UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ANTONIO ALISON PINHEIRO MARTINS

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES: uma análise com estudantes do ensino superior

SÃO LUÍS

2018

ANTONIO ALISON PINHEIRO MARTINS

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES: uma análise com estudantes do ensino superior

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José da Silva

SÃO LUÍS

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Martins, Antonio Alison Pinheiro.
GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES : uma análise com estudantes do ensino superior / Antonio Alison Pinheiro Martins. - 2018.
134 p.

Orientador(a): Antonio José da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

1. Ensino Médio. 2. Geometria Analítica. 3. Vetores. I. Silva, Antonio José da. II. Título.

ANTONIO ALISON PINHEIRO MARTINS

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES: uma análise com estudantes do ensino superior

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: ___/___/______

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Antonio José da Silva
Doutor em Informática na Educação
Orientador

____

Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves
Doutor em Estatística
Membro Interno

____

Prof. Drª. Waléria de Jesus Barbosa Soares
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me amparado em todos os momentos da minha vida, me ajudando, orientando e incentivando a seguir. A ele meus eternos agradecimentos!

Aos meus pais Dorinha e Luiz Martins e as minhas irmãs Naiara e Vilma, que tantas vezes me apoiaram para seguir em frente. Amo vocês!

Aos meus sobrinhos Eloisa, Gustavo e Theo que de forma singela e simples contribuíram com a minha formação. Gosto de vocês!

Ao meu orientador, professor Dr. Antonio José da Silva pela paciência, atenção e dedicação oferecidas durante a construção deste trabalho. Muito obrigado, pelo amparo em todos os momentos!

A todos os meus professores do PROFMAT que foram responsáveis pela minha formação.

Aos meus amigos Gabriela Rodrigues, Natanael Charles e Suzana que foram fontes de inspiração em muitos momentos de estudos.

Aos meus diretores Francisco, Gisele, Isabel e Viviane que durantes estes dois anos me apoiaram e incentivaram a seguir.

Por fim agradeço aos meus colegas de turma que compartilharam momentos importantes no decorrer do curso.

RESUMO

O presente trabalho busca analisar o conhecimento de estudantes do ensino superior sobre geometria analítica e vetores. Foi feito um estudo, relacionando os conteúdos abordados desde os primeiros conceitos de geometria analítica, estudados na educação básica, até o estudo de vetores no plano e no espaço, trabalhados no Ensino Superior. A estrutura metodológica consistiu na coleta e análise de dados sobre resolução e conhecimento de vetores, ocorrendo em duas etapas. Na primeira os estudantes responderam um questionário contendo 11 questões envolvendo os conceitos de vetores e suas propriedades, já na segunda foi realizada uma entrevista tomando por base as respostas obtidas na primeira etapa. A análise dos dados ocorreu mediante o exame das respostas, buscando identificar os conceitos da Geometria Analítica que fundamentam conceitualmente o estudo da Álgebra de Vetores. Os alunos apresentaram definições próprias e ao mesmo tempo embasadas na teoria. Verifica-se que conceitos matemáticos vistos no ensino médio são suscitados com frequência para fundamentar o estudo de vetores.

Palavras-chaves: Ensino médio, Geometria Analítica, Vetores.

ABSTRACT

The present work seeks to analyze the knowledge of students of higher education on analytical geometry and vectors. A study was carried out, relating the contents covered from the first concepts of analytical geometry, studied in basic education, to the study of vectors in the plane and in space, worked in Higher Education. The methodological structure consisted of the collection and analysis of data on resolution and knowledge of vectors, occurring in two stages. In the first one the students answered a questionnaire containing 11 questions involving the concepts of vectors and their properties, already in the second an interview was made based on the answers obtained in the first stage. The analysis of the data occurred through the examination of the answers, seeking to identify the concepts of Analytical Geometry, which are the conceptual basis for the study of Vector Algebra. The students presented their own definitions and at the same time based on theory. It is verified that mathematical concepts seen in high school are often raised to support the study of vectors.

Keywords: High school, Analytical Geometry, Vectors.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O vetor é constantemente estudado nos cursos superior de matemática e física, sendo utilizado para desenvolver conceitos e na representação de grandezas. Com isso, este trabalho pretende fazer uma análise do conhecimento construído por alunos de graduação sobre geometria analítica e vetores desenvolvendo detalhadamente a fundamentação teórico que envolve o assunto em questão.

Pretende-se conhecer como os alunos relacionam os conceitos relacionados a vetores com os assuntos estudados na Geometria Analítica, ou seja, quais as contribuições da Geometria Analítica estudada no ensino médio para o estudo de vetores no nível superior. Esta pesquisa, cujo tema é sobre a Geometria Analítica e Vetores, fazendo uma análise com estudantes do Ensino Superior, tem como objetivo geral, analisar os conhecimentos construídos por alunos do ensino superior sobre geometria analítica e vetores fazendo uma ligação dos conteúdos abordados desde os primeiros conceitos de geometria analítica estudados na educação básica, até o estudo de vetores no plano e no espaço trabalhados no nível superior.

Esta pesquisa é de natureza qualitativa, faz um estudo bibliográfico sobre os temas e conceitos mais relevantes da Geometria Analítica para tratar do tema Vetores. A pesquisa consiste também de um estudo com participação voluntária de alunos. Nesse estudo, por meio da aplicação de um questionário e entrevistas exploratórias dos conceitos tratados no questionário sobre o tema vetores, foi proposto conhecer a qualidade da relação dos conceitos da geometria analítica no processo de conceituação de elementos da álgebra de vetores e sua representação.

Existem muitas grandezas que estão associadas a vetores, estas, são chamadas de grandezas vetoriais. Geralmente, e está no currículo vigente do primeiro ano do Ensino Médio, o conceito de vetor é tratado na física e são tratados nos livros didáticos da física. Mas apesar do tema vetores, aparecer inicialmente nos livros didáticos da física, o conceito de vetor é matemático. Sobre esse problema, é feita uma observação, no livro "Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio", lançado em 2001 pela SBM de autoria do professor Elon Lages Lima. Esta obra apresenta as conclusões de uma análise de doze coleções de livros didáticos da matemática usados no ensino médio no Brasil. Na análise de um dos livros, Lima (2001, p.130) faz o seguinte comentário: "[...] um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para o ensino médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática". Com isso, os conceitos matemáticos abordados no estudo de vetores não são estudados no ensino médio do Brasil, talvez pela falta deste conteúdo nos livros didáticos da matemática ou pelo fato de não ser cobrado no exame nacional do ensino médio (ENEM) e nos diversos vestibulares do país. Salvo apenas em dois colégios do Rio de Janeiro, o colégio de Aplicação de UFRJ e o de Aplicação de UERJ que trabalham o tópico de vetores com um material didático elaborado pelos próprios professores da instituição.

A revisão de literatura apresentada neste trabalho se deu a partir da análise de uma amostra de sete dissertações que estão na plataforma do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) apresentadas entre os anos de 2014 e 2018 que tratam do estudo de vetores e geometria analítica. Essas dissertações foram selecionadas a partir das palavras chave vetores e geometria analítica.

Rigonatto (2018) em sua dissertação cujo título é "Introdução ao Estudo dos Vetores e Aplicações no Ensino Médio", apresenta uma proposto de inclusão do estudo de vetores no ensino médio, com o intuito de oferecer uma possibilidade mais ampla e clara para algumas demonstrações matemáticas em tal nível de estudo. O mesmo desenvolve todo o conceito de vetores no plano, desde a noção de segmentos equipolentes até a de autovalores e autovetores no R^2 e faz a demonstração de 11 exemplos de relações matemáticas estudadas no ensino médio usando as ideias de vetores apresentadas na sua fundamentação teórica.

Lucas (2017) apresenta em sua dissertação, cujo título é "Elaboração de uma Sequência de Ensino de Vetores por Meio da Sequência Fedathi e Exploração de suas Representações com Uso do Geogebra", uma proposta voltada para a inclusão de vetores no ensino médio a partir da elaboração de uma sequência didática na qual deverá ser aplicada no primeiro ano. Nesta proposta, o autor sugere a realização de sete atividades que envolvem os conceitos matemáticos de vetores, onde, ao aplicar em sala de aula o professor deverá fazer uso do software Geogebra junto à sequência Fedathi com intuito de favorecer o ensino e a aprendizagem, permitindo aos alunos que abordem os dados do problema, experimente vários caminhos que possam levar à solução, analise os possíveis erros, teste os resultados, e monte um modelo. Após cada atividade o professor deverá apresentar aos alunos as definições formais sobre os conceitos abordados na atividade. O mesmo entende que os alunos que terminam o ensino médio apresentam muitas dificuldades relacionadas ao conceito de vetor, tornando-se um dificultador para estudos futuros que necessitem de tais conceitos, o que o levou a criar a sequência didática apresentada acima.

Também como proposta para o ensino médio e com o auxílio de Geogebra, Martins (2015), em sua dissertação cujo título é “O Ensino de Vetores e a Interdisciplinaridade”, indica o estudo dos vetores nas disciplinas da Matemática e da Física, de modo a trabalhar as propriedades algébricas e geométricas deste conceito. O mesmo elabora em seu trabalho um tutorial sobre construções de vetores e das operações com vetores no Geogebra. Como sugestão de aplicação, o autor apresenta duas questões e suas resoluções utilizando o Geogebra a partir das operações com vetores, uma sobre as operações com números complexos da matemática e outra sobre o plano inclinado da física.

Nesta mesma perspectiva de aprimorar os conceitos matemáticos dos vetores no ensino médio a partir de matérias concretos, Nascimento (2014), em sua dissertação cujo título é “O Ensino de Vetores na Primeira Série do Ensino Médio com Auxílio de Geoplano, da Malha Quadriculada e do Geogebra”, afirma que os alunos do ensino médio ao estudarem vetores apenas na física, veem o vetor como um objeto dotado de sentido, direção e módulo que é usado como ferramenta para resolver problemas da cinemática e da dinâmica, ficando de lato todo o conceito matemático que envolve tal estudo. Com isso, o autor propõe o uso de matérias concretos como o Geoplano e a malha quadriculada, associados ao uso do software Geogebra, no estudo dos conceitos e propriedades de vetores na primeira série do ensino médio, pois estes matérias facilitam a visualização e a manipulação de um ou mais vetores simultaneamente.

Veloso (2015), em sua dissertação cujo título é “Uma Proposta para a Utilização dos Vetores como Ferramenta de Resolução de Problemas de Geometria”, também sugere uma abordagem vetorial no ensino médio, só que voltado para a resolução de problemas das geometrias plana e analítica. O mesmo mostra como explorar propriedades das figuras geométricas e resolver problemas relativos às geometrias usando os vetores. Neste contexto, apresenta uma abordagem conceitual dos vetores com suas propriedades e a resolução de 19 questões das geometrias plana e analítica a partir das propriedades dos vetores.

Já Novaes (2015), em sua dissertação cujo título é “Geometria Analítica e Vetores: Uma Proposta para Melhoria do Ensino da Geometria Espacial”, sugere introduzir as definições e os conceitos sobre vetores no R^2 e no R^3 no ensino básico do estado de São Paulo, junto com as propriedades e operações e através deste conhecimento mostrar, com vários exemplos e aplicações, como isto simplifica e facilita o entendimento das atividades propostas nesta parte da educação matemática e de modo a facilitar a compreensão dos conceitos da geometria espacial. O mesmo apresenta todo o conteúdo da geometria analítica abordado no ensino médio a partir dos conceitos de vetores no plano e de suas propriedades e estende para o estudo de ponto, reta e plano para o R^3.

Por fim, Cabral (2014), em sua dissertação cujo título é "Introdução do Estudo de Vetores no Ensino Médio: Um Ganho Significativo para o Estudo da Geometria Analítica (2014)", realiza uma análise dos conteúdos apresentados em doze livros didático destinados ao ensino médio, onde, observa como estes apresentam a Geometria Analítica e se usam a noção de vetores. A mesma apresentar uma forma alternativa para o ensino de Geometria Analítica no terceiro ano do ensino médio, utilizando como ferramenta, o estudo de vetores no plano e no espaço, o que possibilitará uma melhor apresentação e compreensão dos conteúdos de geometria, bem como a facilitação na resolução de problemas.

Quanto à estruturação desta dissertação, ressalta-se que o Capítulo 2 trata dos conceitos da Geometria Analítica, tratados nesta pesquisa como base conceitual para o estudo de vetores. No Capítulo 3 é feita a descrição da metodologia utilizadas e as análise possíveis. Já no Capítulo 4 estão as considerações e conclusões.

2 UMA BASE CONCEITUAL PARA O ESTUDO DE VETORES

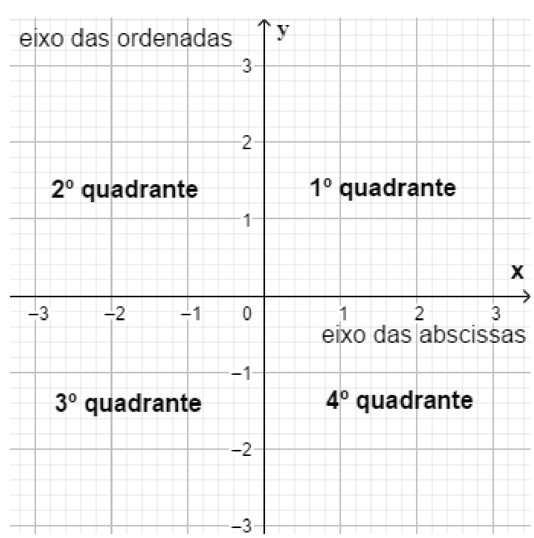
A geometria analítica é o estudo da geometria por meio do sistema de coordenadas cartesianas. Resumidamente, segundo Balestri (2016, p.148) "podemos dizer que é a transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente, pela correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, permitindo associar a cada curva no plano uma equação com duas variáveis x e y". A seguir, serão abordados os conceitos de ponto e reta no plano.

2.1 PONTO

2.1.1 Coordenadas no plano cartesiano ortogonal

O plano cartesiano ortogonal consiste em um plano dividido em quatro regiões por duas retas orientadas, com graduação, e perpendiculares entre si. O ponto em que estas retas se cruzam é denominado origem (ponto O). A uma reta orientada e com graduação na qual é fixada uma origem damos o nome de eixo. No plano cartesiano ortogonal, o eixo horizontal é denominado eixo das abscissas (eixo Ox), e o eixo vertical, eixo das ordenadas (eixo Oy), ambos graduados. Cada uma das quatro regiões em que o plano é dividido é denominada quadrante. Tal plano cartesiano é ilustrado na figura 1.

Figura 1 - Plano cartesiano ortogonal

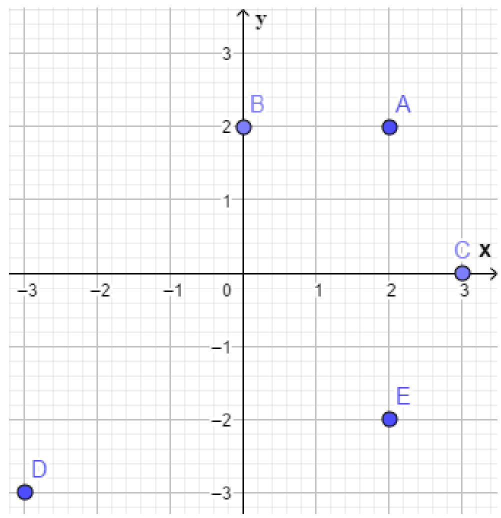


Fonte: Elaborada pelo autor

No plano cartesiano, localizamos um ponto qualquer por meio de um par ordenado (x, y), com $x \in R$ e $y \in R$, que são as coordenadas do ponto.

Observe na ilustração da figura 2 os pontos $A = (2,2)$, $B = (0,2)$, $C = (3,0)$, $D = (-3,-3)\ e\ E = (-2,2)$ representados no plano cartesiano.

Figura 2 – Plano cartesiano



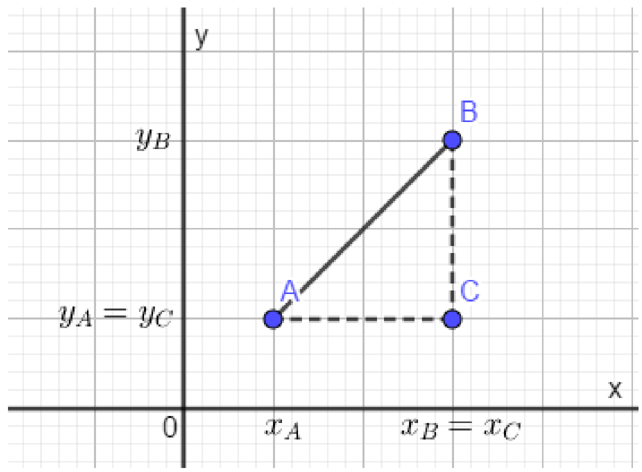
Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.2 Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos A e B é a medida do segmento $\overline{AB}$. No entanto, em geometria analítica, podemos calcular a distância entre os dois pontos por meio de suas coordenadas. Para isso, vamos considerar como unidade de medida de comprimento a unidade que separa dois números inteiros consecutivos em cada eixo.

Para determinar a distância $d_{A,B}$ entre os pontos $A = (x_A, y_A)\ e\ B = (x_B, y_B)$, vamos representar tais pontos no plano cartesiano ilustrado na figura 3.

Figura 3 – Distância entre dois A e B



Fonte: Elaborada pelo autor

Repare que temos um triângulo ABC, retângulo em C.

Pelo teorema de Pitágoras:

$$(d_{A,B})^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

Sabemos que $AC = |x_B - x_A|$ e que $BC = |y_B - y_A|$.

Como $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ e $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$, temos:

$$(d_{A,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Portanto, a distância entre os pontos $A = (x_A, y_A)\ e\ B = (x_B, y_B)$ do plano cartesiano é dada por:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemplo 1. Calcule a distância entre os pontos $A = (4,6)\ e\ B = (1,2)$.

Solução: Temos que $x_A = 4, y_A = 6, x_B = 1\ e\ y_B = 2$.

Substituindo esses valores em $d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, temos:

$$d_{A,B} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2},$$

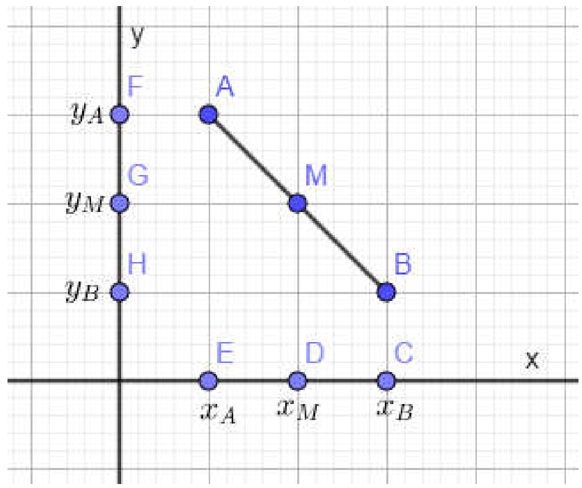
$$d_{A,B} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2},$$

$$d_{A,B} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

2.1.3 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Considere o segmento de reta de extremos $A = (x_A, y_A)\ e\ B = (x_B, y_B)$ e ponto médio $M = (x_M, y_M)$ representado na figura 4.

Figura 4 – Ponto médio M do segmento AB



Fonte: Elaborada pelo autor

Pelo teorema de Tales, encontramos a seguinte relação entre as abscissas desses pontos:

$$AM = MB \Rightarrow ED = DC \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A$$

Portanto:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Também, pelo teorema de Tales, encontramos a seguinte relação entre as ordenadas:

$$AM = MB \Rightarrow HG = GF \Rightarrow y_M - y_B = y_A - y_M \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B$$

Portanto:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Podemos concluir que, se tivermos um segmento de extremos A e B, a abscissa do ponto médio será a média aritmética das abscissas dos extremos, e a ordenada será a média aritmética das ordenadas dos extremos. Portanto, o ponto médio do segmento AB é dado por:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Exemplo 2. Sendo $A = (-12{,}10)\ e\ B = (4, -2)$, determine as coordenadas do ponto médio M do segmento AB.

Solução: Temos que $x_A = -12, y_A = 10, x_B = 4\ e\ y_B = -2$.

Substituindo esses valores em $M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, temos:

$$M = \left(\frac{-12+4}{2}, \frac{10+(-2)}{2}\right)$$

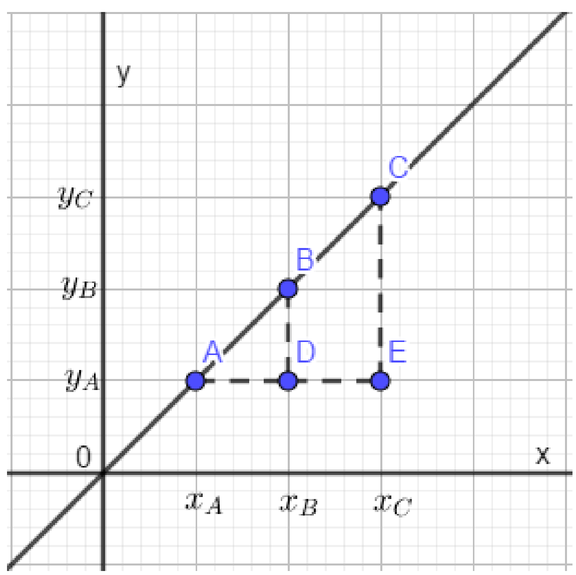
$$M = \left(\frac{-8}{2}, \frac{8}{2}\right)$$

$$M = (-4{,}4).$$

2.1.4 Condição de alinhamento de três pontos

Três pontos $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)\ e\ C = (x_C, y_C)$, estão alinhados quando é possível construir uma reta que passa pelos três pontos, ou seja, são colineares. A figura 5 apresenta tais pontos no plano cartesiano e a reta que passa por estes.

Figura 5 – Pontos A, B e C representados no plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com a figura 5, os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Assim:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}$$

$$(x_C - x_A)(y_B - y_A) = (x_B - x_A)(y_C - y_A)$$

$$(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) = 0$$

$$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C - x_A y_A = 0$$

$$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C = 0$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1 e reordenando os termos, obtemos:

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0 \qquad (1)$$

Vamos recordar o desenvolvimento, pela regra de Sarrus, do determinante abaixo.

A seguir, vamos compará-lo com o primeiro membro da igualdade (1).

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A.$$

Portanto, o primeiro termo da igualdade (1) é o determinante D. Logo, se três pontos $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)\ e\ C = (x_C, y_C)$ estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Neste caso a recíproca também é verdadeira:

Se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, então os pontos $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)\ e\ C = (x_C, y_C)$ estão alinhados.

Assim, três pontos, $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)\ e\ C = (x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplo 3. Verifique se os pontos $A = (3,2), B = (4,1)\ e\ C = (1,4)$ são colineares.

Solução: Temos que $x_A = 3, y_A = 2, x_B = 4\ , y_B = 1, x_C = 1\ \ e\ y_C = 4$.

Substituindo esses valores em $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 3 + 2 + 16 - 1 - 12 - 8 = 0$$

Como $D = 0$, os pontos são colineares.

2.2 RETAS

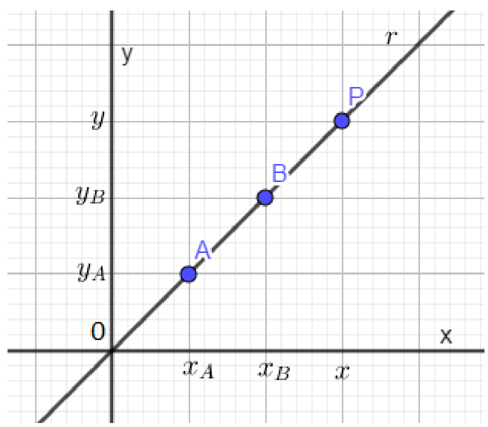
Em geometria analítica, a reta é representada por uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Para determinar uma reta e sua equação, é preciso conhecer dois de seus pontos distintos ou, então, um de seus pontos e o ângulo de inclinação.

2.2.1 Equação geral da reta

Sejam dois pontos distintos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, e um ponto genérico, $P = (x, y)$, também pertencentes à reta r.

A figura 6 apresenta no plano cartesiano os pontos A, B e P citados anteriormente e a reta r que os contem.

Figura 6 – Representação no plano cartesiano dos pontos A, B e P e da reta r que os contem



Fonte: Elaborada pelo autor

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B e P, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_A y_B + x y_A + x_B y - x y_B - x_B y_A - x_A y = 0$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Fazendo $(y_A - y_B) = a,\ (x_B - x_A) = b$ e $x_A y_B - x_B y_A = c,$ com a e b simultaneamente não nulos, obtemos a equação geral da reta:

$$ax + by + c = 0$$

Exemplo 4. Obtenha a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A = (1,3)\ e\ B = (4,2)$.

Solução: Considere um ponto $P = (x, y)$ pertencente à r e $x_A = 1, y_A = 3, x_B = 4\ e\ y_B = 2$.

Substituindo esses valores em $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 + 3x + 4y - 2x - y - 12 = 0$$

$$x + 3y - 10 = 0$$

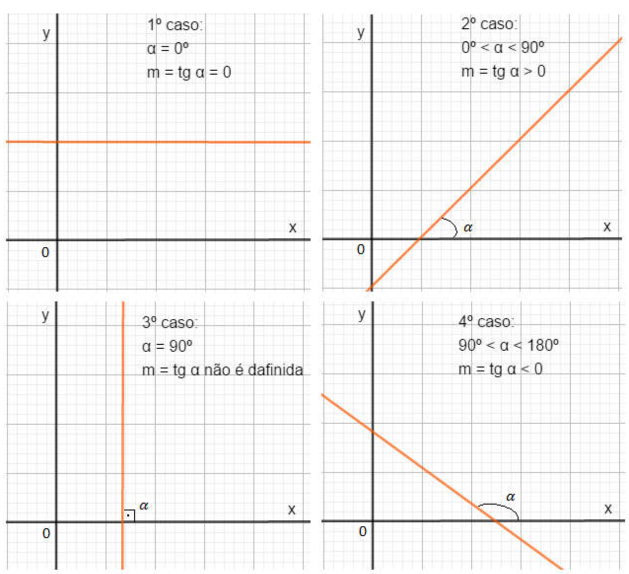
2.2.2 Inclinação e coeficiente angular de uma reta

O ângulo α de inclinação de uma reta, ou apenas inclinação da reta, é considerado no sentido anti-horário, partindo do eixo x. A tangente desse ângulo é denominada coeficiente angular ou declividade da reta, geralmente indicada por m.

$$m = tg\ \alpha.$$

Como mostra a figura 7, podemos ter quatro casos.

Figura 7 – Os quatro casos para o coeficiente angular de uma reta



Fonte: Elaborada pelo autor

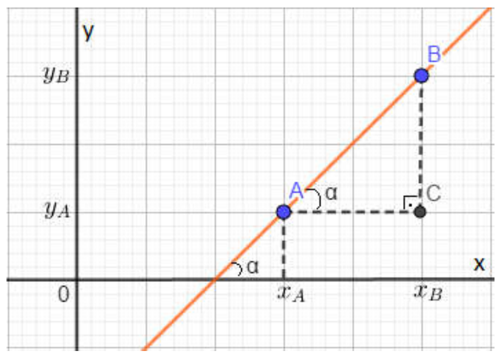
Quando não conhecemos o ângulo de inclinação, mas conhecemos dois pontos pertencentes à reta, podemos encontrar o coeficiente angular calculando $tg\ \alpha$ por meio das coordenadas dos pontos.

Proposição 1. Sejam dois pontos distintos, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, pertencentes a uma reta r não paralela ao eixo y e formando com o eixo x um ângulo α. O coeficiente angular da reta r é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Demonstração: Para o caso em que $0° < \alpha < 90°$, consideremos a figura 8.

Figura 8 – Ângulo $0° < \alpha < 90°$, entre a reta que passa pelos pontos A e B e o eixo x



Fonte: Elaborada pelo autor

O triângulo ABC é retângulo em C. Logo:

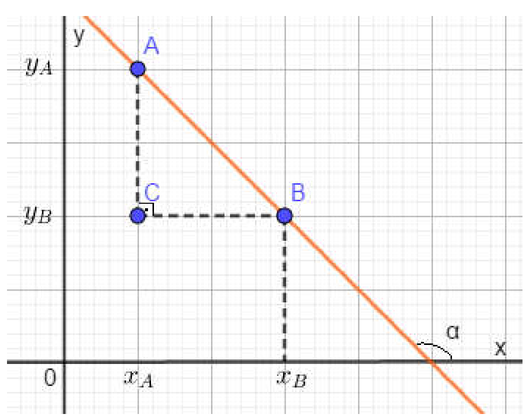
$$m = tg\ \alpha = \frac{d_{C,B}}{d_{A,C}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Para o caso em que $90° < \alpha < 180°$, consideremos a figura 9.

Figura 9 - Ângulo $0° < \alpha < 180°$, entre a reta que passa pelos pontos A e B e o eixo x



Fonte: Elaborada pelo autor

O triângulo ABC é retângulo em C. logo:

$$m = tg\ \alpha = -tg(180° - \alpha) = -\frac{d_{C.A}}{d_{C,B}} = -\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Podemos verificar que $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ vale também quando $\alpha = 0°$ pois $y_B = y_A\ e\ x_B \neq x_A$, logo m = 0.

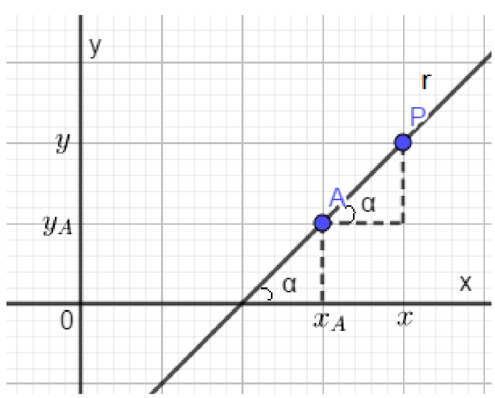
Portanto, para qualquer α, $0° \leq \alpha < 180°$, temos $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. ■

2.2.3 Equação da reta de coeficiente angular m e que passa por um ponto $A = (x_A, y_A)$

Já vimos como determinar a equação de uma reta conhecendo dois de seus pontos. Agora, vamos determinar a equação de uma reta r conhecendo um de seus pontos, A, e seu coeficiente angular m.

Considere o ponto $P = (x, y)$ na reta r, sendo $P \neq A$ e $m = tg\ \alpha$ representado na figura 10.

Figura 10 – Reta r que passa pelos pontos A e P e forma um ângulo α com o eixo x



Fonte: Elaborada pelo autor

Como $m = tg\ \alpha$, então:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

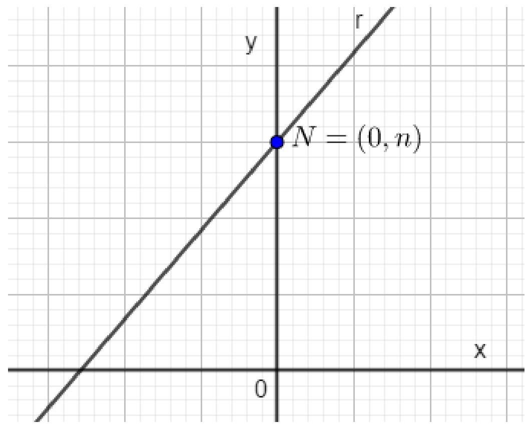
Portanto, a equação de uma reta que passa por $A = (x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é:

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

2.2.4 Equação reduzida da reta

Considerarmos na figura 11, a representado no plano cartesiano da reta r e o ponto N onde a reta intersecta o eixo y, isto é, $N = (0, n)$.

Figura 11 - Reta r e o ponto N onde a reta intersecta o eixo y



Fonte: Elaborada pelo autor

Sabemos que a equação da reta r que passa por um ponto $A = (x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é dado por $y - y_A = m(x - x_A)$. Assim, usando o ponto N, temos:

$$y - n = m(x - 0)$$

$$y = mx + n$$

A forma $y = mx + n$ é denominada equação reduzida da reta, em que m é o coeficiente angular da reta e n é a ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo y.

Exemplo 5. Determine a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos $A = (-3,2)$ e $B = (1,6)$.

Solução: Temos que $x_A = -3, y_A = 2, x_B = 1$, $y_B = 6$

Substituindo esses valores em $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, obtemos:

$$m = \frac{6 - 2}{1 - (-3)} = \frac{4}{4} = 1$$

Usando $x_A = -3, y_A = 2$ e $m = 1$ em $y - y_A = m(x - x_A)$, temos:

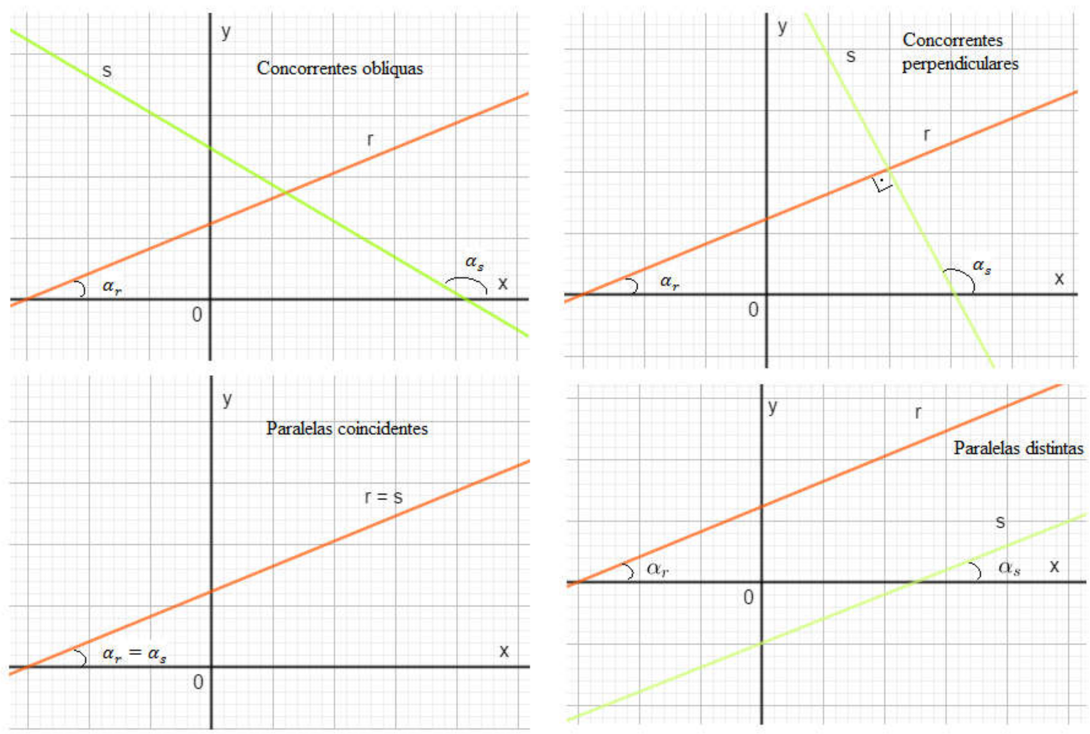
$$y - 2 = 1[x - (-3)]$$

$$y = x + 5$$

2.2.5 Posições relativa entre duas retas no plano cartesiano

Em um mesmo plano, duas retas podem ser concorrentes oblíquas, concorrentes perpendiculares, paralelas distintas ou paralelas coincidentes. A figura 12 apresenta estes quatro casos relacionados a posição entre duas retas no plano cartesiano.

