Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

e

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

apresentam

PROPOSTA DE APLICAÇÕES DE TEORIA DOS JOGOS NO ENSINO MÉDIO

TARCÍSIO DE CASTRO PAGANUCCI

Uberaba - Minas Gerais

30 de março de 2018

PROPOSTA DE APLICAÇÕES DE TEORIA DOS JOGOS NO ENSINO MÉDIO

TARCÍSIO DE CASTRO PAGANUCCI

Texto apresentado à Banca de Defesa do Mestrado do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Molina da Silva.

Uberaba - Minas Gerais

30 de março de 2018

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

P148p

Paganucci, Tarcísio de Castro
Proposta de aplicações de teoria dos jogos no ensino médio / Tarcísio de Castro Paganucci. -- 2018.
83 f. : il., fig., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2018
Orientador: Prof. Dr. Flávio Molina da Silva

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Teoria dos jogos. 3. Jogos educativos. 4. Jogos no ensino de matemática. I. Silva, Flávio Molina da. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51(07)

TARCÍSIO DE CASTRO PAGANUCCI

Proposta de Aplicações de Teoria dos Jogos no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

28 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora

Flávio Molina da Silva

Prof. Dr. Flávio Molina da Silva
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Marcos P. de Almeida

Prof. Dr. Marcos Proença de Almeida
Instituto Federal do Triângulo Mineiro

Este material é dedicado ao feto presente no útero de minha amada esposa. Desse recém formado, ainda desconheço o sexo, o físico, os trejeitos, as manias, a genialidade e a personalidade. Entretanto, estou certo de que a Matemática já é presente em sua vida e, assim, será preservada em todos os momentos de seu passado, presente e futuro, construindo seu caráter atemporal e desfigurando as correntes do tempo.

Agradecimentos

Se fosse elencar pessoas inspiradoras em minhas ações, haveria grandes chances de esquecer muitas injustamente. Por isso, irei agradecer, de forma específica e objetiva, às pessoas ou entidades que contribuíram diretamente na formação desta dissertação. São elas:

- a esposa Marina pelo apoio incondicional em todos os momentos mas, em especial, durante a elaboração deste material;
- a CAPES por viabilizar, através de bolsa, o mestrado gerador do presente texto;
- o orientador Flávio pelas instruções e pela paciência;
- o estimado Colegiado pela compreensão e coerência;
- a Banca Examinadora pelo tempo dispendido à analise do texto, bem como a sugestões e críticas construtivas para seu aperfeiçoamento e aprovação;
- a amada mãe e professora formada em Letras, Maria Helena, pela dedicação em minha formação profissional e correção gramatical do texto;
- você, profissional atuante na formação de alunos no Ensino Médio, com disposição em trazer um significado distinto na aprendizagem matemática deles.

"O segredo da criatividade é saber como esconder as fontes. Afinal, existem três tipos de pessoas: as que sabem contar e as que não sabem."

Resumo

Teoria dos Jogos é o ramo da Matemática que analisa as decisões na interação entre agentes ou jogadores racionais se comportando estrategicamente durante uma competição. Suas aplicações são diversas, possibilitando modelagens das mais variadas situações como competição ou disputa de um mercado, competição política, decisão de um veredito pelos membros de um júri, competição entre pessoas em um leilão etc. Neste texto, serão abordados, sucintamente, os principais conceitos de Teoria dos Jogos envolvendo jogos estáticos e dinâmicos. Finalmente, serão apresentados alguns exemplos com resoluções e sugestões de aplicação em sala de aula no Ensino Médio.
Palavras-chave: Teoria dos jogos, jogos estáticos, jogos dinâmicos, jogos cooperativos, equilíbrio de Nash, solução de Nash.

Abstract

Game theory is a part of Maths that analyses interaction decisions among agents or rational players under strategic behaviour during a competition. This theory could be applied in many contexts, making modelling processes of various possible situations, such as fight for market, political competition, verdict decision by members of a jury, competition between people in public sale etc. In this paper, main concepts of Game Theory will briefly be under analyses involving static and dynamic games. Finally, some solved examples and suggestions will be presented to ensure application in high school.
Keywords: Game theory, static games, dynamic games, cooperative games, Nash equilibrium, Nash solution.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

Imagina-se que alguém irá fazer uma refeição com três outros amigos e que a ideia seja dividir igualmente a conta final entre os quatro envolvidos, independente dos pedidos individuais. Assim, espera-se que faça pedidos coerentes com os de seus amigos e não peça, por exemplo, porções menos acessíveis enquanto seus amigos pedem porções mais simples. Ou seja, no final do processo, cada um teria gastado mais ou menos o que iria gastar se estivesse comendo sozinho.

Já na festa coletiva de comemoração da empresa no final de ano, com trinta participantes ao todo, um funcionário escolhe um prato que seja mais barato logo no início do evento, visto que suas condições financeiras não permitem abusos. Porém, após eleger seu prato principal econômico, logo repara que há alguns indivíduos com pratos bem mais sofisticados. Então, lembra-se de que irá pagar apenas por aproximados 3,3% do total da conta e que há mais vinte e nove pagantes. Logo, troca o simples pelo caro.

