UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Juvenal Pereira da Silva

O Jogo de Dardos como Ferramenta ao Estudo de Probabilidade

Ouro Preto

2018

JUVENAL PEREIRA DA SILVA

O Jogo de Dardos como Ferramenta ao Estudo de Probabilidade

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto
Coorientadora: Prof. Ma. Monique Rafaella A. de Oliveira

Ouro Preto
2018

S586j Silva, Juvenal Pereira.
O jogo de dardos como ferramenta ao estudo de probabilidade [manuscrito] / Juvenal Pereira Silva. - 2018.
51f.: il.: tabs.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto.
Coorientador: Prof. MSc. Monique Rafaella Anunciação de Oliveira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática com oferta nacional.

1. Matemática- Estudo e ensino. 2. Jogos educativos. 3. Jogo de Dardos. I. Couto, Rodrigo Geraldo do . II. Oliveira, Monique Rafaella Anunciação de. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Titulo.

CDU: 510:796.262

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT

O Jogo de Dardos como Ferramenta ao Estudo de Probabilidade

Autor(a): Juvenal Pereira da Silva

Dissertação defendida e aprovada, em **21 de Fevereiro de 2018**, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Rodrigo Geraldo do Couto - Orientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Monique Rafaella Anunciação de Oliveira

Monique Rafaella Anunciação de Oliveira Coorientadora
Universidade Federal de Ouro Preto

Luiz Gustavo Perona Araújo

Luiz Gustavo Perona Araújo
Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

Juliano Soares Amaral Dias
Universidade Federal de Ouro Preto

Dedico este trabalho à minha esposa e aos meus filhos que, incondicionalmente me apoiaram e estiveram ao meu lado durante toda essa caminhada. Ao meu pai, na sua luta incansável pela vida. A memória da minha mãe, que mesmo analfabeta dedicou sua vida à educação de seus filhos.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar a DEUS, que por tantas vezes não deixou-me desanimar diante de tamanho desafio e, que muitas vezes estivemos sozinhos nesta longa caminhada, nas dezenas de milhares de quilômetros rodados durante este período. Agradeço a minha esposa Carla Regina e aos meus filhos Lucas Gabriel e Letícia Gabriela, pelo carinho, apoio e compreensão pelos longos dias de ausência. Agradeço ainda aos meus irmãos que deram-me suporte e muitas vezes me acompanharam em tantas viagens. Agradeço a todos os meus colegas de turma, que muito colaboraram para que este trabalho se realizasse. Um agradecimento em especial, ao diretor da minha escola, Manoel, que gentilmente deu-me liberdade para realizar os trabalhos necessários e aos meus alunos que se dispuseram a participar das experiências do jogo de dardo. Agradeço muito a todos meus professores, que fizeram parte dessa jornada, em especial Professor Geraldo, Professor Gil, Professor Rodrigo, meu orientador e a Professora Monique, coorientadora, pela sua imensa generosidade e colaboração na realização desse trabalho. Por fim agradeço a todos que de uma forma ou outra emprestaram-me seus saberes.

Resumo

Neste trabalho de pesquisa, investigou-se o uso de jogos, especificamente o jogo de dardos, como ferramenta ao ensino e a aprendizagem do tema “Probabilidade”. A utilização de jogos como ferramenta de aprendizagem é defendida por vários autores como: Borin (1996), Agranionih & Smaniotto (2002), Grando (2004), Mello et al (2006), Camargo (2009), como um instrumento eficaz de aprendizagem. Neste sentido, este trabalho utiliza a ferramenta “jogos” como meio de se ensinar conceitos referentes a “teoria de conjuntos” e à “teoria das probabilidades”. Realizamos estudos preliminares sobre essas teorias já citadas, bem como sobre áreas das figuras planas regulares. O trabalho desenvolveu-se com uma turma do $2^{\underline{o}}$ Ano do Ensino Médio, de uma escola estadual, localizada em Pirapora, situada no Norte de Minas Gerais. Observou-se que o jogo de dardos é uma ferramenta eficaz de aprendizagem ao ser utilizado na aplicação do tema proposto.

Palavras chave: Ensino da Matemática, Probabilidade, Jogo de Dardos, Áreas do Círculo e de Figuras Planas.

Abstract

In this research, we investigated the use of games, specifically the dart game, as a tool for teaching and learning the theme "Probability". The use of games as learning tool is defended by several authors such as Borin (1996), Agranionih & Smaniotto (2002), Grando (2004), Mello et al (2006), Camargo (2009), as an effective learning tool. In this regard, this research uses the "games"tool as a way of teaching concepts related to "set theory"and the "probability theory”. We carry out preliminary studies on these theories already mentioned, as on areas of regular plane figures. The research was developed with a $2nd$ year high school class, from a state school, in Pirapora, located in the north of Minas Gerais. It was observed that the dart game is an effective learning tool when used in the application of the proposed theme.

Keywords: Mathematics Teaching, Probability, Dart Game, Circle and Plane Figures Areas.

Lista de Figuras

1.1 Probabilidade geométrica. 26

2.1 Área do quadrado $S_Q = n^2(u.a)$. 29
2.2 Quadrado de lado s dividido em quadrados de lado $\frac{m}{s}$. 30
2.3 Quadrado de lado m (racional), quadrado de lado n (irracional). 30
2.4 Quadrado lado m (racional), que contém o quadrado de lado n (irracional). 31
2.5 Quadrado de lado b+h. 32
2.6 Área de um paralelogramo. 33
2.7 Área do triângulo ABC. 34
2.8 Polígono inscrito no círculo. 34
2.9 Polígono regular inscrito circunscrito. 36
2.10 Polígono de n lados inscrito na circunferência. 37

3.1 Alvo e dardos, modelo tradicional. Fonte: Portal São Francisco, 2017. 38
3.2 Quadrado inscrito e circunscrito a um círculo. 41
3.3 Triângulo equilátero inscrito em um círculo. 41
3.4 Hexágono circunscrito a um círculo. 42
3.5 Quadrado inscrito no círculo. 44
3.6 Hexágono circunscrito ao círculo. 44
3.7 Triângulo equilátero inscrito no círculo. 45
3.8 Modelo de dardo utilizado no experimento. 46

Lista de Tabelas

1.1 Espaço Amostral 25

3.1 Lançamento de dardo com mira, para o quadrado inscrito no círculo (olhos abertos). 42
3.2 Lançamento de dardo sem mira, para quadrado inscrito no círculo (olho fechado). 43

Conteúdo

1 UMA ABORDAGEM SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADES 16

1.1 ALGUMAS PROPRIEDADES OPERATÓRIAS SOBRE CONJUNTOS 16

1.2 ALGUMAS PROPOSIÇÕES SOBRE A TEORIA DAS PROBABILIDADES 20

2 ÁREAS DAS REGIÕES LIMITADAS PELAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS 28

3 UMA ATIVIDADE PRÁTICA ACERCA DE PROBABILIDADE EM ÁREAS DE FIGURAS PLANAS REGULARES INSCRITAS E CIRCUNSCRITAS 38

3.1 BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE O HISTÓRICO DO JOGO DE DARDOS . . . 38

3.2 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE PRÁTICA 39

3.3 PLANO DE EXECUÇÃO EM SALA DE AULA 40

3.3.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE DE LANÇAMENTO DE DARDOS 40

4 Conclusão 48

Referências Bibliográficas 49

Introdução

A utilização de jogos como ferramenta de aprendizagem é considerada por pesquisadores como: Agranionih & Smaniotto (2002), Grando (2004), Mello et al (2006), Camargo (2009), e outros, um instrumento eficaz, pois facilita aos alunos a compreensão de conceitos a partir de situações concretas.

Neste sentido, aplicando o uso de jogos ao estudo da matemática, este deve partir de estratégias que incluam, além do desenvolvimento de conceitos, o uso de métodos e procedimentos, situações de aprendizagem que propiciem o desenvolvimento de modos de pensar e agir, momentos de concentração e criatividade, atividades lúdicas e desafiadoras e que lhes estimule o raciocínio.

O jogo matemático é uma atividade lúdica e educativa, intencionalmente planejada, com objetivos claros, sujeita a regras construídas coletivamente, que oportuniza a interação com os conhecimentos e os conceitos matemáticos, social e culturalmente produzidos, o estabelecimento de relações lógicas e numéricas e a habilidade de construir estratégias para a resolução de problemas.

Ao se trabalhar com jogos nas aulas de matemática devem ser feitas algumas considerações e questionar sempre: quando, por que e para que estamos propondo jogos; não querer transformar tudo em jogos, pois o objetivo não é ensinar os alunos a jogarem, mas mantê-los mentalmente ativos; ver o jogo como uma das muitas estratégias de ensino.

Nesse contexto, diante das dificuldades enfrentadas no ensino da matemática, os professores buscam, gradativamente, priorizar não a reprodução, mas sim a construção dos conhecimentos, sendo que para tanto, devem ser trabalhadas atividades que despertem o interesse e a motivação dos alunos. Os jogos matemáticos têm valores educacionais intrínsecos, assim, acredita-se que a utilização deste recurso em sala de aula é uma excelente alternativa para desenvolver a capacidade dos alunos de atuarem como sujeitos na construção de seus conhecimentos.

Assim, o jogo é um processo em que o aluno necessita de conhecimentos prévios, interpretação de regras e raciocínio, o que representa desafios contínuos, pois a cada nova jogada são abertas possibilidades para novas estratégias, desencadeando situações-problema que, ao serem resolvidas, permitem a evolução do conhecimento construído durante a atividade.

O jogo para ensinar matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar perfeitamente localizado no processo que leva o aluno, do conhecimento primeiro, ao conhecimento elaborado.

Neste sentido, este trabalho utiliza a ferramenta "jogos" como meio de se ensinar conceitos referentes ao tema "probabilidades", que é definido por Morgado (1991) da seguinte forma: "A Teoria das probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios".

A civilização grega, tão lembrada pelas literaturas como realizadora de grandes feitos em campos da matemática, não abordou o assunto probabilidades, que só viria a ter seu primeiro estudo no século XV, com o italiano Cardano, onde lançara noções preliminares de probabilidade, ligadas ao cálculo das chances de ocorrência em certos jogos de azar

O estudo das probabilidades é necessário ao aluno, pois auxilia na tomada de decisão, permite avaliar uma situação e quais são as chances de sucesso nesta tomada de decisão, além de ser um conteúdo básico do ensino médio. Observa-se que para a aplicação desse tema, é possível utilizar-se de jogos como ferramenta para se ensinar conceitos referentes a essa teoria, que no caso deste trabalho, foi utilizado o jogo de dardos como ferramenta ao estudo de conceitos relacionados ao tema "probabilidades".

A aplicação do jogo de dardos como ferramenta ao estudo das probabilidades possibilita a visualização e a compreensão de situações-problema pelos alunos, bem como oferece ao professor de matemática meios de inovar e introduzir novas formas para aplicação de conceitos, trazendo experiências lúdicas aos alunos. Tratam-se de linguagens relacionadas à probabilidade e formas de interpretá-la.

