 5 (EVES, 2004, p.56)[2]. Para esse fim, ao longo do tempo, foram propostos diversos métodos numéricos para se calcular, pelo menos de forma aproximada, raízes de equações. Dentre esses métodos, um que merece destaque por sua simplicidade, bem como pela sua rápida convergênciafrente a outros métodos, é o método de Newton-Raphson.

O método de Newton-Raphson, também denominado método das tangentes, foi proposto no século XVII por dois grandes personalidades: Isaac Newton (1643-1727) e Joseph Raphson (1648-1715). Newton apresentou o método pela primeira vez numa obra intitulada "*De analysi per aequationes número terminorum infinitas*" em (BOYER, 1973, p.66)[3]. Newton usou o método por ele desenvolvido para estudar as raízes da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$. Coube a Raphson, no ano de 1690, aprimorar o método e generalizá-lo para aplicação a qualquer função real, tendo publicado os resultados do seu trabalho na obra "*Analysis aequationum universalis*"(EVES, 2004, p.230; BOYER, 1973, p.102)[2, 3]. Já no século XVIII, o matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) mostrou que o método convergia quadraticamente, ou seja, convergia mais rápido que os métodos até então conhecidos, desde que o ponto inicial fosse tomado nas vizinhanças da raiz procurada. Coube a outro matemático francês, o renomado Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), mostrar, no século XIX, que o método poderia se extrapolado para sistemas de equações (EVES, 2004, p.56; BOYER, 1973, p.66)[2, 3].

Outros grandes matemáticos também contribuiram no desenvolvimento e consolidação do método, até que fosse atingida a versão aprimorada que será apresentada neste capítulo.

3.2 O método

Nesta seção, apresentaremos o método e faremos a sua dedução. Toda a análise será conduzida de maneira bem pedagógica. Por fim, serão resolvidos dois exemplos. O exposto aqui será baseado nas referências (RUGGIERO E LOPES, 2000, P.40; FRANCO, 2003, P.38)[4, 5].

Para entendermos melhor o método de Newton-Raphson, partiremos de um pressuposto geométrico, pois a partir da visualização gráfica, os conceitos serão melhor assimilados pelo leitor. Em suma, o método de Newton-Raphson é um procedimento iterativo baseado em aproximações sucessivas.

Considere uma equação que pode ser escrita na forma $f(x) = 0$, ou seja, na essência pretendemos calcular as raízes da função $f(x)$. Para iniciar o método, devemos escolher como solução o número real x_0. A função $f(x)$ deve ser derivável em torno de x_0. Quanto mais próximo da raiz verdadeira for esse ponto escolhido, mais rápido o procedimento converge para a raiz requerida. Para a nossa análise, considere a Figura (2).

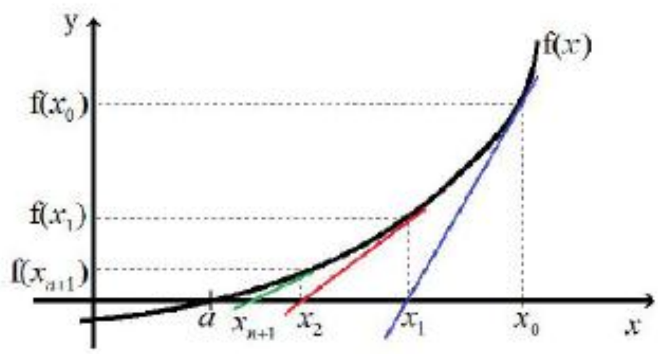

Figura 2: Método de Newton-Raphson: retas tangentes

Dessa forma, antes de utilizarmos o método de Newton é importante fazermos uma boa escolha do ponto inicial, pois se escolhermos qualquer ponto, sem o uso de qualquer critério, pode ocorrer que o número de iterações seja aumentado, e com uma boa escolha, o método se torna bastante curto, reduzindo o número de iterações. Um forma de se descobrir um bom chute inicial é utilizar o Teorema 1 enunciado a seguir.

Teorema 1: Seja uma função $f(x)$ real contínua num intervalo $[a, b]$. Se

$$f(a)f(b) < 0$$

então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é raiz de $f(x)$.

Por exemplo, a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ possui pelo menos uma raiz entre $x = -5$ e $x = -3$, pois $f(-5) = -77$ e $f(-3) = 3$, portanto $f(-5)f(-3) = -231 < 0$. Uma vez descoberto um intervalo que contém uma raiz, pode-se aprimorá-lo e então utilizar o método.

