



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

**A aplicação do Número de Ouro como Recurso
Metodológico no Processo de Ensino-aprendizagem**

Pablo Roberto de Sousa Neto

Teresina - 2013

Pablo Roberto de Sousa Neto

Dissertação de Mestrado:

**A aplicação do Número de Ouro como Recurso Metodológico no
Processo de Ensino-aprendizagem**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2013

Pablo Roberto de Sousa Neto

Dissertação de Mestrado:

**A aplicação do Número de Ouro como Recurso Metodológico no
Processo de Ensino-aprendizagem**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina/PI, ____/ ____/ _____

Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa (UFPI) Orientador

Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite (UFPI) Examinador

Dr. Roberto Arruda Lima Soares (IFPI) Examinador

S725a Sousa Neto, Pablo Roberto de.

A Aplicação do Número de Ouro como Recurso
Metodológico no Processo de Ensino-Aprendizagem / Pablo
Roberto de Sousa Neto. - 2013.

109.:il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade
Federal do Piauí, Teresina, 2013.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

1. Razão Áurea. I.Título

CDD 512.924

*Dedico esse trabalho aos meus dois maiores tesouros:
minha esposa Natália e minha filha Nátally.*

Agradecimentos

A Deus, fonte única de sabedoria.

A minha esposa Natália, pela paciência e grande incentivo para que eu alcançasse mais essa etapa de conhecimento na vida

A minha filha Nátally, pois tudo que faço tem o sentido maior de lhe proporcionar felicidade, onde a educação e o conhecimento levam-me a garantir-lhe o máximo em toda sua preciosa vida.

A minha mãe Lenira (in memorian), pois sinto sempre a sua presença espiritual me dando forças pra sempre seguir em frente, ultrapassando todas as barreiras que são postas.

Ao meu orientador Paulo Alexandre, pois sua competência me incentivou a construir novos caminhos, sendo este apenas mais um.

“O último passo da razão é reconhecer a existência de uma infinidade de coisas que a ultrapassam ”.

Blaise Pascal.

Lista de Figuras

2.1	Razão Áurea por Euclides de Alexandria	21
2.2	Retângulo áureo	23
2.3	Operação de “suprimir quadrados” indefinidamente	24
2.4	Espiral logarítmica	26
2.5	<i>Spira mirabilis</i> : forma paramétrica	27
2.6	Principal característica da espiral logarítmica	27
2.7	Espiral de ouro parte 01 (2.7a) e Espiral de ouro parte 02 (2.7b)	27
2.8	Espiral de ouro parte 03	28
2.9	Espiral de Arquimedes	28
2.10	Espiral de Fermat	29
2.11	Espiral hiperbólica	30
2.12	Espiral de lituus	30
2.13	Pentagrama regular	33
2.14	Símbolo estrelado da Irmandade Pitagórica	33
2.15	Pentágono regular dividido em triângulos	34
2.16	Descrição dos elementos do pentágono/pentagrama regular	34
2.17	Leonardo de Pisa (Fibonacci)	36
2.18	Sequência dos filhotes de coelhos	37
2.19	Árvore genealógica das abelhas	40
2.20	Gráfico da Sequência de Fibonacci	43
2.21	Sequência dos lados do quadrado	43
3.1	O Nascimento de Vênus	47
3.2	O Sacramento da Última Ceia	48
3.3	A Mona Lisa	48

3.4	Tabuleiro com cores claras de Piet Mondrian	49
3.5	Beleza estética: a orelha perfeita	50
3.6	Representação do homem por Da Vinci	50
3.7	Arcada dentária superior	51
3.8	O Parthenon	52
3.9	A pirâmide egípcia	52
3.10	O Papiro de Ahmes	53
3.11	A Pirâmide de Gizé	54
3.12	O Modulor de Le Corbusier	54
3.13	O chapel de Notre Dame du Haut	54
3.14	A sede da ONU	55
3.15	Sementes de girassol	56
3.16	Arranjo de folhas	56
3.17	Padrão angular de folhas em torno do caule	57
3.18	<i>Achillea ptarmica</i>	57
3.19	Conchas dos náutilus	58
3.20	Falcão peregrino	58
3.21	Violino	60
3.22	O Pentagrama	60
3.23	Proporção áurea utilizada na tecnologia	62
4.1	Aproveitamento dos conteúdos da turma A na aula tradicional	68
4.2	Aproveitamento dos conteúdos da turma B na aula tradicional	68
4.3	Aproveitamento dos conteúdos da turma C na aula tradicional	69
4.4	Aproveitamento dos conteúdos da turma A na aula oficina/prática	74
4.5	Aproveitamento dos conteúdos da turma B na aula oficina/prática	75
4.6	Aproveitamento dos conteúdos da turma C na aula oficina/prática	75
4.7	Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 01	76
4.8	Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 02	77
4.9	Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 03	78
4.10	Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 04	78
4.11	Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 05	79
4.12	Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 06	80

Lista de Tabelas

2.1	Totalização do problema dos coelhos nos 12 meses	38
2.2	Número de abelhas por geração	41
2.3	Quocientes entre sucessores e antecessores da sequência de Fibonacci	41

Resumo

No processo de ensino-aprendizagem, uma questão relevante, que merece atenção, é a relação entre a teoria e a prática dos conteúdos dados nas diferentes disciplinas exigidas pelo currículo de nível médio. Neste contexto, procedeu-se na evidência da inter-relação entre o método de ensino e sua aplicabilidade no meio social, assim como a descrição e articulação da prática docente. A matemática, em especial, nota-se, pela sua complexidade e exatidão. Verifica-se que, no decorrer do percurso escolar, muitos educandos demonstram dificuldades não somente no aprendizado, mas principalmente, na ligação do conteúdo teórico com a sua função prática no cotidiano. Para tanto, a metodologia consistiu na busca de evidências das quais autores como Barbosa (1999); Soares (1998); Colello (2012); Libâneo (1994), dentre outros, subsidiaram, mostrando claramente a necessidade de implementação de mudanças nos métodos educacionais. Destacando a importância da utilização de novos recursos metodológicos através da aplicação do Número de Ouro, tendo o método de oficina/prática como sendo um fator essencial para a agilidade da prática docente, na qual a figura do professor é fundamental para obtenção de uma nova metodologia de ensino, buscou-se confrontar o método intitulado “aula tradicional” com outro intitulado “oficinas/práticas”, ambos utilizando o “Número de Ouro”. Apresentou-se o contexto histórico, definição e aplicação da Razão Áurea, retângulo áureo, espirais áureas, pentagramas de ouro e a Sequência de Fibonacci, bem como, conteúdos relacionados ao processo de ensino-aprendizagem, contextualizando as dificuldades dos educandos na aquisição dos conteúdos com relação à disciplina Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - IFMA, Campus Timon/MA.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino-Aprendizagem. Matemática. Razão Áurea.

Abstract

In the process of teaching and learning, an issue that deserves attention is the relationship between the theory and practice of content data in different disciplines required by the curriculum level. In this context, we proceeded on the evidence of the interrelationship between teaching method and its applicability in the social environment, as well as the description and articulation of teaching practice. Mathematics in particular is noted for their complexity and accuracy. It appears that, during the school careers, many students experience difficulties not only in learning, but mainly in connection with the theoretical content of their practical function in everyday life. Therefore, the methodology consisted in search of evidence of which authors like Barbosa (1999), Soares (1998); Colello (2012); Libâneo (1994), among others, subsidized, clearly showing the need to implement changes in educational methods . Highlighting the importance of using new methodological resources through the application of the Golden Mean, and the method of workshop/practice as an essential factor for the agility of teaching practice, in which the figure of the teacher is crucial for obtaining a new methodology education, we sought to compare the method titled “traditional classroom” with another titled “workshops/practices”, both using the “Golden Number”. Presented the historical context, definition and application of the Golden Ratio, golden rectangle, spiral aureus, golden pentagrams and the Fibonacci Sequence as well as content related to the process of teaching and learning, contextualizing students’ difficulties with the acquisition of content relation to the discipline of mathematics Federal Institute of Education, Science and Technology of Maranhão - IFMA, Campus Timon / MA.

KEYWORDS: Teaching and Learning. Mathematics. Golden Ratio.

Sumário

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
1 O Processo De Ensino-Aprendizagem	3
1.1 Contextualização	3
1.2 A aprendizagem	5
1.3 A aprendizagem significativa	8
1.4 O ensino da matemática	14
1.5 As dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da matemática	16
2 O Número de Ouro	20
2.1 Contexto histórico	20
2.2 A razão áurea	21
2.3 O retângulo áureo	22
2.4 Espirais áureas	26
2.5 O pentágono/pentagrama regular	30
2.6 A sequência de Fibonacci	36
2.7 Duas outras formas matemáticas de encontrar o número de ouro	44
3 Aplicações do Número de Ouro	47
3.1 Na arte	47
3.2 No corpo humano	49

Sumário	x
3.3 Na literatura	51
3.4 Na arquitetura	51
3.5 Na natureza	55
3.6 Na música	59
3.7 Na religião e misticismo	60
3.8 Na tecnologia	62
4 Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula	63
4.1 Campo da pesquisa	63
4.2 Resultados e Discussão	76
4.3 Conclusão	81
Referências Bibliográficas	84
Apêndices	88

Introdução

No processo de ensino aprendizagem, uma questão relevante é a relação entre a teoria e prática dos conteúdos dados nas diferentes disciplinas exigidas pelo currículo. A matemática, em especial, nota-se, pela sua complexidade e exatidão. Verifica-se que, no decorrer do percurso escolar, muitos alunos têm dificuldade não somente no aprendizado, mas também, muitas vezes não assimilam o seu conteúdo teórico e a sua função no dia-a-dia.

A Matemática, portanto, é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. Nesse sentido, é importante encontrar recursos e fornecê-los aos educandos com o objetivo de contracenar a teoria com a prática, possibilitando não somente o prazer de aprender, mas promover a reflexão na medida em que a relação entre a teoria acumulada e o aprendiz é atravessada por um elemento fundamental, nem sempre facilmente percebida pelo professor.

O trabalho do docente necessita ter por alicerce não somente a teoria, mas também a prática, como recurso inovador, motivador e satisfatório, onde se admita o envolvimento direto do aluno, sendo ele um agente ativo na construção do processo de ensino-aprendizagem.

O foco do trabalho concentrou-se em apresentar o contexto histórico do “Número de Ouro” e a utilização da Sequência de Fibonacci; Apresentar conteúdo relacionado ao processo de ensino-aprendizagem e contextualizar as dificuldades dos alunos na apreensão da disciplina Matemática.

A pesquisa adotou um estudo do tipo explicativo, tendo o papel principal de estabelecer uma visão geral das relações que envolvem o problema proposto, qual seja a aplicação com relação ao número de ouro como recurso facilitador no processo de ensino-aprendizagem da matemática, oferecendo os entendimentos acerca do tema, assim como contextualizá-lo, considerando-o como exemplo maior da perfeição, sua história e aplicação nas artes,

ciências, arquitetura, religião e natureza.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos intitulados, respectivamente, “O processo de ensino aprendizagem”, que trata de uma nova construção da educação na sociedade da informação; “O número de ouro”, trata-se dos seus conceitos como um número irracional que surge com bastante frequência na natureza em forma de razão; “Aplicações do número de ouro” que aponta sobre o homem que sempre tentou alcançar a perfeição, seja nas pinturas, nos projetos arquitetônicos, na tecnologia, na música e até mesmo no próprio corpo e, por último, as “Metodologias de aplicações do número de ouro em sala de aula” que trata da promoção de um confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre o assunto em questão e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele.

Capítulo 1

O Processo De Ensino-Aprendizagem

1.1 Contextualização

A educação contemporânea não tem mais como se pautar em um contexto de alfabetização cuja prática não esteja direcionada num processo que garanta ao aluno assimilar de forma eficaz os conteúdos dados em sala de aula.

Portanto, é necessário que o ensino e sua aprendizagem devam ser o resultado da verdadeira compreensão. Torna-se importante, inserir um processo de construção de sentido onde se busca envolver o educando com a realidade do mundo e sob várias perspectivas, possibilitando que no futuro o mesmo tenha a capacidade de visão crítica de mundo.

A contemporaneidade trouxe muitos recursos interativos através de sistemas de comunicação, que proporcionou um maior relacionamento do homem com o mundo que o cerca, impondo praticamente a todas as pessoas a exigência do conhecimento não mais calcado na decifração de códigos, mas como verdadeira condição para a sobrevivência e conquista da cidadania. Barbosa (1999, p. 30) faz uma crítica aos métodos tradicionais de ensino quando diz que:

Eles são caracterizados por um sistema fechado e o processo de aquisição de conteúdos é visto como algo exterior ao indivíduo. A partir de então, esses métodos fazem uma análise racional dos seus elementos, partindo de aspectos simples para os complexos.

O autor analisa esse processo caracterizado por uma forma mecânica de aprendizado, onde não é evidenciado o que diz respeito à compreensão verdadeira, pois ele se pauta numa junção de elementos para a formação de um todo que se mostrará complexo ao

entendimento do educando visto que ele é mecanizado, objetivando apenas a organização das palavras para a formação das frases ou, no caso das ciências exatas, a formação de fórmulas.

Na verdade, o conhecimento educacional carrega em si muitos significados e a compreensão deles depende de uma aprendizagem significativa para que se possa ser participativo através da compreensão dos conteúdos. Essa concepção direciona o ensino que deve ser realizado a partir do texto, porque representa o enunciado completo, um todo carregado de significado que provoca compreensão, e conseqüentemente, a formação das estruturas mentais superiores do aluno.

Ao permitir que o sujeito interprete, divirta-se, seduza, sistematize, confronte, induza, documente, informe, oriente-se, reivindique, e garanta a sua memória, o efetivo uso dos conteúdos garante-lhe uma condição diferenciada na sua relação com o mundo, um estado não necessariamente conquistado por aquele que apenas domina o código (SOARES, 1998).

Portanto, interpretar textos ou fórmulas não importa simplesmente conhecê-los e decodificá-las, mas a possibilidade de usar esse conhecimento em benefício de formas de expressão e comunicação, possíveis, reconhecidas, necessárias e legítimas em um determinado contexto cultural.

Reforçando os princípios antes propalados por Vygotsky e Piaget, a aprendizagem se processa em uma relação interativa entre o sujeito e a cultura em que vive. Isso quer dizer que, ao lado dos processos cognitivos de elaboração absolutamente pessoal (ninguém aprende pelo outro), há um contexto que, não só fornece informações específicas ao educando, como também motiva, dá sentido e “concretude” ao aprendizado, e ainda condiciona suas possibilidades efetivas de aplicação e uso nas situações vividas (COLELLO, 2012).

Nesse sentido, o aprendizado através do entendimento concreto e crítico do indivíduo proporciona motivação e conseqüentemente garante intrinsecamente o aumento da autoestima, em consonância com a cultura do ambiente onde se está inserido através de uma visão crítica e fundamental.

Nesse sentido, todo professor tem grandes responsabilidades na renovação das práticas escolares e, conseqüentemente, na mudança que a sociedade espera da escola, na medida em que é ele que faz surgir novas modalidades educativas visando novas finalidades de

formação, só atingíveis através dele próprio. Assim, o professor é o responsável pela melhoria da qualidade do processo de ensino-aprendizagem, cabendo a ele desenvolver novas práticas didáticas que permitam aos discentes um maior aprendizado.

1.2 A aprendizagem

Ao se expor o processo de aprendizagem é importante que se observe o momento de transformação social que se apresentou nas últimas décadas, principalmente quando se insere nesse contexto a questão dos processos de tecnologia da informação, que dão maior acessibilidade às pessoas ao conhecimento e a interação como o mundo.

Esse processo denominado globalização tem posto em cheque há algum tempo questões relevantes ao aprendizado onde as concepções tradicionais têm sido questionadas, a partir de mudanças nos países desenvolvidos onde o mercado de trabalho, gradualmente, começa a exigir uma mão de obra de melhor qualificação, o que implicava nos usos funcionais da leitura e escrita, que a alfabetização tradicional, pela sua natureza, não conseguia garantir. Na verdade, educação tradicional concebida apenas no domínio de códigos, já não tem mais lugar quando se verifica a crescente necessidade de entendimento real nos meios e nas relações sociais.

Segundo Andrade; Sá (1992, p. 28),

O professor precisa, necessariamente, possuir conhecimentos de índole didática, embora filtrados pela prática, isto é, ele deve ser capaz de refletir sobre esses conhecimentos didáticos, elucidado pela avaliação das suas próprias práticas.

No que tange o aspecto pedagógico, o professor deve compreender as transformações educacionais por que passa a sociedade atual. Assim, ele precisa reconhecer que já não detém o poder da transmissão do saber, tendo que aceitar as novas formas de aprendizagem, que já não são lineares, pois são de forma significativa influenciada pela tecnologia.

Desse modo, o professor deve utilizar-se da variedade em todas as áreas de ensino, pois os alunos não conseguem concentrar-se numa atividade por mais do que uma limitada parcela de tempo. Assim, cabe a ele variar suas metodologias e fazer sua aula dinâmica, para que os educandos prestem atenção, se entusiasmem com a mesma e, conseqüentemente, aprendam o conteúdo.

Segundo Vygotsky (1986), as aprendizagens se dão em forma de processos, que incluem aquele que aprende e aquele que ensina, e mais, a relação entre essas pessoas, pois os

processos desencadeados num determinado meio cultural (aprendizagem) vão despertar no processo de desenvolvimento interno no indivíduo”. Dessa forma, pode-se entender que a assimilação dos conteúdos quando é feita de forma dinâmica e interativa, proporciona uma vivência social em que o relacionamento entre as pessoas seja facilitado, posto que o conhecimento e a assimilação onde há um entendimento daquilo que foi ensinado é fator primordial para a apreciação crítica do ambiente onde se está inserido.

Diante disso, é visível a necessidade de se relacionar o cotidiano social ao ato da leitura. Não seria demais considerar dever da escola, a criação de situações que façam com que saber interpretar conteúdos se incorpore à vida do aluno de forma agradável, sem exigências ou imposições que venham a forçá-lo a tornar-se um leitor, que não lhe seja impostas como regra e sim como sugestão, mostrando-lhe que o ato de ler e interpretar enunciados os permite compreender melhor o mundo.

Heinkel (2003, p. 23), confirma o exposto acima ao afirmar que “a aprendizagem faz parte das relações humanas e que o aluno em suas relações com o mundo real, também faz a sua releitura dos acontecimentos ao seu redor, criando e recriando o mundo, conforme a sua maneira de ver e sentir a realidade social”.

Para Chraim (2009, p. 57), “a elaboração de métodos que motivem a aprendizagem deve estar fundamentada em contratos positivos, tanto para quem aprende quanto para quem ensina. Essa fundamentação facilita as trocas”. Os métodos e materiais são instrumentos importantes para o desenvolvimento da tarefa educativa, uma vez que são meios que auxiliam nas ações dos alunos. Eles exploram o objeto da matéria, conhecem sua propriedade e função e, além disso, transformam atribuindo novos significados. Nessa perspectiva, as instituições devem integrá-los ao acervo existente nas salas, prevendo critérios de escolha, seleção e aquisição de acordo com a faixa etária entendida e os diferentes projetos desenvolvidos na instituição.

Assim, o que se deseja é a construção de uma prática de interpretação e entendimento efetivos, de modo a promover melhorias no processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Chraim (2009, p.42) “a visão do mundo, agora também por meio dos códigos lidos e escritos, dará ao aluno, nesse momento, uma percepção mais elaborada do universo”.

A apresentação de conteúdos contempla diferentes modalidades de ensino, numa frequência e intensidade capaz de envolver alunos e professores completamente. Na falta de infor-

mação que orientam uma prática mais eficiente, o ensino parece ser realizado de qualquer forma, fazendo com que os professores ajam através de tentativas e erros de abordagem de materiais escritos juntos a seus alunos. Muitas vezes tal precipitação prejudica os educando ocasionando grandes perdas, provocando até mesmo o desinteresse no que diz respeito ao entendimento da matéria.

Nesse contexto, o processo de ensino-aprendizagem é vivenciado não somente dentro da escola, mas é uma ação que acontece em todo e qualquer setor da sociedade, que se caracteriza como a sociedade do conhecimento, porque a educação formal e a não formal caminham paralelamente e tornam a educação o principal instrumento contra a desigualdade social.

Segundo Libâneo (2002, p. 139)

Um caminho bastante estimulante para a compreensão do fenômeno educativo é tomá-lo como ingrediente dos processos práticos - práxis - de relação ativa dos indivíduos com o meio natural e social, entendido esse meio como "culturalmente organizado". Essa interação homem-meio está mediatizada pela atividade (trabalho), e essa atividade implica a assimilação (aprendizagem) da experiência humana historicamente acumulada e culturalmente organizada. Ou seja, a relação ativa dos indivíduos com o meio natural e social implica a mediação da cultura, visando ao desenvolvimento da personalidade, ou seja, aquisição das qualidades específicas do gênero humano.

Entende-se, no relato do autor supracitado, a necessidade constante da educação, não somente se atendo ao aprendizado específico e sem um desenvolvimento constante, pois no mundo atual o aprendizado deve ser visto como uma evolução nos estudos de forma constante, sob pena de não estar presente ou com a capacidade de acompanhar o mercado de trabalho e o próprio acompanhamento dos rumos que podem promover a sua vida como cidadão no ambiente onde está inserido.

Diante do exposto, importa ao professor, através do relacionamento contínuo em sala de aula, a articulação, procurando ir além dos aspectos individuais do aluno, envolvendo-o nos aspectos políticos e sociais da sociedade em que vive. Ele deve ser verdadeiramente um ente político no dia-a-dia da escola, cabe-lhe o papel de trabalhar com a realidade, buscando superar o senso comum através do conhecimento científico, procurando analisar o cotidiano escolar, relacionando-o com o cotidiano que está do lado de fora da escola.

Necessário se faz, portanto, que o professor, para o alcance de maiores competências, assuma o compromisso de participar ativamente da elaboração e implementação do projeto político pedagógico da escola em que atua, de tal forma que se faça agente mediador entre o trabalho escolar e a prática social global, pois, no contexto da educação, o papel do professor é de suma importância, pois é ele quem cria os espaços e disponibiliza materiais fazendo a mediação na construção do conhecimento.

