Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Frações Contínuas - Uma Forma de Representar e de Aproximar os Números Irracionais

Raimundo Silva Nascimento

Teresina - 2013

Raimundo Silva Nascimento

Dissertação de Mestrado:

Frações Contínuas - Uma Forma de Representar e de Aproximar os Números Irracionais

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr.Paulo Alexandre Araújo Sousa
Co-Orientador:
Prof. Dr.Jefferson Cruz dos Santos Leite

Teresina - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

N244f Nascimento, Raimundo Silva.

Frações Contínuas - Uma Forma de Representar e de Aproximar os Números Irracionais/ Raimundo Silva Nascimento. - 2013

41 f.

Dissertação(mestrado) - Universidade Federal do Piauí,Centro de Ciência da Natureza, 2013.

"Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa".

"Co-Orientador: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite".

1. Álgebra. 2. Matemática Básica. 3. Conjuntos Numéricos. 4. Números Irracionais. I. Título.

CDD 512

Dedicatória.

À minha grande família formada a partir dos meus brilhantes: Jullyana, Ingrid, Isabelli e Ianne.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado sabedoria e paciência para persistir,

A todos os professores do PROFMAT-UFPI e em especial aos meus orientadores da dissertação Professores Doutores Paulo Alexandre e Jefferson Leite pelo apoio pedagógico e receptividade,

À minha turma de PROFMATIANOS-UFPI/11 pela disponibilidade e atenção,

Aos meus amigos Professores Mestres Edivan Luz e Paulo Airton pelo companheirismo e paciência,

Ao grande Professor e amigo Doutor Afonso Norberto pelas sugestões, apoio e estímulo.

"Se experimentar prazer com a Matemática, não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma grande probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: uma ocupação favorita, uma ferramenta profissional, a própria profissão, ou uma grande ambição".

George Pólya.

Resumo

Neste trabalho, fizemos um estudo sobre a teoria das frações contínuas, demonstrando algumas de suas propriedades e relatando também um pouco da sua história. Além disso, apresentamos *Frações Contínuas* como uma boa "ferramenta" para os professores do ensino básico justificar de forma mais convicente a formação dos números reais.

Um assunto presente em diversas áreas da Matemática, as frações contínuas são muito utilizadas porque fornecem as melhores aproximações racionais para números irracionais.

O que hoje conhecemos, foi estudado por grandes matemáticos durante séculos.

Palavras-chave: Conjuntos Numéricos; Números Reais; Números Racionais; Números Irracionais e Frações Contínuas.

Abstract

In this work we have studied the theory of continued fractions, showing some of its properties and also reporting some of its history. Furthermore, we present Continuous Fractions as a good "tool" for elementary school teachers justify the formation of real numbers more convincingly.

A matter in several areas of mathematics, the continued fractions are widely used because they provide the best rational approximations to irrational numbers.

What we know today, was studied by great mathematicians for centuries.

Keywords: Numerical Sets, Real Numbers, Rational Numbers, Irrational Numbers and Continued Fractions.

Sumário

Introdução

Com relação à introdução de temas mais atuais no ensino da Matemática, faço referência a atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008). Este documento apresenta uma lista de conteúdos para a Matemática do ciclo básico sem alterações apreciáveis em relação ao que se veicula nos diversos sistemas de ensino existentes atualmente, levando-se em consideração o princípio de que os conteúdos são meios para o desenvolvimento das competências pessoais.

A questão da atualização dos temas matemáticos do currículo é valorizada por muitos autores e é inclusive discutida no SEMA/FEUSP(Seminário de Ensino de Matemática). De modo geral, são apontados a Programação Linear, o Cálculo Diferencial e Integral, os Fractais e as Frações Contínuas, dentre outros, como temas propícios para serem abordados no ciclo básico, numa abordagem adequada a este nível de ensino.

Apesar dos avanços das recentes propostas curriculares, alguns temas matemáticos, geralmente abordados no Ensino Superior, ainda se encontram distantes do cotidiano da sala de aula do ciclo básico. Assim, este texto propõe uma breve reflexão envolvendo aspectos curriculares epistemológicos e didáticos para a discussão da temática das Frações Contínuas no ciclo básico. A introdução de frações contínuas poderia ocorrer no 8º ano (antiga 7ª série) através da representação de um número racional qualquer em forma de fração contínua. O tratamento deste tema, não como componente curricular, mas através de situações de ensino permite a revalorização dos atuais temas do currículo, ligados a Teoria dos Números e realça as conexões internas e externas aos conhecimentos matemáticos.

Esta proposta de atualização de temas do currículo de matemática e a nova Proposta Curricular podem ser conciliadas, como por exemplo, acontece com inserção no ensino da Biologia e a nova revolução da genética, assunto complexo, mas que se mostrou passível de ser abordado e trazido para o cotidiano da sala de aula numa abordagem acessível a alunos do ensino básico. Também, o movimento para a renovação do Ensino de Física está discutindo a inserção de tópicos usualmente abordados somente no Ensino Superior, como alguns resultados da Física Moderna. Assim, há a necessidade da escola estar sempre alerta para mudanças de conteúdos e metodologias em face de novas realidades do mundo atual, propiciando condições para que os indivíduos se adaptem a estas mudanças e sejam cidadãos conscientes de seu papel na sociedade.

Este trabalho trata, basicamente, da apresentação da expansão dos números racionais e irracionais em frações contínuas. Esperando com isso, contribuir para que professores do ensino médio possam inserir o assunto aqui trabalhado no seu cronograma de ensino. O conhecimento das frações contínuas irá facilitar a apresentação do conjunto dos números Irracionais e a descrição dos números Reais.

Capítulo 1

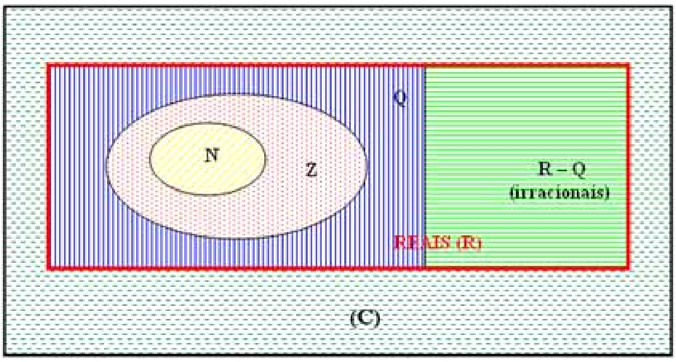
Noções Preliminares

Para se ter um bom entendimento de qualquer assunto na Matemática é necessário que se discorra sobre o seu contexto histórico, e em quais objetivos os primeiros estudiosos basearam as suas pesquisas, visando o fácil entendimento do assunto abordado. No caso das frações contínuas isto não se dá de forma diferente, a seguir falaremos sobre alguns importantes pesquisadores e casos em que as frações contínuas foram aplicadas.

Conforme Andrade e Bracciali (2005, p.4 a 7) a origem exata de quando o conceito de frações contínuas foi utilizado, não é fácil de ser datado, pois se encontram exemplos dessas frações por toda a Matemática desde anos remotos. Embora os gregos já conhecessem o algoritmo de Euclides (325 a.C.265 a.C., aproximadamente) para o cálculo do máximo divisor comum entre dois números inteiros (mdc), não há evidências de que eles o usavam para construir *frações contínuas*.

O matemático indiano *Aryabhata* (476 - 550) utilizou as frações contínuas para resolver equações diofantinas, mas não resolveu de uma forma geral, particularmente, usou frações contínuas somente em exemplos específicos. Em toda a escrita matemática, grega e árabe, podemos encontrar exemplos e vestígios de *frações contínuas*.

Os números que conhecemos podem ser divididos em grupos segundo características comuns entre eles, isto é, os números estão agrupados em conjuntos - **Os Conjuntos Numéricos**. Observe uma ilustração geométrica bastante frequente de apresentar esses conjuntos numéricos estudados no ciclo básico:



1.1 A Construção do Conjunto dos Números Naturais

No século XIX, uma definição do conjunto dos números naturais foi desenvolvida. Com esta definição, era mais conveniente incluir o zero (correspondente ao conjunto vazio) como um número natural. Esta convenção é seguida pelos teorizadores de conjuntos, logicistas e cientistas da computação. Outros matemáticos, principalmente os teorizadores dos números, comumente preferem seguir a tradição antiga e excluir o zero dos números naturais. Uma construção consistente do Conjunto dos Números Naturais foi desenvolvida no séc. XIX por Giuseppe Peano.

Essa construção, comumente chamada de Axiomas de Peano, é uma estrutura simples e elegante, servindo como um bom exemplo, de construção de Conjuntos Numéricos.

Sabemos que o homem criou, para responder às necessidades de efetuar contagem, o conjunto dos Números Naturais e estabeleceu formas de representar e de operar com eles, e um processo de se contar uns poucos elementos evoluiu para a contagem de centenas, milhares, milhões. Pouco a pouco, fomos desenvolvendo procedimentos e instrumentos de contagem, até chegarmos ao conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Observe que a maneira de escrever fornece uma ideia de como podemos construir. Os três pontos que indicam as reticências (...) significam "e assim por diante", mostram que partindo do número 1 e tomando o seu sucessor, $2 = 1 + 1$; depois o sucessor de 2, $3 = 2 + 1$; o sucessor de 3, $4 = 3 + 1$; e continuando este processo, teremos construído todos os números naturais.

