UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

UMA FÓRMULA ALTERNATIVA À FORMULA DE ZELLER PARA DETERMINAÇÃO DE DATAS

Celiomar Machado Gonçalves

MANAUS
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Celiomar Machado Gonçalves

UMA FÓRMULA ALTERNATIVA À FORMULA DE ZELLER PARA DETERMINAÇÃO DE DATAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Coorientador: Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto

MANAUS
2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

G635u

Goncalves, Celiomar Machado

Uma Fórmula Alternativa à Fórmula de Zeller para Determinação de Datas / Celiomar Machado Goncalves. 2017

58 f.: il.; 31 cm.

Orientadora: Disney Douglas de Lima Oliveira

Coorientadora: Alfredo Wagner Martins Pinto

Dissertação (Mestrado em Matemática - Álgebra) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Congruência Modular. 2. Calendário. 3. Data. 4. Teoremas. 5. Aritmética. I. Oliveira, Disney Douglas de Lima II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

CELIOMAR MACHADO GONÇALVES

UMA FÓRMULA ALTERNATIVA À FORMULA DE ZELLER PARA DETERMINAÇÃO DE DATAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28 de setembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
UFAM - Presidente

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
UFAM - Membro

Prof. Dr. Max Ferreira
UFRR - Membro Externo

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e bênçãos a mim concedidas por sempre guiar meus passos para realizar com sucesso os meus objetivos.

A meus pais, que sempre foram minha base forte nesta caminhada, o meu muito obrigado por tudo àquilo que me instruíram e por todos os princípios que me foram passados.

A minha esposa Francicléia do Nascimento Alves Rodriguês e aos meus filhos Êndrio Henrique Rodriguês Gonçalves e Sophia Rodriguês Gonçalves que foram verdadeiros guerreiros durante o período de 2 anos de duração deste curso.

A minha irmã Noemia e meu cunhado José Caldeira que foram parceiros incansáveis nas idas e vindas desta Universidade e ao meu sobrinho Daniel pelas horas que cedeu de seu tempo para me pegar no Aeroporto.

Aos amigos Aldemir, André, Clício, Felipe, Genilce, Mauricio, Luzely, Ricardo e Luiz que durante a preparação para o exame de qualificação tivemos momentos intensos de estudo.

Aos amigos da coordenadoria da Seduc de Tefé em especial a professora Zélia Marinho e aos professores da escola Centro Educacional Governador Gilberto Mestrinho de Tefé.

Ao amigo e irmão camarada Sureymar Pereira Xavier pelo apoio.

Ao amigo Joseldo Alasson pelos momentos que tivemos estudando juntos.

Ao amigo Vinicius Paulo de Freitas que me ajudou bastante na hora da matricula e durante o estudo deste curso.

Ao amigo Joaquim Rodrigues dos Santos pelo apoio.

Ao meu amigo e professor orientador Alfredo Wagner, o qual tenho maior admiração pela sua competência.

Ao professor e amigo Domingos Anselmo, que diz que com perseverança tudo podemos vencer.

Ao professor e amigo Disney Douglas pela a ajuda na hora das dificuldades encontradas. Uma de suas frases que ficou marcada “estudando desse jeito a aprovação é inevitavel”.

Ao professor amigo e paizão Nilomar Oliveira, nosso coordenador local do Profmat que sempre nos atendeu muito bem.

Ao professor Raul Mesquita o qual tenho uma grande admiração pela dedicação e compromisso que o mesmo tem para com os alunos.

Ao professor Roberto Prata que sempre esteve nos motivando na hora que estudávamos para o exame de qualificação.

Ao professor Waltemir que sempre aparecia nas horas de estudo para dar aquela força.

Agradeço também aos excelentes professores de matemática que tive no decorrer da graduação: Lourival de Paula Goes e José Lindolfo Carvalho Renda.

RESUMO

Neste trabalho procuramos fazer uma abordagem simples de algumas proposições e teoremas clássicos de congruência módular com ênfase no estudo do calendário de forma que esta parte se torne mais conhecida, pois a congruência módular tem um grande papel na resolução de muitos problemas aritméticos, que estão de certa forma esquecidos tanto no ensino básico quanto no ensino de graduação. No intuito de resgatar tais teoremas, desenvolvendo assim habilidades no ensino de Aritmética, exploramos algumas proposições e teoremas:divisibilidade, critério de divisibilidade,fórmula de Zeller, Propriedades das Congruências Modulares , Função Parte Inteira. Acreditamos que dá forma que foi o enfoque da realização desse trabalho, com a utilização de exemplo simples vinculado ao cotidiano do discente, como o uso do calendário, possa servir para a melhoria do ensino-aprendizagem de Aritmética e possivelmente servir de elemento motivador para alunos e professores que busquem aprimorar seus conhecimentos em Aritmética nos seus diversos desdobramentos.

Palavras-chave: Congruência Módular, Calendário, Data, Teorema, Aritmética.

ABSTRACT

In this work, we tried to take a simple approach of some classical theorems propositions and theorems of modular congruence with emphasis in the study of the calendar so that this part becomes better known, because modular congruence plays a large role in solving many arithmetic problems, since elementary and undergraduate education has forgotten. In order to rescue such theorems, thus developing skills in the teaching of arithmetic, we explore some propositions and theorems: divisibility, divisibility criterion, formule Zeller, propriety of modular and entire function. We believe that the focus of this work, using a simple example linked to the student's daily life, such as the calendar, can be used to improve the teaching and larning of arithmetic possibly serves as a motivating element for students and teachers who seek to improve their knowledge in arithmetic in its various developments.

Keywords: Congruence Modular, Calendar, Date, Theorem, Arithmetic.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$\equiv$	Congruente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\cup$	União.
$\in$	Pertence.
$\Longrightarrow$	Então.
$\Longleftrightarrow$	Se somente se.
$\mid$	Divide.
$\pm$	Mais ou menos.
$\geq$	Maior ou igual.
$\leq$	Menor ou igual.
$\forall$	Para todo.
$\lfloor\rfloor$	Parte inteira.
$\nmid$	Não divide.
α	Alfa.
β	Beta.
γ	Gama.
δ	Delta.
$\vert\vert$	Módulo.
$\frac{c}{a}$	Fração.
$-$	Menos.
$+$	Mais.
$!$	Fatorial.
$\not\equiv$	não congruente.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Atualmente a decadência do ensino de Aritmética na educação básica brasileira, tem-se tornado notório, alunos estão concluindo o ensino médio sem conhecer as operações básicas, isso tem preocupado muito os pesquisadores de Ensino da Matemática que estão debatendo esta problemática nas escolas e, até mesmos, nas universidades. Além disso sabemos que este ramo da Matemática, tem contribuído bastante para a evolução da tecnologia. Foi nesse intuito de tornar o ensino de Aritmética mais interessante e de forma divertida utilizando o estudo da congruência modular para descobrir em que dia da semana caiu ou caíra determinada datas com o auxílio do calendário que desenvolvemos esse trabalho usando congruência modulo 7. Além disso vamos mostrar algumas proposições e teoremas importantes que são necessárias para a compreensão do estudo referente a congruência modular. Para tal estudo fizemos uma minuciosa pesquisa bibliográfica, sobre essas proposições e teoremas importantes que serão vistas no decorrer desse trabalho. Este trabalho tem como objetivo principal fazer uma comparação da fórmula de Zeller com a fórmula desenvolvida em nosso trabalho, fórmula esta que é de autoria do professor Alfredo Wagner, estas fórmulas acima citadas serve para calcular em que dia da semana caiu ou caíra determinadas datas,porém com uma diferença, enquanto a fórmula de Zeller é aberta " pois para os meses 1 á 10 usamos uma fórmula e para os meses de 11 à 12 usamos outra fórmula" a do nosso trabalho é uma fórmula fechada.

Capítulo 1

HISTÓRICO DO CALENDÁRIO

Desde a pré-história que o homem ficou deslumbrado pela sucessão dos dias e das noites e pelo desenrolar das fases da Lua: estes fenômenos conduziram às noções de dia e de mês. A noção de ano é menos evidente e foi só com o desenvolvimento da agricultura que os povos primitivos se aperceberam do ciclo das estações. São, portanto, o dia, o mês lunar ou lunação e o ano os períodos astronômicos naturais utilizados em qualquer calendário. Vamos precisar melhor cada um deles.

Conceitos

O **dia solar verdadeiro**, intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol pelo meridiano dum lugar, varia entre 23 h 59 m 39 s e 24 h 00 m 30 s. Estas variações, devidas às desigualdades que afetam a ascensão reta do sol, obrigam-nos a utilizar um dia civil, com a duração de 24 horas. Este dia, definido em função do dia solar médio, começa à meia-noite e termina à meia-noite seguinte.

A **lunação**, intervalo de tempo entre duas conjunções consecutivas da Lua com o Sol. Também não é um valor constante, mas varia entre 29 dias e 6 horas e 29 dias e 20 horas. O seu valor médio, conhecido com grande precisão, é de 29 d 12 h 44 m 02,8 s. A revolução sinódica da Lua está na origem dos calendários lunares, em que os meses têm alternadamente 29 dias e 30 dias. O seu valor médio é, portanto, de 29,5 dias, diferindo 44 m do mês sinódico.

Em astronomia consideram-se várias espécies de ano. Iremos referir-nos apenas ao ano sideral e ao ano trópico.

O **ano sideral**, duração da revolução da terra em torno do Sol, é igual a 365 d 06 h 09 m 09,8 s. É este ano que intervém na terceira Lei de Kepler da mecânica celeste, ao ligar as durações das revoluções dos planetas com o eixos maiores das órbitas.

O **ano trópico**, tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do Sol médio pelo ponto vernal, é atualmente de 365 d 05 h 48 m 45,3 s. É mais curto do que o ano sidera, devido à precessão dos equinócios, que faz retrogradar o ponto vernal de 50,24 segundos de arco por ano. É o ano trópico que regula o retorno das estações e que intervém nos calendários solares.

Há ainda os **calendários luni-solares**, que procuram harmonizar as lunações com a revolução trópica do Sol.

O protótipo atual de calendário lunar é o calendário islâmico; do calendário solar é o calendário gregoriano; do calendário luni-solar é o calendário israelita. Mas também o calendário gregoriano conserva, de certo modo, uma base luni-solar no que diz respeito às regras para a determinação da data da Páscoa, a que procuraremos mais adiante fazer referência.

Um outro período de tempo utilizado nos calendários é a semana de sete dias, cuja origem se desconhece. É provável que estivesse relacionada com o mês lunar, visto que sete dias são aproximadamente um quarto de lunação, o intervalo aproximado entre a Lua cheia e o quarto minguante, ou talvez com o número dos sete astros principais do firmamento (os cinco planetas conhecidos na Antiguidade mais o Sol e a Lua). Mas é provável que a escolha de um intervalo de sete dias se deva ao caráter sagrado do número sete entre os judeus. Seja como for, o ciclo semanal de sete dias propagou-se inicialmente para oriente e só bastante mais tarde chegou ao ocidente, encontrando-se hoje praticamente incorporado em todos os calendários, como ciclo regulador das atividades laborais.

Calendários antigos

Os mais primitivos calendários do velho Continente, de que a História nos proporciona uma informação concreta, são o hebreu e o egípcio. Ambos tinham um ano civil de 360 dias: curto para representar o ciclo das estações, mas grande para corresponder ao chamado " ano lunar", que se define como um período de tempo igual a 12 lunações completas existentes no ano trópico, ainda desconhecido.

Ignoram-se como os hebreus dividiam o ano, mas depreende-se que já utilizavam a semana, visto que seguiam o mesmo princípio para contar os anos, agrupando-os em septanas ou semanas de "sete anos". Pelo contrário, os egípcios dividiam o ano em 12 meses de 30 dias e cada mês em três décadas. Os egípcios também dividiam o ano em três estações, de acordo com as suas atividades agrícolas dependentes das cheias do Nilo: a estação das inundações; a estação das sementeiras e a estação das colheitas.

Não satisfeitos com o ano de 360 dias, estes povos procuraram aperfeiçoar o seu calendário, embora seguindo o caminho diferentes. Os hebreus voltaram-se para o sistema luni-solar, ajustando os meses com o movimento sinódico da Lua e coordenado o ano com o ciclo das estações. Por sua vez, os egípcios abandonaram por completo o sistema lunar para seguir unicamente o ciclo das estações, tais como as observações no Egito, visto desconhecerem ainda a duração do ano trópico.

Depois de muitas reformas, por volta de 5000 a.C., os egípcios estabeleceram um ano civil invariável de 365 dias, conservando a tradicional divisão em 12 meses de 30 dias e 5 dias adicionais no fim de cada ano. O atraso aproximado de 6 horas por ano em relação ao ano trópico motivou que, lentamente, as estações egípcias se fossem atrasando, originando uma rotação destas por todos os meses do ano. Por esse motivo, os egípcios começaram uma cuidadosa observação no ano 2783 a. C., comprovado que em 1323, também a,C., as estações voltavam a coincidir nas mesmas datas do calendário. A este período de 1461 anos egípcios é que corresponde a 1460 anos julianos, deu-se o nome de período sotíaco, de Sothis ou Sirius, em cujo nascimento helíaco se basearam as observações.

Apesar desta comprovação, os egípcios não fizeram qualquer correção no seu ano vago e um segundo período sotíaco seria iniciado em 1323 a.C. Porém, no ano 238 a.C., houve uma tentativa para reformar o calendário egípcio por forma a pô-lo de acordo com o ciclo das estações mas sem êxito, devido à oposição de determinadas classes sacerdotais. Só no ano 25 a.C. foi adaptada a reforma juliana, introduzindo, de 4 em 4 anos 6 dias adicionais em vez de 5.

Os gregos estabeleceram um ano lunar de 354 dias, que dividiram em 12 meses de 30 dias e 29 dias, alternadamente. Por conseguinte, tinha menos 11 dias e 6 horas do que o ano trópico, sendo necessário fazer intercalações para estabelecer a dívida correspondência. Estas intercalações tinham o nome de dietérida, referente a ciclo de dois anos ; trietérida, referente a ciclo de três anos, etc. Os meses, como no calendário egípcio, eram dedicados aos deuses e neles se celebravam festas, não só em honra do deus correspondente, mas também muitas outras dedicados os astros, às estações, etc.