Seja então o ponto inicial x_0 dado na Figura (2), com respectiva abcissa $f(x_0)$. Sabemos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$, m da reta azul, é igual a derivada primeira de $f(x)$ calculada em x_0. Observe ainda que a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em x_0 passa por x_1 sobre o eixo x. Sendo assim, uma vez que $f(x_1) = 0$, podemos escrever a equação dessa reta como

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Mas $m = f'(x_k)$. E ainda, se x é raiz, temos que $y = f(x) = 0$. Assim,

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x - x_0,$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Continuando a iteração,

$$m = f'(x_0) = \frac{f(x_0) - 0}{(x_0 - x_1)}. \tag{16}$$

Isolando x_1 na Equação (16), temos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{17}$$

Fazendo o mesmo procedimento para a reta vermelha, obtemos

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{(x_1 - x_2)}, \tag{18}$$

o que nos leva a

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{19}$$

Realizando este procedimento sucessivas vezes até atingirmos x_{n+1}, ou seja, a reta tangente de cor verde, obtemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{20}$$

Note pela Figura (2) que a cada iteração, o valor x_n se aproxima mais da raiz exata. A pergunta natural que o leitor deve estar se fazendo é: quando parar? Paramos quando atingimos um erro menor que o erro previamente definido, o qual será denotado por ϵ, ou seja, quando

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon. \tag{21}$$

E assim fica definido o critério de parada. Apesar de nos basearmos na Figura (2) para deduzir o método de Newton-Raphson, é possível mostrar que o mesmo é válido em qualquer situação, desde que $f'(x)$ não tenha tangentes horizontais no intervalo I on de supostamente a raiz está localizada.

Para se trabalhar este conteúdo em turmas do ensino médio, o professor pode substituir a derivada $f'(x_n)$ pelo coeficiente angular $m(x_n)$ da reta que passa pelos pontos x_n e x_{n+1}. Além disso, este método apresentado no trabalho traz uma justificativa para estender o conceito de logaritmo para os números negativos.

3.3 Exemplos

O que foi apresentado consiste no método de Newton-Raphson. Agora que já conhecemos o método, vamos fazer dois exemplos.

Exemplo 1: Calcule a raiz quadrada de 3 com erro menor que $0,01$.Este exemplo consiste na resolução da equação $x^2 = 3$, a qual pode ser escrita como $x^2 - 3 = 0$. Neste caso, temos que $\epsilon = 0,01$. Dessa forma, vemos que neste exemplo o papel da função $f(x)$ será feito por $f(x) = x^2 - 3$. Para utilizar o método de Newton-Raphson nos basearemos basicamente nas Equações (20)-(21). Para dar o chute inicial, fazemos uma análise preliminar. Sabemos que $\sqrt{3}$ pertence ao intervalo $]1,2[$, por essa razão podemos optar por qualquer um dos extremos deste intervalo. Escolhamos $x_0 = 2$. A partir deste valor, calculemos x_1. Antes disso, notemos que $f'(x) = 2x$. Assim, temos que $f(x_0) = 1$ e $f'(x_0) = 4$; e

$$x_1 = 2 - \frac{1}{4}.$$

$$x_1 = 1,75.$$

Não podemos parar ainda, pois $|x_1 - x_0| = |2,00 - 1,75| = 0,25 > 0,01$. Neste caso, usando o mesmo procedimento para determinar x_2 a partir de x_1, temos que $f(x_1) = 0,0625$ e $f'(x_1) = 3,5$, o que nos fornece

$$x_2 = 1,75 - \frac{(0,0625)}{3,5}.$$

$$x_2 = 1,732123.$$

Note que ainda não podemos parar, pois

$$|x_2 - x_1| = |1,7500 - 1,7232| = 0,0178 > 0,0100.$$

Assim, vamos determinar x_3 a partir de x_2. Neste caso, temos $f(x_2) = 0,0002743369$ e $f'(x_2) = 3,464246$, o que nos dá

$$x_3 = 1,732123 - \frac{0,0002743369}{3,464246}.$$

$$x_3 = 1,732043809.$$

Como $|x_3 - x_2| = |1,732043809 - 1,732123000| = 0,00007919 < 0,01000000$ Agora já podemos parar, pois o erro dessa aproximação é inferior ao estabelecido. Assim, o valor da raiz quadrada de 3 com erro menor que $0,01$ é $1,732043809$. Perceba que embora tenhamos nos preocupado com o erro até a segunda casa decimal, o método de Newton até a quarta iteração nos forneceu uma precisão até a quinta casa decimal.