Diante dos avanços tecnológicos, o aluno da era da informação e tecnologia está evoluindo mais precocemente. Nesse aspecto é importante conhecer as características do aprendiz para saber quais são as potencialidades que estão sendo desenvolvidas e quais as esquecidas, quais os transtornos que esse desequilíbrio pode causar no desenvolvimento do indivíduo e como se pode estimular o aluno para o processo ensino-aprendizagem.

O educando deve ser visto sob três dimensões: a corporal, a afetiva e a cognitiva, que devem se desenvolver simultaneamente. Se uma estiver sendo desenvolvida em detrimento da outra, certamente haverá um desequilíbrio do indivíduo em sua dimensão global. O aluno utiliza, de forma eficiente, os sentidos, e cabe aos educadores, vê-lo como um ser completo, porém inexperiente, que se tem de trabalhar e para quem é preciso propiciar oportunidade de pleno desenvolvimento (RAMOS, 2005).

A sociedade tem se transformado muito rapidamente nas últimas décadas e o processo de aprendizagem tem que acompanhar essa fase transformadora. Os métodos tradicionais de ensino já não tem o atrativo motivador para garantir a assimilação do conteúdo dado. O educando de hoje é questionador e ao educador cabe definir quais os objetivos que pretende alcançar, utilizando uma metodologia adequada, estimuladora e prazerosa.

1.3 A aprendizagem significativa

Existem diferentes conceitos e definições para aprendizagem de acordo com diversas teorias organizadas ao decorrer do tempo, a aprendizagem relatada em livros é caracterizada como um processo psicológico que ocorre dentro da mente e do psiquismo do indivíduo, um processo de modificações de comportamento resultante da experiência, relacionados a diversos fatores.

Torna-se um processo interno e individual de cada pessoa pelo qual, desde o nascer, a evolução de sua capacidade mental vai constituir seu acervo pessoal de aprendizagens,

que poderá crescer constantemente ao longo de sua vida. Mas procurando um conceito mais sólido, Placco (2006, p.86) define aprendizagem como:

Um processo de apropriação de conhecimentos como fatos, eventos, relações, valores, gestos, atitudes, modo de ser e agir, que promovem no sujeito novas possibilidades de pensar e de se inserir no seu meio. O aprender envolve atribuir significações e engendra relações únicas com o saber. Mobiliza experiências vividas pelo sujeito, em sua interação com outros significativos e em sua inserção no mundo [...].

Nesse sentido o educador tem papel fundamental nesta constituição do processo de aprendizagem, na medida em que possibilita ao educando o acesso a um acervo de conteúdos com o mundo real e social. Para tanto, o educador terá de se apropriar de métodos que torne o aprendizado do educando significativo, ou seja, procurar fazer com que ele aprenda de uma forma que esse aprendizado não seja apenas temporário ou ilusório, possibilitando ao educando constituir com a base já existente uma estrutura sólida de conhecimentos que poderá utilizar durante toda sua vida.

Com isto pode-se relatar que o educador deve ensinar em consonância com o que o educando sabe. O fato isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Por isso, se deve descobrir o que ele sabe e fundamentar nisso os nossos ensinamentos (NETO, 2001). Só assim o educando poderá aprender e interligar suas informações obtidas no contexto social a conhecimentos científicos obtidos no ambiente educacional, formulando assim conhecimentos sólidos, a qual poderá utilizá-los a qualquer momento da sua vida, pois não constituirá um acervo avulso de informações, e sim, conhecimentos organizados e estruturados na sua estrutura cognitiva.

As considerações realizadas para conceptualização da aprendizagem sem nenhuma dúvida ajudam a compreender e entender a mesma, já que, conceituar a aprendizagem faz com que facilite entender suas características básicas, resultantes das várias teorias da aprendizagem existente. Campos (2010) define as características básicas da aprendizagem como processos e por consequência divide-os em seis:

1. **Processo dinâmico:** acontece quando praticamos e aprendemos efetuando o ato e utilizamos aspectos físicos, intelectuais, emocional e social;
2. **Processo contínuo:** ocorre desde quando nascemos até quando morremos, por que acontece diariamente;

3. **Processo global ou compósito:** a qual envolve a pessoa por completo, inclui sempre aspectos motores, emocionais e ideativos ou mentais;

4. **Processo gradativo:** cada um aprende ou tem sua forma e maneira de aprender, o próprio ritmo da aprendizagem varia de individuo para individuo, face ao caráter pessoal da aprendizagem;

5. **Pessoal:** processo ao qual o individuo aprende dia-a-dia, a aprendizagem se constitui através de operações crescentemente complexas, em cada nova situação, envolve maior numero de elementos. Neste processo pessoal percebemos como o meio influencia na formação do individuo e através dele o individuo também constitui sua aprendizagem;

6. **Processo cumulativo:** é neste processo que aprendemos comparando ou usando do que já aviamos aprendido, ao qual, a acumulação das experiências conduz a novos padrões de comportamentos.

Todos estes processos constituem assim uma forma de aprendizagem ao qual o individuo passa e conseqüentemente constitui seu acervo pessoal, de conhecimentos sólidos ou conhecimentos do senso-comum (informações avulsas), tais conhecimentos do senso-comum são aprendizagens obtidas do contexto social que influencia no individuo e possibilita o sujeito ser conhecedor de diversas informações.

O professor deverá utilizar essas informações avulsas e transformar em conhecimentos sólidos, que sejam absorvidos pelo educando, para constituição e obtenção de um sujeito crítico e participativo na sociedade, já que o conhecimento que o individuo possui é o principal meio que ajudará a estabilizar-se e viver de forma harmoniosa no meio social.

A conscientização do educador de que o contexto social ao qual o educando pertence pode mudar é um dos objetivos principais para efetuar uma aprendizagem significativa, pois consciente disto o educador deve trabalhar a mente do seu educando tendo em vista a constituição de conceitos amplos da sociedade ao qual pertence, possibilitando o sujeito ver o mundo, suas diversidades, culturas e classes.

Aprender é, pois, um processo, próprio de cada pessoa, no qual desde o nascer, e com a evolução de sua capacidade mental, ela vai formando seu acervo pessoal de aprendizados e o amplia ao longo da vida, por meio das experiências vivenciadas, do estudo e da interação com seu meio físico e social (MARTINS, 2009), possibilitando ao aluno obter uma opinião critica diante dos fatos que o cerca e a realidade que o segue, já que a aprendizagem se constitui relacionada com um conjunto de fatos cognitivos e sociais ao qual o aluno está

integrado, tais como: cultura, classe, valores, religião e personalidade individual que cada ser constitui, decorrente do meio ao qual pertence.

Além dos seis processos que caracteriza a aprendizagem relatada por Campos (2010), Tapia (2004) relata a existência de três tipos principais de aprendizagem, que através delas o indivíduo obtém uma aprendizagem significativa no ambiente educacional:

1. **Aprendizagem subordinada** - acontece quando o novo conhecimento encontra na estrutura cognitiva um conceito semelhante na qual ele se fundamenta. Podem ser de dois tipos:

1.1. **Inclusão derivativa**: se fundamenta em um conceito já existente com novas características ao qual vai enriquecer o conhecimento armazenado;

1.2. **Inclusão correlativa**: se fundamenta no conceito existente, o modifica e o converte em um novo conceito.

2. **Aprendizagem supra-ordenada** - o novo conhecimento é um conceito mais geral, abrangendo os conceitos existentes;

3. **Aprendizagem combinatória** - o novo conhecimento é do mesmo nível do conceito existente, onde vai enriquecer o conhecimento armazenado e permitir uma leitura diferente da situação.

A aprendizagem desta forma constitui-se em uma aprendizagem significativa, que ampliará os conhecimentos do educando, não se tornando, apenas uma aprendizagem mecânica, ao qual o indivíduo não terá informações para associar e interligar com os conhecimentos adquiridos. Aprender antes de tudo significa envolver-se e apossar-se do conhecimento de forma a integrar-se em seu íntimo e futuramente utilizá-lo para construir seus próprios significados, pois cada indivíduo tem uma forma singular e própria de lidar com o conhecimento.

Todos estes tipos de aprendizagem relatados por Tapia (2004) mostram como a aprendizagem executada de forma significativa favorece o aluno a desenvolver-se como ser humano, constituindo assim seu próprio acervo de conhecimento o qual em meio à sociedade poderá se tornar participativo e ativo, com desejo de buscar novas informações, adquirir novos conhecimentos. Percebe-se então, que a aprendizagem é um dos processos mais importantes para a sobrevivência do ser humano.

Toda aprendizagem ocasiona mudança no comportamento do indivíduo, que aprende algo de novo, que podem ser observadas ou não, como por exemplo, a forma de agir,

realizar alguma atividade, pensar ou gostar de algum objeto ou de alguém. Desta forma, existem diversos conceitos, produtos e meios de aprendizagem, um predominando sobre o outro, em cada situação que individuo passa, pois,

[...] o homem é um organismo que pensa, sente e atua, e todo o processo aprendido possui componentes motores, ideativos e afetivos. Ninguém, jamais, adquire um hábito motor, como, por exemplo, a patinação, sem algum nexo afetivo, ou consequência cognitiva. O individuo que aprende pensa sobre o que faz, ao aprender, forma, pelo menos, uma noção da natureza geral e do significado deste processo. [...] Ao mesmo tempo, adquire alguns sentimentos referentes à atividade: passa a apreciar-la ou desprezá-la. [...] E a atividade adquire uma conotação positiva ou negativa. (CAMPOS, 2010, p. 51)

Percebe-se como a aprendizagem do individuo estar interligada a diversos fatores, ao qual cada um se coloca à disposição quando se é necessário, se interligando ou completando, atribuindo ou anulando, de acordo com a necessidade de cada sujeito no meio social, possibilitando assim ao educador perceber que a aprendizagem do educando é resultante da constituição de componentes motores, ideativos e afetivos, ao qual poderá utilizar-se deles para obtenção de uma aprendizagem significativa com relação ao educando.

Campos (2010) conceitua cada um destes produtos de aprendizagem que o individuo passa para constituição da aprendizagem cognitiva. Ele relata que predomina os elementos de natureza intelectual, tais como a percepção (é a consciência da sensação, onde o individuo recebe, organiza e interpreta as experiências sensório-perceptivas), o raciocínio, a memória, a atenção, problemas da percepção, formação de conceito e generalização.

Conforme o tipo de tarefa a ser aprendida, os processos de aprendizagem variam e algumas vezes o mesmo aplica-se a tarefas de naturezas diferentes. Na aprendizagem mental podem se assimilar os processos de insight e de ensaio-e-erro (envolve sempre a observação e obedece a objetivos). A aprendizagem afetiva (apreciativa) compreende atitudes e valores sociais, constituídos por gostos e preferências, estabelecendo os princípios mais amplos de conduta humana, esta aprendizagem influi, altera e aperfeiçoa a personalidade do aluno, que se compõe sobre as bases hereditárias, em constantes interações com o meio social.

Existente assim, dois processos básicos, pelos quais se realiza a aprendizagem: **processo de condicionamento de reações** - uma resposta afetiva e agradável por determinada situação que se associa à mesma ou a outra situação semelhante pelo processo

de condicionamento. E o **processo de imitação** - a pessoa imita, observa outra realizar determinado ato e esta observação é o fato essencial que faz com que leve a agir de forma semelhante. Não esquecendo que a aquisição da aprendizagem afetiva baseia-se em alguns princípios básicos: o aluno deve ser preparado para aprendizagem, os princípios de motivação da aprendizagem devem ser atendidos, o professor deve vivenciar os ideais, atitudes e valores que deseja cultivar nos alunos e, por ultimo, o educador deve oferecer oportunidade para as reações afetivas do aluno.

E o último tipo de aprendizagem citado por Campos (2010) a aprendizagem de automatismo (padrões de desenvolvimento motor) que depende da prática, do treino e da repetição. Assim existem três fatores que contribuem para que ocorra a aprendizagem: a compreensão da situação e percepção de seus elementos (pelo aprendiz), a coordenação de movimentos (controle de pequenos músculos) e a automatização da aprendizagem (resulta da prática e consiste na execução de um movimento ou habilidade, sem a utilização do trabalho consciente). Não se pode esquecer dos fatores da aquisição do automatismo para obtenção de aprendizagem com resultados positivos, que são: a prática (experiência ou treino), demonstração didática, imitação e ensaio-e-erro.

Percebe-se então que a aprendizagem envolve diversos fatores pessoais, biológicos e sociais, todos estes influenciam no seu resultado, e também pode ocorrer mediante os vários métodos, através de diversas formas e processos de aprendizagem, todos interligados e dependentes ou independentes um dos outros, mas que estão interligados entre si, além da própria disponibilidade e desejo de aprender do educando.

A aprendizagem significativa só ocorre se o próprio aluno estiver interessado, motivado e desejando aprender, pois somente ele é capaz de enfrentar as suas próprias dificuldades e barreiras cognitivas e motoras. E o educador é apenas um intermediário para o conhecimento chegar ao educando de forma coerente e satisfatória para sua aprendizagem, por isso o educador deve manter o conteúdo a ser aprendido relacionado e interligado com as estruturas cognitivas do educando, que ele aprenda significativamente os conteúdos e possa utilizá-los sempre que for necessário.

Assim sendo, no conteúdo colocado para a aprendizagem do educando deve haver significado lógico e, por consequência, haverá significado psicológico, no qual, as dificuldades dos alunos poderão ser melhoradas, resumidas ou até mesmo aniquiladas quando da obtenção de uma aprendizagem alcançada através de conteúdos ministrados de formas

significativas, motivadoras e prazerosas dentro dos ambientes educacionais.

1.4 O ensino da matemática

A velocidade com que vários setores da sociedade estão se informatizando e modernizando traz para o mundo atual a necessidade de que as pessoas estejam em constante processo de aprendizagem, no sentido de adquirir competências e habilidades individuais e sociais de comunicação e interação com o novo.

Buscar o novo e interagir com ele torna-se um direito de todas as pessoas, mas também um dever, considerando as transformações mundiais que se presencia diariamente, provocadas substancialmente pelos avanços tecnológicos.

Todavia, o que se observa hoje é que, em qualquer área, houve um grande avanço científico, tecnológico e social, que tem exigido outro tipo de cidadão, cada vez mais crítico, mais reflexivo, que saiba tomar decisões e trabalhar em equipe. Para atender a esta exigência, a educação não pode mais desenvolver o processo de ensino-aprendizagem de maneira como é tradicionalmente realizada, do qual os alunos são receptores de conteúdos, que são simplesmente lançados no quadro de acrílico, deixando de lado a aplicação prática e cotidiana, sendo o ensino priorizado em detrimento da aprendizagem e da ação do aluno, tornando-o um ser passivo deste processo.

Em se tratando da disciplina Matemática, percebe-se que, há tempos existe uma grande preocupação com a melhora do seu processo de ensino, posto que, como matéria que normalmente sempre traz mais dificuldades de assimilação por parte dos educandos, no seu contexto histórico ela se centrou muito com a mecanização de algoritmos, treino de habilidades e memorização de regras e fórmulas com repetição e imitação.

O conhecimento da Matemática seja de forma técnica, científica, ou cultural, constituem um patrimônio que a humanidade convive a partir de seus lineares históricos como sendo um patrimônio sociocultural que possui dimensões universais com significados e abrangências representativas no mundo da Matemática, podendo ser usufruída pela sociedade ou comunidades do mundo inteiro.

Nesse sentido, os valores promovidos pelo ensino da Matemática nas escolas constituem um patrimônio cultural que deve ser socializado com as novas gerações, independentemente da classe social, raça, faixa etária, crença religiosa, convicção ideológica e

sexo.

Os conhecimentos que o aluno se apropria a partir do ensino da Matemática permitem compreender melhor como se chega aos conhecimentos atuais e tecnológicos e também porque é que se ensina este ou aquele assunto. Com uma perspectiva crítica, e um olhar diferenciado para a Matemática que é ensinada atualmente, os professores pouco a pouco devem se engajar no próprio objeto de ensino da Matemática em vez de ficarem promovendo conteúdos desnaturados sem qualquer sentido com a realidade e dia-a-dia do aluno.

Para Libâneo (1994, p. 79)

O ensino sistematizado da Matemática, além de possibilitar o aumento do repertório de conhecimentos/contábeis, bem como a compreensão e a reflexão sobre o mundo em que está inserida, esta é entendida como uma das formas de linguagem e expressão comunicativa que é caracterizada de significados, sentidos, códigos e valores, que influenciam e configuram a formação dos seres humanos. O processo de ensino visa alcançar determinados resultados em termos de domínio de conhecimentos, habilidades, hábitos, atitudes, convicções e de desenvolvimento das capacidades cognitivas dos alunos. Os princípios da Matemática são aspectos gerais do processo e ensino que expressam os fundamentos teóricos de orientação do trabalho docente.

Nota-se, portanto, que a assimilação de conteúdos, segundo descreve o autor, se pauta em um processo de ensino que norteia o desenvolvimento da capacidade cognitiva, entendendo-se que a demonstração do conteúdo histórico da disciplina deve se pautar na relação de sua aplicação prática no cotidiano social.

É de se notar facilmente que o aluno normalmente não consegue visualizar e compreender o conteúdo dessa ciência no contexto escolar e a sua dimensão na construção da realidade que o cerca. Sobre isso, Guichard, (2006, p. 08) afirma que “a Matemática esta inserida numa posição didática como um fenômeno da transposição didática em que o objeto de ensino é o resultado de uma descontextualização separado da problemática que lhe deu origem e que faz viver a noção como saber”. Assim sendo, dimensionar o ensino da matemática relacionando-a com a vida das pessoas, explicar o sentido do que se faz colocar as questões numa perspectiva histórica e reavaliar a aplicação do seu conteúdo de forma mais simples e prazerosa para facilitar seu aprendizado e uma verdadeira compreensão, é uma necessidade que deve estar embutida na busca do conhecimento dos

educadores como proposta facilitadora e esclarecedora no sentido de demonstrar o ensino da matemática e sua compreensão no dia-a-dia da sociedade.

O ensino da história da Matemática permite recuperar sentidos e símbolos que foram ensinados tão arbitrários, seus traços, suas origens e a sua histórica permite-nos restabelecer os novos conceitos que a mesma visa. Neste sentido dois aspectos são fundamentais no ensino da Matemática, tais como: o primeiro refere-se à visão da matemática que em geral norteia o ensino. Segundo Carvalho (1994, p. 15) “considera-se a Matemática como uma área do conhecimento pronta, acabada, perfeita pertencente apenas ao mundo das ideias e cuja estrutura de sistematização serve de modelo para outras ciências”. O segundo aspecto é considerado como algo crucial, causando desgosto da maioria dos alunos pela Matemática. Para Carvalho (1994, p. 16) “no ensino onde é necessário submeter-se à autoridade da Matemática, é impossível entender, pois, compreender Matemática torna-se privilégio das cabeças mais bem dotadas; acaba-se por negar todas as vivências anteriores relativas à qualificação já que não se enquadram na perfeição da Matemática”.

1.5 As dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da matemática

Existe um considerável número de alunos que chegam ao ensino médio sem o domínio das habilidades e competências mínimas necessárias da matemática básica e, em consequência desta situação, não conseguem acompanhar, de forma satisfatória, o desenvolvimento dos conteúdos da matemática dentro da Educação de nível médio.

Diante desse quadro o índice de reprovação/retenção nas series iniciais desse nível são elevados, os quais ampliam a ideia de que a matemática constitui um dos campos dos saberes de difícil domínio, quando deveríamos encarar os saberes matemáticos em condições de igualdade com os demais campos do conhecimento.

Como área do conhecimento, embora sem o saber de muitos, a matemática está presente no dia-a-dia dos indivíduos não somente pela sua exatidão, mas como ciência contribuinte do cotidiano social, posto que, seu ensino, quando associado à possibilidade de leitura da realidade, à história da humanidade, à tecnologia, a uma linguagem universal, toma uma dimensão interdisciplinar.

A esse respeito, Oliveira (2010) afirma que é preciso que os professores de Matemática

estejam convencidos da função social da escola e atribuam à sua ação pedagógica objetivos amplos que possibilitem aos alunos a aplicação de suas aprendizagens em contextos diferentes daqueles que foram aprendidos, na expectativa de que o trabalho escolar extrapole a sala de aula.

Contudo, observa-se que as dificuldades de aprendizagem na Matemática são mais comuns do que em outras disciplinas, mas pode não ser diagnosticada da forma correta uma vez que muitos acreditam que matemática é só para “gênios” e que é normal os menos “inteligentes” não se saírem muito bem na disciplina. Até os próprios professores, muitas das vezes possuem esse pensamento arcaico sobre o assunto.

Acredita-se que o educador deve buscar modalidades inovadoras de intervenção para garantir a motivação para o aprendizado dos educandos, para tal, buscar determinantes motivadores como estratégias de ensino, sobretudo no que diz respeito à matemática, se faz necessário, principalmente quando se observa cotidianamente em sala de aula uma considerável aversão pela disciplina.

Atualmente é necessário que os profissionais da educação procurem fazer um estudo abrangente sobre as necessidades dos educandos e neste estudo levar em conta a sociedade na qual estão inseridos para que possam repensar sua prática pedagógica e se enxergarem como pessoas capazes de construir conhecimento e transmiti-lo da melhor forma possível ao educando.

Para que a aprendizagem da matemática possa ser fundamental na formação de cidadãos é necessário que todos tenham a oportunidade de participar ativamente como ouvintes e intérpretes, em sala de aula e fora dela (BRASIL, 1997, p. 77).

Os afetos como veículos, que servem para conduzir ou transmitir facilmente o conhecimento matemático, funcionam como diagnóstico. Normalmente o professor tenta buscar razões que justifiquem por que os estudantes “falham” ao aprender matemática. As dificuldades que implicam tanto no aprender como no ensinar matemática podem ter sua origem nas atitudes dos alunos em relação à disciplina, na natureza dessa ciência, na linguagem e na notação matemática e no modo de aprender dos alunos. Parece pertinente não só aprofundar-se cada vez mais nas exigências cognitivas para a aprendizagem, mas, também, e especialmente, nas exigências afetivas (CHACÓN, 2003, p. 25).