No primitivo calendário romano, o ano tinha 304 dias distribuídos por 10 meses. Os 4 primeiros tinham nomes próprios dedicados aos deuses da mitologia romana e provinha de tempos mais remotos, em que, provavelmente, se aplicaram às 4 estações; os 6 restantes eram designados por números ordinais, indicativos da ordem ocupavam no calendário, segundo o esquema:

1º	Martius	31 dias, dedicado a Marte
2º	Aprilis	30 dias, dedicado a Apolo
3º	Maius (maior)	31 dias, dedicado a Júpiter
4º	Junius	30 dias, dedicado a Juno
5º	Quintilis	31 dias (nº ordinal)
6º	Sextilis	30 dias
7º	September	30 dias
8º	October	31 dias
9º	November	30 dias
10º	December	30dias

Como se depreende, tratava-se dum calendário sem qualquer base astronômica, pois os períodos neles definidos não tinham qualquer relação com os movimentos do Sol ou da Lua. Por isso, no tempo de Rômulo já foram introduzidas intercalações por forma a harmonizar o calendário vigente com os citados períodos astronômicos.

O calendário de Rômulo foi reformulado por Numa Pompílio, o qual, seguindo o exemplo dos gregos, estabeleceu o ano de 12 meses, mas introduzindo em primeiro lugar o mês de

Januarius, dedicado a Jano, e em último lugar o mês de Februarius, dedicado a Februa, ao qual os romanos ofereciam sacrifícios para expiar as suas faltas de todo ano. Este foi o motivo por que o mês de Februarius foi colado no fim. Mas Numa modificou também a duração dos meses, deixando o calendário do seguinte modo:

Ordem	Mês	Número de dias
1º	Januarius	29
2º	Martius	31
3º	Aprilis	29
4º	Maius	31
5º	Junius	29
6º	Quintilis	31
7º	Sextilis	29
8º	September	29
9º	October	31
10º	November	29
11º	December	29
12º	Februarius	27
	Total	354

Consequente, o ano tinha 354 dias (ano lunar dos gregos). Mas esta estranha distribuição dos dias pelos meses era devida à superstição dos romanos que tomavam por nefastos os números pares. Pela mesma razão, consideram nefasto o ano de 354 dias e aumentaram-no para 355 dias, atribuindo o dia excedente a Februarius, que passou a ter 28 dias.

Entretanto, os romanos sentiram também a necessidade de coordenar o seu ano lunar com o ciclo das estações e seguindo, de certo modo, o exemplo dos gregos, estabeleceram um rudimentar sistema luni-solar, introduzindo no seu calendário, de dois em dois anos, um novo mês: Mercedonius, assim chamado por estas intercalações serem feitas na época em que os senhores outorgavam as suas mercês aos escravos (uma espécie de gratificações voluntárias pelos serviços prestados).

O Mercedonius, cuja duração alternava de 22 ou 23 dias, intercalava-se entre 23 e 24 de Februarius, que se interrompia, completando-se depois da mesma. O ano assim formado tinha, em média, 366,65 dias, portanto mais um dia do que o ciclo das estações. Foram estabelecidos várias normas para atender a esse aspecto que na prática não resultam, pois as intercalações passaram a ser feitas de acordo com interesses particulares ou políticos: os pontífices alongavam ou encurtavam o ano conforme os seus amigos estavam ou não no poder. A desordem atingiu tal ponto que o começo do ano já estava adiantado de três meses em relação ao ciclo das estações.

Calendário Juliano

Foi esta desordem que Júlio César encontrou ao chegar ao poder. Decidido a acabar com os abusos dos pontífices, chamou a Roma o astrônomo grego Sosígenes, da escola de Alexandria, para que examinasse a situação e o aconselhasse nas medidas que deveriam ser adotadas.

Estudado o problema, Sosígenes observou que o calendário romano estava adiantando de 67 dias em relação ao ano natural ou ciclo das estações, para desfazer essa diferença, Júlio César ordenou que naquele ano (708 de Roma, ou 46 a.C.), além do Mercedonius de 23 dias que correspondia intercalar naquele ano, fossem adicionados mais dois meses, um de 33 dias, outro de 34 dias, entre os meses de November e December. Resultou assim um ano civil de 445 dias, o maior de todos os tempos, único na história do calendário e conhecido pelo nome de **Ano confusão**, pois, devido à grande extensão dos domínios de Roma e à lentidão dos meios de comunicação de então, em algumas regiões a ordem foi recebida com tal atraso que já havia começado um novo ano.

Foi então abolido o calendário lunar dos decênviros e adotou-se o calendário solar, conhecido por juliano, de Júlio César, que começou a vigorar no ano 709 de Roma (45 a.C.), mediante um sistema que devia desenrolar-se por ciclos de quatro anos, com três comuns de 365 dias e um bissexto de 366 dias, afim de compensar as quase seis horas que havia de diferença para o ano trópico. Suprimiu-se o Mercedonius e Februarius passou a ser o segundo mês do ano. Consequentemente, os restantes meses atrasaram uma posição, além da já haviam atrasado na primeira reforma de Numa, com a consequente falta de sentido dos meses com designação ordinal. O valor médio do ano passou a ser de 365,25 dias e o equinócio da primavera deveria ocorrer por volta de 25 de Março.

Era a seguinte a ordenação e duração dos meses no primitivo calendário juliano:

1º	Januarius	31 dias
2º	Februarius	29 ou 30 dias
3º	Martius	31 dias
4º	Aprilis	30 dias
5º	Maius	31 dias
6º	Junius	30 dias
7º	Quintilis	31 dias
8º	Sextilis	30 dias
9º	September	31 dias
10º	October	30 dias
11º	November	31 dias
12º	December	30 dias

Como se pode observar, a distribuição dos dias do ano fez-se alternando os meses de 30 e 31 dias, consoante fosse par ou ímpar a sua ordem no calendário nos anos bissextos, ficando

Februarius com 29 dias nos anos comuns. Assim, por disposição de Júlio César, os romanos tiveram de abolir a sua prevenção contra os meses de dias pares, que sempre haviam considerado nefastos ou de mau agoiro.

Evolução do calendário Juliano

Durante o consulado de Marco Antônio, reconhecendo-se a importância da reforma introduzida no calendário romano por Júlio César, foi decidido prestar-lhe justa homenagem, perpetuando o seu nome no calendário, de maneira que o sétimo mês, Quintilis, passou a chamar-se Julius.

Também no ano 730 de Roma, o Senador romano decretou que o oitavo mês, Sextilis, passasse a chamar-se Augustus, porque durante este mês começou o imperador César Augusto o seu primeiro consulado e pôs fim à guerra civil que desolava o povo romano. E para que o mês dedicado a César Augusto não tivesse menos dias do que o dedicado a César Augusto, o mês de Augustus passou a ter 31 dias. Este dia saiu do mês de Februarius, que ficou com 28 dias nos anos comuns e 29 nos bissextos. Também para que não houvesse tantos meses seguidos com 31 dias, reduziram-se para 30 dias os meses de September e November, passando a ter 31 dias os de October e December. Assim se chegou à distribuição sem lógica alguma dos dias pelos meses, que ainda hoje perdura e que transcrevemos a seguir com os nomes atuais em língua portuguesa:

1º	Janeiro	31 dias
2º	Fevereiro	28 ou 29 dias
3º	Março	31 dias
4º	Abril	30 dias
5º	Maio	31 dias
6º	Junho	30 dias
7º	Julho	31 dias
8º	Agosto	31 dias
9º	Setembro	30 dias
10º	Outubro	31 dias
11º	Novembro	30 dias
12º	Dezembro	31 dias

De princípio, o calendário juliano conservou as letras nundinais para determinar a data dos mercados públicos, a divisão dos meses pelas calendas, nonas e idus e a nomenclatura ordinal dos dias. O dia excedente de Februarius, os anos bissextos, era intercalado como o fora anteriormente o mês Mercedonius entre os dias 23 e 24. Quando Februarius passou a ter 28 dias nos anos comuns, o seu 23º dia era o 6º antes das calendas de Março. Portanto, o dia seguinte, que era intercalado d 4 em 4 anos, passou a designar-se por bissextocalendas (ou bissextus dies ante calendas Martii). Daí o nome de dia bissexto que hoje se dá aos anos em que o mês de Fevereiro tem 29 dias.

Mas o ciclo de 4 anos de Sosígenes começou por ser mal aplicado, pois em vez de se contarem 3 anos comuns e um bissexto, como, de fato, recomendava aquele astrônomo, os pontífices romanos falsearam a contagem ou a interpretaram mal, ainda que isso não pareça muito provável dada a sua simplicidade e intercalaram um ano bissexto de 3 em 3 anos. Assim, durante os primeiros 36 anos de vigência do calendário juliano foram intercalados 12 bissextos em vez de 9. Para remediar este erro, e como 12 bissextos correspondiam a 48 anos, César Augusto suspendeu as intercalações durante 12 anos, começando então a ser feita de 4 em 4 anos, como era correto. Em geral, a cronologia não refere este fato e admite-se que o calendário juliano seguiu corretamente desde o princípio.

Por aquela época tiveram lugar na Terra Santa os mistérios da Vida, Paixão, Morte e Ressureição de Jesus Cristo, o advento do cristianismo e a difusão desta doutrina. Tal ocorrência acabaria por ter bastante influência na evolução do calendário juliana: a fixação das regras para a determinação da data da Páscoa e a adoção oficial da semana no calendário romano.

Os cristãos da Ásia Menor celebravam a Páscoa cristã no dia 14 da primeira Lua que começasse em Março, qualquer que fosse o dia da semana em que ocorresse essa data. Pelo contrário, os cristãos do Ocidente celebravam-na no domingo seguinte a esse dia. Esta discrepância entre os cristãos do Oriente e do Ocidente na comemoração de tão importante acontecimento, deu origem a sérias polêmicas entre os altos dignátarios das duas Igrejas. A questão foi resolvida no concílio de Niceia (ano 325 da nossa era): Jesus Cristo ressuscitou num domingo, 16 Nissan do judeu, coincidente com plenilúnio do começo da primavera. O concílio decidiu manter estes três símbolos e acordou que a Páscoa passaria a ser celebrada universalmente, no domingo seguinte ao plenilúnio que tivesse lugar no equinócio da primavera ou imediatamente a seguir.

Os cristãos, que entretanto iam ganhando posições em toda a parte, precisavam da semana hebraica para o seu culto, visto que tinham de guardar o preceito do descanso ao sétimo dia e, assim, a semana acabou por ser adotada no calendário romano, abolindo-se, pouco a pouco, as letras nundinais e o uso das calendas, nonas e idus.

Convém salientar que o ano de 365,25 dias do calendário juliano é cerca de 11 m 14 s e mais longo do que o ano trópico. A acumulação desta diferença ao longo dos anos representa um dia em 128 anos e cerca de três dias em 400 anos. Assim, o equinócio da primavera que no tempo de Sosígenes ocorria por volta de 25 de Março, ao realizar-se o concílio de Niceia, quase quatro séculos depois, teve lugar a 21cde Março.

Problemas com o Calendário Juliano

Este deslocamento do equinócio no calendário, que não foi tomado em consideração pelos padres conciliares de Niceia, continuou a produzir-se à razão de um dia em cada 128 anos, causando várias preocupações à Igreja durante toda a Idade Média, visto que esse atraso poderia dar origem a novas discrepâncias sobre a data da Páscoa. O problema foi tratado nos concílios de Constança (1414) e Basileia (1436 e 1439), mas não foi possível chegar a qualquer acordo. Em 1474, o Papa Sixto IV encarregou Juan Muller de estudar o meio de reformar o calendário, mas este sábio alemão, conhecido pelo nome de Regiomontano, morreu dois anos depois sem ter apresentado as conclusões do seu trabalho. No concílio de S. João de Latrão (1511 a 1515) foi novamente abordado o problema e no de Trento (1545 a 1563) chegou a ser discutido um projeto de reforma que não pôde ser concretizado, apesar dos esforços do Papa Pio IV, dada a escassa preparação científica de então para reconhecer as vantagens.

Foi necessária a autoridade de um Papa com a cultura e a tenacidade de Gregório XIII para conseguir impor a reforma. Entretanto, o equinócio da primavera ocorria já por volta de 11 de Março. Depois de várias consultas a instituições científicas, em 1576 foi criada uma comissão encarregada de estudar o problema e as várias propostas existentes para o resolver. Nesta comissão, constituída pelos melhores astrônomos e matemáticos da época, teve papel preponderante o célebre padre jesuíta Clavius, que estudara matemática em Coimbra com Pedro Nunes.

Foi preferido o projeto de reforma apresentado pelo astrônomo Luís Lílio e comunicado em 1577 e 1578 a numerosos príncipes, bispos e universidades para darem a sua opinião. Só depois de analisadas pela comissão todas essas respostas, se resolveu adotar finalmente o projeto de Lílio e em 24 de Fevereiro de 1582 Gregório XIII expediu a bula Inter Gravíssimas, que estabelecia os pontos essenciais do novo calendário.

Calendário Gregoriano

A reforma gregoriana tinha por finalidade fazer regressar o equinócio da primavera a 21 de Março e desfazer o erro de 10 dias já existentes. Para isso, a bula mandava que o dia imediato à quinta-feira 4 de Outubro fosse designado por sexta-feira 15 de Outubro. Como se vê, embora houvesse um salto nos dias, manteve-se intacto o ciclo semanal.

Para evitar, no futuro, a repetição da diferença foi estabelecido que os anos seculares só seriam bissextos se fossem divisíveis por 400. Suprimir-se-iam, assim, 3 dias em cada 400 nos, razão pela qual o ano 1600 foi bissexto, mas não foram os anos 1700,1800 e 1900, que teriam sido segundo a igreja juliana, por serem divisíveis por 4.