Em se tratando da revisão bibliográfica para a realização desse trabalho, serviram de base os seguintes autores: Agranionih & Smaniotto (2002), Grando (2004), Mello et al (2006),James (2015), Borin (1996), Camargo et al (2009), Moura (1992), Morgado (1991), Ávila (2006), Cramér (1995), Silva (2013) e Wagner (2015). O objetivo principal desse estudo foi utilizar o "jogo de dardos" como ferramenta ao ensino da probabilidade, divulgando formas de ensinar que diferem da maneira tradicional. Como objetivos específicos propomos: utilizar diferentes abordagens aos conceitos de probabilidades, desenvolver o raciocínio e a concentração ao utilizar o jogo de dardos, compreender o tema probabilidade com a prática do jogo de dardos e utilizar o jogo de dardos para auxiliar na aprendizagem da disciplina matemática.

O trabalho desenvolveu-se com uma turma do $2^{\underline{o}}$ Ano do Ensino Médio, de uma escola estadual, localizada em Pirapora, cidade situada no Norte de Minas Gerais, no ano de 2017. A metodologia adotada compreendeu em: pesquisa bibliográfica e documental sobre o tema, elaboração do plano de trabalho e execução em sala de aula. Foi apresentada a "teoria das probabilidades" direcionando ao entendimento conceitual para que ficasse claro ao aluno a aplicação desse conceito à atividade prática; realizou-se atividades práticas envolvendo cálculos da área de figuras planas regulares; foi montado um painel onde foram inseridas figuras, para em seguida realizar atividades de lançar os dardos com o objetivo de acertar determinada área escolhida previamente. Para a atividade do lançamento de dados, o objetivo da atividade foi calcular a probabilidade de acertar o dardo em uma determinada área da figura, estabelecida previamente, tomando-se as seguintes figuras planas regulares mais conhecidas: triângulo equilátero, quadrado e hexágono. Houve adaptações do jogo original de dardos para atender aos objetivos do projeto. Observou-se que o jogo de dardos é uma ferramenta eficaz de aprendizagem ao ser utilizado na aplicação do tema proposto.

Esta pesquisa foi dividida em 3 capítulos, os quais trataremos aqui de breves comentários sobre cada um, a fim de facilitar o entendimento do leitor.

No primeiro capítulo, iniciamos com uma fundamentação teórica relativa ao tema probabilidade, sua funcionalidade, algumas aplicações a respeito das operações envolvendo conjuntos, com definições básicas para o melhor entendimento da aplicabilidade envolvendo probabilidades em figuras planas regulares inscritas e circunscritas. Destacando-se Morgado (1991), Cramér (1955), James (2015) e Ávila (2006) como referências nesses estudos.

No segundo capítulo fizemos o estudo da superfície dos principais quadriláteros, do triângulo e do círculo. Apresentamos e demonstramos as áreas do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do círculo. Destacam-se como principais autores deste capítulo: Barbosa (1995), Neto (2012), Wagner (2015) e Filho (2017).

No terceiro capítulo tratamos de enfocar as atividades práticas, (jogos de dardos) envolvendo a aplicação da probabilidade em áreas do círculo e de figuras planas regulares inscritas e circunscritas, que foram executadas em sala de aula, como proposta de inovação da forma de ensinar. Tais atividades foram executadas de forma a propor novas dinâmicas para aplicação de conceitos. Destacam-se como principais autores deste capitulo: Borin (1996), Agranionih & Smaniotto (2002), Grando (2004), Mello et al (2006) e Camargo (2009).

Analisando a relevância de adequação a alunos com diferentes interesses e capacidades, os jogos oferecem oportunidades para se ensinar Matemática de forma eficiente e dinâmica. O jogo cria situações surpreendentes, envolve investigação, hipóteses e desenvolve habilidades de raciocínio lógico. A proposta desenvolvida neste trabalho compreende formas práticas para a compreensão de linguagens relacionadas à probabilidade e formas de interpretá-la. Ao trabalhar tal proposta, recomenda-se que seja utilizada por professores de matemática, como forma de inovação/desafio, no espaço da sala de aula como estímulo à aprendizagem dos alunos.

Concluímos que os jogos oferecem oportunidades para se ensinar Matemática de forma eficiente e dinâmica, pois desperta o interesse daqueles alunos que possuem dificuldades de aprendizagem ou mesmo aqueles que apresentam desinteresse por atividades que envolvem raciocínio e resolução de problemas ou operações, que tradicionalmente são utilizados. O jogo cria situações surpreendentes, envolve investigação, hipóteses e desenvolve habilidades de raciocínio lógico ou até para alguns o jogo é considerado “brincadeira”, porém o ato de “brincar” desperta habilidades e envolve também situações ligadas à aceitação de ganhar ou perder. Cabe ao profissional (professor) estabelecer regras e impor limites aos alunos, deixando claro quais são os objetivos que deverão ser atingidos na realização das atividades.

1 UMA ABORDAGEM SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADES

Nesse capítulo faremos uma abordagem sobre o conceito de probabilidades, sua funcionalidade, bem como algumas aplicações a respeito das operações envolvendo conjuntos. Para isso conceberemos definições básicas para o melhor entendimento da aplicabilidade envolvendo probabilidades em figuras planas regulares inscritas e circunscritas. Destacam-se Morgado (1991), Cramér (1955), James (2015) e Ávila (2006) como referências nesses estudos.

1.1 ALGUMAS PROPRIEDADES OPERATÓRIAS SOBRE CONJUNTOS

Nesta seção, faremos uma abordagem sobre algumas operações envolvendo conjuntos. Algumas propriedades operatórias de conjuntos são necessárias ao estudo das probabilidades. Definido de forma diversa por vários autores, optou-se neste momento pela definição trazida por Ávila (2006): “Um conjunto pode ser definido pela simples listagem de seus elementos entre chaves ou pela especificação de uma propriedade que caracterize seus elementos”.

Por exemplo:

- O conjunto das vogais: $E_1 = \{a, e, i, o, u\}$.
- O conjunto dos números pares positivos: $E_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$.
- O conjunto dos dias da semana: $E_3 =$ {domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}.

Lima (2013), trazendo a relação entre o elemento e o conjunto, afirma que cabe dizer que um conjunto é formado por elementos. Dizemos que um elemento x pertence ou não pertence a um determinado conjunto. Assim podemos escrever simbolicamente $x \in A$ (x pertence ao conjunto A) ou $x \notin A$ (x não pertence ao conjunto A).

Vamos dar uma atenção especial ao conjunto vazio, representado por $\varnothing$.

Definição 1. *O conjunto vazio é aquele conjunto que não possui elemento, denotado por* $\varnothing$*.*

Queremos destacar também o conjunto universo.

Definição 2. *O conjunto universo é o conjunto de todos os elementos representados por uma determinada definição, característica ou situação apresentada.*

Vamos destacar também a relação de inclusão, que será amplamente utilizada em nosso trabalho.

Definição 3. *Sejam E_1 e E_2 conjuntos. Se todo elemento de E_1 for também elemento de E_2, diz-se que E_1 é um subconjunto de E_2, que E_1 está contido em E_2 ou que E_1 é parte de E_2. Para indicar este fato, usa-se a notação $E_1 \subset E_2$.*

Vejamos um exemplo acerca das definições acima.

Exemplo 1. *Seja o conjunto $E = \{1,2,3\}$. Os subconjuntos do conjunto E são: $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$. Observe que o conjunto vazio é subconjunto de E e que o próprio conjunto é subconjunto dele mesmo.*

O conjunto vazio, como definido anteriormente, não possui elemento. Enunciaremos e provaremos o seguinte teorema.

Teorema 1. *O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.*

Demonstração. Suponha que exista um conjunto E qualquer tal que o conjunto $\varnothing$ não esteja contido em E. Então existe um elemento x que pertence ao conjunto vazio e não pertence ao conjunto E, mas isto é um absurdo, pois o conjunto vazio não possui nenhum elemento, logo o conjunto vazio está contido no conjunto E. Assim fica provado que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. $\square$

Aqui faremos algumas considerações importantes sobre as relações e operações em conjuntos, que serão necessárias ao estudo das probabilidades, as relações de inclusão e igualdade. Daí decorrem as seguintes propriedades que enunciaremos sem demonstração.

Sejam os conjuntos E_1, E_2 e E_3, então:

a) $\varnothing \subset E_1$.

b) $E_1 \subset E_1$.

c) $(E_1 \subset E_2)$ e $(E_2 \subset E_3) \Rightarrow (E_1 \subset E_3)$.

Definição 4. *Dois conjuntos E_1 e E_2 serão considerados iguais se, $E_1 \subset E_2$ e $E_2 \subset E_1$. O que podemos escrever: $E_1 = E_2 \Leftrightarrow \forall x_i \in E_1 \Rightarrow x_i \in E_2$ e $\forall x_j \in E_2 \Rightarrow x_j \in E_1$.*

Definiremos agora algumas operações com conjuntos.

Definição 5. *Dados os conjuntos E_1 e E_2, define-se como a união de E_1 e E_2, como o conjunto de todos elementos de E_1 e E_2, isto é, $E_1 \cup E_2 = \{x | x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$ denotado por $E_1 \cup E_2$.*

Apresentaremos, a seguir, algumas propriedades da união entre conjuntos, importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Considere os conjuntos E_1, E_2 e E_3.

I) $E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$.

II) $E_1 \cup \varnothing = E_1$.

III) $E_1 \cup E_1 = E_1$.

IV) $E_1 \subset (E_1 \cup E_2)$ e $E_2 \subset (E_1 \cup E_2)$.

V) $E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3$.

Definição 6. *Denotando por $n(E)$ o número de elementos do conjunto E,o número de elementos da união de dois conjuntos E_1 e E_2 é dado por: $n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2)$.*

Definição 7. *Considere os conjuntos E_1 e E_2. Entende-se por interseção de dois conjuntos, o subconjunto dos elementos que pertencem aos dois conjuntos, isto é, $E_1 \cap E_2 = \{x \in E_1$ e $x \in E_2\}$ denotado por $E_1 \cap E_2$.*

Abaixo estão algumas propriedades importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho, da interseção entre conjuntos. Considere os conjuntos E_1, E_2 e E_3.

I) $\varnothing \cap E_1 = \varnothing$.

II) $E_1 \cap E_1 = E_1$.

III) $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$.

IV) $(E_1 \cap E_2) \subset E_1$ e $(E_1 \cap E_2) \subset E_2$.

V) $E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3$.

Não são raras as vezes em que usamos as operações de união e interseção para determinarmos a solução de uma situação problema. Apresentaremos a seguir algumas propriedades onde elas aparecem juntas, com suas devidas demonstrações.

I) $E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$.
II) $E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$.

Demonstração.

I) Queremos mostrar que: $E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$. Para isto basta mostrar que os dois lados da equação são iguais, ou seja, basta provar que todo elemento que está do lado direito da equação também está do lado esquerdo e vice-versa.

Primeiramente tomemos $x \in E_1 \cap (E_2 \cup E_3)$, então $x \in E_1$ e $x \in (E_2 \cup E_3)$. Daí decorre que $x \in E_1$ e $(x \in E_2$ ou $x \in E_3)$. Portanto $(x \in E_1$ e $x \in E_2)$ ou $(x \in E_1$ e $x \in E_3)$, ou seja, $x \in (E_1 \cap E_2)$ ou $x \in (E_1 \cap E_3)$, o que implica em $x \in (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$.

Tomemos agora $x \in (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$, então $x \in (E_1 \cap E_2)$ ou $x \in (E_1 \cap E_3)$. Daí decorre que $(x \in E_1$ e $x \in E_2)$ ou $(x \in E_1$ e $x \in E_3)$. Portanto $x \in E_1$ e $(x \in E_2$ ou $x \in E_3)$, o que implica que $x \in E_1 \cap (E_2 \cup E_3)$. Assim fica provado que, $E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$.