O problema é que quase todos nessa festa pensaram dessa forma, e isso foi pivô para que a conta total ficasse mais cara do que ficaria se cada um pagasse sua comanda individualmente. Talvez até mais cara do que se houvesse comandas separadas por mesas de três ou quatro pessoas, assim como no exemplo da refeição entre quatro amigos mencionada no início dessa introdução. Essa situação é apenas uma variante de um exemplo clássico em Teoria dos Jogos chamado *Tragédia dos Comuns* e ilustra situações em que os indivíduos envolvidos não consideram a possibilidade de um ganho maior com cooperação, por não serem racionais (BAERT, 1997; NOBREGA; KALKO, 2002).

Situações como essa permeiam o cotidiano do ser humano quando ele precisa tomar decisões ou escolher estratégias. Nesse cenário, surge o presente texto com a finalidade de tentar preencher lacunas presentes no ensino básico e referentes à pratica da racionalidade em tomadas de decisões. Ele se inicia com algumas classificações gerais de jogos e exemplos no primeiro capítulo.

Já o segundo tem a proposta de diferenciar jogos estáticos dos jogos sequenciais, além de trazer uma definição para *equilíbrio de Nash*, uma das ideias fundamentais dessa teoria. O capítulo seguinte traz um escopo centrado em jogos cooperativos e, a partir dessa situação, apresenta a definição da *solução de Nash*, cuja demonstração se encontra no apêndice desse trabalho. Além do mais, esse mesmo capítulo tem o propósito de mostrar uma maneira prática de se determinar essa solução.

O último capítulo é o de aplicações e sugestões de atividades praticáveis no Ensino Médio. Nele podem ser encontrados sete exemplos práticos cujos pré-requisitos se limitam ao conteúdo ofertado no ensino básico, além dos conceitos da Teoria dos Jogos aqui desenvolvidos. Espera-se que o presente material seja suficiente para motivar a antecipação do ensino da Teoria dos Jogos, permitindo sua inclusão no currículo do Ensino Médio de forma direta ou indireta. Além disso, o texto se encerra com sugestões de continuidade para que a difusão das principais ideias da teoria seja cada vez mais praticável.

1 Tipos de jogos

O propósito deste capítulo é exemplificar algumas classificações utilizadas em Teoria dos Jogos, além de mostrar a existência de inúmeras formas de se nomear um jogo. Inicialmente, devem-se considerar algumas características ao se classificar um jogo como, por exemplo, se há ou não simultaneidade na tomada de decisão pelos jogadores, se os participantes têm ou não interesses em comum, se as informações são ou não privilegiadas para alguém etc (FELICIANO et al., 2007; GIBBONS, 1992; NASCIMENTO, 2014).

- **Jogos estáticos ou estratégicos *versus* jogos dinâmicos ou sequenciais**

Alguns jogos acontecem a partir de decisões feitas ao mesmo tempo pelos jogadores ou, equivalentemente, um jogador toma uma decisão sem saber qual foi a decisão tomada pelo outro jogador, em um determinado momento ou rodada. Alguns exemplos de jogos passíveis dessa classificação são *Pedra, Papel e Tesoura*, *Par ou Ímpar*, e *Centavos Combinados*. Contudo, se essas escolhas não puderem ser realizadas ao mesmo tempo, caberá a cada jogador decidir sua estratégia desconhecendo as ações de seus oponentes, como no jogo *Dilema do Prisioneiro*, analisado no Capítulo 2.

Tal exigência é capaz de colocar as escolhas realizadas por cada um dos participantes no mesmo ponto temporal, em nível de jogo. Porém, isso não ocorre nos jogos em que a decisão tomada por um dos jogadores depende da decisão tomada pelo outro. Nos jogos sequenciais, um jogador toma sua decisão somente após conhecer e analisar a decisão tomada pelo outro. Essa característica dinâmica está presente em jogos como *Xadrez*, *Truco*, *Futebol*" e *Basquete*.

- **Soma zero *vesus* soma não-zero**

Nos jogos de *soma zero*, os ganhos conquistados por um dos jogadores representam, exatamente, as perdas do outro. Por essa razão, a soma entre ganhos de um e perdas do outro é sempre igual a zero no final de cada processo ou do próprio jogo. Assim, é interessante perceber que um jogador ganha exatamente o prejuízo do outro como, por exemplo, *Damas*, *Xadrez* e *Pedra, Papel e Tesoura*. Exemplificando, imagina-se que cada partida do *Pedra, Papel e Tesoura* seja equivalente a uma partida de *Xadrez*, e que vitória e derrota estejam associadas aos prêmios ou *pagamentos* 1 e -1, respectivamente. Somando-se esses valores opostos, obtém-se resultado zero. Em contraponto, os jogos de *soma não-zero* são caracterizados por resultados trazendo uma somatória diferente de zero, como a *Batalha dos Sexos* apresentada no Capítulo 3.

- **Jogos cooperativos *vesus* não cooperativos**

Duas diferenças básicas determinam se um jogo é cooperativo ou não cooperativo. A primeira é a vontade dos jogadores formarem ou não formarem coalizões ou subgrupos, a fim de aumentarem o lucro individual. A segunda diferença reside na possibilidade de comunicação prévia entre os participantes, visto que é difícil pensar na realização de alianças entre jogadores que não se comunicam entre si. Um exemplo palpável para se entenderem essas diferenças é o *Leilão da Moeda de Um Real*, disposto no Capítulo 3.