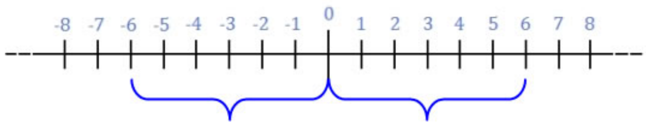
Desta forma podemos construir os números naturais a partir do 0 (zero), de uma unidade e da operação de tomar o sucessor. Como o processo de o sucessor pode ser continuado indefinidamente, existem infinitos números naturais. Vale também:

1. Todo número natural tem um único sucessor;
2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3. Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
4. Seja A um subconjunto dos números naturais tal que $1 \in A$. Se A contém o sucessor de todos os seus elementos, então $A = \mathbb{N}$.

1.2 Os Números Inteiros e sua representação na reta

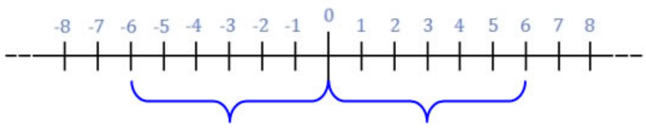
A partir dos números naturais podemos construir o conjunto dos Números Inteiros. Estes números surgiram historicamente a partir do estudo das raízes negativas de equações algébricas, para representar dívidas e determinados fenômenos da natureza, como por exemplo, temperaturas abaixo de zero, alturas abaixo de nível do mar, etc.

O conjunto dos Inteiros, representado por $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, é constituído pelos inteiros positivos (que coincide com os naturais), com o 0 (zero) e com os inteiros negativos. Os números negativos podem ser representados na reta, a partir da representação dos naturais da seguinte forma: a partir do zero, tomando uma unidade e marcando à esquerda temos o número –1, a partir do –1, tomando uma unidade à esquerda marcamos o número –2, e assim sucessivamente.



Geometricamente, para representar um número negativo $-n$, onde $n \in \mathbb{N}$, corresponde a escrever n, e tomar o ponto simétrico a n com relação à origem 0.

A partir do 6, representamos o ponto –6, como sendo aquele que é simétrico ao ponto com relação a origem. Assim o –6 é obtido tomando 6 unidades a esquerda do 0 (zero).



Observe que a distância entre os números 6 e –6 até a origem (zero) é correspondente a 6 unidades. A esse fato damos o nome de valor absoluto ou módulo do número. Por exemplo, o módulo dos números 6 e –6 são representados da seguinte forma:

$|6| = 6 \quad \text{e} \quad |-6| = 6.$

Considerando que a distância entre $0 \longleftrightarrow 6$ e $0 \longleftrightarrow -6$ são as mesmas e que o módulo de –6 é o mesmo que o de 6, dizemos que esses números são opostos ou simétricos.

1.3 Diferentes representações dos Números Racionais

Os números racionais têm merecido grande destaque pela comunidade científica. Muitas são as dificuldades apresentadas pelos alunos com relação a este tema. Quando se fala em números racionais se pensa com maior ênfase nas frações. Estas, sim são o maior destaque dado a este número, mais estes se constituem ainda pelos números decimais, notação científica, dízimas periódicas, potência de 10.

O ensino de Números Racionais que compreende desde a numeração decimal, as frações, as dízimas periódicas, as porcentagens, dentre outros, proporciona ao aluno melhor compreensão e atuação no mundo cotidiano.

Ao reconhecer e resolver problemas que envolvam números racionais, o aluno consegue consequentemente analisar situações que estão relacionadas no seu dia-a-dia, pois os mesmos se encontram em grande parte da nossa vida, seja ela escolar ou não. Podemos encontrar os Números Racionais em situações caseiras: receitas, uso de material de limpeza e higiene; em jornais e revistas com apresentação para análise de dados nas reportagens ou em gráficos e tabelas; em problemas escolares relacionados a vários outros conteúdos, dentre outras. Enfim, a utilização dos Números Racionais é muito vasta, entretanto, referimo-nos aqui a apenas alguns exemplos.

Um Número Racional se apresenta como fração, que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Podemos assim representar o Conjunto dos Números Racionais: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.

Esse número fracionário pode também ser representado como número decimal em que, ao dividirmos o numerador a pelo denominador b, obteremos um número com vírgula que exige um processo a ser realizado para se chegar a esse valor. Caso esse número decimal seja infinito e venham repetidos valores com uma sequência determinada, denominamos esse número decimal de dízima periódica, que por sua vez pode ser simples (quando é formada apenas pelo período após a vírgula) ou composta (se possui uma parte que não se repete entre a parte inteira e o período).

Podemos também encontrar a fração geratriz da dízima periódica, se ao invés de fração tivermos apenas a dízima periódica. Caso a divisão dessa fração formada por inteiros seja um número decimal infinito e não periódico, o chamaremos de número irracional (outro conjunto de números, que será analisado neste trabalho).

1.4 Número Irracional

Os primeiros indícios relacionados ao conceito de Número Irracional remontam ao conceito de incomensurabilidade. Dois segmentos são comensuráveis se existe uma unidade comum na qual podem ser medidos de forma exata. Por exemplo, um segmento de medida $\frac{1}{8}$ e outro de medida $\frac{1}{3}$ podem ser expressos por múltiplos inteiros de um segmento de medida $\frac{1}{24}$, ou seja, $\frac{1}{3} = 8 \times \frac{1}{24}$ e $\frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{24}$.

A primeira descoberta de um número irracional é geralmente atribuída a *Hipaso de Metaponto*, um seguidor de *Pitágoras*. Ele teria produzido uma demonstração (provavelmente geométrica) de que a raiz de 2 (ou talvez que o número de ouro) é irracional.

No entanto, *Pitágoras* considerava que a raiz de 2 "maculava "a perfeição dos números, e portanto não poderia existir. Mas ele não conseguiu refutar os argumentos de *Hipaso* com a lógica, e a lenda diz que *Pitágoras* condenou seu seguidor ao afogamento.

A partir daí os números irracionais entraram na obscuridade, e foi só com *Eudoxo de Cnido* que eles voltaram a ser estudados pelos gregos. O décimo livro da série **Os elementos de Euclides** é dedicado à classificação de números irracionais.

Foi só em 1872 que o matemático alemão *Dedekind*(de 1831 a 1916) fez entrar na **Aritmética**, em termos rigorosos, os Números Irracionais que a geometria sugerira havia mais de vinte séculos.

1.5 O modelo de número de Dedekind

O modelo geométrico permitiu ampliar o conceito de número, e criar um novo modelo, o conjunto $\mathbb{R}$. A identificação entre o eixo numérico e $\mathbb{R}$ foi e continua sendo importante, mas na Matemática atual o conjunto dos números reais é construído algebricamente, o que nos dá uma agilidade muito maior em sua manipulação.

A construção algébrica de $\mathbb{R}$ foi feita no Século XIX por vários matemáticos, dentre eles se destaca *Richard Dedekind*.

O principal instrumento teórico dessa proposta é o uso da Teoria dos Conjuntos. Dedekind, segundo ele mesmo relata, inspirou-se na Teoria das Proporções de Eudoxo: todo número real a é inteiramente determinado pelos números racionais que são menores do que a.

Usando a linguagem de conjuntos, ele definiu os chamados cortes, hoje conhecidos como cortes de Dedekind. Vamos explicar as ideias de Dedekind e estamos supondo que já está construído o conjunto $\mathbb{Q}$. Para tanto, apresentamos as definições a seguir.

Definição 1.1 Dado um subconjunto não vazio A de $\mathbb{Q}$, dizemos que A tem máximo se existir $m \in A$ tal que $a \leqslant m$ para todo $a \in A$. Dizemos que A tem mínimo se existir $m \in A$ tal que $m \leqslant a$ para todo $a \in A$.

Definição 1.2 Um corte é um subconjunto $L \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz às seguintes propriedades: (i) $L \neq \emptyset$ e $\mathbb{Q} - L \neq \emptyset$; (ii) se $r \in L$ e se s é um número racional tal que $s < r$ então $s \in L$; (iii) L não tem máximo em $\mathbb{Q}$.

Definição 1.3 O conjunto $\mathbb{R} = \{L \subset \mathbb{Q}/L$ é um corte $\}$ chama-se conjunto dos números reais. A primeira observação que faremos é a

Proposição 1.4: Seja r um número racional. O conjunto $L_r = \{s \in \mathbb{Q}/s < r\}$ é um corte.

Demonstração. Devemos verificar as três condições da Definição (1.2). É claro que as condições (i) e (ii) estão satisfeitas. Para ver (iii), suponhamos que L_r tenha máximo m. Então $m<r$. Mas entre m e r existe um número racional s. Logo $m<s<r$ e $s \in L_r$. Mas $m<s$ contraria o fato de m ser máximo de L_r. Portanto L_r não tem máximo. □

Para todo $r \in \mathbb{Q}$ o corte L_r será chamado corte racional. Os outros cortes serão chamados cortes irracionais. Fazendo a identificação $L_r \cong r$ vemos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Os elementos desse conjunto chamam-se números irracionais.

Quando definimos um novo conjunto numérico a primeira providência é definir operações neste conjunto. No caso de $\mathbb{R}$ devemos definir as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de modo que sejam uma extensão das respectivas operações já definidas em $\mathbb{Q}$.