Figura 12 – Retas concorrentes oblíquas, concorrentes perpendiculares, paralelas coincidentes e paralelas distintas



Fonte: Elaborada pelo autor

Duas retas r e s, cujas equações reduzidas são $y = m_r x + n_r$ e $y = m_s x + n_s$ respectivamente, são:

I. Paralelas distintas se, e somente se, $m_r = m_s \; e \; n_r \neq n_s$;
II. Paralelas coincidentes se, e somente se, $m_r = m_s \; e \; n_r = n_s$;
III. Concorrentes se, e somente se, $m_r \neq m_s$.

O fato de $m_r \neq m_s$ não é suficiente para determinar se as retas são oblíquas ou perpendiculares. Assim, vamos analisar o caso em que r e s são retas perpendiculares e não verticais.

No triângulo retângulo formado pelas retas concorrentes perpendiculares r, s e o eixo x nas figuras 12, temos:

$$\alpha_s = \alpha_r + 90° \Rightarrow tg\;\alpha_s = tg(\alpha_r + 90°) \quad (1)$$

$$tg(\alpha_r + 90°) = \frac{sen\ (\alpha_r + 90°)}{\cos\ (\alpha_r + 90°)} = \frac{sen\ \alpha_r\ .\ cos\ 90° + sen\ 90°\ .\cos \alpha_r}{cos\ \alpha_r\ .\ cos\ 90° - sen\ \alpha_r\ .\text{sen}\ 90°}.$$

Como $\cos 90° = 0\ e\ sen\ 90° = 1$, temos:

$$tg(\alpha_r + 90°) = \frac{sen\ \alpha_r\ .0 + 1\ .\cos \alpha_r}{\cos \alpha_r\ .\ 0 - sen\ \alpha_r\ .\ 1} = \frac{\cos \alpha_r}{-sen\ \alpha_r} = -\frac{1}{\frac{sen\ \alpha_r}{\cos \alpha_r}} = -\frac{1}{tg\ \alpha_r} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), e como $m_r = tg\ \alpha_r$ e $m_s = tg\ \alpha_s$, segue que:

$$tg\ \alpha_s = -\frac{1}{tg\ \alpha_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_r\ .\ m_s = -1.$$

Portanto, as retas r e s, não verticais, são perpendiculares quando:

$$m_r\ .\ m_s = -1$$

Exemplo 6. Determine a posição entre as retas $r: 2x + 3y - 6 = 0\ e\ s: 3x - 2y + 1 = 0$.

Solução: Reta $r: 2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}\ e\ n_r = 2$

Reta $s: 3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = \frac{3}{2}\ e\ n_s = \frac{1}{2}$

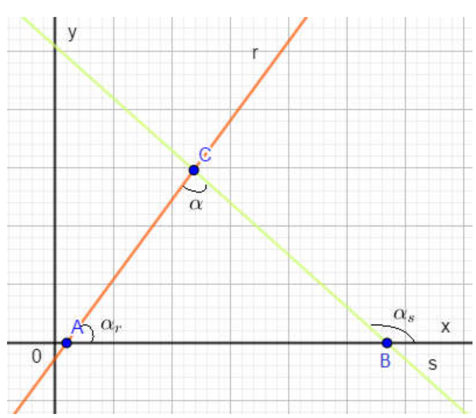
Como $-\frac{2}{3}\ .\frac{3}{2} = -1$, sabemos que $m_r\ .\ m_s = -1$, pontanto $r\ e\ s$ são perpendiculares.

2.2.6 Ângulo formado entre duas retas concorrentes

Dadas as retas $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$, concorrentes, não paralelas aos eixos x ou y e não perpendiculares entre si, elas formas dois ângulos agudos e dois obtusos. Esses pares de ângulos são congruentes por serem opostos pelo vértice.

Observe como determinar a medida do ângulo agudo entre essas retas. Para isso, vamos considerar o ângulo agudo, indicado por α na figura 13.

Figura 13 – Ângulo α entre as retas $r\ e\ s$



Fonte: Elaborada pelo autor

Em um triângulo, a mediada de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. No triângulo ABC, temos:

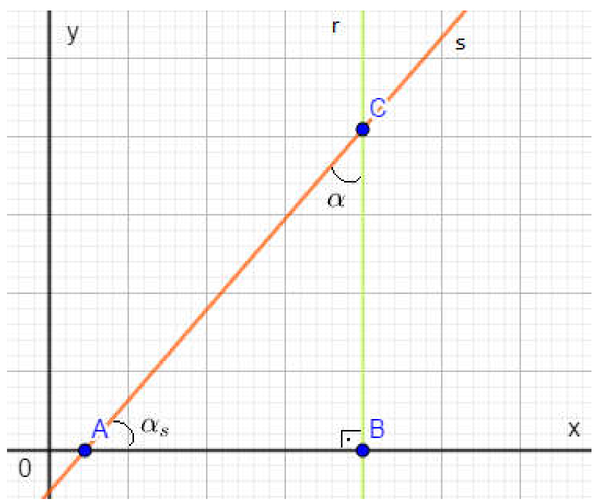
$$\alpha_s = \alpha_r + \alpha \Rightarrow \alpha = \alpha_s - \alpha_r \Rightarrow tg\ \alpha = tg\ (\alpha_s - \alpha_r) = \frac{tg\ \alpha_s - tg\ \alpha_r}{1 + tg\ \alpha_s\ .\ tg\ \alpha_r}.$$

Como $m_r = tg\ \alpha_r$ e $m_s = tg\ \alpha_s$ e α é agudo, isto é, $tg\ \alpha > 0$, segue que:

$$tg\ \alpha = \left|\frac{tg\ \alpha_s - tg\ \alpha_r}{1 + tg\ \alpha_s\ .\ tg\ \alpha_r}\right| \Rightarrow tg\ \alpha = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s\ .m_r}\right|.$$

Além disso, pode ocorrer que uma das retas seja vertical, isto é, paralela ao eixo y. Nesse caso, considere a figura 14.

Figura 14 - Ângulo α entre a reta s e a reta vertical r



Fonte: Elaborada pelo autor

No triângulo retângulo ABC, temos:

$$tg\ \alpha = \frac{AB}{BC} \qquad (1)$$

e

$$m_s = tg\ \alpha_s = \frac{BC}{AB}$$

$$AB = \frac{BC}{m_s} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), e como α é agudo, isto é, $0° < \alpha < 90°$, segue que:

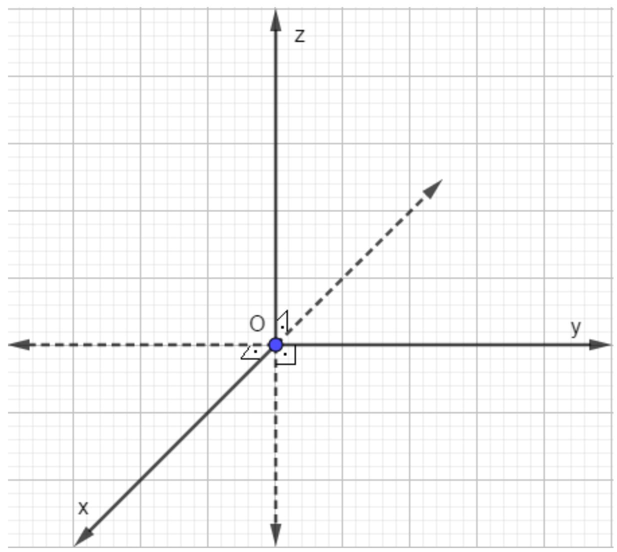
$$tg\ \alpha = \left|\frac{1}{m_s}\right|.$$

2.3 COORDENADAS NO ESPAÇO

Segundo Lima et al. (2006) “Um sistema de coordenadas (cartesianas) em um espaço euclidiano tridimensional E consiste em três eixos OX, OY e OZ, com a mesma origem O, tais que qualquer um deles é perpendicular a cada um dos outros dois. O sistema é indicado com a notação $OXYZ$”.

A figura 15 apresenta o sistema $OXYZ$ no espaço E.

Figura 15 – Eixos do sistema $OXYZ$ no espaço E



Fonte: Elaborada pelo autor

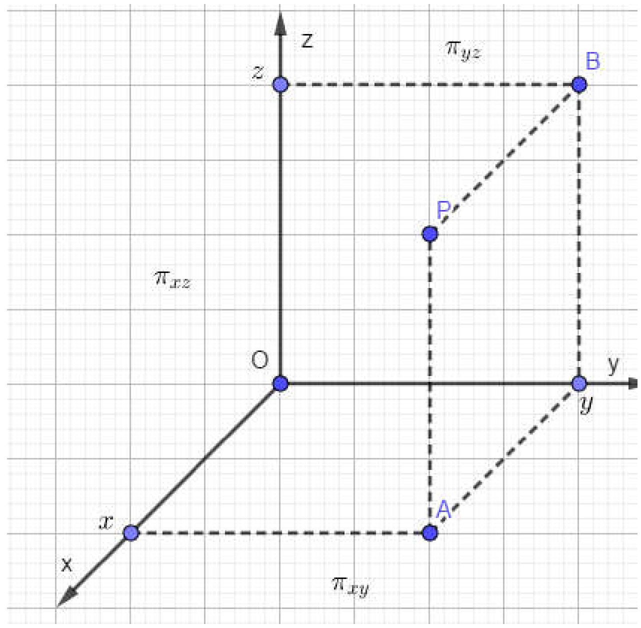
Uma vez fixado o sistema $OXYZ$, chamaremos de $\pi_{xy}, \pi_{yz}\, e\, \pi_{xz}$ os planos cartesianos determinados pelos eixos OX e OY, OY e OZ, OX e OZ, respectivamente.

A escolha do sistema $OXYZ$ faz com que se possa associar a cada ponto P do espaço um terno ordenado (x, y, z) de números reais, chamados as coordenadas do ponto P relativamente a esse sistema.

Observando a figura 16 vamos determinar as coordenadas (x, y, z) do ponto P no sistema $OXYZ$. Seja a reta paralela ao eixo OZ que passa pelo ponto P e corta o plano π_{xy} no ponto A. Sejam (x, y) as coordenadas de A no sistema OXY do plano π_{xy}. Estas são as duas primeiras coordenadas de P. Por sua vez, a reta paralela ao eixo OX passando por P corta o plano π_{yz} no ponto B. Sejam (y, z) as coordenadas de B no sistema OYZ. O número y é o mesmo já obtido e z é a coordenada restante do ponto P. Assim, escrevemos:

$$P = (x, y, z).$$

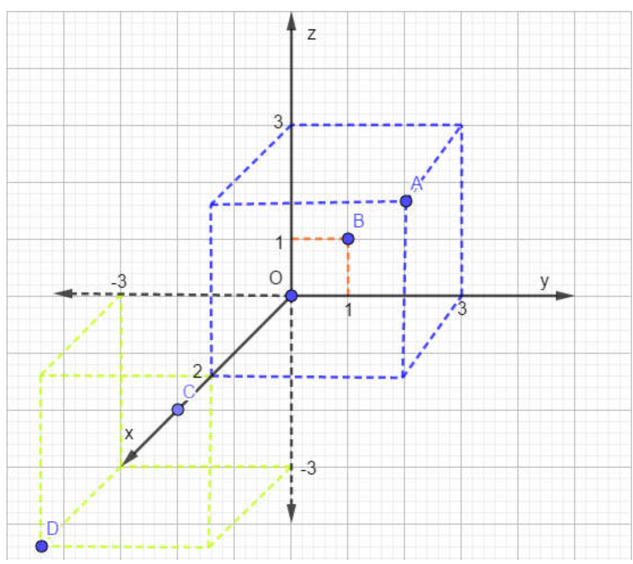
Figura 16 - Planos cartesianos do sistema $OXYZ$ e o ponto P com suas coordenadas.



Fonte: Elaborada pelo autor

Observe na ilustração da figura 17 os pontos $A = (2,2,2)$, $B = (0,2,1)$, $C = (3,0,0)$, $D = (-3,-3,2)$ representados no sistema de eixos ortogonais $OXYZ$.

Figura 17 – Pontos A, B, C e D no sistema de eixos ortogonais $OXYZ$



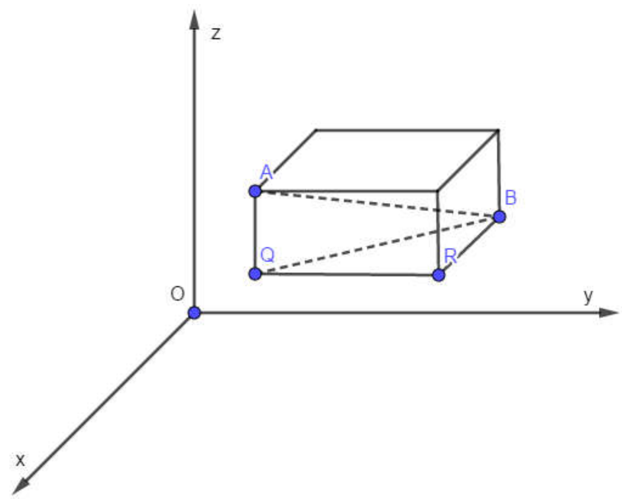
Fonte: Elaborada pelo autor

2.4 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO ESPAÇO

Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ pontos do espaço E. Começamos observando que se A e B estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenadas, então eles têm duas coordenadas iguais e a distância entre eles é o modulo da diferença das coordenadas diferentes.

Suponhamos que A e B não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Para o cálculo da distância de A à B, vamos considerar os seguintes pontos auxiliares $Q = (x_A, y_A, z_B)$ e $R = (x_A, y_B, z_B)$. Observe a figura 18.

Figura 18 – Pontos A, B, Q e R representados no sistema $OXYZ$



Fonte: Elaborada pelo autor

O Teorema de Pitágoras, aplicado aos triângulos retângulos AQB e QRB, nos dá, sucessivamente:

$$d(A,B)^2 = d(A,Q)^2 + d(Q,B)^2 \tag{1}$$

$$d(Q,B)^2 = d(Q,R)^2 + d(R,B)^2 \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$d(A,B)^2 = d(A,Q)^2 + \ d(Q,R)^2 + d(R,B)^2 \tag{4}$$

Como (A,Q), (Q,R) e (R,B) são pares de pontos com duas coordenadas iguais, resulta que:

$$d(A,Q) = |z_B - z_A|, \tag{5}$$

$$d(Q,R) = |y_B - y_A|, \tag{6}$$

e

$$d(R,B) = |y_B - y_A|. \tag{7}$$

Substituindo (5), (6) e (7) em (4), obtemos:

$$d(A,B)^2 = (z_B - z_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2.$$

Logo,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemplo 7. Determine a distância entre os pontos $A = (2,2,2)\ e\ B = (-1,2,6)$.

Solução: Temos que $x_A = 2, y_A = 2, z_A = 2, x_B = -1\ , y_B = 2\ e\ z_B = 6$

Substituindo esses valores em $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$,obtemos:

$$d(A,B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-2)^2 + (6-2)^2},$$

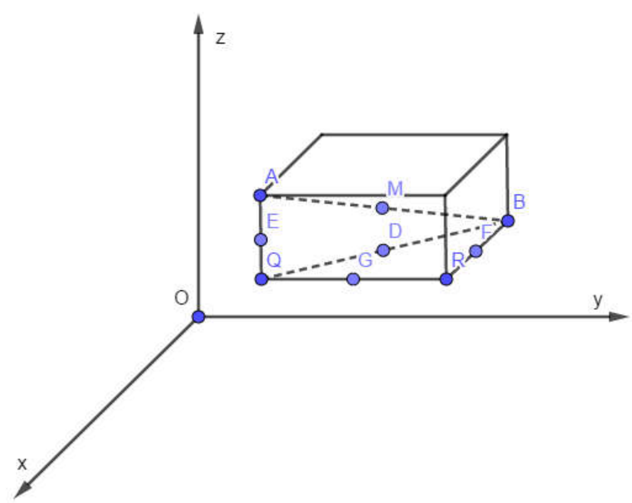
$$d(A,B) = \sqrt{9 + 0 + 16},$$

$$d(A,B) = \sqrt{25} = 5.$$

2.5 COORDENADAS DO PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO DE RETA NO ESPAÇO

Seja, no espaço E, o segmento de reta de extremos $A = (x_A, y_A, z_A)\ e\ B = (x_B, y_B, z_B)$ e ponto médio $M = (x_M, y_M, z_M)$. Consideremos também os pontos auxiliares $Q = (x_A, y_A, z_B), R = (x_A, y_B, z_B), D = (x_M, y_M, z_B), E = (x_A, y_A, z_M), F = (x_M, y_B, z_B)\ e\ G = (x_A, y_M, z_B)$. Observe a figura 20.

Figura 20 - Pontos A, B, D, E, F, G, M, Q e R, representados no sistema $OXYZ$



Fonte: Elaborada pelo autor

Pelo critério ALA, os triângulos AEM e MDB são congruentes. Em particular,

$$|EM| = |DB| \Rightarrow |QD| = |DB| \Rightarrow |AE| = |MD| \Rightarrow |AE| = |EQ|$$

$$z_A - z_M = z_M - z_B \Rightarrow 2z_M = z_A + z_B$$

Assim,

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

De novo, pelo critério ALA, os triângulos QGD e DFB são congruentes, logo

$$|DG| = |BF| \Rightarrow |BF| = |FR| \Rightarrow x_M - x_B = x_A - x_M \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B$$

Assim,

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

e

$$|QG| = |DF| \Rightarrow |QG| = |GR| \Rightarrow y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B$$

Assim,

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Portanto, o ponto médio do segmento de reta AB no espaço E é dado por:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Exemplo 8. Sendo $A = (2,1,-3)\ e\ B = (4,-3,5)$, determine as coordenadas do ponto médio M do segmento AB.

Solução: Temos que $x_A = 2, y_A = 1, z_A = -3, x_B = 4, y_B = -3\ e\ z_B = 5$.

Substituindo esses valores em $M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$, temos:

$$M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+(-3)}{2}, \frac{-3+5}{2}\right),$$

$$M = \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{2}{2}\right),$$

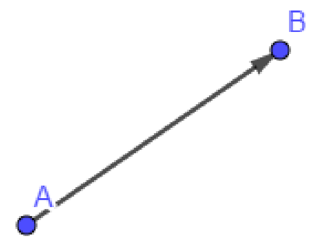
$$M = (3,-1,1).$$

2.6 ESTUDO DE VETORES NO PLANO

2.6.1 Segmentos orientados

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado origem do segmento, o segundo chamado extremidade. Segundo Caroli et al. (2006) “o segmento orientado de origem em A e extremidade B será representado por AB. Dados dois segmentos orientados AB e CD, então $AB = CD$ se e somente se $A = C$ e $B = D$”. Como mostra a figura 21, geometricamente o segmento orientado AB será indicado por uma flecha de A até B.

Figura 21 – Segmento orientado AB



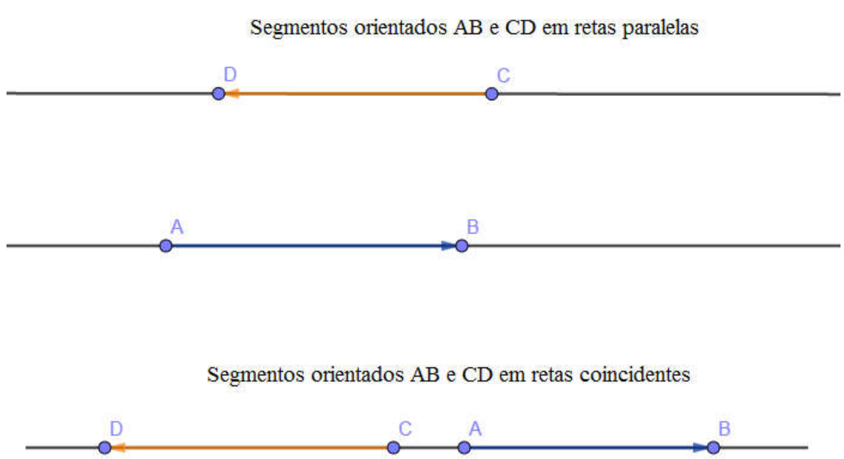
Fonte: Elaborada pelo autor

Um segmento é nulo quando a origem coincide com a extremidade, ou seja, é determinado por um par de pontos coincidentes. Dado um segmento orientado AB, o segmento orientado BA diz-se oposto de AB.

Fixada uma unidade de medida de comprimento, a cada segmento orientado podemos associar um número real, seu comprimento, que é a sua medida em relação àquela unidade. O comprimento do segmento AB indica-se por $\overline{AB}$.

Dados dois segmentos orientados não nulos AB e CD, dizemos que eles têm mesma direção se as retas AB e CD são paralelas ou coincidentes. Só podemos comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm a mesma direção. A figura 22 apresenta os segmentos AB e CD opostos, portanto, com sentidos contrários.

Figura 22 – Segmentos orientados AB e CD opostos



Fontes: Elaborada pelo autor

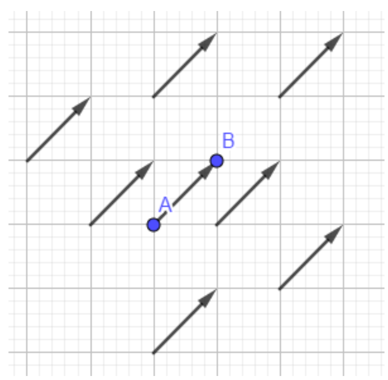
Definição 1. O segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado CD se AB e CD têm mesmo comprimento, direção e sentido. Indica-se $AB \sim CD$.

Dois segmentos nulos são sempre equipolentes. Se AB e CD são não nulos e não colineares, dizer que $AB \sim CD$ equivale a dizer que $AB \mathbin{/\!/} CD$ e $AC \mathbin{/\!/} BD$, isto é, que $ABCD$ é um paralelogramo.

2.6.2 Vetores

Definição 2. Sejam A e B pontos no plano. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v} = B - A$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB. Cada segmento equipolente a AB é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. Veja a figura 23.

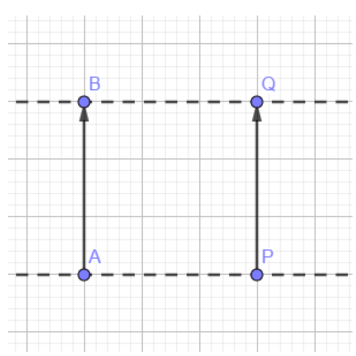
Figura 23 – Representantes de $\overrightarrow{AB}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto P, existe um só ponto Q, como mostra a figura 24, tal que o segmento orientado PQ tenha o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de AB. Portanto, temos também $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, o que mostra o fato de que um representante de $\vec{v}$ pode ter sua origem em qualquer ponto P do espaço.

Figura 24 – Segmentos orientados equipolentes AB e PQ



Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo Winterle (2014, p.3) “ o modulo, a direção e o sentido de um vetor $\vec{v}$ é o módulo, a direção e o sentido de qualquer um dos seus representantes. Indica-se o módulo de $\vec{v}$ por $|\vec{v}|$ ou $\|\vec{v}\|$“.

Na prática, os vetores são manipulados através de suas representações em relação a um sistema de eixos ortogonais dados.

Definição 3. Dados os pontos $A = (x_A, y_A)\ e\ B = (x_B, y_B)$, os números $x_B - x_A\ e\ y_B - y_A$ são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, e escrevemos $\vec{v} = (x_B - x_A\ , y_B - y_A)$.

As coordenadas de um vetor podem ser determinadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

Exemplo 9. Sejam os pontos $A = (3,4)\ e\ B = (-3,1)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Solução: Temos que $x_A = 3, y_A = 4, x_B = -3\ e\ y_B = 1$.

Substituindo esses valores em $\vec{v} = (x_B - x_A\ , y_B - y_A)$, temos:

$$\vec{v} = (-3 - 3{,}1 - 4)$$

$$\vec{v} = (-6, -3)$$

Se $\vec{v}$ é um vetor e AB é um de seus representantes, então existe um único ponto P tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, onde O é a origem do plano cartesiano. Assim, se $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)\ e\ P = (x, y)$, temos:

$$AB \sim OP \Leftrightarrow (x_B - x_A\ , y_B - y_A) = (x - 0, y - 0) = (x, y)$$

Ou seja, vale a seguinte proposição:

Proposição 2. Seja o plano cartesiano de centro em O. Para todo vetor $\vec{v}$ existe um único ponto P tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Além disso, as coordenadas de ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\vec{v}$.

Exemplo 10. Dados os pontos $A = (-2,3)\ e\ B = (1, -2)$, determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. E represente os vetores $\overrightarrow{OP}\ e\ \overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano.

Solução: Temos que $x_A = -2, y_A = 3, x_B = 1\ e\ y_B = -2$.

Substituindo esses valores em $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ , y_B - y_A)$, temos:

$$\overrightarrow{AB} = (1 + 2, -2 - 3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, -5)$$

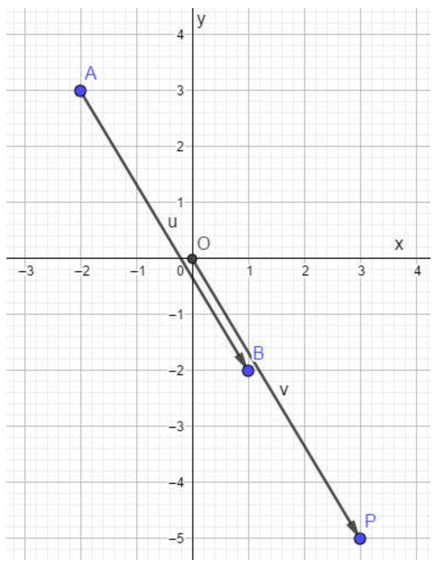
Fazendo $P = (x, y)$ e como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, assim:

$$(x - 0, y - 0) = (3, -5)$$

$$(x, y) = (3, -5) = P$$

A figura 25 apresenta os vetores $\overrightarrow{OP}\ e\ \overrightarrow{AB}$ representados no plano cartesiano.

Figura 25 - Vetores $\overrightarrow{OP}\ e\ \overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor

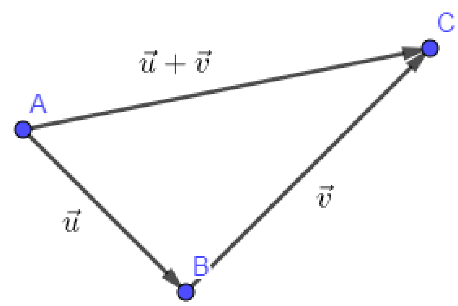
Dois vetores $\vec{u} = (u_x, u_y)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y)$ são iguais se, e somente se, $u_x = v_x\ e\ u_y = v_y$, escrevendo-se $\vec{u} = \vec{v}$

2.6.3 Operações com vetores

Serão definidas duas operações no conjunto de vetores no plano, a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um número real.

Consideremos os vetores $\vec{u}\,e\,\vec{v}$, cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ pretendemos encontrar. Tomemos um ponto A qualquer, como mostra a figura 26, e , com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representante do vetor $\vec{u}$. Utilizaremos a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante de $\vec{v}$. O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por definição, o vetor soma de $\vec{u}\,e\,\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

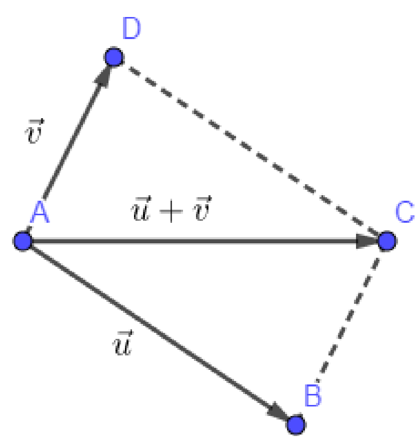
Figura 26 - $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Outra forma geométrica de encontrar o vetor soma é a seguinte: representam-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A. Completa-se o paralelogramo ABCD, como mostra a figura 27, e o segmento orientado de origem A, que corresponde à diagonal do paralelogramo, é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$, ou seja, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Figura 27 - $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



Fonte: Elaborada pelo autor

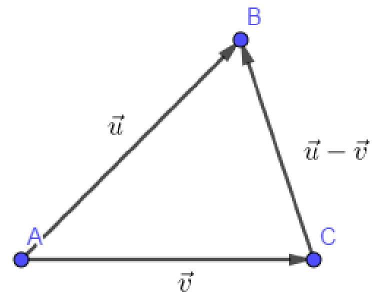
O vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$, designado $\vec{u} - \vec{v}$, é o vetor diferença do vetor $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{v}$. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *e* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, então:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

Observação 1 O vetor $-\overrightarrow{AC}$ tem o sentido oposto do vetor $\overrightarrow{AC}$, assim, $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$

Veja a figura 28.

Figura 28 – Vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$



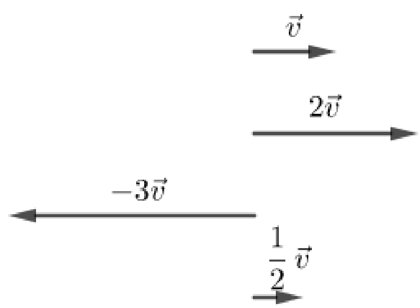
Fonte: Elaborada pelo autor

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $\alpha \neq 0$, chama-se multiplicação do número real α pelo vetor $\vec{v}$, o vetor $\alpha\vec{v}$ tal que:

a) Módulo: $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, ou seja, o comprimento de $\alpha\vec{v}$ é igual ao comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por $|\alpha|$;
b) Direção: $\alpha\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$;
c) Sentido: $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e contrário se $\alpha < 0$.

A figura 29 apresenta o vetor $\vec{v}$ e alguns de seus múltiplos.

Figura 29 – Vetor $\vec{v}$ e alguns de seus múltiplos.



Fonte: Elaborada pelo autor

As operações de adição de vetores e multiplicação de um vetor por um número real é realizada através da representação dos vetores por meio de suas coordenadas em ralação a um sistema de eixos ortogonais.

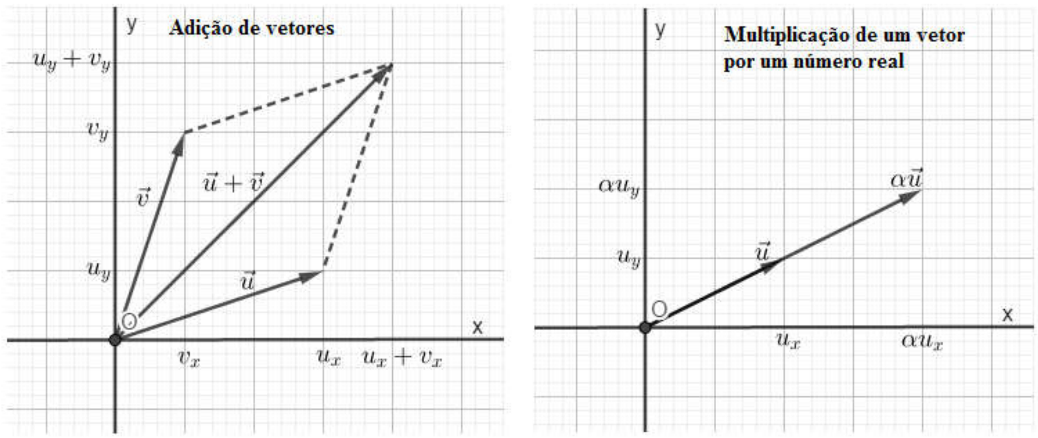
Sejam os vetores $\vec{u} = (u_x, u_y)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y)$ e $\alpha \in R$. Define-se

1) $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
2) $\alpha\vec{u} = (\alpha u_x, \alpha u_y)$

Portanto, para somar dois vetores, somam-se as correspondentes coordenadas, e para multiplicar um número real por um vetor, multiplica-se cada componente do vetor por este número.

A figura 30 ilustra as definições das operações dadas acima.

Figura 30 - $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \left(u_x + v_x, u_y + v_y\right)\ e\ \alpha = (\alpha u_x, \alpha u_y)$



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 11. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (1,3)$ e $\overrightarrow{v} = (2,-2)$, determine $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$. Represente os vetores no plano cartesiano.

Solução: Temos que $u_x = 1, u_y = 3, v_x = 2, v_y = -2\ e\ \alpha = 2$.

Substituindo esses valores em $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \left(u_x + v_x, u_y + v_y\right)$ e $\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha u_x, \alpha u_y)$, temos:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (1 + 2{,}3 - 2)$$
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (3{,}1)$$

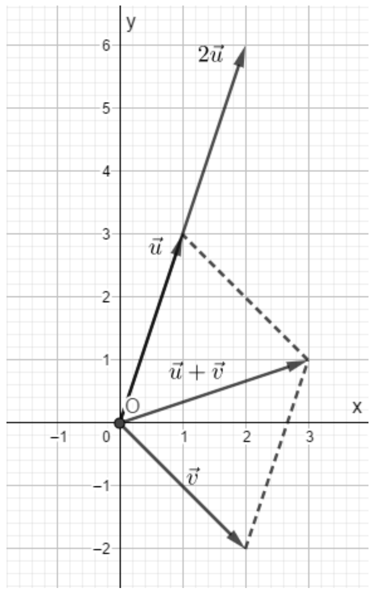
e

$$2\overrightarrow{u} = (2\,.\,1{,}2\,.\,3)$$

$$2\overrightarrow{u} = (2{,}6)$$

A figura 31 apresenta os vetores $\overrightarrow{u}, \vec{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$ no plano cartesiano.

Figura 31 -Vetores $\overrightarrow{u} = (1,3), \overrightarrow{v} = (2,-2), \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (3,1)$ e $2\overrightarrow{u} = (2,6)$ no plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor

2.6.4 Norma de um vetor

A norma ou comprimento do vetor $\overrightarrow{v}$ é o número $\|\overrightarrow{v}\|$ dado pelo comprimento de um segmento representante de $\overrightarrow{v}$. Assim:

a) A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante.