Os problemas enfrentados pelos alunos em matemática são diversos. A metodologia

de ensino muitas vezes ultrapassada não é das melhores. Existem também os fatores de ordem social e pessoal dos estudantes que contribuem para a desmotivação e a falta de interesse pelos estudos de uma forma geral.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) afirmam que a Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar (PCN, 1998, pág. 19). Mas sabemos que a sociedade está em contínua transformação cultural, social e econômica. Todos os dias surgem novas tendências e com a mesma rapidez que surgem elas também desaparecem.

Estas constantes transformações fazem com que as pessoas se capacitem para conviver e dominar as muitas novas informações que aparecem quase que diariamente. Tendo acesso à informação e educação, as pessoas saberão utilizar todos os seus conhecimentos de forma adequada, possibilitando a sua adaptação na sociedade (OLIVEIRA, 2010).

Cada vez fica mais necessário direcionar a educação para mudanças de consciências, demonstrando que ela está presente na vida de todas as pessoas. É de fundamental importância toda e qualquer forma de mudança da Educação Matemática, pois muitos alunos não gostam de matemática por não entendê-la ou não foram motivados a isso (OLIVEIRA, 2010).

É notável que uma parte considerável de alunos tem uma verdadeira aversão à Matemática, considerada de difícil compreensão, pois se questiona nos meios acadêmicos a dificuldade de ensinar a Matemática do Ensino Médio, pois esta exige abstrações e pré-requisitos que muitos alunos não adquiriram no Ensino Fundamental.

Através disto, é possível constatar que a Matemática está impregnada de crenças e mitos que foram sendo construídos num processo de relações por meio das representações que se tem a respeito dela e essa crença vem sendo mantida no mundo acadêmico pelos estudantes (FERNANDES, 2011).

O bom aprendizado da Matemática desempenha papel fundamental no desenvolvimento intelectual e cultural de um cidadão, bem como sua inserção no sistema de referências do grupo ao qual pertence. Neste sentido, acredita-se que o uso de recursos tecnológicos no ensino da Matemática contribui de forma satisfatória para uma aprendizagem mais significativa, dinâmica, visual e contextualizada, pois permite transformar os processos de pensamento e de construção do conhecimento, proporcionando um intercâmbio

bio entre o educando e meio em que está inserido.

A esse respeito, Micotti (1999) aponta que a aplicação dos aprendizados em contextos diferentes daqueles em que foram adquiridos exige muito mais que a simples decoração ou a solução mecânica de exercícios: domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio, capacidade de análise e abstração. Essas capacidades são necessárias em todas as áreas de estudo, mas a falta delas, em Matemática, chama consideravelmente a atenção.

As diretrizes curriculares hoje reconhecem a Matemática como necessária à formação do cidadão. Enfatizam a importância de que o aluno aprenda a utilizar procedimentos e conceitos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos, para resolver problemas. Além disso, ressaltam a relevância de estimular o aluno a construir conhecimento, cultivando a autoestima, o respeito pelo trabalho do colega e a perseverança na busca de solução (FERNANDES, 2011).

Se antes era necessário fazer contas rápidas e corretamente, hoje é importante saber por que os algoritmos funcionam, quais as ideias e os conceitos neles envolvidos, qual a ordem de grandeza de resultados que se pode esperar de determinados cálculos e quais as estratégias mais eficientes para enfrentar uma situação problema (TOLEDO, 1997).

Com o objetivo de orientar as escolas a planejarem seus currículos, foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, a fim de prever situações em que os alunos tenham acesso aos conhecimentos socialmente elaborados, que consigam evidenciar a importância que a Matemática tem para compreender o mundo em sua volta e também perceber que esta área do conhecimento estimula a criatividade, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, bem como o exercício da cidadania.

Apresentaremos no próximo capítulo o conteúdo que se intitula “O número de Ouro” e em seguida sua contextualização e aplicação de forma prática na vida do educando, buscando comparar dois métodos de ensino da matemática, ao qual chamaremos: o tradicional (aula expositiva em um quadro de acrílico com resoluções de exercícios prontos) e o de oficinas/práticas (trabalhos realizados com materiais concretos, que sempre busca contextos ao qual o próprio educando vivencia, tornando a matemática menos abstrata).

Capítulo 2

O Número de Ouro

2.1 Contexto histórico

O **número de ouro** ou **proporção áurea** ou **número áureo** ou **proporção de ouro** é um número irracional misterioso que surge com bastante frequência na natureza em forma de razão, sendo considerado por muitos como um presente de Deus ao mundo. Denotado pela letra grega Φ (Phi maiúsculo), em homenagem ao nome de Phideas, que foi o escultor e arquiteto encarregado da construção do Pártenon, em Atenas. O número é também chamado de **seção áurea**, **razão áurea**, **razão de ouro**, **média e extrema razão** (*Euclides*), **divina proporção**, **proporção em extrema razão** ou **divisão de extrema razão**. O número de ouro é ainda chamado de **razão de Phidias**.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Desde a Antiguidade, o número de ouro é utilizado tanto na arte quanto na arquitetura. É frequente a sua utilização em pinturas renascentistas, como, por exemplo, as do mestre Giotto. Este número está, também, envolvido com a natureza do crescimento. Φ como é chamado o número de ouro, pode ser encontrado na proporção das conchas (o nautilus, por exemplo), dos seres humanos (o tamanho das falanges e ossos dos dedos, por exemplo), das colméias, entre inúmeros outros exemplos que envolvem o crescimento.

Justamente por estar envolvido com o crescimento, o número de ouro se torna tão frequente, sendo alvo de pesquisadores, matemáticos, artistas e escritores. O fato de ser encontrado através de desenvolvimentos matemáticos é que o torna fascinante.

Com efeito, analisando a concha do náutilo (*nautilus pompilius*), por sinal de magnífica

beleza, a disposição das folhas nos ramos das plantas, ou seja, a filotaxia, o pentagrama que aparece na maioria das flores e até mesmo em frutos como a maçã se cortada pela sua circunferência, os quadros como “A Mona Lisa” e “Sacramento da Última Ceia”, a procriação dos coelhos, a harmonia das notas musicais, e muitos outros, pode-se observar que existe algo em comum, ‘A Razão Áurea’ (RODRIGUES, 2008).

2.2 A razão áurea

A razão áurea, também conhecida como o número de ouro, teve sua primeira definição por volta de 300 a.C.. Trata-se de uma razão bastante apreciada e estudada à muito tempo por matemáticos, astrônomos, físicos, biólogos e artistas, em que cada descoberta provoca fascínio por sua relação e influência sobre a arte, a arquitetura, a música, a geometria e a natureza.

Muitos estudiosos da antiguidade se apropriaram intensamente acerca dos estudos dessa razão, suas propriedades e aplicabilidade. Dentre eles pode-se citar Euclides, Pitágoras, Leonardo de Pisa também conhecido como Fibonacci e Johannes Kepler, que se encantaram com sua harmonia, através da busca constante pela proporção perfeita, dando uma qualidade estética agradável às obras dos artistas, ao som dos acordes dos músicos e à beleza do corpo.

Mas foi com Euclides de Alexandria 300 a.C., que a razão áurea teve a sua primeira definição, expondo uma proporção derivada da divisão de um segmento no que ele chamou de “razão extrema e média”. Portanto, “Diz-se que um segmento de reta é cortado na razão extrema e média quando o segmento todo está para o maior segmento assim como o maior segmento está para o menor,” (Figura 2.1).

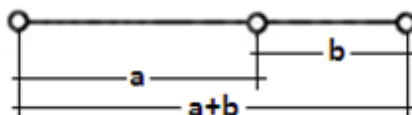


Figura 2.1: Razão Áurea por Euclides de Alexandria

Algebricamente tem-se:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} = \Phi.$$

Da igualdade da direita obtem-se $\frac{a}{b} = \Phi \Rightarrow a = \Phi \cdot b$, que substituído na igualdade da esquerda, resulta em:

$$\frac{\Phi \cdot b + b}{\Phi \cdot b} = \frac{\Phi \cdot b}{b}$$

ou ainda:

$$\frac{(\Phi + 1)b}{\Phi b} = \frac{\Phi b}{b}$$

cancelando em ambos os membros da igualdade, tem-se:

$$\frac{\Phi + 1}{\Phi} = \Phi$$

multiplicando ambos os membros da igualdade por Φ , resulta:

$$\Phi + 1 = \Phi^2$$

que implica em:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0,$$

que é uma equação do 2º grau.

Resolvendo essa equação do 2º grau pela fórmula que é conhecida por muitos como “Fórmula de Bháskara”, temos:

$$\Phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \therefore \Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tomando a solução positiva dessa equação, obtem-se:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots, \text{ que é o misterioso número de ouro } \Phi.$$

2.3 O retângulo áureo

Chama-se retângulo áureo a qualquer retângulo com a seguinte propriedade: “Se de um retângulo **ABCD** dado, suprimirmos um quadrado de lado **AD**, como por exemplo, **ADFE** (Figura 2.2), o retângulo restante, **CBEF**, será semelhante ao retângulo original.”

Sendo **a** e **b** as dimensões do retângulo inicial, a definição acima se traduz na seguinte relação:

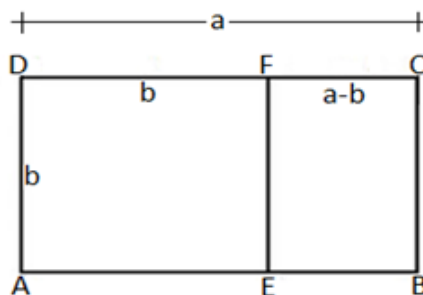


Figura 2.2: Retângulo áureo

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b-a} \quad (*)$$

Trabalhando nessa relação, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{b}{b-a} \Rightarrow \\ a(a-b) &= b^2 \Rightarrow \\ a^2 - ab &= b^2 \Rightarrow \\ a^2 - ab - b^2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo novamente pela fórmula que é conhecida como “Fórmula de Bháskara”, tem-se:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-(-b) \pm \sqrt{(-b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b^2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \\ a &= \frac{b \pm \sqrt{5b^2}}{2} \Rightarrow \\ a &= \frac{b + b\sqrt{5}}{2} \text{ (pois } a > 0 \text{ e } b > 0) \Rightarrow \\ a &= b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

Retornando a relação (*), tem-se:

$$\frac{b}{b-a} = \frac{a}{b} = \frac{b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Como o retângulo inicial tem proporções áureas, pode-se repetir esta operação de “suprimir quadrados” indefinidamente, que sempre se encontrará retângulos semelhantes, mantendo em cada novo retângulo a razão áurea (Figura 2.3).

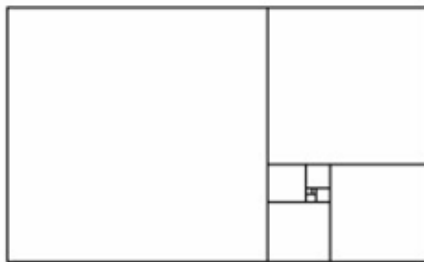
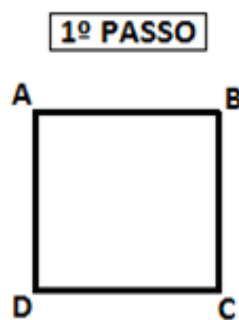


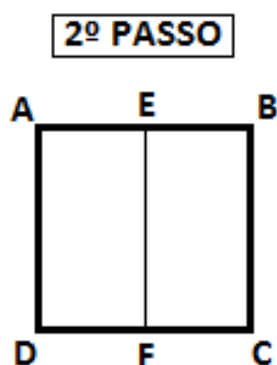
Figura 2.3: Operação de “suprimir quadrados” indefinidamente

Uma maneira simplificada de se construir o retângulo áureo a partir de um quadrado, é dada nos passos abaixo:

1º PASSO: Construa um quadrado qualquer $ABCD$.

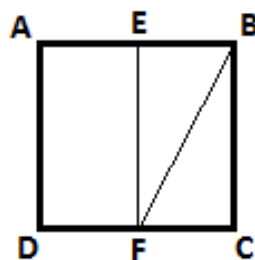


2º PASSO: Marque os pontos médios E e F dos lados AB e CD , respectivamente, e una estes pontos através de um segmento de reta.



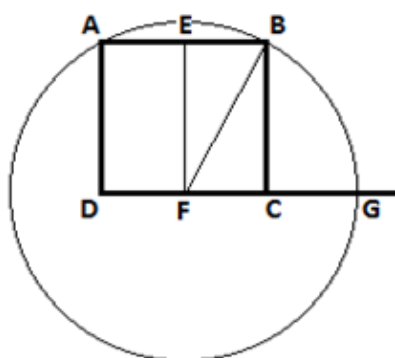
3º PASSO: Trace a diagonal FB do retângulo $EBCF$.

3º PASSO



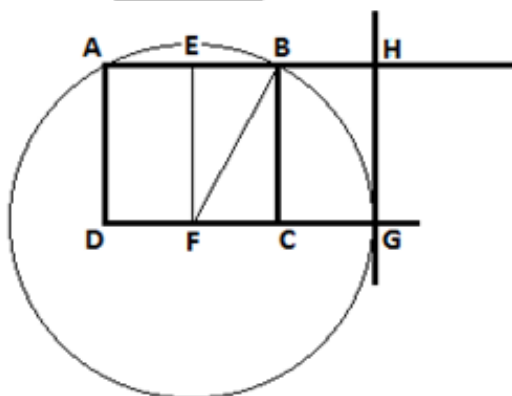
4º PASSO: Prolongue o lado **DC** do quadrado ABCD e com um compasso, trace a circunferência de raio **FB** e centro em **F**, chamando de **G** o ponto de encontro da mesma com o segmento prolongado.

4º PASSO



5º PASSO: Prolongue o lado **AB** do quadrado ABCD e trace uma reta perpendicular ao prolongamento do lado **DC** passando por **G**, chamando de **H** o ponto de encontro da reta perpendicular com o prolongamento do lado **AB**.

5º PASSO



O Retângulo ADGH é o **retângulo áureo**.

2.4 Espirais áureas

Para cada ângulo θ , marque o ponto P sobre a semirreta que passa por A e faz ângulo θ com o eixo $emphx$, de tal forma que a distância r de P a A seja igual a $r = a \cdot e^{b \cdot \theta}$, onde a e b são constantes reais não-negativas e “ e ” é o número neperiano 2,718281828459045235360287... . O lugar geométrico do ponto P quando θ varia nos reais é denominado espiral logarítmica plana de centro no ponto A , fator de escala a e fator de crescimento b (Figura 2.4).

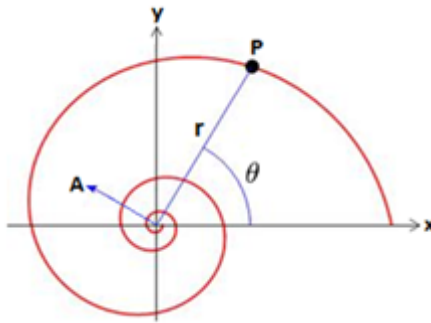


Figura 2.4: Espiral logarítmica

A espiral logarítmica foi estudada por Jacob Bernoulli (1654-1705), que chamou a esta curva de *spira mirabilis* (em latim, espiral maravilhosa). Seu nome advém de sua expressão analítica, que pode ser escrita na forma de:

$$r = a \cdot e^{b \cdot \theta} \Rightarrow$$

$$\frac{r}{a} = e^{b \cdot \theta} \Rightarrow$$

$$\theta = \log_{e^b} \left(\frac{r}{a} \right)$$

Na forma paramétrica como (Figura 2.5):

$$\cos \theta = \frac{x(\theta)}{r} \qquad \sin \theta = \frac{y(\theta)}{r}$$

$$x(\theta) = r \cdot \cos \theta \qquad e \qquad y(\theta) = r \cdot \sin \theta$$

$$x(\theta) = a \cdot e^{b \cdot \theta} \cos \theta \qquad y(\theta) = a \cdot e^{b \cdot \theta} \sin \theta$$

A principal característica da espiral logarítmica é que a reta que contém r e a reta tangente a espiral formam um ângulo α que é mantido constante (Figura 2.6).

Uma *espiral áurea* ou *espiral dourada* é uma espiral logarítmica com um valor específico para o fator de crescimento b :

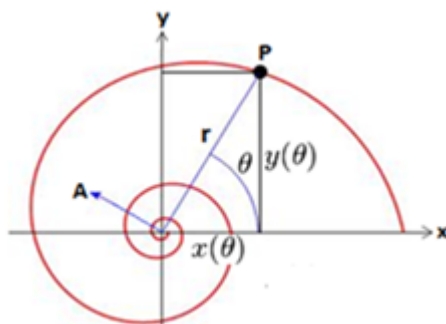


Figura 2.5: *Spira mirabilis*: forma paramétrica

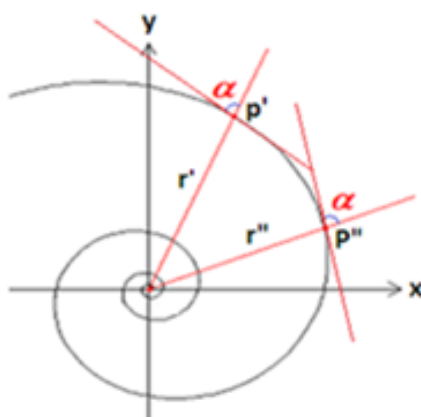


Figura 2.6: Principal característica da espiral logarítmica

$$\frac{\ln \Phi}{90^\circ} (\theta \text{ em graus}) \text{ ou } \frac{2 \ln \Phi}{\pi} (\theta \text{ em radianos})$$

onde a letra grega Φ representa o número de ouro.

Notadamente toda espiral áurea é uma espiral logarítmica, mas nem toda espiral logarítmica é uma espiral áurea. Partindo de um retângulo áureo MNOP (Figura 2.7a), com medidas indicadas (Figura 2.7b), pode-se construir a espiral de ouro (Figura 2.8), conforme passos a seguir:

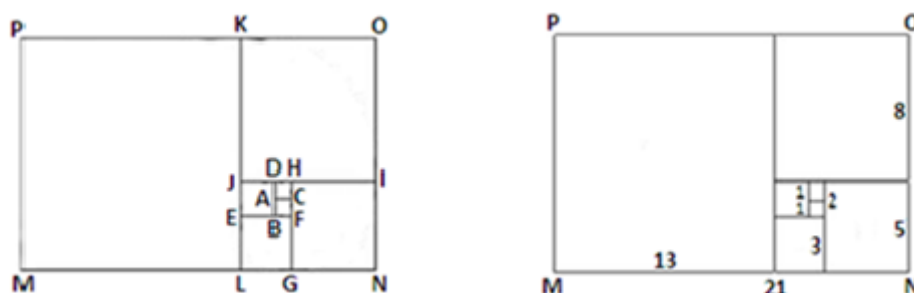


Figura 2.7: Espiral de ouro parte 01 (2.7a) e Espiral de ouro parte 02 (2.7b)

- 1º PASSO: Com centro em A e abertura AB trace o arco BC.
- 2º PASSO: Com centro em A e abertura AC trace o arco CD.
- 3º PASSO: Com centro em B e abertura BD trace o arco DE.
- 4º PASSO: Com centro em F e abertura FE trace o arco EG.
- 5º PASSO: Com centro em H e abertura HG trace o arco GI.
- 6º PASSO: Com centro em J e abertura JI trace o arco IK.
- 7º PASSO: Com centro em L e abertura LK trace o arco KM.

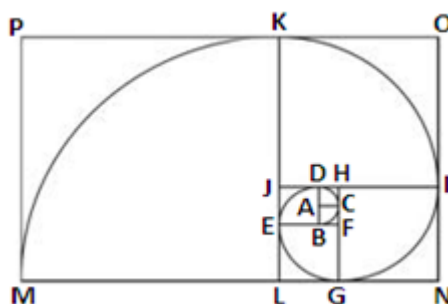


Figura 2.8: Espiral de ouro parte 03

Outros tipos de espirais:

Espiral de Arquimedes

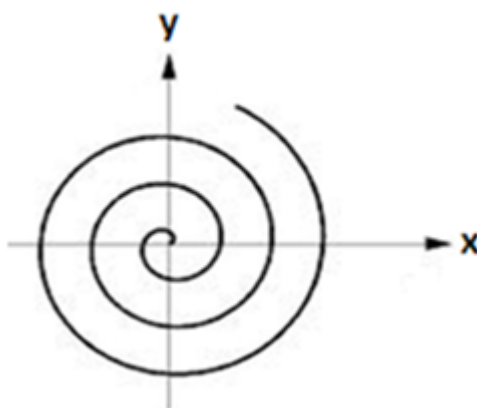


Figura 2.9: Espiral de Arquimedes

A espiral de Arquimedes (Figura 2.9) que também é chamada de espiral aritmética, com nome devido ao matemático grego Arquimedes, se define como o lugar geométrico de um ponto que se move a uma velocidade constante sobre uma reta que gira sobre um

ponto de origem fixa a uma velocidade angular constante. Em coordenadas polares (r , θ), a espiral de Arquimedes pode ser descrita pela equação:

$$r = a + b \cdot \theta$$

onde a e b são constantes reais. Quando o parâmetro a muda, a espiral gira, ainda que b controle a distância em giros sucessivos.

Espiral de Fermat

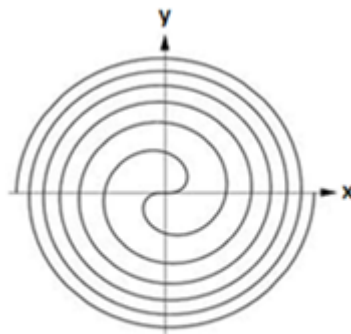


Figura 2.10: Espiral de Fermat

A espiral de Fermat (Figura 2.10) são as espirais parabólicas, uma família de curvas que podem ser geradas usando-se a equação polar:

$$r^2 = a^2 \cdot \theta$$

As espirais de Fermat são espirais parabólicas que num sistema de coordenadas polares (r , θ) seguem a seguinte equação geral:

$$r = \pm\theta^{0,5}$$

Isto é, no caso geral,

$$r^2 = a^2 \cdot \theta,$$

o que faz destas curvas um tipo específico de espiral de Arquimedes.