- **Informação perfeita *versus* informação imperfeita**

Essa classificação se baseia no critério de visibilidade das ações tomadas por cada jogador. Se essas estratégias são visíveis a todos os participantes, o jogo tem informação perfeita. Caso contrário, diz-se que o jogo é de informação imperfeita. Todo jogo estático é de informação imperfeita, visto que todas as ações tomadas por algum participante são realizadas sem o conhecimento dos adversários. Por outro lado, nem todo jogo de informação imperfeita será, necessariamente, um jogo estático.

Toma-se, como exemplo, o *Truco*, formado por jogadas sequenciais e, ao mesmo tempo, parcialmente desconhecidas entre os adversários. Comparando-se o *Truco* ao *Xadrez*, neste todas as peças disponíveis estão visíveis no tabuleiro e cada jogada é clara a ambos os participantes. Já naquele, as "peças" disponíveis são ocultas ao adversário, o que faz cada ação tomada por cada um dos jogadores ser uma surpresa ao oponente.

- **Informação completa *versus* informação incompleta**

Basicamente, o que diferencia um tipo do outro é o conhecimento comum a todos sobre o pagamento ou a recompensa obtidos em cada rodada ou ao final do jogo. Jogos em que essa recompensa é sabida por todos os participantes são classificados como de *informação completa*, ao contrário daquela situação de indecisão acerca do pagamento ou recompensa dados a algum participante.

Como exemplo, considera-se um jogo entre duas empresas concorrentes em um duopólio, e que o único produto ofertado por elas tenha opção de custo alto ou baixo em sua produção. Ainda, admite-se que uma empresa não sabe se o dispêndio da outra ao fabricar tal produto seja alto ou baixo. Dessa forma, uma empresa não tem certeza sobre os lucros da outra e, consequentemente, a modelagem matemática de pagamentos ou recompensas para esse jogo se enche de incertezas provenientes de falta de informação.

- **Simetria *versus* assimetria**

Observa-se um jogo entre vendedores e compradores de carros usados. Muito possivelmente, qualquer cenário possível nesse jogo será mais vantajoso para o vendedor. Esse é detentor de muito mais informações sobre o veículo a ser vendido do que o comprador. Em outras palavras, a informação foi distribuída naturalmente de forma assimétrica entre os participantes. Caso contrário, em que o cenário é composto por jogadores com exatamente as mesmas informações do jogo em cada etapa, tem-se o chamado *jogo simétrico*. Matematicamente, um jogo é simétrico se, e somente se, sua matriz de pagamentos for simétrica como no jogo *Dilema dos Prisioneiros*, abordado no 2. Caso contrário, o jogo será assimétrico (LUCCHESE; RIBEIRO, 2009).

É evidente que existem outras classificações para os jogos. Entretanto, as que foram apresentadas neste capítulo conseguem atender o propósito de mostrar a possibilidade de separação dos jogos em classes diferentes. No Capítulo 2, a proposta é discorrer sobre jogos estáticos e dinâmicos e introduzir a ideia matemática sobre recompensas ou pagamentos através da *função utilidade esperada*. Além disso, apresentar-se-á a definição matemática de *equilíbrio de Nash* como a melhor estratégia a ser adotada pelos jogadores. Finalmente, o Capítulo 2 apresentará mecanismos de como se determinar esse equilíbrio, caso exista.

2 Jogos Estáticos

Este capítulo traz, como ponto de partida, a apresentação de um exemplo elucidativo da Teoria dos Jogos. Em seguida, introduz conceitos e ferramentas necessários à formalização do estudo dos jogos estáticos como *função utilidade esperada*, *estratégias puras*, *estratégias mistas* e *equilíbrio de Nash*. O tipo de jogo intitulado por *dinâmico* será tratado de modo menos formal e mais direto, visto que a diferença básica entre *jogo estático* e *jogo dinâmico* é essencialmente a existência ou não de sequência na tomada de decisões, refletindo na modelagem da função utilidade. Sua abordagem será proposta diretamente, por meio de uma aplicação didática devidamente apresentada na Seção 3.5. Por fim, espera-se que os conceitos aqui analisados e desenvolvidos sejam capazes de subsidiar as aplicações didáticas inseridas no Capítulo 3.

O DILEMA DO PRISIONEIRO

O *Dilema do Prisioneiro* foi trazido pelo matemático canadense Albert William Tucker, na década de 50, na apresentação de um seminário para psicólogos na californiana Universidade de Stanford, nos Estados Unidos. Com o propósito de ilustrar certas dificuldades em tomadas de decisões, Albert apareceu com a seguinte situação descrita na Tabela 2.1 ou, provavelmente, uma variação dessa situação (BROM, 2012).

Dois suspeitos, *Jogador 1* e *Jogador 2*, são capturados e acusados de um mesmo crime. Existem provas suficientes para condenar ambos a uma pena mais branda, equivalente a um ano. Porém, a intenção dos juízes envolvidos é conseguir alguma confissão, para se resolver o caso de uma vez por todas e demonstrar a eficiência do sistema judiciário. Então, é feita uma mesma proposta a ambos os suspeitos.