Com efeito, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então AB~CD e portanto,

$$d(A,B) = d(C,D) = \|\overrightarrow{v}\|$$

b) Se $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, então

$$\|\overrightarrow{v}\| = d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

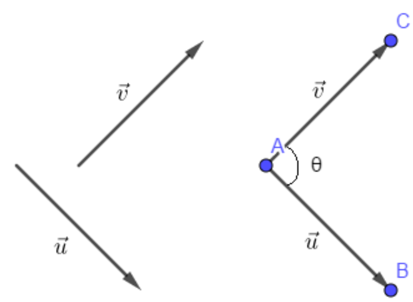
c) Se $P = (x,y)$ é o ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, então

$$\|\overrightarrow{v}\| = d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2.6.5 Ângulo entre dois vetores

O ângulo entre os vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o menor ângulo entre os segmentos representantes AB e AC de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente. A figura 32 apresenta o ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Figura 32 – Ângulo entre dois vetores



Fonte: Elaborada pelo autor

2.6.6 Produto interno

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2013) "o produto interno é uma operação que associa a cada par de vetores um escalar. Outro nome também utilizado para esta operação é produto escalar, dando ênfase à natureza escalar do resultado da operação".

Definição 4. Se $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ são vetores não nulos e θ o ângulo entre eles, então, o produto interno de $\vec{u}\ e\ \vec{v}$, designado por $\langle \vec{u}\ , \vec{v} \rangle\ ou\ \vec{u}\ .\ \vec{v}$, é dado por:

$$\langle \vec{u}\ , \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos\theta$$

Na proposição a seguir vamos obter o produto interno entre dois vetores através de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Proposição 3. Sejam $\vec{u} = (u_x, u_y)\ e\ \vec{v} = (v_x, v_y)$ dois vetores do plano. Então,

$$\langle \vec{u}\ , \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y$$

Demonstração: Se um dos vetores $\vec{u}\ ou\ \vec{v}$ é nulo, temos $\langle \vec{u}\ , \vec{v} \rangle = 0$ e, também, $u_x v_x + u_y v_y = 0$. Logo a proposição é satisfeita.

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OP}\ e\ \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos, com $P = (u_x, u_y)\ e\ Q = (v_x, v_y)$. Então, como mostra a figura 33,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (v_x - u_x, v_y - u_y)$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OPQ, obtemos:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos\theta, \qquad (1)$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.

Sabe-se que,

$$\langle \vec{u}\ , \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos\theta \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2$$

$$2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \left(u_x^2 + u_y^2\right) + \left(v_x^2 + v_y^2\right) - \left[(v_x - u_x)^2 + \left(v_y - u_y\right)^2\right]$$

$$2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 - v_x^2 + 2u_x v_x - u_x^2 - v_y^2 + 2u_y v_y - u_y^2$$

$$2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2u_x v_x + 2u_y v_y$$

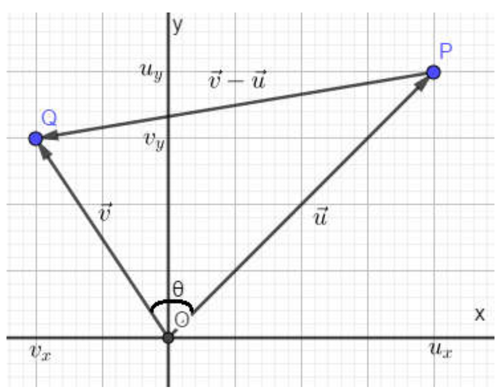
$$2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2(u_x v_x + u_y v_y)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y \qquad \blacksquare$$

Portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta = u_x v_x + u_y v_y$$

Figura 33 – Diferença $\vec{v} - \vec{u}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 12. Dados $\vec{u} = (4,3)$ e $\vec{v} = (-2,3)$, determine $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Solução: Temos que $u_x = 4, u_y = 3, v_x = -2$ e $v_y = 3$.

Substituindo esses valores em $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y$, temos:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 4 \,.\, (-2) + 3 \,.\, 3$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -8 + 9 = 1$$

O sinal de $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ é o mesmo de $\cos\theta$, assim, concluímos que:

a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow 0° \leq \theta < 90°$;
b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0 \Leftrightarrow 90° < \theta \leq 180°$;
c) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°$;

Com isso, dois vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\langle \vec{u}\ , \vec{v} \rangle = 0$, ou seja, o ângulo entre eles é igual a 90°.

2.6.7 Área de paralelogramos e triângulos

Consideremos o paralelogramo ABDC da figura 34. A área de ABDC se obtém multiplicando a medida da base $|AC|$ pela altura $|EB|$. Se $\theta = B\hat{A}C$, então

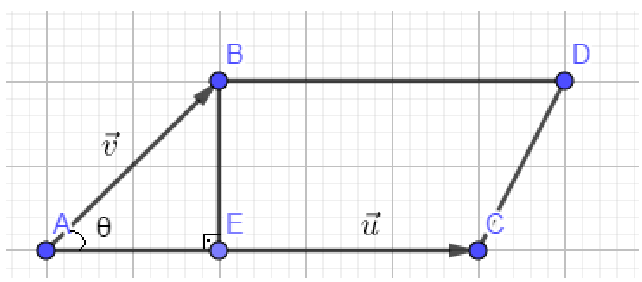
$$sen\ \theta = \frac{|EB|}{|AB|}$$

$$|EB| = |AB|\ sen\ \theta$$

e portanto,

$$\text{Área ABDC} = |AB||AC|\ sen\ \theta$$

Figura 34 – Paralelogramo ABDC



Fonte: Elaborada pelo autor

Para obter a área do paralelogramo $ABDC$ usando vetores e produto interno, consideremos $\vec{u} = \overrightarrow{AC}\ , \vec{v} = \overrightarrow{AB}\ e\ \theta$ o ângulo entre os vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$. Assim,

$$\text{Área } ABDC = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ sen\ \theta.$$

Sendo $sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$, temos:

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = (\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ sen\ \theta)^2$$

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2\ sen^2\ \theta$$

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2\ (1 - cos^2\theta)$$

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2\ - \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2 cos^2\theta$$

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2\ - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$$

Se $\vec{u} = \left(u_x, u_y\right)\ e\ \vec{v} = \left(v_x, v_y\right)$ em relação a um sistema de eixos ortogonais de centro O, então

$$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_x^2 + u_y^2, \|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x^2 + v_y^2 \ e \ \langle \vec{u}\ , \vec{v} \rangle = \ u_x v_x + u_y v_y$$

e portanto,

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = \left(u_x^2 + u_y^2\right)\left(\ v_x^2 + v_y^2\right) - \left(u_x v_x + u_y v_y\right)^2$$

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = u_x^2\ v_x^2 + u_x^2\ v_y^2 + u_y^2\ v_x^2 + u_y^2\ v_y^2 - u_x^2\ v_x^2 - 2\ u_x v_x\ u_y v_y - u_y^2\ v_y^2$$

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = u_x^2\ v_y^2 + u_y^2\ v_x^2 - 2\ u_x v_x\ u_y v_y$$

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = \left(u_x v_y\right)^2 - 2\ u_x v_x\ u_y v_y + \left(u_y v_x\right)^2$$

$$\left(\text{Área ABDC}\right)^2 = \left(u_x v_y - u_y v_x\right)^2$$

$$\text{Área ABDC} = \left(u_x v_y - u_y v_x\right) = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Assim, a área do paralelogramo ABDC, cujos lados adjacentes são representantes dos vetores $\vec{u} = \left(u_x, u_y\right)\ e\ \vec{v} = \left(v_x, v_y\right)$, é igual ao módulo do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente:

$$\text{Área ABDC} = \left|\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right|$$

O paralelogramo ABDC apresentado na figura 34 pode ser dividindo em dois triângulos congruentes, ABC e DCB. Logo, $Área\ (ABC)$ = Área (DCB). Com isso,

$$\text{Área ABDC} = 2\text{Área (ABC)} = \left|\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right|.$$

Portanto,

$$\text{Área (ABC)} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right|$$

Exemplo 13. Calcule a área do triângulo de vértices $A = (2,1), B = (2,2)\ e\ C = (3,1)$.

Solução: Seja $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0,1)\ e\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1,0)$. Logo, $u_x = 0, u_y = 1, v_x = 1\ e\ v_y = 0$.

Substituindo esses valores em Área (ABC) $= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right|$, temos:

$$\text{Área (ABC)} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2}$$

2.7 EQUAÇÕES DA RETA A PARTIR DE VETORES NO PLANO

2.7.1 Equação vetorial e equações paramétricas da reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto A e que tem a direção de um vetor não nulo $\vec{v}$. Para que um ponto P do plano pertença a reta r é necessário e suficiente que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam múltiplos, isto é, que exista um número real t, tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

Para cada ponto P de r tem-se um valor para t, e quando P descreve toda a reta no sentido do vetor $\vec{v}$, t varia no conjunto R dos números reais de $-\infty$ a $+\infty$, fato esse que será denotado por $t \in R$.

Assim a equação:

$$P = A + t\vec{v} \qquad\qquad t \in R$$

é denominada a equação vetorial da reta r.

Escrevendo esta equação em coordenadas, temos que se $A = (x_A, y_A), \vec{v} = (v_x, v_y)$ e $P = (x, y)$, então:

$$(x, y) = (x_A, y_A) + t\big(v_x, v_y\big) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + tv_x \\ y = y_A + tv_y \end{cases} \qquad\qquad t \in R.$$

Portanto, a equação da reta r dada por:

$$r: \begin{cases} x = x_A + tv_x \\ y = y_A + tv_y \end{cases} \qquad\qquad t \in R$$

é chamada de equações paramétricas da reta r.

Observação 2. O vetor $\vec{v}$ é paralelo a reta r.

Se a reta r for determinada por dois pontos distintos A e B, a direção de r será dada pela direção do vetor B – A, e a equação vetorial da reta r será:

$$P = A + t(B - A) \qquad\qquad t \in R.$$

Se $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ e $P = (x, y)$ são as coordenadas de pontos num sistema de coordenadas, então,

$$(x, y) = (x_A, y_A) + t(x_B - x_A, y_B - y_A) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \qquad\qquad t \in R.$$

Assim, as equações paramétricas da reta r são:

$$r: \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}; \qquad t \in R.$$

2.7.2 Equação cartesiana ou geral e equação reduzida da reta

Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (v_x, v_y) \neq \vec{0}$. Então,

$$P = (x, y) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AP}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle (x - x_A, y - y_A), (v_x, v_y) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow v_x(x - x_A) + v_y(y - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow v_x x + v_y y = v_x x_A + v_y y_A$$

$$\Leftrightarrow v_x x + v_y y = c, \text{ onde } c = v_x x_A + v_y y_A$$

A equação cartesiana ou geral da reta r é

$$r: v_x x + v_y y = c$$

Observação 3. O vetor $\vec{v}$ é chamado de vetor normal a r.

Se $v_y \neq 0$, temos:

$$v_y y = -v_x x + c \Leftrightarrow y = -\frac{v_x}{v_y} x + \frac{c}{v_y}.$$

Assim, se $m = -\frac{v_x}{v_y}$ e $n = \frac{c}{v_y}$, então

$$r: y = mx + n$$

é chamada de equação reduzida da reta r.

Se $v_y = 0$, um ponto $P = (x, y)$ pertence a reta $r: v_x x + v_y y = c$ se e somente se $x = \frac{c}{v_x}$. Ou seja, se $k = \frac{c}{v_x}$, com $v_x \neq 0$, então

$$r: x = k.$$

Portanto, uma reta vertical que é paralela ao eixo das ordenadas ou coincide com este eixo e que corta o eixo das abscissas no ponto $(k, 0)$.

Exemplo 14. Seja a reta r que passa pelo ponto $A = (1,4)$ e é normal ao vetor $\vec{u} = (2,2)$. Determine:

a) a equação geral da reta r.
b) a equação reduzida da reta r.
c) as equações paramétricas da reta r.

Solução (a): Como $\vec{u} \perp r$, devemos ter

$$2x + 2y = c.$$

O valor de c é calculado sabendo que $A = (1,4) \in r$, isto é,

$$c = 2\,.\,1 + 2\,.\,4 = 10.$$

Portanto, a equação procurada é

$$r: 2x + 2y = 10$$

$$r: x + y = 5.$$

Solução (b): De $x + y = 5$, obtemos:

$$y = -x + 5.$$

Portanto, a equação reduzida da reta r é

$$r: y = -x + 5.$$

Solução (c): Como $\vec{u} \perp r$, logo o vetor $\vec{v} = (-2,2) \mathbin{/\!/} r$, pois,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2\,.\,(-2) + 2\,.\,2 = -4 + 4 = 0.$$

Temos que $x_A = 1, y_A = 4, v_x = -2 \ e \ v_y = 2.$

Substituindo esses valores em $\begin{cases} x = x_A + tv_x \\ y = y_A + tv_y \end{cases}$, temos que:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \qquad t \in R,$$

são as equações paramétricas procuradas.

2.7.3 Paralelismo e perpendicularismo entre retas

Determinaremos se duas retas $r \ e \ s$ são paralelas ou perpendiculares a partir das suas equações gerais.

Sejam as retas $r: ax + by = c$ e $s: a'x + b'y = c'$, onde os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$ são os vetores normais de $r \ e \ s$, respectivamente. Assim,

a) r e s são paralelas se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos, ou seja, existe um real $\lambda \neq 0$ tal que $(a', b') = \lambda(a, b)$;

b) r e s são perpendiculares se, e somente se, o produto interno de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual a zero, ou seja,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a\,.\,a' + b\,.\,b' = 0.$$

Exemplo 15. Determine se as retas $r: x + 3y = 2$ e $s: 3x - y = 2$ são paralelas ou perpendiculares.

Solução: Os vetores normais de r e s são, respectivamente, $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (3, -1)$. Observa-se que não existe um $\lambda \neq 0$ tal que

$$(3, -1) = \lambda(1,3).$$

Logo, r e s não são paralelas.

Por outro lado,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1\,.\,3 + 3\,.\,(-1) = 3 - 3 = 0.$$

Portanto, as retas r e s são perpendiculares.

2.7.4 Ângulo entre duas retas

Definição 5. O ângulo θ entre duas retas r e s se define da seguinte maneira:

a) Se r e s são coincidentes ou paralelas, $\theta = 0$;

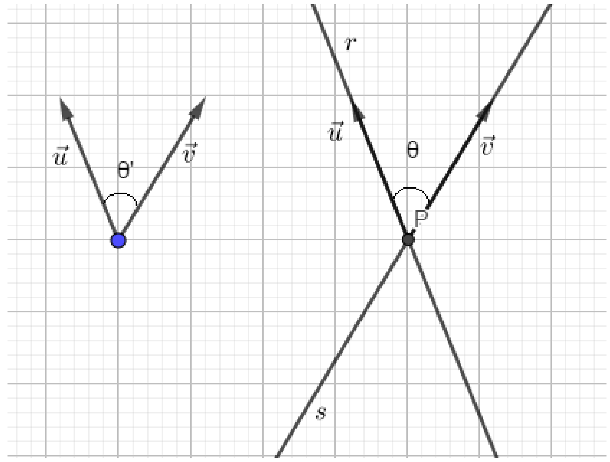
b) Se as retas são concorrentes, isto é, $r \cap s = P$, θ é o menor dos ângulos positivos determinados pelas retas.

Em particular, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. A medida dos ângulos pode ser dada em graus ou radianos.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores paralelos às retas r e s, respectivamente, e θ' o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como mostra a figura 35. Assim, $\theta = \theta'$ ou $\theta = \pi - \theta'$, portanto

$$\cos\theta = |\cos\theta'|, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Figura 35 – Ângulo θ entre as retas $r\ e\ s$



Fonte: Elaborada pelo autor

Da definição 4, temos:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta'$$

$$\cos\theta' = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\cos\theta = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

2.8 ESTUDO DE VETORES NO ESPAÇO

2.8.1 Vetores

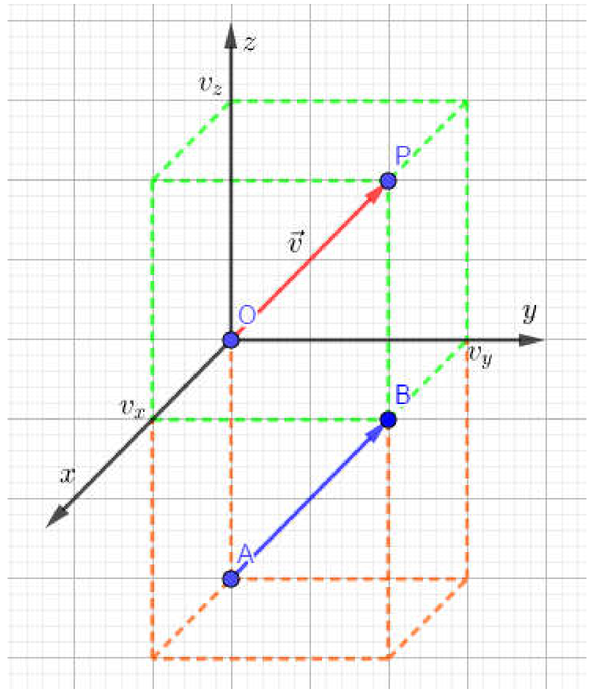
A noção de vetor no espaço é definida da mesma maneira que no plano, continuando válidas as principais propriedades, salvo alguns acréscimos.

Definição 6. Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ pontos do espaço. Os números reais $x_B - x_A, y_B - y_A$ e $z_B - z_A$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ no sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Escrevemos:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

As coordenadas de um vetor no espaço podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente. Em particular, se $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \overrightarrow{OP}$, então $P = (v_x, v_y, v_z)$. O vetor $\overrightarrow{OP}$ é o representante na origem do vetor $\vec{v}$. Veja a figura 36.

Figura 36 – Vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}\ e\ AB \sim OP$



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 16. Dados os pontos $A = (-2,1,1)\ e\ B = (1,-2,2)$, determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. Represente o vetor $\overrightarrow{OP}$ no sistema de eixos ortogonais OXYZ.

Solução: Temos que $x_A = -2, y_A = 1, z_A = 1, x_B = 1, y_B = -2\ e\ z_B = 2$.

Substituindo esses valores em $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ , y_B - y_A, z_B - z_A)$, temos:

$$\overrightarrow{AB} = (1+2, -2-1, 2-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3,-3,1)$$

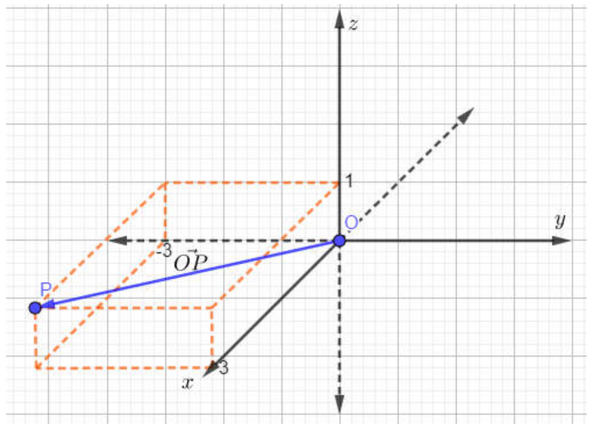
Fazendo $P = (x, y, z)$ e como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, assim:

$$(x-0, y-0, z-0) = (3,-3,1)$$

$$(x, y, z) = (3,-3,1) = P$$

A figura 37 apresenta o vetor $\overrightarrow{OP}$ representados no sistema de eixos $OXYZ$.

Figura 37 – Vetor $\overrightarrow{OP}$ no sistema de eixos $OXYZ$



Fonte: Elaborada pelo autor

2.8.2 Igualdade de vetores e operações com vetores

Vamos definir agora a igualdade entre vetores e as operações de adição de vetores no espaço e a multiplicação de um número real por um vetor espacial. As definições no espaço, relativos aos títulos anteriores, são análogos às do plano:

Sejam os vetores $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\alpha \in R$. Define-se

1) $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$
2) $\alpha\vec{u} = (\alpha u_x, \alpha u_y, \alpha u_z)$
3) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_x = v_x, u_y = v_y \; e \; u_z = v_z$

Exemplo 17. Dados os vetores $\vec{u} = (1,3,2)$ e $\vec{v} = (2,-2,1)$, determine $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u}$. Represente os vetores no sistema de eixos OXYZ.

Solução: Temos que $u_x = 1, u_y = 3, u_z = 2, v_x = 2, v_y = -2, v_z = 1 \; e \; \alpha = 2.$

Substituindo esses valores em $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$ e $\alpha\vec{u} = (\alpha u_x, \alpha u_y, \alpha u_z)$, temos:

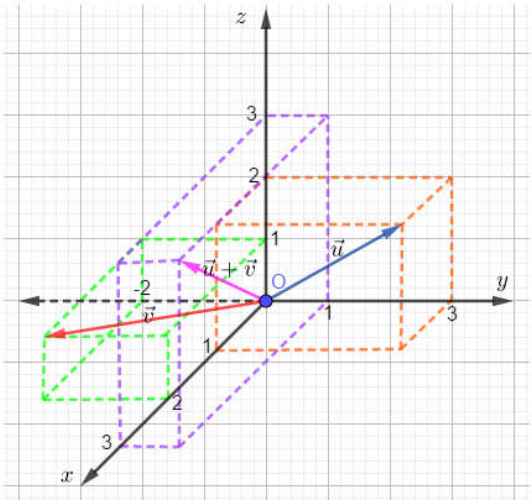
$$\vec{u} + \vec{v} = (1 + 2, 3 - 2, 2 + 1)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (3,1,3)$$

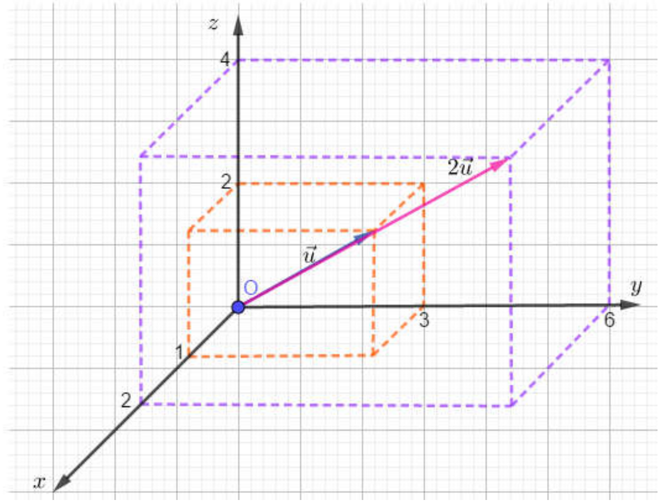
e

$$2\vec{u} = (2 \,.\, 1, 2 \,.\, 3, 2 \,.\, 2)$$

$$2\vec{u} = (2,6,4)$$

Figura 38 - Vetores $\vec{u} = (1,3,2), \vec{v} = (2,-2,1), \vec{u}+\vec{v} = (3,1,3)$ e $2\vec{u} = (2,6,4)$ no sistema de eixos $OXYZ$.





Fonte: Elaborada pelo autor

A figura 38 apresenta os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}$ e $2\vec{u}$ no sistema de eixos $OXYZ$.

2.8.3 Norma de um vetor e produto interno

As noções de norma e produto interno de vetor no espaço são completamente análogas às correspondentes noções já estudadas para vetores no plano.

Definição 7. A norma ou comprimento do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ do espaço é o número:

$$\|\vec{v}\| = d(A,B) = d(O,P).$$

Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, então as coordenadas de $\vec{v}$ coincidem com as coordenadas do ponto P. Logo, $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (v_x, v_y, v_z)$, então $P = (v_x, v_y, v_z)$ e

$$\|\vec{v}\| = d(O,P) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + {v_z}^2}.$$

O produto interno entre os vetores $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ do espaço é o número real

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Exemplo 18. Dados $\vec{u} = (4,3,-1)$ e $\vec{v} = (-2,3,2)$, determine $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Solução: Temos que $u_x = 4, u_y = 3, u_z = -1, v_x = -2, v_y = 3$ e $v_z = 2$.

Substituindo esses valores em $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$, temos:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 4.(-2) + 3.3 + (-1).2$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -8 + 9 - 2 = -1$$

Observação 4. Assim como no plano, dois vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ no espaço são perpendiculares ou ortogonais, e escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$, quando um dos vetores é o vetor nulo ou quando o ângulo entre eles é reto, ou seja, o produto interno entre os vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ é igual a zero.

Exemplo 19. Determine o valor de $x\ e\ y$ de modo que o vetor $\vec{u} = (x, y, -2)$ tenha norma igual a $\sqrt{14}$ e seja perpendicular ao vetor $\vec{v} = (1,1,-1)$.

Solução: Temos que $u_x = x, u_y = y, u_z = -2, v_x = 1, v_y = 1\ e\ v_z = -1$.

Substituindo esses valores em $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$, temos:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x.1 + y.1 + (-2).(-1)$$

Como $\vec{u} \perp \vec{v}$, logo,

$$x + y + 2 = 0$$

$$x = -y - 2 \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$x^2 + y^2 + 4 = 14$$

$$x^2 + y^2 = 10 \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$(-y - 2)^2 + y^2 = 10$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$y = -3\ ou\ y = 1$$

O problema possui então duas soluções:

Se $y = -3$, temos:

$$x = -(-3) - 2 = 1$$

Portanto, $\vec{u} = (1, -3, -2)$.

Se $y = 1$, temos:

$$x = -1 - 2 = -3$$

Portanto, $\vec{u} = (-3,1,-2)$.

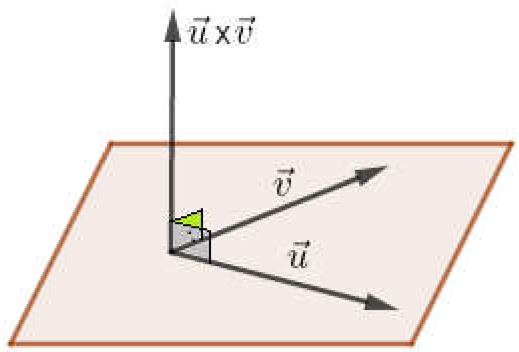
2.8.4 Produto vetorial

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, só faz sentido no espaço e dá como resultado um outro vetor que é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Veja a figura 39.

Representamos o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por:

$$\vec{u} \times \vec{v}.$$

Figura 39 – Vetor $\vec{u} \times \vec{v}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Observação 5. O vetor $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ pode ser assim representado:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}.$$

Onde $\vec{\imath} = (1,00), \vec{\jmath} = (0,1,0)\ e\ \vec{k} = (0,0,1)$.

Sejam os vetores $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)\ e\ \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, nesta ordem.

Definição 8. O produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor

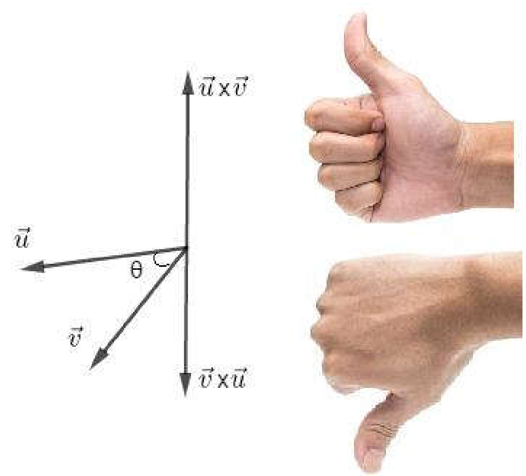
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

E de $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}.$$

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ pode ser determinado utilizando-se a "regra da mão direita", como mostra a figura 40. Sendo θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, suponhamos que $\vec{u}$ sofra uma rotação de ângulo θ até coincidir com $\vec{v}$. Se os dedos da mão direita forem dobrados na mesma direção da rotação, então, o polegar estendido indicará o sentido de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Agora, se $\vec{v}$ sofre a rotação de ângulo θ até coincidir com $\vec{u}$, observa-se que a posição da mão é invertida, ou seja, o dedo polegar apontará para o sentido contrário do que foi indicado por $\vec{u}$ para $\vec{v}$.

Figura 40 – Regra da mão direita



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 20. Dados os vetores $\vec{u} = (1,0,-1)\ e\ \vec{v} = (-2,3,2)$, determine $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$. Represente os vetores no sistema de eixos OXYZ.

Solução: Temos que $u_x = 1, u_y = 0, u_z = -1, v_x = -2, v_y = 3\ e\ v_z = 2$.

Substituindo esses valores em $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{k} = (3,0,3).$$

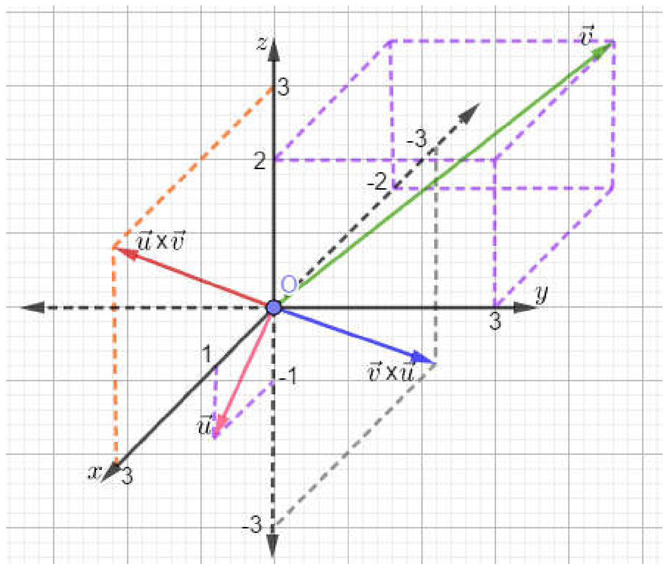
E substituindo em $\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$, obtemos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -3\vec{i} - 3\vec{k} = (-3,0,-3).$$

A figura 41 apresenta os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ no sistema de eixos $OXYZ$.

Figura 41 - Vetores $\vec{u} = (1,0,-1), \vec{v} = (-2,3,2), \vec{u} \times \vec{v} = (3,0,3)$ e $\vec{v} \times \vec{u} = (-3,0,-3)$ no sistema de eixos $OXYZ$.



Fonte: Elaborada pelo autor

2.8.5 Produto misto

O produto misto dos vetores $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z), \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$, tomados nesta ordem, é o número real $\langle \vec{u}, (\vec{v} \times \vec{w}) \rangle$, que também pode ser indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Assim,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, (\vec{v} \times \vec{w}) \rangle = \langle (u_x, u_y, u_z), \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \rangle$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle (u_x, u_y, u_z), (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x) \rangle$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = u_x v_y w_z - u_x v_z w_y + u_y v_z w_x - u_y v_x w_z + u_z v_x w_y - u_z v_y w_x$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Exemplo 21. Dados os vetores $\vec{u} = (1,0,1), \vec{v} = (-2,1,2)$ e $\vec{w} = (2,1,-3)$, determine $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Solução: Temos que $u_x = 1, u_y = 0, u_z = 1, v_x = -2, v_y = 1, v_z = 2, w_x = 2, w_y = 1, w_z = -3$.

Substituindo esses valores em $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$, temos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 2 - 3 = -9$$

Proposição 4. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do espaço. Então, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se, e somente se, os três vetores forem coplanares.

Demonstração: Admitindo-se que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, temos que:

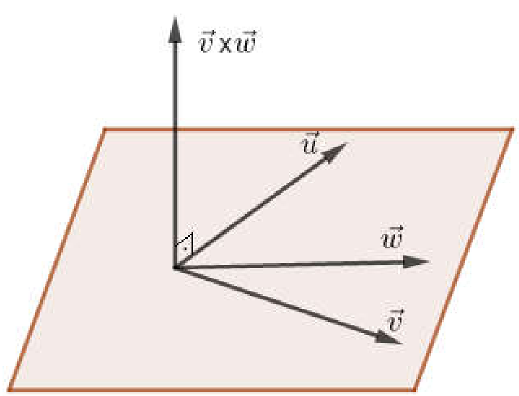
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, (\vec{v} \text{ x } \vec{w}) \rangle = 0$$

ou seja,

$$(\vec{v} \text{ x } \vec{w}) \perp \vec{u}.$$

Sabe-se que o vetor $\vec{v} \text{ x } \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim, como $\vec{v} \text{ x } \vec{w}$ é ortogonal aos três vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, então estes são coplanares. Veja a figura 42.

Figura 42 – Vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ coplanares



Fonte: Elaborada pelo autor

Por outra lado, admitindo-se que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares, o vetor $\vec{v} \text{ x } \vec{w}$, por ser ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é também ortogonal a $\vec{u}$.

Assim, se $\vec{u}$ e $\vec{v} \text{ x } \vec{w}$ são ortogonais, o produto interno deles é igual a zero, ou seja,

$$\langle \vec{u}, (\vec{v} \text{ x } \vec{w}) \rangle = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \quad \blacksquare$$

2.9 EQUAÇÕES DA RETA A PARTIR DE VETORES NO ESPAÇO

2.9.1 Equação vetorial e equações paramétricas da reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto A e que tem a direção de um vetor não nulo $\vec{v}$. Assim como no plano, a equação vetorial da reta forma pelo conjunto de pontos P do espaço é dado por:

$$P = A + t\vec{v} \qquad t \in R.$$

Escrevendo esta equação em coordenadas, temos que se $A = (x_A, y_A, z_A), \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $P = (x, y, z)$, então:

$$(x,y,z) = (x_A, y_A, z_A) + t\big(v_x, v_y, v_z\big) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + tv_x \\ y = y_A + tv_y \\ z = z_A + tv_z \end{cases} \qquad t \in R.$$

Portanto, a equação da reta r dada por:

$$r\colon \begin{cases} x = x_A + tv_x \\ y = y_A + tv_y \\ z = z_A + tv_z \end{cases} \qquad t \in R$$

é chamada de equações paramétricas da reta r no espaço.

Se a reta r for determinada por dois pontos distintos A e B, a direção de r será dada pela direção do vetor B – A, e a equação vetorial da reta r será:

$$P = A + t(B - A) \qquad t \in R.$$

Se $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B)$ e $P = (x, y, z)$ são as coordenadas de pontos num sistema de eixos OXYZ, então,

$$(x,y,z) = (x_A, y_A, z_A) + t(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \qquad t \in R.$$

Assim, as equações paramétricas da reta r no espaço são:

$$r\colon \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A); \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \qquad t \in R.$$

Exemplo 22. Determine as equações paramétricas da reta r que passa por $A = (1,2,-4)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-2,1,2)$.

Solução: Temos que $x_A = 1, y_A = 2, z_A = -4, v_x = -2, v_y = 1$ e $v_z = 2$.