Espiral hiperbólica

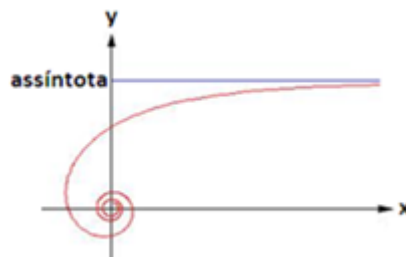


Figura 2.11: Espiral hiperbólica

A espiral hiperbólica (Figura 2.11) é uma curva plana transcendental, também conhecida como espiral recíproca. Define-se pela equação polar $r \cdot \theta = a$, e é a inversa da espiral de Arquimedes.

Espiral de lituus

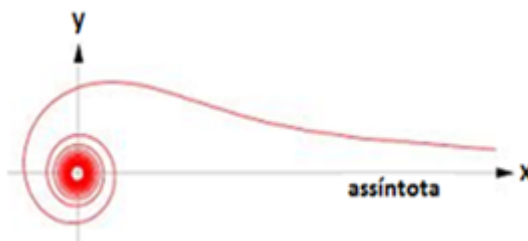


Figura 2.12: Espiral de lituus

A espiral de lituus (Figura 2.12) é a curva plana na qual o ângulo θ é inversamente proporcional ao quadrado do raio r , descrita em coordenadas polares pela equação:

$$r^2 = \frac{a}{\theta}$$

2.5 O pentágono/pentagrama regular

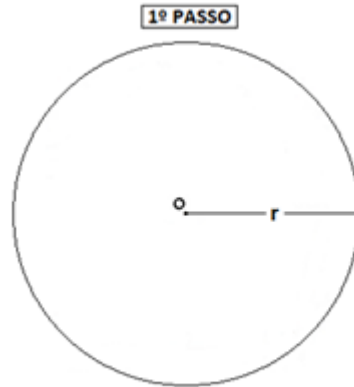
O pentágono de ouro nada mais é do que um pentágono regular. O pentágono regular se caracteriza por possuir:

1. Todos os seus lados congruentes (mesma medida);

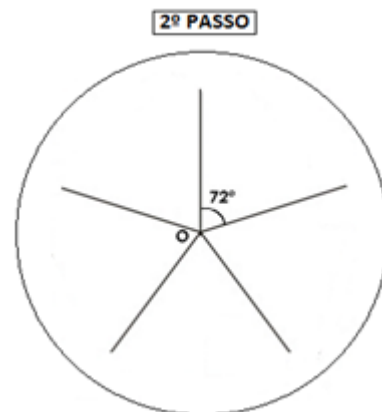
2. Todos os seus ângulos congruentes;
3. Todas as suas diagonais congruentes.

Pode-se construir um pentágono de ouro através dos passos:

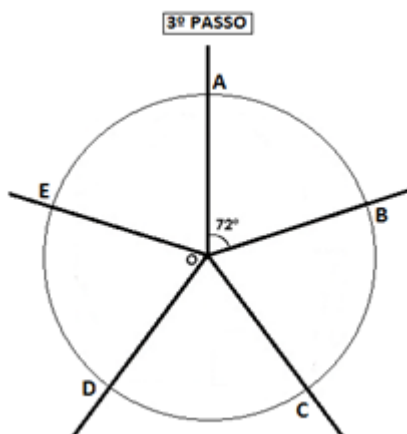
1º PASSO: Construa com um compasso uma circunferência de centro O e raio r qualquer.



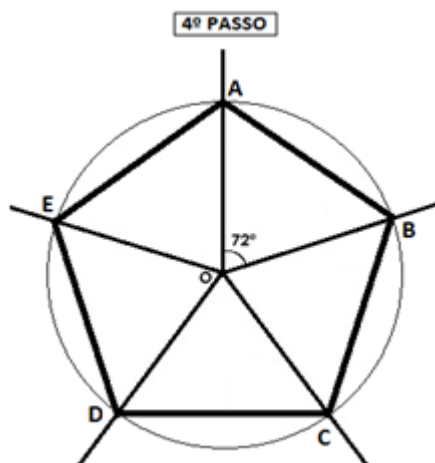
2º PASSO: Com um transferidor, divida o ângulo central de 360° em 5 (cinco) ângulos de medidas iguais a 72° (pois, $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$)



3º PASSO: Prolongue os lados dos ângulos obtidos no passo anterior de modo a intersectarem a circunferência nos pontos A, B, C, D e E.

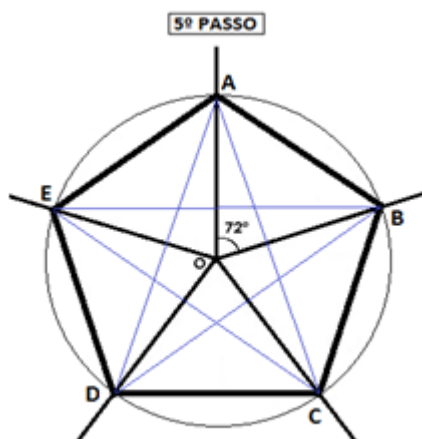


4º PASSO: Ligue os pontos obtidos no 3º PASSO.



Com mais um passo, podem-se construir uma estrela de 5 (cinco) pontas conhecida como **pentagrama**:

5º PASSO: Construa as diagonais do pentágono de ouro, ligando o ponto A ao ponto C, o ponto A ao D, o B ao D, o B ao E e o C ao E.



Quando traçadas as cinco diagonais do primeiro pentágono regular, estas formam um segundo pentágono regular, este sendo menor que o primeiro. Repetindo-se o processo neste segundo pentágono, obteremos o mesmo resultado, e assim por diante, infinitamente, o que nos deixa claro que a razão entre diagonal e lado em qualquer pentágono regular é um número não comensurável (Paterlini, 2004).

No pentagrama regular **ABCDE**, o pentágono menor **FGHIJ** (Figura 2.13) formado pelas intersecções das diagonais também está dentro da proporção do número de ouro, ou seja, a proporção áurea.

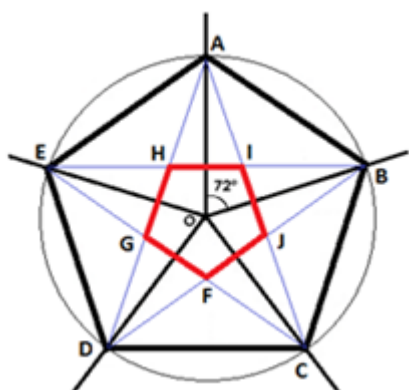


Figura 2.13: Pentagrama regular

O grande matemático Pitágoras quando descobriu essa proporção num pentagrama regular, adotou logo este símbolo estrelado (Figura 2.14) como a representação da Irmandade Pitagórica, que o influenciou a dizer que “tudo é número”.

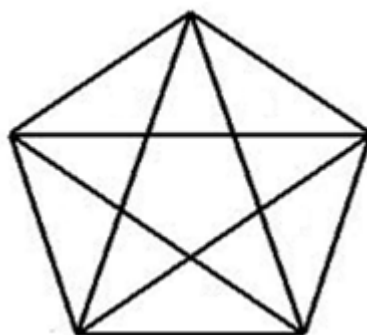


Figura 2.14: Símbolo estrelado da Irmandade Pitagórica

O pentagrama é uma das construções geométricas que ainda hoje fascina os estudiosos. Nele há várias razões áureas. Destas, duas merece destaque:

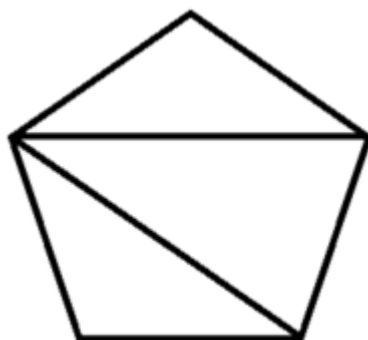


Figura 2.15: Pentágono regular dividido em triângulos

1ª) As diagonais do pentágono regular se dividem na razão áurea. Com efeito, o pentágono regular pode ser dividido em três triângulos (Figura 2.15).

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , temos que a soma dos ângulos internos de um pentágono é $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Em se tratando de um pentágono regular, segue que cada ângulo interno mede $540^\circ \div 5 = 108^\circ$.

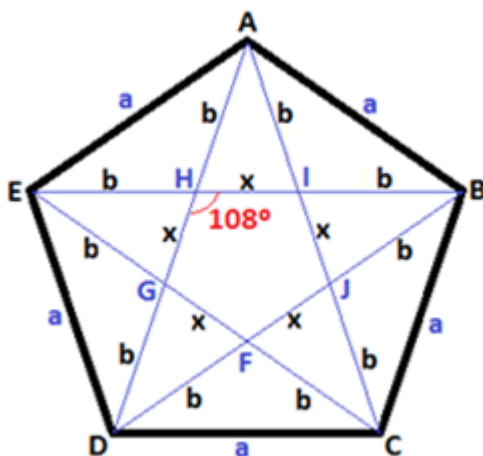


Figura 2.16: Descrição dos elementos do pentágono/pentagrama regular

- i. $m\angle HDB = m\angle HBD = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ (o triângulo HDB é isósceles).
- ii. $m\angle AHE = m\angle BHD = 108^\circ$ (ângulos opostos pelo vértice).
- iii. $m\angle AEH = m\angle EAH = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ (o triângulo AHE é isósceles).
- iv. Os triângulos HDB e HAE são semelhantes (caso AAA), que implica em:

$$\frac{b + x + a}{a} = \frac{b + x}{b}.$$

- v. Os triângulos FBE e HDB são congruentes (caso LLL).
- vi. $m\angle FEB = m\angle HBD = 36^\circ$ (os triângulos FBE e HDB são congruentes).
- vii. $m\angle DEC = 36^\circ$ (parcela que falta para completar 108° , pois $m\angle AED = 108^\circ$ e $m\angle AEB = m\angle FEB = 36^\circ$).
- viii. $m\angle EHD = 72^\circ$ (pois $m\angle EHB = 180^\circ$ e $m\angle BHD = 108^\circ$).
- ix. O triângulo DEH é isósceles ($m\angle EHD = 72^\circ$ e $m\angle DEH = m\angle DEC + m\angle FEB = 72^\circ$), que implica em $a = b + x$.

Retornando à relação $\frac{b+x+a}{a} = \frac{b+x}{b}$ (item iv.) e observando que (item ix.), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{b+x+a}{a} &= \frac{b+x}{b} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \\ &\Rightarrow a^2 = ab + b^2 \\ &\Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \\ \Rightarrow a &= \frac{-(-b) \pm \sqrt{(-b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b^2)}}{2 \cdot 1} \\ &\Rightarrow a = \frac{b \pm \sqrt{5b^2}}{2} \\ \Rightarrow a &= \frac{b + b\sqrt{5}}{2} \text{ (pois } a > 0 \text{ e } b > 0) \\ &\Rightarrow a = b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{b+x}{b} = \frac{a}{b} = \frac{b \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

2ª) As diagonais estão em razão áurea com os lados do pentágono regular.

De fato:

$$\begin{aligned} \frac{b+x+a}{a} &= \frac{a+b}{a} \\ &= 1 + \frac{b}{a} \\ &= 1 + \frac{b}{b \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)} \\ &= 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5} + 2}{1 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(3 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})} \\ &= \frac{3 - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 5}{1 - 5} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi \end{aligned}$$

2.6 A sequência de Fibonacci

Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa (1170-1250), filho de Bonacci, e por isso conhecido pelo apelido de Fibonacci (Figura 2.17), foi um matemático italiano dito como o primeiro grande matemático europeu depois da decadência helênica, teve um papel fundamental no desenvolvimento da matemática no mundo ocidental. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático da Idade Média. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos árabes na Europa.



Figura 2.17: Leonardo de Pisa (Fibonacci)

FONTE: virtualtourist.com/2012

Através do seu livro “Liber Abacci”, (1202), que continha todo o conhecimento sobre números e álgebra da época, Fibonacci criou o seguinte problema a título de ilustração de sua sequência: “Quantos pares de filhotes de coelhos nascem no decorrer de um ano, partindo inicialmente de um par de coelhos filhotes?”

Este problema sugere uma situação fictícia, onde os coelhos são colocados numa área em que nenhum coelho, externo ou interno, pode entrar ou sair do cercado; os coelhos não morrem de velhice, fome ou doença. Para que um par de filhotes possa procriar, é necessário que se passe dois meses após o seu nascimento e cada par de coelhos dá a luz a um único par de filhotes a cada mês. Sendo assim, no primeiro mês, o mês inicial, teríamos um par de coelhos (ainda filhotes). No mês seguinte ainda apenas um par de coelhos (agora adultos), no terceiro mês teremos o par inicial mais o seu par de filhotes. Ao quarto mês o par inicial dá a luz ao seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes). Nota-se que no próximo mês, o quinto, o número de pares de coelhos será a soma do número de pares de coelhos do mês atual, mais o número de pares de coelhos do mês anterior. Pois serão estes que irão contribuir com o acréscimo do número de coelhos para o próximo mês, já que quando chegar o quinto mês estarão aptos a procriar. Logo, o quinto mês terá cinco pares de coelhos: os três pares presentes no quarto mês, mais dois pares de filhotes, um par gerado pelo par inicial e o outro pelo primeiro par de filhotes que o par inicial teve.

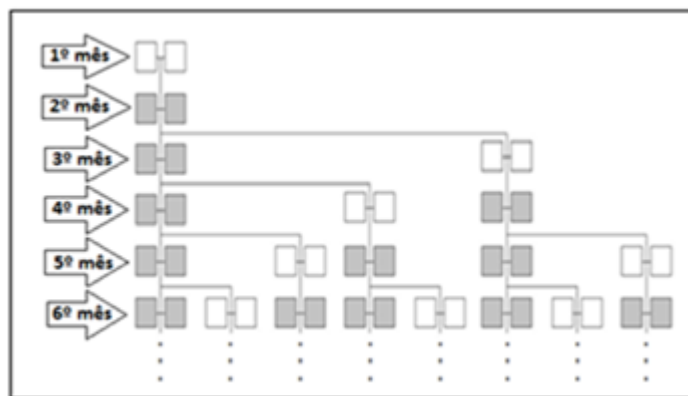


Figura 2.18: Sequência dos filhotes de coelhos

FONTE: Sung, 2012

Conforme se pode observar na Figura 2.18, os pares de coelhos filhotes são representados pelos quadros brancos e os adultos pelos quadros cinza. Colocando os números em uma tabela (Tabela 2.1), temos que ao longo de um ano o número de pares de coelhos será igual a 144.

Tabela 2.1: Totalização do problema dos coelhos nos 12 meses

MÊS	NÚMERO DE CASAIS DO MÊS ANTERIOR	NÚMERO DE CASAIS RECÉM-NASCIDOS (FILHOTES)	TOTAL DE CASAIS
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

A sequência dessa formação, portanto, pode ser descrita conforme a lei de recorrência abaixo:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, (n \in \mathbb{N} \text{ e } F_1 = F_2 = 1).$$

Um problema interessante diante de uma recorrência é determinar uma fórmula para o termo geral da sequência que a mesma representa sem recorrer aos termos anteriores. No caso da sequência de Fibonacci, existe uma fórmula chamada “fórmula de Binet”, que diz o seguinte:

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se que o n ésimo termo da sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots, F_n, \dots)$ é dado pela fórmula:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Esta fórmula pode ser verificada da seguinte forma:

1. Para $n = 1$, tem-se:

$$F_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1,$$

que é o 1º termo da sequência de Fibonacci.

2. Para $n = 2$, tem-se:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1,$$

que é o 2º termo da sequência de Fibonacci.

3. Para $n = 3$, tem-se:

$$F_3 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} - \frac{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2,$$

que é o 3º termo da sequência de Fibonacci.

Para concluir a verificação, suponhamos que a fórmula seja válida para um k -ésimo termo da sequência (diferente do 1º) e verifiquemos que também é válida para um $k + 1$ -ésimo termo:

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{2^2}\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

Há intermináveis exemplos nos quais a sequência de Fibonacci aparece na natureza. Na reprodução das abelhas, quando um óvulo não é fertilizado ele gera uma abelha macho, e quando ocorre a fertilização, gera uma abelha fêmea. Assim, uma abelha macho sempre terá como pai apenas uma abelha fêmea, ao passo que a abelha fêmea terá um casal de abelhas como pais. Pode-se determinar o número de abelhas em cada geração da árvore genealógica da abelha macho (Figura 2.19), usando a sequência de Fibonacci.

Uma abelha macho tem apenas um dos pais (pois vem de um ovo não fertilizado), ao passo que a abelha fêmea exige ambos os pais (pois vem de um ovo fertilizado).

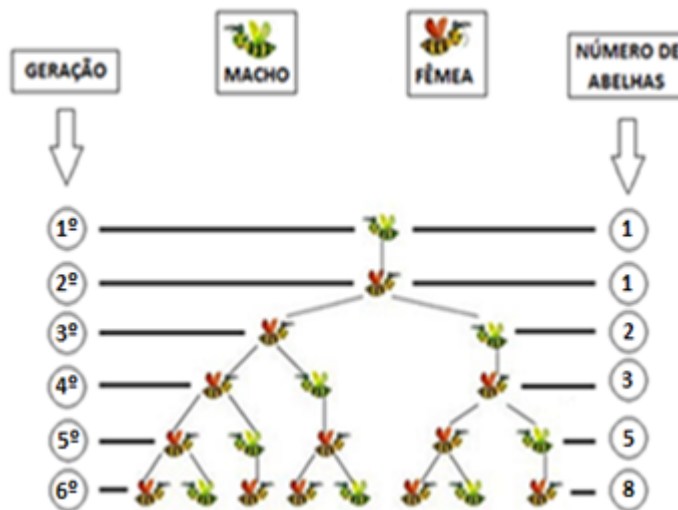


Figura 2.19: Árvore genealógica das abelhas

FONTE: Adaptado de Jordana Klein/2012

Logo, ao se analisar a árvore genealógica de um zangão, tem-se que seu gerador é sempre apenas uma abelha fêmea. Esta, por sua vez, tem um pai e uma mãe gerados por uma abelha fêmea e um par de abelhas macho e fêmea, respectivamente. Assim, tomando-se o número de abelhas de cada geração, tem-se a sequência de Fibonacci (Tabela 2.2).

Tabela 2.2: Número de abelhas por geração

GERAÇÃO	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	...	n ^a
NÚMERO DE ABELHAS	1	1	2	3	5	8	13	...	F _n

Outra propriedade torna essa sequência divina, pois o quociente entre o sucessor e o antecessor se aproxima, gradativamente, do número de ouro:

$$\begin{array}{ll}
 * \frac{1}{1} = 1,0000000000... & * \frac{144}{89} = 1,6179775280... \\
 * \frac{2}{1} = 2,0000000000... & * \frac{233}{144} = 1,6180555555... \\
 * \frac{3}{2} = 1,5000000000... & * \frac{377}{233} = 1,6180257510... \\
 * \frac{5}{3} = 1,6666666666... & * \frac{610}{377} = 1,6180371352... \\
 * \frac{8}{5} = 1,6000000000... & * \frac{987}{610} = 1,6180327868... \\
 * \frac{13}{8} = 1,6250000000... & * \frac{1597}{987} = 1,6180344487... \\
 * \frac{21}{13} = 1,6153846153... & * \frac{2584}{1597} = 1,6180338134... \\
 * \frac{34}{21} = 1,6190476190... & * \frac{4181}{2584} = 1,6180340557... \\
 * \frac{55}{34} = 1,6176470588... & * \frac{6765}{4181} = 1,6180339631... \\
 * \frac{89}{55} = 1,6181818181... & \dots
 \end{array}$$

Organizando numa tabela (Tabela 2.3), tem-se:

Tabela 2.3: Quocientes entre sucessores e antecessores da sequência de Fibonacci

n	F _n	F _n /F _{n-1}	F _n /F _{n-1}
1	1	-	-
2	1	1 ÷ 1	1,0000000000...
3	2	2 ÷ 1	2,0000000000...
4	3	3 ÷ 2	1,5000000000...
5	5	5 ÷ 3	1,6666666666...
6	8	8 ÷ 5	1,6000000000...
7	13	13 ÷ 8	1,6250000000...
8	21	21 ÷ 13	1,6153846153...
9	34	34 ÷ 21	1,6190476190...
10	55	55 ÷ 34	1,6176470588...

11	89	$89 \div 55$	1,6181818181...
12	144	$144 \div 89$	1,6179775280...
13	233	$233 \div 144$	1,6180555555...
14	377	$377 \div 233$	1,6180257510...
15	610	$610 \div 377$	1,6180371352...
16	987	$987 \div 610$	1,6180327868...
17	1597	$1597 \div 987$	1,6180344478...
18	2584	$2584 \div 1597$	1,6180338134...
19	4181	$4181 \div 2584$	1,6180340557...
20	6765	$6765 \div 4181$	1,6180339631...

Continuando de forma indefinida, a razão F_n/F_{n-1} tende ao número de ouro Φ . Com outra simbologia, tem-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{F_n}{F_{n-1}} \right) = \Phi$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{F_n}{F_{n-1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}} \right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}} \right]} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}} \\
 &= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 0 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - 0} \\
 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi
 \end{aligned}$$

É fácil perceber o que ocorre quando colocamos estas razões sucessivas (y) em um gráfico em que o eixo horizontal (x) indica os elementos da sequência de Fibonacci: As razões vão se aproximando do valor do Número de Ouro Φ . Quando n tende ao infinito, o limite é exatamente Φ (Figura 2.20).

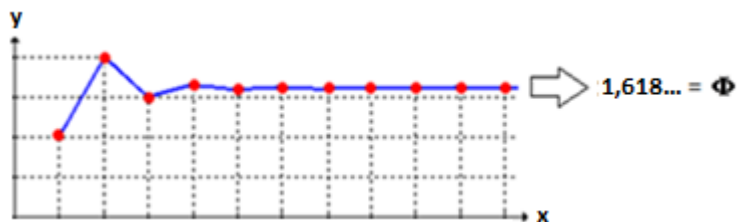


Figura 2.20: Gráfico da Sequência de Fibonacci

FONTE: Adaptado de Sercontel.com/2012

Anexando dois quadrados com lados unitários, ter-se-á um retângulo de lados 1 e 2, sendo o lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores. Anexa-se agora outro quadrado com lado igual a 2 (o maior lado do retângulo anterior, de lados 1 e 2) se terá um retângulo de lados 2 e 3. Continuam-se então a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos no passo anterior (Figura 2.21). A sequência dos lados dos quadrados será: 1,1,2,3,5,8,13,21.... , que é a sequência de Fibonacci.