Durante centenas de anos muitos matemáticos supuseram que π era irracional. No entanto, só em 1761 *Johann Lambert*, no seu livro "*Mémoires sur quelques popriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*" conseguiu provar que π era efetivamente irracional, usando *frações contínuas*.

1.6 As Imbricações entre os Números Racionais e os Números Irracionais

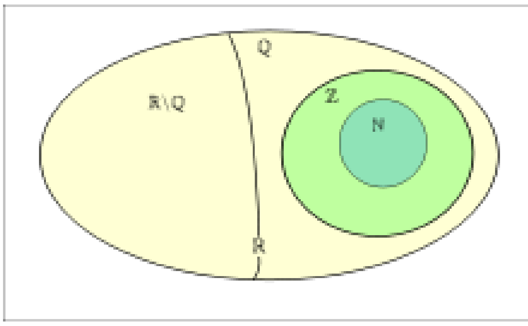
Segundo Brolezzi (1996), no texto "A Arte de Contar", a abordagem histórica tem importância fundamental para estruturar o trabalho didático da Matemática a ser ensinada. Isso pode ser observado com relação ao surgimento dos Números Irracionais e sua relação com os Números Racionais. É usual a abordagem no Ensino Básico, definindo o conjunto dos números irracionais como os números reais que não pertencem ao conjunto dos Números Racionais (Irracionais $= \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

Com relação à civilização grega e seu apego aos números Naturais, Brolezzi (1996) argumenta que eles não consideravam como números as frações (racionais) e nem os irracionais, porém tinham conhecimento da existência destes, contornando este conflito pelo uso da **Geometria** para expressar estes números, o que gerou **a crise dos incomensuráveis**. Assim, apesar dos egípcios e "os povos da mesopotâmia" utilizarem frações e números decimais, estudos mostram que somente após a identificação das grandezas incomensuráveis é que surgem de uma forma mais definitiva os próprios números racionais.

Assim, o conflito resultante da crise dos incomensuráveis, que marca o surgimento dos **Números Irracionais**, também define melhores contornos para os números racionais. É justamente este imbricamento entre os números racionais e os números irracionais que permite definir melhor estes conjuntos e, acredito, ser uma importante contribuição para o ensino de Matemática. A representação decimal dos números irracionais é necessariamente infinita e não periódica.

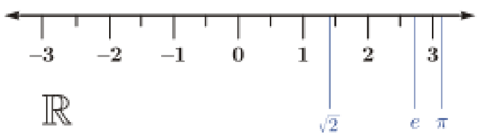
Assim, a única via de acesso a um número irracional é a utilização de aproximações sucessivas através de números racionais. Ainda hoje, parece desconcertar todos os que enfrentam os irracionais. Negando o estatuto dos números as razões entre grandezas que conduziam aos irracionais, foi possível aos gregos viver praticamente ao largo de tais objetos indesejáveis.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais.



Os números reais são números usados para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero e os negativos). Pode-se pensar num número real como uma fracção decimal possivelmente infinita, como $3,141592(\ldots)$.

Intuitivamente, podemos construir o conjuntos dos números reais a partir dos racionais da seguinte forma: uma reta formada por números racionais tem buracos (por exemplo, existe um buraco onde deveria estar a raiz quadrada de 2). O conjunto dos números reais completa essa reta, tapando todos os buracos, de forma que se a reta real está dividida em duas semi-retas, então existe um ponto separando as duas semi-rectas.



Há muito se sabe, no entanto, que a maioria absoluta, a quase totalidade dos números reais existentes é constituída por números irracionais.

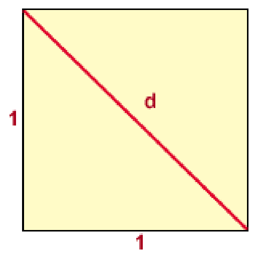
Número Irracional é todo número real que não pode ser representado na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros, com $b \neq 0$, ou seja, quando não pode ser escrito na forma de fração entre números inteiros ou quando possui uma expansão decimal infinita não periódica.

Na busca de indícios deste imbricamento nos documentos oficiais, nos Parâmetros Curriculares Nacionais(PCNs), Brasil (1997), pude verificar breves citações com relação aos Números Irracionais, cuja abordagem é sugerida pela questão dos <u>incomensuráveis</u>, em particular da relação da diagonal e o lado do quadrado (razão $\sqrt{2} : 1$), pela construção geométrica das raízes sucessivas não exatas de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ... através do uso do

Teorema de Pitágoras, assim como pelo cálculo aproximado através da representação decimal racional destas raízes não-exatas e do número π, sugerindo localizá-las na reta real.

O primeiro exemplo de um par de segmentos incomensuráveis, descoberto por Pitágoras e seus discípulos, é bastante simples: se tomarmos o lado de um quadrado como segmento unitário, a diagonal desse quadrado não pode ter comprimento racional, ou seja, o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis, ou ainda, $\sqrt{2}$ é irracional.

De fato, se o lado e a diagonal fossem comensuráveis, tomando o lado como unidade, obteríamos para comprimento da diagonal um número racional $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros. Em virtude do teorema de Pitágoras aplicado a um dos triângulos retângulos formado por dois lados e a diagonal do quadrado, temos:



$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Mas a última igualdade é um absurdo. Os inteiros p^2 e q^2 contêm cada um dos seus fatores primos um número par de vezes, pois estão elevados ao quadrado. Por conseguinte, $2q^2$ contém um número ímpar de fatores iguais a 2 e assim não pode ser igual a p^2.

Em vista de tais resultados, a tensão entre os dois conjuntos leva necessariamente a questão de como administrá-la em favor do ensino e da aprendizagem em matemática. Acredito que o tema das **Frações Contínuas** possibilita contribuir para administrar este jogo. A seguir, será realizada uma breve exposição de estratégias que podem ser realizadas para aproximar um número irracional por um número racional, através da ferramenta das *Frações Contínuas.*

Capítulo 2

O Estudo das Frações Contínuas

2.1 Aspectos Históricos

Foi encontrado em meados de 306 a.C., um dos textos de matemática mais bem sucedidos de todos os tempos – Os Elementos (Stoichia) de Euclides, nele encontra-se um algoritmo (**Algoritmo da divisão de Euclides**) que, podemos obter qualquer número racional em termos de *fração contínua*.

Durante os anos de 1650 à 1670 uma grande variedade de métodos infinitos foi desenvolvida, inclusive o método das *frações contínuas infinitas* para π, que fora dado por *William Brouncker* (1620 - 1684) o primeiro presidente da *Royal Society.* Wallis, em 1650, obteve a curiosa expressão:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}$$

Por manipulação do produto de Wallis para $\frac{2}{\pi}$, Brouncker chegou à expressão:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ddots}}}}$$

Os primeiros passos para frações contínuas datavam de muito antes, na Itália, onde Pietro Antonio Cataldi (1548-1626)(italiano considerado o descobridor das frações contínuas), escreveu raízes quadradas nessa forma, tais expressões são facilmente obtidas. Cataldi, em 1613, descreve:

$$\sqrt{18} = 4\& \cfrac{2}{8\& \cfrac{2}{8\& \cfrac{2}{8\& \ddots}}} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}},$$

que ele abreviou como $4\&\frac{2}{8}\&\frac{2}{8}\&\frac{2}{8}\&\ldots$.

Leonhard Eüler contribuiu demasiadamente com a matemática, ele foi um dos primeiros matemáticos a desenvolver a teoria das frações contínuas. Em 1737, encontrou o seguinte desenvolvimento para o número e.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}}.$$

Demonstrou, em 1775, que:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ddots}}}}.$$

Acredita-se que tenha sido obtida através da representação: $\dfrac{4}{\pi} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$, devido a John Wallis (1616-1703), em seu livro "*Arithmetica Infinitorium*"(1655) que marca o ínicio do desenvolvimento da teoria de frações contínuas.

Citamos a seguir alguns matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento das frações contínuas:

- Rafael Bombelli (1526-1572) sabia (embora não com a notação usada hoje) que

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ddots}}}.$$

- Joseph Louis Lagrange (1736-1813) demonstrou que as raízes irracionais de equações quadráticas têm expansão na forma de fração contínua periódica.

- Johann Heinrich Lambert (1728-1777) escreveu a primeira demonstração de que o número π é irracional, usando frações contínuas para calcular tan(x) da forma:

$$\tan(x) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \ddots}}}.$$

- Lambert usou essa expressão para concluir que se x é um número racional não nulo, então tan(x) não pode ser um número racional. Sendo assim, como $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, então π não pode ser racional. Além disso, Lambert mostrou em 1766 que:

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{\cfrac{2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{6}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{10}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{14}{x} + \ddots}}}}.$$

2.2 Conceitos Básicos

Uma *fração contínua* é uma expressão da forma:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ddots}}}} \tag{2.1}$$

onde a_0, a_1, a_2, ... e b_1, b_2, b_3, ... são números reais ou complexos, ou funções de variáveis reais ou complexas. O número de termos pode ser finito ou infinito.

Podemos, também, denotar a fração contínua (2.1) da forma

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \frac{b_3}{a_3 + \ldots},$$

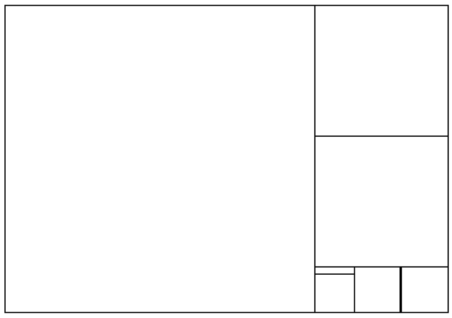
onde $\frac{b_i}{a_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, são chamados de *quocientes parciais*. Chamaremos a_i e b_i, respectivamente, de denominador e numerador parcial $\frac{b_i}{a_i}$.