II) Queremos mostrar que: $E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$.

Tomemos $x \in [E_1 \cup (E_2 \cap E_3)]$, então $x \in E_1$ ou $x \in (E_2 \cap E_3)$. Daí decorre que $x \in E_1$ ou $(x \in E_2$ e $x \in E_3)$. Portanto, $(x \in E_1$ ou $x \in E_2)$ e $(x \in E_1$ ou $x \in E_3)$. O que implica $x \in (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$.

Tomemos agora $x \in [(E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)]$, então $x \in (E_1 \cup E_2)$ e $x \in (E_1 \cup E_3)$. Daí decorre que $(x \in E_1$ ou $x \in E_2)$ e $(x \in E_1$ ou $x \in E_3)$. Portanto $x \in E_1$ ou $(x \in E_2$ e $x \in E_3)$. Isto implica que $x \in [E_1 \cup (E_2 \cap E_3)]$. Desse modo concluímos que $E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$. □

Definição 8. *Dados dois conjuntos E_1 e E_2, a diferença entre E_1 e E_2 é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a E_1 mas não pertencem a E_2. Simbolicamente podemos representar por $E_1 - E_2$.*

Observação 1.1.1. *Essa diferença pode ser o conjunto vazio, se $E_1 = E_2$.*

Exemplo 2. *Dados os conjuntos $E_1 = \{1,3,4,6,7\}$ e $E_2 = \{3,5,7\}$, temos que $E_1 - E_2 = \{1,3,4,6,7\} - \{3,5,7\} = \{1,4,6\}$ e $E_2 - E_1 = \{5\}$.*

Devemos observar ainda que, geralmente, a diferença entre conjuntos não é comutativa, ou seja, $E_1 - E_2 \neq E_2 - E_1$.

Daremos agora uma definição para o conjunto complementar.

Definição 9. *Sejam S o conjunto universo e $E \subset S$. Chama-se complementar de E ao conjunto E^C formados pelos elementos de S que não pertencem a E, de tal forma que $E \cup E^C = S$ e $E \cap E^C = \varnothing$.*

Exemplo 3. *Dados os conjuntos $S = \{1,2,3,4,5\}$ e $E = \{1,2,3\}$, o conjunto complementar de E é dado por $E^c = \{4,5\}$.*

1.2 ALGUMAS PROPOSIÇÕES SOBRE A TEORIA DAS PROBABILIDADES

Nesta seção, observaremos algumas definições que são indispensáveis para que o estudo das probabilidades seja mais facilmente compreendido, destacando o desenvolvimento desse tema em trabalhos realizados por, James (2015) e Morgado (1991), autores tidos como referência em estudos relacionados às probabilidades e suas aplicações.

Neste sentido, Cramér (1955) ao se referir sobre o tema “probabilidade”, bem como o “experimento aleatório”, afirma que este último ocorre em diferentes áreas de atividades prática e científica, onde podem acontecer repetições diversas vezes em experimentos e observações.

"Suponhamos que um experimento seja realizado sob certas condições fixas. Seja S o conjunto de resultados possíveis, onde por um ”resultado possível“ entende-se resultado elementar e indivisível do experimento. S será chamado espaço amostral do experimento."(JAMES, 2015). O número de elementos de S, com $S \neq \varnothing$, será denotado por $n(S)$.

São exemplos de experimentos aleatórios:

a) Lançar um dado, honesto, de seis faces, e observar a face superior.
b) Lançar uma moeda, honesta, e observar sua face superior.
c) Retirar uma bola de uma urna, sem olhar, onde estão 10 bolas numeradas de 1 a 10, sendo todas indistinguíveis ao tato.
d) Escolher um aluno, ao acaso, em uma sala com 30 alunos.

Exemplo 4. *Ao lançar um dado, honesto, de seis lados e observar sua face superior, temos que $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $n(S) = 6$.*

Definição 10. *Um evento E é qualquer subconjunto $E \subset S$. Aqui vamos denominar o número de elementos de um evento E como $n(E)$.*

Definição 11. *Dois eventos E_1 e E_2 são ditos disjuntos se $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.*

A definição seguinte de probabilidade é a mais antiga definição formal de probabilidade para conjuntos finitos, e surgiu pela primeira vez de forma clara na obra Liber de ludo Aleae de Jerônimo Cardano $(1501-1576)$.

Definição 12. *Probabilidade é definido como o quociente entre o número de "casos favoráveis" sobre o número de "casos possíveis", ou seja, dado um evento* E *finito,* $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}$.

Exemplo 5. *No lançamento de um dado de seis lados, vamos determinar a probabilidade de se observar um número par na face superior. Temos* $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ *e* $E=\{2,4,6\}$*, então a probabilidade desejada é:* $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Vamos agora definir a função probabilidade:

Definição 13. *Seja* S *um espaço amostral finito e* $\mathbb{P}(S)$ *o conjunto das partes de* S*. Defina* $P:\mathbb{P}(S)\rightarrow\mathbb{R}$ *por* $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}$.

A função probabilidade definida anteriormente $[13]$ satisfaz as seguintes propriedades:

I) $P(E)\geq 0, \forall E\subset S$.
II) $P(\varnothing)=0$.
III) $P(S)=1$.
IV) $P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)$, se $E_1\cap E_2=\varnothing$.

Demonstração. Suponha S um espaço amostral não vazio:

I) Sabemos que $n(S)>0$ e sendo E um evento desse espaço amostral, é claro que $n(E)\geq 0$. Pela definição de probabilidade, $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}$, temos que $P(E)\geq 0$.

II) Sabemos que $n(S)>0$ e $E=\varnothing$ é evento impossível desse espaço, então $n(E)=0$. Logo pela definição de probabilidade, $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}=0$.

III) Como $n(S)>0$. Logo $P(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$.

IV) Sejam os eventos E_1 e E_2, subconjuntos do espaço amostral S, com $E_1\cap E_2=\varnothing$. Então $n(E_1\cup E_2)=n(E_1)+n(E_2)$. Pela definição de união de conjunto, juntamente com a definição de probabilidade, temos que

$$P(E_1\cup E_2)=\frac{n(E_1\cup E_2)}{n(S)}=\frac{n(E_1)}{n(S)}+\frac{n(E_2)}{n(S)}=P(E_1)+P(E_2).$$

$\square$

Observação 1.2.1. *Se $E_1, E_2, ..., E_n$ são dois a dois disjuntos então vale*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i).$$

A função P definida acima é uma função probabilidade em $\mathbb{P}(S)$.

Algumas proposições muito úteis, podem ser retiradas destas propriedades e da definição da função probabilidade:

Proposição 1.2.1. *Dado o evento E, $P(E^c) = 1 - P(E)$.*

Demonstração. Seja E^c o conjunto complementar do evento E. Temos que E e E^c são disjuntos tais que $E^c \cup E = S$. Pelas propriedades $III)$ e $IV)$ temos que

$$1 = P(S) = P(E^c \cup E) = P(E^c) + P(E) \Rightarrow 1 = P(E^c) + P(E) \Rightarrow 1 - P(E) = P(E^c).$$

$\square$

Proposição 1.2.2. *Se $E_1 \subset E_2$, então $P(E_1) = P(E_2) - P(E_2 - E_1)$.*

Demonstração. Como $E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1) \Rightarrow P(E_2) = P[E_1 \cup (E_1 - E_2)]$, então temos pela propriedade $IV)$ que $P(E_2) = P(E_1) + P(E_2 - E_1) \Rightarrow P(E_1) = P(E_2) - P(E_2 - E_1)$. $\square$

Segue imediato da proposição 1.2.2 o seguinte corolário:

Corolário 1.1. *Se $E_1 \subset E_2$, então $P(E_1) \leq P(E_2)$.*

Demonstração. Como $P(E_1) = P(E_2) - P(E_2 - E_1)$ e pela propriedade $I)$ temos que $P(E_2 - E_1) \geq 0$, segue que $P(E_1) \leq P(E_2)$. $\square$

A proposição a seguir apresenta a probabilidade da união de dois conjuntos quaisquer.

Proposição 1.2.3. *Sejam E_1 e E_2 dois conjuntos quaisquer, então*

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Demonstração. Usando o fato que:
$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2) \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = \dfrac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \dfrac{n(E_1)}{n(S)} + \dfrac{n(E_2)}{n(S)} - \dfrac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$.

Portanto,

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_2 \cap E_1).$$

□

Vamos agora determinar probabilidade da união de três conjuntos:

Proposição 1.2.4. *Dados os conjuntos E_1, E_2 e E_3, não obrigatoriamente disjuntos, então*

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + \\ &\quad P(E_1 \cap E_2 \cap E_3). \end{aligned}$$

Demonstração. Observe que $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P[(E_1 \cup E_2) \cup E_3)]$, e pela proposição 1.2.3 temos:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1 \cup E_2) + P(E_3) - P[(E_1 \cup E_2) \cap (E_3)].$$

Desenvolvendo e aplicando a proposição 1.2.3 sucessivamente, temos:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) + P(E_3) - P[(E_1 \cup E_2) \cap (E_3)] \\ &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) + P(E_3) - P[(E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)] \\ &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) + P(E_3) - \\ &\quad [P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] \\ &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + \\ &\quad P(E_1 \cap E_2 \cap E_3). \end{aligned}$$

□

Podemos agora generalizar a probabilidade da união de n conjuntos.

Proposição 1.2.5. *Dados os conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$, n conjuntos, não obrigatoriamente disjuntos, então*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(E_i \cap E_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Demonstração. Sabemos que para $n = 3$ é verdade, e suponha verdade para $k = n - 1$. Vamos mostrar que é verdade para $k = n$. Temos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) \cup E_n\right] = \underbrace{P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) + P(E_n)}_{(1)} - \underbrace{P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) \cap E_n\right]}_{(2)}.$$

Desenvolvendo (1), temos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) + P(E_n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n-1} P(E_i \cap E_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n-1} P(E_i \cap E_j \cap E_k)$$
$$- \cdots + (-1)^{n-2} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right) + P(E_n).$$

Desenvolvendo (2), temos:

$$P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) \cap E_n\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{n-1} (E_i \cap E_n)\right] = \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i \cap E_n) - \sum_{1\leq i<j\leq n-1} P(E_i \cap E_j \cap E_n) + \cdots +$$
$$(-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Fazendo (1) – (2), temos:

$$P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) \cup E_n\right] = \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n-1} P(E_i \cap E_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n-1} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - \cdots +$$
$$(-1)^{n-2} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right) + P(E_n) - [\sum_{i=1}^{n-1} P(E_i \cap E_n) - \sum_{1\leq i<j\leq n-1} P(E_i \cap E_j \cap E_n) + \cdots +$$
$$(-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)],$$

que é o resultado esperado. □

Vamos definir agora a probabilidade condicional.

Definição 14. *Sejam E_1 e E_2 dois eventos de um espaço amostral e suponha que $P(E_1) > 0$. A probabilidade condicional de acontecer E_2 dado que aconteceu E_1 é definida por:*

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}.$$

Desse modo, como consequência da definição $[14]$ podemos obter a seguinte expressão: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1)$.

Como exemplo vamos considerar o seguinte experimento:

Exemplo 6. *Lançar duas vezes um dado honesto, em uma superfície plana, e observar a soma dos números da face superior. Supondo que a soma tenha sido um número primo, qual a probabilidade de ter sido sete?*

Solução: Seja S o espaço amostral, então $S = \{(i,j)$: i, j inteiros, $1 \leq i \leq 6$, $1 \leq j \leq 6\}$ conforme tabela 1.1.