Substituindo esses valores em $r\!:\begin{cases} x = x_A + tv_x \\ y = y_A + tv_y \\ z = z_A + tv_z \end{cases}$ com $t \in R$, encontramos as seguintes equações paramétricas:

$$r\!:\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -4 + 2t \end{cases} \qquad t \in R.$$

2.9.2 Equação simétrica da reta

Das equações paramétricas de uma reta r que passa pelo ponto A e que tem a direção de um vetor não nulo $\vec{v}$, supondo $v_x, v_y\ e\ v_z \neq 0$, vem

$$x = x_A + tv_x \Leftrightarrow t = \frac{x - x_A}{v_x},$$

$$y = y_A + tv_y \Leftrightarrow t = \frac{y - y_A}{v_y}$$

e

$$z = z_A + tv_z \Leftrightarrow t = \frac{z - z_A}{v_z}.$$

Como para cada ponto da reta corresponde um só valor para t, obtemos as igualdades:

$$\frac{x - x_A}{v_x} = \frac{y - y_A}{v_y} = \frac{z - z_A}{v_z}.$$

A expressão acima é chamada de equação simétrica da reta r e escrevemos:

$$r\!: \frac{x - x_A}{v_x} = \frac{y - y_A}{v_y} = \frac{z - z_A}{v_z}.$$

Segundo Delgado et al. (2013) “quando a reta r é dada por dois de seus pontos $A = (x_A, y_A, z_A)\ e\ B = (x_B, y_B, z_B)$, o vetor $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ paralelo a r tem suas três coordenadas não nulas se e somente se os pontos $A\ e\ B$ não pertencem a um plano paralelo a um dos planos coordenados”. Neste caso, podemos expressar a reta r por meio de suas equações simétricas:

$$r\!: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

Observação 6. Se uma reta r é paralela a um dos planos coordenados, ela não pode ser representada por uma equação na forma simétrica.

3 DESENVOLVIMENTO, DADOS E ANÁLISE DA PESQUISA

Este capítulo aborda a forma como a pesquisa foi realizada, logo serão descritas as etapas metodológicas, o espaço e sujeitos da pesquisa, os dados coletados e as análises.

3.1 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Este trabalho estabeleceu-se como uma pesquisa de natureza qualitativa. Foi feita a análise do nível e da qualidade do conhecimento sobre vetores e geometria analítica de estudantes do curso superior de Física de uma Instituição de Ensino Superior (IES) no Estado do Pará, inicialmente por meio de um questionário, em seguida uma entrevista feita a partir das respostas individuais de cada aluno ao questionário.

Para o desenvolvimento desta pesquisa foi feito incialmente, com o objetivo de aprimorar os conhecimentos acerca da temática, um levantamento bibliográfico envolvendo o estudo de vetores e geometria analítica desde o ensino médio até o superior, conforme apresentado no Capítulo 2.

Na sequência, foram reconhecidos os sujeitos da pesquisa, estudantes do ensino superior que já haviam estudado vetores. Foram convidados a participar de forma voluntária. 9 alunos participaram. Foi elaborado um questionário com 11 questões tendo como base os níveis da fundamentação teórica apresentada no Capítulos 2.

Quanto à aplicação das atividades da pesquisa e a coleta de dados para posterior análise, o processo foi organizado em duas etapas:

1ª Etapa: Na primeira etapa, o pesquisador reuniu-se com os estudantes para a aplicação do questionário. Os estudantes responderam as questões individualmente. As respostas foram corrigidas e organizadas conforme o estudante que as elaborou.

2ª Etapa: Na segunda etapa, foi realizada uma entrevista. A entrevista consistiu de uma conversa individual com os sujeitos (discentes). Nessa oportunidade os alunos foram questionados e puderam explicar e argumentar sobre as respostas dadas no questionário. As entrevistas foram gravadas e em seguida transcritas. Nesta etapa alguns alunos expressaram suas respostas também por representação gráfica no quadro branco.

3.2 ESPAÇO E SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada no final do segundo semestre de 2017, com alunos do curso de física de uma IES no Estado do Pará. Sendo aplicada com 4 alunos que estavam cursando a disciplina álgebra linear I pela segunda vez. E com 5 alunos que já haviam cursado a referida disciplina. Sendo 6 alunos do segundo semestre e 3 do quarto semestre. A amostra foi por adesão.

A disciplina álgebra linear I no referido curso de Física, aborda o estudo de vetores e geometria analíticas apresentado neste trabalho e é cursada no primeiro semestre.

3.3 QUESTÕES APLICADAS

Foi aplicado aos aluno e alunas um questionário contendo 11 questões. Segue mais adiante uma descrição das questões e os possíveis resultados.

Questão 1: O que é um vetor?

Comentário: Espera-se que o estudante responda que o vetor é um segmento de reta orientado que tem direção, módulo e sentido. E que o mesmo saiba o que é o módulo, a direção e o sentido de um vetor.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

Comentário: Espera-se que o estudante saiba construir o plano cartesiano e nele represente o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, onde, a origem do segmento orientado é o ponto A e a extremidade é o ponto B.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Comentário: Espera-se que o estudante construa no mesmo plano cartesiano da questão 2 ou que construa outro plano cartesiano igual ao da questão 2 e nele represente outros dois segmentos orientados diferentes de $\overrightarrow{AB}$, mais, com mesma direção, módulo e sentido.

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\vec{u} = (-3,2,1)\ e\ \vec{v} = (1,3,2)$.

Comentário: Espera-se que o estudante saiba construir o sistema de eixos $OXYZ$ e nele represente o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ de origem no ponto $O = (0,0,0)$ e extremidade no ponto $P = (-3,2,1)$ e o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ de origem no ponto $O = (0,0,0)$ e extremidade no ponto $Q = (1,3,2)$.

Questão 5: Dado os vetores $\overrightarrow{u} = (2,3)$ e $\overrightarrow{v} = (1,3)$. Determine:

a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e sua representação no plano.
b) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ e sua representação no plano.
c) $2\overrightarrow{u}$ e sua representação no plano.

Comentário: Espera-se que o estudante saiba efetuar as operações de vetores apresentadas na subseção (2.6.3). E que represente no plano cartesiano os vetores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$.

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$.

Comentário: Espera-se que o estudante saiba o que são vetores ortogonais e que use o produto interno para determinar um vetor ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3,1)$ e $\overrightarrow{v} = (1,4,2)$.

Comentário: Espera-se que o aluno saiba quando um vetor é ortogonal a outros dois e que use o produto vetorial para determinar um vetor ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$.

Comentário: Espera-se que o estudante utilize o que foi apresentado na subseção (2.7.2) sobre equação cartesiana da reta.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta $r_1: x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

Comentário: Espera-se que o estudante utilize o que foi apresentado na subseção (2.7.3) para determinar um vetor normal a r_2 e use o que foi apresentado na subseção (2.7.2) para determinar a equação cartesiana pedida.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

Comentário: Espera-se que o estudante respondo que os vetores são ortogonais ou perpendiculares.

Questão 11: Determine a norma do vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$.

Comentário: Espera-se que o estudante utilize o que foi apresentado na subseção (2.8.3) sobre norma de um vetor.

3.4 DADOS COLETADOS E ANÁLISE

Os dados coletados são as respostas dadas pelos estudantes no questionario e na entrevista. Seis das nove entrevistas foram filmadas e três gravadas somente por áudio. Consta no Anexo os extratos dos questionários e a transcrição das entrevistas gravadas. A análise dos dados se dará a partir das repostadas dadas pelos estudantes no questionaria e na entrevista.

Estudante – E1

Questão 1: O estudante desenvolve o conceito de vetor de acordo com o apresentado na definição 2. O mesmo compreende o que é o módulo, a direção e o sentido e representa corretamente um vetor.

Questão 2: O estudante determina usando a definição 3 que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a (1,1) e representa no plano cartesiano o vetor de origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,1). No entanto reconhece que o vetor pedido é o com origem no ponto A e extremidade no ponto B.

Questão 3: Inicialmente o estudante representa o vetor com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (2,2) e o vetor com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (3,3). Posteriormente, determina que o vetor B – A é um representante de $\overrightarrow{AB}$, com isso, concluiu que errou o tamanho do vetor. Porém, não percebeu que havia feito o representante do vetor B – A e não do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Questão 4: O estudante não sabe representar pontos no espaço, com isso não fez corretamente a questão.

Questão 5: O estudante desenvolve as operações de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\ e\ 2\overrightarrow{u}$ de acordo com o apresentado na subseção 2.6.3. O mesmo compreende como os vetores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\ e\ 2\overrightarrow{u}$ são representados no plano cartesiano e como se dá a representação geométrica de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. No entanto, não sabe fazer a representação geométrica do vetor $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ e tais representações no plano cartesiano usando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\ e\ \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

Questão 6: O estudante não sabe quando dois vetores são ortogonais.

Questão 7: O estudante não respondeu a questão.

Questão 8: O estudante não respondeu a questão.

Questão 9: O estudante não respondeu a questão.

Questão 10: O estudante entende que vetores cujo ângulo entre eles é igual a 90° são ortogonais. No entanto, não compreende que o produto escalar entre os dois vetores ortogonais é igual a 1.

Questão 11: O estudante desenvolve o cálculo da norma de um vetor de acordo com o apresentado na subseção 2.8.3. O mesmo compreende que a norma é o tamanho do vetor, porém, não sabe indicar o que é a norma.

Estudante – E2

Questão 1: O estudante desenvolve o conceito de vetor a partir de exemplos da física na qual é habituado a trabalhar. O mesmo não sabe dizer que o vetor é um segmento orientado, no entanto, desenha corretamente um vetor. Ao analisar as figuras 53, 55 e 56, percebe-se que o estudante compreende o que é o módulo de um vetor, porém, troca a direção com o sentido.

Questão 2: O estudante inicialmente determina usando a definição 3 que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a (1,1) e representa no plano cartesiano o vetor de origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,1). No entanto, posteriormente, observa-se na figura 58 que o mesmo representa no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto B. O estudante conclui que o vetor de origem em (0,0) e extremidade em (1,1) é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Questão 3: O estudante representa no plano cartesiano o vetor $\overrightarrow{AB}$ e o de origem no ponto (1,1) e extremidade no ponto (2,2). De acordo com as respostas dadas na entrevista, o mesmo compreender o que são vetores representantes, no entanto, ainda troca o sentido e a direção de um vetor.

Questão 4: O estudante constrói o sistema de eixos ortogonais OXYZ de acordo com o apresentado na figura 15, e como não apresenta dificuldades em localizar pontos no espaço, representa corretamente o vetor de origem no ponto (0,0,0) e extremo no ponto (-3,2,1) e o vetor de origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (1,3,2).

Questão 5: O estudante desenvolve as operações de $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\ e\ 2\vec{u}$ de acordo com o apresentado na subseção 2.6.3. O mesmo compreende como os vetores $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\ e\ 2\vec{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, quando acompanhados dos vetores $\vec{u}\,e\,\vec{v}$, não representa corretamente $\vec{u} - \vec{v}$. Para o estudante os vetores de $\vec{u} + \vec{v}$e $\vec{u} - \vec{v}$ têm o mesmo módulo e direção, no entanto sentidos opostos.

Questão 6: O estudante determina o vetor $\vec{v} = (-3,2)$, cuja produto interno com o vetor $\vec{u} = (2,3)$ é igual a zero. O mesmo representa no plano cartesiano os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de modo a deixar visível o que são vetores ortogonais.

Questão 7: De acordo com a figura 66, o estudante sabe quando um vetor é ortogonal a outros dois, porém, não consegue determinar as coordenas deste vetor.

Questão 8: O estudante não respondeu a questão.

Questão 9: O estudante não respondeu a questão.

Questão 10: O estudante entende que vetores cujo ângulo entre eles é igual a 90° são ortogonais. Com isso, o mesmo completa o que se espera da questão 6.

Questão 11: O estudante desenvolve o cálculo da norma de um vetor de acordo com o apresentado na subseção 2.8.3. O mesmo compreende o que é a norma e que esta é o módulo do vetor.

Estudante – E3

Questão 1: O estudante não sabe descrever o que é um vetor, porém, compreende que o vetor é representado por um segmento orientado e que o mesmo tem sentido, comprimento e orientação.

Questão 2: O estudante determina usando a definição 3 que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a (1,1) e representa no plano cartesiano o vetor de origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,1). No entanto quando traça no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto B conclui que os vetores de origem em (0,0) e extremidade em (1,1) e o $\overrightarrow{AB}$ são iguais.

Questão 3: O estudante compreende que o vetor de origem em (0,0) e extremidade em (1,1) é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$, no entanto, não consegue fazer outros representantes no plano.

Questão 4: O estudante constrói o sistema de eixos ortogonais OXYZ de acordo com o apresentado na figura 15, e representa corretamente o vetor de origem no ponto (0,0,0) e extremo no ponto (-3,2,1) e o vetor de origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (1,3,2).

Questão 5: O estudante desenvolve as operações de $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\ e\ 2\vec{u}$ de acordo com o apresentado na subseção 2.6.3. O mesmo compreende como os vetores $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\ e\ 2\vec{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não desenvolve, como apresentado na figura 26, a representação geométrica de $\vec{u} + \vec{v}$, assim como no plano cartesiano usando as coordenadas de $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{u} + \vec{v}$.

Questão 6: O estudante constrói vetores ortogonais, no entanto, não consegue determinar as coordenas de um vetor $\vec{v}$ a partir das coordenadas do vetor $\vec{u}$ e sabendo que $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ são ortogonais.

Questão 7: O estudante não respondeu a questão.

Questão 8: O estudante usa o que está apresentado na subseção 2.7.2 sobre equação cartesiana da reta. Determina o valor de **c** e a equação da reta pedida. No entanto, troca as coordenadas do ponto A com as do vetor $\vec{u}$ e as do vetor $\vec{u}$ com as do ponto A quando substitui na equação cartesiana.

Questão 9: O estudante usa o que está apresentado na subseção 2.7.2 sobre equação cartesiana da reta. No entanto, não determina as coordenadas do vetor normal a r_2 a partir da reta r_1 que é paralela a r_2 e não consegue determinar a equação da reta r_2 corretamente. O mesmo ainda continua trocando as coordenas do ponto com as coordenadas do vetor na equação cartesiana.

Questão 10: O estudante entende que vetores cujo ângulo entre eles é igual a 90° são ortogonais. No entanto, não sabe dizer que o produto interno entre estes vetores ortogonais é igual a zero.

Questão 11: O estudante desenvolve o cálculo da norma de um vetor de acordo com o apresentado na subseção 2.8.3. O mesmo compreende que a norma é o comprimento do vetor.

Estudante – E4

Questão 1: O estudante desenvolve o conceito de vetor de acordo com o apresentado na definição 2. O mesmo diz que o vetor é uma reta, no entanto, desenha como um segmento orientado de origem em A e extremidade em B na qual dar orientação a um corpo em determinada condição. O estudante compreende o que é o módulo, a direção e o sentido de um vetor.

Questão 2: O estudante inicialmente determinar que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a (7,3), calcula a norma e representa no plano cartesiano o vetor com origem no (0,0) e extremidade em um ponto na qual não define as coordenadas. Posteriormente, quando representa no plano os pontos A e B, traça o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem em A e extremidade em B e compreende que este é o vetor pedido na questão.

Questão 3: O estudante representa no plano cartesiano o vetor com origem em (0,0) e extremidade em (1,1) e compreende que este é um representante de $\overrightarrow{AB}$. O mesmo indica que o vetor é um conjunto de segmentos orientados equipolentes, no entanto, não relaciona estes segmentos equipolentes aos representantes de um vetor. O estudante não consegue fazer uma representação no plano cartesiano de conjunto de vetores equipolentes de um segmento orientado.

Questão 4: O estudante não respondeu a questão.

Questão 5: O estudante desenvolve as operações de $\vec{u}+\vec{v}\ e\ \vec{u}-\vec{v}$ de acordo com o apresentado na subseção 2.6.3. O mesmo compreende como o vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é representado no plano cartesiano e como se dá a representação geométrica de $\vec{u}+\vec{v}$, no entanto, não consegue realizar no plano cartesiana tal representação geométrica usando a as coordenadas de $\vec{u},\vec{v}\ e\ \vec{u}+\vec{v}$. O estudante não localiza corretamente no plano o vetor $\vec{u}-\vec{v}$ e nada apresenta sobre o vetor $2\vec{u}$.

Questão 6: O estudante determina o vetor $\vec{v}=(-3,2)$ como vetor ortogonal ao vetor $\vec{u}=(3,2)$, a partir da compreensão que dois vetores ortogonais tem produto escalar igual a zero. No entanto, representa dois vetores ortogonais como vetores paralelos.

Questão 7: O estudante compreende que o produto escalar entre o vetor ortogonal aos vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ é igual a zero, tanto com o vetor $\vec{u}$ como o vetor $\vec{v}$. No entanto, representa os vetores $\vec{u}\ ,\vec{v}$ e o vetor ortogonal a estes de modo paralelo e não determina as coordenadas do vetor procurado a partir do produto vetorial.

Questão 8: O estudante não respondeu a questão.

Questão 9: O estudante não respondeu a questão.

Questão 10: O estudante representa corretamente vetores ortogonais e entende que vetores cujo ângulo entre eles é igual a 90° são perpendiculares.

Questão 11: O estudante desenvolve o cálculo da norma de um vetor de acordo com o apresentado na subseção 2.8.3. O mesmo compreende o que é a norma e que esta é o módulo do vetor.

Estudante – E5

Questão 1: Para o estudante, o vetor é formado por dois pontos que formam uma reta, no entanto, desenha como um segmento orientado. O mesmo compreende que a extremidade de um segmento orientado indica o sentido do vetor.

Questão 2: O estudante representa no plano cartesiano o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto B.

Questão 3: O estudante representa no plano cartesiano o vetor com origem no ponto (3,3) e extremidade no ponto (4,4) e o vetor com origem no ponto (-3,2) e extremidade no ponto (-2,3). O mesmo compreender o que são vetores representantes e que é possível fazer mais de dois vetores representantes no plano cartesiano.

Questão 4: O estudante constrói o sistema de eixos ortogonais OXYZ de acordo com o apresentado na figura 15, representa o vetor $\vec{u}$ corretamente com origem no ponto (0,0,0) e extremo no ponto (-3,2,1), no entanto, representa o vetor $\vec{v}$ com origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (1,3,0) sendo que tal vetor tem origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (1,3,2). O mesmo sabe identificar nos eixos x, y e z as coordenadas de um vetor, porém, apresenta dificuldades ao traçar o segmento orientado.

Questão 5: O estudante desenvolve as operações de $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\ e\ 2\vec{u}$ de acordo com o apresentado na subseção 2.6.3. O mesmo compreende como os vetores $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\ e\ 2\vec{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não desenvolve, como apresentado na figura 26, a representação geométrica de $\vec{u}+\vec{v}$, assim como no plano cartesiano usando as coordenadas de $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{u}+\vec{v}$.

Questão 6: O estudante constrói vetores ortogonais, no entanto, não consegue determinar as coordenas de um vetor $\vec{v}$ a partir das coordenadas do vetor $\vec{u}$ e sabendo que $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ são ortogonais.

Questão 7: O estudante não respondeu a questão, no entanto, compreende que é uma coisa possível.

Questão 8: O estudante não respondeu a questão.

Questão 9: O estudante não respondeu a questão.

Questão 10: O estudante entende que vetores cujo ângulo entre eles é igual a 90° são perpendiculares à reta, no entanto, indica corretamente dois vetores que formam um ângulo de 90°.

Questão 11: O estudante desenvolve o cálculo da norma de um vetor de acordo com o apresentado na subseção 2.8.3. O mesmo compreende que a norma é o tamanho do vetor.

Estudante – E6

Questão 1: Para o estudante, o vetor é uma reta que apresenta módulo, direção e sentido, no entanto, representa o vetor como um segmento orientado. O mesmo indica corretamente o módulo e o sentido de um vetor, porém não indicar corretamente a direção.

Questão 2: O estudante inicialmente determina o produto escalar usando as coordenadas dos pontos A e B. Posteriormente, quando representa no plano os pontos A e B, traça o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem em A e extremidade em B e compreende que este é o vetor pedido na questão.

Questão 3: O estudante representa no plano cartesiano o vetor com origem no ponto (1,3) e extremidade no ponto (2,4) e o vetor com origem no ponto (1,1) e extremidade no ponto (2,2). No entanto, não sabe o que são vetores representantes.

Questão 4: O estudante constrói o sistema de eixos ortogonais OXYZ de acordo com o apresentado na figura 15, representa o vetor $\overrightarrow{u}$ corretamente com origem no ponto (0,0,0) e extremo no ponto (-3,2,1).

Questão 5: O estudante desenvolve as operações de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\ e\ 2\overrightarrow{u}$ de acordo com o apresentado na subseção 2.6.3. O mesmo compreende como os vetores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\ e\ 2\overrightarrow{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não sabe fazer a representação geométrica de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Questão 6: O estudante constrói vetores ortogonais e determina o vetor de coordenadas $(-3,2)$ como ortogonal a $\overrightarrow{u} = (3,2)$, a partir da compreensão que dois vetores ortogonais tem produto escalar igual a zero.

Questão 7: Inicialmente, o estudante usa o produto escalar para determina os vetores de coordenadas (3,-2,0) e (2,-1,1) ortogonais a $\overrightarrow{u}\ e\ \overrightarrow{v}$ respectivamente. Posteriormente, o mesmo compreende que o vetor procurado é ortogonal a $\overrightarrow{u}\ e\ \overrightarrow{v}$ ao mesmo tempo. No entanto, não conseguem determinar as coordenadas de tal vetor e representa os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos e perpendiculares ao vetor pedido.

Questão 8: O estudante não respondeu a questão.

Questão 9: O estudante não respondeu a questão.

Questão 10: O estudante entende que vetores cujo ângulo entre eles é igual a 90° são ortogonais e que o produto escalar entre este é igual a zero.

Questão 11: O estudante desenvolve o cálculo da norma de um vetor de acordo com o apresentado na subseção 2.8.3. O mesmo compreende que a norma é o módulo do vetor unitário.

Estudante – E7

Questão 1: O estudante compreende que o vetor é uma grandeza que possui módulo, direção e sentido. O mesmo representa o vetor como um segmento orientado e apresenta o módulo como o comprimento do vetor, no entanto, entende que o vetor é uma reta e troca o sentido como a direção.

Questão 2: O estudante representa o vetor $\overrightarrow{AB}$ como um segmento orientado que passa pelos pontos A e B. O mesmo entende que uma reta AB é o mesmo que B – A.

Questão 3: O estudante compreende que vetores representantes são vetores iguais e que é possível representar mais de um representante de um vetor no plano cartesiano. O mesmo indica que o vetor com origem no ponto (4,1) e extremidade no ponto (5,2) é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Questão 4: O estudante constrói o sistema de eixos ortogonais OXYZ de acordo com o apresentado na figura 15, representa o vetor $\vec{u}$ corretamente com origem no ponto (0,0,0) e extremo no ponto (-3,2,1) e o vetor $\vec{v}$ com o com origem no ponto (0,0,0) e extremo no ponto (1,3,2).

Questão 5: O estudante desenvolve as operações de $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$ e $2\vec{u}$ de acordo com o apresentado na subseção 2.6.3. O mesmo compreende como os vetores $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$ e $2\vec{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não sabe fazer a representação geométrica de $\vec{u}+\vec{v}$.

Questão 6: O estudante determina que os vetores ortogonais ao vetor $\vec{u} = (2,3)$ são da forma $\vec{v} = \left(-\frac{3y}{2}, y\right)$ a partir da compreensão que dois vetores ortogonais tem produto interno igual a zero. O mesmo usa como exemplo o vetor de coordenadas (-6,4).

Questão 7: Inicialmente, o estudante usa o produto interno para determina que os vetores ortogonais ao vetor $\vec{u} = (2,3,1)$ são da forma $\vec{v} = \left(-\frac{3y-z}{2}, y, z\right)$ e usa como exemplo o vetor de coordenadas $\left(-\frac{13}{2}, 3,4\right)$ e os vetores ortogonais ao vetor $\vec{v} = (1,4,2)$ são da forma $\vec{v} = (-4y - 2z, y, z)$ e usa como exemplo o vetor de coordenadas $(-10,2,1)$. Posteriormente, compreende que o vetor procurado é ortogonal a $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ ao mesmo tempo. O mesmo representa corretamente o que a questão pede, no entanto não consegue determinar as coordenadas do vetor procurado.

Questão 8: O estudante não respondeu a questão.

Questão 9: O estudante não respondeu a questão.

Questão 10: O estudante entende que vetores cujo ângulo entre eles é igual a 90° são ortogonais e que o produto escalar entre este é igual a zero.

Questão 11: O estudante desenvolve o cálculo da norma de um vetor de acordo com o apresentado na subseção 2.8.3. O mesmo compreende que a norma é o módulo, comprimento, do vetor.

Estudante – E8

Questão 1: O estudante compreende que o vetor é um segmento orientado que possui módulo, direção e sentido.

Questão 2: O estudante inicialmente determina usando a definição 3 que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a (1,1) e representa no plano cartesiano o vetor de origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,1). No entanto, posteriormente, o mesmo representa no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto B.

Questão 3: O estudante não respondeu a questão.

Questão 4: O estudante constrói o sistema de eixos ortogonais OXYZ de acordo com o apresentado na figura 15, representa o vetor $\vec{u}$ corretamente com origem no ponto (0,0,0) e extremo no ponto (-3,2,1) e o vetor $\vec{v}$ com o com origem no ponto (0,0,0) e extremo no ponto (1,3,2).

Questão 5: O estudante desenvolve as operações de $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\ e\ 2\vec{u}$ de acordo com o apresentado na subseção 2.6.3. O mesmo compreende como os vetores $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\ e\ 2\vec{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não sabe fazer a representação geométrica de $\vec{u}-\vec{v}$.

Questão 6: O estudante determina a equação $2x+3y=0$ a partir do vetor $\vec{u}=(3,2)$ e do vetor ortogonal a $\vec{u}$ cuja coordenadas são (x,y) e da compreensão que dois vetores ortogonais tem produto interno igual a zero. De modo a concluir que os vetores ortogonais ao vetor $\vec{u} = (3,2)$ têm coordenadas dadas por $\left(-\frac{3y}{2}, -\frac{2x}{3}\right)$. O mesmo representa corretamente dois vetores ortogonais.

Questão 7: O estudante determina usando a definição 8 que o vetor ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2,3,1)$ e $\vec{v} = (1,4,2)$ tem coordenadas (2,-3,5).

Questão 8: O estudante não respondeu a questão.

Questão 9: O estudante não respondeu a questão.

Questão 10: O estudante entende que vetores cujo ângulo entre eles é igual a 90° são ortogonais.

Questão 11: O estudante desenvolve o cálculo da norma de um vetor de acordo com o apresentado na subseção 2.8.3. O mesmo compreende que a norma é o módulo, comprimento, do vetor.

Estudante – E9

Questão 1: O estudante compreende que o vetor é uma orientação que indica sentido, direção e módulo. O mesmo representa o vetor como um segmento orientado e entende o que é o módulo, o sentido e a direção, no entanto, diz que o vetor é uma reta.

Questão 2: O estudante inicialmente determina usando a definição 3 que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a (1,1). No entanto, posteriormente, quando representa no plano os pontos A e B, o mesmo traça o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto B.

Questão 3: O estudante entende que para determinar os representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$ basta deslocar este veto no plano. O mesmo indica que o vetor com origem no ponto (1,1) e extremidade no ponto (2,2) é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Questão 4: O estudante constrói o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ de acordo com o apresentado na figura 15, indica corretamente as coordenadas do vetor nos eixos x, y e z, no entanto, não sabe representar vetores no espaço.

Questão 5: O estudante desenvolve as operações de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\ e\ 2\overrightarrow{u}$ de acordo com o apresentado na subseção 2.6.3. O mesmo compreende como o vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é representado no plano cartesiano. Porém, não sabe fazer a representação de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$ no plano e a representação geométrica de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

Questão 6: O estudante determina o vetor $\overrightarrow{v} = (-3{,}2)$ como vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (3{,}2)$ a partir da compreensão que dois vetores ortogonais tem produto escalar igual a zero. O mesmo representa corretamente dois vetores ortogonais.

Questão 7: O estudante diz que para determinar o vetor procura é necessário montar uma matriz e calcular o seu determinante, onde será determinado um vetor na direção i, outro vetor na direção j e outro na direção k. No entanto, não realiza tal processo. O mesmo representa corretamente o que a questão pede.

Questão 8: O estudante não respondeu a questão.

Questão 9: O estudante não respondeu a questão.

Questão 10: O estudante entende que vetores cujo ângulo entre eles é igual a 90° são ortogonais.

Questão 11: O estudante desenvolve o cálculo da norma de um vetor de acordo com o apresentado na subseção 2.8.3. O mesmo compreende que a norma é o comprimento do vetor.

4 CONCLUSÕES

Ao longo da realização deste trabalho, procurou-se apresentar uma análise do nível de conhecimento sobre vetores e geometria analítica de estudantes de um curso superior. Fez-se um estudo de conceitos da Geometria Analítica, abordados na educação básica até o estudo de vetores no plano e no espaço do ensino superior, por meio de um questionário e uma entrevista.

A pesquisa foi realizada a partir da análise de 11 questões. Onde observa-se que seis estudantes responderam o que se esperava da questão um, sete da questão dois, seis da questão três, sendo que um não soube responder, cinco da questão quatro, sendo que dois não souberam responder, sete da questão cinco, cinco da questão seis, sendo que um não sobre responder, apenas um da questão sete, nenhum das questões oito e nove e todos das questões 10 e 11.

Os conhecimentos observados se mostraram bem diversos. Os alunos apresentaram por ora, definições próprias e ao mesmo tempo embasadas na teoria. Verificou-se que conceitos matemáticos vistos no ensino médio são suscitados com frequência para fundamentar conceitos de vetores. Conceitos como posição em sistemas coordenados, distâncias, e até mesmo função no estabelecimento das relações são de fundamental importância na construção de conceitos matemáticos.

De forma despretensiosa, este trabalho, buscou também reunir, conceitos e relações entre a Geometria Analítica e os fundamentos da Álgebra Vetorial, servindo de fonte de consulta para docentes e discentes interessados no tema. Reunimos também formas de expressão dos conhecimentos, o que com certeza direciona a ação docente, verificando possíveis entendimentos e controvérsias conceituais.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, R. D. **Matemática: Interação e Tecnologia**. Volume 3. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática.** Volume 3. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

CABRAL, Raquel Montezuma Pinheiro. **Introdução do Estudo de Vetores no Ensino Médio: Um Ganho Significativo para o Estudo da Geometria Analítica.** 2014. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

CAROLI, A. D; CALLIOLI, C. A.; FEITOSA, M. O. **Matrizes Vetores Geometria Analítica**. 1. ed. São Paulo: NOBEL, 2006.

DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio** – Volume 3. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LUCAS, César Marcos do Nascimento. **Elaboração de uma Sequência de Ensino de Vetores por Meio da Sequência Fedathi e Exploração de suas Representações com Uso do Geogebra.**2017. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Piauí, Parnaíba, 2017.

MARTINS, Rosival Lacerda. **O Ensino de Vetores e a Interdisciplinaridade.** 2015. 91 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

NASCIMENTO, Weliton de Farias. **O Ensino de Vetores na Primeira Série do Ensino Médio com Auxílio do Geoplano, da Malha Quadriculada e do Geogebra.** 2014. 60 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2014.

NOVAES, André Luís. **Geometria Analítica e Vetores: Uma Proposta para Melhoria do Ensino da Geometria Espacial.** 2015. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

RIGONATTO, Marcelo. **Introdução ao Estudo dos Vetores e Aplicações no Ensino Médio.** 2018. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.

VELOSO, Antonio Francisco de Oliveira. **Uma Proposta para a Utilização dos Vetores como Ferramenta de Resolução de Problemas de Geometria.** 2015. 67 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: PEARSON, 2014.

ANEXOS

Síntese dos questionários e transcrição das entrevistas por estudante.

Estudante – E1

Dados coletados

Questão 1: O que é um vetor?

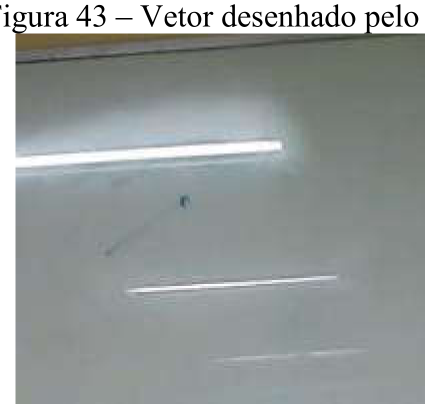
Resposta dada no questionário: Vetor é um segmento de reta orientado com direção, sentido e módulo.

Diálogo da entrevista:

P: Desenhe no quadro um vetor.

E1: (A figura 43 apresenta o vetor desenhado pelo estudante).

Figura 43 – Vetor desenhado pelo E1



Fonte: Elaborada pelo autor

P: O que é o módulo do vetor?

E1: (Não soube responder. Disse o sentido e a direção do vetor que desenhou).

P: Desenhe outro vetor com sentido diferente do que você fez.

E1: (A figura 44 apresenta o vetor desenhado pelo estudante).

Figura 44: Vetor com sentido diferente do vetor da figura 23.

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Agora faça um que mude a direção.

E1: (A figura 45 apresenta o vetor desenhado pelo estudante).

Figura 45: Vetor com direção diferente do vetor da figura 23

Fonte: Elaborada pelo autor

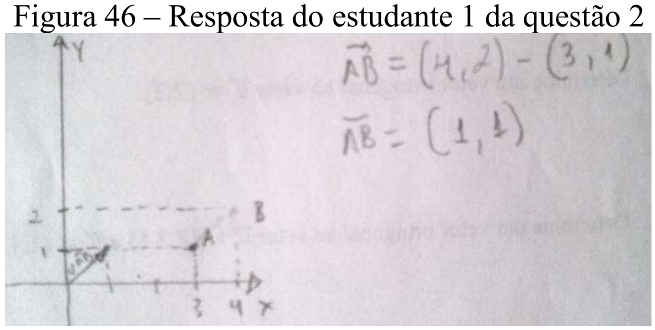
P: Este outro vetor mudou só a direção ou também mudou o sentido?

E1: O sentido também.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

A figura 46 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 46 – Resposta do estudante 1 da questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Por que você traçou o vetor com extremidades na origem e no ponto (1,1)?

E1: Porque eu fiz B - A.

P: Qual o vetor pedido na questão, o vetor de extremidades nos pontos A e B ou o vetor de extremidades na origem e no ponto (1,1)?

E1: O de extremidades nos pontos A e B.