A duração do ano gregoriano é, em média, de 365 d 05 h 49 m 12 s, isto é, tem atualmente mais 27 s do que o ano trópico. A acumulação desta diferença ao longo do tempo representará um dia em cada 3000 anos. É evidente que não valia a pena aos astrônomos dev Gregório XIII atender a tão pequena e longínqua diferença, nem na atualidade ela tem ainda qualquer importância. Talvez lá para o ano 5000 da nossa era, se ainda continuamos com o mesmo calendário, seja necessário ter isso em consideração.

Portugal, Espanha e Itália foram os únicos países que aceitaram de imediato a reforma do calendário. Na França e nos Estados católicos dos Países Baixos a supressão dos 10 dias fez-se ainda em 1582, durante o mês de Dezembro (9 para 20 na França, 14 para 25 nos Países

Baixos).Os Estados católicos da Alemanha e da Suíça acolheram a reforma em 1584; a Polônia, após alguma resistência, em 1586 e a Hungria em 1587. A repugnância foi grande mesmo nos países católicos, pois isso significava sacrificar 10 dias e romper aparentemente com a continuidade do tempo. Estas reações mostram que o calendário toca o coração das pessoas e que convém tratar a questão com prudência.

Nos países protestantes a recusa foi mais longa. O erudito francês Joseph Scaliger, pelas suas críticas, contribuiu para organizar a resistência. “Os protestantes, dizia Kepler, preferem antes estar em desacordo com o Sol do que de acordo com o Papa”. Os protestantes dos Países Baixos, da Alemanha e da Suíça só por volta de 1700 aceitaram o novo calendário. Mas algumas aldeias suíças foi preciso recorrer à força para obrigar o povo a fazê-lo. A Inglaterra e a Suécia só fizeram em 1752; foi preciso então sacrificar 11 dias, visto que tinham considerado 1700 como bissexto. O problema na Inglaterra agravou-se mais porque também nesse ano fora decidido que o início do ano seria transferido para o dia 1 de Janeiro (até então o ano começava a 25 de Março). Deste modo, na Inglaterra haviam-se suprimido quase três meses no início do ano e em Setembro, com a adoção do calendário gregoriano, eram suprimidos mais 11 dias. Era demais para um povo fiel às tradições.

Os russos, gregos, turcos e, duma maneira geral, os povos de religião ortodoxa, conservaram o calendário juliano até ao princípio deste século. Como tinham considerado bissextos os anos de 1700, 1800 e 1900. A diferença era já de 13 dias. A URSS adaptou o calendário gregoriano em 1918, a Grécia em 1923 e a Turquia em 1926.

Em conclusão, atualmente o calendário gregoriano pode ser considerado de uso universal. Mesmo aqueles povos que, por motivos religiosos, culturais ou outros, continuam agarrados aos seus calendários tradicionais, utilizam o calendário gregoriano nas suas relações internacionais.

A seguir à implantação da reforma gregoriana, os cristãos suprimiram o descanso ao sábado, transferindo-o para o domingo em comemoração perpétua da Ressurreição de Cristo. Assim se quebrou a unidade de descanso no sétimo dia, estabelecido por Moisés há mais de 5700 anos. Seguindo o exemplo dos cristãos, também os mulçumanos renunciaram ao preceito mosaico de descanso ao sábado e transferiram-no para sexta, em cujo dia da semana, dez séculos antes, o Alcorão foi relevado a Maomé e se deu a fuga deste de Meca para Medina (15 de Julho do ano 622 da era cristã).

Defeitos do Calendário Gregoriano

O calendário gregoriano apresenta alguns defeitos, tanto sob o ponto de vista astronômico (estrutura interna), como no seu aspecto prático (estrutura externa). Por isso, vários investigadores pertencentes a várias igrejas ou organismos internacionais e mesmo privados se têm ocupado ativamente da reforma do calendário.

Sob o ponto de vista astronômico, o seu principal defeito é ser ligeiramente mais longo do que o ano trópico, o que se traduz por uma diferença de um dia em cerca de 3000 anos. Porém, esta pequena diferença não tem qualquer inconveniente imediato e uma reforma do calendário destinada a corrigi-la traria sérios problemas, porque iria criar uma descontinuidade com as consequentes complicações cronológicas.

O mesmo não acontece sob o ponto de vista prático, em que, de fato, se justifica uma modificação. Com efeito, o número de dias de cada mês é muito irregular (28 a 31 dias). O mesmo acontece com a semana, adotada quase universalmente como unidade laboral de tempo, que não se encontra integrada nos meses e muitas repartida por dois meses diferentes. Estas duas anomalias têm sérios inconvenientes numa distribuição racional do trabalho e dos salários, que são maiores do que à primeira vista se pode pensar. Até a própria economia doméstica se recente, visto que um salário mensal fixo tem de ser distribuídos por um número diferente de dias.

Mais grave ainda é a mobilidade da data da Páscoa, que oscila entre 22 de Março e 25 de Abril, com as consequentes perturbações da duração dos trimestres escolares e de numerosas outras atividades (judiciais, econômicas, turísticas, etc.) particularmente nos países cristãos em que as festas da Semana Santa têm uma grande importância.

Há ainda um outro ponto que julgo ser interesse salientar. Diz respeito ao tratamento desigual que foi dado à Lua e ao Sol. Com efeito, os padres do concílio de Niceia e o Papa Gregório XIII ligaram o calendário ao Sol verdadeiro, mas tomaram para Lua pascal uma Lua média que, por vezes, se afasta bastante de Lua astronômica. Por esse motivo, podem dar-se de uma semana ou mesmo de um mês na data da Páscoa.

Dada a importância do ciclo semanal no relacionamento entre diferentes calendários e, inclusive, na resolução de algumas dúvidas, julgamos de interesse dizer mais alguma coisa sobre o assunto. No quadro junto estão indicados os respectivos nomes em latim e a sua correspondência com as línguas latinas. Só o português é que se afasta um pouco da tradição.

Domingo: dia do Senhor. Dedicado ao Sol. O astro-rei era tudo para o homem primitivo: espantava as trevas, aquecia os corpos, amadurecia as colheitas. Enfim, o Sol era o Deus; daí a designação de Dia do Senhor entre os latinos.

Segunda-feira: dia da Lua. Depois do Sol e sempre no céu, a Lua era a impressão mais forte recebida pelo homem. Influía nas marés, no plantio, no corte das madeiras, talvez mesmo no nascimento das crianças. Daí a atribuir-lhe um dia da semana.

Terça-feira: dia de Marte. Na escala dos poderes que governavam os céus, as trevas e os seres humanos, Marte pontificava. Era o senhor da guerra e, portanto, dos destinos das nações e dos povos. A sua influência era tão grande que, inclusive, no calendário romano lhe foi destinado um mês (Março).

Quarta-feira: dia de Mercúrio. Era o deus do comércio, dos viajantes e dos ... ladrões! Mensageiro e arauto de Júpiter, protegia os comerciantes e os seus negócios; dada a importância que estas criaturas tiveram em todos os tempos e em todos os lugares, alcançaram para o seu deus a consagração de um dia da semana.

Quinta-feira: dia de Júpiter. Honraria conferida ao pai dos deuses pagãos, comandante dos ventos e das tempestades. Daí a ideia de lhe atribuir um dia da semana, talvez para aplacar a sua fúria.

Sexta- ferira: dia de Vénus. Nascida de espuma do mar para distribuir belezas pelo mundo, Vénus representava para os pagão os ideais da formosura, da harmonia e do amor. Daí a razão de merecer a homenagem de um dia da semana.

Sábado: dia de Saturno. Saturno, deus especialmente querido de Romanos, foi despojado, pelo uso e pelo tempo, da homenagem consistente em dar nome a um dia da semana. Em Roma eram celebrados grandes festejos em sua honra as Saturnais realizadas em Dezembro e que se prolongavam por vários dias. Mas a homenagem a Saturno, correspondente a um dia da semana, perdeu-se nas línguas latinas, em que se deu preferência ao termo hebraico Shabbath, que significa repouso, indicado na velha lei judaica como sendo o dia dedicado ao descanso e às orações. Mas a língua inglesa permaneceu fiel ao velho Saturno, chamado ainda ao seu sábado Saturday.

Quadro comparativo dos nomes dos dias da semana:

Latim	**Italiano**	**Francês**	**Espanhol**	**Português**
Dies Dominica (Dia do Senhor)	Domenica	Dimanche	Domingo	Domingo
Lunae dies (Dia da Lua)	Lunedi	Lundi	Lunes	Segunda-feira
Martis dies (Dia de Marte)	Martedi	Mardi	Martes	Terça-feira
Mercurii dies (Dia de Mercúrio)	Mercoledi	Mercredi	Miércoles	Quarta-feira
Jovis dies (Dia de Júpiter)	Giovedi	Jeudi	Jueves	Quinta-feira
Veneris dies (Dia de Vénus)	Venerdi	Vendredi	Viernes	Sexta-feira
Saturni dies (Dia de Saturno)	Sabbato	Samedi	Sábado	Sábado

As Eras

Ao longo desta exposição referimo-nos várias vezes à era de Roma e à era cristã. Talvez seja vantajoso dizer mais alguma coisa sobre o assunto. Os romanos datavam seus anos a partir da fundação de Roma, “ ab urbe condita” que, de acordo com a opinião de varrão, remota a 753 antes da era cristã. Mas os romanos contavam a sua era a partir de 21 de abril. Assim, o ano 1 da era cristã corresponde a cerca de 4 meses ao ano 753 de Roma e o resto ao ano 754. Por comodidade, recua-se muitas vezes de alguns meses a era de Roma e faz-se coincidir o ano 1 da nossa era com o ano 754 de Roma.

Só alguns séculos após o nascimento de Cristo é que se pôs a questão de ligar este acontecimento a uma origem de contagem do tempo. A proposta foi apresentada pelo monge cita Dionísio o Exíguo por volta do ano 532 da nossa era. Imediatamente adotada pela Igreja, ela foi-se generalizando a todo os países católicos. Em Portugal utilizou-se a era de César ou hispânica até ao ano 1422. Esta era havia sido introduzido na península Ibérica no século V para recordar a conquista da península por Caio Júlio César Augusto no ano 38 a.C. (ano 716 de

Roma). Por determinação de D. João I, foi abolida a era de César e o ano 1460 desta era passou a ser o ano 1422 da era cristã.

Dionísio o Exíguo supunha, de acordo com as suas investigações, que Jesus Cristo tinha vindo ao mundo em 25 de Dezembro (VIII das calendas de Janeiro) do ano 753 de Roma e fixara nessa data o início da era cristã. Mas os cronologista introduziram um atraso de sete dias, de maneira que o início da era cristã foi transferido para o dia 1 de Janeiro do ano 754 de Roma.

Atualmente parece provado que os cálculos não estavam corretos e que Cristo deveria ter nascido 5 a 7 anos antes da data em que se celebra o seu nascimento. Com efeito, essa data é posterior ao édito do recenseamento do mundo romano (ano 747 de Roma ou mais cedo) e anterior à morte de Herodes (ano 750 de Roma). Para alguns cronologista, é sugerida a data de 747 de Roma, porque nesse ano Júpiter e Saturno estiveram em conjunção na constelação dos Peixes em Setembro e em Novembro e eles veem neste fenômeno a "estrela de Belém". Mas, para não perturbar a cronologia já estabelecida, foi mantida a data inicialmente proposta, embora tivesse deixado de corresponder ao significado inicial.

É importante notar que na era cristã os anos são referidos a uma escala sem zero, isto é, a contagem inicia-se no ano 1 depois de cristo, designando-se o ano anterior como ano 1 antes de Cristo. Por conseguinte, qualquer acontecimento ocorrido durante o primeiro ano da era cristã, embora seja apenas de um dia ou de um mês, conta-se como tendo ocorrido no ano 1 depois de Cisto. Por esta razão, o primeiro século, ou intervalo de 100 anos, da era cristã, terminou no dia 31 de Dezembro do ano 100 d.C., quando haviam decorrido os primeiros 100 anos após o início da era. O século II começou no dia 1 de janeiro do ano 101 d.C., e assim sucessivamente. Consequentemente, o século XX começou no dia 1 de janeiro do ano 1901 e terminará no 31 de Dezembro do ano 2000.

Esta forma pouco lógica de numerar os anos do calendário é particularmente inconveniente quando se trata de determinar intervalos de tempo que começam antes da origem da era cristã e terminam depois. Assim, por exemplo, o intervalo entre anos 50 a.C. e 50 d.C. não é de 100 anos, mas apenas de 99. Em geral, estes intervalos de tempo obtêm-se diminuindo um ano, o que é necessário ter de contar ao investigar acontecimentos históricos ou fenômenos astronômicos da Antiguidade datados segundo a era cristã.

Este inconveniente é facilmente resolvido com a introdução dos números negativos, como aliás o fazem os astrônomos. Assim, o ano 1 a.C. corresponde ao ano 0, o ano 2 a.C. ao ano -1 e assim sucessivamente. As datas depois de Cristo exprime-se da mesma maneira. Esquematizamos na figura junta a relação entre as duas contagens.

Era cristã	3 a.C	2 a.C.	1 a.C.	2 d.C.	3 d.C.
Cômputo astronômico	-2	-1	0	+1	+2

Para evitar estas dificuldades cronológicas do calendário, o erudito francês Josph Scaliger propôs em 1582, no mesmo da reforma gregoriana do calendário, contar ininterruptamente os dias correspondentes a um período que fosse múltiplo dos lunares e solares normalmente utilizados no calendário e suficientemente extenso para abarcar acontecimentos históricos desde a mais remota Antiguidade. Obteve assim um período de 7980 anos julianos, a que deu nome de período juliano. Tomando como unidade prática o dia solar médio, começou a contar os dias numa sucessão contínua a partir do meio-dia do dia 1de Janeiro do ano 4713 a. C. A escolha desta data, que à primeira vista pode parecer arbitrária, foi também determinada em função dos períodos utilizados.