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Tabela 1.1: Espaço Amostral

Sejam os eventos: E_1, sair uma soma cujo número seja primo e E_2, obter uma soma sete. Então $E_1 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(5,2),(5,6),(6,1),(6,5)\}$ e $E_2 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$. A probabilidade condicional da soma ser 7 é dado por: $P(E_2 \mid E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.

O teorema a seguir é conhecido como teorema da multiplicação ou teorema da probabilidade composta.

Teorema 2. *Dados E_1, E_2, E_3, $\ldots$, E_n, n conjuntos, eventos do espaço amostral S, então:*

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_3 \mid E_2 \cap E_1) \cdots P(E_n \mid E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_{n-1}),$$

$\forall E_1, \ldots, E_n \in S$, $\forall n = 2, 3, \ldots$.

Demonstração. Para $E_1 \cap E_2$ temos, pela definição [14] que $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1)$. Para $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ temos: $P[E_3 \mid (E_2 \cap E_1)] = \dfrac{P(E_3 \cap E_2 \cap E_1)}{P(E_2 \cap E_1)} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) &= P[E_3 \mid (E_2 \cap E_1)] \cdot P(E_1 \cap E_2) \\ &= P[E_3 \mid (E_1 \cap E_2)] \cdot P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1). \end{aligned}$$

Vimos que é verdade para $n = 3$. Suponha verdade para $k = n$, isto é,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot P[E_3 \mid (E_1 \cap E_2)] \cdots P[E_n \mid (E_1 \cap E_2 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1})].$$

Vamos mostrar que também é válido para $k = n+1$. Podemos escrever:

$$P[(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_n) \cap E_{n+1}] = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_n) \cdot P[E_{n+1} \mid E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_n)].$$

Daí segue o resultado esperado,

$$\begin{aligned} P[(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_n) \cap E_{n+1}] &= P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot P[E_3 \mid (E_1 \cap E_2)] \cdot \ldots \cdot \\ & P[E_n \mid (E_1 \cap E_2 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1})] \cdot \\ & P[E_{n+1} \mid E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_n]. \end{aligned} \qquad \square$$

.

Para a próxima definição, vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 7. *Sejam Σ disco de raio 1 centrado na origem, ou seja, $\Sigma = \{(x,y) \in R^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$, e $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considere os seguintes eventos do experimento:*
A = "distância d entre o ponto escolhido e a origem for tal que $\frac{1}{2} \leq d \leq 1$";
B = "as coordenadas do ponto P, x e y tiverem sinais opostos";
C = "distância entre o ponto P escolhido e a origem é maior 1".

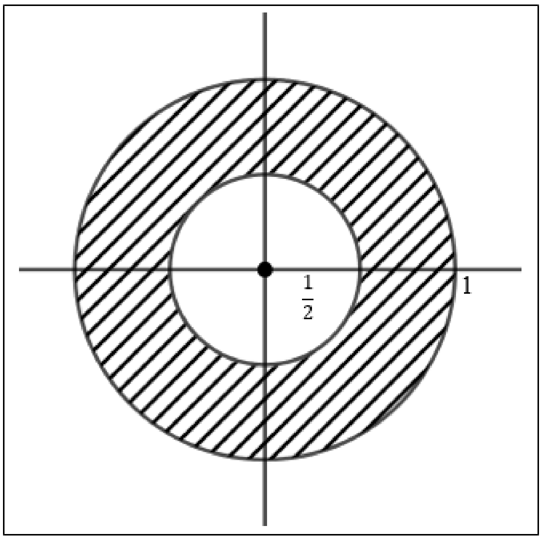

Figura I. Evento A

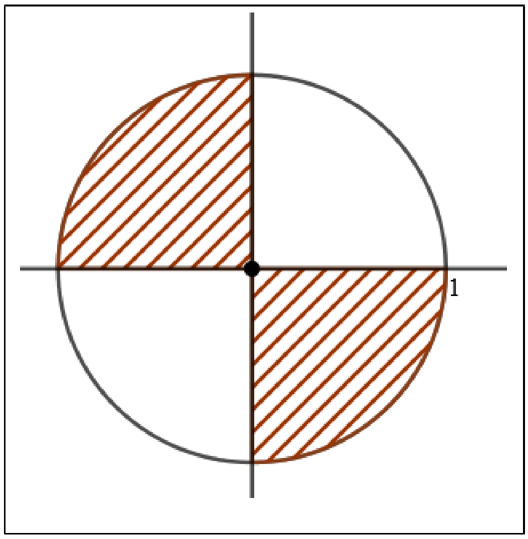

Figura II. Evento B

Figura 1.1: Probabilidade geométrica.

Seja $P = (x,y)$ um resultado do experimento. P será favorável a A se $1/2 \leq x^2 + y^2 < 1$, será favorável a B se $x = -y$ e não há casos favoráveis a C. Então todo evento associado a este experimento pode ser identificado como um subconjunto do espaço amostral Σ. Se A for um subconjunto de Σ então $A \subset \Sigma$, portanto temos que identificar o subconjunto A e o evento "resultado pertencente a A".

Para o exemplo anterior podemos definir o que chamamos de probabilidade geométrica.

Definição 15. *Definimos probabilidade geométrica em que dois eventos tem a mesma probabilidade se, e somente se, possuírem a mesma área. Ou seja, para $E \subset \Sigma$, $P(E) = \dfrac{\text{área } A}{\text{área } \Sigma}$, se área A estiver bem definida.*

Concluímos, com isso, a apresentação de algumas definições e proposições acerca da teoria das probabilidades.

2 ÁREAS DAS REGIÕES LIMITADAS PELAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS

Neste capítulo faremos o estudo da superfície dos principais quadriláteros, do triângulo e do círculo. Apresentaremos e demonstraremos o cálculo da área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do círculo. Exibiremos também a fórmula para o cálculo da área de uma figura plana regular com n lados. Destacam-se como principais autores deste capítulo: Barbosa (1995), Neto (2012), Wagner (2015) e Filho (2017).

Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado. “Para que um conceito qualquer de área para polígonos tenha utilidades, postulamos que as seguintes propriedades (intuitivamente desejáveis) sejam válidas” (NETO, 2012).

1. Polígonos congruentes tem áreas iguais;
2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de polígonos convexos, os quais não têm pontos interiores comuns), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores;
3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor;
4. A área de um quadrado de lado 1 unidade de comprimento, $(u.c.)$ é igual a 1 unidade de área, $(u.a.)$.

Iniciaremos o nosso estudo de áreas pelo quadrado, que nos servirá de base para demonstrações das áreas de outras figuras planas. Nesta seção sobre área, utilizaremos a ideia intuitiva de limites, que o leitor pode aprofundar-se sobre a definição em Neto (2015, pp. $122-129$). Usaremos também a noção de densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais, tratada por [23] , que utilizou como referências os estudos de Lima (1977, pp. $73-74$) e Caraça (1989, p. 56) nas demonstrações dos teoremas e definições de áreas deste capítulo.

Temos pela propriedade 4, que um quadrado de lado 1 $u.c.$, possui área igual a 1 $u.a.$. Dada figura A, escreveremos S_A para designar a medida da área da figura A.

Teorema 3. *Consideremos a região Q ocupada por um quadrado de lado n unidades de comprimento, então sua área será dada por n^2, isto é, $S_Q = n^2$.*

Demonstração. Vamos considerar três casos.

I. **Para n natural:** Particione um quadrado de lado n, conforme figura 2.1, em n^2 quadrados de lados $1\,u.c.$ cada. Denotemos a área do quadrado maior por S_Q. Devemos ter S_Q igual a soma das áreas desses n^2 quadrados de lado $1\,u.c.$, de tal maneira que $S_Q = n^2$.

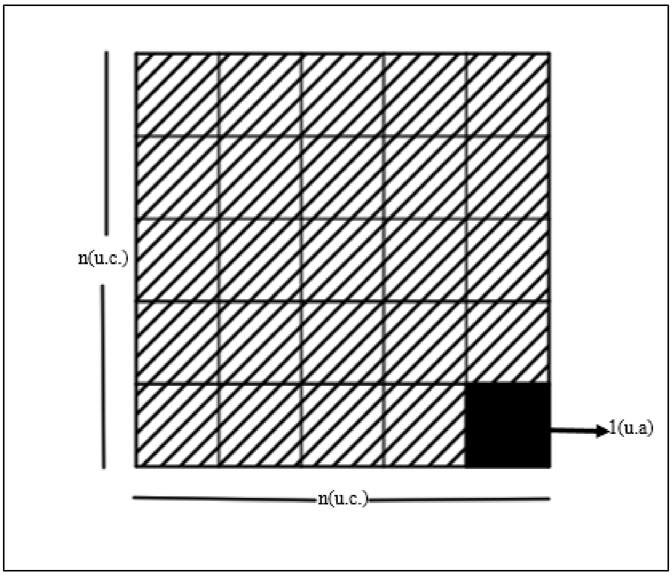

Figura 2.1: Área do quadrado $S_Q = n^2(u.a)$.

II. **Para n racional:** Considere um quadrado de lado $n = \dfrac{m}{s}$, $m, s \in \mathbb{N}$, $s \neq 0$, com $(m, s) = 1$ e área S_Q. Arranje s^2 cópias do mesmo, conforme figura 2.2, empilhando s quadrados de lado $\dfrac{m}{s}$ por fila, em s filas, formando assim um quadrado de lado $\dfrac{m}{s} \cdot s = m$. Tal quadrado maior terá como área m^2; por outro lado, como ele está particionado em s^2 quadrados de lado $\dfrac{m}{s}$ cada, sua área é igual a soma das áreas desses s^2 quadrados, isto é, $m^2 = s^2 \cdot S_Q$, portanto $S_Q = \dfrac{m^2}{s^2} = \left(\dfrac{m}{s}\right)^2 = n^2$.

III. **Para n irracional:** Vamos mostrar que para um quadrado de lado $n \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $S_Q = n^2$.

Considere um quadrado de lado n irracional, apresentado na figura 2.3, e área S_Q. Pela tricotomia dos números reais, sabemos que apenas uma das sentenças abaixo é verdadeira:

a) $S_Q < n^2$.

b) $S_Q = n^2$.

c) $S_Q > n^2$.

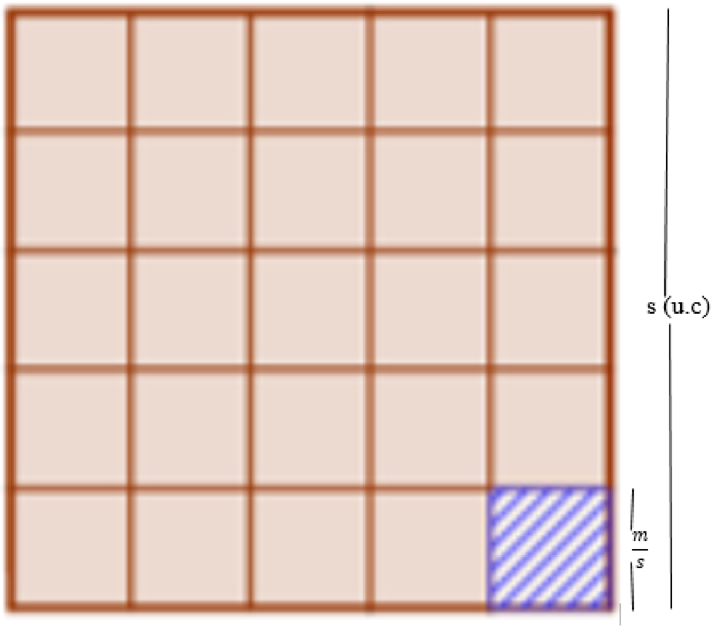

Figura 2.2: Quadrado de lado s dividido em quadrados de lado $\dfrac{m}{s}$.