Exemplo 2: Determine a raiz negativa da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ com precisão de $0,01$.

Já sabemos que a raiz negativa desta equação se encontra no intervlo $[-5, -3]$, pois $f(-5)f(-3) < 0$. Neste exemplo, temos que $f'(x) = 3x^2 - 9$. Dessa forma, tomando $x_0 = -4$, temos

$$x_1 = -4 - \left(\frac{-25}{39}\right) = -3,35897.$$

Como $|-3,35897 + 4| = 0,64 > 0,01$, não podemos parar. Assim, temos

$$x_2 = -3,35897 - \left(\frac{-4,6675}{24,8480}\right) = -3,1711.$$

Como $|-3,1711 + 3,35897| = 0,18 > 0,01$, não podemos parar. Continuando, temos

$$x_3 = -3,1711 - \left(\frac{-0,3483}{21,1676}\right) = -3,1546.$$

Como $|-3,1546+3,1711| = 0,019 > 0,01$, não podemos parar. Na próxima iteração, temos que

$$x_4 = -3,1546 - \left(\frac{-0,0016}{20,8545}\right) = -3,1545.$$

Como $|-3,1545+3,1546| = 0,0001 < 0,0100$, podemos parar. E assim, a raiz negativa de $f(x) = x^3 - 9x + 3$ é $x = -3,1545$.

3.4 Estudo da Convergência do Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é bastante simples quando comparado com outros métodos, tais como o método da secante, pois a quantidade de cálculos realizados é bem menor que outros métodos. Nesta seção, estudaremos a convergência do método, ou seja, demonstraremos um teorema que nos garante que a metodologia adotada nos leva de fato à raiz de uma equação dada, quando a raiz existir.

Antes de tratarmos o Teorema 2, necessitamos relembrar sobre o método do ponto fixo (MPF), o qual atesta que se uma função $f(x)$ tiver uma única raiz ξ num dado intervalo I centrado em ξ, e se a função de iteração $\phi(x)$[3] for contínua e tiver derivada $\phi'(x)$ contínua em I, além de $|\phi(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ e $x_0 \in I$; então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo irterativo $x_{k+1} = \phi(x_k)$ converge para ξ[4].

Seja então o Teorema 2 evidenciado a seguir.

Teorema 2:

Se $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são funções contínuas em um intevalo I, onde a raiz $x = \xi$ pertence ao intervalo, então $f(\xi) = 0$. Vamos supor $f'(\xi) \neq 0$. Então, existe um intercalo $I_1 \subset I$, contendo a raiz ξ, tal que $x_0 \in I_1$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{22}$$

convergirá para a raiz ξ.

Na sequência faremos uma demonstração do Teorema 2.

Demonstração: O método de Newton-Raphson é um método do ponto fixo com

[3] uma função de iteração $\phi(x)$ é definida tal que $f(\xi) = 0$ se e somente se $\phi(\xi) = \xi$. Dessa forma, o problema de encontrar um zero para $f(x) = 0$ é transformado no problema de encontar um ponto fixo para $\phi(\xi)$

função iteração $\phi(x)$ dada por

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Para provar a convergência do método, basta verificarmos que a equação (22) satisfaz as hipóteses do teorema. Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada num intervalo I_1, onde $I_1 \subset I$. Seja $\phi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$. Se as três condições seguintes forem satisfeitas

- $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas em I_1
- $|\phi'(x)| < M < 1 \forall x \in I_1$
- $x_0 \in I_1$,

então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \phi(x_k)$ converge para ξ.

Temos que

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e

$$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Pela hipóteses, $f'(\xi) \neq 0$ e como $f'(x)$ é contínua em I, é possível obter $I_1 \subset I$ tal que $f'(x) \neq 0, \forall x \in I_1$.

Assim, no intervalo $I_1 \subset I$, tem-se que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas e $f'(x) \neq 0$. Portanto, $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas em I_1.