Uma forma mais simples de (2.1) é a *fração contínua simples ou fração contínua regular*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 + \ldots},$$

onde a_1, a_2, a_3, ..., são números inteiros positivos e a_0, um inteiro qualquer. Uma *fração contínua simples finita* tem a forma $a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 + \ldots}\frac{1}{+a_n}$, que também é denotada por $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$.

A figura abaixo dá uma interpretação geométrica para a representação de um número por frações contínuas.



Enchemos um retângulo $1 \times x$ com quadrados de forma "gulosa", isto é, sempre colocando **o maior quadrado possível** dentro do espaço ainda livre. Os coeficientes a_0, a_1, a_2, ... indicam o número de quadrados de cada tamanho. Na figura, se os lados do retangulo são $c < d$ então $\frac{d}{c} = [1; 2, 2, 1, ...]$

De fato, temos $a_0 = 1$ quadrado grande, $a_1 = 2$ quadrados menores, $a_2 = 2$ quadrados ainda menores, $a_3 = 1$ quadrados ainda menores, e um número grande não desenhado de quadrados mais menores ainda (a_4 é grande). Verifique!

2.3 Convergentes

Vamos considerar as frações $c_1 = \frac{a_1}{1}$, $c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}$, $c_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$, ... obtidas pelas expansões das frações contínuas $[a_1]$, $[a_1; a_2]$, $[a_1; a_2, a_3]$, ... Estas frações são chamadas de primeiro, segundo, terceiro, ... convergentes, respectivamente, da fração contínua $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n]$. É claro que o n-ésimo convergente é igual à própria fração contínua.

Vamos considerar $c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}$, em que $p_1 = a_1$ e $q_1 = 1$. Assim, $c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1a_2+1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$ em que $p_2 = a_1a_2+1$ e $q_2 = a_2$. Calculando c_3, obtemos:

$$c_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3}{a_2a_3+1} = \frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_2a_3+1} = \frac{a_3p_2+p_1}{a_3q_2+q_1}.$$

De maneira geral, temos o seguinte resultado: Seja $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ o i-ésimo convergente da fração contínua $[a_1; a_2, \ldots, a_n]$.

Então, o numerador p_i e o denominador q_i de c_i satisfazem as seguintes relações: $p_i = a_ip_{i-1}+p_{i-2}$, $q_i = a_iq_{i-1}+q_{i-2}$, para $i = 3, 4, 5, \ldots, n$; em que $p_1 = a_2a_1+1$, $q_1 = 1$, $q_2 = a_2$.

2.4 Fração Contínua de um Número Racional

As frações contínuas foram objetos de estudo de grandes matemáticos nos séculos XVII e XVIII, como Leonard Eüler e Hermite, atualmente são de grandes interesses em várias áreas no campo da matemática, como em teoria dos números, na ciência da computação, e outros.

Para obtermos uma fração contínua de certo número racional, basta aplicar o algoritmo da divisão de Euclides sucessivamente numa divisão de inteiros. Por exemplo, tomemos um racional irredutível $\frac{p}{q}$.

Assim, existem únicos a_1 e r_1 tal que $p = a_1 \cdot q + r_1$, com $0 \leqslant r_1 < q$, logo

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1 \cdot q}{q} + \frac{r_1}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}$$

Para q e r_1, obtemos únicos a_2 e r_2 tal que $q = a_2r_1 + r_2$, com $0 \leqslant r_2 < r_1$, logo $\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_1}{r_2}}$.

Repetindo esse processo sucessivamente, obtemos:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Vejamos um exemplo mais detalhado: a representação do número $\frac{344}{77}$ na forma de fração contínua. Usando-se o Algoritmo da divisão, obtém-se $344 = 4 \times 77 + 36$. Logo, $\frac{344}{77} = 4 + \frac{36}{77}$.

A fração ao lado direito da expressão anterior é uma fração própria e tem numerador diferente de 1. É possível escrevê-la na forma $\frac{1}{\frac{77}{36}}$.

Com isso, obtém-se a expressão $\frac{344}{77} = 4 + \frac{36}{77} = 4 + \frac{1}{\frac{77}{36}}$. A divisão de 77 por 36 resulta no quociente 2 e resto 5. Logo, $\frac{77}{36} = 2 + \frac{5}{36} = 2 + \frac{1}{\frac{36}{5}}$.

Procedendo-se dessa forma, até que a última fração tenha numerador igual a 1, chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{344}{77} = 4 + \frac{36}{77} = 4 + \frac{1}{\frac{77}{36}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{36}{5}}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{5}}}.$$

Observa-se que não há como ir além desse resultado, pois ao escrever a última fração na forma $\frac{1}{\frac{5}{1}}$, chega-se à divisão de 5 por 1 cujo resto é igual a 0. Portanto o cálculo termina.

Assim, a representação do número $\frac{344}{77}$ na forma de fração contínua é finita e pode ser escrita de maneira abreviada como $[4; 2, 7, 5]$. É interessante observar que a representação decimal do número $\frac{344}{77}$ é infinita, a saber, a dízima periódica $4,4675324675324\ldots$ enquanto que a representação na forma de fração contínua é finita.

Como o algoritmo da divisão de Euclides é um processo finito, esse também o é, e esta última expressão é a fração contínua que representa o racional $\frac{p}{q}$ e escreveremos;

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n]$$

Em "Os Elementos" de Euclides, o método para achar o m.d.c. de dois números é usado para se converter uma fração (número racional) em fração contínua. Como exemplo o m.d.c. entre $(85, 32)$

$$85 = 2 \cdot 32 + 21$$

$$32 = 1 \cdot 21 + 11$$
$$21 = 1 \cdot 11 + 10$$
$$11 = 1 \cdot 10 + 1$$
$$10 = 10 \cdot 1 + 0.$$

Logo o m.d.c. $(85, 32) = 1$

Expressamos $\frac{85}{32}$ da seguinte forma:

$$\frac{85}{32} = 2 + \frac{21}{32} = 2 + \frac{1}{\frac{32}{21}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{11}{21}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{21}{11}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{10}{11}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{10}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10}}}}.$$

Este último, é a fração contínua expressa do número racional $\frac{85}{32}$ e sua notação é $\frac{85}{32} = [2; 1, 1, 1, 10]$.

No processo de divisões sucessivas, apenas o primeiro quociente pode ser positivo, negativo ou zero. Podemos dizer que um número é racional quando é o quociente de uma divisão de dois números inteiros, $\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}$, com o divisor positivo, $\mathsf{q} > 0$. Se $\mathsf{p} > \mathsf{q}$; o primeiro quociente parcial da fração contínua é positivo; se $0 < \mathsf{p} < \mathsf{q}$ o primeiro quociente parcial da fração contínua é zero; se p for negativo, o primeiro quociente da fração contínua é negativo. Exemplos:

$$\frac{-40}{13} = -4 + \frac{12}{13} = -4 + \frac{1}{\frac{13}{12}} = -4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{12}} = [-4; 1, 12]$$

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = [1; 2, 3]$$

$$\frac{17}{31} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = [0; 1, 1, 4, 1, 2]$$

$$\frac{-18}{5} = -4 + \frac{2}{5} = -4 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = -4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = [-4; 2, 2].$$

Proposição 2.4.1 Sejam $p > q$ e $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Então, $\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Reciprocamente, se $\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n]$, então $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.

Demonstração. Por hipótese, $p > q$, então $\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$. Mas, $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$, assim,

$$\frac{q}{p} = 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

Verifiquemos que a recíproca também vale. Se, por hipótese,

$$\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n] = 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

então,

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x,$$

onde $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. □

Teorema 2.2 *Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita*

Demonstração. A demonstração da primeira parte é imediata, pelo fato de se tratar de uma fração contínua simples finita.

Para provar a recíproca, consideremos um número racional $\frac{p}{q}$ qualquer. Pelo algoritmo da divisão, obtemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q},$$

onde $0 \leqslant r_1 < q$ e $a_0 = \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$; onde $\lfloor a \rfloor$ denota o maior inteiro menor que ou igual que a. Se $r_1 = 0$, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro e, então, o processo termina. Caso contrário, escrevemos $\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\frac{q}{r_1}}, \quad 0 < r_1 < q$.

Repetimos, agora, o mesmo procedimento com $\frac{q}{r_1}$ e obtemos

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leqslant r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$, então o processo termina e, assim,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1].$$

Se $r_2 \neq 0$, repetimos o mesmo procedimento com a fração $\frac{r_1}{r_2}$.

Observamos que o processo termina quando $r_n = 0$ para algum n, o que ocorre, pois $q > r_1 > r_2 > \ldots$ é uma sequência decrescente de inteiros positivos. Temos, então,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_1}{q}, \quad 0 < r_1 < q \\
\frac{q}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 < r_2 < r_1, \\
\vdots & \quad \vdots \qquad \vdots \\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_{n-1}, \quad r_n = 0
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

□

Como $\frac{1}{a_{n-1}} = \cfrac{1}{(a_{n-1} - 1) + \cfrac{1}{1}}$, segue que $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1} - 1, 1]$ é também uma expressão de $\frac{p}{q}$. Ressalva feita à possibilidade de expressar um número inteiro k também como $(k-1)+1$, a unicidade da expansão segue do algoritmo da divisão.