Vamos mostrar que apenas $S_Q = n^2$ é verdadeira.

Primeiramente, verifiquemos que $S_Q < n^2$ não é verdadeira para todo n irracional. Suponha, por absurdo, que a área S_Q seja menor que n^2. A densidade do conjunto dos racionais em $\mathbb{R}$ garante que existe um m racional tal que $\sqrt{S_Q} < m < n$. Mas isto equivale a dizer que $S_Q < m^2 < n^2$.

Considere agora um quadrado de área $S_{Q'}$ de lado m racional, cuja área já sabemos ser igual a m^2, no interior do quadrado de área S_Q e de lado n.

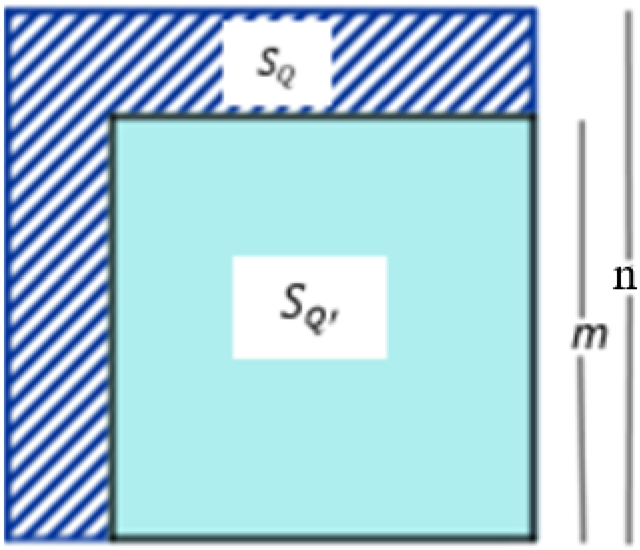

Figura 2.3: Quadrado de lado m (racional), quadrado de lado n (irracional).

Então temos que $S_{Q'} = m^2$ e $S_Q < m^2 < n^2$, ou seja, $S_Q < S_{Q'}$. Mas isto é um absurdo, pois o quadrado da área $S_{Q'}$ está contido no quadrado de área S_Q.

Vamos mostrar que $S_Q > n^2$ também não é uma sentença verdadeira para todo n irracional.

Suponha por absurdo, que a área S_Q seja maior que n^2. A densidade do conjunto dos racionais em $\mathbb{R}$ garante que existe um m racional tal que $\sqrt{S_Q} > m > n$. Mas isto equivale a dizer que $S_Q > m^2 > n^2$.

Considere agora um quadrado de área $S_{Q''}$ e lado m racional, cuja área já sabemos ser igual a m^2, e no seu interior construamos um quadrado de área S_Q e de lado n, de acordo com a figura 2.4.

Então temos que $S_{Q''} = m^2$ e $S_Q > m^2 > n^2$, ou seja, $S_Q > S_{Q''}$. Mas isto é um absurdo, pois o quadrado da área $S_{Q''}$ contém o quadrado de área S_Q. Portanto, $S_Q > n^2$ também é uma sentença falsa.

Assim vimos que a área S_Q de uma quadrado de lado a não pode ser nem maior e nem menor que n^2. Logo podemos concluir que a única possibilidade é que a área S_Q é igual a n^2 para todo n irracional.

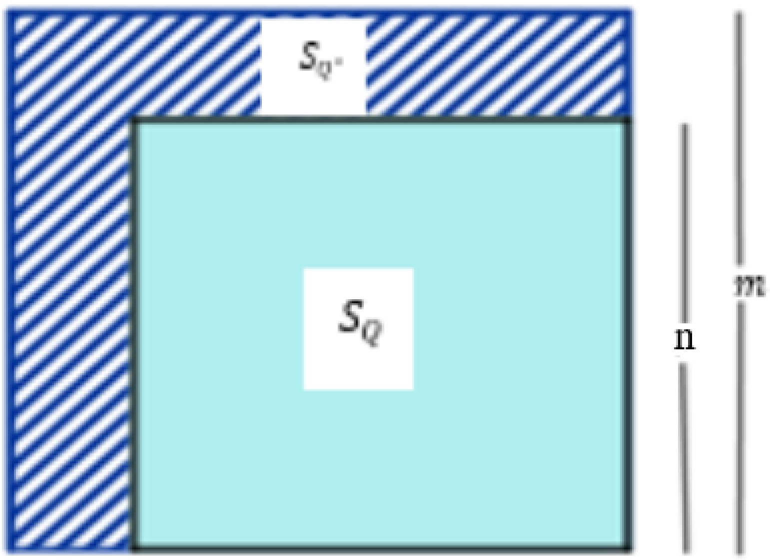

Figura 2.4: Quadrado lado m (racional), que contém o quadrado de lado n (irracional).

Portanto pelos itens I, II e III, concluímos que a área S_Q de um quadrado de lado n, é igual n^2 para todo $n \in \mathbb{R}$. $\square$

Mostraremos agora a relação para área de um retângulo.

Teorema 4. *Consideremos a região R ocupada por um retângulo de base b unidades de comprimento (b $u.c.$) e altura h unidades de comprimento (h $u.c.$), sua área será dada por $S_R = b \cdot h$.*

Demonstração. Construamos um quadrado Q de lado $b+h$ e área S_Q, conforme figura 2.5, formada por duas áreas quadrangulares de lados b e h e áreas S_B e S_H respectivamente, e duas áreas retangulares congruentes de base b, altura h e área S_R. Pelo teorema 3 temos que $S_Q = (b+h)^2 = b^2 + 2bh + h^2$. Por outro lado temos que $S_Q = S_B + S_H + 2 \cdot S_R$. Daí temos que:

$$S_Q = b^2 + 2bh + h^2 = S_B + 2S_R + S_H,$$

portanto

$$2S_R = 2b \cdot h \Leftrightarrow S_R = b \cdot h.$$

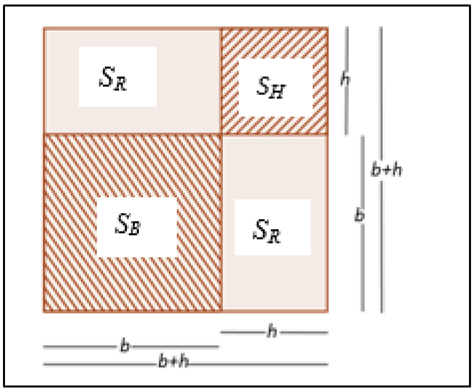

Figura 2.5: Quadrado de lado b+h.

□

Tomando como base a discussão acima, enunciaremos e provaremos o corolário a seguir. Para isso a área de um triângulo ABC será denotada por $S_{(ABC)}$ e a área de um quadrilátero $ABCD$ por $S_{(ABCD)}$.

Corolário 4.1. *Um paralelogramo P de base b e altura h tem área $S_P = b \cdot h$.*

Demonstração. Dado o paralelogramo $ABCD$ da figura 2.6, sejam respectivamente E e F os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $E \in \overline{AB}$. É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso CH (cateto hipotenusa) (NETO,2013), pois $\overline{DE} \equiv \overline{CF}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ logo as áreas $S_{(ADE)} = S_{(BCF)}$. Então temos,

$$S_{(ABCD)} = S_{(ADE)} + S_{(BEDC)} = S_{(BCF)} + S_{(BEDC)} = S_{(EFCD)}.$$

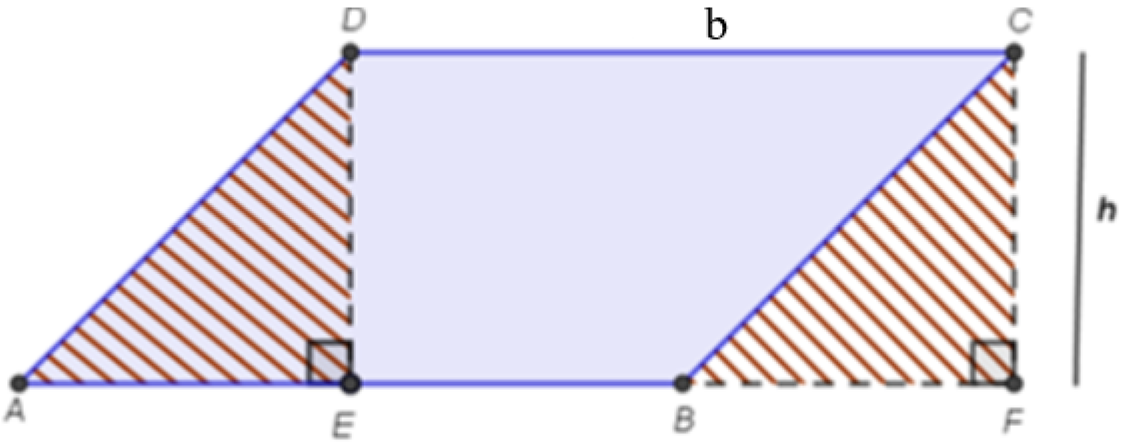

Figura 2.6: Área de um paralelogramo.

Por outro lado, $EFCD$ é um retângulo de altura h e base

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = b.$$

Portanto, pelo teorema 4, $S_{(ABCD)} = S_{(EFCD)} = b \cdot h.$ $\square$

Com base na fórmula acima, da área do paralelogramo, podemos obter a fórmula para a área do triângulo, mediante o que será posto a seguir.

Teorema 5. *Seja ABC um triângulo, de lados $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$ e alturas h_a, h_b, h_c, respectivamente relativas aos lados de medidas a, b, c. Então, $S_{(ABC)} = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{b \cdot h_b}{2} = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$.*

Demonstração. Sejam $S_T = S_{(ABC)}$ e D a interseção da reta paralela a reta $\overleftrightarrow{AC}$ por B com a reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C (figura 2.7). É imediato verificar que $ABCD$ é um paralelogramo de área $2S_T$, uma vez que $ABC \equiv BCD$, pelo caso ângulo, lado, ângulo (ALA), pois os ângulos $B\hat{C}A \equiv C\hat{B}D$, são alternos internos e $A\hat{B}C \equiv B\hat{C}D$, também alternos internos e o lado $\overline{BC}$ é comum. Portanto, $2S_{(ABC)} = 2S_T = b \cdot h_b \Rightarrow S_T = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$, donde segue a segunda igualdade. As outras duas igualdades podem ser obtidas de modo análogo. $\square$

Apresentaremos agora um teorema para o cálculo da área de um polígono regular inscrito no círculo. Lembrando ao caro leitor que circunferência é a linha formada pelo conjunto de todos os pontos equidistantes de um ponto fixado. Já círculo é a superfície compreendida no interior da circunferência, incluindo a mesma.