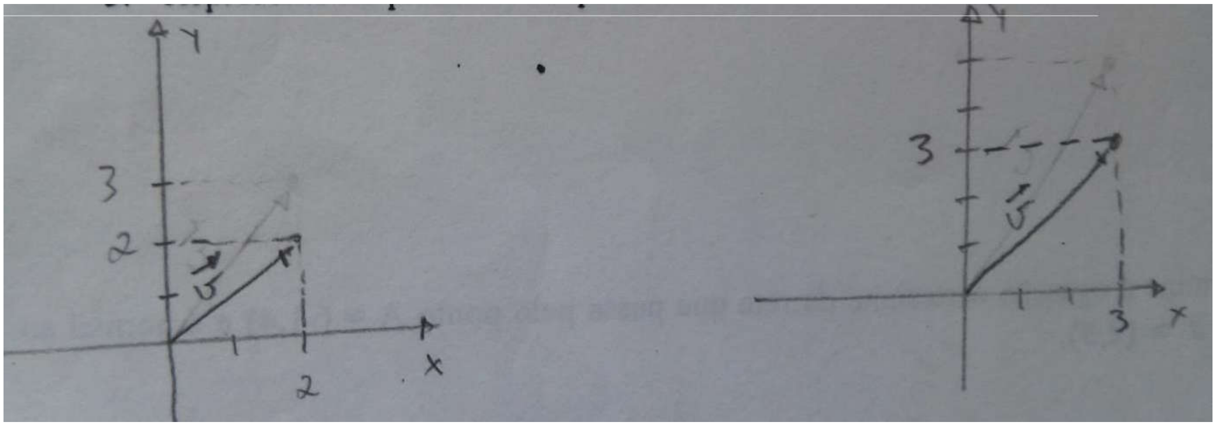
P: O que seria este vetor com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,1)?

E1: (O estudante lembra o que é um vetor representante) Um representante do vetor de extremidades nos pontos A e B.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

A figura 47 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 47 – Resposta do estudante 1 da questão 3



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Esta questão pede dois representantes de que vetor?

E1: Do vetor de origem no ponto (0,0) e de extremidade no ponto (1,1) (este vetor está na questão 2). Só que errei o tamanho dele.

P: Você acha que acertou o sentido e a direção dos dois representantes do vetor pedido?

E1: Sim.

P: É possível desenhar mais representantes?

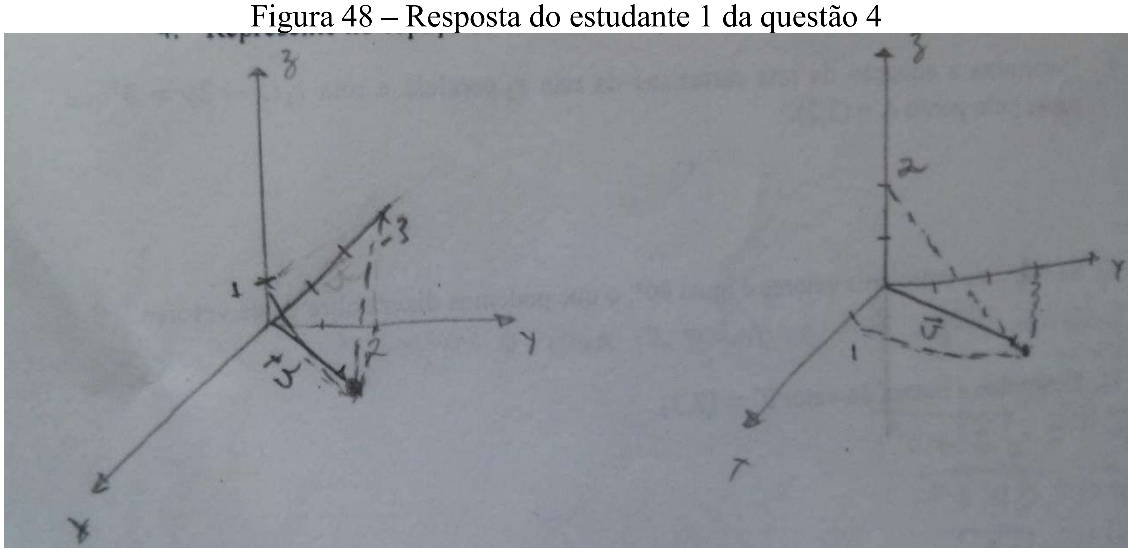
E1: Sim.

Observação: Durante o diálogo da questão 2, o estudante relatou que o vetor de origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,1) é um representante do vetor de extremos nos pontos A e B.

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\vec{u} = (-3,2,1)\ e\ \vec{v} = (1,3,2)$.

A figura 48 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 48 – Resposta do estudante 1 da questão 4



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: O que seria o vetor $\vec{u}$ no seu desenho?

E1: (Indicou o segmento que desenhou como vetor $\vec{u}$).

P: E o vetor $\vec{v}$?

E1: (Indicou o segmento que desenhou como vetor $\vec{v}$).

P: Você sabe representar pontos no espaço?

E1: Não.

Questão 5: Dado os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Determine:

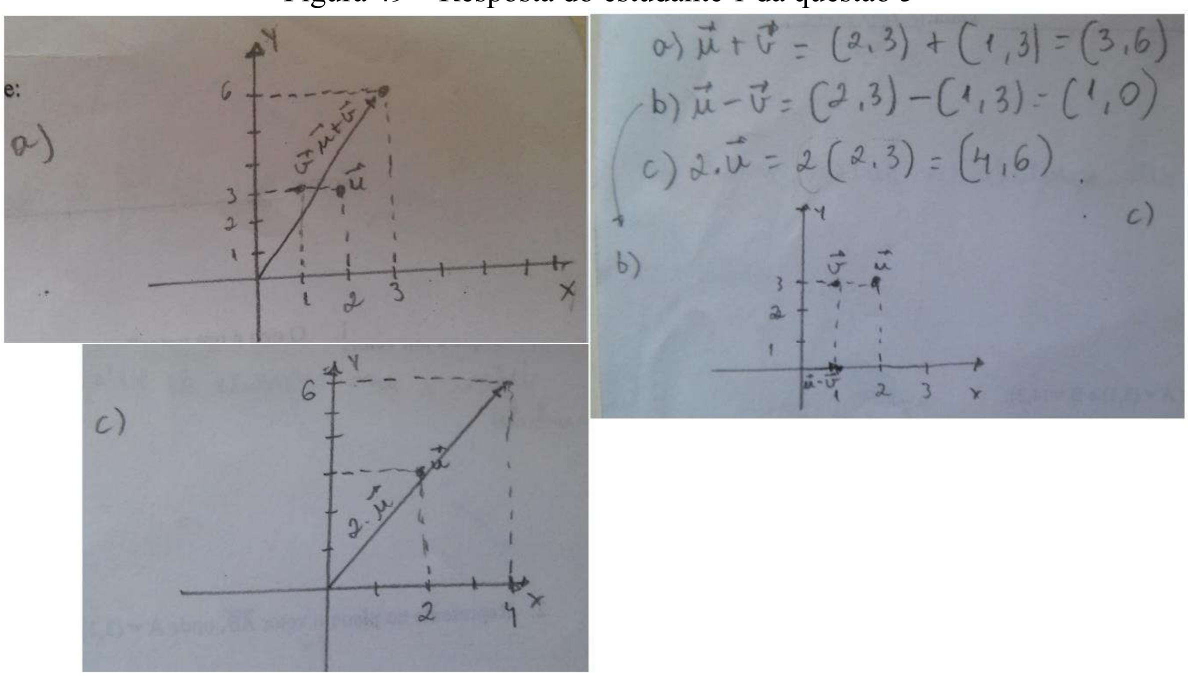
a) $\vec{u} + \vec{v}$ e sua representação no plano.

b) $\vec{u} - \vec{v}$ e sua representação no plano.

c) $2\vec{u}$ e sua representação no plano.

A figura 49 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 49 – Resposta do estudante 1 da questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

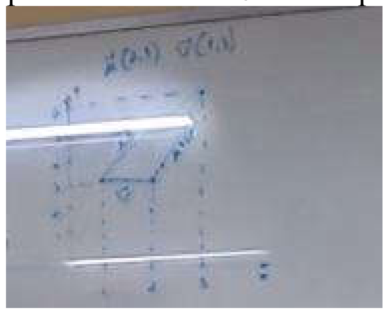
P: Você sabe fazer um desenho que represente geometricamente os vetores vetor $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{v}$?

E1: Sei (fez o desenho da figura 26).

P: Agora, faça o mesmo desenho no plano usando as coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{v}$.

E1: (Não soube representa os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ corretamente no plano e fez uma representação diferente da apresentada no questionário, como mostra a figura 50).

Figura 50: Representação no plano do vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dada pelo estudante E1 na entrevista



Fonte: Elaborada pelo autor

P: Você sabe fazer o mesmo processo com os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$?

E1: Não.

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você não sabe quando dois vetores são ortogonais?

E1: Não.

P: Sabe fazer pelo menos um desenho que apresente dois vetores ortogonais?

E1: Não.

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3,1)$ e $\overrightarrow{v} = (1,4,2)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Como você não soube responder a questão 6, então não sabe a questão 7. Não é isso?

E1: Não sei.

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Por que você não respondeu a questão 8 do questionário?

E1: Não lembro com faz. Mais sei que estudei.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta $r_1: x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Por que você não respondeu a questão 9 do questionário?

E1: Não lembro com faz. Poderia ser as equações paramétricas?

P: Sim, qualquer uma das equações. Você sabe fazer as equações paramétricas?

E1: Não.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

<u>Resposta dada no questionário:</u> Podemos dizer que os mesmos são ortogonais e o valor entre os dois é 1.

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Como você chegou à conclusão que os vetores são ortogonais se não soube responder a questão 6?

E1: Eu comparei as questões e lembrei que eles são perpendiculares.

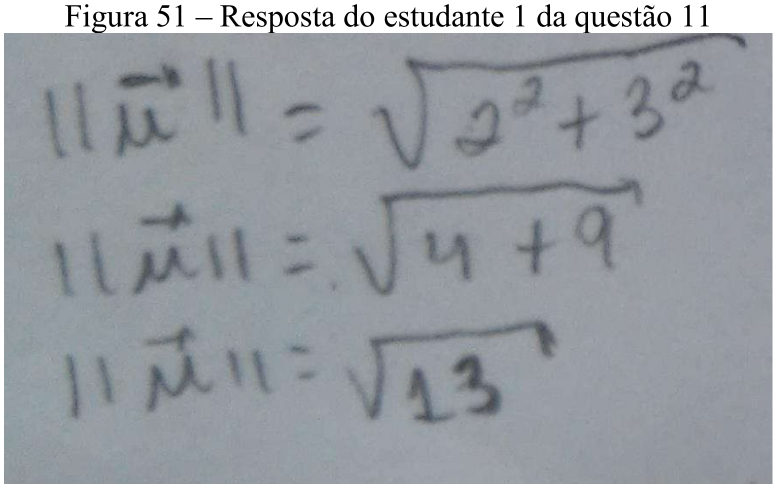
P: O que é esse valor 1?

E1: Eu lembrei que tinha estudado.

Questão 11: Determine a norma do vetor $\vec{u} = (2{,}3)$.

A figura 51 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 51 – Resposta do estudante 1 da questão 11



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: O que é a norma de um vetor?

E1: O tamanho do vetor.

P: O que seria a norma daquele vetor $\vec{u}$ que está no quadro?

E1: (Não soube representa).

Estudante – E2

Dados coletados

Questão 1: O que é um vetor?

<u>Resposta dada no questionário:</u> Um vetor descreve o comportamento de determinado objeto no espaço, sendo que deve apresentar módulo, sentido e direção.

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Nesta questão 1 você disse que o vetor descreve o comportamento de certo objeto. O que quis dizer com isso?

E2: Eu não lembrei do conceito de vetor, assim, associei ao ponto de vista da física. Na física a gente escreve muito, por exemplo, descreva o comportamento de uma partícula que tenha coordenadas tal, tal e tal. Como isso, ele pede para determinar o sentido para onde ela vai, o tamanho e a direção. Muito associado também a trabalho. Quanto de trabalho certo objeto faz? Aí, descreve isso com um vetor.

P: Faça o desenho de um vetor, sem ser no plano cartesiano.

E2: (A figura 52 apresenta o vetor desenhado pelo estudante).

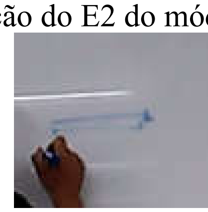
Figura 52 – Vetor desenhado pelo E2

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Neste vetor, o que é o módulo?

E2: O tamanho dele. (Fez a representação do que seria o módulo do vetor que desenhou, figura 53).

Figura 53 – Representação do E2 do módulo do vetor da figura 52



Fonte: Elaborada pelo autor

P: O que é o sentido?

E2: O sentido é aqui na horizontal. (Fez um traço sobre o vetor da figura 52, como mostra a figura 54).

Figura 54 – Representação do E2 do sentido do vetor da figura 52

Fonte: Elaborada pelo autor

P: O que seria a direção?

E2: É para onde está pontando a seta. O vetor.

P: Como seria um vetor com direção diferente do vetor que você desenhou?

E2: (A figura 55 apresenta o vetor desenhado pelo estudante com direção diferente do vetor da figura 52).

Figura 55: Vetor desenhado pelo E2 com direção diferente do vetor da figura 52.

Fonte: Elaborada pelo autor

P: E com sentido diferente, como seria?

E2: (A figura 56 apresenta o vetor desenhado pelo estudante com sentido diferente do vetor da figura 52).

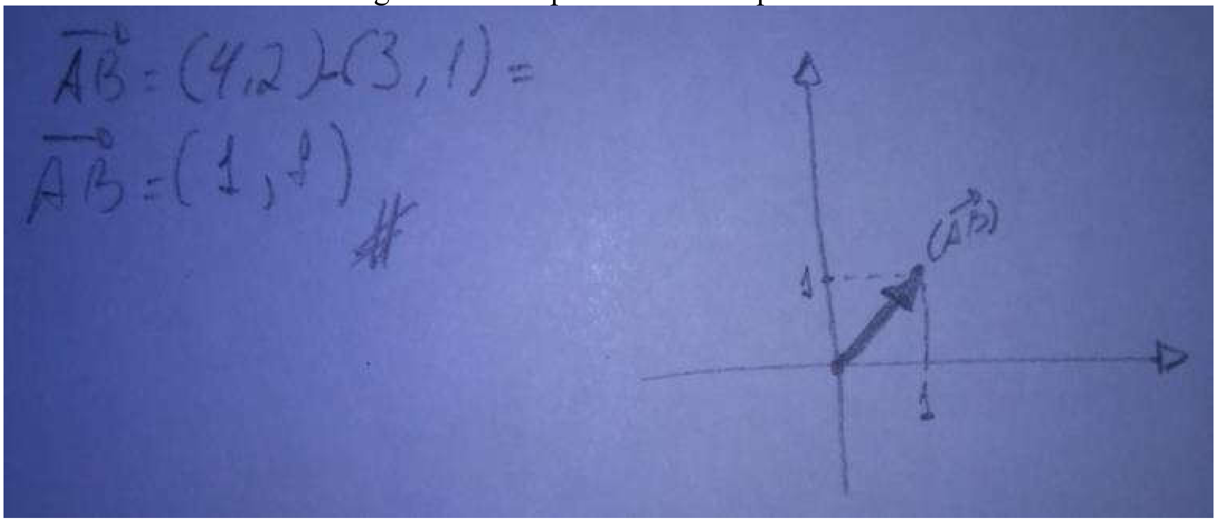
Figura 56: Vetor desenhado pelo E2 com sentido diferente do vetor da figura 52.

Fonte: Elaborada pelo autor

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

A figura 57 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 57 – Resposta do E2 da questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: A questão 2 pede para representar o vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano, por que você fez assim? (Está se referindo a resposta dada pelo estudante no questionário).

E2: Segundo o conceito do vetor $\overrightarrow{AB}$, você pega o vetor B e diminui do vetor A.

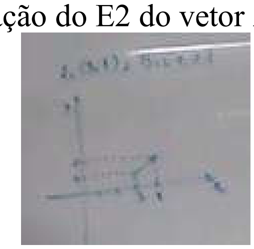
P: O vetor $\overrightarrow{AB}$ é o segmento orientado que tem origem em A e extremidade em B, é possível representar no plano cartesiano o vetor que tem origem em A e extremidade em B?

E2: Sim.

P: Faça no quadro.

E2: (A figura 58 apresenta a representação feita pelo estudante do vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano)

Figura 58: Representação do E2 do vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor

P: Este vetor que você acabou de fazer é o mesmo do que fez no questionário?

E2: Sim, só que o do questionário parte da origem, mais eles têm os mesmo módulo, direção e sentido.

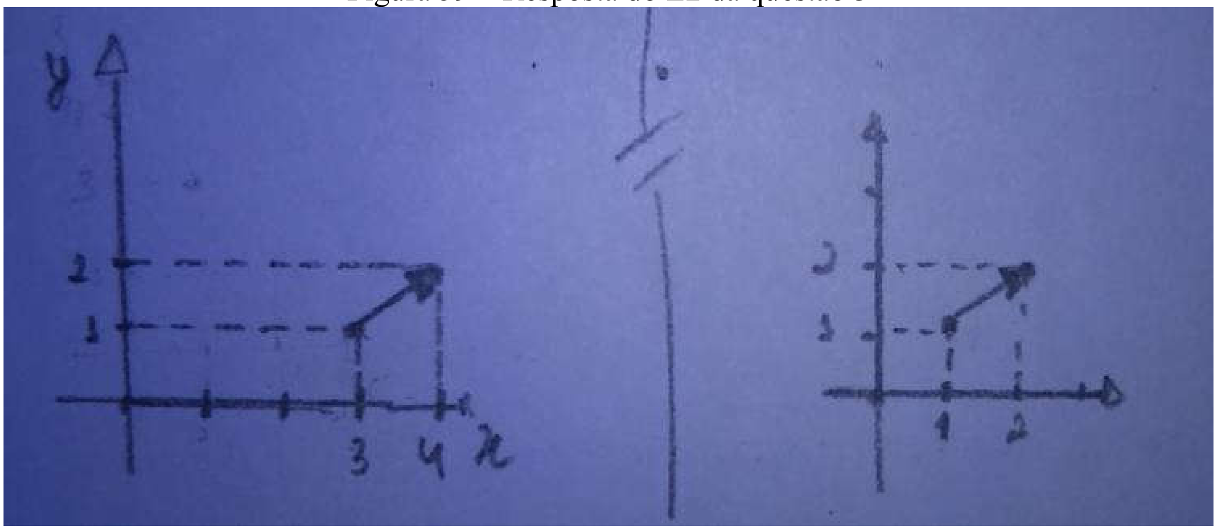
P: O que este vetor que você fez no questionário é do vetor que acabou de desenhar no quadro?

E2: Um representante.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

A figura 59 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 59 – Resposta do E2 da questão 3



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: É possível desenhar mais do que dois representantes de um vetor?

E2: Sim.

P: Este vetor (construiu no plano cartesiano o vetor de origem no ponto (4,1) e extremidade no ponto (3,0)) também é um representante de $\overrightarrow{AB}$?

E2: Não.

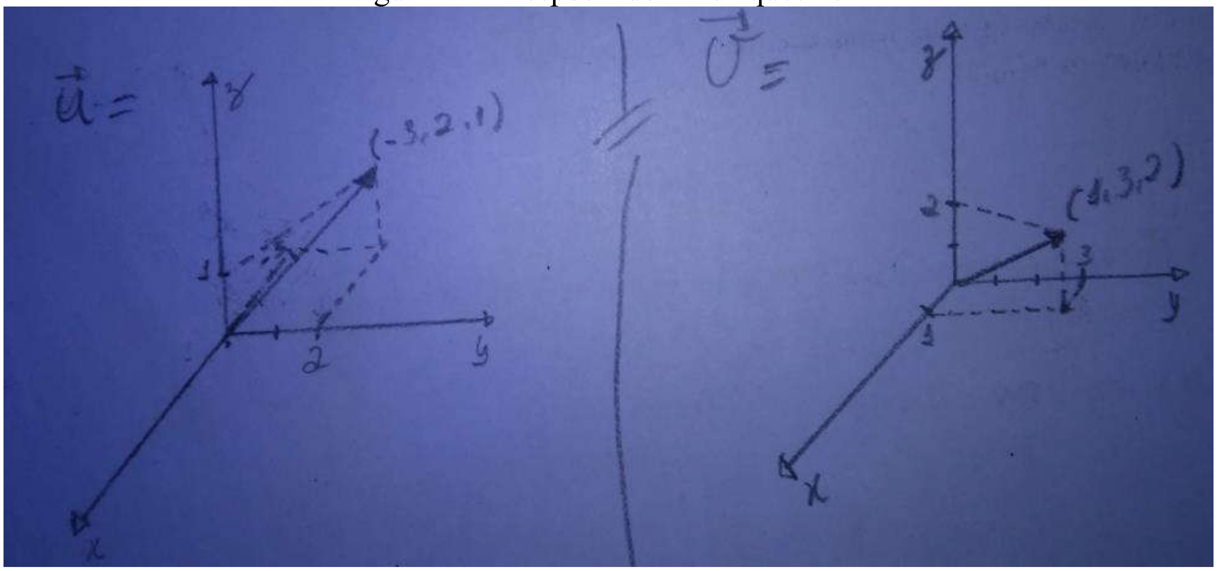
P: Por que?

E2: Porque ele tem sentido diferente, sentido não, direção.

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\vec{u} = (-3,2,1)$ e $\vec{v} = (1,3,2)$.

A figura 60 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 60 – Resposta do E2 da questão 4



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você domina a representação de pontos no espaço?

E2: Sim

Questão 5: Dado os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Determine:

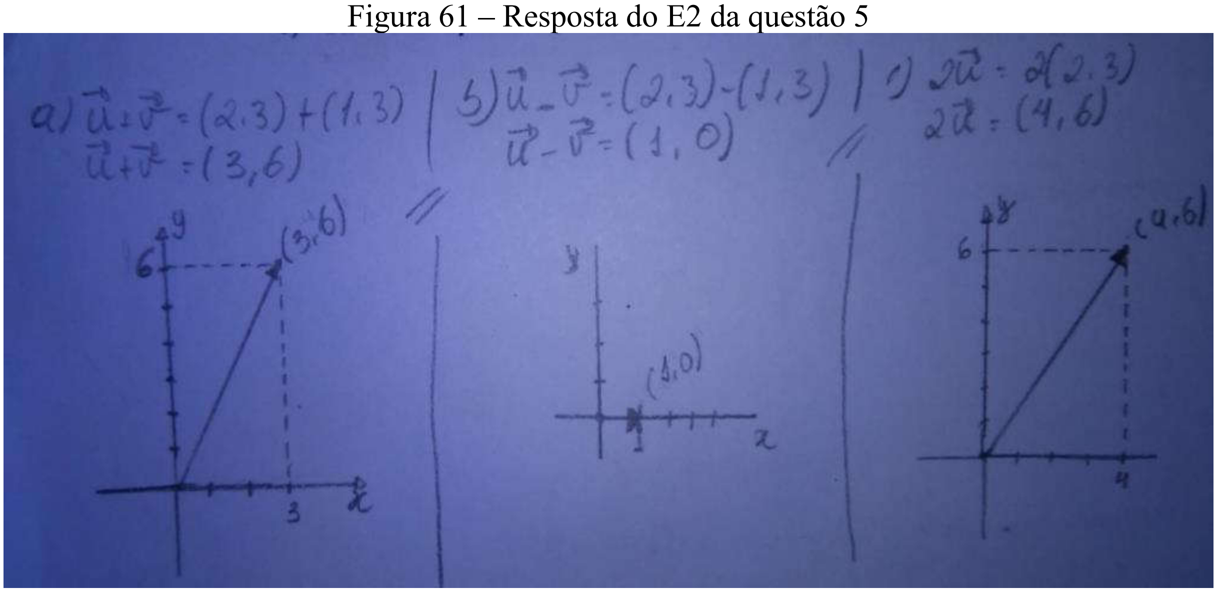
a) $\vec{u} + \vec{v}$ e sua representação no plano.

b) $\vec{u} - \vec{v}$ e sua representação no plano.

c) $2\vec{u}$ e sua representação no plano.

A figura 61 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 61 – Resposta do E2 da questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Durante o curso de álgebra linear I, você estudou a representação geométrica do vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Lembra como faz?

E2: Sim. (O estudante fez o desenho de acordo com o apresentado na figura 26, como mostra a figura 62).

Figura 62: Representação geométrica do vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dada pelo estudante E2

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Sabe fazer a representação geométrica do $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

E2: (O estudante fez o mesmo desenho da figura 62, porém escreveu $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ em vez de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$).

P: Como a questão dá as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u} e\ \overrightarrow{v}$, é possível fazer este mesmo esquema no plano cartesiano. Você consegue fazer tal representação?

E2: Sim.

P: Pois faça.

E2: (A figura 63, apresenta a representação geométrica de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ no plano cartesiano feita pelo estudante).

Figura 63: Representação de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ no plano cartesiano dada pelo estudante E2

Fonte: Elaborada pelo autor

P: E a subtração?

E2: É só mudar o sentido. (Fez o mesmo desenho da figura 63, porém mudou o sentido do vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ para o sentido oposto).

P: Você consegue fazer com o produto?

E2: (A figura 64, apresenta a representação do vetor $\overrightarrow{u} e\ \overrightarrow{2u}$ no plano cartesiano feita pelo estudante).

Figura 64: Representação dos vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{2u}$ no plano cartesiano dada pelo estudante E2

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{2u}$ ficam alinhados?

E2: Sim

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

A figura 65 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 65 – Resposta do E2 da questão 6

Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Você entende o que são vetores ortogonais?

E2: Sim.

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3,1)$ e $\vec{v} = (1,4,2)$.

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista:

P: Você entendeu o que esta questão pede?

E2: Eu entendi.

P: Você sabe calcular o vetor pedido?

E2: Não. Eu sei o que ela quer.

P: Pois faça um desenho que represente o que a questão pede.

E2: (O estudante fez os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com um ponto em comum e traçou o vetor $\vec{w}$ formando um ângulo de 90° com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como mostra a figura 66).

Figura 66: Vetor $\vec{w}$ ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ construído pelo estudante E2

Fonte: Elaborada pelo autor

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista:

P: Não sabe calcular a equação da reta que passa por um ponto e é normal a um vetor?

E2: Não consigo lembra.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta $r_1 : x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

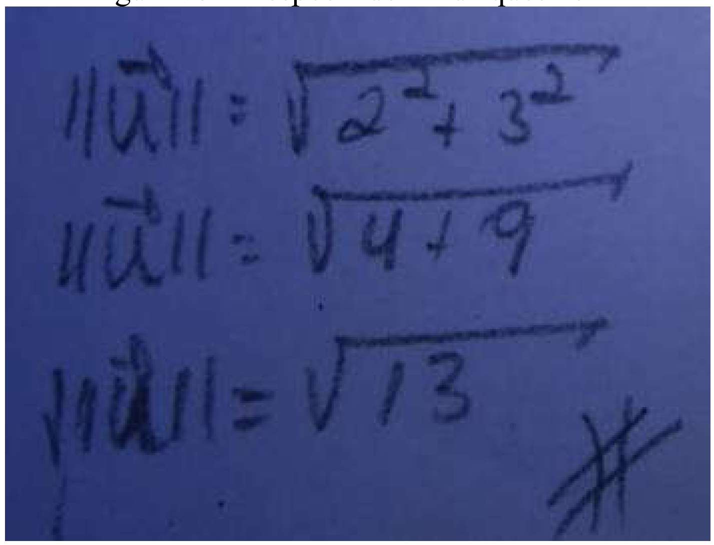
Resposta dada no questionário: Podemos dizer que ortogonais.

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 11: Determine a norma do vetor $\vec{u} = (2,3)$.

A figura 67 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 67 – Resposta do E2 da questão 11



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: O que é a norma?

E2: A norma seria o tamanho do vetor.

P: Naquele vetor $\vec{v}$ (aponta para um vetor que está no quadro), o que seria a norma?

E2: (O estudante faz a mesma representação que usou na figura 53 para indicar o módulo).

P: A norma tem alguma coisa haver com o módulo?

E2: Sim.

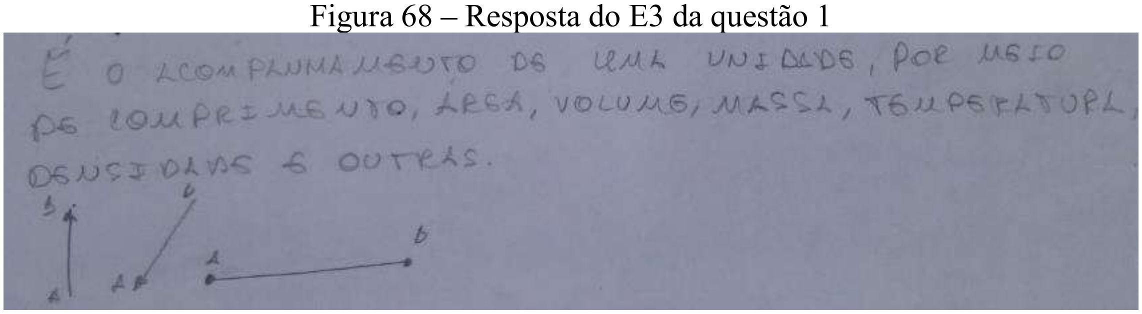
Estudante – E3

Dados coletados

Questão 1: O que é um vetor?

A figura 68 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 68 – Resposta do E3 da questão 1



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você colocou como respostas o seguinte: (ler o que o estudante escreveu na questão 1 do questionário).

E3: Também é conhecido como um segmento de reta. Um segmento de reta que vai ter um sentido para cima, para baixo, ou para lá ou para cá (faz o movimento com a mão como se fosse para direita e para esquerda).

P: O vetor é um segmento de reta?

E3: Sim.

P: Os elementos de um vetor são: comprimento, área, volume, massa, temperatura, densidade e outros?

E3: Foi.

P: Um vetor é isso?

E3: Sim.

P: Se o vetor é um segmento orientado, então podemos dizer que ele tem um sentido?

E3: Sim.

P: Um vetor tem três elementos que são: sentido, ...

E3: ... comprimento e orientação.

P: Desenhe no quadro um vetor.

E3: (A figura 69 apresenta o vetor desenhado pelo estudante).

Figura 69 – Vetor desenhado pelo E3

Fonte: Elaborada pelo autor

E3: Um segmento de reta se dá assim. Porque ele tem um sentido, ao mesmo tempo está orientado e ele tem um certo comprimento. Também pode ser dado assim (faz o desenho de outros vetores, figura 70).

Figura 70 – Vetores desenhados pelo E3

Fonte: Elaborada pelo autor

P: O que são estes vetores que você fez? Eles são iguais ao vetor que fez inicialmente?

E3: Isso.

P: Então é possível representar um vetor em vários lugares do plano?

E3: Isso. Ele pode ter um certo sentido (se refere ao mesmo sentido), mais também pode ter um sentido contrário.

P: Faz um outro com sentido contrário.

E3: (A figura 71 apresenta o vetor desenhado pelo estudante com sentido contrário do vetor da figura 69).

Figura 71 – Representação do E3 do vetor com sentido contrário do vetor da figura 69

Fonte: Elaborada pelo autor

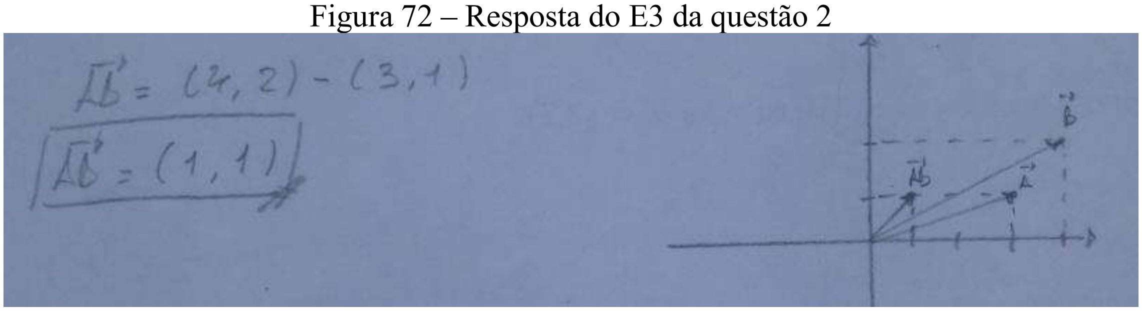
P: Estes vetores são iguais?

R3: Sim, só têm o sentido contrário.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

A figura 72 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 72 – Resposta do E3 da questão 2



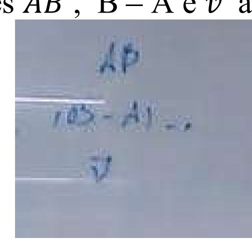
Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: A questão 2 pede para representar o vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano. O que você entende por vetor $\overrightarrow{AB}$?

E3: $\overrightarrow{AB}$ é o resultado de B – A, que depois deste daqui (se refere ao B – A) ele vira um ponto. E também o vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser o vetor $\vec{v}$. (Figura 73).

Figura 73: Vetores $\overrightarrow{AB}$, B – A e $\vec{v}$ apresentado pelo E3

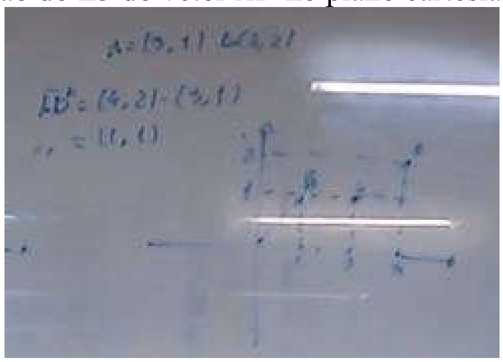


Fonte: Elaborada pelo autor

P: O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem origem em A e extremidade em B, se fosse representar no plano, usando estes pontos, como o vetor ficaria? Use as coordenadas dos pontos.

E3: (A figura 74 apresenta a representação feita pelo estudante do vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano e o cálculo realizado).

Figura 74: Representação do E3 do vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano e o cálculo de B – A



Fonte: Elaborada pelo autor

P: Faz o mesmo vetor ligando do ponto A ao ponto B.

E3: (O estudante traça o vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano apresentado na figura 74).