Para entendermos melhor, consideremos a sequência $[1;2,1,2]$ e sua fração contínua é representada da seguinte forma:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{8}{3}}=1+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}$$

Numa representação de uma fração contínua de um número racional, quando o termo a_n for maior que 1 poderemos substituí-lo por $a_n - 1 + \dfrac{1}{1}$, assim a representação acima pode assumir duas formas, por exemplo:

$$[1;2,1,2]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=[1;2,1,1,1]$$

2.5 Fração Contínua de um Número Irracional

Leonhard Eüler(1707-1783) escreveu o primeiro texto abrangente em que explicava propriedades de frações contínuas. Eüler demonstrou que os racionais são escritos como frações contínuas finitas e provou que a representação dos irracionais na forma de fração contínua é infinita. Alguns exemplos de frações contínuas infinitas:

$\sqrt{2}=[1;2,2,2,2,2,2,2,\ldots]$

$\sqrt{3}=[1;1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots]$

$\sqrt{5}=[2;4,4,4,4,4,4,\ldots]$

$\sqrt{7}=[2;1,1,1,4,1,1,1,4,1,1,1,4,\ldots]$

$e=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots]$

$\pi=[3;7,15,1,292,1,1,1,2,\ldots]$.

2.5.1 Aproximações Sucessivas

Seja φ um número irracional e $a_1=\lfloor\varphi\rfloor$, isto é, a_1 o maior inteiro menor do que ou igual a φ , teremos: $\varphi = a_1+\dfrac{1}{x_1}$ onde, $x_1=\dfrac{1}{\varphi-a_1}$. Observe que $x_1>1$ e x_1

é irracional, dessa forma, repetindo o processo, poderemos escrever; $x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}$, onde $a_2 = \lfloor x_1 \rfloor$ e $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2}$. Repetindo esse processo, teremos:

$$\begin{aligned}
\varphi &= a_1 + \frac{1}{x_1} \\
x_1 &= a_2 + \frac{1}{x_2} \\
x_2 &= a_3 + \frac{1}{x_3} \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Onde todos os a_is são inteiros maiores ou iguais a 1 e todos os x_is são irracionais maiores do que 1. Assim obtemos:

$$\varphi = a_1 + \frac{1}{x_1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}} = \ldots = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_n}}}}}$$

Definimos $[a_1; a_2, a_3, \ldots]$ como fração contínua de φ. O número de ouro, dado por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pode ser escrito como a seguinte fração contínua infinita e periódica: $[1; \overline{1}]$. Os convergentes do número de ouro são: $[1] = 1$; $[1;1] = 1 + \frac{1}{1} = 2$; $[1;1,1] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2}$; $[1;1,1,1] = \frac{5}{3}$; $[1;1,1,1,1] = \frac{8}{5}$; $[1;1,1,1,1,1] = \frac{13}{8}$; ....
É interessante observar que tanto os numeradores quanto os denominadores das frações contínuas parciais do número de ouro $\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots\right)$ formam a sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

2.5.2 Frações Contínuas Periódicas

Quando a sequência dos valores a_i apresenta repetição, algum "período", a fração contínua simples é chamada de *fração contínua periódica* e pode ser denotada por

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}}],$$

onde $a_{k+n} = a_k$ e os valores $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}$ formam o período que se repete. A fração contínua

$$[\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}]$$

é chamada de *fração contínua puramente periódica.* Chamamos *irracional quadrático* um número irracional x que é raiz da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são inteiros e $b^2 - 4ac > 0$ não é um quadrado perfeito. Há dois resultados fundamentais sobre frações contínuas periódicas e números irracionais quadráticos, os teoremas de Eüler e Lagrange.

Teorema 2.2 (Eüler) Se x é uma fração contínua periódica, isto é, se

$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}}]$, então x é um número irracional quadrático.

Demonstração. De fato, vamos tomar $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k]$,

onde $x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots]$. Assim, $x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}, x_k]$ e, portanto $x_k = \dfrac{x_k p' + p''}{x_k q' + q''}$, ou seja,

$$q' {x_k}^2 + (q'' - p')x_k - p'' = 0 \tag{2.2}$$

onde $\dfrac{p''}{q''}$ e $\dfrac{p'}{q'}$ são os dois últimos convergentes de $[a_k; a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}]$. Mas,

$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Logo, $x_k = \dfrac{p_{k-2} - q_{k-2}x}{q_{k-1}x - p_{k-1}}$.

Substituindo-se o valor de x_k dado acima em (2.2) e simplificando-se, obtemos $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a = q' q_{k-2}^2 - (q'' - q')q_{k-2}q_{k-1} - p'' q_{k-1}^2$,

$b = 2(p'' p_{k-1}q_{k-1} - q' p_{k-2}q_{k-2}) + (q'' - p')(q'' - p')(p_{k-2}q_{k-1} - q_{k-2}p_{k-1})$,

$c = q' p_{k-2}^2 - (q'' - p')p_{k-2}p_{k-1} - p'' p_{k-1}$

e, portanto a, b, c são números inteiros. Como x é irracional, então $b^2 - 4ac > 0$. □

Teorema 2.3 (Lagrange) *A fração contínua que representa um irracional quadrático x é periódica.* Veja a referência [1] para consultar a demonstração.

Para entendermos melhor, mostraremos o irracional $\sqrt{8}$ na forma de fração contínua infinita. $\varphi = \lfloor \sqrt{8} \rfloor = 2 = a_1$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{1(\sqrt{8}+2)}{(\sqrt{8}-2)(\sqrt{8}+2)} = \frac{\sqrt{8}+2}{4}$$

$$a_2 = \lfloor \frac{\sqrt{8}+2}{4} \rfloor = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4} - 1} = (\frac{4}{\sqrt{8}-2})(\frac{\sqrt{8}+2}{\sqrt{8}+2}) = \frac{4\sqrt{8}+8}{4} = \sqrt{8}+2$$

$$a_3 = \lfloor \sqrt{8}+2 \rfloor = 4$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{8}+2-4} = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{1(\sqrt{8}+2)}{(\sqrt{8}-2)(\sqrt{8}+2)} = \frac{\sqrt{8}+2}{4}$$

A fração contínua de $\sqrt{8}$ aparece em forma repetitiva com exceção do a_1 , assim denominamos de fração contínua periódica. Juntando os termos acima, temos:

$$\sqrt{8} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{8}+2}{4}}}}}}$$

e sua notação será expressa; $[2; 1, 4, 1, 4, ...]$ ou $[2; \overline{1, 4}]$, note que, podemos reverter o processo acima para obtermos novamente o número irracional que ele representa. Segue abaixo frações contínuas de alguns irracionais:

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \overline{1, 2}] \quad \sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4 \ldots] = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$$

A aproximação de números irracionais por racionais é uma questão de grande importância em diversas situações. Como no ensino médio, o exemplo mais comum de número irracional é uma raiz quadrada de um inteiro, temos aqui uma ótima maneira de calcular um valor aproximado para tal raiz.

No exemplo $\sqrt{8} = [2; 1, 4, 1, 4, ...] \approx [2; 1, 4, 1, 4] = \frac{82}{29}$, é uma ótima aproximação para a raiz procurada. Veja:

$$\sqrt{8} \approx [2; 1, 4, 1, 4] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{4}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{4}{5}}} =$$

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{24}{5}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{24}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{24}} = 2 + \frac{24}{29} = \frac{82}{29}.$$

Vamos verificar que $[2; 2, 2, 2, 2, \ldots] = [2; \overline{2}] = \sqrt{2} + 1$.

De fato, como $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 1$, podemos escrever, $\sqrt{2} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$. Também são verdadeiras as igualdades $\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + (2 - 1) = 2 + (\sqrt{2} - 1)$.

Pode-se concluir que $\sqrt{2} + 1 = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$. A aplicação sucessiva da última igualdade no denominador da fração obtida anteriormente, leva à seguinte expressão:

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}} = \ldots = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}.$$

O processo acima necessita de alguma verificação mais rigorosa, já que, por ser um processo infinito, não é garantido que o limite criado no lado direito da igualdade existe. É interessante observar que, se conhecêssemos apenas o lado direito da expressão acima e soubéssemos que o limite existe, poderíamos escrever:

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} \Leftrightarrow x - 2 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (x - 2) \cdot x = 1$$

Portanto, $x^2 - 2x - 1 = 0$. Como x é um número positivo, concluímos que $x = 1 + \sqrt{2}$.