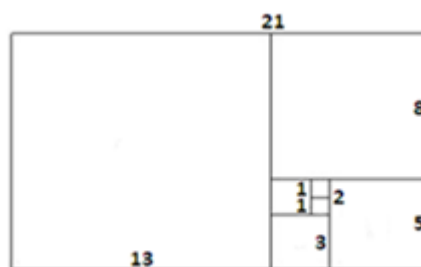


Figura 2.21: Sequência dos lados do quadrado

FONTE: Sung/2012

Portanto, a razão entre, por exemplo, 144 e 89 (dois de seus respectivos termos) têm como resultado, aproximadamente, 1,618. Quando isto ocorre, diz-se que o retângulo em questão é áureo.

O retângulo de ouro, portanto, é um objeto matemático que marca forte presença nas artes, na arquitetura, na pintura, e até mesmo na publicidade. Este fato não é uma simples

coincidência, já que muitos testes psicológicos demonstraram que o retângulo de ouro é de todos os retângulos o mais agradável à vista. Até hoje não se conseguiu descobrir a razão de ser dessa beleza, mas a verdade é que existem inúmeros exemplos onde o retângulo de ouro aparece.

Até mesmo nas situações mais práticas do nosso cotidiano, podem-se encontrar aproximações do retângulo de ouro como, por exemplo, o caso dos cartões de crédito, bilhetes de identidade, assim como a forma retangular da maior parte dos livros.

O retângulo de ouro está interligado com outros conceitos matemáticos, tais como séries infinitas, sólidos platônicos, espirais logarítmicas, limites e outros.

2.7 Duas outras formas matemáticas de encontrar o número de ouro

1ª FORMA: A expressão $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$ converge para o número de ouro Φ .

Com efeito, fazendo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1} \\ x_2 &= \sqrt{1 + \sqrt{1}} \\ x_3 &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} \\ x_4 &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Tem-se, de modo geral, a recorrência:

$$x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}.$$

Considerando que o número natural n tenda ao infinito e usando uma simbologia adequada, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + x_{n-1}},$$

que resulta em:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{1 + L} \Rightarrow \\ L^2 &= 1 + L \Rightarrow \\ L^2 - L - 1 &= 0 \Rightarrow \\ L &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \\ L &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \\ L &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi. \end{aligned}$$

2ª FORMA: A expressão $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$, também, converge para o número de ouro Φ .

Com efeito, fazendo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \frac{1}{1} \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \\ x_3 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Tem-se, de modo geral, a recorrência:

$$x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$$

Considerando novamente que o número natural n tenda ao infinito e na mesma sim-bologia anterior, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$$

que resulta em:

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow \\ L^2 &= L + 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L^2 - L - 1 &= 0 \Rightarrow \\L &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \\L &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \\L &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.\end{aligned}$$

Capítulo 3

Aplicações do Número de Ouro

O homem sempre tentou alcançar a perfeição, seja nas pinturas, nos projetos arquitetônicos, na tecnologia, na música e até mesmo no próprio corpo. Com isso, se apoderou do “fascinante” número de ouro, tendo como objetivos, alcançar tal perfeição.

3.1 Na arte

A proporção áurea foi usada de forma significativa e bastante expressiva na arte. Em obras como “O Nascimento de Vênus” (Figura 3.1), quadro de Botticelli, em que Afrodite está na proporção áurea. A história conta que esta proporção estaria ali aplicada pelo motivo do autor ser um representante da perfeição e da beleza.



Figura 3.1: O Nascimento de Vênus

FONTE: Wikipedia/2012

Em “O Sacramento da Última Ceia” (Figura 3.2) de Salvador Dalí, as dimensões do

quadro, que media aproximadamente $270\text{cm} \times 167\text{cm}$, estão na razão áurea. Na história da arte renascentista a perfeição da beleza em quadros foi bastante explorada com base nesta constante de ouro. Vários pintores e escultores lançaram mão das possibilidades que a “proporção divina” os dava de retratar a realidade com mais beleza e perfeição



Figura 3.2: O Sacramento da Última Ceia

FONTE: Wikipedia/2012

O quadro da Mona Lisa (Figura 3.3) de Leonardo da Vinci utiliza o número de ouro nas relações entre seu tronco e cabeça, e também entre elementos do rosto. Desenhando um retângulo à volta da face, o retângulo resultante é um retângulo de ouro. Dividindo este retângulo por uma linha que passe na altura dos olhos, o novo retângulo obtido também é um retângulo de ouro. As dimensões do quadro também representam a razão de ouro.



Figura 3.3: A Mona Lisa

FONTE: Wikipedia/2012

Em Piet Mondrian, pintor contemporâneo, nascido na cidade de Amersfoort, a segunda

maior da província de Utrecht na Holanda, dedicou a sua vida à arte, desenvolvendo diversas obras que se eternizaram por toda parte do mundo, dentre elas pode-se verificar a aplicação do número de ouro, conforme apresenta a Figura 3.4:

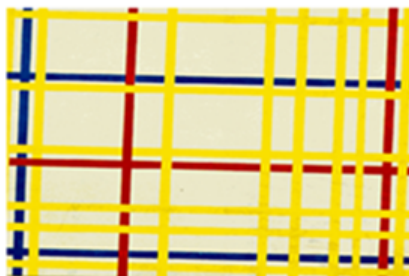


Figura 3.4: Tabuleiro com cores claras de Piet Mondrian

FONTE: Moreira, 2011

3.2 No corpo humano

No corpo humano o Número Divino aparece nas orelhas, nas falanges dos dedos, na razão entre o tamanho do braço e a mão, na razão entre a altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão, na razão entre a medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo, na razão entre a altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça, na razão entre a medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax, na razão entre a medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho até o chão, na razão entre a medida do ombro à ponta do dedo e a medida central até a ponta, na razão entre a medida do cotovelo até o pulso e a medida do seu pé, entre outros. Segundo especialistas da área da beleza estética, uma orelha perfeita seria aquela que se encaixaria em uma espiral logarítmica, mas precisamente a espiral áurea, que é um caso particular. Seria mito ou verdade? (Figura 3.5).

Segundo Leonardo da Vinci, para que o corpo humano tenha beleza e harmonia deve respeitar uma proporção, e como o número áureo representa esta beleza, então o corpo humano deve seguir este padrão áureo.



Figura 3.5: Beleza estética: a orelha perfeita

FONTE: Educ/2012

O Homem Vitruviano (Figura 3.6) transformou-se em um ícone de beleza e estética por toda parte do mundo, até mesmo nos dias atuais. Esse conceito de proporção humana influenciou a estética de muitos pintores, arquitetos e engenheiros. As proporções do corpo humano contêm a relação de ouro. Da Vinci, em seus estudos de Anatomia, trabalhou com um modelo padrão (O Cânon) para a forma de um ser humano, utilizando Vitruvius como modelo. Tais dimensões aparecem na gravura abaixo, onde a notação $a : b = c : d$ representa uma proporção.

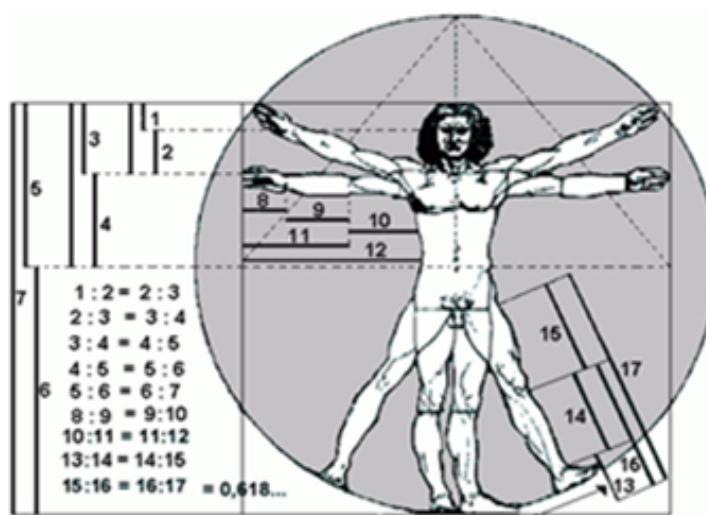


Figura 3.6: Representação do homem por Da Vinci

FONTE: Wikipedia/2012

A excelência dos desenhos de Leonardo da Vinci revela os seus conhecimentos matemáticos bem como a utilização da razão áurea como garantia de uma perfeição, beleza e harmonia. Muitos estudos demonstram que o número de ouro está presente também na

beleza do sorriso e da dentição.



Figura 3.7: Arcada dentária superior

FONTE: Educ/2012

O posicionamento correto da arcada dentária, mais precisamente os quatro dentes frontais de cada lado da arcada superior (Figura 3.7), encontram-se na razão áurea. Por isso, em reconstruções estéticas de dentições, utiliza-se a razão de ouro para a obtenção de um conjunto com grande proporcionalidade e harmonia.

3.3 Na literatura

Na literatura, o número de ouro encontra sua aplicação mais notável no poema épico grego “Ilíada”, de Homero, que narra os acontecimentos dos últimos dias da Guerra de Tróia. Quem o ler notará que a proporção entre as estrofes maiores e menores dá um número próximo de 1,618, que é o número de ouro.

Luís de Camões na sua obra “Os Lusíadas”, colocou a chegada à Índia no ponto que divide a obra na razão de ouro. Virgílio em sua obra “Eneida” construiu a razão áurea com relação às estrofes maiores e menores.

3.4 Na arquitetura

Os arquitetos e artistas da Grécia Antiga perceberam que a razão de ouro e o retângulo de ouro potenciavam o valor estético dos monumentos e das esculturas. Conheciam a razão de ouro, como construí-la, como obter aproximações e como usá-la para construir retângulos de ouro. O Parthenon (Figura 3.8), monumento de beleza inigualável, construído em Atenas por volta dos anos 430-440 a.C., ilustra com perfeição o uso arquitetônico do retângulo de ouro.



Figura 3.8: O Parthenon

FONTE: Matemática na veia/2012

Os egípcios, na construção das pirâmides, também utilizavam o número de ouro (Figura 3.9). Cada bloco da pirâmide é aproximadamente 1,618 vezes maior que o bloco do nível acima. As câmaras no interior dessas pirâmides foram projetadas de tal forma que seu comprimento fosse aproximadamente 1,618 vezes a sua largura.

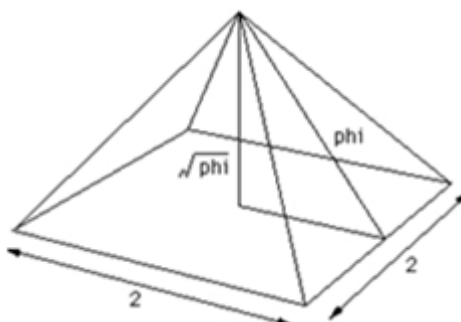


Figura 3.9: A pirâmide egípcia

FONTE: Jamal, 2010

De fato, para a pirâmide de Quéops, tem-se:

1. Altura aproximada da pirâmide: 146,6m
2. Dimensões aproximadas da base: 230,4m × 230,4m.

Como a base da pirâmide é um quadrado de lado 230,4m e a altura da mesma é 146,6m, então, pelo teorema que é conhecido como “Teorema de Pitágoras”, tem-se:

$$\begin{aligned} (\text{Altura da face lateral})^2 &= (146,6)^2 + \left(\frac{230,4}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ (\text{Altura da face lateral})^2 &= 21491,56 + 13271,04 \Rightarrow \\ (\text{Altura da face lateral})^2 &= 34762 \end{aligned}$$

$$\text{Altura da face lateral} = 186,41782459$$

Dividindo-se a altura da face lateral pela metade do lado da base, tem-se:

$$\frac{\text{altura da face lateral}}{\text{altura do lado da base}} = \frac{186,41782459}{115,165} \cong 1,618 \cong \Phi$$

Os Egípcios consideravam o número de ouro muito sagrado, sendo de uma importância extrema na religião, e o chamavam não de número de ouro, mas de “número sagrado”. Utilizavam-no para a construção de templos e sepulcros para os mortos, pois consideravam que caso isto não acontecesse a alma do falecido não conseguiria chegar ao seu destino. Além disso, os Egípcios consideravam-no muito agradável esteticamente, usando-o também na decoração dos seus templos.

O Papiro de *Ahmes* (Figura 3.10), mostra os planos para a construção da Grande Pirâmide de Gizé (Figura 3.11), com proporções de acordo com o “número sagrado”. Medidas feitas recentemente nesta pirâmide mostram que seus lados são aproximadamente lados de triângulos de ouro.

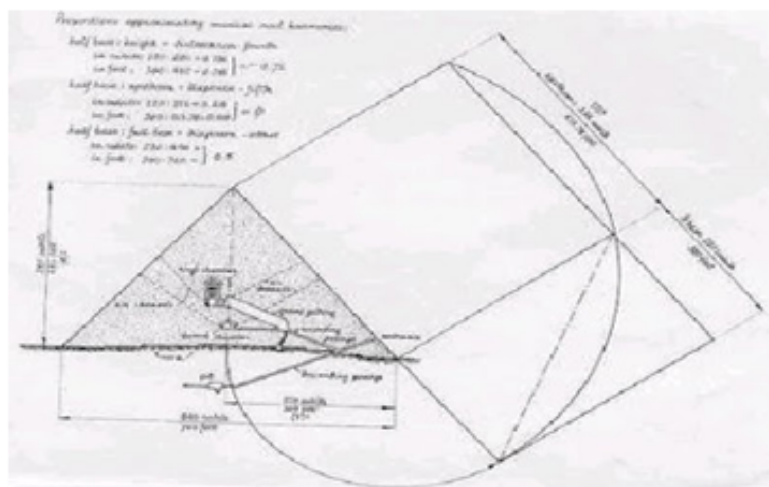


Figura 3.10: O Papiro de Ahmes

FONTE: Matemática na veia/2012



Figura 3.11: A Pirâmide de Gizé

FONTE: Matemática na veia/2012

Baseado na razão de ouro, nos números de Fibonacci e nas dimensões médias do corpo humano, o arquiteto Le Corbusier construiu, em 1946, um esquema de proporções relativas ao corpo chamado “*Modulor*”. Trata-se de uma sequência de medidas que Le Corbusier usou para encontrar harmonia em suas composições (Figura 3.12).

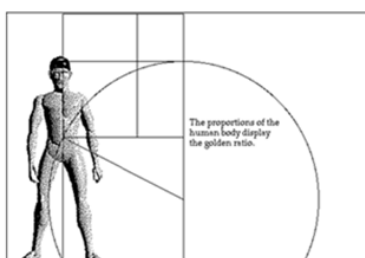


Figura 3.12: O Modulor de Le Combuser

FONTE: POSSEBON, 2004

Modulor é uma palavra composta a partir de module, ou seja, unidade de medida, e *section d’or* ou secção de ouro: a divisão de uma reta de tal modo que o segmento menor está para o maior assim como o segmento maior está para o todo.

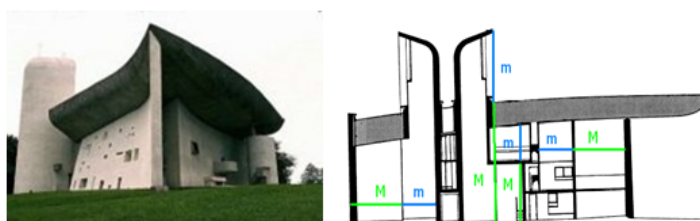


Figura 3.13: O chapel de Notre Dame du Haut

FONTE: Ferrer, 2010

O Modulor é um sistema de proporcionalamento do espaço arquitetônico (Figura 3.13) baseado neste critério geométrico, que oferece toda uma gama de dimensões. As dimensões medianas estão relacionadas com o corpo humano e as dimensões extremas aplicam-se, por um lado, aos detalhes diminutos dos instrumentos de precisão e, por outro lado, à escala dos grandes projetos de planejamento (SUMMERSON, 1999).



Figura 3.14: A sede da ONU

FONTE: Jamal, 2010

Essa proporção está presente, no mundo contemporâneo, a exemplo, no prédio da Organização das Nações Unidas - ONU (Figura 3.14), em Nova York, um edifício desenvolvido a partir dos projetos arquitetônicos do brasileiro Oscar Niemeyer e do franco-suíço Le Corbusier.

3.5 Na natureza

Os números de Fibonacci podem ser usados para caracterizar diversas propriedades na Natureza. O modo como as sementes estão dispostas no centro de diversas flores é um desses exemplos. A Natureza “arrumou” as sementes do girassol (Figura 3.15) sem intervalos, na forma mais eficiente possível, formando espirais logarítmicas que tanto curvam para a esquerda como para a direita (VIDAS VEDOVELLI, 2005).



Figura 3.15: Sementes de girassol

FONTE: Vidas Vedovelli, 2005

Nessas sementes, da família *Compositae*, formam dois conjuntos de espirais logarítmicas com sentidos diferentes. Cada conjunto tem um número de sementes e os dois conjuntos tem dois números de sementes que são consecutivos da sequência de Fibonacci (VIDAS VEDOVELLI, 2005).

Note-se que os números de espirais em cada direção são, quase sempre, vizinhos na sequência de Fibonacci. O raio destas espirais varia de espécie para espécie de flor. Também muitas plantas mostram números de Fibonacci nos arranjos das suas folhas. Ao se pegar numa folha qualquer a que se designa folha-zero e contar o número de folhas até alcançar outra folha com a mesma orientação da folha-zero, verifica-se que o número total de folhas é um número de Fibonacci (Figura 3.16).

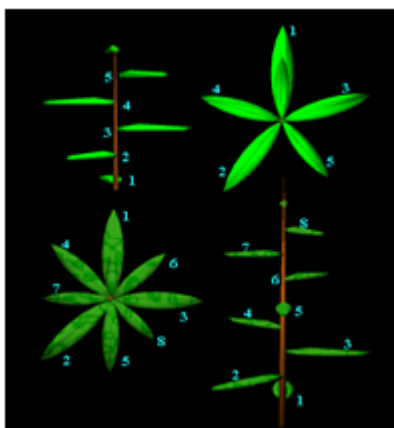


Figura 3.16: Arranjo de folhas

FONTE: Educ, 2012

Na figura abaixo (Figura 3.17), considere-se que exista um padrão helicoidal para a esquerda ou para a direita com relação às folhas em torno do caule. Cada conjunto de 3

folhas consecutivas (1,2,3) nascem formando um mesmo ângulo entre 1 e 2 e entre 2 e 3, mantendo uma certa distância ao longo do caule.

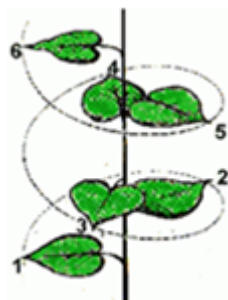


Figura 3.17: Padrão angular de folhas em torno do caule

FONTE: Mendes, 2007

Assim, a folha 3 forma um ângulo com 2 da mesma forma que a folha 2 forma com 1. Admitindo-se o mesmo padrão para todas as folhas restantes. Neste exemplo, tem-se 5 folhas num trajeto de 2 voltas. Cada volta é entendida como uma rotação de 360° para que uma folha possa se sobrepor sobre a outra. Para que isto ocorra cada ângulo deverá ser igual a $2 \cdot 180^\circ \div 5 = 144^\circ$.

Veja-se agora, o caso da planta "*Achillea ptarmica*" (Figura 3.18) onde se observa em seu crescimento que o número de ramos vai seguindo a sequência de Fibonacci.

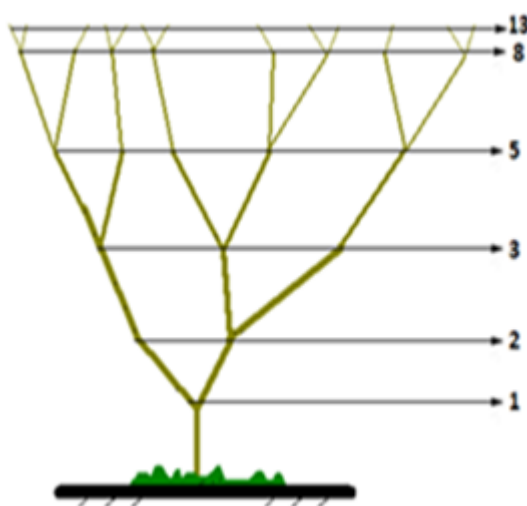


Figura 3.18: *Achillea ptarmica*

FONTE: Mendes, 2007

São frequentes na natureza estruturas que tem uma proximidade muito relevante com a espiral logarítmica, como por exemplo, as teias de aranhas e as conchas de moluscos.

Muitos afirmam que as conchas dos náutilos (Figura 3.19), um tipo de molusco cefalópode, assumem o formato de uma espiral. Quando o animal que vive na concha vai crescendo, é necessário que ela, também, cresça para acomodar o animal. A maneira com que as conchas crescem permite que a sua forma se mantenha em forma de espiral. As medidas dos segmentos que unem o centro da concha aos pontos da concha aumentam, mas as amplitudes dos ângulos formados por esses segmentos e as tangentes à concha mantêm-se, ou seja, as conchas seguem o formato de uma espiral logarítmica.

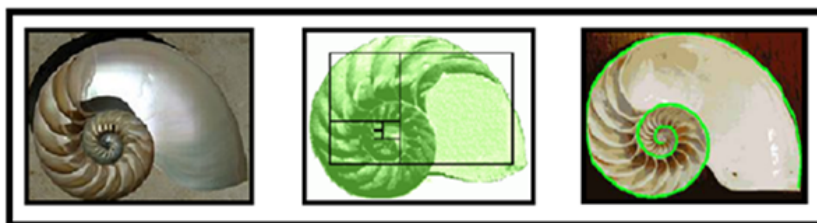


Figura 3.19: Conchas dos náutilos

FONTE: Educ, 2012

Uma observação que merece destaque é com relação aos insetos (mosquitos), que se aproximam da luz segundo uma espiral logarítmica, pois seu voo segue um ângulo constante com relação à fonte luminosa. Outra observação também intrigante é com relação ao “falcão peregrino” (Figura 3.20), que ao mergulhar com o objetivo de conseguir uma presa, em vez de utilizar o caminho mais curto, que é em linha reta, faz seu trajeto de forma muito semelhante a uma espiral logarítmica.