"Se ambos confessarem o crime cometido em conjunto, ambos receberão pena de cinco anos na prisão. Mas, se apenas um fizer a delação do outro, o delator ganhará a liberdade e o delatado deverá ser condenado a dez anos de prisão - cinco pelo crime cometido mais cinco por obstrução de justiça. Finalmente, se ambos se recusarem a fornecerem maiores informações e não confessarem, nem delatarem, ambos serão condenados a um ano por um crime de pena mais branda."

Tabela 2.1: Pagamentos aos prisioneiros

		Jogador 2	
		Delatar/confessar	Negar
Jogador 1	Delatar/confessar	-5, -5	0, -10
	Negar	-10, 0	-1, -1

Fonte: Webb (2007) - Adaptado

Repara-se que a representação desse jogo foi realizada por meio de uma tabela, a Tabela 2.1, que traz as penas dos suspeitos em suas quatro entradas duplas. Em cada uma dessas entradas, o valor à esquerda representa a recompensa do *Jogador 1*, e o à direita, a do *Jogador 2* em cada decisão tomada. Por exemplo, na primeira linha (direção horizontal) e na primeira coluna (direção vertical), os valores são -5 e -5, representando que ambos seriam condenados a perderem cinco anos de suas vidas em uma cela se ambos optassem por confessar. Mas os valores da entrada na segunda linha e na primeira coluna são diferentes: -10 e 0, e representam a pena de dez anos de reclusão ao *Jogador 1* por negar o crime, e a recompensa, ao *Jogador 2*, de ser livre por confessar o crime e delatar o *Jogador 1*.

Lembrando algumas classificações realizadas no Capítulo 1, vale notar que a Tabela 2.1 representa uma matriz simétrica, visto que ela não se altera ao se trocarem os prisioneiros e suas respectivas penas de posição. Por isso, o *Dilema do Prisioneiro* poderia ser classificado como um jogo simétrico. Observa-se, também, que a impossibilidade de comunicação entre os jogadores remete à simultaneidade de tomadas de decisões, enquadrando o jogo na classificação de jogos estáticos. A Seção 2.1 aborda, em especial, jogos desse tipo, permeando algumas ideias e definições pertinentes a eles (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994; GIBBONS, 1992).

2.1 Jogos Estáticos

Também conhecido como "jogo em sua forma normal", um jogo estático (ou estratégico) é nada mais do que um modelo de jogo interativo em que cada participante escolhe seu plano de ação - ou conjunto de ações - apenas uma vez e simultaneamente com todos os outros jogadores. Caso essa simultaneidade seja difícil de ser estipulada, pelo menos a escolha do plano de ação feita pelo jogador deverá ser totalmente desconhecida pelos demais, fato esse que surtirá o mesmo efeito de simultaneidade procurado. Esse modelo deverá conter:

1. um conjunto finito N com n elementos - n sendo um número natural - abrigando todos os jogadores participantes. Nesse caso, pode-se enumerar os n jogadores de

1 até n e, consequentemente, o conjunto dos jogadores participantes será $N = \{1, 2, \ldots, n\}$;

2. um conjunto não vazio para cada jogador contendo todas as suas possíveis estratégias de jogo ou ações. Simbolicamente, para cada jogador pertencendo ao conjunto de participantes N, deve-se ter um conjunto não vazio A_i contendo todas as m_i ações ou estratégias disponíveis para ele. Em outras palavras, o jogador 1 possui o conjunto de ações $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m_1}\}$; o jogador 2, o conjunto $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m_2}\}$ e assim por diante, até o enésimo jogador (jogador n). Além disso, cada elemento do conjunto A_i é chamado de *estratégia pura* do jogador i. Disso, tem-se que o jogador 1 possui m_1 ações puras, o jogador 2, m_2 e assim por diante;

3. um conjunto A contendo todos os resultados possíveis decorrentes dos arranjos de todas as estratégias possíveis a cada jogador. Matematicamente, o conjunto A, chamado de *espaço de estratégias puras*, é constituído por todos os vetores da forma $a = (a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{nj_n})$, em que a_{ij_i} é qualquer uma das *estratégias puras* $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij_i}, \ldots, a_{im_i}$ para o jogador i. O vetor em questão é chamado de *perfil de estratégias puras*, *perfil de ação* ou, ainda, *resultado*;

4. uma maneira de se compararem os resultados ou dizer se um resultado é melhor, pior ou indiferente para cada jogador envolvido. Matematicamente, deverá haver uma relação de preferência $\succsim_i$ para cada jogador i definida sobre $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ou, resumidamente, $A = \times_{j \in N} A_j$. O conjunto N, o conjunto A e a relação de preferência $\succsim_i$ formam o *jogo* analisado e denotado, simbolicamente, por $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994; SARTINI et al., 2004).