2.5.3 Outras expansões para números Irracionais

Quando $x = \sqrt{N}$, onde $N \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito, podemos, também, encontrar expansões em frações contínuas, que podem não ser simples, da seguinte forma:

i) encontramos a e $b \in \mathbb{N}$ tais que $N = a^2 + b$ e calculamos

$$\sqrt{N} - a = \frac{(\sqrt{N} - a)(\sqrt{N} + a)}{\sqrt{N} + a} = \frac{N - a^2}{\sqrt{N} + a} = \frac{b}{2a + \sqrt{N} - a},$$

ii) em seguida, substituimos o valor de $\sqrt{N} - a$, que aparece do lado direito da equação acima, por todo o segundo membro

$$\sqrt{N} - a = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \sqrt{N} - a}} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \sqrt{N} - a}}},$$

iii) procedendo assim, sucessivamente, encontramos

$$\sqrt{N} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}} \tag{2.3}$$

Se p é um número inteiro positivo, então a fração contínua simples infinita que representa a $\sqrt{p^2+1}$ é $[p; \overline{2p}]$

Exemplo 1. $\sqrt{17} = \sqrt{4^2+1} = [4; \overline{8}]$ *;* $\sqrt{26} = \sqrt{5^2+1} = [5; \overline{10}]$ *etc.*

Se p é um número inteiro positivo maior que 1, então a fração contínua simples infinita que representa a $\sqrt{p^2-1}$ é $[(p-1); \overline{1, 2(p-1)}]$

Exemplo 2. $\sqrt{8} = \sqrt{3^2-1} = [2; \overline{1,4}]$*;* $\sqrt{24} = \sqrt{5^2-1} = [4; \overline{1,8}]$ *etc.*

Vamos a um conceito importante para os números reais: Um número se diz *algébrico* se é raiz de algum polinômio não-nulo de coeficientes racionais; caso contrário, se diz *transcendente.*

Os números algébricos representam todos os números racionais (frações contínuas finitas) e os irracionais representados por frações contínuas periódicas. No caso dos números irracionais transcendentes, as frações contínuas são infinitas e não periódicas.

Observe a representação de alguns desses números reais (algébricos ou transcendentes):

Exemplo 3. *Fração contínua simples de* $\dfrac{87}{59}$.

$$\frac{87}{59} = 1 + \frac{28}{59} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{59}{28}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{28}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{28}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3}}} = [1; 2, 9, 3].$$

Exemplo 4. *Fração contínua simples de* $\frac{59}{87}$.

$$\frac{59}{87} = 0 + \frac{1}{\frac{87}{59}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3}}}} = [0; 1, 2, 9, 3].$$

Exemplo 5. *Fração contínua simples de* $\frac{-87}{59}$. $\frac{-87}{59} = -1 - \frac{28}{59} = -1 - \frac{28}{59} + \frac{59}{59} - 1 = -2 + \frac{31}{59} = -2 + \frac{1}{\frac{59}{31}} = -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{28}{31}} = -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{31}{28}}} = -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{28}}} =$

$$-2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{28}{3}}}} = -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3}}}} = [-2; 1, 1, 9, 3].$$

Exemplo 6. *Fração contínua simples de* $\sqrt{2}$. $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = \lfloor 1.414213\ldots\rfloor = 1$. $\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1$ *, fazendo* $\frac{1}{x_1} = \sqrt{2} - 1$, *temos:* $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$. *Logo,* $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$. *Continuando, temos* $\sqrt{2} =$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+\ldots} = [1; 2, 2, 2, \ldots] = [1; \overline{2}].$$

Exemplo 7. *Fração contínua simples de* $-\sqrt{2}$. $\lfloor -\sqrt{2}\rfloor = \lfloor -1,414213\ldots\rfloor = -2$. *Note que* $-\sqrt{2} = -2 + (-\sqrt{2} + 2)$. *Fazendo* $\frac{1}{x_1} = -\sqrt{2} + 2$, *temos* $x_1 = \frac{1}{-\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2} = 1 + (\frac{\sqrt{2}+2}{2} - 1)$, *adotando* $\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2} - 1$, *temos:* $x_2 = \cfrac{1}{\frac{\sqrt{2}+2}{2} - 1} = \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+\ldots}$. *Logo,* $-\sqrt{2} = -2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{\sqrt{2}} = -2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+\ldots} = [-2; 1, 1, 2, 2, 2, \ldots] = [-2; 1, 1, \overline{2}]$.

Exemplo 8. *Fração contínua simples de* $\sqrt{13}$.

Note que $\lfloor\sqrt{13}\rfloor = \lfloor 3,605551\ldots\rfloor = 3$.

Veja que $\sqrt{13} = 3 + (\sqrt{13} - 3)$. *Fazendo* $\frac{1}{x_1} = \sqrt{13} - 3$, *temos* $x_1 = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4}$. *Assim,temos* $a_1 = 1$. *Portanto,* $\frac{\sqrt{13}+3}{4} = 1 + (\frac{\sqrt{13}+3}{4} - 1)$. *Temos, agora,* $\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} - 1$, *daí,* $x_2 = \cfrac{1}{\frac{\sqrt{13}+3}{4} - 1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}$, *temos:* $a_2 = 1$;

$\dfrac{\sqrt{13}+1}{3} = 1 + (\dfrac{\sqrt{13}+1}{3} - 1)$, *logo* $\dfrac{1}{x_3} = \dfrac{\sqrt{13}+1}{3} - 1$. *Concluímos,* $x_3 = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+1}{3} - 1} = \dfrac{\sqrt{13}+2}{3}$. $a_3 = 1, \dfrac{\sqrt{13}+2}{3} = 1 + (\dfrac{\sqrt{13}+2}{3} - 1)$. $\dfrac{1}{x_4} = \dfrac{\sqrt{13}+2}{3} - 1$.
$x_4 = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+2}{3} - 1} = \dfrac{\sqrt{13}+1}{4}$. $a_4 = 1, \dfrac{\sqrt{13}+1}{4} = 1 + (\dfrac{\sqrt{13}+1}{4} - 1)$. $\dfrac{1}{x_5} = \dfrac{\sqrt{13}+1}{4} - 1$. $x_5 = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+1}{4} - 1} = \dfrac{\sqrt{13}+3}{1}$. $a_5 = 6, \dfrac{\sqrt{13}+3}{1} = 6 + (\dfrac{\sqrt{13}+3}{1} - 6)$.
$\dfrac{1}{x_6} = \dfrac{\sqrt{13}+3}{1} - 6$. $x_6 = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+3}{1} - 6} = \dfrac{\sqrt{13}+3}{4}$. $a_6 = 1$. *Então,* $a_7 = 1, \quad a_8 = 1, \quad a_9 = 1, \quad a_{10} = 6, \quad a_{11} = 1, \ \ldots$.
Logo, $\sqrt{13} = 3 + \dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{6+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{6+\ldots}$
Outros exemplos:

$$\sqrt{18} = [4; \overline{4, 8}], \quad \sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}], \quad \sqrt{53} = [7; \overline{3, 1, 3, 14}], \quad \sqrt{82} = [9; \overline{18}].$$

Compreenda que todos os exemplos acima são de números reais algébricos.

Exemplo 9. *Fração contínua simples do número* π.

Note que $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3,1415926535897932\ldots \rfloor = 3$. *Logo,* $a_0 = 3$.
$\pi = 3 + 0,1415926535897932\ldots$. $\dfrac{1}{x_1} = 0,1415926535897932\ldots$
$x_1 = \dfrac{1}{0,1415926535897932\ldots}$, $x_1 = 7,06251331041\ldots$, $x_1 = 7 + 0,06251331041\ldots$
Logo, $a_1 = 7$. $\dfrac{1}{x_2} = 0,06251331041\ldots$. $x_2 = \dfrac{1}{0,06251331041\ldots} = 15$. *Daí,* $a_2 = 15$.
$\dfrac{1}{x_3} = 0,9965932606\ldots$. $x_3 = 1,00341838495\ldots$. $x_3 = 1 + 0,00341838495\ldots$
Temos, $a_3 = 1$. $\dfrac{1}{x_4} = 0,00341838495\ldots$. *Logo,* $x_4 = 292,535807004\ldots \Rightarrow x_4 = 292 + 0,535807004\ldots$. *Obtemos,* $a_4 = 292$.

Continuando desta forma, encontramos, $a_5 = 1, \quad a_6 = 1, \quad a_7 = 1, \quad a_8 = 2, \ldots$.
Assim, $\pi = 3 + \dfrac{1}{7+}\dfrac{1}{15+}\dfrac{1}{292+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{3+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{14+\ldots}$
Como também, $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 14, \ldots]$

Em notação de fração contínua é uma dízima não periódica, o que configura um número real transcendente.

2.5.4 Um pouco da história dos dois mais famosos irracionais transcendentes

1- História do π (pi)

Você pode até não gostar dele, mas o número π, que tem até uma data comemorativa, tem uma história de pelo menos cinco mil anos. Como se sabe o π, é o número mais famoso da história universal, o qual recebeu um nome próprio, um nome grego, pois embora seja um número, não pode ser escrito com um número finito de algarismos. O π representa a razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro.

Antes de mais é importante focar que na história do π um dos passos fundamentais, consistiu em adquirir consciência da constância da razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer círculo, pois sem esta consciência nunca se teria calculado o π . Inúmeros povos andaram à sua procura mesmo antes que chegassem a ter consciência matemática.

O símbolo π é a designação da palavra grega que significa perímetro.