Convém esclarecer que até 1925 o tempo solar médio era contado em astronomia a partir do meio- dia, para que as observações noturnas caíssem sempre dentro do mesmo dia e não a partir da meia-noite, como é usual no tempo civil. O dia solar médio era chamado dia astronômico. A partir de 1925, por acordo internacional, as dias solares médios passaram a contar-se com início à meia-noite tanto em astronomia como na vida civil e a designação de dia astronômico caiu em desuso. Mas os dias do período juliano, que começaram a contar-se de meio-dia a meio-dia segundo o uso astronômico da época, continuam a contar-se da mesma maneira, por razões óbvias de continuidade da escala.

Escrevemos neste capítulo a história do calendário segundo [7]

Capítulo 2

DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIAS EM $\mathbb{Z}$

2.1 DIVISIBILIDADE

Definição 2.1. *De maneira geral, se a e b, com b diferente de zero, são números inteiros e existe outro número inteiro c tal que a = b.c, dizemos que b divide a (e que c divide a). Neste caso, b (ou c) é dito ser um divisor de a ou um fator de a. Dizemos, também, que a é múltiplo de b e c.*

2.2 PROPOSIÇÕES IMPORTANTES

Proposição 2.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tem-se que*

a) $1|a$, *se* $a \neq 0$ *então* $a|a$ *e* $a|0$.

Exemplo: Vamos mostrar que $1 \mid 5$.

Pela definição divisibilidade 1 divide 5, se existe um inteiro tal que o produto dele por 1 seja igual a 5, temos que $5 = 1.5$, logo $1 \mid 5$.

b) $0|a$ *se, e somente se* $a = 0$

c) $a|b$ *se, e somente se* $|a|\ divide\ |b|$

d) se $a|b$ e $b|c$, *então* $a|c$.

Exemplo: Vamos mostrar que se $2 \mid 6$ e $6 \mid 12$,então $2 \mid 12$.

Pela definição divisibilidade, temos que 2 divide 6, pois $6 = 2.3$, temos também que 6 divide 12, pois $12 = 2.6$,porém temos também que 2 divide 12, pois $12 = 2.6$, comprovando assim a proposição acima citada.

Proposição 2.2. *Se* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a|b$ *e* $c|d$*, então* $ac|bd$*.*

Exemplo: Vamos mostrar que se $3 \mid 6$ e $4 \mid 12$,então $3.4 = 12 \mid 6.12 = 72$.

Pela definição divisibilidade, temos que 3 divide 6, pois $6 = 2.3$, temos também que 4 divide 12, pois $12 = 4.3$,porém temos também que 12 divide 72, pois $72 = 12.6$, comprovando assim a proposição acima citada.

Proposição 2.3. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$*, tais que* $a|(a \pm b)$*.Então* $a|b$ *se, e somente se,* $a|c$*.*

Proposição 2.4. *Se* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *são tais que* $a|b$ *e* $a|c$*, então para todo* $x, y \in \mathbb{Z}$ $a|(xb + yc)$*.*

Proposição 2.5. *Dados* $a, b \in \mathbb{Z}$*, onde* $b \neq 0$*, temos que* $a|b$*, então* $|a| \leq |b|$*.*

Proposição 2.6. *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*: Temos que* $a - b$ *divide* $a^n - b^n$*.*

Exemplo: Uma aplicação interessante da proposição acima é o fato de que todo número da forma $10^n - 1$, onde n é natural, seja divisível por 9. De fato, basta pôr na proposição $a = 10$ e $b = 1$, obtendo que $a - b = 9$ divide $a^n - b^n = 10^n - 1$

Proposição 2.7. *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *. Temos que* $a + b$ *divide* $a^{2n+1} + b^{2n+1}$*.*

Exemplo: Mostre que $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

Temos que $13 \mid (2^2)^{35} + (3^2)^{35} = 4^{2.17+1} + 9^{2.17+1}$, temos então que a=4 e b=9, como a+b divide $a^{2n+1} + b^{2n+1}$,então $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

Proposição 2.8. *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*. Temos que* $a + b$ *divide* $a^{2n} - b^{2n}$*.*

Exemplo: Mostre que $13 \mid 9^{2n} - 2^{4n}$.

Temos que $13 \mid (9^{2n}) + (2^2)^{2n} = 9^{2n} + 4^{2n}$, temos então que a=9 e b=4, como a+b divide $9^{2n} - 4^{2n}$,então $13 \mid 9^{2n} + 2^{4n}$.

Vamos agora enunciar o teorema da **Divisão Euclidiana** que diz o seguinte:

Teorema 2.1. *Sejam a e b dois números inteiros com* $b \neq 0$*. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|$$

As proposições e o teorema acima citados estão demonstradas em [4] e [5]

2.3 CONGRUÊNCIA MÓDULO m EM $\mathbb{Z}$

Definição 2.2. *Se os inteiros a e b dão o mesmo resto quando divididos pelo inteiro m (m >1) então diremos que a e b são côngruos, módulo m e decretamos* $a \equiv b \,(\,mod\, m)$*, se* $a - b = k.m$

Uma maneira equivalente de dizer isso é afirmar que a diferença $(a-b)$ ou $(b-a)$ é divisível por *m*, ou que *m* é divisor dessa diferença. Veja um exemplo:

$$47 \equiv 43\,(\,mod\,4)$$

observe $(47-43)=4=4.1$, portanto $47 \equiv 43(mod4)$.

A congruência define uma relação de equivalência, pois atende às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja:

Propriedades.

1) Reflexivadade $a \equiv a\,(\,mod\,m)$.
2) Simetria: Se $a \equiv b\,(\,mod\,m)$, então $b \equiv a\,(\,mod\,m)$.
3) Transitividade: Se $a \equiv b\,(\,mod\,m)$ e $b \equiv c\,(\,mod\,m)$, então $a \equiv c\,(\,mod\,m)$.
4) $a \equiv b\,(\,mod\,m)$ e $c \equiv d\,(\,mod\,m)$, então $(a+c) \equiv (b+d)\,(\,mod\,m)$.
5) Se $a \equiv b\,(\,mod\,m)$ e $c \equiv d\,(\,mod\,m)$, então $ac \equiv bd\,(\,mod\,m)$.

As propriedades de congruências módulo m acimas citadas estão demonstradas em [6]

Classes de Equivalências.

Classe de equivalência de um número inteiro k módulo m é o conjunto $\overline{k} = \{k+u.m, u \in \mathbb{Z}\}$.

Na realidade existe um número finito de classes de equivalências distintas. Desta forma duas classes são iguais ou são disjuntas.

Denotaremos por $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$, como sendo o conjunto das classes de equivalência módulo m.

Vamos definir as operações soma e produto no conjunto das classes de equivalências.

- Soma

$$\overline{a}+\overline{b} := \overline{a+b}$$

Exemplo:

$$5+4 \equiv 9 \equiv 1(mod8)$$

$$\overline{5}+\overline{4} = \overline{5+4} = \overline{1}$$

$$\overline{5}+\overline{4} = \overline{9} = \overline{1}$$

Proposição 2.9. *A operação definida acima independe do representante da classe.*

Demonstração.

Se $\overline{a} = \overline{c}$ e $\overline{b} + \overline{d}$ então $a-c = k_1.m$ e $b-d = k_2.m$, temos $a+b = c+d+(k_1+k_2).m$, então $\overline{a+b} = \overline{c+d}$.

- Multiplicação

$$\overline{a}.\overline{b} = \overline{a.b}$$

Exemplo:

$$5.4 \equiv 20 \equiv 4(mod8)$$

$$\overline{5}.\overline{4} = \overline{5.4} = \overline{4}$$

Logo

$$\overline{5}.\overline{4} = \overline{20} = \overline{4}$$

Proposição 2.10. *A operação definida acima independe do representante da classe.*

Demonstração. Se $\overline{a} = \overline{c}$ e $\overline{b} = \overline{d}$, então $a = c + k_1.m$ e $b = d + k_2.m$, como $a.b = c.d + c.k_2.m + d.k_1.m + k_1.k_2.m^2$, temos que $a.b = c.d + (c.k_2 + d.k_1 + k_1.k_2.m).m$, ou seja $\overline{a.b} = \overline{c.d}$

2.4 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE COM USO DE CONGRUÊNCIAS

Pode-se utilizar a congruência de inteiros para restabelecer critérios de divisibilidade. Lembrando que todo número *N* pode ser representado de uma única maneira como polinômio, isto é,

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0 = a_0 + a_1.10 + a_2.10^2 + ... + a_n.10^n$$

onde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Para estabelecer um critério de divisibilidade por *m*, a ideia é descobrir uma expressão mais simples em termos dos dígitos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1 a_0$ à qual o polinômio é côngruo, modulo *m*.

- DIVISIBILIDADE POR 4

“ Um número somente será divisível por 4 se os dois últimos algarismos forem divisível por 4”

Demonstração.
Seja $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, um número pertencente a $\mathbb{Z}$. Como

$$
\begin{aligned}
&10^n = 1\underbrace{000\cdots0}_{\text{n vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,4) \times (a_n)\\
&10^{n-1} = 1\underbrace{000\cdots0}_{\text{(n-1) vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,4) \times (a_{n-1})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&10^3 = 1000 \equiv 0\,(\,mod\,4) \times (a_3)\\
&10^2 = 100 \equiv (\,mod\,4) \times (a_2)\\
&10 \equiv 2\,(\,mod\,4) \times (a_1)\\
&1 \equiv 1\,(\,mod\,4) \times (a_0)
\end{aligned}
$$

Multiplicando as congruências acimas pelo devido índice que está ao lado de cada congruência temos,

$$
\begin{aligned}
&a_n\underbrace{000\cdots0}_{\text{n vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,4)\\
&a_{n-1}\underbrace{000\cdots0}_{\text{(n-1) vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,4)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_3000 \equiv 0\,(\,mod\,4)\\
&a_200 \equiv 0(\,mod\,4)\\
&a_10 \equiv a_10\,(\,mod\,4)\\
&a_0 \equiv a_0\,(\,mod\,4)
\end{aligned}
$$

Somando todas as congruências acima,obtemos

$$
\begin{array}{ll}
 & a_n\underbrace{000\cdots0}_{\text{n vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,4)\\
 & a_{n-1}\underbrace{000\cdots0}_{\text{(n-1) vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,4)\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
 & a_3000 \equiv 0\,(\,mod\,4)\\
 & a_200 \equiv 0(\,mod\,4)\\
 & a_10 \equiv a_10\,(\,mod\,4)\\
 & a_0 \equiv a_0\,(\,mod\,4)\\
\hline
 & a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0 \equiv (a_10 + a_0)mod4
\end{array}
$$

Daí temos que

$$N \equiv (a_1a_0) mod 4$$

Logo um número N só será divisível por 4 se os dois últimos algarismos forem divisível por 4. Demonstração feita de acordo com [1]

- Divisibilidade por 7

" O número $N = a_na_{n-1}\cdots a_1a_0$ é divisível por 7 se e somente se o número $a_na_n\cdots a_1 - 2a_0$ for múltiplo de 7 "

Demonstração.

Seja $N = a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$, um número pertencente a $\mathbb{Z}$.

Temos que $7 \equiv 0\, mod\, 7$, multiplicando a congruência por a_0, temos $7a_0 \equiv 0\, mod\, 7$.

Podemos reescrever da seguinte forma

$$\begin{aligned} a_0 + 6a_0 &\equiv 0\, mod\, 7 \\ a_0 &\equiv -6a_0\, mod\, 7 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por outro lado temos que $10 \equiv 3\, mod\, 7$. Vamos agora multiplicar a congruências por $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$, temos que $10.(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1) \equiv 3.a_na_{n-1}\cdots a_2a_1\, mod\, 7$, então

$$(a_na_{n-1}\cdots a_2a_10) \equiv 3.a_na_{n-1}\cdots a_2a_1\, mod\, 7 \tag{2.2}$$

Somando (2.1) e (2.2),temos

$$\begin{array}{rl} & a_0 \equiv -6a_0\, mod\, 7 \\ + & (a_na_{n-1}\cdots a_2a_10) \equiv 3.a_na_{n-1}\cdots a_2a_1\, mod\, 7 \\ \hline & (a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0) \equiv 3.a_na_{n-1}\cdots a_2a_1 - 6a_0\, mod\, 7 \end{array}$$

Daí temos que

$$N \equiv 3.(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1 - 2a_0)\, mod\, 7$$

Portanto o número N somente será divisível por 7, se $(.a_na_{n-1}\cdots a_2a_1 - 2a_0)$for múltiplo de 7, pois 3 não é múltiplo de 7. De acordo com [2]

- DIVISIBILIDADE POR 100

" Um número somente será divisível por 100 se e somente se, os dois últimos algarismos forem zero"

Demonstração.

Seja $N = a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$ um número pertencente a $\mathbb{Z}$

Como

$$
\begin{aligned}
&10^n = 1\underbrace{000\cdots0}_{\text{n vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,100) \times (a_n)\\
&10^{n-1} = 1\;\underbrace{000\cdots0}_{\text{(n-1) vezes}}\;\equiv 0\,(\,mod\,100) \times (a_{n-1})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&10^3 = 1000 \equiv 0\,(\,mod\,100) \times (a_3)\\
&10^2 = 100 \equiv 0(\,mod\,100) \times (a_2)\\
&10 \equiv 10\,(\,mod\,100) \times (a_1)\\
&1 \equiv 1\,(\,mod\,100) \times (a_0)
\end{aligned}
$$

Multiplicando as congruências acimas pelo devido índice que está ao lado de cada congruência temos

$$
\begin{aligned}
&a_n\underbrace{000\cdots0}_{\text{n vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,100)\\
&a_{n-1}\;\underbrace{000\cdots0}_{\text{(n-1) vezes}}\;\equiv 0\,(\,mod\,100)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_3000 \equiv 0\,(\,mod\,100)\\
&a_200 \equiv 0(\,mod\,100)\\
&a_10 \equiv a_10\,(\,mod\,100)\\
&a_0 \equiv a_0\,(\,mod\,100)
\end{aligned}
$$

Somando todas as congruências acima, obtemos

$$
\begin{array}{cl}
 & a_n\underbrace{000\cdots0}_{\text{n vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,100)\\
 & a_{n-1}\;\underbrace{000\cdots0}_{\text{(n-1) vezes}}\;\equiv 0\,(\,mod\,100)\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
 & a_3000 \equiv 0\,(\,mod\,100)\\
 & a_200 \equiv 0(\,mod\,100)\\
 & a_10 \equiv a_10\,(\,mod\,100)\\
 & a_0 \equiv a_0\,(\,mod\,100)\\
\hline
 & a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0 \equiv (a_10 + a_0)mod100
\end{array}
$$

Logo

$$N \equiv (a_1a_0)\, mod\, 100$$

Então um número N só será divisível por 100, se e somente se,os dois últimos algarismos forem zero.