Como $\phi'(x)$ é contínua em I_1, e $\phi'(\xi) = 0$, é possível escolher $I_2 \subset I_1$, tal que $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$, e ainda, I_2 pode ser escolhido de forma que a raiz seja seu centro. Com isso, conseguimos obter um intervalo $I_2 \subset I$, centrado na raiz, tal que $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas em I_2 e $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$. Assim, fica mostrado que $I_2 = I_1$.

Portanto, se $x_0 \in I_1$ a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

converge para a raiz. Dessa forma, fica demonstrado o Teorema.

Geralmente pode se afirmar que o método de Newton converge para a raiz desde que a escolha do x_0 seja suficiente próximo da raiz.

4 Qual é a raiz negativa da equação $2^x = x^2$?

Neste capítulo responderemos a primeira grande pergunta deste trabalho, ou seja, estudaremos a raiz negativa da equação $2^x = x^2$. A motivação para se discutir essa equação se ramifica em duas, quais sejam: a primeira delas é que na maior parte das vezes em que tal equação é discutida, a procura se restringe às raízes positivas; enquanto a segunda é que para resolvê-la necessitamos recorrer a métodos numéricos, os quais caem no ostracismo ao público docente das escolas de ensino médio. Sendo assim, resolveremos esta equação utilizando o método de Newton-Raphson.

Antes de iniciar a resolução da equação $2^x = x^2$, plotemos os gráficos das funções $g(x) = 2^x$ e $h(x) = x^2$ no mesmo eixo de forma a visualizarmos os pontos nos quais os gráficos se cruzam, ou seja, as raízes da equação $2^x = x^2$. Observando a Figura (3) notamos que há três pontos, sendo um deles para x negativo. É justamente a raiz negativa que nos interessaremos a estudar.

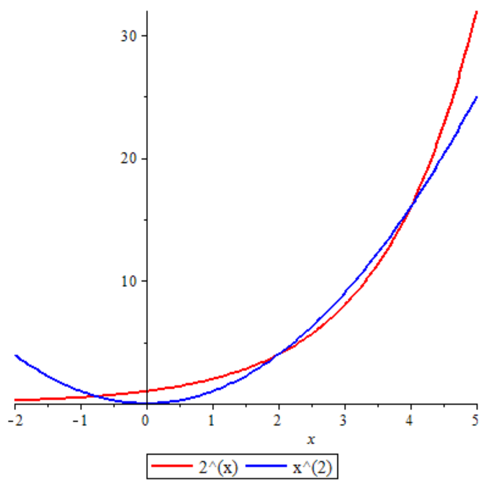

Figura 3: Gráfico das funções $g(x) = 2^x$ e $h(x) = x^2$ plotados no mesmo eixo

A resolução será embasada na discussão da seção 2. Nesta resolução, pretendemos estimar a raiz com um erro inferior a 10^{-5}, pois seguiremos de perto os cálculos realizados na referência (LIMA, 1991, p.1) ([11]). Nesse percurso, nosso chute inicial será $x_0 = -1$, pois pelo gráfico dado na Figura (3) percebemos que $x = -1$ está na vizinhança da raiz negativa.

Assim, utilizaremos o método de Newton-Raphson com $f(x) = 2^x - x^2$. Dessa forma, temos também que $f'(x) = 2^x \ln(x) - 2x$. A primeira aproximação para a raiz, x_1, é igual a

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$
$$x_1 = -0,7869233668.$$

Obviamente não podemos parar ainda, pois o erro $|x_1 - x_0| = |-0,7869233668 - (-1)|$, ainda é maior que 10^{-5}.

Para simplificar a leitura, disponibilizamos os valores calculados em cada iteração do método na Tabela 1, a qual segue mostrada a seguir. Fazendo as iterações, teremos

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\epsilon = \|x_{n+1} - x_n\|$
0	-1	$-0,5$	$2,346573590$	$-0,7869233668$	$0,2130766332$
1	$-0,7869233668$	$-0,0396696240$	$1,975580118$	$-0,7668433793$	$0,0200799875$
2	$-0,7668433793$	$-0,0003468060$	$1,941050717$	$-0,7666647101$	$0,0001786692509$
3	$-0,7666647101$	$-0,00000000274$	1.94074383	$-0,7666646960$	$0,000000000141$

Tabela 1: Aproximações sucessivas para a raiz negativa da equação $2^x = x^2$.

No artigo (LIMA, 1983, p.20)[1], o qual serviu de suporte para desenvolvermos este trabalho, foi utilizado o método das aproximações sucessivas para se resolver essa mesma equação.