Figura 74: Representação do E3 do vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano da figura 74

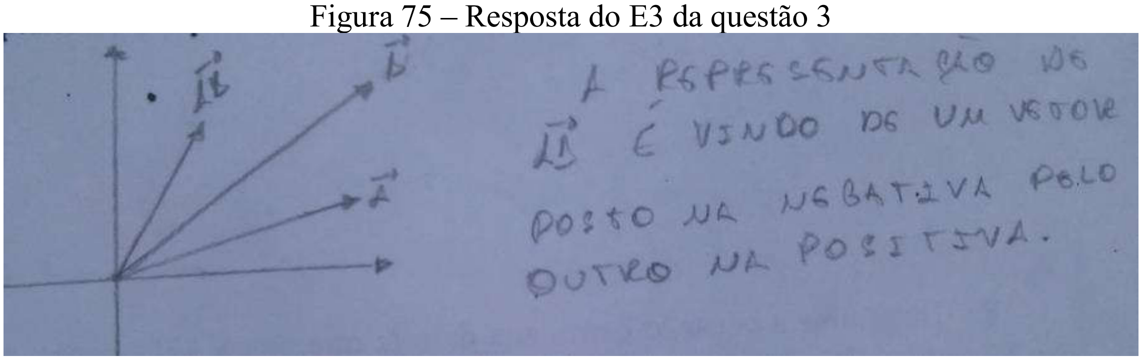
Fonte: Elaborada pelo autor

E3: Tem aquela propriedade que eles são iguais. E são, porque eles têm a mesma orientação, o mesmo comprimento e o mesmo sentido.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

A figura 75 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 75 – Resposta do E3 da questão 3



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Quando um vetor é representante de um outro?

E3: Eu acho, quando você faz esta relação de B – A.

P: Este vetor (se refere ao vetor de origem em (0,0) e extremidade em (1,1)) é um representante de $\overrightarrow{AB}$?

E3: É um representante.

P: Você consegue fazer outro representante do vetor $\overrightarrow{AB}$ neste mesmo plano que fez (se refere ao plano que está desenhado na figura 74).

E3: Com outros números diferentes?

P: Sim. Em outro lugar diferente.

E3: Mas com estes dados aqui?

P: Sim. Não é possível?

E3: É possível, é porque estou aqui tentando encontrar uma outra forma.

(O estudante calculou o vetor A – B e representou-o no plano da figura 74, como mostra a figura 76).

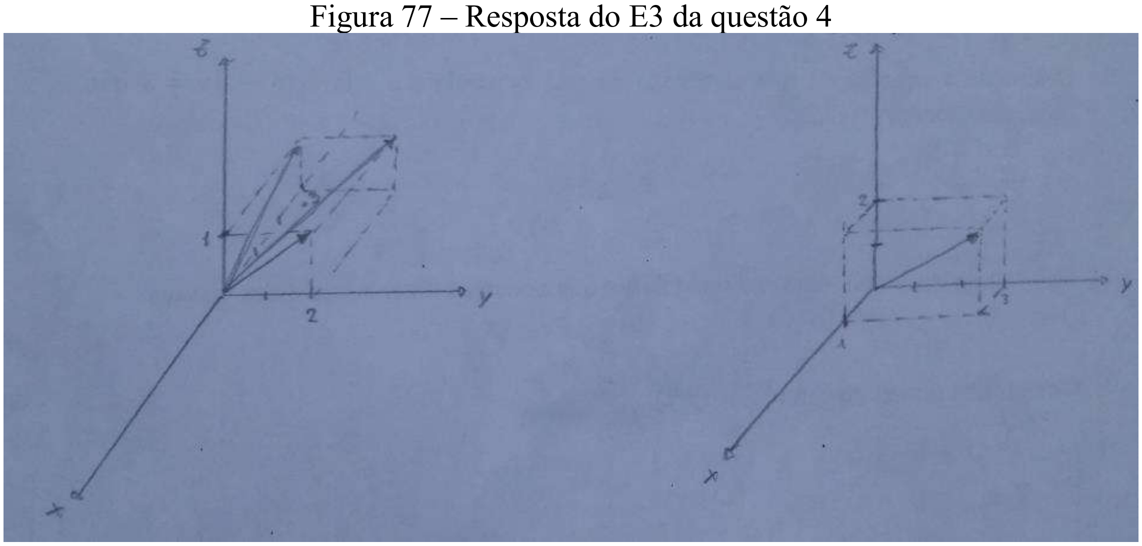
Figura 76: Representação do E3 do vetor B - A no plano cartesiano da figura 74

Fonte: Elaborada pelo autor

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\overrightarrow{u} = (-3,2,1)\ e\ \overrightarrow{v} = (1,3,2)$.

A figura 77 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 77 – Resposta do E3 da questão 4



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Qual o segmento que representa o vetor pedido?

E3: Este que passa pelo meio (indicou que o vetor $\overrightarrow{u}$ é o que tem origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (-3,2,1)).

Questão 5: Dado os vetores $\overrightarrow{u} = (2,3)$ e $\overrightarrow{v} = (1,3)$. Determine:

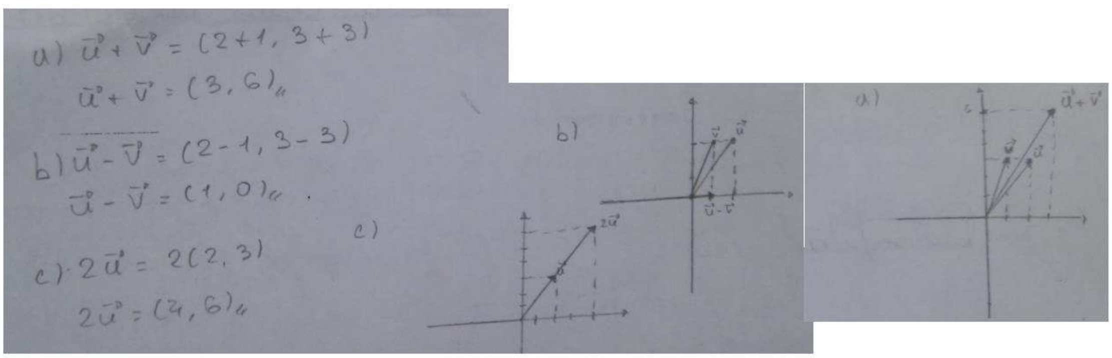
a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e sua representação no plano.

b) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ e sua representação no plano.

c) $2\overrightarrow{u}$ e sua representação no plano.

A figura 78 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 78 – Resposta do E3 da questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Durante o curso de álgebra linear I, você estudou a representação geométrica do vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Lembra como faz?

E3: (A figura 79 apresenta a representação geométrica de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ feita pelo estudante).

Figura 79: Representação geométrica do vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dada pelo estudante E3

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Como seria a representação geométrica do $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$?

E3: Não estou lembrando mais eu sei.

P: Você consegue fazer a mesma representação que fez anteriormente (está se referindo ao que o estudante fez na figura 79) no plano cartesiano? Colocando o vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

E3: (A figura 80, apresenta a representação geométrica de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ no plano cartesiano feita pelo estudante).

Figura 80: Representação de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ no plano cartesiano dada pelo estudante E3

Fonte: Elaborada pelo autor

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você não sabe o que são vetores ortogonais?

E3: Eles formam um ângulo de 90°. Vamos dizer que tem que dá igual a zero.

P: O que tem que dá igual a zero?

E3: O ângulo.

P: O ângulo entre os dois vetores é igual a zero?

E3: Não, não, é 90°.

P: Faz um desenho com dois vetores ortogonais.

E3: (O estudante fez os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ com um ponto em comum formando um ângulo de 90°, como mostra a figura 81).

Figura 81: Vetor $\overrightarrow{v}$ ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$ construído pelo estudante E3

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Não consegue determinar as coordenadas deste vetor $\overrightarrow{v}$ sabendo que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais?

E3: Não.

P: Por que você falou daquele zero?

E3: Porque eu estava lembrando de um outro assunto que sempre quando dava zero o resultado, ele é um ângulo de 90°, quando dava negativo, já ultrapassava um ângulo de 90° e quando dava positivo, ele era menor que um ângulo de 90°.

P: Você não consegue determinar o que a questão pede a partir do que falou agora?

E3: Não.

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3,1)$ e $\vec{v} = (1,4,2)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

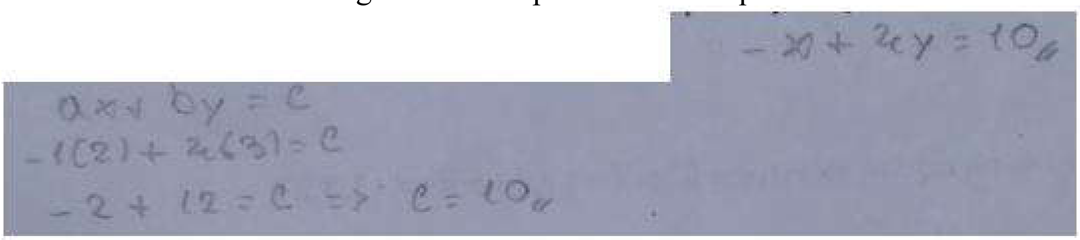
P: Você não lembra como faz está questão? Sabe pelo menos fazer um desenho que represente o que a questão 7 pede?

E3: Não. Sinceramente não lembro.

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

A figura 82 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 82 – Resposta do E3 da questão 8



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: A questão 8 pede a equação da reta a partir de um ponto e um vetor normal a reta. Por que você fez assim? Quem é este **a** e **b** que você usou aqui (Está se referindo ao **a** e **b** que aparecem na equação $ax + by = c$ usada pelo estudante no questionário)?

E3: O **a** vai ser este 2, desse vetor. Este vetor vai ser o **a** e o **b**.

P: Eles estão nesta equação aqui (Está se referindo a equação $-x + 4y = 10$ feita pelo estudante no questionário)?

E3: Não é o **a** e o **b**. Estes aqui vão ser o x e o y (Se fere as coordenadas do vetor $\vec{u}$). Quem vai ser o **a** e **b** já vai ser o -1 e 4 (Coordenadas do ponto A).

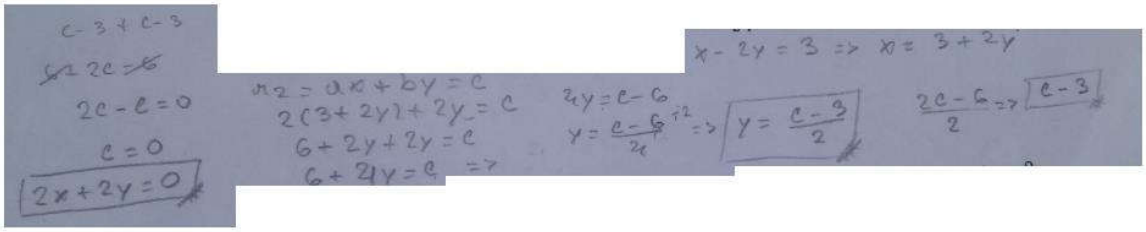
P: Como você colocou aqui (Está se referindo a equação $-x + 4y = 10$ feita pelo estudante no questionário)?

E3: Isso. Todo este cálculo aqui, foi para encontrar **c**. Isto aí vai de função afim.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta r_1: $x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

A figura 83 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 83 – Resposta do E3 da questão 9



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

Resposta dada no questionário: Que são ortogonais e iguais a zero.

Diálogo da entrevista:

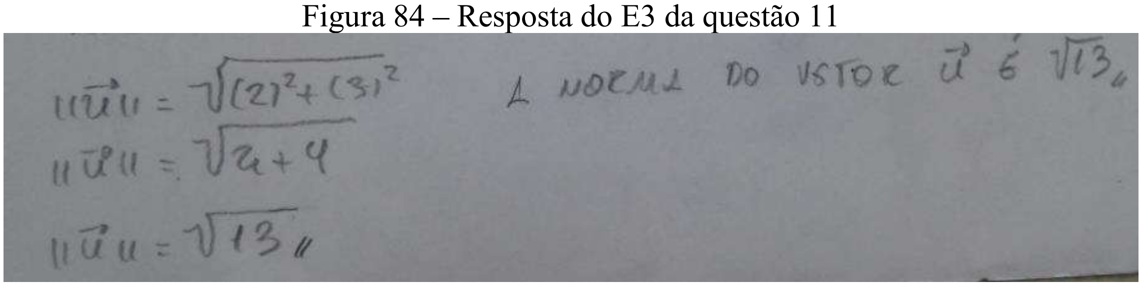
P: Você diz aqui que são ortogonais e iguais a zero (Está se referindo ao que o estudante respondeu no questionário), o que é este zero?

E3: Não sei dizer.

Questão 11: Determine a norma do vetor $\vec{u} = (2{,}3)$.

A figura 84 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 84 – Resposta do E3 da questão 11



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: O que é a norma?

E3: O comprimento.

P: O comprimento de que?

E3: Do vetor $\vec{u}$.

Estudante – E4

Dados coletados

Questão 1: O que é um vetor?

<u>Resposta dada no questionário:</u> Um vetor é constituído de outros vetores de cunho equipolente, isto é, que possuem mesmo módulo direção e sentido. Assim, pode ser definido como uma representação gráfica que possui por finalidade da orientação a um corpo em determinada condição.

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Desenhe um vetor.

E4: (A figura 85 apresenta o vetor desenhado pelo estudante).

Figura 85 – Vetor desenhado pelo E4

Fonte: Elaborada pelo autor

P: O vetor que você fez tem origem em A e extremidade em B. Neste caso, o que seria o módulo?

E4: O módulo! No caso teria que dar valores para A e para B, né?

P: Não. É só para você dizer o que é o módulo.

E4: O tamanho do vetor.

P: O que seria o sentido?

E4: Seria da esquerda para a direita.

P: O que seria a direção.

E4: Na horizontal.

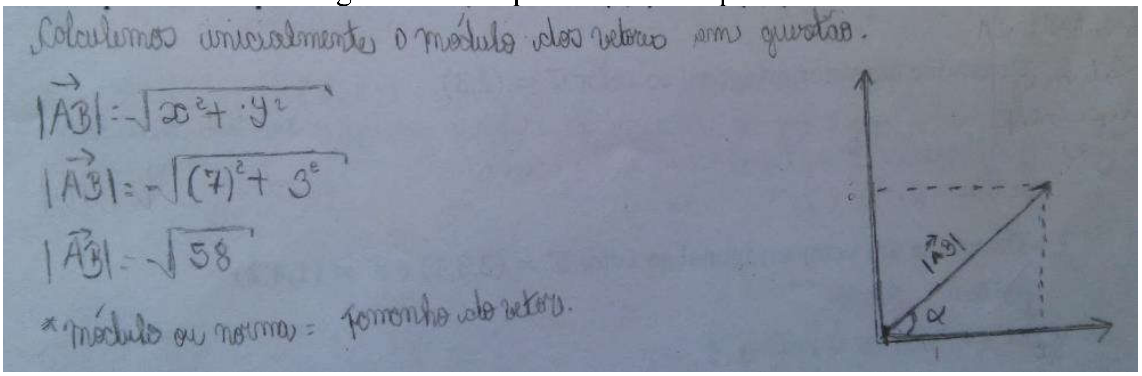
P: Este desenho que você fez, o que seria em termos geométricos?

E4: Uma reta.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

A figura 86 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 86 – Resposta do E4 da questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Faz o plano cartesiano e localize os pontos A e B.

E4: (O estudante construiu o plano cartesiano e representou corretamente os pontos A e B).

P: Agora, trace o vetor $\overrightarrow{AB}$ a partir destes pontos.

E4: (O estudante traça o segmento orientado de origem no ponto A e extremidade no ponto B).

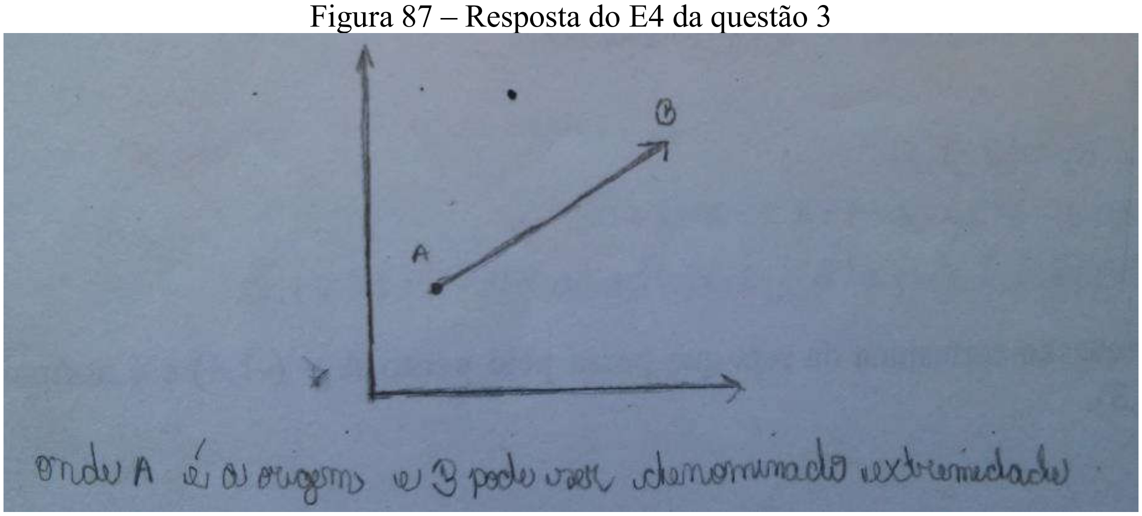
P: Esta seria a representação do vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano cartesiano (está se referindo ao vetor feito pelo estudante)?

E4: Sim.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

A figura 87 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 87 – Resposta do E4 da questão 3



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Nesta questão 3 pede para fazer representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$. Você sabe o que é um vetor representante?

E4: A ideia de vetor é que ele saia da origem.

P: Represente no plano cartesiano este vetor que sai da origem.

E4: (O estudante construiu o plano cartesiano e representou o vetor com origem em (0,0) e extremidade em (1,1)).

P: Você acha que este vetor (se refere ao vetor de origem em (0,0) e extremidade em (1,1)) é um representante de $\overrightarrow{AB}$?

E4: Eu acredito que sim.

P: O que são vetores representantes?

E4: O vetor representante, leva em consideração a ideia geral de um vetor.

P: Como assim ideia geral?

E4: Ideia geral, porque geralmente quando a gente começa a estudar o vetor, começa com uma introdução a respeitado de que é a ideia geral, ou seja, o que seria uma seta, entre aspas, que é composta por vários vetores equipolentes, ou seja, o vetor é composto por vários vetores com o mesmo módulo, direção e sentido. E que esta seta, entre aspas, seria a ideia geral, em uma ideia menos complexa, é utilizada para dá uma direção, uma orientação, porque algumas grandezas da física e também da matemática não conseguem ser satisfatoriamente definida só levando em consideração o módulo desta grandeza.

P: Você disse que é um conjunto de setas. Faça um desenho que represente este conjunto de setas.

E4: Eu não sei fazer.

P: Este conjunto de setas que você fala, seria os vetores representantes?

E4: Não.

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\overrightarrow{u} = (-3,2,1)\ e\ \overrightarrow{v} = (1,3,2)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você sabe representar vetores no espaço?

E4: Eu tenho muitas dificuldades.

P: Você tem dificuldades de representar ou não sabe?

E4: Eu acho que não sei fazer.

P: Você sabe localizar pontos no espaço?

E4: Acho que sim.

P: Visualize este vetor $\overrightarrow{u}$ como um ponto e localize ele no espaço.

E4: Como ponto?

P: Um ponto no espaço. Construa o sistema com os eixos ortogonais x, y e z e localize o ponto. Assim como localiza pontos no plano, é possível localizar pontos no espaço.

E4: Não sei fazer.

Questão 5: Dado os vetores $\overrightarrow{u} = (2,3)$ e $\overrightarrow{v} = (1,3)$. Determine:

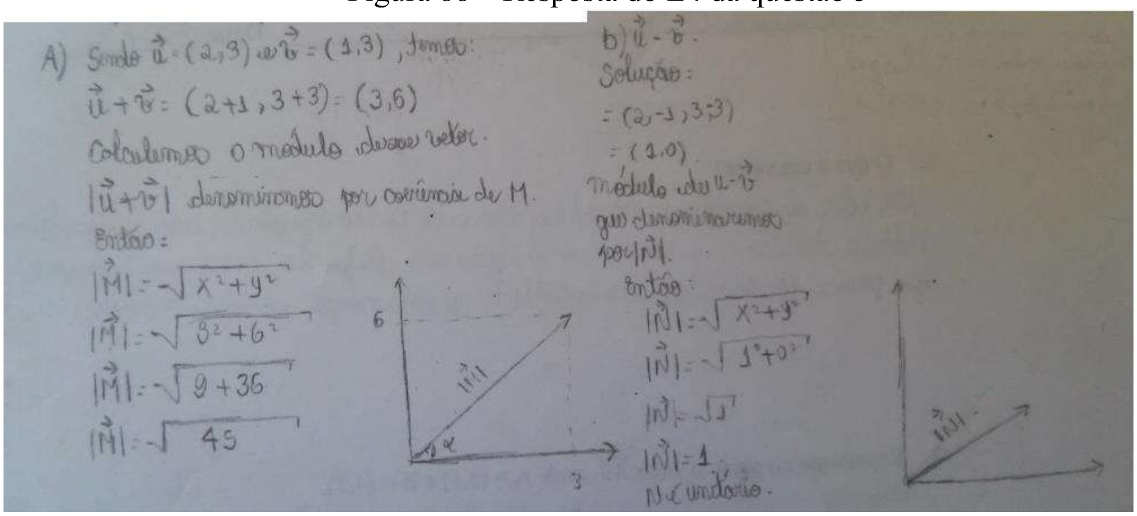
d) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e sua representação no plano.

e) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ e sua representação no plano.

f) $2\overrightarrow{u}$ e sua representação no plano.

A figura 88 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 88 – Resposta do E4 da questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Durante o curso de álgebra linear I, você estudou a representação geométrica do vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Lembra como faz?

E4: (O estudante fez o desenho de acordo com o apresentado na figura 26, no entanto, no lugar de $\overrightarrow{u}$ usou $\overrightarrow{f_1}$ e no lugar de $\overrightarrow{v}$ usou $\overrightarrow{f_2}$, como mostra a figura 89).

Figura 89: Representação geométrica do vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dada pelo estudante E4

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Sabe fazer este mesmo desenho no plano cartesiano usando as coordenadas?

E4: Não sei fazer.

P: Agora, do mesmo jeito que fez a representação geométrica da $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, sabe fazer de $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$?

E4: Ele só muda o sentido.

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2{,}3)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> Um vetor que ortogonal é aquele que o produto escalar entre eles deve ser igual à 0, no caso de dois vetores. Logo, consideremos $\overrightarrow{v} = (-3{,}2)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2.(-3) + 2.3 = -6 + 6 = 0$$

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você sabe quando dois vetores são ortogonais?

E4: Sim, quando eles têm módulo igual a zero.

P: Módulo?

E4: O produto entre eles é igual a zero.

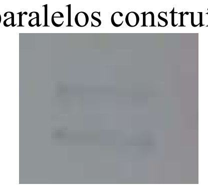
P: O produto...?

E4: ... escalar.

P: Faz o desenho de dois vetores ortogonais.

E4: (O estudante fez dois vetores paralelos, como mostra a figura 90).

Figura 90: Vetores paralelos construído pelo estudante E2

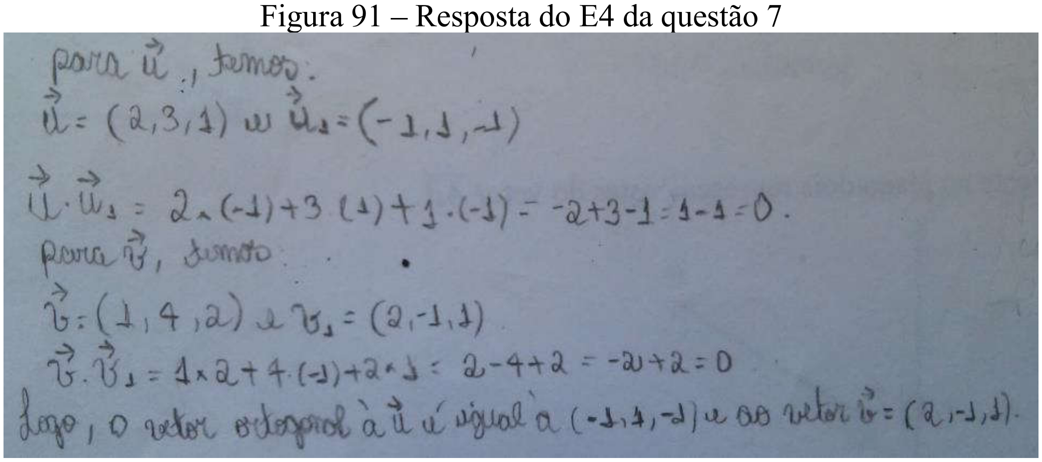


Fonte: Elaborada pelo autor

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2{,}3{,}1)$ e $\overrightarrow{v} = (1{,}4{,}2)$.

A figura 91 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 91 – Resposta do E4 da questão 7



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Você entendeu o que esta questão está pedindo?

E4: Sim.

P: Você fez dois processos diferentes, em um encontrou um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u}$, em outro encontrou outro vetor ortogonal ao vetor $\vec{v}$. Está correto?

E4: Não, foi falha minha.

P: Como seria o correto?

E4: Tem que achar um único vetor que faça o produto escalar tanto de $\vec{u}$ como de $\vec{v}$ ser igual a zero.

P: Você sabe fazer este cálculo?

E4: Eu acho intuitivamente.

P: Faz um desenho do que seria este vetor ortogonal aos vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ ao mesmo tempo.

E4: (O estudante desenhou os vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ paralelos com direção na horizontal e sentido para direita e um outro vetor paralelo aos vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ com sentido para esquerda). Eu acredito que seja o vetor com sentido oposto.

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista:

P: Você não fez a questão 8. Não sabe como faz?

E4: Eu não me lembro.

P: Você lembra que estudou este assunto?

E4: Estudei.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta $r_1 : x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

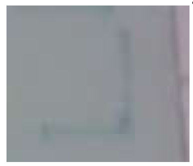
Resposta dada no questionário: Podemos afirmar que são paralelas.

Diálogo da entrevista:

P: Na questão 10, você botou como resposta no questionário que os vetores são paralelos. Faça o desenho de dois vetores em que o ângulo entre eles é igual a 90°.

E4: Não! Agora que entendi (O estudante percebeu que os vetores não são paralelos). Desculpe. (A figura 92 apresenta dois vetores que formam um ângulo de 90° feito pelo estudante).

Figura 92 – Vetores que formam um ângulo de 90° feito pelo E4



Fonte: Elaborada pelo autor

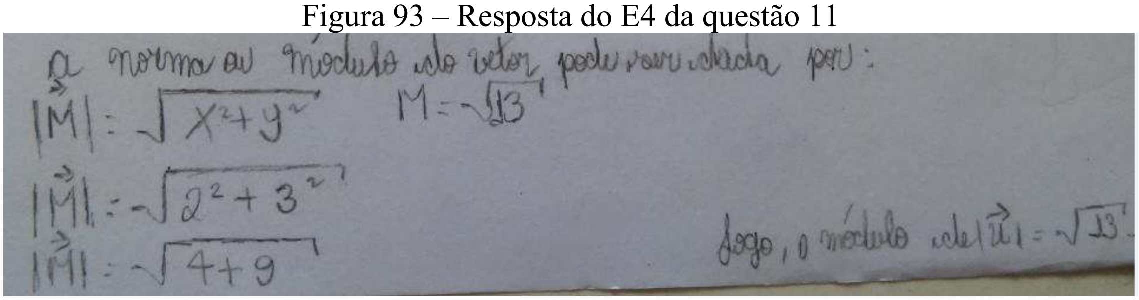
P: Se estes vetores não são paralelos, o que eles são?

E4: Perpendiculares.

Questão 11: Determine a norma do vetor $\vec{u} = (2{,}3)$.

A figura 93 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 93 – Resposta do E4 da questão 11



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: O que é a norma?

E4: O módulo.

Estudante – E5

Dados coletados

Questão 1: O que é um vetor?

<u>Resposta dada no questionário:</u> Um vetor são pontos no espaço que formam uma reta.

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Nesta questão 1 você disse que o vetor são pontos no espaço que formam uma reta. Você acha que o vetor é realmente isto?

E5: Eu entendi que é isso. Na minha cabeça é assim, dá dois pontos aí eles formam uma reta. Foi isso que eu imaginei. Por isso que eu coloquei que são pontos que formam uma reta.

P: Desenhe um vetor.

E5: (A figura 94 apresenta o vetor desenhado pelo estudante).

Figura 94 – Vetor desenhado pelo E5

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Esta representação que você fez é um vetor?

E5: Isso.

P: Na matemática existem várias figuras geométricas, reta, segmento de reta, semirreta, triângulos, pontos, entre outros. Você acha que o desenho que fez é realmente uma reta?

E5: Eu acho que sim.

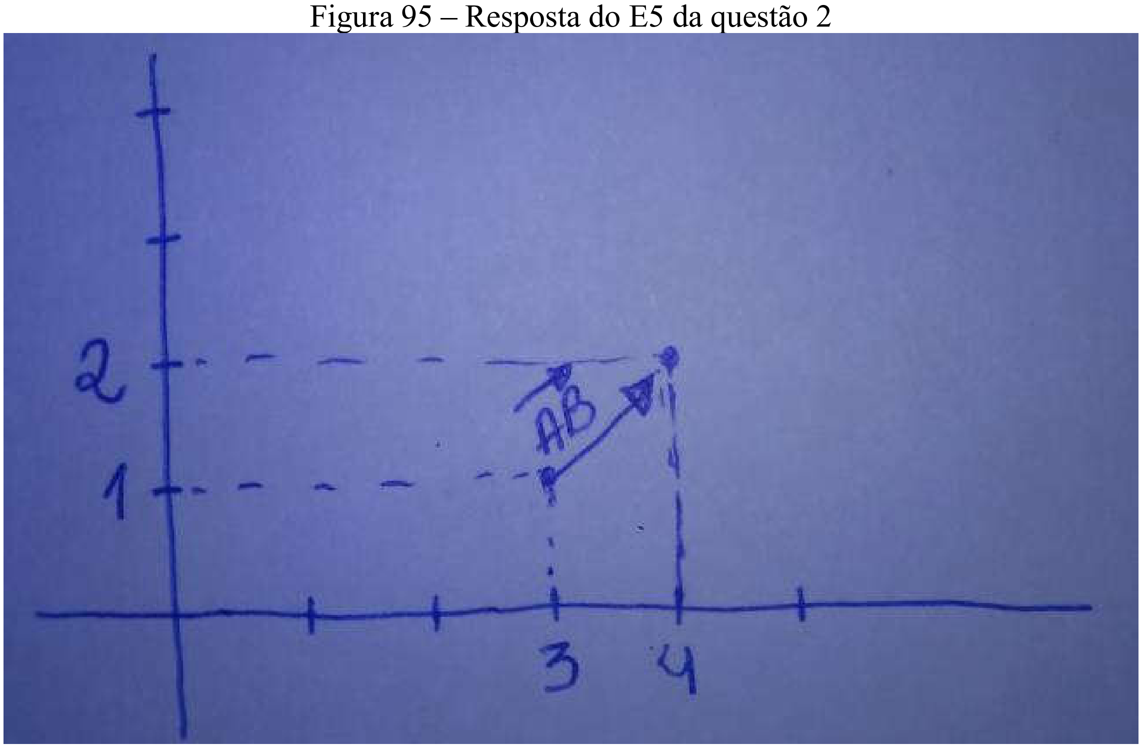
P: O que esta seta indica (Estar se referindo a extremidade do vetor orientado desenhado pelo estudante)?

E5: O sentido.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

A figura 95 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 95 – Resposta do E5 da questão 2



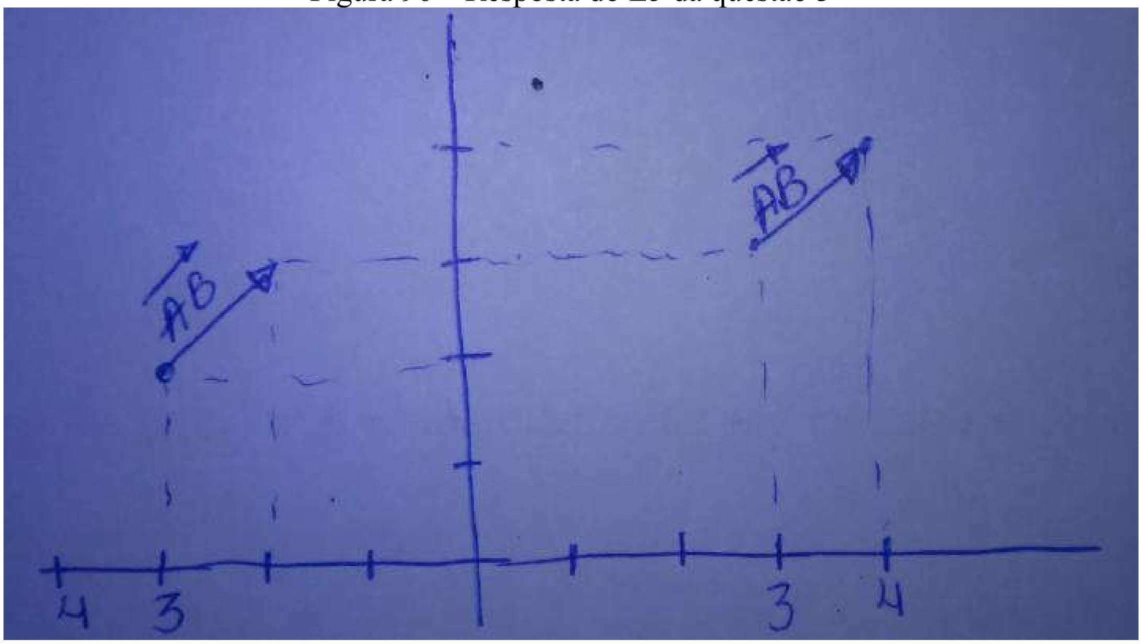
Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

A figura 96 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 96 – Resposta do E5 da questão 3



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Estes números que você usou aqui, estão corretos (Está se referindo ao 3 e 4 representado do lado esquerdo no eixo da horizontal do plano cartesiano feito pelo estudante no questionário)?

E5: Acho que sim. Ah tá, eles têm que ser negativos.

P: O que são vetores representantes?

E5: Pelo que eu entendi, eles têm o mesmo tamanho, a mesma direção, só que em posições diferentes.