- DIVISIBILIDADE POR 400

" Um número somente será divisível por 400 se e somente se,o número formado pelos quatro últimos algarismos forem divisível por 400"

Demonstração.
Seja $N = a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$, um número pertencente a $\mathbb{Z}$
Como

$$\begin{aligned}
&10^n = 1\underbrace{000\cdots 0}_{\text{n vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,400) \times (a_n)\\
&10^{n-1} = 1\underbrace{000\cdots 0}_{\text{(n-1) vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,400) \times (a_{n-1})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&10^3 = 1000 \equiv 1000\,(\,mod\,400) \times (a_3)\\
&10^2 = 100 \equiv 100(\,mod\,400) \times (a_2)\\
&10 \equiv 10\,(\,mod\,400) \times (a_1)\\
&1 \equiv 1\,(\,mod\,400) \times (a_0)
\end{aligned}$$

Multiplicando as congruências acimas pelo devido índice que está ao lado de cada congruência temos

$$\begin{aligned}
&a_n\underbrace{000\cdots 0}_{\text{n vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,400)\\
&a_{n-1}\underbrace{000\cdots 0}_{\text{(n-1) vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,400)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_3000 \equiv a_3000\,(\,mod\,400)\\
&a_200 \equiv a_200(\,mod\,400)\\
&a_10 \equiv a_10\,(\,mod\,400)\\
&a_0 \equiv a_0\,(\,mod\,400)
\end{aligned}$$

Somando todas as congruências acima, obtemos

$$
\begin{array}{ll}
 & a_n \underbrace{000\cdots 0}_{\text{n vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,400) \\
 & a_{n-1} \underbrace{000\cdots 0}_{\text{(n-1) vezes}} \equiv 0\,(\,mod\,400) \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & a_3000 \equiv a_3000\,(\,mod\,400) \\
 & a_200 \equiv a_200(\,mod\,100) \\
 & a_10 \equiv a_10\,(\,mod\,400) \\
 & a_0 \equiv a_0\,(\,mod\,400) \\
\hline
 & a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0 \equiv (a_3000 + a_200 + a_10 + a_0)\,mod\,400
\end{array}
$$

Logo

$$N \equiv (a_3a_2a_1a_0)\,mod\,400$$

Portanto o número N só será divisível por 400, se e somente se,o número formado pelos quatro últimos algarismos forem divisível por 400.

Observação 2.1. *Deve-se observar que se os quatros últimos dígitos são divisíveis por 400, logo os algarismos devem ser múltiplos de 400, e todos os múltiplos de 400 são terminados em 00. Então os dois últimos algarismos são terminados em zero. Ainda observando os múltiplos de 400, temos que os dois algarismos antes de 00 são múltiplos de 4. Portanto, um número é divisível por 400 quando os dois últimos algarismos forem 00 e os dois algarismos antes de 00 formem um número múltiplo de 4.*

Capítulo 3

PARTE INTEIRA DE UM NÚMERO REAL

Antes de falarmos propriamente dito de parte inteira vamos enunciar o Princípio da Boa Ordenação (PBO).

Todo subconjunto A de $\mathbb{Z}$ não-vazio e limitado inferiormente possui um menor elemento em A.E todo subconjunto A de $\mathbb{Z}$ limitado superiormente possui maior elemento em A.

Vamos mostrar algumas proposições importantes referentes a parte inteira de um número real.

Proposição 3.1. *Seja x um número real, então existem únicos inteiro $\lfloor x \rfloor$ e $0 \leq m_x < 1$ tais que x = $\lfloor x \rfloor + m_x$. O número $\lfloor x \rfloor$ é chamado parte inteira de x e m_x de mantissa de x.*

Demonstração.

Existência:

Seja A= $\{n \in \mathbb{Z}; x - n \geq 0\}$, temos que

$$\lim_{n \to +\infty} x - n = -\infty$$

isto mostra que A é limitado superiormente. Por outro lado

$$\lim_{n \to -\infty} x - n = +\infty$$

isto mostra que A é não-vazio.

Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $\lfloor x \rfloor$ o maior elemento de A, façamos $m_x = x - \lfloor x \rfloor$. Teremos, então, $m_x \geq 0$, pois $\lfloor x \rfloor \in A$; Suponhamos que $m_x \geq 1$, ou seja, $m_x - 1 \geq 0$. Então $x - \lfloor x \rfloor - 1 = x - (\lfloor x \rfloor + 1) \geq 0$, contrariando a maximilidade de $\lfloor x \rfloor$, pois $\lfloor x \rfloor$ +1 pertenceria a A. Portanto $m_x < 1$.

Unicidade:

Suponha $I_1 + m_1 = I_2 + m_2$ com $I_1, I_2 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq m_1, m_2 < 1$. Sem perda de generalidade, suponha também que $m_1 \leq m_2$. Temos $I_1 - I_2 = m_2 - m_1$, com $0 \leq m_2 - m_1 < 1$. Como

$I_1 - I_2 \in \mathbb{Z}$, segue que $I_1 - I_2 = 0 \Longrightarrow I_1 = I_2$ e $m_2 = m_1$. Além disso, se $I > \lfloor x \rfloor$, I inteiro então I não pertence a A pela maximilidade de $\lfloor x \rfloor$. Segue então $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

Com o auxílio do GEOGEBRA vamos inserir o gráfico da função $\lfloor x \rfloor$.

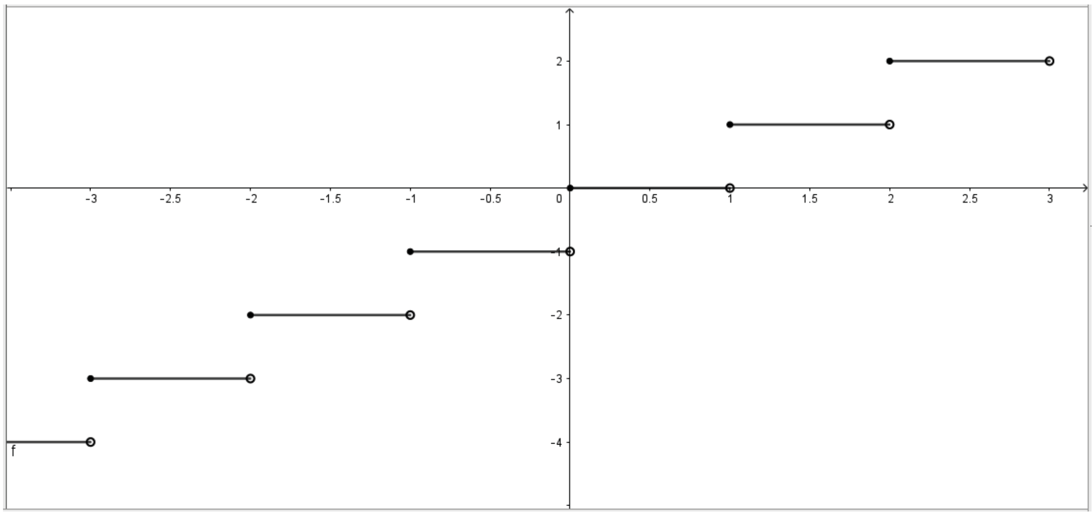

Figura 3.1: Função $\lfloor x \rfloor$.

Proposição 3.2. *Se $x \in \mathbb{R}$ e $I \in \mathbb{Z}$ então $\lfloor x + I \rfloor$ = $\lfloor x \rfloor$ + I*

Demonstração.

Seja $x = \lfloor x \rfloor + m_x$, logo $x + I = \lfloor x \rfloor + m_x + I = (\lfloor x \rfloor + I) + m_x$, como $(\lfloor x \rfloor + I) \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq m_x < 1$, pela unicidade $\lfloor x + I \rfloor = \lfloor x \rfloor + I$.

Proposição 3.3. *$\lfloor x \rfloor$ + $\lfloor -x \rfloor = 0$ se $x \in \mathbb{Z}$ e $\lfloor x \rfloor$ + $\lfloor -x \rfloor = -1$ se $x \notin \mathbb{Z}$.*

Demonstração.

É consequência da unicidade que, $\lfloor x \rfloor = x$ se e somente se x é inteiro.

Assim se $x \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x + (-x) = 0, x \notin \mathbb{Z}$, se e somente se $m_x > 0$. Temos

$$x = \lfloor x \rfloor + m_x$$
$$-x = -\lfloor x \rfloor - m_x = (-\lfloor x \rfloor - 1) + (1 - m_x)$$

Como $0 < 1 - m_x < 1$, pela unicidade da decomposição de x segue que

$$\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1 \text{ e } m_{-x} = 1 - m_x$$

Temos então,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$$

Com o auxílio do GEOGEBRA vamos inserir o gráfico da função $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

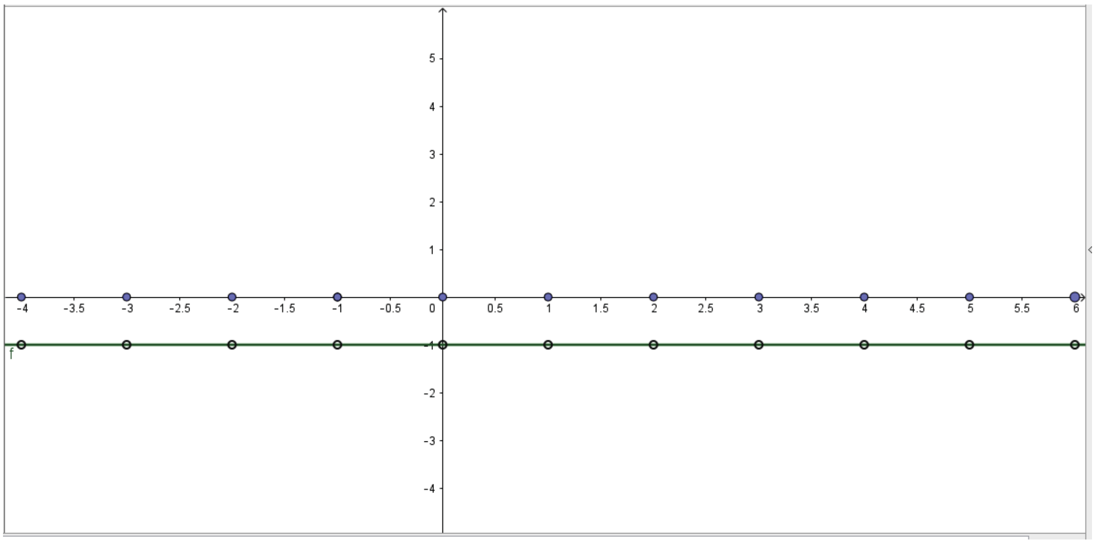

Figura 3.2: Função $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$

Proposição 3.4. *Seja a e b inteiros b maior do que zero* $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = q$ *onde q é o quociente da divisão euclidiana de a por b.*

Demonstração.

Pela divisão euclidiana, temos que $a = q\ .\ b + r$ com $0 \leq r < b$, dividindo a equação e a inequação por b temos $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, como $0 \leq \frac{r}{b} < 1$, pela unicidade $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = q$.

De modo mais geral, dados $a, d \in \mathbb{N}$ com $a < d$, o número de múltiplos não nulos de $a \leq d$ é igual ao quociente da divisão de d por a, ou que o mesmo é igual à parte inteira $\left\lfloor \frac{d}{a} \right\rfloor$ do número racional $\frac{d}{a}$.

Agora, dados $0 < a < b < d$, se quisermos contar quantos são os múltiplos de a entre b e d, procedemos como segue:

De $\left\lfloor \frac{d}{a} \right\rfloor$, que é o número de múltiplos de a entre 1 e d, devemos subtrair $\left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor$, que é o número de múltiplos de a anteriores a b. Portanto, o número de múltiplos de a entre b e d, incluindo b se esse for múltiplo de a, é

$$\left\lfloor \frac{d}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor$$

Assim, fica estabelecido o seguinte resultado: Dados os inteiros *a, b* e *d* tais que $0 < a < b < d$, então o número de múltiplos de *a* entre *b* e *d* é dado por

i) $\left\lfloor \frac{d}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor$, se incluirmos *b* na contagem.

ii) $\left\lfloor \frac{d}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$, se excluirmos *b* na contagem.

Proposição 3.5. *Sejam a e b> 0 inteiros então*
$\left\lfloor \dfrac{a-1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$ *se b não divide a e* $\left\lfloor \dfrac{a-1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor - 1$ *, se b divide a*

Demonstração. Desafio ao leitor

Capítulo 4

FÓRMULA DE ZELLER

A fórmula que usaremos a seguir é denominada fórmula de Zeller que terá validade a partir do ano de 1601 e ainda, devido à irregularidade do mês de fevereiro, para dar maior uniformidade à fórmula, o colocaremos no final da contagem dos meses, ou seja, o mês 1 de um ano será março, seguido de abril etc., até chegar aos meses 11 e 12 que são janeiro e fevereiro (do ano seguinte). Assim, os meses de janeiro e fevereiro de um determinado ano serão como os meses 11 e 12 do ano anterior.

Uma data (d, m, A) será constituída por três números, onde *d* representa o dia, *m* o mês, com a convenção acima (março=1), e A um ano posterior a 1600, ou seja $A \geq 1601$. Por exemplo, 20 de janeiro de 1958 será representado por (20, 11, 1957) e 29 de fevereiro de 2016 por (29, 12, 2015). Vamos ainda enumerar os dias da semana como segue: domingo (1), segunda (2), terça (3), etc. e sábado (7).