Para fins didáticos, considere o *Dilema do Prisioneiro* apresentado. O jogo é estático, pois as decisões de ambos os jogadores deverão ser realizadas sem que um jogador conheça a decisão tomada pelo outro. Modelando esse exemplo em um jogo estático, pode-se escrever que $N = \{1, 2\}$, em que 1 representa o *Jogador 1* e 2 representa o *Jogador 2*. Além disso, podem-se identificar os perfis de estratégias puras como sendo $A_1 = \{Confessar, Negar\}$, para o *Jogador 1*, e $A_2 = \{Confessar, Negar\}$, para o *Jogador 2*.

Finalmente, as estratégias puras poderiam ser escritas como $a_{11} = Confessar$ e $a_{12} = Negar$ para o *Jogador 1*, bem como $a_{21} = Confessar$ e $a_{22} = Negar$ para o *Jogador 2*. Note que as ações puras são indexadas: a primeira entrada de cada índice representa o jogador (1 para *Jogador 1* e 2 para *Jogador 2*). A segunda entrada representa $Confessar$, se for igual a 1, ou $Negar$, se for igual a 2.

Consequentemente, o espaço de estratégias puras seria o conjunto de todos os arranjos de dois elementos, tomados dois a dois, e formados com as estratégias puras

$Confessar$ e $Negar$ para cada um dos dois jogadores. Matematicamente, o conjunto de estratégias puras $A = A_1 \times A_2$ poderia ser escrito como $A = \{(Confessar, Confessar), (Confessar, Negar), (Negar, Confessar), (Negar, Negar)\}$, sendo cada um dos quatro elementos dessa coleção um resultado possível para esse cenário. Além disso, como já mencionado, para cada resultado, o elemento da esquerda representa a decisão tomada pelo *Jogador 1* enquanto o da direita representa a estratégia tomada pelo *Jogador 2*. Exemplificando, o resultado $(Confessar, Negar)$ representa a situação em que o *Jogador 1* decidiu $Confessar$, enquanto o *Jogador 2* optou por $Negar$.

A Tabela 2.2 é equivalente à Tabela 2.1, mas vale a pena discorrer sobre mais algumas ideias em seu entorno.

Tabela 2.2: Valores para preferências

		Jogador 2	
		Confessar	Negar
Jogador 1	Confessar	-5, -5	0, -10
	Negar	-10, 0	-1, -1

Fonte: Webb (2007) - Adaptado

Como observado anteriormente, cada uma das quatro entradas da Tabela 2.2 traz dois valores: o da esquerda, representando o ganho do *Jogador 1*, e o da direita, representando o do *Jogador 2*. O que deve ser relevante, no momento, é que esses ganhos podem ser representados por números reais, cada um deles associado a um possível resultado. Isto é, os resultados $(Confessar, Confessar)$, $(Confessar, Negar)$, $(Negar, Confessar)$ e $(Negar, Negar)$ podem ser medidos e comparados para que as decisões sejam devidamente estudadas. Retomando o conceito de *relação de preferência* do jogador i ($\succsim_i$), ao invés de dizer que o *Jogador 1* prefere $(Confessar, Confessar)$ a $(Negar, Confessar)$, porque esse segundo resultado o deixaria cinco anos a mais encarcerado, pode-se escrever simbolicamente

$$(Confessar, Confessar) \succsim_1 (Negar, Confessar).$$

O símbolo $\succsim_1$ representa que o *Jogador 1* ou considera *indiferentes* os resultados $(Confessar, Confessar)$ e $(Negar, Confessar)$, ou prefere certamente o resultado $(Confessar, Confessar)$ ao $(Negar, Confessar)$. Na realidade, poderia até se escrever

$$(Confessar, Confessar) \succ_1 (Negar, Confessar)$$

representando que a preferência do *Jogador 1* pelo resultado $(Confessar, Confessar)$ é *estrita* e que não há, pois, tal indiferença. Em outras palavras, a relação de preferência $\succ_i$ é uma particularização ou restrição da relação $\succsim_i$, para o jogador i.

A certeza da preferência para cada jogador só foi possível porque os números dispostos na Tabela 2.2 são dignos de comparações e *ordenações*. Nesse sentido, torna-se viável a introdução de um novo conceito representando a noção de preferência já apresentada. A ideia de *função utilidade* será devidamente discutida na Seção 2.2 e deverá ser um prelúdio à *função utilidade esperada* posteriormente utilizada na demonstração da *solução de Nash* e em estratégias mistas.

2.2 Função utilidade

Como foi visto no problema *O Dilema do Prisioneiro*, a comparação dos resultados possíveis é essencial na tomada racional de decisões. A princípio, comparar é medir de forma direta ou indireta e, para isso ocorrer, deve-se estabelecer uma relação entre o conjunto de todos os resultados possíveis e um conjunto numérico abrangente o suficiente. Disso, surge a *função utilidade* associando uma medida ou um número real a cada resultado possível do espaço de estratégias: o conjunto A.