Teorema 6. *A área S_{P_i} de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio R é $S_{P_i} = \dfrac{R^2 \cdot n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$.*

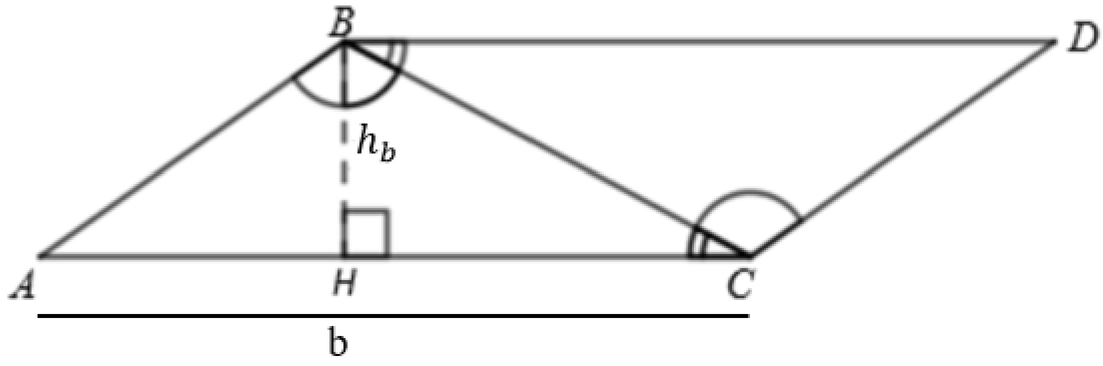

Figura 2.7: Área do triângulo ABC.

Demonstração. Seja O o centro do círculo de raio R dado na figura 2.8. Inscreva neste círculo um polígono de n lados e vértices $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Ligue cada vértice do polígono ao centro O de modo a obter n triângulos isósceles e congruentes, de lado igual ao comprimento R, a base igual ao lado do polígono e ângulo $A_j\hat{O}A_{j+1} = \dfrac{2\pi}{n}, 1 \leq j \leq n$, onde $A_{n+1} = A_1$ por convenção.

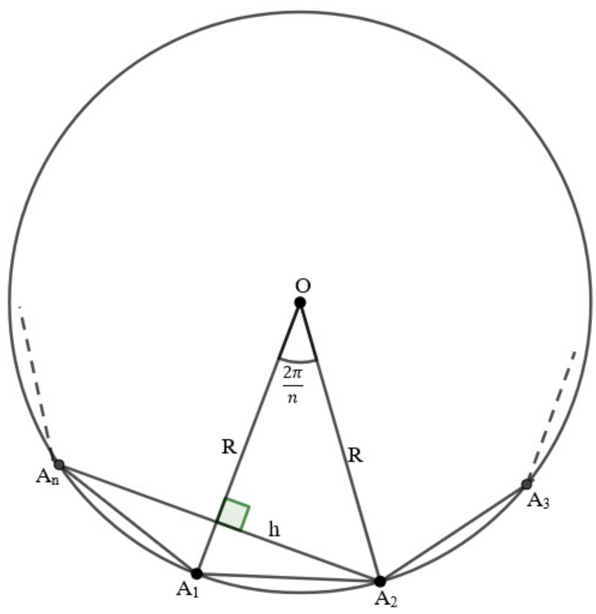

Figura 2.8: Polígono inscrito no círculo.

Construa o triângulo OA_1A_2 de base $\overline{OA_1}$ e altura h partindo de A_2. Usando as relações trigonométricas em triângulos retângulos, temos $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{h}{R} \Leftrightarrow h = R \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$. Pelo teorema 5, temos que $S_{(OA_1A_2)} = \dfrac{R \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} = \dfrac{R^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$. O polígono em questão possui n lados e é formado por n triângulos congruentes. Daí temos:

$$S_{P_i} = n \cdot S_{(OA_1A_2)} = n \cdot \frac{R^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} = \frac{R^2 \cdot n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}.$$

□

Agora vamos apresentar um resultado para área de polígonos regulares circunscritos a um círculo.

Teorema 7. *A área S_{P_c} de um polígono regular convexo de n lados, circunscrito a uma circunferência de raio R é igual a $n \cdot R^2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.*

Demonstração. Seja O o centro da circunferência de raio R inscrita no polígono regular P de n lados e comprimento L, conforme figura 2.9. Os segmentos $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3} = \cdots = \overline{OA_n}$. Ligando cada vértice ao centro O da circunferência teremos n triângulos, todos isósceles, congruentes, de base L e altura h igual ao raio R da circunferência. A área deste triângulo é $S_{(OA_1A_2)} = \dfrac{L \cdot R}{2}$, e como todos os triângulos são congruentes, então a área do polígono P de n lados é

$$S_{P_c} = n \cdot \frac{L \cdot R}{2} = \frac{n}{2} \cdot R \cdot L. \tag{2.1}$$

Observando que o ângulo $H\hat{O}A_2 = \dfrac{\pi}{n}$, então

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{L}{2}}{R} \Leftrightarrow \frac{L}{2} = R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \Leftrightarrow L = 2 \cdot R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.2}$$

Levando a equação (2.2) na equação (2.1) temos:

$$S_{P_c} = \frac{n}{2} \cdot R \cdot 2 \cdot R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = n \cdot R^2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

□

Daremos agora uma prova para o cálculo da área da região ocupada por um círculo. Antes vamos precisar de algumas definições.

Definição 16. *O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Este número sempre é o mesmo para qualquer circunferência, pois todas as circunferências são semelhantes.*

Denotando o comprimento da circunferência por C, o diâmetro por D e raio por R, e sabendo que o comprimento do diâmetro de qualquer circunferência é igual ao comprimento de dois raios, temos que:

$$\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2R} \Leftrightarrow C = 2\pi R.$$

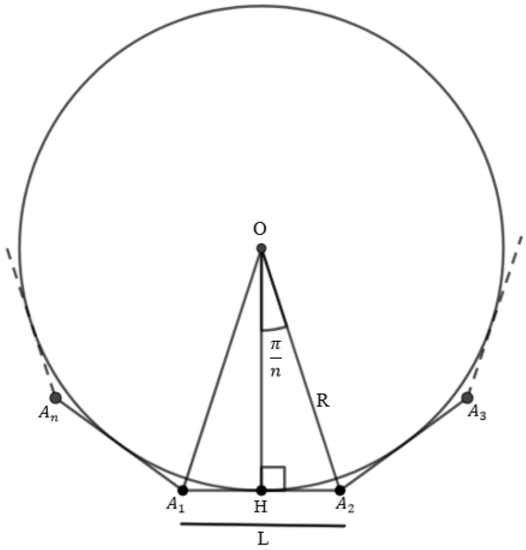

Figura 2.9: Polígono regular inscrito circunscrito.

Definição 17. *Apótema é um segmento que parte do centro de um polígono regular e intersecta o lado oposto no ponto médio, que designaremos por a.*

De posse destas duas definições podemos enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 8. *A área da região ocupada por um círculo de raio R é igual a πR^2.*

Demonstração. Seja λ uma circunferência, figura 2.10, de raio R. Seja P_n um polígono regular de n lados de apótema a, inscrito nesta circunferência, apresentados na figura 2.10. Intuitivamente sabemos que quanto mais aumentarmos o número de lados do polígono regular inscrito na circunferência mais o seu perímetro se aproxima do comprimento da circunferência $2\pi R$ e a área da região por ele ocupada mais se aproxima da região da área ocupada pelo círculo, de tal forma que quando o número de lados do polígono tender ao infinito, a área do polígono tenderá a ser igual a área da circunferência.

Vamos dividir o polígono regular inscrito em n triângulos isósceles, claramente todos congruentes, pelo caso lado, ângulo, lado (LAL), pois dois lados são representados pelo comprimento do raio R da circunferência e o ângulo por eles formado é igual a $\frac{2\pi}{n}$. Calculando a área de um desses triângulos isósceles e multiplicando pelo número de lados n do polígono regular inscrito, teremos então a área desse polígono.

Sejam:

i) l o comprimento do lado do polígono inscrito.

ii) S_P a área do polígono regular inscrito na circunferência.

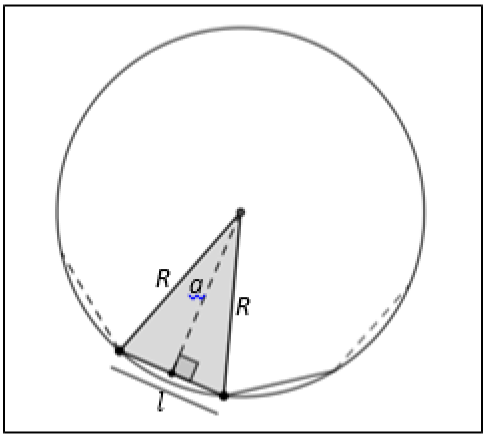

Figura 2.10: Polígono de n lados inscrito na circunferência.

iii) S_c a área da circunferência.

Temos que

$$S_P = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = n \cdot l \cdot \frac{a}{2}.$$

Mas quando n tende ao infinito, $n \cdot l$ tenderá ao comprimento C da circunferência e o comprimento do apótema a tenderá ao seu raio R. Então,

$$S_c = \lim_{n \to \infty} S_P = C \cdot \frac{R}{2} = 2\pi \cdot R \cdot \frac{R}{2} = \pi R^2.$$

$\square$

3 UMA ATIVIDADE PRÁTICA ACERCA DE PROBABILIDADE EM ÁREAS DE FIGURAS PLANAS REGULARES INSCRITAS E CIRCUNSCRITAS

Neste capítulo trataremos de enfocar um breve histórico sobre o jogo de dardos, além de detalhar as atividades práticas, com as aplicações desse jogo, envolvendo a aplicação da probabilidade em áreas do círculo e de figuras planas regulares inscritas ou circunscritas a este. Estas atividades foram executadas em sala de aula, como proposta de inovação da forma tradicional de ensinar. Tais atividades foram executadas, propondo-se uma maneira inovadora de ensinar probabilidade e trazendo a oportunidade de introduzir no ensino médio novas maneiras para aplicação desse conceito. Destacam-se como principais autores deste capítulo: Borin (1996), Agranionih & Smaniotto (2002), Grando (2004), Mello *et al* (2006) e Camargo (2009).

3.1 BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE O HISTÓRICO DO JOGO DE DARDOS

Na Antiguidade, como consequência das guerras e da caça, surgiram as primeiras ideias da prova do lançamento do dardo, que, de acordo com os fatos históricos sobre sua origem, surgiu na Inglaterra e há relatos que os soldados quando se encontravam entediados, apanhavam suas lanças e tentavam por diversas vezes acertar um alvo predeterminado, como objetivo principal. A primeira prova como modalidade de esportes ocorrida envolvendo o lançamento do dardo foi disputada, pela primeira vez, nos Jogos Olímpicos de Londres em 1908.

Figura 3.1: Alvo e dardos, modelo tradicional. Fonte: Portal São Francisco, 2017.

Para o lançamento de dardos na prática do jogo, o objetivo é acertar um alvo composto por círculo concêntricos, considerando que quanto mais as tentativas se direcionam ao centro do alvo, mais o grau de dificuldade é aumentado. Neste sentido, as regras gerais do jogo de dardo tradicional compreendem que:

- A altura do alvo é medida pelo centro desse alvo. Ele deve ficar a $1,73\ m$ do chão;
- A distância para o arremesso é de $2,37m$ do alvo, especificado por uma linha feita no chão;
- Os pés do jogador devem ficar atrás da linha feita no chão a cada jogada, que é composta de três arremessos. Se o dardo cair do alvo antes do jogador buscá-lo, seus pontos não são computados.

Existe uma forma correta de posicionar o braço com a finalidade de realizar o lançamento, conforme será descrito no decorrer do experimento. Essa descrição sobre os dardos foi necessária para que o experimento fosse melhor compreendido.