Para determinar o dia da semana s(d, m, A) da data (d, m, A), procederemos por partes. Determinaremos inicialmente uma fórmula para s(1, 1, A) o dia da semana do primeiro dia do mês 1 (março) do ano A, posteriormente, acharemos uma fórmula s(1, m, A), o dia da semana do primeiro dia do mês m do ano A e finalmente a fórmula para s(d, m, A). A proposição a seguir auxiliar-nos-á nessa tarefa.

Proposição 4.1. *Seja A > 1600. Então, no intervalo (1600, A],*

i) O número de anos múltiplos de 4 é:

$$\left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1600}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - 400$$

ii) O número de anos centenários que não são bissextos é:

$$\left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor - 12$$

iii) O número de anos bissextos é

$$b = \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor - 388$$

Demonstração.

i) É uma consequência da seguinte proposição: Dados os inteiros *a, b* e *d* tais que *0 < a < b < d*, então o número de múltiplos de *a* entre *b* e *d* é dado por

1) $\left\lfloor \frac{d}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor$, se incluirmos *b* na contagem.

2) $\left\lfloor \frac{d}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$, se excluirmos *b* na contagem.

Tendo em vista que o intervalo considerado (1600,A].

ii) O número de anos centenários desde o ano 1601 até o ano A é dado por
$\left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1600}{100} \right\rfloor$
e o número de anos centenários bissextos do ano 1601, ao ano A é dado por $\left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1600}{400} \right\rfloor$,
daí o resultado.

iii) Obtemos o número desejado tomando (i) - (ii), ou seja,
$\left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor - 400 - \left\{ \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor - 12 \right\} = \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor - 388$

Denotaremos provisoriamente por s o dia da semana de primeiro de março de 1601, que iremos determinar posteriormente.

Como 1602 não é bissexto, o dia primeiro de março de 1602 ocorrerá após 365 dias. Sendo $365 \equiv 1 \, mod \, 7$, segue-se que o dia 1 de março de 1602 ocorrerá em um dia da semana posterior a s, ou seja cairá no dia $s + 1 mod \, 7$, onde a notação (*a mod 7*) significa o resto da divisão de *a* por 7.

O mesmo argumento mostra-nos que $s(1, 1, 1603) = s+2mod \, 7$. Para calcular s(1 ,1, 1604), uma precaução deve ser tomada, pois o mês de fevereiro de 1604, contado como mês 12 do ano anterior, tem 29 dias, logo, a passagem de primeiro de março de 1603 para primeiro de março de 1604 ocorrerá após 366 dias e, como $366 \equiv 2mod \, 7$, temos que $s(1, 1, 1604) = s+2+2 \, mod \, 7$. Vemos então que cada ano bissexto que passa devemos somar 1 (módulo 7) ao dia da semana do ano anterior e cada ano bissexto devemos somar 2.

Assim, como a nossa contagem inicia-se no ano de 1601, e sendo *b* o número de anos bissextos no intervalo (1600, A], temos que

$$s(1, 1, A) = s + A - 1600 + b \, mod \, 7 \qquad (2)$$

Vamos consultar o calendário do ano que o livro de Aritmética do Abramo Hefez da coleção Profmat foi escrito, verificamos que o primeiro dia de março de 2013 foi uma sexta-feira, logo $s(1, 1, 2013) = 6$. Substituindo esse valor na equação (2) e calculando *b* pela proposição anterior (iii), obtemos $s \equiv 4 \, mod \, 7$, logo *s* representa uma quarta-feira.

As considerações acima, juntamente com a proposição anterior e o fato que $1600 + 388 \equiv 0 \, mod \, 7$, provarão o resultado a seguir.

Tem-se que

$$s(1,1,A) = 4 + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \, mod\, 7$$

Agora, para passarmos de 1 de março para 1 de abril, devemos somar 31 dias, e como $31 \equiv 3 \, mod \, 7$, temos que

$$s(1,2,A) \equiv s(1,1,A) + 3 \, mod \, 7$$

logo, a constante de s(1, 2, A) é 7. Como $30 \equiv 2 \, mod \, 7$, temos que $s(1,3,A) \equiv s(1,2,A)+2 \equiv s(1,1,A) + 5 \, mod \, 7$, logo, a constante de s (1, 2, A) é 9, e assim sucessivamente somando os números 2 ou 3 ao primeiro dia da semana do mês anterior para obter o primeiro dia da semana de um determinado mês, até chegarmos ao mês 12 (fevereiro). Assim, os termos constantes que devemos somar à expressão.

$$A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \, mod \, 7,$$

para obter o dia da semana de um determinado mês m de um ano A são:

$$4, 7, 9, 12, 14, 17, 20, 22, 25, 27, 30, 33,$$

ou seja,

$$4, 0, 2, 5, 0, 3, 6, 1, 4, 6, 2, 5 mod \, 7.$$

Existe uma fórmula empírica em função de $m = 1, \cdots, 12$ que fornece esses valores mod 7:

Provamos assim o resultado a seguir:

Tem-se que

$$s(1,m,A) = 2 + \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \, mod \, 7$$

Como a cada dia do mês que passa devemos somar 1 módulo 7 ao dia da semana do dia anterior, obtemos imediatamente o resultado a seguir.

Tem-se a fórmula

$$s(d,m,A) = \begin{cases} d + 1 + \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor mod\, 7 & \text{se } 1 \leq m \leq 10, \\ d + 1 + \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor + (A-1) + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor mod\, 7 & \text{se } 11 \leq m \leq 12, \end{cases}$$

A fórmula do teorema acima é conhecida como o **Algoritmo de Zeller**, em homenagem ao reverendo Christian Zeller, que a publicou em 1882.

O capítulo 4 foi escrito de acordo com [5].

Capítulo 5

FÓRMULA DESENVOLVIDA EM NOSSO TRABALHO

Vamos supor que você saiba em qual dia da semana caiu o dia 1º de janeiro de um determinado ano. Em 2006, por exemplo, foi um domingo. Imaginemos que você deseja saber quando cairá um outro dia qualquer (vale para qualquer ano). É só montar uma tabela para essa primeira semana, que no caso será:

Domingo $\rightarrow$ 1 Segunda $\rightarrow$ 2 Terça $\rightarrow$ 3 Quarta $\rightarrow$4 Quinta $\rightarrow$ 5 Sexta $\rightarrow$ 6 Sábado $\rightarrow$ 7

Verificamos aqui que estamos novamente diante de um caso de congruência, módulo 7 nesse caso. Digamos que estivéssemos interessados em descobrir em que dia da semana caiu o dia 5 de julho (e não temos um calendário em mãos, é claro). Primeiro precisamos ver quantos dias existem de 1 de janeiro até 5 de julho. Vejamos:

- Janeiro = 31 dias
- Fevereiro = 28 dias (2006 não é bissexto)
- Março = 31 dias
- Abril = 30 dias
- Maio = 31 dias
- Junho = 30 dias
- Julho = 5 dias

  Total = 186 dias.

Se dia 17 é terça então dia 17 + 7= 24 também é terça.

Então para determinarmos em que dia da semana "cai" determinada data, é natural pensarmos em congruência módulo 7. Escrito de acordo com [3]

Tomaremos como ano base de contagem 2012, principalmente pelo fato do dia 1 de janeiro ser domingo (o que facilitará na identificação final, e por ser bissexto).

Os anos múltiplos de 100 e que não são múltiplos de 400 não serão considerados bissextos.

Cálculo para datas de anos anteriores a 2012

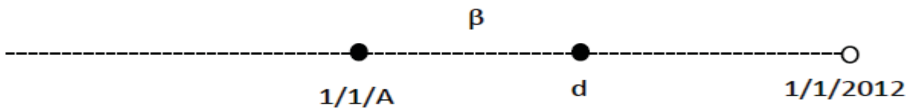

Figura 5.1: Anos anteriores a 2012.

Do dia 1/1/A até o dia 1/1/2012 passaram-se 365. (2012-A) dias, mais um dia por ano múltiplo de 4 em [A,2012). Devemos subtrair um dia por ano múltiplo de 100 e somar um dia por ano múltiplo de 400. Como eles estão a esquerda da origem 1/1/2012 eles são contados com sinais invertidos. Depois temos que percorrer β dias até chegar a data d do ano A. Assim

$$d = \beta - 365.(2012 - A) - M_4 + M_{100} - M_{400}$$

Passando para $\mathbb{Z}_7$ (365 = 1)

$$d = \beta + (A - 2012) - M_4 + M_{100} - M_{400} = \beta + (A - 2001) + 3 - M_4 + M_{100} - M_{400}$$

Primeiro vamos avaliar $\beta + (A - 2001) + 3 - M_4$.

Proposição 5.1. $M_4 = \left\lfloor \dfrac{2012 - A}{4} \right\rfloor$

Demonstração.

Seja $a_n = 2012 - 4n, M_4 = n$. Temos que $A + k = a_n$, para algum $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, ou seja, $A + k = 2012 - 4n$. Assim $2012 - A = 4n + k$, pelas condições de k,

$$n = \left\lfloor \frac{2012 - A}{4} \right\rfloor = M_4$$

Proposição 5.2. $\left\lfloor \dfrac{2012 - A}{4} \right\rfloor$ = - $\left\lfloor \dfrac{A - 2001}{4} \right\rfloor$ + 2.

Demonstração.

$2012 - A = 2001 - A + 11 = 2001 - A + 2.4 + 3.$

Se $2001 - A = 4q + r, r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $q = \left\lfloor \dfrac{2001 - A}{4} \right\rfloor$, então

$2012 - A = 4q + r + 2.4 + 3 = 4(q + 2) + +r + 3$ assim

$\lfloor 2012 - A \rfloor = q + 2$, se $r = 0 \Leftrightarrow A \equiv 1(mod4)$

$\lfloor 2012 - A \rfloor = q + 3$, se $r \neq 0 \Leftrightarrow$ A não é congruente a $1mod4$

$\left\lfloor \frac{2001 - A}{4} \right\rfloor$ = - $\left\lfloor \frac{A - 2001}{4} \right\rfloor \Leftrightarrow A \equiv 1mod4$

$\left\lfloor \frac{2001 - A}{4} \right\rfloor$ = - $\left\lfloor \frac{A - 2001}{4} \right\rfloor - 1 \Leftrightarrow A$ não congruente a $1mod4$,

então em todas as situações

$\left\lfloor \frac{2012 - A}{4} \right\rfloor$ = - $\left\lfloor \frac{A - 2001}{4} \right\rfloor$ +2

Proposição 5.3. $\beta + (A - 2001) + 3 - M_4$ = $\beta + (A - 2001) + \left\lfloor \frac{A - 2001}{4} \right\rfloor + 1.$

Demonstração.

Segue direto das proposições anteriores.

Cálculo dos múltiplos de 100 e dos múltiplos de 400 no intervalo [A, 2012]

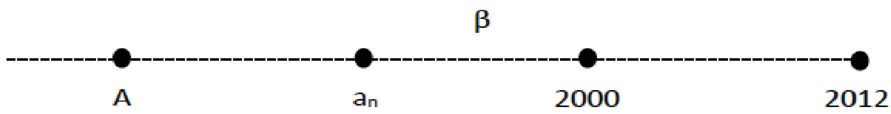

Figura 5.2: Múltiplos de 100 e 400 no intervalo [A, 2012].

Observe que a quantidade dos múltiplos de 100 (ou de 400) em $[A, 2012]$ é a mesma quantidade em [A,2000] igual a $n = M_{100}$, relativo a sequência

$a_n = 2000 - 100(n - 1)$ ou $a_n = 2000 - 400.(n - 1)$.

Proposição 5.4. *A quantidade de múltiplos de 100 em* $[A, 2000]$ *é* $n = \left\lfloor \frac{2000 - A}{100} \right\rfloor + 1.$

Demonstração.

Para algum $k \in \{0, 1, 2, ..., 99\}$, $A + k = a_n$, então

$A + k = 2000 - 100.(n - 1)2000 - A = k + 100.(n - 1)$

$\frac{200 - A}{100}$ = n - 1 + $\frac{k}{100}$, como $0 \leq \frac{k}{100} \leq 1$ segue que

$\left\lfloor \frac{2000 - A}{100} \right\rfloor = n - 1$ ou seja M_{100} = $\left\lfloor \frac{2000 - A}{100} \right\rfloor + 1.$

Proposição 5.5. *A quantidade de múltiplos de 400 em [A,2000] é n* = $\left\lfloor \frac{2000 - A}{400} \right\rfloor + 1.$

Demonstração.

Análoga a anterior

Corolário 5.1. M_{100} - M_{400} = $\left\lfloor \dfrac{2000 - A}{100} \right\rfloor$ - $\left\lfloor \dfrac{2000 - A}{400} \right\rfloor$.

Proposição 5.6. $M_{100} - M_{400} = - \left\lfloor \dfrac{A - 2001}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{A - 2001}{400} \right\rfloor$.

Demonstração.

$2000 - A = 2001 - A - 1$, fazendo $2001 - A = 100q + r$ com $r \in \{0, 1, 2, ..., 99\}$ teremos

$2000 - A = 100q + r - 1 = 100(q - 1) + r + 99$

Se r = 0, $\left\lfloor \dfrac{2000 - A}{100} \right\rfloor = q - 1$, caso contrário $\left\lfloor \dfrac{2000 - A}{100} \right\rfloor = q$.

Agora $r = 0 \Leftrightarrow \left\lfloor \dfrac{2001 - A}{100} \right\rfloor$ = - $\left\lfloor \dfrac{A - 2001}{100} \right\rfloor$, pois $\dfrac{A - 2001}{100}$ é inteiro.