Figura 3.20: Falcão peregrino

FONTE: Educ, 2012

3.6 Na música

De acordo com o dicionário, a música é uma sucessão de sons agradáveis ao ouvido. Também podemos dizer que música é “ritmo e som”, ou seja, é uma combinação de sons executados em determinada cadência. Para que a música seja agradável, precisa de uma harmonia entre os acordes e isto é obtido usando a matemática.

Pitágoras de Samos (582-497 a.C.) é considerado o fundador da geometria teórica. Em seus pensamentos sobre a estrutura do universo, razões e proporções, ele elaborou uma teoria que vinculava a música, o espaço e os números (BELUCCI, 2008).

Em duas cordas, de mesmo material, sob mesma tensão e sendo a primeira o dobro do comprimento da segunda, quando tocadas, a corda mais curta irá emitir um tom uma oitava acima da corda mais longa, devido a sua frequência ter o dobro do valor. Ou seja, a relação de 1:2 compreende a relação sonora de uma oitava (BELUCCI, 2008).

Desta maneira, Pitágoras elaborou relações entre sons, o tamanho das cordas e as razões de 1:2:3:4. Ainda sobre os pensamentos pitagóricos, podem-se obter três tipos de proporções: (a) a proporção geométrica se estabelece entre oitavas de um tom, ou seja, 1:2:4 o tom uma oitava acima e duas oitavas acima; (b) a proporção aritmética, ao se apropriar da relação de 2:3:4, se estabelece ao trabalhar o som de uma oitava em uma quinta e uma quarta e (c) a proporção harmônica envolve a diferença dos valores das frações medianas, isto é, na relação de 6:8:12, 8 excede 6 em um terço da mesma maneira que 12 excede 8 também em um terço (BELUCCI, 2008).

A proporção harmônica pode ser considerada uma subversão da proporção aritmética, trabalhando o som de uma oitava em uma quarta e uma quinta. Na música, existem artigos que relacionam as composições de Mozart, Bethoveen (Quinta Sinfonia), Schubert e outros com a razão áurea. Pode-se verificar na Figura 3.21 que até mesmo a construção de instrumentos, como exemplo o violino, está relacionado com a proporção áurea.

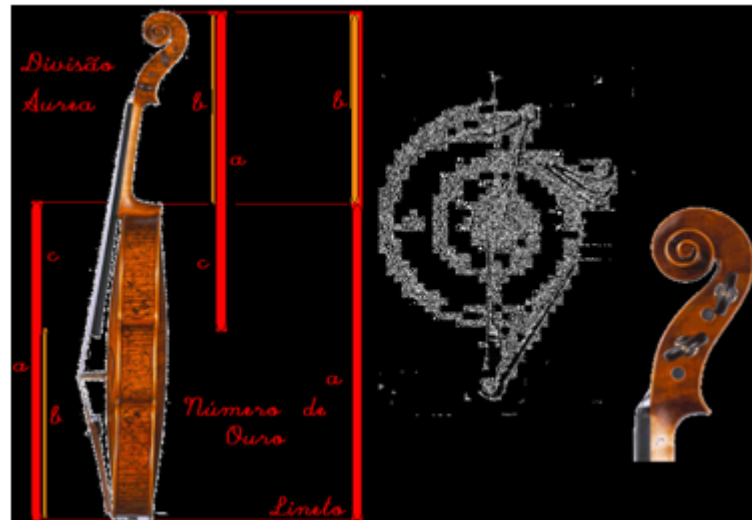


Figura 3.21: Violino

FONTE: Belucci, 2008

3.7 Na religião e misticismo

A humanidade sempre relatou ter em sua volta um mundo de forças estranhas e energias ocultas que muitas vezes não conseguia entender ou identificar. Por este motivo, sempre buscou proteção contra os perigos e riscos que faziam parte de seus medos, apegando-se à objetos, imagens, amuletos, entre outros, ao qual viraram símbolos e tradições entre os povos e suas gerações.



Figura 3.22: O Pentagrama

FONTE: Ayres, 2011

O pentagrama (Figura 3.22) está entre os principais e mais conhecidos símbolos, por possuir diversas representações e significados. Passou de um símbolo cristão para a atual referência onipresente entre os neopagãos com vasta profundidade “mágica” e demoníaca.

Os Pitagóricos usaram também a seção de ouro na construção da estrela pentagonal. O

Pentagrama ou “A estrela de Pitágoras” é a estrela de cinco pontas formada pelas diagonais de um pentágono regular. O pentágono regular era de grande significação mística para os Pitagóricos e já era conhecido na antiga Babilônia. Figuras de muitos significados para a Matemática e a Filosofia da Escola Pitagórica (COSTA, 2011).

Sobre a relação dos Pitagóricos com o Pentagrama, foi seu primeiro contato com os números irracionais, representados pelo Número de Ouro que “é um número irracional misterioso e enigmático que surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, sendo considerada por muitos como uma oferta de Deus ao mundo” (EDUC, 2011).

Os Pitagóricos usaram também a secção de ouro na construção da estrela pentagonal e não conseguiram exprimir a razão existente entre o lado do pentágono regular estrelado e o lado do pentágono regular inscrito numa circunferência como quociente entre dois números inteiros. Quando chegaram a esta conclusão ficaram muito espantados, pois tudo isto era muito contraditório com relação à lógica que conheciam e defendiam. Motivo pelo qual chamaram este número de irracional.

Foi o primeiro número irracional que de fato tinha aceitação. Este número era o *número* ou *secção de ouro*, apesar deste nome só lhe ser atribuído uns dois mil anos depois.

O pentagrama é um símbolo muito mais antigo do que se pode pensar. No ocidente alguns afirmam que este símbolo nasceu com Salomão, porém, ele já era usado no Antigo Egito onde há registros em tumbas e sarcófagos. Sempre esteve associado com o mistério e a magia. Ele é a forma mais simples de estrela, que deve ser traçada com uma única linha, sendo conseqüentemente chamado de “Laço Infinito” (AYRES, 2011).

Ele pode ser desenhado com uma única linha, representando a energia espiritual e mágica que desce desde o vértice superior e circula ao inferior esquerdo e daí ao direito, indo ao esquerdo e ao inferior direito e que novamente ascende o superior, num fluxo e refluxo energético contínuo e dinâmico. Sobre a relação do Pentagrama e o número cinco, considerado positivo e benéfico, com a obra maçônica, reproduzo o seguinte texto, sobre um tema que é rico e continua a oferecer muitos significados, cabendo também, o símbolo, como um elemento de meditação e reflexão sobre o verdadeiro local do templo (e athanor) onde se realiza a Obra do Caminho Real (AYRES, 2011).

O número cinco representa os elementos da natureza: a terra, a Água, o Ar, o Fogo e

a Semente ou Germe. Penta, em grego, expressa o número cinco e serve de prefixo para diversas palavras, como exemplo, Pentágono, Pentagrama e Pentateuco. Já no misticismo numérico de Saint-Martin, o quinário é o número do princípio maléfico, portanto, diferindo da interpretação maçônica (AYRES, 2011).

3.8 Na tecnologia

Atualmente essa proporção ainda é muito usada. Ao padronizar internacionalmente algumas medidas usadas em nosso dia-a-dia, os projetistas procuraram “respeitar” a proporção divina. A razão entre o comprimento e a largura de um Cartão de Crédito, identidades, modelo da carta de condução, embalagens, alguns livros, jornais, uma foto revelada entre outros (PUHL, 2009).



Figura 3.23: Proporção áurea utilizada na tecnologia

FONTE: PUHL, 2009

Pode-se encontrar essa razão em vários produtos do nosso cotidiano, como por exemplo, nas dimensões da antiga fita cassete, nas dimensões das fotografias, nas proporções de algumas máquinas fotográficas e alguns notebooks, nas proporções de alguns televisores do tipo LCD, nos espelhos das tomadas e interruptores, nos cartões de crédito, entre outros (Figura 3.23).

Capítulo 4

Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

Segundo Lucke André (1986), para realizar uma pesquisa é preciso promover um confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele.

Esse conhecimento não é somente fruto da curiosidade, da inquietação, da inteligência e da atividade investigativa do pesquisador, mas também da continuação do que foi elaborado e sistematizado pelos que já trabalharam o assunto anteriormente. Caracteriza-se pela modalidade documental, sendo um tipo de pesquisa mais profunda, havendo um estudo descritivo, baseando-se em fatos históricos, portanto, analítico e estatístico.

4.1 Campo da pesquisa

A pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - IFMA, Campus Timon, durante as aulas da disciplina Matemática, no turno matutino, no período de setembro a novembro de 2012.

As aulas foram ministradas para 120 (cento e vinte) alunos, distribuídos em 03 (três) turmas distintas: 44 (quarenta e quatro) alunos do curso de Eletroeletrônica integrado ao Ensino Médio (TURMA A), 41 (quarenta e um) alunos do curso de Eletromecânica integrado ao Ensino Médio (TURMA B) e 35 (trinta e cinco) alunos do curso de Edificações integrado ao Ensino Médio (TURMA C), todos do turno manhã, módulo 02 (correspondente ao 2º semestre do 1º ano do Ensino Médio), ingressantes no ano 2012.

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

As avaliações foram realizadas através de observações e de resoluções de situações problema, escritas em listas de exercícios de forma subjetiva e também por práticas realizadas por alunos envolvidos no processo, de maneira essencialmente formativa, contínua e processual.

No decorrer da pesquisa foi aplicado um questionário (APÊNDICE A) aos alunos sobre opiniões com relação à aula trabalhada tendo como base a explanação do “numero de ouro” no quadro acrílico, e também, o método de oficina/prática utilizando este número; a assimilação melhor do conteúdo a partir da exposição do número de ouro no quadro acrílico ou através da oficina/prática; a relação direta da matemática com o cotidiano a partir deste tipo de conteúdo; conteúdos que deveriam ser mais explorados para a melhor compreensão da matemática, tanto em sala de aula quanto na aplicação cotidiana; aprendizado destes conteúdos abordados como oficina/prática; método de oficina/prática como uma forma de identificar o aluno com o meio social, considerando que a matemática é uma ciência presente não somente pela exatidão, mas também pela sua aplicabilidade.

A pesquisa analisou os impactos provocados pela aula tradicional envolvendo o “Número de ouro” no contexto da prática pedagógica da Educação Básica de nível médio e a contextualização deste número através de oficina/prática. Buscou-se dois métodos de ensino, importando verificar o melhor entendimento do educando no processo de ensino-aprendizagem. Portanto, os conteúdos consistiram primeiramente no que se segue:

1º EIXO: aula tradicional

1. Identificação do tema da aula tradicional:

- O número de ouro.

2. Conteúdo programático da aula tradicional:

- Conceito do número de ouro e fatos históricos;
- Razão áurea;
- Retângulo áureo;
- Pentágono/pentagrama de ouro;
- Espiral áurea;
- Sequência de Fibonacci;
- Aplicações do número de ouro

3. Objetivos da aula tradicional:

- Conhecer o número de ouro a partir da razão áurea, retângulo áureo, espiral áurea,

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

pentágono áureo, sequência de Fibonacci e fatos históricos relacionados a este número;

- Identificar a razão áurea na arte, corpo humano, literatura, arquitetura, natureza, música e religião/misticismo;

- Utilizar a equação de segundo grau como instrumento de cálculo para obtenção do número de ouro;

- Aplicar conceitos de geometria e desenho geométrico na obtenção da razão áurea, envolvendo dimensões de retângulos e de pentágonos de ouro.

4. Procedimentos metodológicos da aula tradicional:

- Exposição do conteúdo “número de ouro” no quadro acrílico;

- Resolução de exercícios envolvendo “número de ouro”;

- Apresentação e verificação de situação onde se encontra o “número de ouro”;

- Resolução de situações problema envolvendo “numero de ouro”.

5. Recursos instrucionais da aula tradicional:

- Quadro acrílico;

- Pincel para quadro acrílico;

- Apagador;

- Lista de exercícios com situações problema.

6. Procedimentos avaliativos da aula tradicional:

- A avaliação é essencialmente formativa, contínua e processual, vista como instrumento dinâmico de acompanhamento pedagógico do aluno e do trabalho do professor;

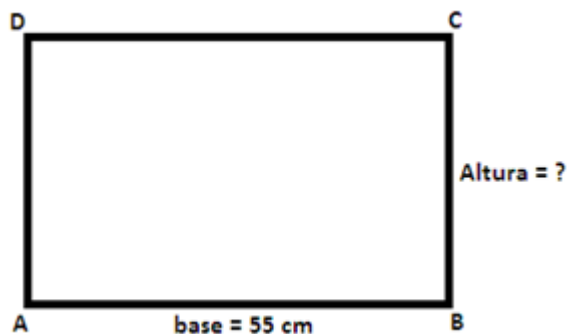
- A avaliação procederá através de observações e de resoluções de situações problema escrita em listas de exercícios e de forma subjetiva, realizadas de forma individual por alunos envolvidos no processo de investigação.

7. Previsão do tempo da aula tradicional:

- 04 (quatro) horas.

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

1ª Atividade: Supondo que o retângulo ABCD da figura abaixo seja um retângulo de ouro e que sua base mede 55cm. Qual é a medida de sua altura em centímetros?



2ª Atividade: Os arquitetos e artistas da Grécia Antiga sentiram que a razão de ouro e o retângulo de ouro potenciavam um valor estético dos monumentos. Conheciam a razão de ouro e como usá-la para construir o retângulo de ouro. O Parthenon, monumento de inigualável beleza, construído em Atenas por volta dos anos 430-440 a.C., ilustra com perfeição o uso arquitetônico do retângulo de ouro. Sabendo que a medida da altura desse extraordinário monumento é aproximadamente 18,2 metros, Calcule a medida aproximada de sua base.



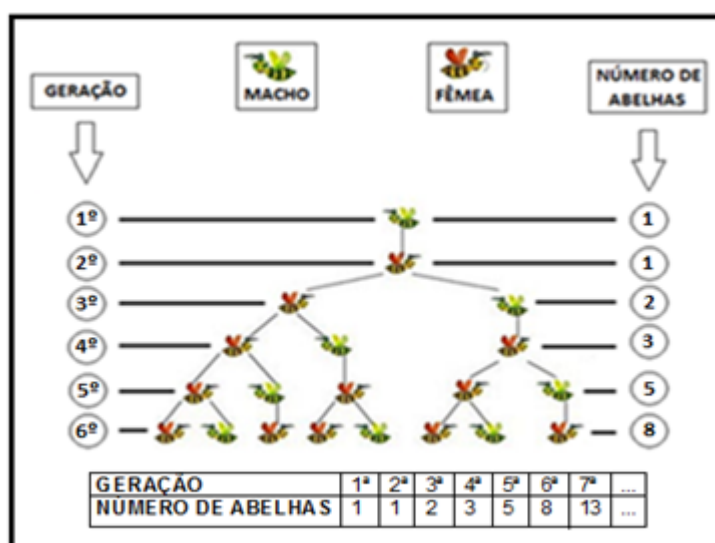
3ª Atividade: Mostre que o número de ouro Φ satisfaz a equação do 2º grau $x^2 - x - 1 = 0$.

4ª Atividade: “Diz-se que um segmento de reta é cortado na razão extrema e média quando o segmento todo está para o maior segmento assim como o maior segmento está para o menor,” Pedro dispunha de uma barra de ferro retilínea de 100 centímetros. Ele cortou esta barra na razão extrema e média. Quais as medidas, em centímetros, dos dois pedaços após a divisão?

5ª Atividade: Há intermináveis exemplos nos quais a sequência de Fibonacci aparece na natureza. Na reprodução das abelhas, quando um óvulo não é fertilizado ele gera uma abelha macho, e quando ocorre a fertilização, gera uma abelha fêmea. Assim, uma abelha

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

macho sempre terá como pai apenas uma abelha fêmea, ao passo que a abelha fêmea terá um casal de abelhas como pais. Pode-se determinar o número de abelhas em cada geração da árvore genealógica da abelha macho, usando a sequência de Fibonacci. Uma abelha macho tem apenas um dos pais (pois vem de um ovo não fertilizado), ao passo que a fêmea exige ambos os pais (pois vem de um ovo fertilizado). Logo, ao se analisar a árvore genealógica de um zangão, tem-se que seu gerador é sempre apenas uma abelha fêmea. Esta, por sua vez, tem um pai e uma mãe gerados por uma abelha fêmea e um par de abelhas macho e fêmea, respectivamente. Assim, tomando-se o número de abelhas de cada geração, tem-se a sequência de Fibonacci:



Determine o número de abelhas na 30ª geração.

8. Resultados da avaliação da aula tradicional:

As aulas ministradas seguiram rigorosamente o mesmo plano de aula para cada turma, caracterizadas respectivamente, como turmas A, B e C. Obtiveram-se os seguintes resultados quanto à avaliação escrita, por turma, conforme mostra a Figura 4.1, Figura 4.2 e Figura 4.3:

TURMA A: ELETROELETRÔNICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

TOTAL DE ALUNOS: 44

ESCALA: 1 a 10

Eletroeletrônica (aula tradicional)

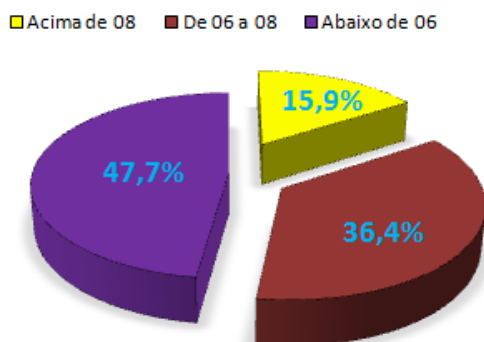


Figura 4.1: Aproveitamento dos conteúdos da turma A na aula tradicional

FONTE: Pesquisa direta/2012

Na verificação da Turma A (Figura 4.1), nota-se claramente o baixo desempenho dos alunos no tocante a assimilação dos conteúdos dados referentes à aula de matemática tendo como método o modelo tradicional de ensino dessa disciplina, posto que, somente 15,9% de um total de 44 alunos, alcançaram um índice acima de oito, na escala de 1 a 10. Já 36,4%, alcançaram o índice de seis a oito e a grande maioria (47,7%) o índice abaixo de seis.

TURMA B: ELETROMECAÂNICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

TOTAL DE ALUNOS: 41

ESCALA: 1 a 10

Eletromecânica (aula tradicional)

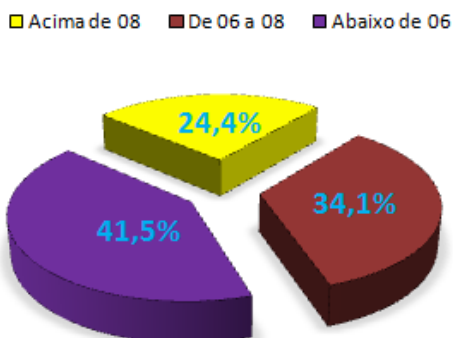


Figura 4.2: Aproveitamento dos conteúdos da turma B na aula tradicional

FONTE: Pesquisa direta/2012

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

Na Turma B (Figura 4.2), conforme gráfico acima, de um total de 41 alunos, 24,4% alcançaram um índice acima de oito, 34,1% obtiveram o índice de seis a oito e 41,5% não conseguiram índice necessário para justificar a compreensão dos conteúdos.

TURMA C: EDIFICAÇÕES INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

TOTAL DE ALUNOS: 35

ESCALA: 1 a 10

Edificações (aula tradicional)

■ Acima de 08 ■ De 06 a 08 ■ Abaixo de 06

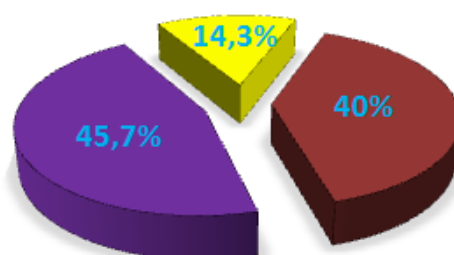


Figura 4.3: Aproveitamento dos conteúdos da turma C na aula tradicional

FONTE: Pesquisa direta/2012

Na Turma C (Figura 4.3), repete-se a mesma evidência encontrada nas turmas A e B, ou seja, continua acentuada a deficiência de alunos que não alcançaram nota satisfatória, posto que num total de 35 alunos, apenas 14,3% alcançaram nota acima de oito, contra 40% de seis a oito e 45,7% abaixo de seis.

É considerável e preocupante o percentual tanto daqueles que obtiveram índices acima de oito, como também dos que obtiveram índice abaixo de seis, mostrando mais uma vez a insuficiência no aprendizado.

2º EIXO: Oficina/prática

1. Identificação do tema da oficina/prática:

- A contextualização do número de ouro através de oficina/prática.

2. Objetivos da oficina/prática:

- Vivenciar o número de ouro através de práticas como: medir e dividir as dimensões de cartões de crédito, notebooks, espelhos (tomadas/interruptores), televisores LCD, máquinas fotográficas, fotos impressas e partes do corpo humano;
- Construir retângulos e espirais de ouro;

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

- Verificar se as dimensões dos rostos dos colegas de sala estão dentro do padrão áureo;
- Pesquisar e verificar se as dimensões de famosas obras de arte (Nascimento de Vênus, Sacramento da Última Ceia e Mona Lisa) estão dentro do padrão áureo.

3. Conhecimento prévio necessário para oficina/prática:

- Conceito de número de ouro e fatos históricos;
- Razão áurea;
- Retângulo áureo;
- Pentágono/pentagrama de ouro;
- Espiral áurea.

4. Materiais necessários para oficina/prática:

- Fita métrica milimetrada;
- Paquímetro (disponível na escola);
- Calculadora;
- Lápis;
- Borracha;
- Régua;
- Compasso;
- Cartolina;
- Tesoura;
- Papel para desenhos;
- Transferidor;
- Cartões de créditos inutilizados;
- Espelhos de tomadas/interruptores;
- Fotos impressas;
- *Notebooks* (disponível na escola);
- Software *GeoGebra*;
- Televisores LCD (disponível na escola);
- Máquinas fotográficas (disponível na escola).