3.2 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE PRÁTICA

Analisando a relevância de adequação a alunos com diferentes interesses e capacidades, os jogos oferecem oportunidades para se ensinar Matemática de forma eficiente e dinâmica. O jogo cria situações surpreendentes, envolve investigação, hipóteses e desenvolve habilidades de raciocínio lógico. A proposta desenvolvida neste trabalho compreende formas práticas para a compreensão de linguagens relacionadas à probabilidade e formas de interpretá-la. Ao trabalhar tal proposta, recomenda-se que seja utilizada por professores de matemática, como forma de inovação/desafio, no espaço da sala de aula como estímulo à aprendizagem dos alunos.

O lançamento de dardos foi realizado por um total de 22 alunos, os quais compõem a turma do $2^{\underline{o}}$ ano do ensino médio, da Escola Estadual Deputado Quintino Vargas, escola situada na cidade de Pirapora, localizada no norte de Minas Gerais, a qual está envolvida no experimento. Utilizou-se como padrão de distância para o lançamento de dardos, 3 e 5 metros. Os alunos participantes foram divididos em dois grupos: os que praticam basquete e handebol e os que não praticam nenhum destes dois esportes. Houve essa divisão com o objetivo de observar se o fato de o aluno participar desses dois esportes de arremesso, poderia influenciar em maiores acertos no lançamento de dardos. Com a finalidade de observar a habilidade de cada arremessador, houve lançamento de duas formas diferentes para cada um destes jogadores: de olhos fechados e de olhos abertos, ou seja, sem mira e com mira.

3.3 PLANO DE EXECUÇÃO EM SALA DE AULA

O plano de execução, descrito a seguir, foi aplicado para os alunos do segundo ano do Ensino Médio da Escola Estadual Deputado Quintino Vargas. O ano da pesquisa compreendeu o decorrer de 2017.

- Foi apresentada a "teoria da probabilidade" direcionando ao entendimento conceitual para que ficasse claro ao aluno a ligação desse conceito à atividade prática;
- Realizou-se atividades práticas envolvendo cálculos da área do círculo e das figuras planas regulares mais conhecidas: triângulo equilátero, quadrado e hexágono;
- Foi montado um painel onde foram inseridas figuras regulares inscritas ou circunscritas, que foram utilizadas para a realização dos cálculos;
- Em seguida realizou-se atividades de lançar os dardos com o objetivo de acertar determinada área escolhida previamente;
- Realizou-se cálculos para determinar a frequência de acertos na área pré-estabelecida.

3.3.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE DE LANÇAMENTO DE DARDOS

O objetivo da atividade foi calcular a frequência de acertos do dardo em uma determinada área da figura, estabelecida previamente, tomando-se as seguintes figuras planas regulares mais conhecidas: triângulo equilátero, quadrado e hexágono.

Inicialmente, para uma maior familiaridade com as figuras, os alunos fizeram algumas dessas no software *GeoGebra*, onde puderam observar os resultados das áreas calculadas pelo software e puderam conferir as respostas efetuando os cálculos das mesmas, tanto dos círculos como de cada polígono a ele relacionado, inscrito ou circunscrito. Nas figuras 3.2, 3.3, 3.4, apresentamos as figuras que foram utilizadas nas atividades de lançamento de dardos, um quadrado de $32\,cm$ de lado, circunscrito a um círculo de lado $16\,cm$, um triângulo equilátero de lado medindo $40\,cm$ inscrito em um círculo de raio igual a $20\sqrt{3}\,cm$ e um hexágono regular com os lados medindo $22\,cm$ de comprimento circunscrito a um círculo de raio com comprimento igual ao lado do hexágono.

Todas as figuras foram desenhadas em cartolinas e coladas em um isopor de dimensões $50 \times 50\,cm$. Em cada figura aproveitamos para rever os cálculos das áreas do círculo, do polígono e a área restante, quando subtraída a área da figura inscrita da circunscrita.

Inicialmente a área a ser alvejada compreendeu a área da figura inscrita. Foram feitos vários arremessos, sem nenhuma contagem, apenas a título de reconhecimento do material

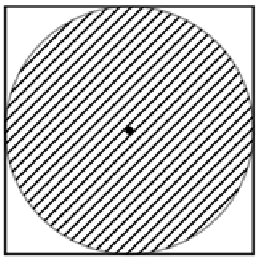

Figura 3.2: Quadrado inscrito e circunscrito a um círculo.

Figura 3.3: Triângulo equilátero inscrito em um círculo.

utilizado, já que todo o material foi confeccionado pelos próprios alunos, nenhum material tinha cunho profissional, conforme descreveremos mais adiante.

Com objetivo de tornar o arremesso do dardo mais atraente e aumentar o grau de dificuldade da “brincadeira”, escolhemos as áreas que restaram do polígono ou do círculo, exterior ao retirar a área da figura inscrita.

Após a construção das figuras geométricas pelos alunos (figuras 3.2, 3.3 e 3.4), com o auxílio do professor, procedeu-se às seguintes fases de trabalho:

- Confecção de 11 dardos;
- Colagem das figuras em isopor;
- Escolha de 22 alunos, sem distinção de gênero, sendo:
    - 11 alunos que praticam handebol e basquete;
    - 11 alunos que não praticam nenhum desses dois esportes, escolhidos de modo aleatório.

No primeiro experimento, em que os alunos estavam com olhos abertos e fazendo mira, houve a oportunidade de 25 arremessos para cada aluno, num total de 275 arremessos para o grupo dos que jogam handebol e basquetebol e a mesma quantidade para os que não praticam nenhum dos dois esportes. Mesmo depois dos alunos terem feito um reconhecimento do

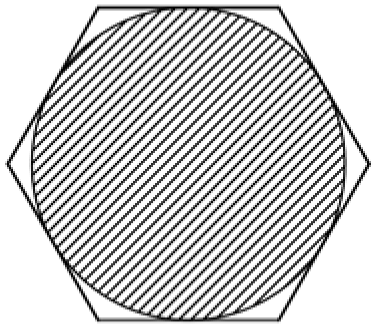

Figura 3.4: Hexágono circunscrito a um círculo.

material com vários arremessos, ainda assim notei dificuldades em encontrar uma forma mais adequada para os arremessos.

No segundo momento, ainda com olhos abertos e fazendo mira, mas agora já sob a orientação de que os arremessos poderiam ter um melhor aproveitamento, com a técnica correta, que é fazer com que o braço descreva um movimento de forma parabólica para lançar os dardos, tivemos um maior número de acertos por parte dos dois grupos. Nesta etapa cada aluno realizou mais 20 lançamentos, totalizando 220 lançamentos para cada grupo. Apesar da resistência de alguns, a maioria prontamente aceitou a ideia que deve haver mesmo uma técnica correta para o lançamento dos dardos. Mas esta discussão parou por aí, porque fugia o objetivo do nosso estudo. Para todos os lançamentos foram observadas, como mostra a tabela 3.1, as distâncias de 3 e 5 metros do alvo, sendo que o mesmo se encontrava a uma altura aproximada de 2 metros do solo.

Alunos	3 metros		5 metros	
	Acertos	Erros	Acertos	Erros
A	22	473	5	490
B	127	368	12	483

Tabela 3.1: Lançamento de dardo com mira, para o quadrado inscrito no círculo (olhos abertos).

Denomina-se para efeito de análise de dados sobre os grupos de alunos:

- A: alunos que não praticam basquete e handebol;
- B: alunos que praticam as duas modalidades de esporte.

O outro desafio proposto agora, sob as mesmas condições de distância e altura do alvo, era fazer os lançamentos sem mira, isto é, com olhos fechados. Também serviu apenas como um desafio e uma forma de incrementar e aguçar mais a curiosidade do aluno para o novo desafio. Nesta etapa, apesar deles estarem mais “treinados” com os dardos, notamos pela tabela 3.2, que os resultados não foram nada animadores, se fosse para uma disputa de campeonato. Como não era esta a nossa intenção, seguiu-se com os experimentos. Foram oportunizados também 495 lançamentos para cada grupo, com 45 oportunidade para cada aluno, como fora também na etapa anterior.

Alunos	3 metros		5 metros	
	Acertos	Erros	Acertos	Erros
A	0	495	0	495
B	5	490	0	495

Tabela 3.2: Lançamento de dardo sem mira, para quadrado inscrito no círculo (olho fechado).

Na tabela 3.2, podemos verificar que o nível de aproveitamento, sem mira, foi muito baixo, mas também como não tinha nenhum parâmetro, ficamos satisfeitos com os resultados. Vimos por essa tabela, para os arremessos de $3m$ e $5m$, para o grupo de alunos que não praticam handebol e basquetebol, que não houve nenhum acerto. Já o grupo de alunos que praticam handebol e basquetebol, para os arremessos de 3 metros houveram 5 acertos, enquanto para os arremessos de $5m$, não houve nenhum acerto

As tabelas 3.1 e 3.2 anteriores, mostram o desempenho de cada grupo, onde podemos notar uma boa vantagem a favor do grupo que pratica handebol e basquetebol. Observamos que por se tratar de esportes que necessitam de uma certa pontaria e habilidades com as mãos, ao que parece, facilitou o lançamento dos dardos e consequente maior número de acertos. Pude observar que dentre aqueles alunos que ao arremessar o dardo, e faziam o movimento numa forma de parábola também tiveram maior desempenho, à frente daqueles que não tinham desenvolvido tal movimento. Para fins de registros, todos, em seus lançamentos, fizeram lançamentos com movimentos que imitavam um arco parabólico.

Esta atividade trouxe significativa contribuição pedagógica para o aprendizado dos alunos, visto que eles se interessaram muito em participar. Estavam sempre disponíveis para confeccionar os desenhos, fazer os cálculos e praticar os lançamentos, haja vista que para isto, tínhamos aulas no pátio. Todos os desenhos foram feitos em cartolina, e colados em placas de isopor. Além disso, fizemos os mesmos desenhos no *software GeoGebra* , uma oportunidade muito útil para observarmos melhor outras habilidades dos alunos. Foi um processo muito interessante, pois não sabíamos quase nada do software. Tínhamos alunos que não sabiam ligar o computador ou manusear os periféricos. A realização dos desenhos também foi um outro grande desafio, mas de um rico aprendizado para todos.

Depois de estarmos mais familiarizados com a ferramenta, fomos executar os cálculos, para verificarmos se coincidiam ou aproximavam das respostas dadas pelo *software GeoGebra*. Todo estudo foi feito com figuras regulares planas inscritas e/ou circunscritas a círculos.

Como prática para consolidação dos conhecimentos das probabilidades em áreas de figuras planas regulares, foram confeccionados, em cartolinas, um quadrado com lado medindo aproximadamente $32\,cm$ inscrito a uma circunferência de raio $16\sqrt{2}\,cm$ e circunscrito a uma circunferência de raio $16\,cm$, como mostra a figura 3.5, colada em uma placa de isopor quadrada de $50\,cm$ de lado.

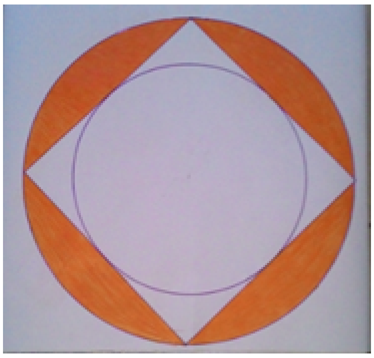

Figura 3.5: Quadrado inscrito no círculo.