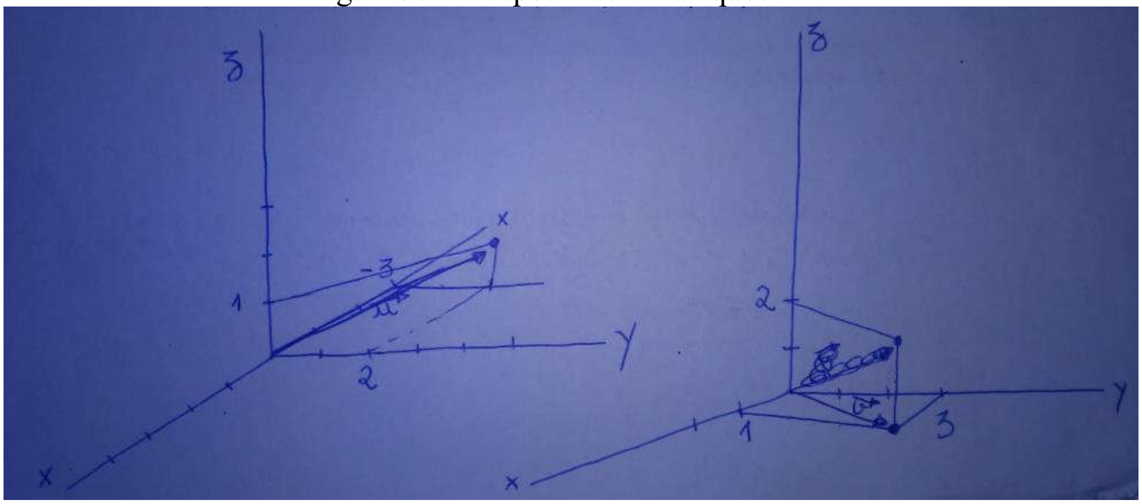
P: É possível desenhar mais de dois representantes de um vetor?

E5: Sim.

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\vec{u} = (-3,2,1)$ e $\vec{v} = (1,3,2)$.

A figura 97 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 97 – Resposta do E5 da questão 4



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: O que seria o vetor $\vec{u}$ aqui (está se referindo ao que o estudante fez no questionário)? Seria o segmento com origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (-3,2,1)?

E5: Isso. Eu fiquei imaginando qual era o ponto que liga as três retas, x, y e z.

P: E este outro, no caso, o vetor $\vec{v}$, é este segmento aqui (Está se referendo ao segmento que tem origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (3,1,0))?

E5: É. Eu imaginei também a ligação. Aí, eu acabei botando para baixo (Está se referindo ao segmento orientado com origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (3,1,0)). Eu botei para cima (Está se referindo ao segmento orientado com origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (3,1,2)) depois botei para baixo.

Questão 5: Dado os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Determine:

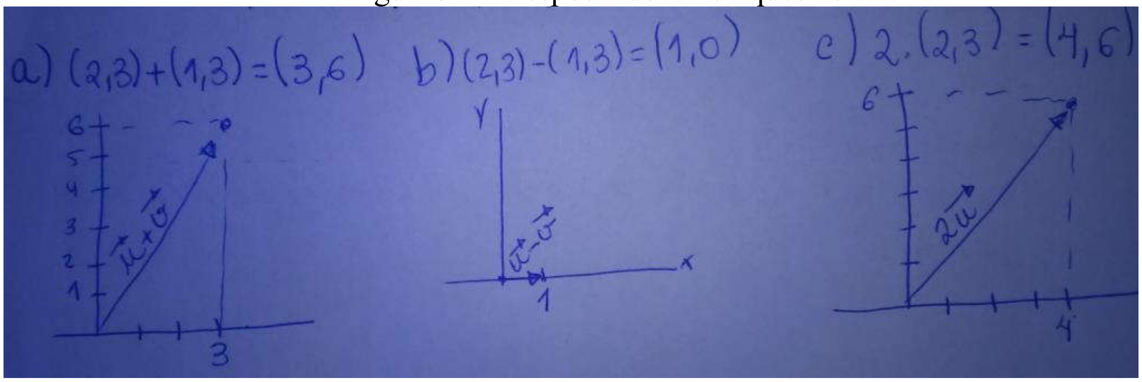
g) $\vec{u} + \vec{v}$ e sua representação no plano.

h) $\vec{u} - \vec{v}$ e sua representação no plano.

i) $2\vec{u}$ e sua representação no plano.

A figura 98 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 98 – Resposta do E5 da questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Durante o curso de álgebra linear I, você estudou a representação geométrica do vetor $\vec{u}+\vec{v}$. Lembra como faz?

E5: (O estudante não fez o desenho de acordo com o apresentado na figura 26, como mostra a figura 99).

Figura 99: Representação geométrica do vetor $\vec{u}+\vec{v}$ dada pelo estudante E5

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Se fosse para fazer no plano, você consegue fazer este mesmo desenho (Está se referindo a representação que o estudante fez na figura 99)?

E5: Ah! Tem que somar.

P: Já tem os valores aqui, 3 e 6.

E5: (O estudante fez a mesma representação que apresentou no questionário, como mostra a figura 100).

Figura 100: Representação de $\vec{u}+\vec{v}$ no plano cartesiano dada pelo estudante E5

Fonte: Elaborada pelo autor

P: Coloca o vetor $\vec{u}$ e o vetor $\vec{v}$.

E5: (A figura 101 apresenta a representação geométrica de $\vec{u}+\vec{v}$ no plano cartesiano feita pelo estudante).

Figura 101: Representação geométrica de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ no plano cartesiano dada pelo estudante E5

Fonte: Elaborada pelo autor

P: A representação que você fez aqui (Figura 101) não está de acordo com esta (Figura 99). É possível trabalhar com esta (Figura 101) para ficar igual àquela (Figura 102)?

E5: Por que eu não posso mudar a direção deles. Então, não.

P: O mesmo desenho que fez de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (Está se referindo ao que o estudante fez na figura 99), tem de $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. Lembra como faz?

E5: Não.

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$.

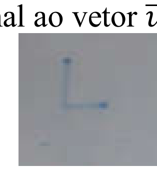
<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você sabe quando dois vetores são ortogonais? Faz um desenho.

E5: (O estudante fez os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ com um ponto em comum, como mostra a figura 102).

Figura 102: Vetor $\overrightarrow{v}$ ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$ construído pelo estudante E5



Fonte: Elaborada pelo autor

P: O ângulo ente os vetores que você fez é igual a quanto?

E5: 90°.

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3,1)$ e $\overrightarrow{v} = (1,4,2)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: A questão 7 dá o vetor $\overrightarrow{u}$ e o vetor $\overrightarrow{v}$ e pede para descobrir um vetor ortogonal aos dois.

E5: É.

P: É uma coisa possível?

E5: Eu acho que sim.

P: Você sabe fazer um desenho que represente o que a questão está pedindo? Ou sabe representar usando os seus braços?

E5: Eu não sei.

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista:

P: Você não respondeu as questão 8 e 9 que envolvem retas. Não lembra como faz?

E5: Eu não me lembro daquela formula lá.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta $r_1: x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

Resposta dada no questionário: Podemos dizer que ele é perpendicular à reta.

Diálogo da entrevista:

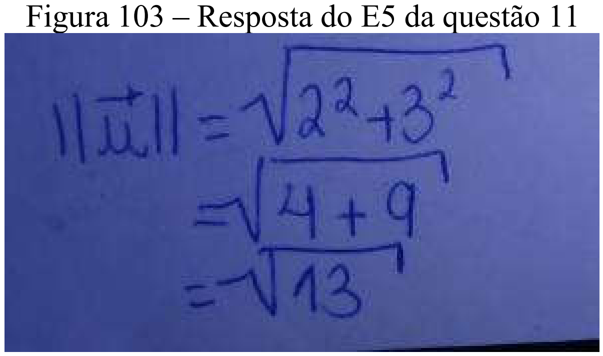
P: Nesta questão 10, você disse que os vetores são perpendiculares.

E5: É, eles podem ser assim (Indicou a representação que fez na figura 102).

Questão 11: Determine a norma do vetor $\vec{u} = (2,3)$.

A figura 103 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 103 – Resposta do E5 da questão 11



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: O que é a norma?

E5: O tamanho do vetor.

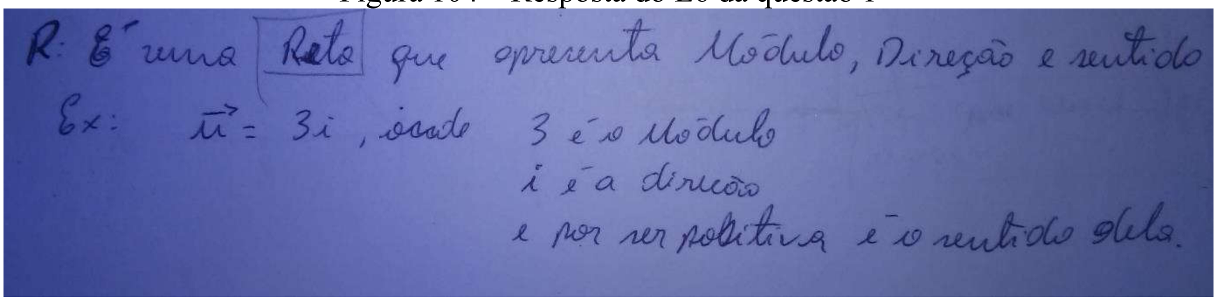
Estudante – E6

Dados coletados

Questão 1: O que é um vetor?

A figura 104 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 104 – Resposta do E6 da questão 1



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Faz o desenho de um vetor.

E6: (A figura 105 apresenta o vetor desenhado pelo estudante).

Figura 105 – Vetor desenhado pelo E6

Fonte: Elaborada pelo autor

P: O que é o módulo deste vetor?

E6: A representação numérica. Por exemplo ...

P: Força.

E6: Por exemplo, uma força de 2N, o módulo seria a representação numérica, ou seja, a força de 2N. O módulo seria este 2.

P: O que é a direção e o sentido de um vetor?

E6: A direção seria direita ou esquerda e o sentido seria positivo ou negativo. (Fez um vetor na horizontal com sentido para a direita) Este vetor tem sentido para direita, não não, direção para direita e sentido positivo.

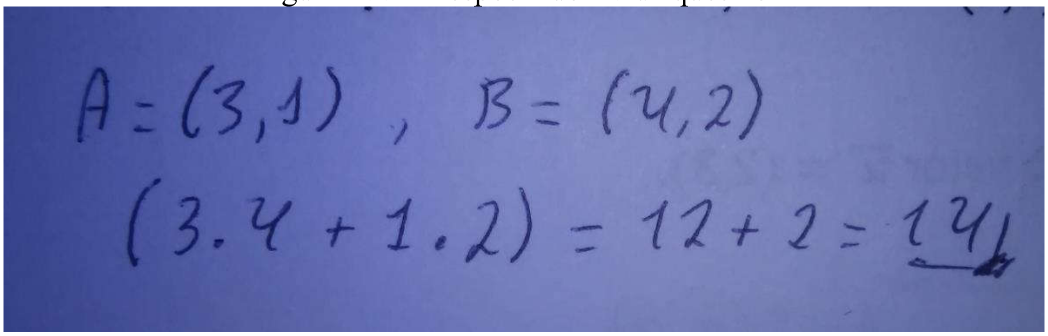
P: (Desenhou em um plano cartesiano o vetor com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (4,0)). Qual o modulo deste vetor?

E6: 4.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

A figura 106 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 106 – Resposta do E6 da questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: A questão 2 pede para representar o vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano. Você não representou no plano.

E6: Erra?

P: O que você entende por este vetor $\overrightarrow{AB}$?

E6: Pra mim seria o produto entre os dois.

P: No caso, você fez o produto interno, escalar.

E6: Isso

P: Faça o plano cartesiano e localize os pontos A e B. Como foi pedido para representar o vetor $\overrightarrow{AB}$ no plano, então, tem que ser construído um plano cartesiano e isso não apareceu.

E6: Verdade. (Fez o plano cartesiano, localizou o ponto A e traçou o vetor com origem no ponto (0,0) e extremidade em A). Este é o vetor A.

P: Mais o A não é um ponto? Por que você fez como um vetor?

E6: (Sorriu).

P: Quero que você represente os pontos.

E6: (Apagou o vetor que tinha desenhado e representou o ponto B).

P: A questão pede para representar o vetor $\overrightarrow{AB}$, o que seria este vetor?

E6: (Traçou o vetor com origem em A e extremidade em B).

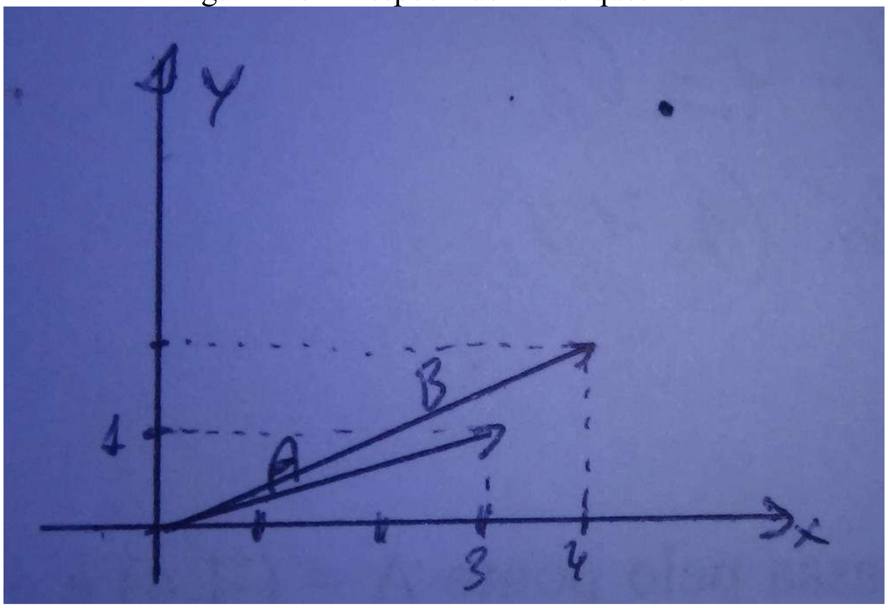
P: Este seria o vetor $\overrightarrow{AB}$?

E6: Pra mim é.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

A figura 107 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 107 – Resposta do E6 da questão 3



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você sabe o que é um representante de um vetor?

E6: Não lembro.

P: (Explicou o que é o representante de um vetor). Neste plano cartesiano que fez para a questão 2, você consegue desenhar um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$?

E6: (O estudante representou o vetor com origem no ponto (1,3) e extremidade no ponto (2,4).

P: O que o vetor que você acabou de fazer tem em comum com o vetor $\overrightarrow{AB}$?

E6: O modulo, o sentido positivo e a direção em diagonal.

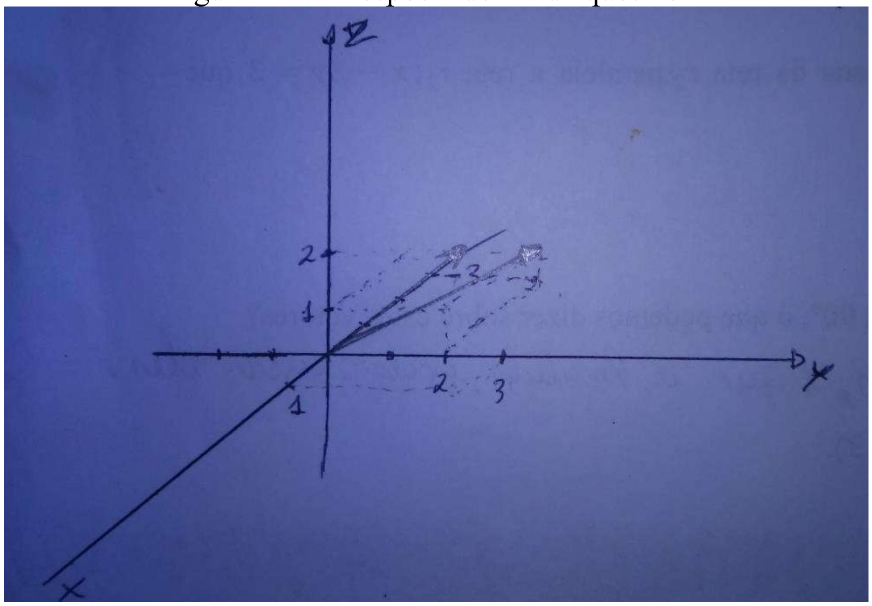
P: Você consegue desenhar outro representante?

E6: (O estudante representou o vetor com origem no ponto (1,1) e extremidade no ponto (2,2)).

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\overrightarrow{u} = (-3,2,1)\ e\ \overrightarrow{v} = (1,3,2)$.

A figura 108 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 108 – Resposta do E6 da questão 4



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Represente o vetor $\vec{u}$ no espaço.

E6: (O estudante representou o vetor com origem no ponto (0,0,0) e extremidade no ponto (-3,2,1)).

Questão 5: Dado os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Determine:

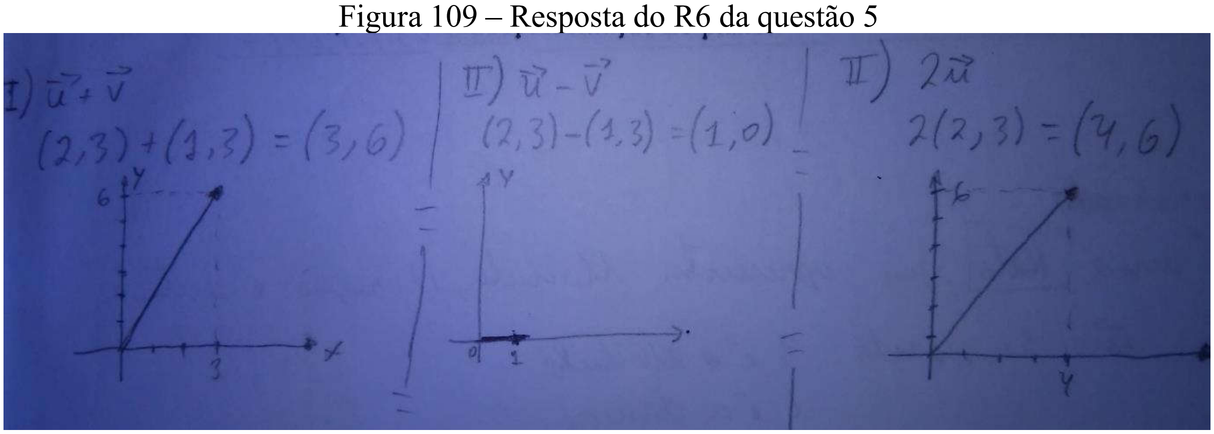
j) $\vec{u} + \vec{v}$ e sua representação no plano.

k) $\vec{u} - \vec{v}$ e sua representação no plano.

l) $2\vec{u}$ e sua representação no plano.

A figura 109 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 109 – Resposta do R6 da questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você sabe fazer um desenho que represente geometricamente os vetores vetor $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{v}$?

E6: Não sei fazer

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

Resposta dada no questionário: $(2,3).(-3,2) = -6 + 6 = 0$. Portanto (-3,2) é ortogonal a (2,3).

Diálogo da entrevista:

P: Você usou o vetor $\vec{u}$ e o de coordenadas (-3,2) no cálculo da questão 6. Por que escolheu o vetor de coordenadas (-3,2)?

E6: Porque eu percebi que o produto escalar entre eles é igual a zero.

P: O que são dois vetores ortogonais? Faça um desenho de dois vetores ortogonais.

E6: (O estudante fez os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com um ponto em comum formando um ângulo de 90°, como mostra a figura 110).

Figura 110: Vetor $\vec{v}$ ortogonal ao vetor $\vec{u}$ construído pelo estudante E6

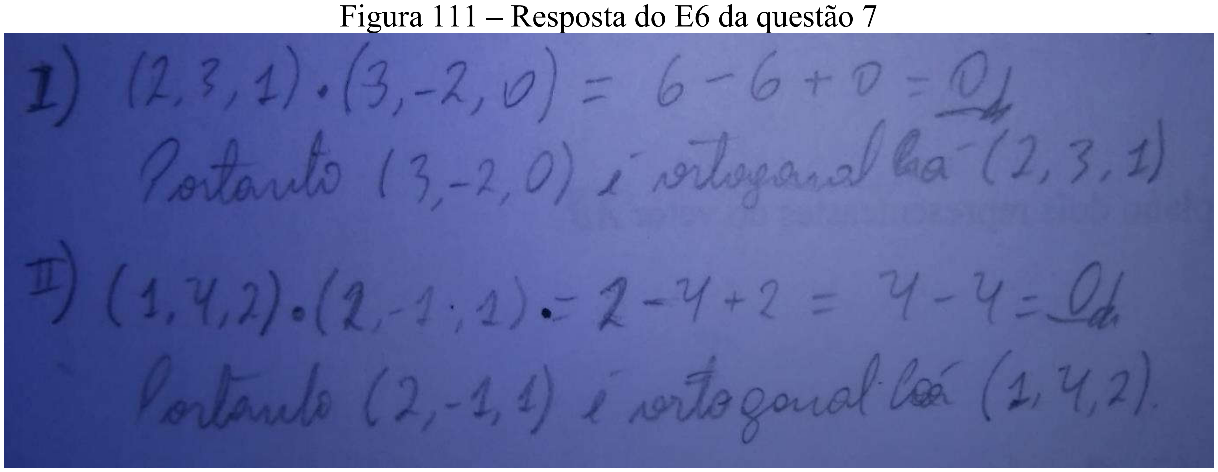
Fonte: Elaborada pelo autor

E6: Eles formam um ângulo de 90°.

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3,1)$ e $\vec{v} = (1,4,2)$.

A figura 111 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 111 – Resposta do E6 da questão 7



I) $(2,3,1)\cdot(3,-2,0) = 6-6+0 = 0$

Portanto $(3,-2,0)$ é ortogonal à $(2,3,1)$

II) $(1,4,2)\cdot(2,-1,1) = 2-4+2 = 4-4 = 0$

Portanto $(2,-1,1)$ é ortogonal à $(1,4,2)$.

Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Para responder a questão 7 você fez o mesmo processo da questão 6. Você acha que da forma como fez está correto?

E6: Sim.

P: Esta questão pede um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Você determinou um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e outro a $\vec{v}$.

E6: Tinha que ser um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao mesmo tempo?

P: Como você fez está correto?

E6: Não.

P: Você sabe determinar um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao mesmo tempo?

E6: Tem uma fórmula. Não estou lembrando. Lembrei que a professora falou de uma jogada ai. Eu sabia.

P: Faça um desenho do que seria estes vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o vetor ortogonal a eles. Se quiser, pode fazer com os braços.

E6: (O estudante fez os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos e traçou um vetor perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como mostra a figura 112).

Figura 112: Vetor perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ construído pelo estudante E6

Fonte: Elaborada pelo autor

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Por que não fez a questão 8 e 9?

E6: Pois é, esta equação da reta que passa por um ponto, eu sabia, se eu revisar eu faço.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta $r_1: x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

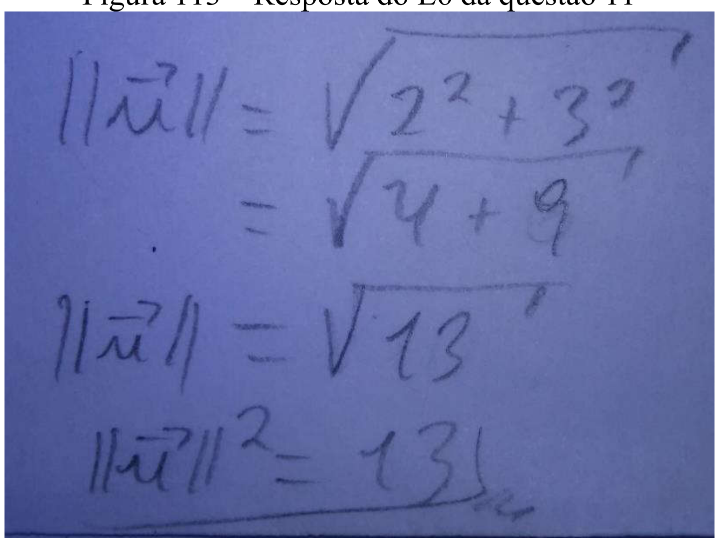
Resposta dada no questionário: Que eles são ortogonais, e que o produto escalar entre eles é = 0.

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 11: Determine a norma do vetor $\vec{u} = (2{,}3)$.

A figura 113 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 113 – Resposta do E6 da questão 11



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: O que é a norma de um vetor?

E6: A norma seria o modulo do vetor unitário.

Estudante – E7

Dados coletados

Questão 1: O que é um vetor?

Resposta dada no questionário: É uma grandeza que possui módulo, direção e sentido, diferente de um escalar, que possui apenas módulo seguido de unidade de medida.

Diálogo da entrevista:

P: Faça o desenho de um vetor.

E7: (O estudante desenhou um segmento de reta orientado no plano cartesiano com direção na diagonal e sentido para o nordeste).

P: Você diz que o vetor é uma grandeza que possui módulo, direção e sentido. O que seria o módulo?

E7: Módulo seria o tamanho do vetor. O comprimento dele.

P: E o sentido e a direção?

E7: Direção a gente tem norte, sul, leste e oeste. Esta direção aqui seria uma direção nordeste. Sentido, o eixo x positivo.

P: Quando você diz grandeza, o que está querendo dizer?

E7: Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido. Com o vetor não é diferente, também dá para medir o tamanho do vetor, a direção e tudo mais. Tudo aqui pode ser medido.

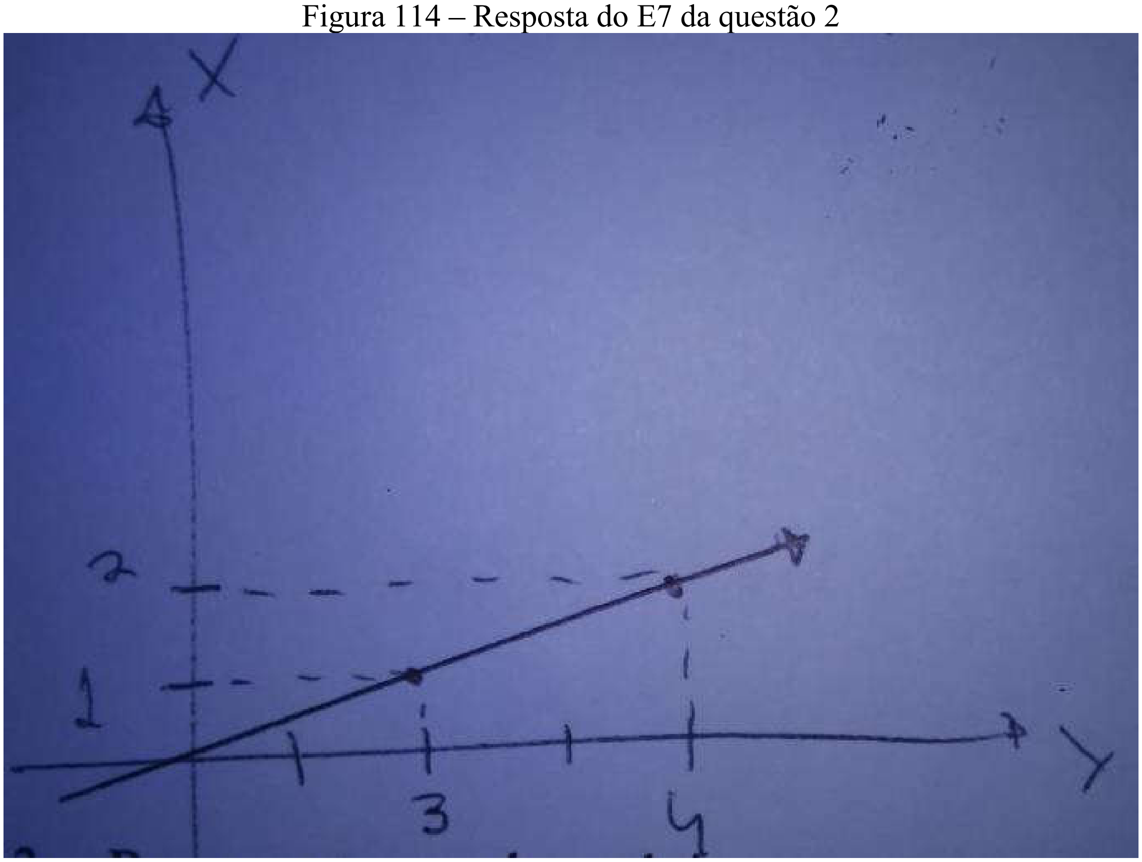
P: O vetor é representado por qual figura matemática?

E7: Uma reta, nada mais que uma reta.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

A figura 114 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 114 – Resposta do E7 da questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Por que você respondeu esta questão desta maneira?

E7: Eu entendo que do jeito que está aqui, isso é, um par ordenado, você tem um valor de x e um valor de y. Eu lembro que estudei em álgebra I que uma reta AB ela é a mesma coisa que B – A. O x final menos o inicial e este y final menos este inicial.

P: Este vetor ele inicia no ponto A e tem sentido para o ponto B.

E7: Começa no ponto A = (3,1) e vai para o ponto B = (4,2).

P: Por que você não começou no ponto A e finalizou no ponto B?

E7: Seria o correto no caso? Então, seria só colocar o comprimento dele?

P: Faça outro plano cartesiano, localize os pontos A e B e trace o vetor $\overrightarrow{AB}$.

E7: (O estudante fez o plano cartesiano e localizou os pontos A e B e traço o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$).

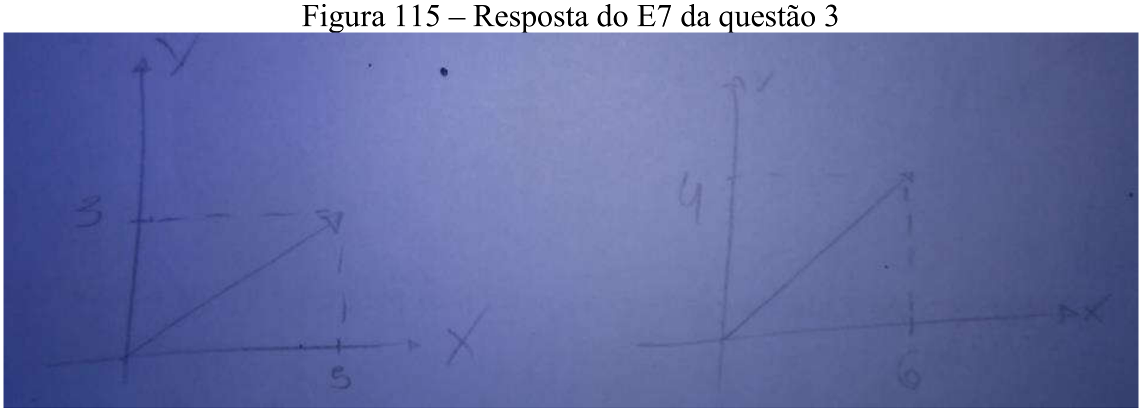
P: Este plano que acabou de fazer, está igual ao que está no questionário?

E7: Não. No caso ele começa no A e termina no B.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

A figura 115 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 115 – Resposta do E7 da questão 3



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Na questão 3 pede o representante. Você sabe o que é o representante de um vetor?

E7: Pois é, fiquei em dúvidas nessa. De como seria a representação de um representante de um vetor. Eu imaginei que seria exemplos de um vetor.

P: Como seria um exemplo de um vetor $\overrightarrow{AB}$?

E7: Tem que pensar em múltiplos do ponto A = (3,1) e do ponto B = (4,2). Não, realmente nessa eu fiquei com dúvidas.

P: O vetor que você fez com origem em A e extremidade em B e o vetor com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,1) são iguais?

E7: Sim.

P: Por que eles são iguais?

E7: Eles têm o mesmo módulo, o mesmo comprimento. A escala que está diferente.

P: É só isso que eles têm em comum?

E7: Não, eles têm a mesma direção e o mesmo sentido.

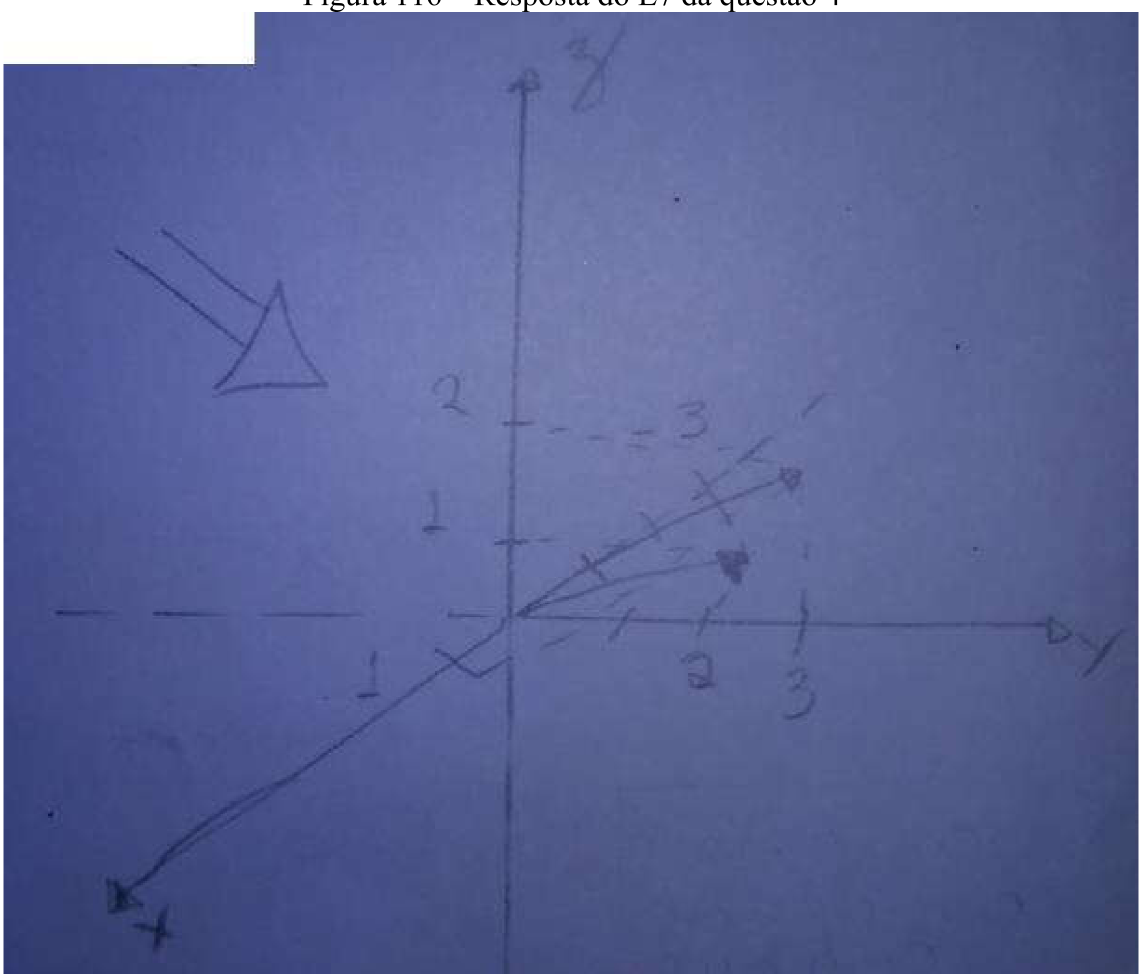
P: É possível desenhar um outro vetor que nem esse, mais que esteja em uma posição diferente?