Em consideração ao dia do π, comemorado no domingo ($\frac{3}{14}$, pela notação norte-americana), fizemos um breve histórico de como ele veio a ser conhecido como

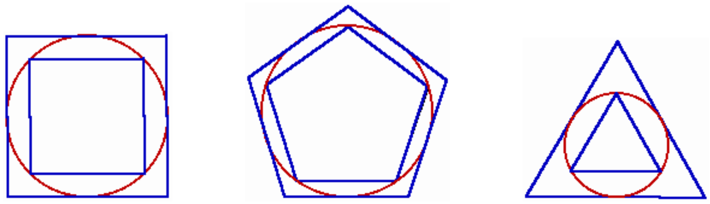
$$3,14159265358979323846264338327950288419716 9\ldots$$

É difícil definir com precisão quem identificou tal relação entre a circunferência de um círculo e seu respectivo diâmetro, pois há informações de que alguns povos já tinham esse conhecimento desde 2550 a.C.. A pirâmide de Gizé, que foi construída entre 2550 e 2500 a.C., tem um perímetro de 1760 cúbitos ou côvados (um cúbito possui cerca de 46 centímetros, embora, na época, fosse medido pelo comprimento do antebraço de uma pessoa e, portanto, esse número variava um pouco) e uma altura de 280 cúbitos.

A relação entre o perímetro da pirâmide e sua altura é o valor de π multiplicado por dois. Egiptólogos acreditam que estas proporções foram escolhidas por razões simbólicas, mas nunca saberemos ao certo.

Os primeiros indícios escritos sobre o π data por volta de 1900 a.C., onde os babilônios e egípcios tinham uma ideia do valor aproximado. Precisamente, os babilônios estimaram o π em uma relação de $\dfrac{25}{8}$, enquanto os egípcios chegaram a um valor de $\dfrac{256}{81}$.

O matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.) é considerado a primeira pessoa a calcular o valor de pi com mais precisão. Ele partiu da ideia de encontrar a área de dois polígonos encaixados na circunferência, um inscrito e outro circunscrito, como mostra a figura abaixo. Arquimedes não chegou ao valor exato, mas conseguiu uma ótima aproximação. Ele usou polígonos de 96 lados para encontrar um valor médio de $3,1485$.



O cálculo mais preciso do π antes da invenção do computador foi feito por D.F. Ferguson, que calculou o π com 620 dígitos em 1945 (em 1874, William Shanks calculou o pi com 707 dígitos, mas somente 527 dígitos estavam corretos). Depois que os computadores entraram em cena, não havia mais limites para calcular o π. Em 1947, usando uma calculadora de mesa, Fergunson calculou o π com 710 dígitos. Em 1999, Takahashi Kanada chegou a 206.158.430.000 dígitos usando um computador SR8000, da Hitachi.

O maior cálculo de π feito até hoje, foi realizado em 2002, por uma equipe da Universidade de Tóquio. Novamente, com a ajuda de um computador Hitachi, o π foi calculado com 1.241.100.000.000 dígitos.

2- O número e (Número de Neper)

O número e é um número irracional mas de uma categoria diferente de $\sqrt{2}$. Enquanto $\sqrt{2}$ pode ser raiz de um polinômio de coeficientes inteiros, o número e não tem esta propriedade: diz-se que o número e é um número irracional transcendente.

Representa-se por e, sendo $e = 2,718281828459045235360287 4\ldots$

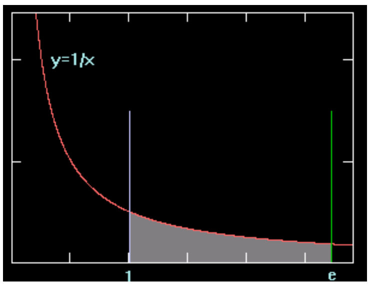
Pelas suas propriedades particulares, o número e tem sido usado como base de logaritmos, embora a base 10 seja a mais usada em aplicações práticas. A base de logaritmo inventada por **Neper**, fazia intervir o número e, pelo que este continua a chamar-se "número de Neper"e os logaritmos de base e,como logaritmos "neperianos"ou "naturais".

Este número e é importante em quase todas as áreas do conhecimento: economia, engenharia, biologia, sociologia. O símbolo e foi usado por *Euler* em 1739.

A fórmula de *Euler* relaciona de forma elegante estes dois números irracionais tão famosos.

Fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x$ e para $x = \pi$, temos $e^{i\pi} = -1$

O e é o único número positivo superior a 1 cuja região indicada corresponde a uma unidade de área.



Veja outros exemplos de números reais transcendentes em notação de *frações de contínuas simples*:

$$e = 2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{8+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+\ldots}$$

$$\frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\frac{1}{18+}\frac{1}{22+}\frac{1}{26+}\frac{1}{30+}\frac{1}{34+}\frac{1}{38+}\frac{1}{42+\ldots}$$

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\frac{1}{18+}\frac{1}{22+}\frac{1}{26+}\frac{1}{30+}\frac{1}{34+}\frac{1}{38+}\frac{1}{42+\ldots}$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{9+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{13+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{17+\ldots}$$

Capítulo 3

Aplicações das Frações Contínuas

A teoria de frações contínuas tem vasta aplicação na resolução de problemas e em descobertas na Matemática. Abaixo relataremos alguns problemas utilizando a aplicação desta teoria.

3.1 As Frações Contínuas e as boas aproximações

Um primeiro contexto que caracteriza este tipo de situação remonta ao século XVI. O físico holandês Christiaan Huygens utilizou as frações contínuas para a construção de instrumentos científicos, e, em particular, elaborou um modelo reduzido do sistema solar. Para a construção do modelo mecânico necessitava das relações de transmissão entre as engrenagens, o que permitiria reproduzir as órbitas planetárias numa escala adequada.

Vamos reeditar o problema de determinar o modelo da órbita do planeta Saturno em relação ao sol. Na época de Huygens, acredita-se que o tempo necessário para o planeta Saturno orbitar era de $29,46$ anos (este valor é uma aproximação racional de um número real, que atualmente foi estabelecido como $29,43$ anos).

Para modelar este sistema faz-se uso de duas engrenagens, uma com "x"dentes e a outra com "y", de modo que $\frac{x}{y} = 29,43$. Veja a ilustração abaixo:

Huygens elaborou algumas aproximações racionais para a razão $29,43$, tendo obtido: $\frac{29}{1}, \frac{59}{2}, \frac{206}{7}$.

Este último valor permitiu uma escolha de engrenagens com 7 e 206 dentes, relacionada com aspectos práticos, pois é difícil utilizar engrenagens com um número muito pequeno ou muito grande de dentes.

Para verificar como Huygens obteve estes valores, utilizaremos o procedimento aritmético. O 1º convergente é dado por $c_0 = a_0 = 29$. O 2º convergente é dado por $c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$, ou ainda, $c_1 = 29 + 0,43 = 29 + \frac{1}{2,32558} = 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2} \approx 29,5$. Já o 3º convergente: $c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = 29 + \frac{1}{2,32558} = 29 + \frac{1}{2 + 0,32558} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = \frac{206}{7} \approx 29,43$.

Se fossemos determinar o 4º convergente teríamos como resultado a fração $\frac{2737}{93}$, uma aproximação melhor que as anteriores, mas que resulta em números de dentes impraticáveis.

A situação anterior ilustra de modo simples os motivos pelos quais as Frações Contínuas representam a melhor aproximação de números irracionais em situações práticas, assim como representa uma alternativa para iniciar uma exposição didática deste assunto.

3.2 O calendário Gregoriano: Uma incrível coincidência!

Beskin(1987) relembra um velho manual de cosmografia onde há a citação “Lamentavelmente, o ano não é igual a um número inteiro de dias ”, fato que suscita um interessante problema matemático, ligado as frações contínuas.

O ano trópico, aquele que marca as estações, tem a duração média de 1 ano $= 365$ dias 5 horas 48 minutos e 46 segundos $= 365,242199$ dias. O calendário Juliano, estabelecido em 45 a.C., considera a aproximação 1 ano $= 365$ dias 6 horas $= 365,25$ dias, ou seja, tinha uma diferença de cerca de 11 minutos. Esta diferença de 11 minutos, em cem anos, causava um desvio de 18h 43min 20s.

Esta aproximação causa um problema: as estações reais haviam retrocedido treze dias em relação ao calendário Juliano. Em 1582, o papa Gregório III convocou matemáticos e astrônomos para resolver este problema. Desde 45 a.C. até 1582, se passaram 1627 anos, sendo o desvio acumulado desde então de 12 dias 16h 36min 38s

Para tal, principiou-se em se calcular o desvio proporcionado para um dia. Se em 1 ano o desvio é de 11min 14s $(674s)$, então 1 dia $= 24$h $= 1440$min $= 86400$s proporciona um desvio dado por: $86400s \div 674s = 128,19$ anos. Assim, ocorre um desvio de 128 anos para cada dia, ou ainda, de cerca de 3 dias em cada 400 anos. Este encaminhamento proporcionou uma pequena alteração na intercalação de três anos de 365 e um ano de 366 dias do calendário Juliano.

Para retirar estes três dias, a regra foi inroduzir o ano bissexto, que era aquele dado pela seguinte regra: os múltiplos de 100 deixariam de ser bissextos, exceto pelos múltiplos de 400.

Enquanto a duração média do ano Juliano era de 365 dias 6h, com a retirada de três dias do calendário Gregoriano, o valor passou a ser $365\frac{97}{400}$ dias $= 365,242500$ dias $= 365$ dias 5 horas 49 min 12 s. O que ainda causa uma diferença de cerca de 26 segundos do valor real.

A duração média de 1 ano $= 365$ dias 5 horas 48 min 46 s $= 365,242199$ dias.
A fração $\left(\frac{5h48min46s}{dia} = \frac{20926}{86400} = \frac{10463}{43200}\right)$.