Retomando o exemplo *O Dilema do Prisioneiro* e observando a Tabela 2.2, pode-se introduzir uma função associando cada resultado possível a um valor numérico. Matematicamente, a função u_1 representaria os ganhos do *Jogador 1*, associando apenas um de quatro valores a cada resultado obtido no jogo: 0,-1, -5 ou -10. De forma inteiramente análoga, os pagamentos ao *Jogador 2* poderia ser representado matematicamente pela função u_2. Assim, tem-se para o *Jogador 1*:

- $u_1(Confessar, Confessar) = -5$,
- $u_1(Confessar, Negar) = 0$,
- $u_1(Negar, Confessar) = -10$,
- $u_1(Negar, Negar) = -1$;

e, para o *Jogador 2*:

- $u_2(Confessar, Confessar) = -5$,
- $u_2(Confessar, Negar) = -10$,
- $u_2(Negar, Confessar) = 0$,
- $u_2(Negar, Negar) = -1$.

Nessa perspectiva, a relação $(Confessar, Confessar) \succ_1 (Negar, Confessar)$ se transforma na ordenação $u_1(Confessar, Confessar) > u_1(Negar, Confessar)$, pois a comparação realizada agora é numérica e, portanto, passível de receber a relação de ordem "$>$". *O Dilema do Prisioneiro* se transforma, pois, no jogo $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$, em que $N = \{1, 2\}$, $A_1 = \{Confessar, Negar\}$, $A_2 = \{Confessar, Negar\}$, e u_i como determinado anteriormente, para cada um dos jogadores.

Portanto, a *função utilidade* para cada jogador será definida como uma relação que, *a cada resultado obtido do espaço de estratégias puras, associa uma única medida ou valor numérico.* Essa relação deverá preservar as preferências do jogador, isto é, se o jogador prefere um resultado a outro, então o resultado preferido deverá ser associado a uma medida numérica maior. Mais precisamente, uma *função utilidade* é uma função

$$u : A \to \mathbb{R}$$

satisfazendo, para cada jogador i e quaisquer resultados x e y pertencentes ao espaço de estratégias A, a equivalência

$$u_i(x) \geq u_i(y) \Leftrightarrow x \succsim_i y.$$

Os valores de u_i podem ser chamados de *pagamentos, ganhos* ou até *utilidades* para o jogador i. Fazendo uma abordagem semelhante àquela realizada no início da Seção 2.1, um jogo em que os participantes são elementos do conjunto N e que possua uma função u_i bem definida sobre o espaço de ações $A = A_1 \times A_2 \times \ldots, \times A_n$, para cada jogador i, agora poderia ser representado por $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$, em vez de $\langle N, (A_i), (\succsim_i)\rangle$ (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994).

Essa seção teve a intenção de apresentar uma noção sobre como mensurar e comparar os resultados de um jogo. Além disso, foram levantados conceitos exemplificados e seguidos por formalização matemática. Prezando pela sequência didática, a Seção 2.3 irá trazer uma das ideias norteadoras da Teoria dos Jogos, centrada na busca racional por resultados ótimos a cada jogador envolvido e na determinação matemática dos melhores resultados possíveis de um jogo - o *equilíbrio de Nash.*

2.3 O equilíbrio de Nash em jogos estáticos

O intuito desta seção é abordar a definição e exemplos de aplicações do *equilíbrio de Nash.* Para tanto, considere uma situação bem simples de um jogo em que há dois jogadores envolvidos, o *Jogador 1* e o *Jogador 2.* Supõe-se que o *Jogador 1* tenha que escolher entre jogar *Acima* ou *Abaixo*, enquanto o *Jogador 2* escolhe entre jogar *Esquerda,* *Meio* ou *Direita*. Assim, o conjunto de todos os participantes é dado por N={*Jogador 1*, *Jogador 2*} e os conjuntos de ações disponíveis para cada um dos dois jogadores são $A_1 = \{Acima, Abaixo\}$ e $A_2 = \{Esquerda, Meio, Direita\}$. Sem muitas preocupações, no momento, com a modelagem e determinação de uma possível função utilidade para esse jogo, considere a Tabela 2.3, em que cada entrada é formada por dois valores. O da esquerda é referente aos ganhos do *Jogador 1* e o da direita, do *Jogador 2*.

Tabela 2.3: Direções e Sentidos

		Jogador 2		
		Esquerda	Meio	Direita
Jogador 1	Acima	1, 0	1, 2	0, 1
	Abaixo	0, 3	0, 1	2, 0

Fonte: Gibbons (1992)

De acordo com a Tabela 2.3, observa-se, por exemplo, que o *Jogador 1* pode ter um ganho igual a *nada*, se sua escolha for *Abaixo* e a de seu oponente não for *Direita*, ou se sua escolha for *Acima* e a de seu oponente, *Direita*. Nota-se, também, que o maior ganho ao *Jogador 1* ocorre quando o resultado é $(Abaixo, Direita)$. Uma análise totalmente semelhante pode ser realizada sobre o *Jogador 2* mas, o mais importante é recordar que, em cada uma das seis entradas duplas, o valor da esquerda corresponde ao ganho do *Jogador 1* e o da direita, ao do *Jogador 2*, assim como na Tabela 2.2 já estudada.

Em outras palavras, a intenção na abordagem da Tabela 2.3 não é discutir a modelagem desse jogo mediante uma função utilidade, mas levantar hipóteses e estratégias para se descobrirem resultados ótimos para ambos os jogadores, considerando-se a existência ou formulação prévia de tal função. O processo a ser utilizado, capaz de traçar caminhos para os resultados ótimos procurados, é chamado de *eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas* e será o assunto principal no tópico intitulado de *estratégias estritamente dominadas*.

ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS

Para se determinar o resultado do jogo trazendo maior pagamento individual a ambos, será adotado o procedimento já mencionado, chamado de *eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas*. Esse método consiste na busca pelas melhores estratégias a um jogador, independentemente da estratégia adotada pelos seus adversários, por meio da eliminação iterada ou repetida de suas piores ações. Equivalentemente, determinam-se, em sequência e repetidamente, as estratégias que minimizam os pagamentos de um jogador sem depender das ações de seus oponentes, eliminando-as em seguida. As estratégias que sobram serão suas melhores.

Exemplificando esse procedimento em duas etapas, tem-se a escolha arbitrária de um dos jogadores como primeiro passo a ser executado. Em seguida, observa-se se há alguma estratégia sua pior que outra, também sua, independendo de qualquer artimanha tomada por seu oponente. Entende-se, por piores estratégias, aquelas que sempre levam a pagamentos ou recompensas individuais menores, independente da ação tomada pelo adversário. Essas estratégias recebem o nome de *estratégias estritamente dominadas*.

Havendo esse tipo de estratégia, uma nova situação ou tabela deve ser construída, suprimindo ou *eliminando-a* e os possíveis resultados atrelados a ela. Essa segunda etapa será capaz de garantir que, se houver eliminação de estratégias, elas serão sempre as piores - ou dominadas pelas outras. Daí em diante, o mesmo processo é realizado novamente, porém dentro de um contexto mais restrito e com uma tática a menos para ser analisada.

Caso não seja possível, na segunda etapa, encontrar uma estratégia "descartável" por ser a pior, o jogador analisado é trocado pelo outro jogador e o processo se reinicia de forma idêntica, em busca de estratégias estritamente dominadas para esse outro personagem. Para facilitar o entendimento desse método de eliminação, tome o exemplo da Tabela 2.3. Primeiro, escolhe-se aleatoriamente um jogador. Supondo que ele seja o *Jogador 1*, percebe-se que:

- $(Abaixo, Esquerda)$ e $(Abaixo, Meio)$ trazem pagamentos menores - zero unidade - que $(Acima, Esquerda)$ e $(Acima, Meio)$ - uma unidade. Porém, há uma inversão quando se trata da estratégia *Direita* adotada pelo oponente: $(Abaixo, Direita)$ paga melhor que $(Acima, Direita)$. Disso, não dá para eliminar a ação *Abaixo* do *Jogador 1*;

- raciocínio análogo pode ser empregado na discussão sobre a estratégia *Acima* também não ser passível de eliminação.

Por outro lado, analisando-se os pagamentos ao *Jogador 2*, fica evidente que sua estratégia *Direita* é estritamente dominada pela *Meio*, pois os pagamentos da ação *Meio* são estritamente maiores que os da *Direita*. Detalhando:

- $u_2(Acima, \textbf{Direita}) < u_2(Acima, \textbf{Meio})$, porque $u_2(Acima, \textbf{Direita}) = 1$ e $u_2(Acima, \textbf{Meio}) = 2$;

- $u_2(Abaixo, \textbf{Direita}) < u_2(Abaixo, \textbf{Meio})$, porque $u_2(Abaixo, \textbf{Direita}) = 0$ e $u_2(Abaixo, \textbf{Meio}) = 1$.

Nota-se, pois, que a estratégia *Direita* só traz desvantagens ao *Jogador 2* quando comparada à $Meio$, em termos de recompensas e, justamente por isso, enquadra-se na terminologia *estritamente dominada*, devendo ser eliminada. Tem-se uma nova situação descrita na Tabela 2.4, resultante da supressão da coluna da direita, antes presente na Tabela 2.3 e correspondente à estratégia eliminada.

Tabela 2.4: Eliminação I

			Jogador 2
		Esquerda	Meio
Jogador 1	Acima	1, 0	1, 2
	Abaixo	0, 3	0, 1

Fonte: Gibbons (1992)

Como ambos os jogadores querem maximizar seus pagamentos, o *Jogador 1* também analisa esse contexto e conclui, juntamente com o *Jogador 2*, que a Tabela 2.4 é a que está em jogo de fato. Em outras palavras, o *Jogador 1*, que é racional e está ciente que seu oponente também o é, tem a certeza de que o *Jogador 2* irá *eliminar* a terceira coluna desse jogo e ficar apenas com as outras opções. Com isso, a análise do jogo pelos participantes se reduz a uma tabela de ordem dois por dois (duas linhas por duas colunas), em contraponto com a tabela inicial de ordem dois por três (duas linhas e três colunas).