Outro ponto notável da solução é que mediante o valor encontrado, fica explícita a existência de logaritmo de número negativo. Por esse motivo, abordaremos este assunto na próxima seção.

5 Existe Logaritmo de Números Negativos?

Neste capítulo tentaremos responder a segunda pergunta chave que nos motivou a escrever este trabalho. Tal pergunta seria, "podemos calcular logaritmo de números negativos?". Se analisarmos de um ponto de vista do conteúdo usualmente ensinado na educação básica, mais especificamente no ensino médio, a nossa resposta seria negativa.

Quando dizemos que não existe logaritmo de números negativos, estamos amparados na definição que geralmente é apresentada na primeira série do ensino médio, qual seja:

"Sendo a e b números reais positivos, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente em que a deve ser elevado de modo que a potência obtida de base a seja igual a b, isto é,

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b,$$

em que $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$."

Observe as seguintes obervações acerca da definição usualmente apresentada no ensino médio: (i) a e b são tomados como números reais; (ii) a deve ser maior que zero. Ou seja, a definição apresentada se restringe ao caso em que a pertence ao conjunto dos números reais positivos. Mas, com a solução apresentada no tópico 4 percebemos que tal conceito necessita ser estendido, pois utilizando como ferramenta o cálculo numérico, mostramos que existe uma raiz que não é calculada pelos métodos conhecidos dentro do universo dos números reais. Portanto, mostramos no trabalho o poder que temos ao inserir essa ferramenta no cálculo de raízes. Sendo assim, mostraremos neste capítulo que se extrapolarmos a definição do logaritmo ao caso em que a possa ser um número complexo, poderemos tratar de logaritmo de números negativos. Esta extensão no estudo de logaritmos passa a ter muito sentido a partir da justificativa apresentada e é reforçada pelo fato que tal procedimento pode ser plenamente explorado no ensino básico com os conhecimentos adquiridos até o momento da explanação de tal conteúdo.Porém, muita discussão decorre desta "nova" definição, dentre as quais o conceito de funções multivalentes (BROWN E CHURCHILL, 2015, p.30; AVILA, 2000, 27; SPIEGEL, 1972, 45)[6, 7, 8].

5.1 Logaritmo de Número Negativo

Para falar de logaritmos de números negativos vamos nos lembrar antes do conceito de logaritmo natural. O logaritmo natural de um número a, representado por $\ln a$ nada mais é que o logaritmos de a quando a base do logaritmo é o número de Euler $e = 2,718281...$. Desta forma, podemos escrever $\ln a = \log_e a$.

A partir deste ponto, podemos pensar no cálculo do logaritmo natural de um número complexo z escrito na forma $z = re^{i\theta}$, isto é,

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln re^{i\theta} \\ &= \ln r + \ln e^{i\theta} \\ &= \ln r + i\theta, \end{aligned} \tag{23}$$

neste último cálculo utilizamos a conhecida propriedade dos logaritmos de números reais $\ln ab = \ln a + \ln b$, a qual continua válida quando a e b são números complexos (BROWN E CHURCHILL, 2015, p.30; AVILA, 2000, 27)[6, 7]. Note que $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$. Dessa forma, o valor de $\ln z$ não é único. Assim, para obtermos um valor único para o $\ln z$ devemos restringir o intervalo em que θ é definido. Usualmente escolhemos $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Caso não façamos isso, teremos infinitos resultados para a mesma expressão, ou seja, infinitos resultados para $\ln z$. Por essa razão, dizemos que a função $f(z) = \ln z$ é multivalente. Porém, quando restringimos o domínio de θ, $\ln z$ fica definido de maneira única para todo z.

Agora, vamos apresentar por meio de exemplos a existência de logaritmos de números negativos. Como exemplo, vamos calcular o logaritmo natural de -1. Essa tarefa é muito simples, mas para realizá-la devemos representar o -1 na forma de Euler. Ai você se pergunta: como posso representar o -1, que é um número real, na forma de Euler? A resposta é muito simples, pois todo número real é complexo, tendo a parte imaginário igual a zero. Neste caso, seja

$$z = -1 = -1 + 0i.$$

O módulo deste número complexo é $r^2 = (-1)^2 + 0^2 = 1$, por isso, $r = 1$. Além disso, $\tan\theta = y/x = 0/(-1) = 0$. Note que o ângulo θ possui tangente nula, mas a componente x é negativa. Neste caso, devemos ter $\theta = \pi + 2k\pi$. Para que o ângulo seja univocamente definido, restringiremos o intervalo de definição do θ da forma usual. Assim, obtemos