A fração contínua correspondente a 1 ano $= 365$ dias 5horas 48min 46s $=$ $[365; 4, 7, 1, 3, 5, 64]$.

i) O 1º convergente é 365 dias.

ii) O 2º convergente é dado por: $365\frac{1}{4}dias$, própria do calendário Juliano.

iii) O 3º convergente é dado por: $365\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}} = 365\frac{7}{29}$, ou seja, 7 anos bissextos a cada 29 anos.

iv) O 4º convergente é dado por: $365\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1}}} = 365\frac{8}{33}\mathtt{dias}$, ou seja, 8 anos bissextos a cada 33 anos.

v) O 5º convergente é dado por: $365\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}} = 365\frac{31}{128}\mathtt{dias}$, 31 anos bissextos a cada 128 anos, o que representa, aproximadamente, 97 anos bissextos em 400 anos do calendário.

3.3 Aplicações na Álgebra - Radicais

A principal proposta deste trabalho é apresentar uma forma interessante de representar os números irracionais a partir dos números racionais conforme as definições das *frações contínuas*.

Expressar $\sqrt{2}$ como uma *fração contínua*.

Como $2 = 1^2 + 1$, veja [2.5.3], então

$\sqrt{2}-1 = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{2-1}{\sqrt{2}+1+1-1} = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}$ obtemos

$\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}-1} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}}}$.Logo,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+\ldots} = [1;\overline{2}].$$

Expressar $\sqrt{18}$ como uma *fração contínua*.

Como $\sqrt{18} = 4^2 + 2$, seguindo o mesmo raciocínio, encontramos:

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ddots}}} = 4 + \frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+\ldots}$$

Neste caso, conseguimos transformar esta fração contínua numa fração contínua simples, pois $\mathtt{b} = 2$ divide $2\mathtt{a} = 8$, veja [2.5.3]. Para isto, basta dividir numerador e denominador de algumas frações intermediárias por $\mathtt{b}$. Assim,

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{\div 2}{\div 2}\left\{\frac{2}{8_+}\,\frac{2}{8_+}\,\frac{\div 2}{\div 2}\left\{\frac{2}{8_+}\,\frac{2}{8_{+\dots}}\right\}\right\}$$

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2/2}{8/2_+}\,\frac{2/2}{8\;_+}\,\frac{2/2}{8/2_+}\,\frac{2/2}{8\;_+}\,\frac{2/2}{8/2_{+\dots}} = 4 + \frac{1}{4_+}\,\frac{1}{8_+}\,\frac{1}{4_+}\,\frac{1}{8_+}\,\frac{1}{4_+}\,\frac{1}{8_{+\dots}} = [4; \overline{4, 8}].$$

Expressar $\sqrt{13}$ como uma *fração contínua.*

Como podemos escrever $13 = 3^2 + 4$, então

$$\sqrt{13} - 3 = \frac{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)}{\sqrt{13}+3} = \frac{13-9}{\sqrt{13}+3+3-3} = \frac{4}{6+\sqrt{13}-3}.$$

Seguindo o raciocínio anterior, obtemos: $\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6_+}\,\frac{4}{6_+}\,\frac{4}{6_+}\,\frac{4}{6_{+\dots}}$

Neste caso, não conseguimos transformar esta fração contínua numa fração contínua simples, pois $\mathtt{b} = 4$ não divide $2\mathtt{a} = 6$.

Expressar $\sqrt{6}$ como uma *fração contínua.*

Analogamente, podemos escrever $6 = 2^2 + 2$ e, assim, obtemos:

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{2}{4_+}\,\frac{2}{4_+}\,\frac{2}{4_+}\,\frac{2}{4_+}\,\frac{2}{4_{+\dots}} = 2 + \frac{2/2}{4/2_+}\,\frac{2/2}{4\;_+}\,\frac{2/2}{4/2_+}\,\frac{2/2}{4\;_+}\,\frac{2/2}{4/2_{+\dots}} = 2 + \frac{1}{2_+}\,\frac{1}{4_+}\,\frac{1}{2_+}\,\frac{1}{4_{+\dots}} = [2; \overline{2, 4}]$$

3.4 Aplicação na Física - Resistores

Considere o circuito elétrico misto de resistências $R = 1$. Lembrando que, se R_1 e R_2 são resistências em série então a resistência equivalente $R_e = R_1 + R_2$ e se R_1 e R_2 são resistências em paralelo então: $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, queremos calcular a resistência equivalente do circuito para um número extremamente grande de linhas. Seja R_n a resistência equivalente do circuito à esquerda da Linha n.

Depois de alguns cálculos, por indução, teremos que

$$R_n = 2 + \frac{1}{1 + R_{n-1}}.$$

Logo, fazendo n tender ao infinito, a resistência equivalente do circuito se aproximará da fração contínua simples dada por $[2; 1, 2, 1, 2, 1, ...]$, tal fração contínua tem a sequência de seus convergentes tendendo a $1 + \sqrt{3}$. Portanto, a resistência equivalente do circuito será aproximadamente $1 + \sqrt{3}$.

As Frações Contínuas representam uma das possibilidades de abordar significativamente os números irracionais no ciclo básico: um número é irracional se a representação em forma de fração contínua for infinita. Caso a representação seja finita, o número é racional.

Esta forma de abordagem elimina a circularidade na representação dos números reais, delimitando os aspectos finitos e infinitos, exatos e aproximados, discretos e contínuo, de forma simples e envolvendo conteúdos acessíveis aos alunos do ciclo básico.

Por todas essas razões, entendemos que as atividades que desenvolvemos no decorrer desse trabalho muito irão contribuir para nossa formação científica.

Considerações Finais

A utilização da história da Matemática na abordagem dos conteúdos se torna interessante e necessária quando o aluno procura entender os processos de desenvolvimentos e operações relacionadas à disciplina. Mais interessante ainda se torna, quando são utilizadas as tecnologias como recursos para o processo de ensino aprendizado. Não pode ser esquecido que a resolução de problemas facilita a compreensão dos alunos e a sua utilização no cotidiano.

Assim, todos têm a necessidade de adquirir algumas habilidades básicas para o convívio e compreensão da realidade que nos cerca. Essas habilidades serão adquiridas a partir do momento em que a disciplina for vista com menos temor e a consciência da importância da mesma para a facilidade na vida de todos. Procurar contextualizar os conteúdos para que faça sentido para os alunos é de extrema importância, pois é muito melhor conseguirmos assimilar um conteúdo que faz parte da nossa realidade a outro que não tem nenhum sentido em nossa vida.

Com esse trabalho esperamos facilitar os estudos daqueles que se interessarem por frações contínuas, pois procuramos mostrar o assunto com vários exemplos. Com isso, pretendemos chamar a atenção, principalmente de professores do ensino médio, onde o assunto é quase desconhecido, para que informem aos seus alunos. A representação de um número real x por decimais tem algumas vantagens indiscutíveis como, por exemplo, sua praticidade para efetuar cálculos. No entanto, essa forma de representação envolve a escolha arbitrária da base 10 e freqüentemente pode ocultar aproximações racionais muito mais eficientes do que aquelas que exibe. Por exemplo, as desigualdades $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right|$ e $\left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right|$ mostram que $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito maiores.

As frações contínuas representam meios de representar números reais que fornece aproximações racionais surpreendentemente boas, como ilustram os exemplos acima.

A representação de números reais por frações contínuas permite-nos vislumbrar aspectos da natureza dos números reais que não se revelam quando se emprega a representação decimal. Junta-se a isso o fato deste tema relacionar-se com diversos ramos da matemática, propiciando àqueles que se dedicam ao seu estudo o emprego de uma gama variada de técnicas de demonstração de teoremas e resolução de problemas.

Para conseguirmos a melhoria da qualidade do processo de ensino-aprendizagem em relação à matemática, é necessário que profissionais e interessados na educação procurem observar todas as disciplinas existentes nos currículos da Educação Básica, bem como analisar o que vem acontecendo no processo de ensino aprendizagem, no qual os alunos não conseguem absorver todos os conteúdos de forma satisfatória. Sabemos que precisamos da Matemática não só em nossa vida escolar, mas também no aspecto profissional e no cotidiano.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, Eliane Xavier Linhares de; BRACCIALI, Cleonice Fátima. *Frações Contínuas: Algumas propriedades e aplicações.* http://www.bienasbm.ufba.br/MC34.pdf. Acesso em: 04/01/2013.

[2] BROLEZZI,A.C. *A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática. 1996.* Tese(Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

[3] LEQUAIN,Y. *Aproximação de um número real por números racionais, 19º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1993.*

[4] Medeiros. Jozan.- *Uma abordagem de ensino dos números reais[manuscritos],2011.*

[5] POMMER, Wagner Marcelo. *A Construção de significados dos números irracionais no ensino básico: Proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais. 2012. Tese(Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.*

[6] POMMER.Wagner Marcelo. *Seminários de Ensino de Matemática/ SEMA- FEUSP.* Coordenação: Prof.Dr.Nílson José Machado.

[7] SANTOS; Joabe Oliveira, CÂMARA,Marcos Antônio da. Expansão de funções em frações contínuas. Faculdade de Matemática, Famat, UFU, 38.408-100, Uberlândia,MG.

[8] SILVA,Vinicius Carvalho. *Frações Contínuas e Aplicações.* UEMS- Unidade Universitária de Cassilândia-2010.

[9] SILVA, José Carlos Ramos da. *O Estatuto das Frações Contínuas.*