Caso contrário $\left\lfloor \dfrac{2001 - A}{100} \right\rfloor$ = - $\left\lfloor \dfrac{A - 2001}{100} \right\rfloor - 1$;

Nos dois casos $\left\lfloor \dfrac{2000 - A}{100} \right\rfloor$ = - $\left\lfloor \dfrac{A - 2001}{100} \right\rfloor$ - 1. De maneira análoga $\left\lfloor \dfrac{2000 - A}{400} \right\rfloor$ = - $\left\lfloor \dfrac{A - 2001}{400} \right\rfloor$ - 1, assim

$$M_{100} - M_{400} = \left\lfloor \frac{2000 - A}{100} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{2000 - A}{400} \right\rfloor - 1 = - \left\lfloor \frac{A - 2001}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A - 2001}{400} \right\rfloor$$

Proposição 5.7. *Se* $1600 \leq A \leq 2012$ *a data módulo 7 é*

$$(A - 2001) + \left\lfloor \frac{A - 2001}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A - 2001}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A - 2001}{400} \right\rfloor + \beta + 1 =$$
$$A + \left\lfloor \frac{A - 1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A - 1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A - 1}{400} \right\rfloor + \beta$$

Demonstração. Consequências das proposições anteriores

Cálculo para datas posteriores a 2012

Proposição 5.8. *O número de múltiplos de 4* $[M_4]$ *maiores ou iguais a 2012 e menores do que A é dado por*

$$M_4 = \left\lfloor \frac{A - 2012}{4} \right\rfloor \text{ se A é múltiplo de 4, e}$$

$$M_4 = \left\lfloor \frac{A - 2012}{4} \right\rfloor + 1 \text{ caso contrário}$$

Demonstração.

$a_n = 2012 + 4.(n-1)$, *n* é M_4.

Se $A = 4k$, então $A = a_n + 4 = 2012 + 4.(n-1) + 4 = 2012 + 4n$ assim $\left\lfloor \frac{A-2012}{4} \right\rfloor = n = M_4$

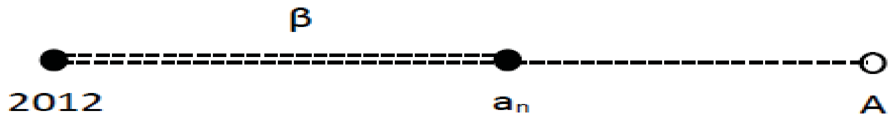

Figura 5.3: Múltiplos de 4 maiores ou igual a 2012 e menores que A.

Se A não é múltiplo de 4, então $A - k$ é múltiplo de 4 para algum $k = 1, 2$ ou 3, ou seja, $A - k = a_n = 2012 + 4.(n-1)$

Se $A - 2012 = 4q + r$, $1 \leq r \leq 3$, então teremos $4q - 4.(n-1) = k - r$, ou seja, $q - n + 1 = \frac{k-r}{4}$. Pelas condições de *r* e *k* a única maneira do lado direito da igualdade ser um número inteiro é $\frac{k-r}{4} = 0$ e, portanto, $n = q + 1$ ou M_4 = $\left\lfloor \frac{A-2012}{4} \right\rfloor + 1$

Proposição 5.9. $M_4 = \left\lfloor \frac{A-2001}{4} \right\rfloor - 2$.

Demonstração.

$A - 2012 = A - 2001 - 11$, considerando

$$A - 2001 = 4q + r, 0 \leq r \leq 3A - 2012 = 4q + r - 2.4 - 3 = 4.(q-2) + (r-3)$$

Observe que $r = 3$ se e somente se A é múltiplo de 4 nesse caso

$$\left\lfloor \frac{A-2012}{4} \right\rfloor = q - 2 = \left\lfloor \frac{A-2001}{4} \right\rfloor - 2 = M_4$$

Se $r < 3$, podemos escrever

$$A - 2012 = 4.(q-2) - 4 + 4 + r - 3 = 4.(q-3) + r + 1$$

Fazendo o agrupamento e dividindo por 4, temos

$$\frac{A-2012}{4} = q - 3 + \frac{r+1}{4},$$

como $0 \leq \dfrac{r+1}{4} < 1$, logo $\left\lfloor \dfrac{A-2012}{4} \right\rfloor = q-3$. Pela proposição anterior

$$M_4 = q - 3 + 1 = q - 2$$

Proposição 5.10. $(A-2012) + M_4 + \beta = (A-2001) + \left\lfloor \dfrac{A-2001}{4} \right\rfloor + \beta + 1$ *em* Z_7.

Demonstração.

Fazendo as operações em Z_7 teremos

$(A-2012) + M_4 + \beta = (A-2001) - 11 + \left\lfloor \dfrac{A-2001}{4} \right\rfloor - 2 + \beta$

$(A-2012) + M_4 + \beta = (A-2001) + 3 + \left\lfloor \dfrac{A-2001}{4} \right\rfloor - 2 + \beta$

$(A-2012) + M_4 + \beta = (A-2001) + \left\lfloor \dfrac{A-2001}{4} \right\rfloor + 1 + \beta$

Vamos determinar os múltiplos de 100 maiores que 2012 e menores que A. Observe que essa quantidade é a mesma dos múltiplos de 100 maiores ou iguais 2001e menores do que A.

Proposição 5.11. *Os múltiplos de 100 maiores ou iguais a 2001 e menores do que A é*

$$M_{100} = \left\lfloor \frac{A-2001}{100} \right\rfloor$$

Demonstração.

Figura 5.4: Múltiplos de 100 maiores que 2012 e menores que A.

$a_n = 2100 + 100.(n-1)$ n é a quantidade desejada.

Se A está na sequência $A = a_n + 100 = 2100 + 100n$, então $A - 2001 = 99 + 100n$. Dividindo por 100, temos $\dfrac{A-2001}{100} = n + \dfrac{99}{100}$, portanto $n = \left\lfloor \dfrac{A-2001}{100} \right\rfloor$.

Se A não é múltiplo de 100, então para algum $k \in \{1, 2, ..., 99\}$, $A - k$ está na sequência e se $A - 2001 = 100q + r$, $1 \leq r \leq 99$ teremos $A - k = 2100 + 100.(n-1)$

$A - 2001 = 100q + r = k + 99 + 100.(n-1) = k - 1 + 100n$, ou seja $q - n = \dfrac{k-(1+r)}{100}$ pelas condições de k e r o lado direito da igualdade é inteiro somente se for igual a zero. desse modo

$$M_{100} = n = q = \left\lfloor \frac{A-2001}{100} \right\rfloor$$

Proposição 5.12. *Os múltiplos de 400 maiores ou iguais a 2001 e menores do que A é*

$$M_{400} = \left\lfloor \frac{A-2001}{400} \right\rfloor$$

Demonstração. Semelhante a demonstração da proposição anterior

Proposição 5.13. *Se* $A > 2012$ *a data módulo 7 é*

$$(A-2001) + \left\lfloor \frac{A-2001}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-2001}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-2001}{400} \right\rfloor + \beta + 1 =$$
$$A + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor + \beta$$

Demonstração. Consequências das proposições anteriores

Teorema 5.1. *Para todo* $A \geq 1600$*, a data módulo 7 é*

$$(A-2001) + \left\lfloor \frac{A-2001}{4} \right\rfloor + \beta + 1 - \left\lfloor \frac{A-2001}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-2001}{400} \right\rfloor =$$
$$A + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor + \beta$$

Demonstração.
Consequência das proposições.

CÁLCULO DE β E FÓRMULA FECHADA

Agora vamos mostrar a fórmula fechada desenvolvida em nosso trabalho

$$A + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor + d + 30.(m-1) + p(m) + h(m).bi(A)$$

Em seguida vamos explicar o que significa cada parte da fórmula a seguir:

$A + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor$ representa a quantidade de dia decorridos no período do ano de nascimento ate o início do ano vigente em congruência modulo 7, o d representa quantidade de dias passados deste o início do mês do nascimento até o dia do nascimento, a parte $30.(m-1)$ foi pensado como se todos os meses do ano fossem de 30 dias, porém sabemos que isso não é real, portanto foi criado o polinômio $p(m)$ para corrigir excesso ou a falta de dias, tendo em vista que há meses de 28 e 31 dias.No início de janeiro temos 30.(m-1), como m= 1, temos então $p(1) = 0$,para m= 2, temos que passou-se 30 dias, porem sabemos que os mês de janeiro é de 31 dias, logo sobrou um dia além do previsto tendo em vista que pensamos em meses de 30 dias, portanto $p(2) = 1$, para m = 3, temos que o mês de janeiro é de 31 dias e mês de fevereiro é de 28, somando os dias do dois meses temos 59 dias, porém deveríamos ter o total de 60 dias,temos então a falta de um dia, logo $p(3) = -1$,a partir daqui para frente somamos 1 se o mês for de 31 dias é matemos o mesmo valor se o mês for de 30 dias, ou seja, $p(4) = 0$; $p(5) = 0$; $p(6) = 1$; $p(7) = 1$; $p(8) = 2$; $p(9) = 3$; $p(10) = 3$; $p(11) = 4$; $p(12) = 4$. Vamos representar os pontos do polinômio em uma tabela e em seguida vamos aplicar a interpolação de Lagrange

m	p(m)
1	0
2	1
3	-1
4	0
5	0
6	1
7	1
8	2
9	3
10	3
11	4
12	4

$$p(m) = \frac{89}{9979200}m^{11} - \frac{197}{302400}m^{10} + \frac{7619}{362880}m^{9} - \frac{3961}{10080}m^{8} + \frac{102151}{21600}m^{7} - \frac{551161}{14400}m^{6} +$$

$$+\frac{76767407}{362880}m^{5} - \frac{3000629}{3780}m^{4} + \frac{892222217}{453600}m^{3} - \frac{19117439}{6300}m^{2} + \frac{1279931}{495}m - 902$$

Observe que o polinômio p(m) foi feito considerando que um ano tinha 365 dias e que o mês de fevereiro tinha 28 dias, já o polinômio h(m) foi criado para sanar o caso do ano se bissexto, ou seja, o ano ter 366 dias, porém que nasce em janeiro e fevereiro mesmo que o ano seja bissexto não precisamos acrescentar nenhum dia a mais, ja quem nasce a partir de março até dezembro se o ano for bissexto é necessário acrescentar-mos um dia a mais no total de dias já passados do ano, portanto temos que $h(1) = 0$; $h(2) = 0$; $h(3) = 1$; $h(4) = 1$; $h(5) = 1$; $h(6) = 1$; $h(7) = 1$; $h(8)$; $h(9) = 1$; $h(10) = 1$; $h(11) = 1$ e $h(12) = 1$.Vamos representar os pontos do polinômio em uma tabela e em seguida vamos aplicar a interpolação de Lagrange

m	h(m)
1	0
2	0
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1

$$h(m) = -\frac{1}{3991680}m^{11} + \frac{23}{1209600}m^{10} - \frac{31}{48384}m^{9} + \frac{509}{40320}m^{8} - \frac{2437}{15120}m^{7} + \frac{8931}{6400}m^{6} +$$

$$-\frac{6041213}{725760}m^{5} + \frac{2056679}{60480}m^{4} - \frac{1863607}{20160}m^{3} + \frac{659761}{4200}m^{2} - \frac{225723}{1540}m + 55$$

Vamos falar agora da função $bi(A)$ que foi criada com o objetivo de valer 1 nos anos bissextos e 0 nos anos não bissextos. Queremos em primeiro lugar uma função que vale 1 nos múltiplos de n e 0 nos não múltiplos $(I_{(1,n)})$.

A demonstração das proposições a seguir é uma consequência imediata da proposição 3.3.

Proposição 5.14. *Seja* $n \geq 1$ *então a função*

$$I_{(1,n)}(a) = 1 + \left\lfloor \frac{-a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$$

vale 1 *nos múltiplos de* n *e* 0 *caso contrário.*

Proposição 5.15. *Seja* $n \geq 1$ *então a função*

$$I_{(0,n)}(a) = -\left\lfloor \frac{-a}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$$

vale 0 *se* a *é múltiplo de* n *e* 1 *caso contrário.*

Observe que a função $I_{0,100} + I_{1,400}$ vale 0 nos múltiplos de 100 que não são múltiplos de 400 e, vale 1 nos múltiplos de 400 e vale 1 nos múltiplos de 4 que não são múltiplos de cem.

Desta forma chegamos na função bi(a) cujo o objetivo é valer 1 nos anos bissextos e 0 nos não bissextos.

$$bi(a) = I_{1,4}(a).(I_{0,100}(a) + I_{1,400}(a))$$

$$bi(a) = \left(1 + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-A}{4} \right\rfloor\right) \cdot \left(- \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{-A}{100} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-A}{400} \right\rfloor\right)$$

Vamos mostrar agora novas funções para substituir o $p(m)$ e $h(m)$ bem mais simples que os polinômios de Lagrange, tendo em vista que o mesmos satisfazem a tabela que usamos para determinar o polinômio de Lagrange.

Vamos iniciar falando primeiro do $h(m)$, uma função útil para substituir $h(m)$ é função $w(m)$ que valha 0 em $(-\infty, 0)$ e 1 em $[0, +\infty)$. Neste caso a função $w(m - a)$ vale 0 em $(-\infty, 0)$ e 1 em $[0, +\infty)$.

A primeira ideia foi a função $arctan(m)$, pois é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, depois normalizar multiplicando por $\frac{2}{\pi}$ a imagem passa a ser $(-1, 1)$ e depois somar 1 a imagem passa ser $(0, 2)$ então a função w(m) = $\left\lfloor 1 + \frac{2arctan(m)}{\pi} \right\rfloor$ satisfaz o que queremos. Depois verificamos também que a função $w(m) = \left\lfloor 1 + \frac{(m-3)}{1 + |m-3|} \right\rfloor$ também satisfaz o que queremos de acordo com a tabela de $h(m)$.

Vamos agora buscar um polinômio que possa substituir $p(m)$ e que seja mais simples que o mesmos. Através da tabela de $p(m)$ podemos construir o gráfico da função, composta por segmentos de retas.