E7: Poderia ser, por exemplo, um que inicia no ponto (4,1) e tem extremidade no ponto (5,2).

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\vec{u} = (-3,2,1)\ e\ \vec{v} = (1,3,2)$.

A figura 116 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 116 – Resposta do E7 da questão 4



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Achei um pouco confuso o seu desenho. Qual a altura destes vetores em relação ao eixo z?

E7: O primeiro (vetor $\vec{u}$) está na altura 1 e outro (vetor $\vec{v}$) está na altura 2.

Questão 5: Dado os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Determine:

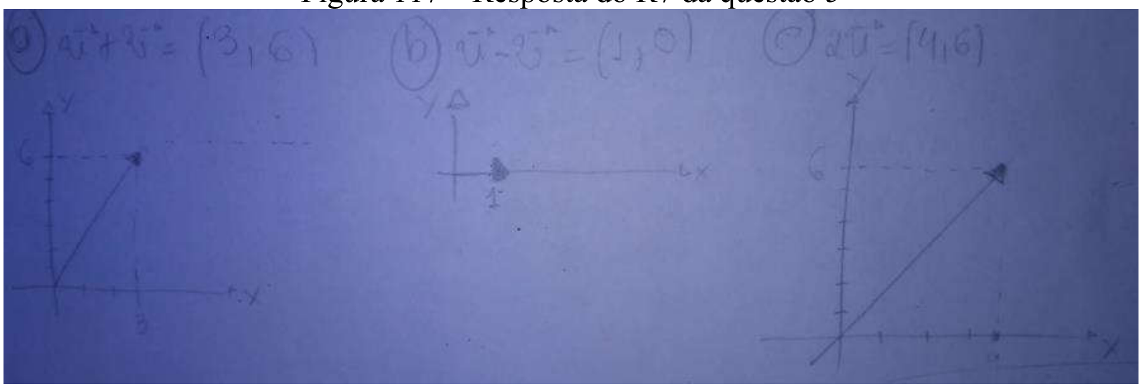
m) $\vec{u} + \vec{v}$ e sua representação no plano.

n) $\vec{u} - \vec{v}$ e sua representação no plano.

o) $2\vec{u}$ e sua representação no plano.

A figura 117 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 117 – Resposta do R7 da questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você sabe representar o vetor soma? Aqui tem o vetor $\vec{u}$ e o $\vec{v}$, o soma seria outro vetor.

E7: O resultado no caso.

P: Sabe fazer?

E7: Sei (O estudante fez a representação no plano cartesiano do vetor $\vec{u}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (2,3), do vetor $\vec{v}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,3) e do vetor $\vec{u} + \vec{v}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (3,6)).

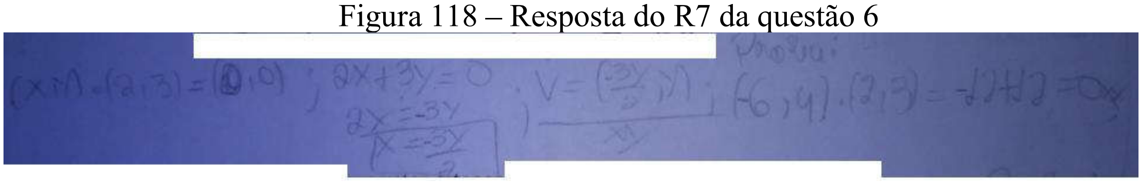
P: Durante o curso de álgebra linear I, você estudou a representação geométrica do vetor $\vec{u} + \vec{v}$. Lembra como faz?

E7: (O estudante não conseguiu fazer a representação geométrica do vetor $\vec{u} + \vec{v}$).

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

A figura 118 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 118 – Resposta do R7 da questão 6



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

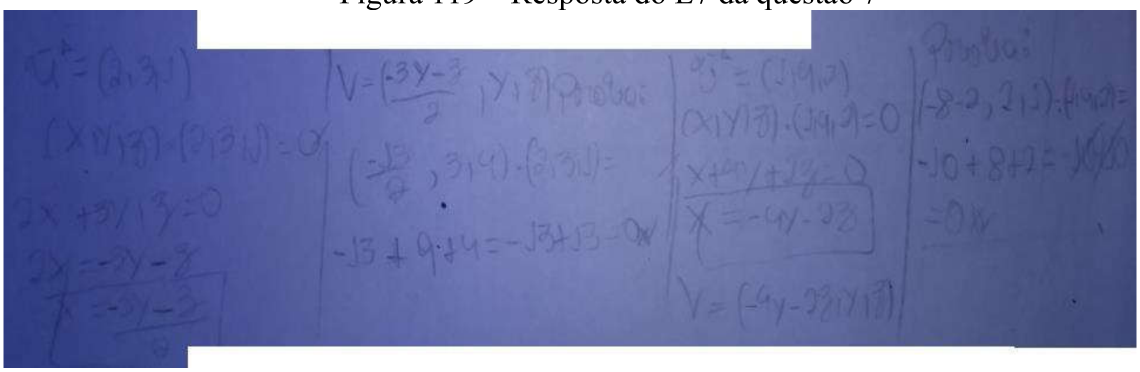
P: Nesta questão 6 pede um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u}$. Por que você fez o cálculo desta maneira?

E7: Eu sei que dois vetores são ortogonais quando o produto entre eles é zero. Eles formam um ângulo de 90° entre eles. Eu fiz para achar um vetor quando eu multiplicar por esse desse zero. Aí eu achei este vetor. Qualquer vetor que eu usar obedecendo esta regra sempre dará zero.

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3,1)$ e $\vec{v} = (1,4,2)$.

A figura 119 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 119 – Resposta do E7 da questão 7



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Por que você fez esta questão 7 desta maneira?

E7: O mesmo processo da questão 6. No caso, eu achei dois, um vetor ortogonal a esse (indicou o vetor $\vec{u}$) e outro ortogonal a esse (indicou o vetor $\vec{v}$). Mais eu estou lembrado que tem um caso que é ortogonal a outros dois vetores.

P: Da forma como você respondeu está correta?

E7: Está errado.

P: Então, esta questão é o que você acabou de falar? É um vetor que é ortogonal aos dois ao mesmo tempo? Faz um desenho do que seria estes vetores.

E7: (O estudante fez a representação de acordo com o apresentado no figura 39).

P: Você não lembra como faz para determinar as coordenadas deste vetor ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

E7: Não.

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

<u>Resposta dada no questionário:</u> (O estudante não soube responder).

<u>Diálogo da entrevista:</u> Sem diálogo.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta $r_1: x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

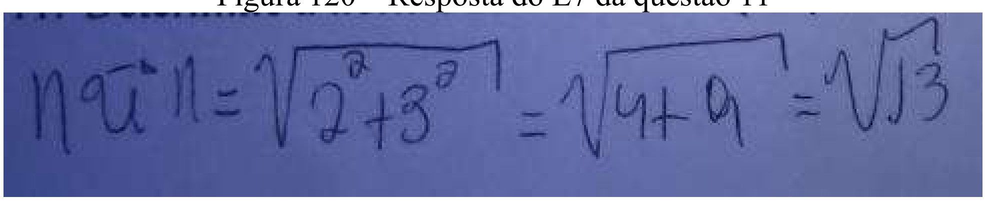
Resposta dada no questionário: São ortogonais e o produto interno entre eles é zero.

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 11: Determine a norma do vetor $\vec{u} = (2,3)$.

A figura 120 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 120 – Resposta do E7 da questão 11



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: O que é a norma de um vetor?

E7: A norma é o módulo do vetor. O comprimento dele seria a norma.

Estudante – E8

Dados coletados

Questão 1: O que é um vetor?

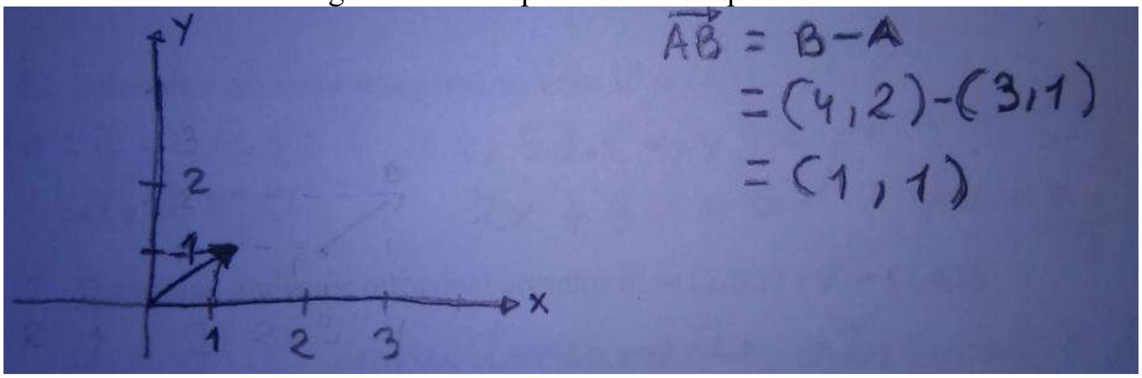
Resposta dada no questionário: É um segmento orientado que possui módulo, direção e sentido.

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

A figura 121 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 121 – Resposta do E8 da questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Nesta questão 2 pede para localizar no plano o vetor que tem origem em A e extremidade em B. Você fez o vetor B-A, legal! E localizou no plano. Mais você pode fazer colocando os pontos A e B. Consegue fazer?

E8: É para desenhar no plano?

P: Isso.

E8: (O estudante localizou os pontos A e B no plano e traçou o vetor com origem no ponto A e extremidade no ponto B). Eu tinha feito assim, só que eu lembrei que a professora tinha feito isso, B-A. Tem até marcado ainda no meu desenho.

.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista:

P: Você não sabe o que são os representantes de um vetor?

E8: Não entendi.

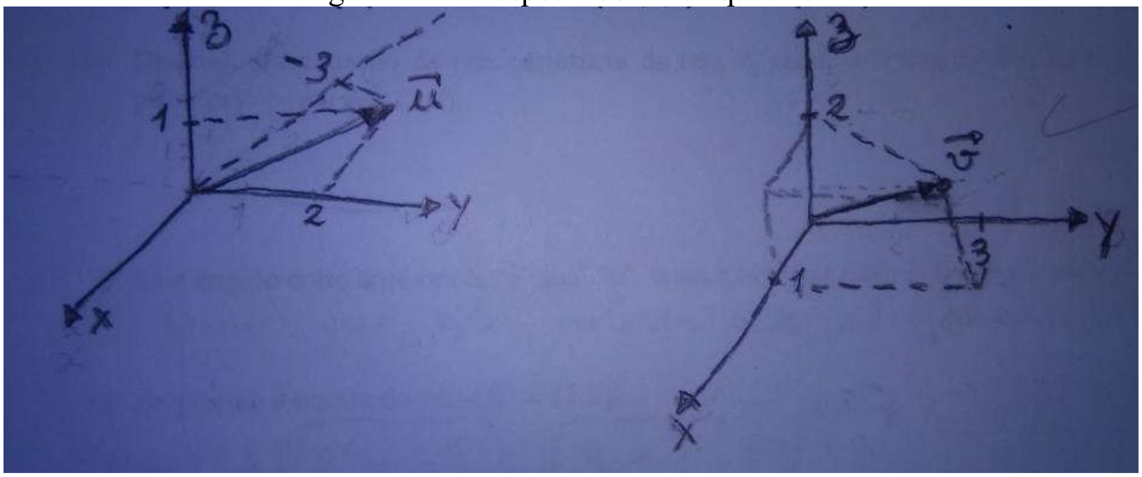
P: Este vetor que você fez (Está se referindo ao vetor com origem no ponto A e extremidade no ponto B) e o vetor que você fez no questionário, o que eles têm em comum?

E8: Não sei.

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\overrightarrow{u} = (-3,2,1)$ e $\overrightarrow{v} = (1,3,2)$.

A figura 122 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 122 – Resposta do E8 da questão 4



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: A extremidade deste vetor $\vec{u}$ está na altura do plano XY?

E8: Não, ele está na altura do 1 (Está se referindo ao 1 do eixo z). Está um pouco elevado mais para atrás.

Questão 5: Dado os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Determine:

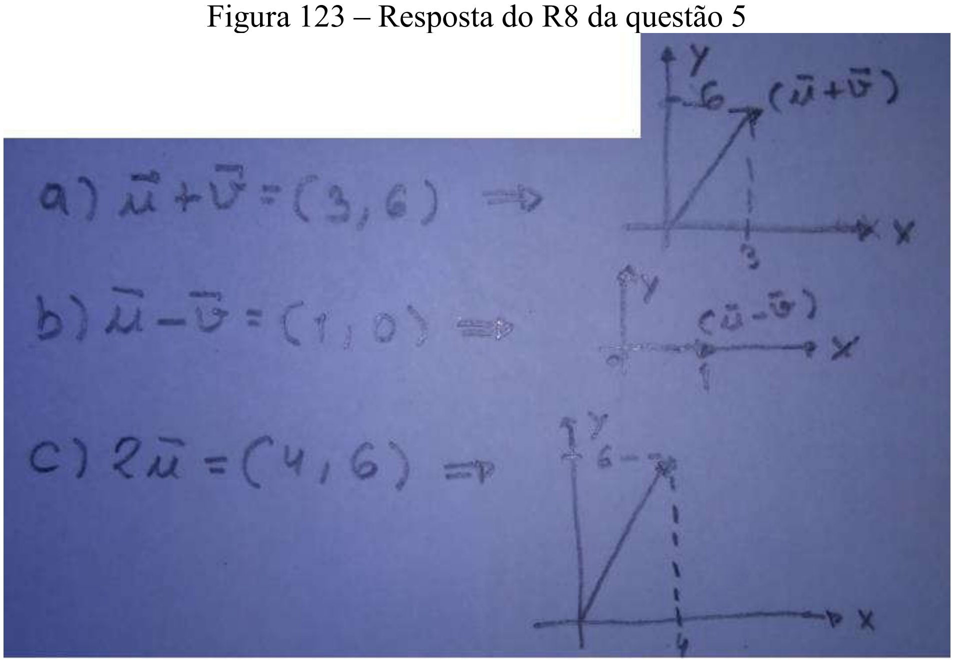
p) $\vec{u} + \vec{v}$ e sua representação no plano.

q) $\vec{u} - \vec{v}$ e sua representação no plano.

r) $2\vec{u}$ e sua representação no plano.

A figura 123 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 123 – Resposta do R8 da questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você sabe fazer colocando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e a partir deles traçar o vetor soma?

E8: Não entendi.

P: Você tem os dois vetores aqui, o vetor $\vec{u}$ e o vetor $\vec{v}$, e o vetor soma cuja as coordenadas são (3,6). Agora você sabe fazer o desenho de como representar o vetor soma junto com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

E8: No plano?

P: Sim. Ou só a representação geométrica mesmo.

E8: (O estudante representou no plano cartesiano o vetor $\vec{u}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (2,3) e o vetor $\vec{v}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,3). Depois fez um representante do vetor $\vec{v}$ com origem no ponto (2,3) e extremidade no ponto (3,6). Em seguida traçou o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (3,6)).

P: E o diferença? Sabe fazer?

E8: Não sei.

P: E o vetor $2\vec{u}$?

E8: Tenho que somar ele com ele mesmo?

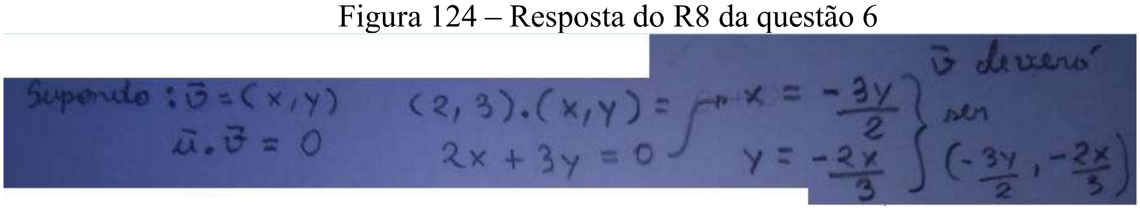
P: Isso.

E8: (O estudante representou o vetor $\vec{u}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (2,3) e um representante do vetor $\vec{u}$ com origem no ponto (2,3) e extremidade no ponto (4,6). Depois traço o vetor $2\vec{u}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (4,6)).

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

A figura 124 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 124 – Resposta do R8 da questão 6



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Por que você botou igual a zero (Está se referindo ao produto escalar de $\vec{u}.\vec{v}$)?

E8: Porque tem que ser igual a zero para ser ortogonal.

P: Você sabe o que são vetores ortogonais?

E8: Que o ângulo entre eles é 90°.

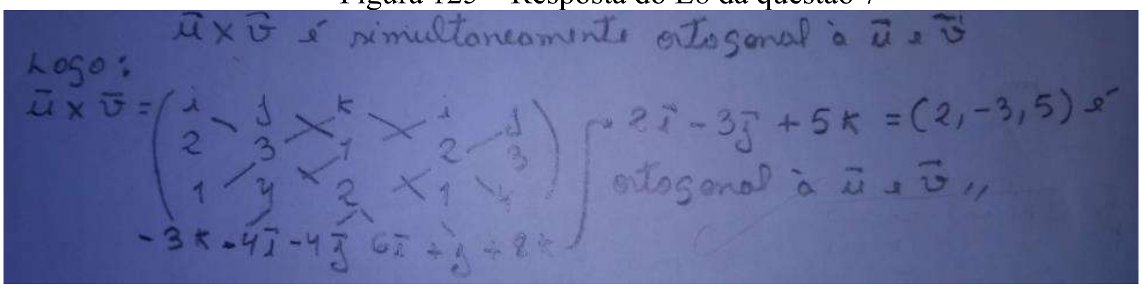
P: Faça o desenho de dois vetores ortogonais.

E8: (O estudante fez dois vetores com a origem no mesmo ponto e formando um ângulo de 90°).

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3,1)$ e $\vec{v} = (1,4,2)$.

A figura 125 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 125 – Resposta do E8 da questão 7



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta $r_1: x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

Resposta dada no questionário: Dizemos que estes vetores são ortogonais entre si.

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 11: Determine a norma do vetor $\vec{u} = (2,3)$.

A figura 126 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 126 – Resposta do E7 da questão 11

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: O que é a norma de um vetor?

E8: É o tamanho do vetor. O comprimento dele.

Estudante – E9

Dados coletados

Questão 1: O que é um vetor?

Resposta dada no questionário: É um tipo orientação que indica sentido, direção e módulo.

Diálogo da entrevista:

P: Nesta primeira questão você respondeu no questionário que o vetor é um tipo orientado que indica sentido, direção e módulo. O que seria este tipo orientado?

E9: É um vetor que não vai indicar só a direção, não depende só da direção. Diferente de escalar.

P: Desenhe um vetor e indique o que é o módulo, a direção e o sentido.

E9: (O estudante construiu o vetor com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (4,0)). O módulo, vamos supor, está saindo do zero para o quatro. Quatro é o módulo. A direção que diz estar na direção do eixo x e o sentido diz que ele está no lado positivo do x.

P: O desenho do vetor que você fez representa que figura na matemática?

E9: Uma reta.

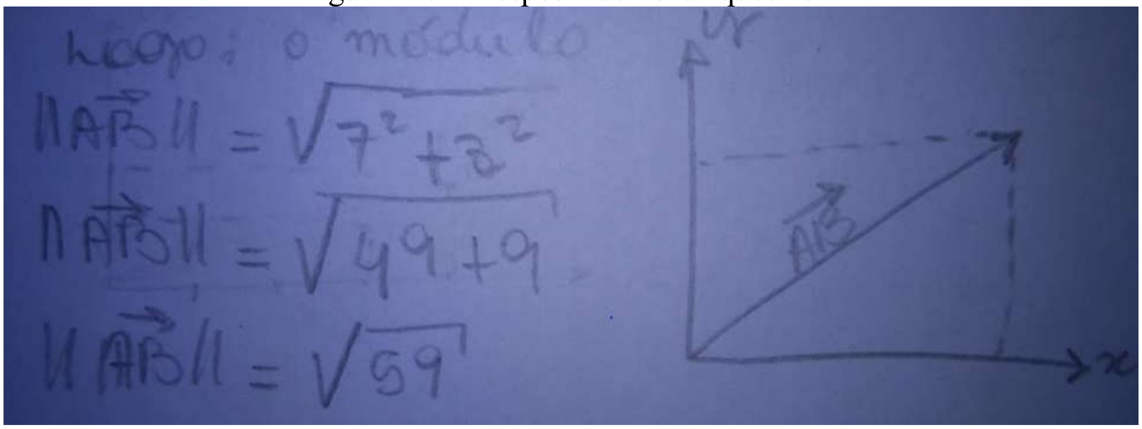
P: O que é uma reta?

E9: Uma reta é que tem sentido, direção e módulo.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A = (3,1) e B = (4,2).

A figura 127 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 127 – Resposta do E9 da questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Nesta questão pede para representar no plano cartesiano o vetor $\overrightarrow{AB}$.

E9: É. Eu errei. Achava que era o módulo que eu deveria encontrar. Mais não.

P: Faz como seria então.

E9: (O estudante fez o seguinte cálculo: $B - A = (4{,}2) - (3{,}1) = (1{,}1)$).

P: Construa o plano cartesiano e localize os pontos A e B.

E9: (O estudante construiu o plano cartesiano de acordo com o apresentado na figura 2 e representou os pontos A e B).

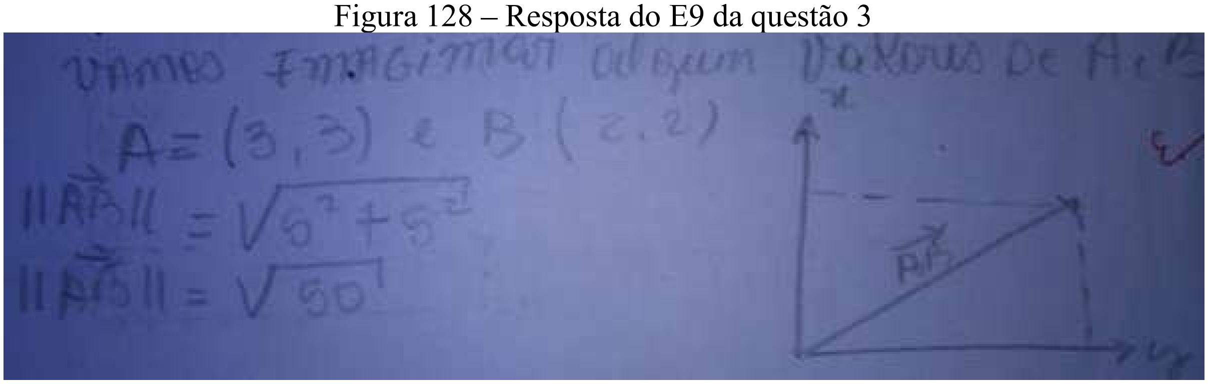
P: Agora, olhando paras estes pontos (A e B) eu quero que você desenhe o vetor $\overrightarrow{AB}$.

E9: (O estudante traçou o vetor com origem no ponto A e extremidade no ponto B).

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$.

A figura 128 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 128 – Resposta do E9 da questão 3



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você sabe o que é o representante de um vetor?

E9: Eu posso adotar um vetor qualquer?

P: Pode. Mais, qualquer vetor poder ser um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$?

E9: Não.

P: Então, o que o representante de um vetor tem que ter?

E9: Módulo, sentido e direção.

P: É. Como é um vetor tem que ter módulo, sentido e direção. Mais, o que o módulo, o sentido e a direção deste vetor tem que ter comparado com o módulo, o sentido e a direção do vetor $\overrightarrow{AB}$?

E9: O deslocamento.

P: Como assim o deslocamento?

E9: É como se eu estivesse assim: tenho um vetor e tenho que descolar no espaço.

P: Faça um desenho de como fica.

E9: (O estudante representou no plano cartesiano o vetor como origem no ponto (1,1) e extremidade no ponto (2,2)). É como se eu descolasse o vetor $\overrightarrow{AB}$ para esta posição (Está se referindo ao vetor que acabou de representar).

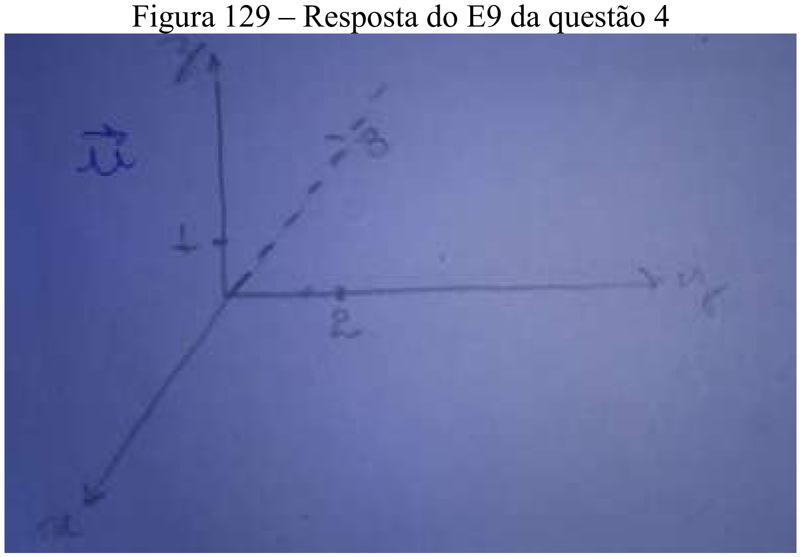
P: Então, este vetor que acabou de fazer é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$?

E9: Isso. É como se eu estivesse deslocado ele.

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\vec{u} = (-3,2,1)\ e\ \vec{v} = (1,3,2)$.

A figura 129 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 129 – Resposta do E9 da questão 4



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Você não sabe representar vetores no espaço?

E9: Não.

.

Questão 5: Dado os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Determine:

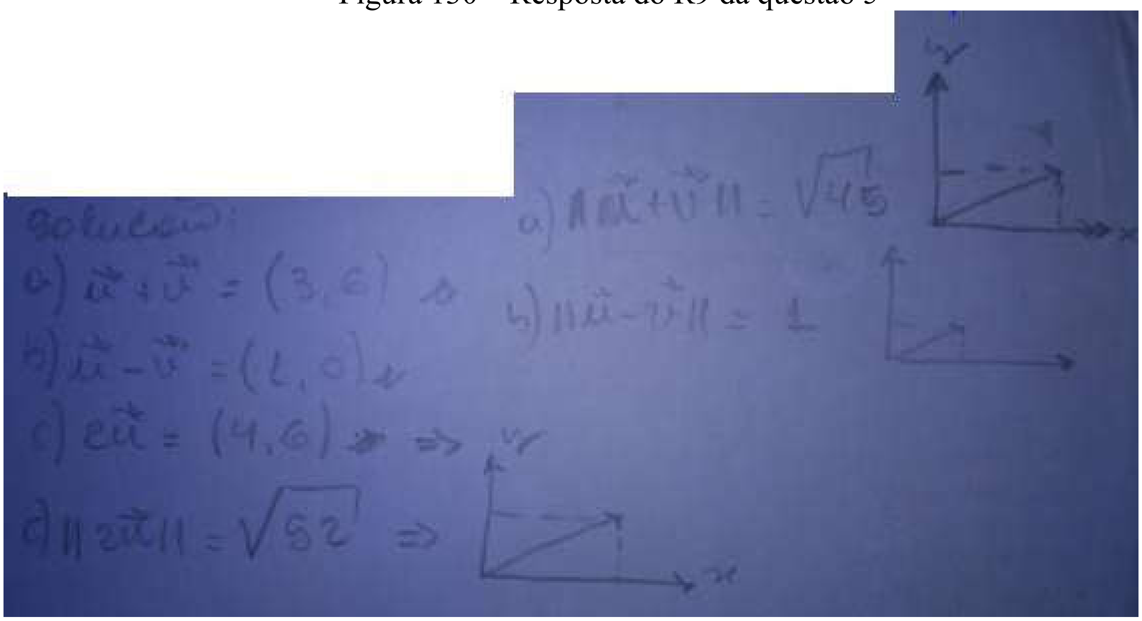
s) $\vec{u} + \vec{v}$ e sua representação no plano.

t) $\vec{u} - \vec{v}$ e sua representação no plano.

u) $2\vec{u}$ e sua representação no plano.

A figura 130 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 130 – Resposta do R9 da questão 5



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Esta questão pede o vetor soma. Eu vi que você fez as representações corretas. Você sabe fazer a representação geométrica no plano cartesiano do vetor soma (Explicou o que e a representação geométrica do vetor soma)?

E9: (O estudante fez a representação no plano cartesiano do vetor $\vec{u}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (2,3), do vetor $\vec{v}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,3) e do vetor $\vec{u} + \vec{v}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (3,6)).

P: Mais ele não ficou da forma como lhe falei.

E9: Então seria assim: (O estudante fez a representação no plano cartesiano do vetor $\vec{u}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (2,3), do vetor $\vec{v}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,3) e do vetor $\vec{u} + \vec{v}$ com origem no ponto (1,3) e extremidade no ponto (2,3)).

P: Este é o vetor soma?

E9: Sim.

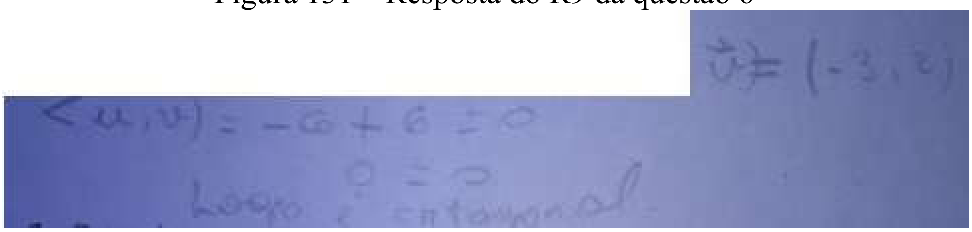
P: Você saberia fazer o vetor diferença? Como ficaria o desenho?

E9: (O estudante fez a representação no plano cartesiano do vetor $\vec{u}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (2,3), do vetor $\vec{v}$ com origem no ponto (0,0) e extremidade no ponto (1,3) e do vetor $\vec{u} - \vec{v}$ com origem no ponto (2,3) e extremidade no ponto (1,3)). Muda só o sentido.

Questão 6: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3)$.

A figura 131 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 131 – Resposta do R9 da questão 6



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: Por que você respondeu esta questão 6 desta maneira?

E9: Para ser ortogonal vai ser 90°.

P: O que vai ser 90°?

E9: Se é ortogonal, vai ser perpendicular, então, o ângulo vai ser 90° em relação ao plano x.

P: Faz um desenho do que seria isso.

E9: (O estudante fez dois vetores com a origem no mesmo ponto e formando um ângulo de 90° e identificou com os eixos x e y positivo do plano cartesiano). Por exemplo, x e y, eles são ortogonais. O ângulo entre os dois vetores tem que ser 90°.

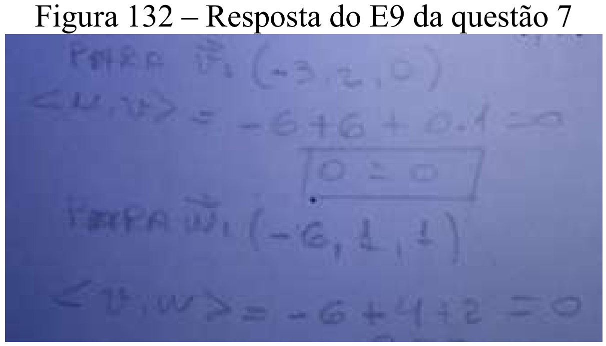
P: Mais por que o vetor $\vec{v} = (-3,2)$.

E9: Eu palpitei. Quando eu multiplicasse, o produto escalar tinha que dá zero.

Questão 7: Determine um vetor ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,3,1)$ e $\vec{v} = (1,4,2)$.

A figura 132 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 132 – Resposta do E9 da questão 7



Fonte: Elaborada pelo autor

Diálogo da entrevista:

P: Por que você respondeu esta questão 7 assim?

E9: Está errada. Mais eu já sei como é. Tem que montar uma matriz e calcular o determinante. O vetor na direção i, o vetor direção j e outro na direção k.

P: Da forma como você respondeu aqui, você determinou um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$ e outro ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v}$.

E9: Neste caso vai encontrar um único vetor que vai ser ortogonal aos dois.

P: Faz um desenho.

E9: (O estudante fez um desenho de acordo com o apresentado na figura 39).

Questão 8: Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A = (-1,4) e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$.

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista:

P: Você não respondeu a questão 8. Não sabe como faz?

E9: Eu lembro que estudei, mais não lembro com faz.

Questão 9: Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela a reta $r_1 : x - 2y = 3$ que passa pelo ponto A = (2,2).

Resposta dada no questionário: (O estudante não soube responder).

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 10: Se o ângulo entre dois vetores é igual 90°, o que podemos dizer sobre estes vetores?

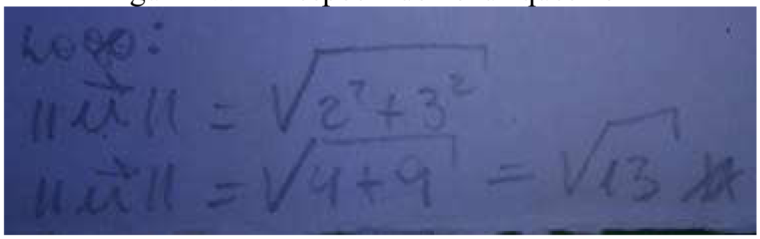
Resposta dada no questionário: Que os vetores são ortogonais.

Diálogo da entrevista: Sem diálogo.

Questão 11: Determine a norma do vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$.

A figura 133 apresenta a resposta dada pelo estudante no questionário.

Figura 133 – Resposta do E9 da questão 11



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Diálogo da entrevista:</u>

P: O que é a norma?

E9: O comprimento do vetor.