Foram construídos também nos mesmos materiais, um hexágono com lado medindo $22\,cm$, circunscrito ao círculo de raio igual a $11\sqrt{3}\,cm$ e um triângulo equilátero com o comprimento do lado igual $40\,cm$, inscrito no círculo de raio igual a $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\,cm$ conforme figuras 3.6 e 3.7.

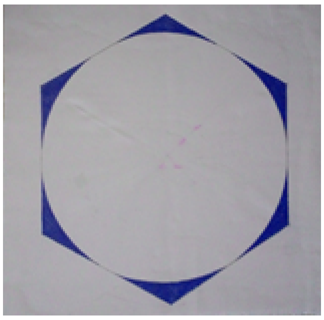

Figura 3.6: Hexágono circunscrito ao círculo.

Calcularam também as áreas remanescentes das figuras circunscritas, após a retirada da figura inscrita. As áreas foram coloridas com cores diferentes para que ficassem bem destacadas uma das outras.

Todos os alunos fizeram os cálculos das áreas dos círculos e dos polígonos neles inscritos ou circunscritos e aqui vamos apresentar apenas os cálculos da figuras 3.6 e 3.7.

Na figura 3.6, temos um hexágono circunscrito de lado $L = 22\,cm$ e círculo de raio igual a $11\sqrt{3}\,cm$. O hexágono possui área igual a:

$$S_H = \frac{3(L)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot(22)^2\sqrt{3}}{2} = 726\sqrt{3}\,cm^2.$$

Figura 3.7: Triângulo equilátero inscrito no círculo.

A área do círculo é dada por:

$$S_C = \pi R^2 = \pi(11\sqrt{3})^2 = 363\pi\, cm^2.$$

A figura 3.7 apresenta um triângulo equilátero de lado $l = 40\, cm$ inscrito num círculo de raio $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\, cm$. A área do triângulo equilátero inscrito é:

$$S_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{40^2\sqrt{3}}{4} = 400\sqrt{3}\, cm^2.$$

A área do círculo é igual a:

$$S_C = \pi R^2 = \pi\left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1600\pi}{3}\, cm^2.$$

O dardo, que pode ser visto na figura 3.8, foi construído pelos próprios alunos. Os dardos foram feitos com um prego no centro e três palitos de churrasco, que circundavam o mesmo, amarrados com barbante e colados com cola quente, envolvidos por fita adesiva para tornar mais macio e fácil de manusear. Como sugestão de um aluno, em seus topos foram colocados um pedaço de papel cartão em formato de uma pirâmide de base quadrada, para maior estabilidade durante a trajetória do arremesso até o alvo. As atividades de arremesso do dardo tinham apenas o aspecto lúdico, como um incentivador para a discussão do conteúdo “probabilidade” e não se tratava de nenhuma competição.

Inicialmente, durante os primeiros arremessos, os alunos nem sequer acertavam o alvo. Depois dos treinos, que não foram contados para efeito de composição das tabelas, os resultados melhoraram, aí então fizemos a contagem para os dois grupos.

Figura 3.8: Modelo de dardo utilizado no experimento.

Pelo exposto nas tabelas 3.1 e 3.2, pudemos então criar um parâmetro F (frequência) para designar a razão entre o número de arremessos em que acertaram o alvo e o número de arremessos feitos pelos alunos desta turma. Para os lançamentos efetuados a distância de 3 metros com olhos abertos, foram 22 acertos para 495 arremessos do grupo A, o que dá a razão: $F_{3A} = \dfrac{22}{495} \approx 0,044$ ou $4,4\%$. Para a razão do número de acertos pelo número de arremessos no quadrado inscrito com mira, a 5 metros do alvo, dos alunos que não praticam basquetebol e handebol, a frequência será dada por $F_{5A} = \dfrac{5}{495} \approx 0,010$ ou $1,0\%$. Para os alunos que praticam o handebol e o basquetebol, os resultados são melhores.

Aqui designaremos a razão entre o número de acertos e números de arremessos também por F, onde F_{3B}, representa a razão entre o número de acertos e o número de arremessos a 3 metros e F_{5B}, para arremessos a 5 metros, dos alunos do grupo B. Então de acordo com a tabela 3.1, temos que: F_{3B}=$\dfrac{127}{495} \approx 0,257$ ou $25,7\%$ e F_{5B} = $\dfrac{12}{495} \approx 0,024$ ou $2,4\%$. Para os arremessos sem mira, com olhos fechados, não houve acertos quando o alvo estava a 5 metros de distância. Já para os arremessos a 3 metros do alvo, houveram 5 acertos, em 495, então $F_{3B} = \dfrac{5}{495} \approx 0,010$ ou $1,0\%$. Observe que este valor é o mesmo para os alunos do grupo A, para os arremessos a uma distância de 5 metros com olhos abertos.

Dentre as figuras que foram utilizadas no experimento, escolhemos apresentar os cálculos dos resultados do quadrado inscrito. O quadrado foi desenhado com lado medindo $32cm$ e a circunferência com raio igual a $16\sqrt{2}cm$, em um isopor quadrado de lado $50cm$. Tomando o modelo de probabilidade geométrica como base de comparação, onde o espaço amostral seria a região dada pelo isopor a probabilidade de se escolher um ponto compreendido entre o círculo e o quadrado é dada pela seguinte probabilidade geométrica:

$$P = \frac{\pi(16\sqrt{2})^2 - 32^2}{50^2} \approx 0,234$$

ou seja, $23,4\%$ de chance de acertar o alvo.

Analisando, as razões das frequências obtidas pelos dados das tabelas 3.1 e 3.2 e a probabilidade calculada de atingirem o alvo, vimos que a probabilidade, analisando somente os dados fornecidos pelos cálculos, os alunos não tiveram uma boa pontaria. Mas o mais relevante, na minha concepção de educador regente foi o entusiamo com que os alunos desenvolveram as atividades, e construíram os seus conhecimentos acerca das figuras geométricas planas e a probabilidade geométrica.

4 Conclusão

A proposta desenvolvida neste trabalho compreende formas práticas, utilização do jogo de dardos, para a compreensão de linguagens relacionadas à probabilidade e formas de interpretá-la. Ao trabalhar tal proposta, recomenda-se que seja utilizada por professores de matemática, como forma de inovação/desafio, no espaço da sala de aula como estímulo à aprendizagem dos alunos.

No decorrer da realização dos jogos, constatou-se que os alunos se interessaram em resolver as atividades propostas, observando-se que participavam mais ativamente das tarefas propostas e se interessavam mais do que naquelas atividades que se utilizava o método tradicional.

Durante a atividade, os alunos se comunicavam uns com os outros, através de conversas, no entanto se torna necessário, por se tratar da interpretação do jogo ou até mesmo comemoração pelo acerto; Por isso é indispensável que as regras sejam definidas entre o professor e os alunos, como também definir os objetivos que se deve atingir com a realização daquela tarefa.

O trabalho se desenvolveu com uma turma de $2^{\underline{o}}$ ano do ensino médio, onde houve adaptações das regras do jogo de dardos, de forma que o acerto era pontuado ao alvejar a área correspondente à figura inscrita e não ao alvejar círculos concêntricos cada vez menores como ocorre no jogo tradicional. Nesse contexto sugerimos que ao se recriar essa experiência, para melhor desempenho dos alunos, considere os seguintes sugestões: Diminuir a distância entre o arremessador e o alvo, aumentar o tamanho das figuras e do isopor onde as figuras serão afixadas.

Apesar de serem sugeridas adaptações para experimentos futuros, é válido ressaltar que, as atividades realizadas envolvendo o jogo de dardos como ferramenta ao estudo da probabilidade é um instrumento eficaz, pois melhora a aprendizagem dos estudantes tanto quantitativamente como qualitativamente.

Bibliografia

[1] AGRANIONIH, N. T.; SMANIOTTO, M. *Jogos e aprendizagem matemática:* uma interação possível. Erechim: Ed. FAPES, 2002.

[2] ÁVILA, G. S. S. *Análise matemática para licenciatura*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

[3] BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1995.

[4] BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas:* uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 1996.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Ensino de 5^a a 8^a Séries. Brasília-DF: MEC/SEF, 2000. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>.

[6] CAMARGO, M.S.R. K. *O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento*. Comunicação Científica apresentada de 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS no X Encontro Gaúcho de Educação Matemática (X EGEM). Disponível em:<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica$/cd_egem/$fscommand $/CC/CC_4$.pdf>. Acesso em: 05 de mai. 2013.

[7] CRAMÉR, H. *Elementos da teoria da probabilidade e algumas de suas aplicações*. São Paulo: Ed. Mestre Jou, 1955.

[8] DANTAS, C. A. B. *Probabilidade:* um curso introdutório. 3. ed. São Paulo: Ed. Universidade de São Paulo, 2008.

[9] FERREIRA, F. *Teoria dos conjuntos*: uma vista. Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática 38, p. $29-47$, 1998.

[10] FILHO, J M B. *Áreas dos principais polígonos e do círculo:* uma ferramenta para o ensino da matemática básica. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, Mestrado Profissional em Rede Nacional-PROFMAT, 128 p. 2017.

[11] FLOR, R. P. *Um estudo sobre a teoria das probabilidades discretas:* contribuição para a formação continuada de professores. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Mestrado Profissional em Rede Nacional-PROFMAT, 64 p. 2014.

[12] GRANDO, R. C. *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. São Paulo: Paulus, 2004.

[13] JAMES, B. R. *Probabilidade:* um curso em nível intermediário. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[14] LIMA, E. L. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[15] MELLO, V.M.C et al. *Jogos lógicos*. Lorena – SP: Outubro de 2006.

[16] MONTEIRO, A.; POMPEU Jr., G. *A matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001.

[17] MORGADO, A. C. O. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. Disponível em: <matematica.obmep.org.br/uploads/msg/5fpwf84eez8c0.pdf>. Acesso em: 15 de ago. 2017.

[18] MOURA, M. O. *A séria busca no jogo:* do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, Tizuko Morchida. (org). Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2006. p. 73-87.

[19] MOURA, M. O. *O jogo e a construção do conhecimento matemático*. Série Idéias n. 10, São Paulo: FDE, 1992. p. 45-53. Disponível em:<http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias-Acesso em: 03 de jul. 2013.

[20] NETO, A.C.M. *Tópicos de matemática elementar:* geometria euclidiana plana. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012, v.2,432 p.

[21] Portal São Francisco, *Regras do Jogo de Dardos*. Disponível em: <www.portalsaofrancisco.com.br › Esportes>. Acesso em: 04 de jul. 2013.

[22] RIBEIRO, J. *Matemática, ciência e linguagem*. Volume 2, Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2010.

[23] SILVA, B.A.; PENTEADO, C.B. *Fundamentos dos números reais:* concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio. Educ. Matem. São Paulo, v.11, n.2, p.351-371, 2009.

[24] SILVA, M. S. *Clube de matemática:* jogos educativos. 2.ed. Campinas, SP: Papirus, 2005.

[25] SILVA, F.H. *Discutindo probabilidade geométrica no ensino médio*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural do Semiárido, Programa de Mestrado Profissional em Matemática, 42p. Mossoró, 2013. Disponível em: <bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/251>. Acesso em: 04 de dez. 2017.

[26] WAGNER, E. *Áreas de figuras planas, área e comprimento de um círculo*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=115pJJiDBT4>. Acesso em: 22 de jan. 2018.