DESENVOLVIMENTO DAS OFICINAS/PRÁTICAS

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

1ª Prática: Com o uso de uma fita métrica milimetrada e/ou de um paquímetro, realizar as seguintes medidas:

- Comprimento e largura de três tipos de cartões de créditos inutilizados;
- Comprimento e largura de três tipos de notebooks;
- Comprimento e largura de três tipos de espelhos de tomadas/interruptores;
- Comprimento e largura de três tipos de televisores LCD;
- Comprimento e largura de três tipos de máquinas fotográficas;
- Comprimento e largura de três tipos (tamanhos 10x15) de fotos impressas;

Feitas as medições, com o uso de uma calculadora, dividir a maior medida pela menor em cada caso, tirando a média aritmética simples entre os resultados obtidos em cada um.

2ª Prática: Com o uso de uma fita métrica milimetrada e/ou de um paquímetro, realizar as seguintes medidas:

- Comprimento do braço e da mão de cinco colegas de sala;
- Altura do corpo e altura do umbigo com relação ao chão de cinco colegas de sala;
- Medida do ombro à ponta do dedo e medida do cotovelo à ponta do dedo de cinco colegas de sala;
- Altura do crânio e medida da mandíbula até o alto da cabeça de cinco colegas de sala;
- Medida da cintura até a cabeça e tamanho do tórax de cinco colegas de sala;
- Medida do quadril ao chão e a medida do joelho até o chão de cinco colegas de sala;
- Medida do cotovelo até o pulso e medida do pé de cinco colegas de sala;
- Medida do comprimento e largura dos dentes frontais de cinco colegas de sala.

Feitas as medições, com o uso de uma calculadora, dividir a maior medida pela menor em cada caso, tirando a média aritmética simples entre os resultados obtidos em cada um.

3ª Prática: Com o uso de régua, compasso e transferidor construa três retângulos com dimensões diferentes seguindo os passos:

1º PASSO: Construa um quadrado qualquer ABCD.

2º PASSO: Marque os pontos médios E e F dos lados AB e CD, respectivamente, e una estes pontos através de um segmento de reta.

3º PASSO: Trace a diagonal FB do retângulo EBCF.

4º PASSO: Prolongue o lado DC do quadrado ABCD e com um compasso, trace a circunferência de raio FB e centro em F, chamando de G o ponto de encontro da mesma

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

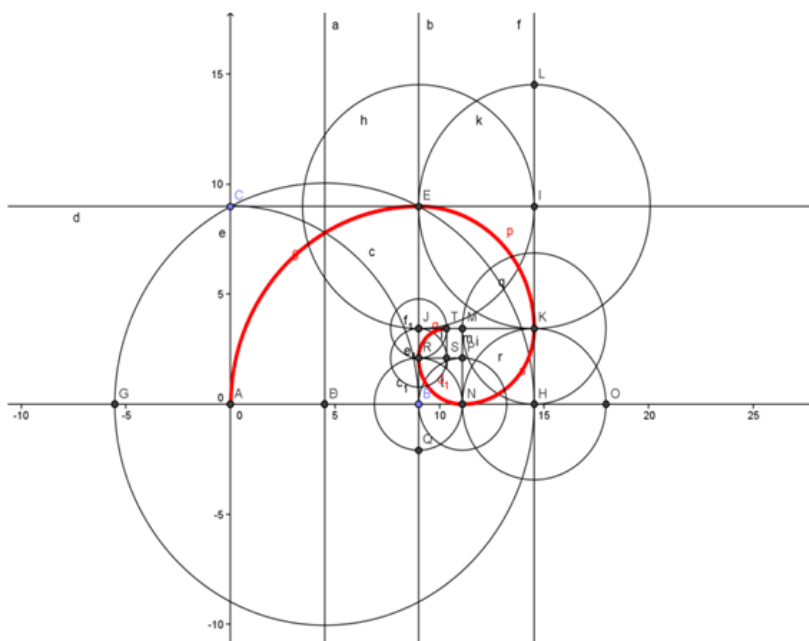
com o segmento prolongado.

5º PASSO: Prolongue o lado AB do quadrado ABCD e trace uma reta perpendicular ao prolongamento do lado DC passando por G, chamando de H o ponto de encontro da reta perpendicular com o prolongamento do lado AB.

Com o uso de uma fita métrica milimetrada e/ou de um paquímetro e/ou de uma régua milimetrada, meça as dimensões dos três retângulos obtidos, dividindo a medida maior pela menor em cada um deles.

4ª Prática: Construa em uma cartolina um retângulo de ouro com comprimento igual a 89 cm e largura, 55 cm. Verifique, através de uma calculadora, que a divisão do comprimento pela largura é aproximadamente o número de ouro. Com o uso de uma tesoura retire desse retângulo um quadrado onde um dos lados é o lado de 55 cm. Verifique novamente a divisão entre a maior medida e a menor no retângulo restante. Recorte mais uma vez outro quadrado cujo lado seja o menor do novo retângulo. Verifique outra vez a divisão entre a maior medida e a menor. O que percebeu? E se continuar de forma indefinida, que acontece?

5ª Prática: Construir uma espiral de ouro a partir de um retângulo de ouro, usando o software *GeoGebra*, seguindo os passos:



1º PASSO: Com centro na origem (ponto A) e abertura qualquer (ponto B) construa um quarto de circunferência no 1º quadrante (arco BC).

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

2º PASSO: Trace a mediatriz do segmento **AB** e as perpendiculares aos eixos **x** e **y** passando por **B** e **C**, respectivamente.

3º PASSO: Marque o ponto de interseção da mediatriz com o eixo **x** (ponto **D**) e o ponto de interseção das perpendiculares (ponto **E**), que trata o 2º passo.

4º PASSO: Com centro em **D** e abertura **DE** trace com o compasso do GeoGebra uma circunferência intersectando o eixo **x** nos pontos **H** e **G**.

5º PASSO: Trace a perpendicular ao eixo **x** no ponto **H** e marque o ponto de interseção (ponto **I**) desta com a perpendicular ao eixo **y** que passa por **C**.

6º PASSO: Com centro em **B** e abertura **BE** trace o arco **EA**, dando-lhe uma cor diferenciada (por exemplo, vermelha).

7º PASSO: Com centro em **E** e abertura **EI** trace com o compasso uma circunferência que intersecte o segmento **EB** no ponto **J**, e com centro em **I** e abertura **IE** trace outra que intersecte o segmento **IH** no ponto **K**, originando o segmento **JK**.

8º PASSO: Com centro em **J** e abertura **JK** trace o arco **KE**, dando-lhe uma cor vermelha.

9º PASSO: Com centro em **K** e abertura **KH** trace com o compasso uma circunferência que intersecte o segmento **KJ** no ponto **M**, e com centro em **H** e abertura **HK** trace outra que intersecte o segmento **BH** no ponto **N**, originando o segmento **MN**.

10º PASSO: Com centro em **M** e abertura **MN** trace o arco **NK**, dando-lhe uma cor vermelha.

11º PASSO: Com centro em **N** e abertura **NB** trace com o compasso uma circunferência que intersecte o segmento **NM** no ponto **P**, e com centro em **B** e abertura **BN** trace outra que intersecte o segmento **BJ** no ponto **R**, originando o segmento **PR**.

12º PASSO: Com centro em **P** e abertura **PR** trace o arco **RN**, dando-lhe uma cor vermelha.

13º PASSO: Com centro em **R** e abertura **RJ** trace com o compasso uma circunferência que intersecte o segmento **RP** no ponto **S**, e com centro em **J** e abertura **JR** trace outra que intersecte o segmento **JM** no ponto **T**, originando o segmento **ST**.

14º PASSO: Com centro em **S** e abertura **ST** trace o arco **TR**, dando-lhe uma cor vermelha.

5. Procedimentos avaliativos da oficina/prática:

A avaliação procederá através de observações e por cada prática concluída pelo aluno,

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

realizadas de forma individual.

6. Previsão do tempo da oficina/prática: 04 (quatro) horas.

Ministrada a aula tradicional como conhecimento prévio para cada turma, seguiu-se com a aula de oficina/prática, obtendo-se os seguintes resultados, quanto à avaliação prática, por turma, como mostra a Figura 4.4., Figura 4.5 e Figura 4.6:

TURMA A: ELETROELETRÔNICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

TOTAL DE ALUNOS: 44

ESCALA: 1 a 10

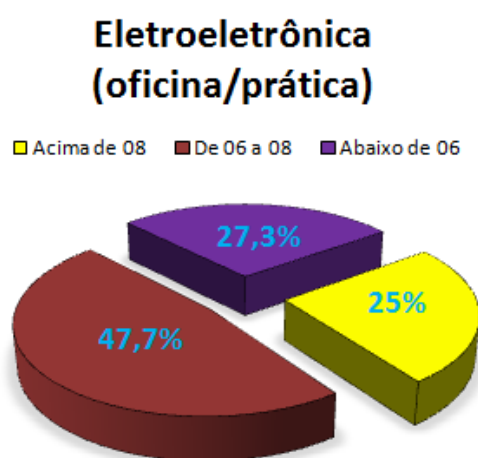


Figura 4.4: Aproveitamento dos conteúdos da turma A na aula oficina/prática

FONTE: Pesquisa direta/2012

No gráfico da Turma A, verifica-se que a escala já se mostra contrária aos resultados verificados na análise feita com a mesma turma através da aula tradicional, ou seja, 25% alcançaram índice acima de oito, 47,7% tiveram índice de seis a oito e 27,3% obtiveram índice abaixo de seis.

TURMA B: ELETROMECAÂNICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

TOTAL DE ALUNOS: 41

ESCALA: 1 a 10

Eletromecânica (oficina/prática)

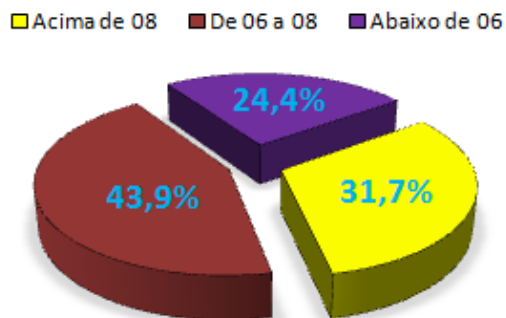


Figura 4.5: Aproveitamento dos conteúdos da turma B na aula oficina/prática

FONTE: Pesquisa direta/2012

Na Turma B, também ocorreu a mesma situação da Turma A, ficando 31,7% com índice acima de oito, 43,9% de seis a oito e 24,4% abaixo de seis.

TURMA C: EDIFICAÇÕES INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO

TOTAL DE ALUNOS: 35

ESCALA: 1 a 10

Edificações (oficina/prática)

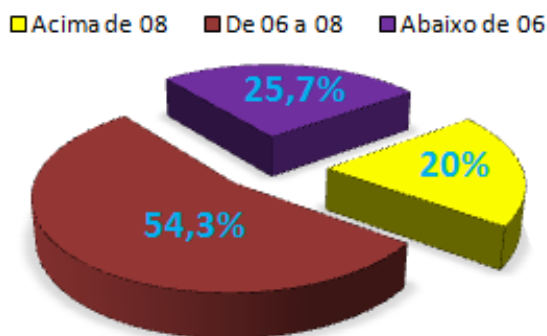


Figura 4.6: Aproveitamento dos conteúdos da turma C na aula oficina/prática

FONTE: Pesquisa direta/2012

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

Confirmando-se os resultados verificados nas Turmas A e B, a Turma C acompanha os mesmos índices no tocante à assimilação dos conteúdos, ou seja, 20% alcançou índice acima de oito, 54,3% de seis a oito e 25,7% abaixo de seis.

O estudo analisado dá uma demonstração clara da melhor assimilação pelos alunos quando é utilizada a metodologia que envolve a aula com apresentação de oficina/prática, tendo em vista que esta envolve de forma direta a teoria com a prática, mostrando a real utilidade do conteúdo estudado.

4.2 Resultados e Discussão

Considerando que o professor tem uma função importante no que diz respeito a tornar a aula mais prazerosa e, conseqüentemente possibilitar a motivação e a satisfação do aluno para apreender os conteúdos expostos em sala de aula, optou-se por evidenciar o “Número de Ouro” como recurso potencializador do aprendizado, confrontando a aula tradicional com a de oficina/prática.

Empreendeu-se, portanto, uma pesquisa com os alunos no período de setembro a novembro, no sentido de avaliar o grau de motivação através do recurso “O Número de Ouro”, cujos resultados alcançados estão expostos nos questionamentos a seguir (Figura 4.7, Figura 4.8, Figura 4.9, Figura 4.10, Figura 4.11 e Figura 4.12):

Questionamento 01: Qual a sua opinião sobre a aula trabalhada tendo como base a explanação do “número de ouro” no quadro de acrílico?

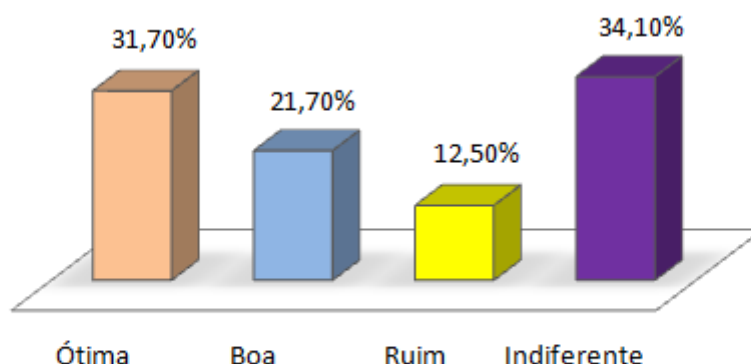


Figura 4.7: Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 01

FONTE: Pesquisa direta/2012

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

Nessa primeira análise, verificou-se que 31,7% opinaram como sendo ótima a explicação em quadro acrílico, enquanto que 21,7% consideraram uma boa explicação, 12,5% ruim e, com maior índice, a questão indiferente, com 34,1%. Pelo que se pode observar, houve uma predominância na aceitabilidade da explicação como indiferente e ótima, sendo a segunda um pouco mais elevada.

Questionamento 02: Você assimilou melhor o conteúdo a partir da exposição do número de ouro no quadro de acrílico ou através da oficina/prática realizada com foco neste número?

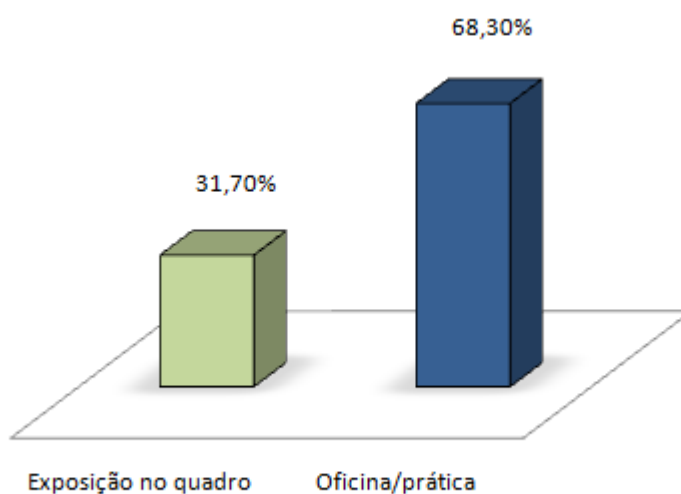


Figura 4.8: Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 02

FONTE: Pesquisa direta/2012

A grande maioria, conforme se pode observar, assinalou com 68,3% a explicação através da oficina/prática, e 31,7% assinalou a exposição no quadro acrílico, o que importa entender que há uma necessidade de apresentar conteúdos que dinamizem mais o ensino, principalmente no que diz respeito à disciplina matemática pela sua complexidade e abstração, sendo necessária a aplicação da mesma no cotidiano do educando.

Questionamento 03: Você entende que a partir desse tipo de conteúdo “o número de ouro”, há uma relação direta da matemática com o seu cotidiano?

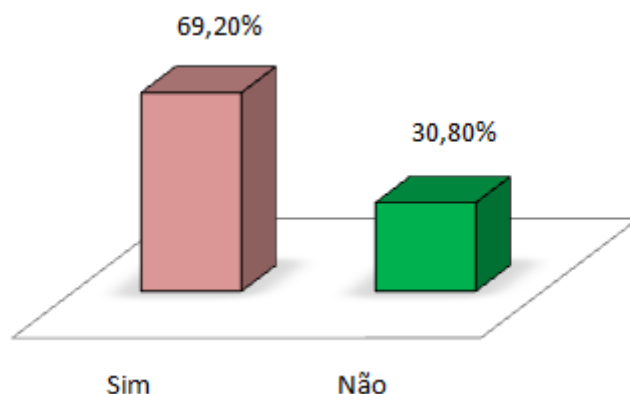


Figura 4.9: Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 03

FONTE: Pesquisa direta/2012

Pela maioria das respostas, ou seja, 69,2%, contra 30,8%, fica evidente que há um entendimento maior da apresentação do conteúdo matemático através do recurso “o número de ouro” e a relação da sua aplicabilidade no cotidiano, importando ao educador apresentar propostas inovadoras que possibilitem maior entendimento entre a teoria e a prática no dia-a-dia.

Questionamento 04: Você poderia opinar sobre que conteúdos deveriam ser mais explorados para a melhor compreensão da matemática tanto em sala de aula quanto na sua aplicação no dia-a-dia?

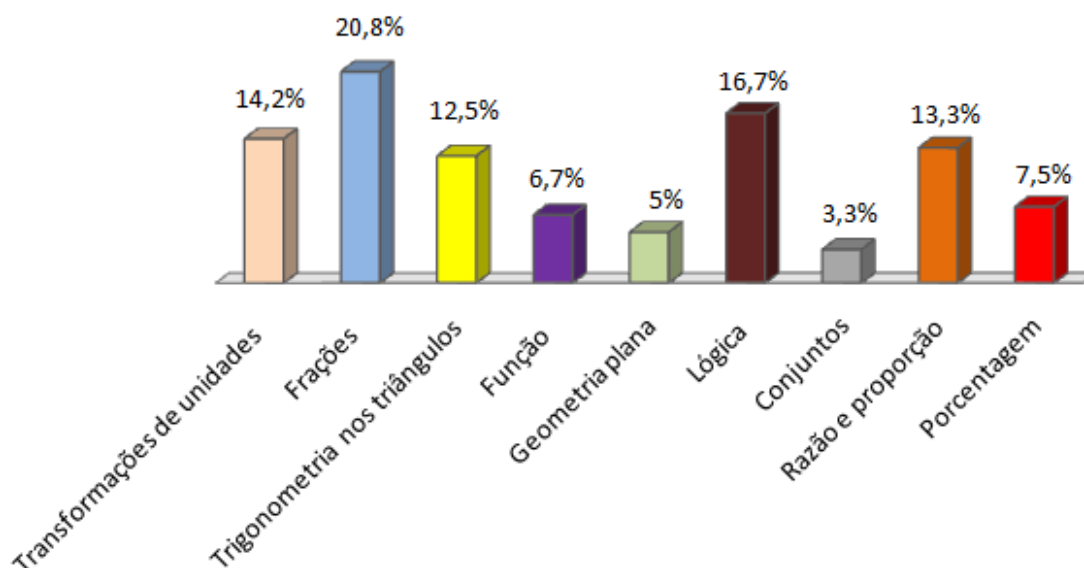


Figura 4.10: Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 04

FONTE: Pesquisa direta/2012

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

As opiniões, nesta análise, são diversas, destacando-se frações com 20,8%, lógica com 16,7%, transformações de unidades com 14,2%, razão e proporção com 13,3% e trigonometria nos triângulos com 12,5%. Nota-se a diversidade de temas que a matemática penetra e que podem ser levados à exposição em sala de aula, relacionando-os com o dia-a-dia dos educandos, envolvendo o cálculo matemático com a sociedade onde estão inseridos com uma contextualização bem acessível e, para tal, torna-se importante envolvê-los de forma a compreender o envolvimento dessa disciplina com o meio social e a partir daí acabar de vez com a velha pergunta que sempre ecoa em sala de aula: Para que serve esse conteúdo professor? Mostrando de forma bem direta que se não servir para uso em sua vida não irá estudá-lo.

Questionamento 05: Você acredita que esses conteúdos podem ser abordados como oficina/prática tendo em vista um melhor aprendizado?

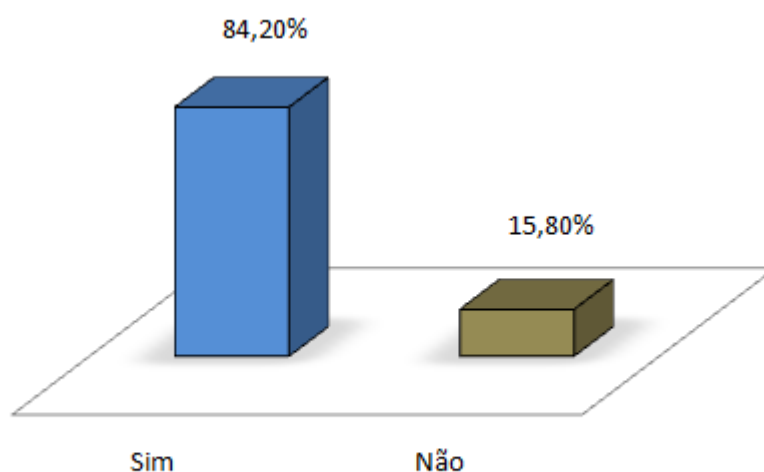


Figura 4.11: Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 05

FONTE: Pesquisa direta/2012

Nessa análise, 84,2% dos alunos foram favoráveis no que diz respeito a um melhor aprendizado com relação ao método de oficina/prática, ficando apenas 15,8% contra. Pela grande diferença, pode-se entender a importância de novos recursos que sejam motivadores e prazerosos no processo de ensino-aprendizagem.

Questionamento 06: Você acredita que o método de oficina/prática seja uma forma de identificar o aluno com o meio social, considerando que a matemática é uma ciência presente não somente pela sua exatidão, mas também pela sua aplicabilidade social?