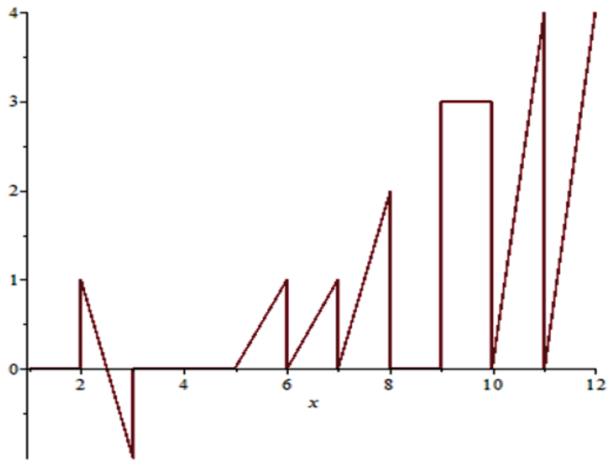

Figura 5.5: Gráfico com segmentos de reta.

A ideia é encontrar uma reta próximo aos pontos da tabela de $p(m)$. Se incluirmos os pontos $(1, 0)$ e $(2, 1)$ teremos poucas chances, pois eles causam discrepâncias. Então vamos deixa-los de lado e pensarmos nos demais pontos.

Vamos pensar em uma reta em que a função parte inteira satisfaça o nossos objetivos.Vamos exigir que a reta passe pelo ponto $(9, 3)$ intermediário,talvez outro servisse.Então

$$y(m) = 3 + a \times (m - 9)$$

Vamos inserir que $y(6) = 1 + t$, com $0 < t < 1$, para que $\lfloor y(6) \rfloor = 1$. Desta forma teremos

$$1 + t = 3 - 3 \times a$$
$$a = \frac{2 - t}{3}$$

Substituindo a valor de em $y(m)$ teremos

$$y(m) = \frac{(2 - t) \times m - 9 \times (1 - t)}{3} = \frac{(9 - m) \times t + (2 \times m - 9)}{3}$$

Vamos impor as condições da tabela sobre a reta $y(m)$

$-1 \leq y(3) < 0 \Longrightarrow -1 \leq \dfrac{6 \times t - 3}{3} < 0 \Longrightarrow 0 \leq t < \dfrac{1}{2}$

$0 \leq y(4) < 1 \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{5 \times t - 1}{3} < 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{5} \leq t < \dfrac{1}{4}$

$0 \leq y(5) < 1 \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{4 \times t + 1}{3} < 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{4} \leq t < \dfrac{1}{2}$

$1 \leq y(6) < 2 \Longrightarrow 1 \leq \dfrac{3 \times t + 3}{3} < 2 \Longrightarrow 0 \leq t < 1$

$1 \leq y(7) < 2 \Longrightarrow 1 \leq \dfrac{2 \times t + 5}{3} < 2 \Longrightarrow -1 \leq t < \dfrac{1}{2}$

$2 \leq y(8) < 3 \Longrightarrow 2 \leq \dfrac{t + 7}{3} < 3 \Longrightarrow -1 \leq t < 2$

$y(9) = 3$

$3 \leq y(10) < 4 \Longrightarrow 1 \leq \dfrac{-t + 11}{3} < 2 \Longrightarrow -1 < t \leq 2$

$4 \leq y(11) < 5 \Longrightarrow 4 \leq \dfrac{-2t + 13}{3} < 5 \Longrightarrow -1 < t \leq \dfrac{1}{2}$

$4 \leq y(12) < 5 \Longrightarrow 4 \leq \dfrac{-3t + 15}{3} < 5 \Longrightarrow 0 < t \leq 1$

Fazendo as intersecções dos t, teremos $\dfrac{1}{5} \leq t < \dfrac{1}{2}$

Tomando $t = \dfrac{1}{5}$ obteremos a seguinte função $y(m) = \dfrac{3 \times (m - 4)}{5}$.

Observe que não incluímos $y(1)$ e $y(2)$, portanto precisamos de um função que vala 0 para $y(1)$ e 1 para $y(2)$ e nos demais pontos vale 0,a função é a seguinte $\left\lfloor \dfrac{1}{1+(m-2)^2} \right\rfloor$

De posse de tudo isso agora podemos montar um função para substituir a função $p(m)$, a função será a seguinte:

$$v(m) = \left\lfloor \frac{1}{1+(m-2)^2} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{(m-3)}{1+|m-3|} \right\rfloor . \left\lfloor \frac{3.(m-4)}{5} \right\rfloor$$

Agora sim vamos escrever a fórmula desenvolvida em nosso trabalho com os novos polinômios encontrados

$$A + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor + d + 30.(m-1) + \left\lfloor \frac{1}{1+(m-2)^2} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{(m-3)}{1+|m-3|} \right\rfloor . \left\lfloor \frac{3.(m-4)}{5} \right\rfloor +$$

$$+ \left\lfloor 1 + \frac{(m-3)}{1+|m-3|} \right\rfloor . \left(\left(1 + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-A}{4} \right\rfloor \right) . \left(- \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{-A}{100} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-A}{400} \right\rfloor \right) \right)$$

ou

$$dias(d,m,A) = A + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor + d + 30.(m-1) + \left\lfloor \frac{1}{1+(m-2)^2} \right\rfloor +$$

$$+ \left\lfloor 1 + \frac{(m-3)}{1+|m-3|} \right\rfloor . \left\lfloor \frac{3.(m-4)}{5} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{(m-3)}{1+|m-3|} \right\rfloor .bi(A)$$

Podemos reescrever a fórmula acima baseado na seguinte proposição

Proposição 5.16. *Se A é inteiro então*

$$\left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor - bi(A)$$

Demonstração. É consequência da proposição 3.5 deixo a demonstração como desafio ao leitor.

Podemos escrever então

$$dias(d,m,A) = A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor - bi(A) + d + 30.(m-1) + \left\lfloor \frac{1}{1+(m-2)^2} \right\rfloor +$$

$$+ \left\lfloor 1 + \frac{(m-3)}{1+|m-3|} \right\rfloor . \left\lfloor \frac{3.(m-4)}{5} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{(m-3)}{1+|m-3|} \right\rfloor .bi(A)$$

Se quisermos saber o dia da semana basta fazermos

$$dsem(d, m, A) = dias(d, m, A) - 7. \left\lfloor \frac{dias(d, m, A)}{7} \right\rfloor$$

Capítulo 6

EXEMPLOS E COMPARAÇÃO ENTRE AS FÓRMULAS

6.1 Exemplos

EXEMPLO 1: Que dia da semana será dia 25 de dezembro de 2024?

Solução:

2024 é bissexto. Então vamos aplicar a fórmula de zeller para saber que dia cairá o natal do ano de 2024.

$$s(d,m,A) = d + 1 + \left\lfloor \frac{13.m-1}{5} \right\rfloor + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \, mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 25 + 1 + \left\lfloor \frac{13.10-1}{5} \right\rfloor + 2024 + \left\lfloor \frac{2024}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{400} \right\rfloor \, mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 26 + +25 + 2024 + 506 - 20 + 5 \, mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 2566 \, mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 4 \, mod\, 7$$

.

Logo o Natal do ano 2024 cairá numa quarta-feira.

Vamos mostrar agora usando a fórmula desenvolvida em nosso trabalho.

$$A + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor + d + 30.(m-1) + p(m) + h(m).bi(A)$$

$$2024 + \left\lfloor \frac{2024-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024-1}{400} \right\rfloor + 25 + 30.(12-1) + p(12) + h(12).bi(2024)$$

$$2024 + 505 - 20 + 5 + 25 + 330 + 4 + 1.1$$

$$2024 + 505 - 20 + 5 + 25 + 330 + 4 + 1$$

$$2874\, mod\, 7$$

Como 2874 em congruência módulo 7 deixa resto 4, pela fórmula desenvolvida em nosso trabalho, também constatamos que o Natal de 2024 cairá numa quarta-feira.

Exemplo 2: Minha esposa Francicléia nasceu do dia 17 de fevereiro 1984, vamos então verificar em qual dia da semana ela nasceu usando as duas fórmulas.

Solução:

Vamos agora usar a fórmula de Zeller.

$$s(d,m,A) = d + 1 + \left\lfloor \frac{13.m-1}{5} \right\rfloor + (A-1) + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor mod\, 7$$

$$s(d,m,A) = 17 + 1 + \left\lfloor \frac{13.12-1}{5} \right\rfloor + (1984-1) + \left\lfloor \frac{1984-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1984-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1984-1}{400} \right\rfloor mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 18 + +31 + 1983 + 495 - 19 + 4\, mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 6\, mod\, 7$$

.

Logo ela nasceu na sexta - feira.

Vamos mostrar agora usando a fórmula desenvolvida em nosso trabalho.

$$A + \left\lfloor \frac{A-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A-1}{400} \right\rfloor + d + 30.(m-1) + p(m) + h(m).bi(A)$$

$$1984 + \left\lfloor \frac{1984-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1984-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1984-1}{400} \right\rfloor + 17 + 1 + 0.1$$

$$1984 + 495 - 19 + 4 + 17 + 30 + 1 + 0$$

$$2512\, mod\, 7$$

Como 2512 em congruência modulo 7 deixa resto 6, logo ela nasceu na sexta - feira.

EXEMPLO 3: Que dia da semana nasceu o famoso matemático Johann Carl Friedrich Gauss, sendo que o seu nascimento foi no dia 30 de abril 1777

Solução:

$$s(d,m,A) = d + 1 + \left\lfloor \frac{13.m-1}{5} \right\rfloor + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 30 + 1 + \left\lfloor \frac{13.2-1}{5} \right\rfloor + 1777 + \left\lfloor \frac{1777}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1777}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1777}{400} \right\rfloor mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 31 + +5 + 1777 + 444 - 17 + 4\, mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 2244\, mod\, 7$$

.

$$s(d,m,A) = 4\, mod\, 7$$

. Vamos mostrar agora usando a fórmula desenvolvida em nosso trabalho

$$1777 + \left\lfloor \frac{1777-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1777-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1777-1}{400} \right\rfloor + 30 + 30.(4-1) + p(4) + h(4).bi(1777)$$

.
$$1777 + 444 - 17 + 4 + 30 + 90 + 0 + 0$$

.
$$2328 \, mod \, 7$$

Logo 2328 em congruência modulo 7 deixa resto 4, logo Gaus nasceu numa quarta-feira

EXEMPLO 4: Neste exemplo vamos descobrir que dia da semana caíra o aniversário do professor Alfredo Wagner idealizador desse trabalho no ano de 2021, sendo que o mesmo nasceu no dia 14 de setembro.

Solução:

$$s(d,m,A) = d + 1 + \left\lfloor \frac{13.m-1}{5} \right\rfloor + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \, mod \, 7$$

.
$$s(d,m,A) = 14 + 1 + \left\lfloor \frac{13.7-1}{5} \right\rfloor + 2021 + \left\lfloor \frac{2021}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2021}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{400} \right\rfloor \, mod \, 7$$

.
$$s(d,m,A) = 15 + +18 + 2021 + 505 - 20 + 5 \, mod \, 7$$

.
$$s(d,m,A) = 2544 \, mod \, 7$$

.
$$s(d,m,A) = 3 \, mod \, 7$$

. Como 2768 em congruência modulo 7 deixa resto 3, ele vai fazer aniversário em uma terça-feira.

Vamos mostrar agora usando a fórmula desenvolvida em nosso trabalho

$$2021 + \left\lfloor \frac{2021-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2021-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021-1}{400} \right\rfloor + 14 + 30.(9-1) + p(9) + h(9).bi(2021)$$

.
$$2021 + 505 - 20 + 5 + 14 + 240 + 3 + 0$$

.
$$2768 \, mod \, 7$$

. Que também deixa resto 3 na divisão por 7.

6.2 Comparação entre as fórmulas

- A fórmular de Zeller tem o inconveniente de que os meses não são colocados na forma que estamos acostumados, por exemplo janeiro temos que fazer m = 11 e março m = 1.

- Se quisermos determinar uma data em que o mês seja janeiro ou fevereiro temos que substituir o A por A-1.De modo que a fórmula é definida em duas etapas.
- Na fórmula apresentada pelo trabalho não temos o inconveniente acima.
- A fórmula apresentada no trabalho pode ser colocada diretamente em qualquer programa de computação matemática que calcule a parte inteira de um número real e efetue as quatro operações elementares.

Considerações Finais

Neste trabalho procuramos fazer uma abordagem simples de alguns teoremas clássicos da Aritmética e torná-los mais conhecidos, pois embora tenham um grande papel na resolução de muitos problemas, estão de certa forma esquecidos no ensino básico.

Vimos ao longo dos capítulos, que muitos desses teoremas clássicos são construídos por meio de teoremas, proposições bastante conhecidas e ensinadas nos diversos níveis de ensino, podendo, portanto, serem abordados, pois não necessitariam de assuntos que não fossem ministrados no ensino básico. No capítulo 6, fizemos uma comparação entre a fórmula de Zele e a fórmula desenvolvida nesse trabalho, fórmula estas que podem ser usada facilmente pelos alunos do ensino básico.

Acreditamos que a realização desse trabalho, com enfoque no uso do calendário e a exploração dos teoremas clássicos de Aritmética, pode servir para a melhoria do ensino aprendizagem de Aritmética e possivelmente servir de elemento motivador para alunos e professores que busquem aprimorar seus conhecimentos em Aritmética modular.

Referências Bibliográficas

[1] Edgard de Alencar Filho. *Teoria elementar dos números*. Nobel, 1981.

[2] José Plínio de Oliveira Santos. *Introdução à teoria dos números*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

[3] Ilydio Pereira de Sá. Aritmética modular e algumas de suas aplicações. 2010.

[4] Abramo Hefez. *Elementos de aritmética*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[5] Abramo HEFEZ. *Elementos de Aritmética,2ª edição*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[6] Abramo HEFEZ. Iniciação à aritmética. *Disponível em <http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf>,Acessado em 17/08/2017*, 2017.

[7] M Marques. Origem e evolução do nosso calendário. *Disponível em <http://www.mat.uc.pt/ helios/Mestre/H01orige.htm>,Acessado em 17/08/2017*, 2017.