$$z = -1 + 0i = 1e^{i\pi} = e^{i\pi}.$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados da útima expressão, temos

$$\ln -1 = \ln e^{i\pi} = i\pi. \tag{24}$$

Para facilitar a compreensão, apresentamos o cálculo do logaritmo natural do número (-3), $\ln(-3)$. Seguindo o raciocíno do exemplo anterior, temos que

$$z = -3 = -3 + 0i = 3e^{i\pi},$$

assim:

$$\ln -3 = \ln 3e^{i\pi} = \ln 3 + i\pi.$$

De uma forma geral, se a for um número rela positivo, isto é, $a > 0$, temos

$$\ln -a = \ln ae^{i\pi} = \ln a + i\pi.$$

Ou seja, com tais resultados, quebramos o paradigma de que não é possível o cálculo de logaritmos de números negativos. Sendo assim, neste tópico foi apresentado como se calcula logaritmo de números negativos.

6 Considerações finais

Com o termino desse trabalho podemos concluir que apesar da aparência da equação $x^2 = 2^x$, um tanto quanto simples, ela torna-se muito elegante quando falamos de sua raiz negativa; suas raízes positivas, que são $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$, são também importantes, mas a negativa leva destaque pela sua estratégia de resolução. Pode-se resolver a equação e chegar na raiz negativa usando os cálculos numéricos, mas resolvemos calculá-la pelo método de Newton-Raphson, pois o método é por sua vez simples e de fácil aplicação, pois o mesmo chega a raiz com uma pequena quantidade de interação. Ao resolvermos a equação tivemos que demostrar que de fato existe logaritmos de números negativos, usando a fórmula de Euler. Essa solução pelo método de Newton-Raphson, chega bem rápido à raiz negativa que é igual a $-0,76666$, podemos perceber que com uma boa escolha do ponto inicial faz com que com apenas quatro interação chegamos ao resultado esperado.

Essa equação pode ser um fator que desperta bastante curiosidade, pois na sua solução quando a mesma é feita por outro método torna se grande e desgastante, por esse motivo podemos, ao falarmos do método de Newton Raphson, colocá-la como exemplo, um grande exemplo. O método de Newton-Raphson tem o seu papel importante na resolução de equações lineares, pois não há outra forma de calcular a raiz que seja tão eficaz e simples como esse.

Sendo assim, este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de atingir estudantes do ensino médio, bem como para que professores de matemática da educação básica adquiram uma nova concepção acerca dos logaritmos. Além de despertar o interesse dos estudantes, este trabalho também servirá de material complementar para cursos de graduação em ciências exatas, tais como Matemática, Física e Engenharias.

Como perspectiva, esperamos aprimorar este material para que ele contemple, de forma plena, não somente os docentes de nível médio, bem como os estudantes.

Referências

[1] E.L. Lima, *Números negativos têm logaritmo?*, **Revista do Professor de Matemática** n. 3, p. 20-24, São Paulo (1983).

[2] H. Eves, *Introdução à História da Matemática*, Editora Unicamp, Campinas (2004).

[3] C.B. Boyer, *História da Matemática*, Edgard Blucher, São Paulo (1974).

[4] J. W. Brown, R. V. Churchill, *Variáveis Complexas e Aplicações*, McGraw-Hill, São Paulo (2015).

[5] G. Ávila, *Funções de uma variável complexa*, LTC, Rio de Janeiro (2000).

[6] M. Spiegel, *Variáveis Complexas com uma introdução as transformações conformes e suas aplicações*, Editora McGraw-Hill, Rio de Janeiro (1972).

[7] M.A.G. Ruggiero, V.L.R. Lopes, *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*, Pearson, São Paulo (2000).

[8] N.B. Franco, *Cálculo Numérico*, Pearson, São Paulo(2003).

[9] J. Stewart, *Cálculo - Vol. 2*, Vol.2, Editora Pioneira Thomson Learning, São Paulo (2009).

[10] H. Anton, *Cálculo, Um Novo Horizonte*, Vol. 2, Editora Bookman (2000).

[11] E.L. Lima, *Meu professor de matemática e outras histórias*, **Sociedade Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro (1991).