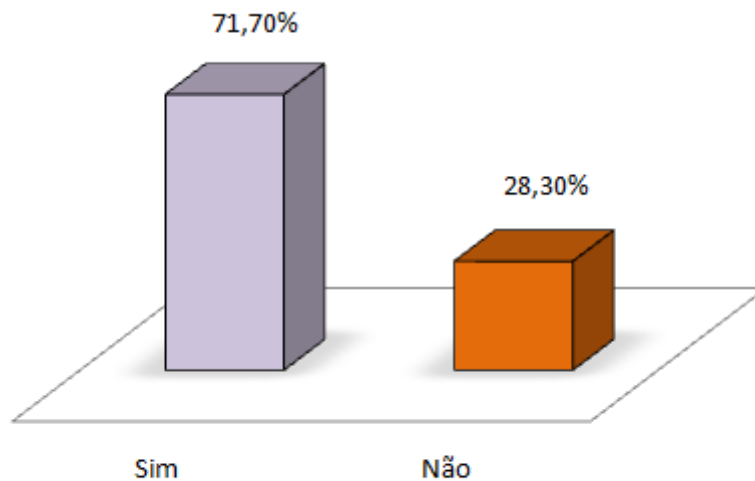


Figura 4.12: Opiniões dos alunos em percentual sobre o questionamento 06

FONTE: Pesquisa direta/2012

Mais uma vez, pode-se notar pela maioria de 71,7% contra 28,3% que é de suma importância aplicar este recurso como forma de dar maior entendimento para o educando sobre as práticas matemáticas bem como sua aplicabilidade no meio social.

As estratégias de ensino não podem mais ficar de forma estática, ou seja, apenas apresentar conteúdos sem, no entanto, acrescer o confronto da teoria com a prática e de uma forma prazerosa, possibilitando ao educando a motivação necessária para aprender. Os indivíduos necessitam adquirir o conhecimento, levando-se em conta de que forma esse aprendizado pode ser contextualizado no seu cotidiano, na sua vivencia social.

A partir dos dados levantados nesta pesquisa, pode-se observar que o educador deve oferecer subsídios necessários para que se possa compreender a complexidade dos conteúdos oferecidos, mas de uma forma prazerosa, através da motivação e de recursos necessários para tal.

O educando, portanto, deve ter uma atuação pedagógica comprometida com a sociedade em que está inserido, pois na educação, o conhecimento proporcionado pela escola deve se pautar em novas ideias de apresentação dos conteúdos, que no caso específico da apresentação do “Número de Ouro”, através de oficinas/práticas, mostrou-se que o apren-

dizado tornou-se mais prazeroso, além de garantir a assimilação da matéria e, o que é mais importante, a sua inter-relação com o cotidiano do aluno.

4.3 Conclusão

Pelo exposto, acredita-se ser de fundamental importância a busca de alternativas que não as tradicionais para dinamizar o processo de ensino aprendizagem na disciplina matemática, principalmente quando se observa de forma geral certa aversão pela disciplina, que se apoderou dessa matéria no decorrer do tempo, causando, na maioria das vezes, dificuldades e até mesmo resistência do aprender.

O educador precisa estar sempre buscando novos recursos que motivem e promova o verdadeiro aprendizado através de questionamentos e confrontos de ideias, como também e, principalmente, o confronto da teoria com a prática.

Na pesquisa feita, tendo como problema a aplicação do “Número de Ouro”, tendo como percurso metodológico um confronto entre a apresentação do conteúdo através de aula tradicional e oficina/prática, pôde-se verificar o maior interesse pela segunda aplicação, o que pressupõe motivação no aprendizado, bem como, o melhor entendimento pelo educando em ter na matemática não somente a assimilação de fórmulas, mas o quanto a matemática está envolvida socialmente na vida das pessoas.

Tendo acesso a informação e a educação o cidadão saberá utilizar todos os seus conhecimentos de forma adequada, possibilitando a sua adaptação. Cada vez fica mais necessário direcionar a matemática para mudanças de consciências, demonstrando que ela está presente na vida de todos.

A apresentação da matemática no processo de ensino-aprendizagem deve estar à mostra sob outros valores, outros conceitos. Deve, antes de tudo, dar o verdadeiro entendimento de que a apreensão das informações senão somente aquelas determinadas por números, símbolos ou fórmulas, mas outras que possibilitem deter informações necessárias e suficientes para que assim se possa construir o verdadeiro conhecimento.

Na era da informação, a educação tem que se adequar aos avanços caracterizados pela interação maior das pessoas, da comunicação rápida dos processos informativos e, para tal, é importante deter o verdadeiro entendimento no aprendizado em sala de aula e isso deve fazer com que os educadores mostrem a sua capacidade de inovar em conjunto com

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

a sociedade da informação, apresentando novos valores e métodos de ensino na constante busca de alternativas para que a escola acompanhe tais mudanças.

Em uma visão dos PCN (1998) pode-se entender que é de fundamental importância no ensino da Matemática a exposição por parte do professor das finalidades da aprendizagem dos conteúdos, pois ela não é uma disciplina isolada, e visa principalmente, a formação de cidadãos conscientes de seus deveres e obrigações, pessoas críticas e que não só apenas qualificados em memorizar fórmulas e resolver cálculos, mas de elaborar novas situações problema correlacionadas com o cotidiano.

Fica evidenciado que “lançar” conteúdos no quadro acrílico e querer que o educando aprenda é um método que já não promove mais o aprendizado. O aluno atual não se motiva mais com este tipo de aula e com isso cai no desinteresse, criando uma verdadeira aversão pela disciplina.

O educador deve observar que o educando de hoje está inserido numa sociedade bem diferente da de outrora, portando em apenas uma das mãos o “mundo”, em um pequeno aparelho eletrônico. Diante disso, o educador deve buscar métodos que desperte o interesse e com isso uma motivação para aprender, fazendo uso destes recursos eletrônicos modernos.

O educando tem que enxergar para aprender. Enxergar não no sentido de “ver com os olhos”, mais de fazer dos olhos um espécie de escâner, que levará a informação para ser armazenada na mente e a partir daí pode-se até mesmo fechar os olhos que a informação, a imagem, a fórmula e outros, vão ser visualizados sem nenhum problema. A partir desse armazenamento é que se pode desenvolver algum tipo de raciocínio. Exemplo disso é o caso do vendedor ambulante, que faz contas com dinheiro (moeda) muito bem, mas quando vai para o papel e caneta, cria-se um bloqueio para com a matemática.

O método de oficina/prática apresentado, utilizando com recurso o “Número de Ouro”, faz com que o aluno enxergue o que está fazendo, fato que a abstração da aula tradicional muitas vezes não permite.

Acrescenta-se ainda, as sugestões dadas de forma espontânea pelos próprios alunos com relação a conteúdos que podem e devem ser utilizados e trabalhados através de oficina/prática, buscando sempre aproximar a teoria com a prática, tendo como foco fundamental o dia-a-dia dos educandos.

Portanto, situa-se a importância da tomada de consciência para a modificação do mo-

Capítulo 4. Metodologias de aplicações do Número de Ouro em sala de aula

delo tradicional de ensino, indo em busca de meios mais adequados e eficazes para se concretizar as novas finalidades estabelecidas para o processo educacional, assim como demonstra que os profissionais de ensino, submetidos a um sistema educacional centralizador, necessitam de mudanças, permitindo-se a novos métodos de ensino, fazendo uma análise das propostas curriculares e/ou metodológicas que lhe são impostos, redimensionando a sua prática teórica e refletidamente fundamentada, não somente pra transmitir os conteúdos, mas também para buscar aplicação real e cotidiana na vida do educando, de forma prazerosa e motivadora, e com isso fazer acontecer de fato o tão almejado processo de ensino-aprendizagem.

Referências Bibliográficas

AYRES, Fernando Guilherme S. **O pentagrama**. ARLS Amor e Justiça N° 02, 2011. Disponível em: www.revistauniversomacnico.com.br/interpretacao/o-pentagrama/. Acesso em: janeiro/2013.

BRASIL. LDB: **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. 5 ed. ? Brasília : Câmara dos Deputados, Coordenação Edições Câmara, 1997.

ANDRADE, Ana Isabel O. e e SÁ, Maria Helena A. B. A. **Didática da língua estrangeira**. Porto: Asa, 1992.

BELUCCI Giuliano Miyaishi. **Número de ouro**. Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, 2008. Disponível em: www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf. Acesso em: Dezembro/2012.

CARVALHO, M.C.M. (Org.) **Construindo o saber**. Campinas: Papyrus Editora, 1994.

CHRAIM, Albertina de Mattos. **Família e escola: a arte de aprender para ensinar**. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2009.

COSTA, Cristina. **A vida de Pitágoras**. Disponível em: www.blogmcris.blogspot.com/2009/06/pequena-biografia-de-pitagoras. Acesso em: Dezembro/2012.

EDUC. **O Número de ouro**. Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro. Acesso em: Dezembro/2012.

EDUC. **O Número de ouro**. FERRER, Joseane Vieira. **Número de ouro na arte, arquitetura e natureza: beleza e harmonia**. Universidade Católica de Brasília. Brasília, 2010. Disponível em:

www.cienciaengalego.org/drupal6/sites/default/.../numero_de_ouro.p..... Acesso em : janeiro/2013.

FERNANDES, Susana da Silva. **As concepções de alunos e professores sobre a utilização de recursos tecnológicos no ensino da matemática.** Monografia apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática Comparada da Escola Superior Aberta do Brasil como requisito para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática Comparada. Vilha Velha/ES: ESAB, 2011. Disponível em: [www.esab.edu.br/.../monografias/ ...](http://www.esab.edu.br/.../monografias/...) Acesso em: Dezembro/2012.

FIBONACCI E A NATUREZA. Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/natureza.htm. Acesso em: dezembro/2012.

HEINKEL, Dagma. **O brincar e a aprendizagem na infância.** Juí: Unijuí, 2003.

JAMAL, Roberto. **O número de ouro.** República editorial, 2010. Disponível em: www.republicaeditorial.com.br ? Artigos. Acesso em: dezembro/2012.

LIBÂNEO, José Carlos. **Organização e gestão na escola: teoria e prática.** Goiânia: Alternativa, 1994.

LIBÂNEO, José Carlos. **Organização e gestão na escola: teoria e prática.** Goiânia: Alternativa, 2002.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MARTINS, J. S. **Situações práticas de ensino e aprendizagem significativa.** São Paulo: Autores Associados, 2009.

MENDES, Fernanda Manuela Pinheiro. **A matemática na natureza.** Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática e Ciências da Natureza. Universidade de Trás-Os-Montes e Alto Douro. Vila Real, 2007. Disponível em: repositorio.utad.pt/bitstream/10348/74/1/msc_fmpmendes.pdf Acesso em : dezembro/2012.

MOREIRA, Lenadro. **Obras de Piet Mondrian.** Disponível em: www.suapesquisa.com/biografias/piet_mondrian.htm. Acesso em : dezembro/2012.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

NETO, J. A. da S. P. **O aluno e a escola convencional: Sobre a aprendizagem significativa na escola**. In: MARTINS, E. J. S. et al. Diferentes faces da educação. São Paulo: Arte e ciências Villipress, 2001.

O NÚMERO DE OURO NA ARTE E ARQUITECTURA. Disponível em: www.cienciaengalego.org/drupal6/sites/default/.../numero_de_ouro.p... Acesso em : dezembro/2012.

PHI - A RAZÃO AÚREA E CURIOSIDADES MATEMÁTICAS. Disponível em: matematica-na-veia.blogspot.com/.../phi-razo-area-e-curiosidades-ma... Acesso em: janeiro/2013.

PLACCO, V. M. N. de S. **Aprendizagem do adulto professor**. 1 ed. São Paulo: Loyola, 2006.

POSSEBON, Ênio. O modulator de Le Corbusier: forma, proporção e medida na arquitetura. R. Cult. : R. IMAE, São Paulo, a.5, n. 11, p. 68-76, jan./jun. 2004. Disponível em: fmu.br/pdf/p68a76.pdf. Acesso em: janeiro/2013.

PUHL, Cassiano Scott. **Prática pedagógica: número de ouro**. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Universidade de Caxias do Sul. Caxias do Sul, 2009. Disponível em: www.ebah.com.br/content/ABAAAqeoAL/numero-ouro. Acesso em: dezembro/2012.

SEVERINO, Antonio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2003.

SUMMERSON, John. **A linguagem clássica da arquitetura**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

SUNG, Victor Sae Hon. **Sequência de Fibonacci e suas Aplicações**. Universidade Federal de São Carlos - Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia - Departamento de Matemática. São Carlos: UFSCar, 2012. Disponível em: www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/MonografiaVictor.pdf. Acesso em: janeiro/2013

TAPIA, J. A. **Motivação em Sala de Aula: o que é, como Se Faz.** 7 ed. São Paulo: Loyola 2004.

TOLEDO, M. **Como dois e dois: a construção da Matemática.** São Paulo: FTD, 1997.

VIDAS, Juliana; VEDOVÉLI, Radassa. **Número de ouro na natureza.** Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão, 2005. Disponível em: www.cienciaviva.pt/rede/upload/grupo8artigo1gusmao.pdf. Acesso em: janeiro/2013.

Apêndices

APÊNDICE A QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS

1) QUAL A SUA OPINIÃO SOBRE A AULA TRABALHADA TENDO COMO BASE A EXPLANAÇÃO DO “NÚMERO DE OURO” NO QUADRO DE ACRÍLICO?

() OTIMA () BOA () RUIM () INDIFERENTE

2) VOCÊ ASSIMILOU MELHOR O CONTEÚDO A PARTIR DA EXPOSIÇÃO DO NÚMERO DE OURO NO QUADRO DE ACRÍLICO OU ATRAVÉS DA OFICINA/PRÁTICA REALIZADA COM FOCO NESTE NÚMERO?

() EXPOSIÇÃO NO QUADRO DE ACRÍLICO () OFICINA/PRÁTICA

3) VOCÊ ENTENDE QUE A PARTIR DESSE TIPO DE CONTEÚDO “O NÚMERO DE OURO”, HÁ UMA RELAÇÃO DIRETA DA MATEMÁTICA COM O SEU O COTIDIANO?

() SIM () NÃO

4) VOCÊ PODERIA OPINAR SOBRE QUE CONTEÚDOS DEVERIAM SER MAIS EXPLORADOS PARA A MELHOR COMPREENSÃO DA MATEMÁTICA TANTO EM SALA DE AULA QUANTO NA SUA APLICAÇÃO NO DIA-A-DIA?


5) VOCÊ ACREDITA QUE ESSES CONTEÚDOS PODEM SER ABORDADOS COMO OFICINA/PRÁTICA TENDO EM VISTA UM MELHOR APRENDIZADO?

() SIM () NÃO

6) VOCÊ ACREDITA QUE O MÉTODO DE OFICINA/PRÁTICA SEJA UMA FORMA DE IDENTIFICAR O ALUNO COM O MEIO SOCIAL, CONSIDERANDO QUE A MATEMÁTICA É UMA CIÊNCIA PRESENTE NÃO SOMENTE PELA EXATIDÃO, MAS TAMBÉM PELA SUA APLICABILIDADE SOCIAL?

() SIM () NÃO

APÊNDICE B
PLANO DE AULA TRADICIONAL

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO	
	MARANHÃO - CAMPUS TIMON.	
	PROF. PABLO ROBERTO DE SOUSA NETO	
	TURMAS:	
	ELETROELETRÔNICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO (44 ALUNOS)	
	ELETROMECAÂNICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO (41 ALUNOS)	
	EDIFICAÇÕES INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO (35 ALUNOS)	
TURNO: MANHÃ		MÓDULO/ANO: 2º/2012

PLANO DE AULA (Tradicional)

• **Identificação do tema**

- O número de ouro.

• **Objetivos**

- Conhecer o número de ouro a partir da razão áurea, retângulo áureo, espiral áurea, pentágono áureo, sequência de Fibonacci e fatos históricos relacionados a esse número;
- Identificar a razão áurea na arte, corpo humano, literatura, arquitetura, natureza, música e religião/misticismo;
- Utilizar a equação de segundo grau como instrumento de cálculo para obtenção do número de ouro;
- Aplicar conceitos de geometria e desenho geométrico na obtenção da razão áurea envolvendo dimensões de retângulo e pentágono de ouro.

• **Conteúdo Programático** - O número de ouro:

- Conceito de número de ouro e fatos históricos;
- Razão áurea;
- Retângulo áureo;
- Pentágono/pentagrama de ouro;

- Espiral áurea.
- Sequência de Fibonacci;
- Aplicações do número de ouro.

● **Procedimentos Metodológicos**

- Exposição do conteúdo “o número de ouro” no quadro acrílico;
- Resolução de exercícios envolvendo “o número de ouro”;
- Apresentação e verificação de situação onde se encontra “o número de ouro”;
- Resolução de situações problema envolvendo “o número de ouro”.

● **Recursos Instrucionais**

- Quadro de acrílico;
- Pincel para quadro de acrílico;
- Apagador;
- Lista de exercícios com situações problema.

● **Procedimentos Avaliativos**

- A avaliação é essencialmente formativa, contínua e processual, vista como instrumento dinâmico de acompanhamento pedagógico do aluno e do trabalho do professor;
- A avaliação procederá através de observações feitas e de resoluções de situações problema escrita em listas de exercícios e subjetivas, realizadas de forma individual por alunos envolvidos no processo de investigação.

● **Previsão do tempo**

- 04(quatro) horas.

● **Bibliografia**

EDUC. O Número de ouro. Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro. Acesso em: Dezembro/2012.

JAMAL, Roberto. O número de ouro. República editorial, 2010. Disponível em: www.republicaeditorial.com.br ? Artigos. Acesso em: dezembro/2012.


MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

VIDAS, Juliana; VEDOVÉLI, Radassa. Número de ouro na natureza. Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão, 2005. Disponível em: www.cienciaviva.pt/rede/upload/grupo8artigo1gusmao.pdf. Acesso em: janeiro/2013.

O NÚMERO DE OURO NA ARTE E ARQUITECTURA. Disponível em: www.cienciaengalego.org/drupal6/sites/default/.../numero_de_ouro.p... Acesso em : dezembro/2012.

PHI - A RAZÃO ÁUREA E CURIOSIDADES MATEMÁTICAS. Disponível em: matematica-na-veia.blogspot.com/.../phi-razo-area-e-curiosidades-ma... Acesso em: janeiro/2013.

APÊNDICE C
PLANO DE AULA OFICINA/PRÁTICA

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO	
	MARANHÃO - CAMPUS TIMON.	
	PROF. PABLO ROBERTO DE SOUSA NETO	
	TURMAS:	
	ELETROELETRÔNICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO (44 ALUNOS)	
	ELETROMECHANICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO (41 ALUNOS)	
	EDIFICAÇÕES INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO (35 ALUNOS)	
	TURNO: MANHÃ	MÓDULO/ANO: 2º/2012

PLANO DE AULA (oficina/prática)

• **Identificação do tema**

- A contextualização do número de ouro através de oficina/prática.

• **Objetivos**

- Vivenciar o número de ouro através de práticas como: medir e dividir as dimensões de cartões de crédito, de notebooks, de espelhos de tomadas/interruptores, de televisores LCD, de máquinas fotográficas, de fotos impressas e de partes do corpo humano;

- Construir retângulos e espirais de ouro;

- Verificar se as dimensões dos rostos dos colegas de sala estão dentro do padrão áureo;

- Pesquisar e verificar se as dimensões de famosas obras de arte (Nascimento de Vênus, Sacramento da Última Ceia e Mona Lisa) estão dentro do padrão áureo.

• **Conhecimento prévio (trabalhado na aula tradicional)** - O número de ouro:

- Conceito de número de ouro e fatos históricos;

- Razão áurea;

- Retângulo áureo;

- Pentágono/pentagrama de ouro;

- Espiral áurea.

• Desenvolvimento das práticas

- As práticas serão desenvolvidas com materiais concretos, fazendo com que o educando sinta e veja a matemática que lhe é imposta, buscando de forma direta o intercâmbio entre teoria e prática;

- Serão trabalhadas cinco práticas, tendo como foco o "Número de Ouro". Nelas o educando colocará em prática suas habilidades com relação a:

- Medidas de comprimento, utilizando régua, fita métrica e paquímetro;
- Manuseio de calculadora, realizando divisões e aproximações;
- Construção de figuras com lápis, régua, compasso e transferidor;
- Construções de figuras geométricas com tesoura e cartolina;
- Construção de figuras geométricas com o computador através do software GeoGebra.

• Materiais necessários

- Fita métrica milimetrada;
- Paquímetro(disponível na escola);
- Calculadora;
- Lápis;
- Borracha;
- Régua;
- Compasso;
- Cartolina;
- Tesoura;
- Papel para desenhos;
- Transferidor;
- Cartões de créditos inutilizados;
- Espelhos de tomadas/interruptores;
- Fotos impressas;
- Notebooks(disponível na escola);
- Software GeoGebra;
- Televisores LCD(disponível na escola);
- Máquinas fotográficas(disponível na escola);

- **Procedimentos Avaliativos**

- A avaliação procederá através de observações e por cada pratica concluída pelo aluno, realizadas de forma individual.

- **Previsão do tempo**

- 04(quatro) horas.

- **Bibliografia**

- SUNG, Victor Sae Hon. Sequência de Fibonacci e suas Aplicações. Universidade Federal de São Carlos - Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia - Departamento de Matemática. São Carlos: UFSCar, 2012. Disponível em: www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/MonografiaVictor.pdf. Acesso em: janeiro/2013

- EDUC. O Número de ouro. Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro. Acesso em: Dezembro/2012.

- JAMAL, Roberto. O número de ouro. República editorial, 2010. Disponível em: www.republicaeditorial.com.br ? Artigos. Acesso em: dezembro/2012.

- MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

- VIDAS, Juliana; VEDOVÉLI, Radassa. Número de ouro na natureza. Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão, 2005. Disponível em: www.cienciaviva.pt/rede/upload/grupo8artigo1gusmao.pdf. Acesso em: janeiro/2013.

- O NÚMERO DE OURO NA ARTE E ARQUITECTURA. Disponível em: www.cienciaengalego.org/drupal6/sites/default/.../numero_de_ouro.p... Acesso em: dezembro/2012.