Repetindo o processo de eliminação realizado anteriormente, repara-se que, para o *Jogador 1*, a estratégia estritamente dominada é *Abaixo*, pelos mesmos argumentos detectados na primeira parte da eliminação. Isso gera um novo cenário devidamente representado na Tabela 2.5. Finalizando o raciocínio para o jogador restante, ou seja, o *Jogador 2* (o *Jogador 1* tem agora apenas uma estratégia sobrando - a *Acima*), enxerga-se facilmente que a estratégia estritamente dominada é *Esquerda* e, portanto, o jogo foi reduzido a apenas um resultado ótimo: *(1,2)*, na Tabela 2.6

Tabela 2.5: Eliminação II

			Jogador 2
		Esquerda	Meio
Jogador 1	Acima	1, 0	1, 2

Fonte: Gibbons (1992)

Tabela 2.6: Eliminação III

		Jogador 2
		Meio
Jogador 1	Acima	1, 2

Fonte: Gibbons (1992)

Nesse caso, o resultado $(Acima, Meio)$ apresenta a melhor resposta ou o melhor pagamento para ambos os jogadores quando comparado aos demais perfis, recebendo o nome de *equilíbrio de Nash*. Esse resultado representando o equilíbrio costuma ser marcado com asterisco em cada estratégia pura: $(Acima^{*}, Meio^{*})$. Tal perfil é especialmente o procurado porque é o único capaz de trazer o melhor pagamento individual a ambos, quando comparado com os outros pagamentos.

Além disso, supondo-se que ambos os jogadores são racionais e ambos têm essa percepção, é esperado que um jogador analise suas melhores decisões partindo do princípio de que o outro irá fazer a sua melhor escolha. Ou seja, o *Jogador 1* espera que seu adversário escolha a ação $Meio$ e poderá comparar suas estratégias partindo dessa premissa. O mesmo é válido para o *Jogador 2*; ele está ciente de que seu oponente irá decidir pela opção *Acima*.

Comparando o resultado ótimo obtido, isto é, o *equilíbrio de Nash*, com os outros possíveis nesse contexto racional, surgem algumas considerações realizadas a cada um dos jogadores. Elas irão concluir, de forma numérica, que a resposta encontrada no processo iterativo realizado é a melhor. Primeiramente, em relação ao *Jogador 1*, tem-se:

- $u_1(\mathit{Acima}^*, Meio^*) \geq u_1(\mathit{Abaixo}, Meio^*)$, pois $1 \geq 0$.

Analogamente, para o *Jogador 2* se tem:

- $u_2(\mathit{Acima}^*, Meio^*) \geq u_2(\mathit{Acima}^*, Esquerda)$, pois $2 \geq 0$;
- $u_2(\mathit{Acima}^*, Meio^*) \geq u_2(\mathit{Acima}^*, Direita)$, pois $1 \geq 1$.

Voltando ao exemplo do *Dilema do Prisioneiro*, ao se aplicar o processo de eliminação de estratégias estritamente dominadas, observa-se inicialmente que, para o *Jogador 1*, a estratégia $Negar$ é estritamente dominada pela $Confessar$ pois, caso seu oponente escolha $confessar$, o *Jogador 1* tem maior pagamento com $Confessar$ $(-5 > -10)$. Caso a escolha do *Jogador 2* seja $Negar$, o *Jogador 1* continua tenho um melhor pagamento com $Confessar$ $(0 > -1)$. A Tabela 2.7 representa a primeira eliminação referente à linha $Negar$. Em sequência, a Tabela 2.8 mostra o processo em sua fase final, sendo o *equilíbrio de Nash* o único resultado que sobrou: $(Confessar, Confessar)$.

Tabela 2.7: Iteração I - Dilema dos Prisioneiros

		Jogador 2	
		Confessar	Negar
Jogador 1	Confessar	-5, -5	0, -10
	X	X	X

Fonte: Própria (2018)

Tabela 2.8: Iteração II - Dilema dos Prisioneiros

		Jogador 2	
		Confessar	X
Jogador 1	Confessar	-5, -5	X
	X	X	X

Fonte: Própria (2018)

O próximo passo é generalizar os resultados obtidos em ambos os exemplos. Para isso, tome novamente o exemplo de equilíbrio proposto na Tabela 2.9. Tem-se que o par com *"overline"* representa o resultado $(Acima^*, Meio^*)$ como o equilíbrio e, muitas vezes, quando se trata de generalizações, é mais conveniente seguir o conjunto de notações:

- $(Acima^*, Meio^*) = (Acima_1^*, Acima_{-1}^*)$, para representar o equilíbrio sob a perspectiva do *Jogador 1*. Ou seja, $Acima_1^*$ representa a ação ótima para o *Jogador 1* e $Acima_{-1}^*$ representa todo o conjunto de ações ótimas para todos os demais jogadores - no caso, a ação $Meio^*$ para o *Jogador 2*;

- $(Acima^*, Meio^*) = (Meio_2^*, Meio_{-2}^*)$, para representar o equilíbrio sob a perspectiva do *Jogador 2*, com argumentação semelhante à do item anterior.

Tabela 2.9: Direções e Sentidos - Equilíbrio

		Jogador 2		
		Esquerda	Meio	Direita
Jogador 1	Acima	1, 0	$\overline{1}, \overline{2}$	0, 1
	Abaixo	0, 3	0, 1	2, 0

Fonte: Gibbons (1992)

EQUILÍBRIO DE NASH E ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS - FORMALIZAÇÃO

Genericamente, considere um jogo com n participantes, cada qual com seu conjunto A_i de ações adotáveis e uma função utilidade definida u_i, ou seja, $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$. Para cada jogador i, imagine que o resultado representando o *equilíbrio de Nash* seja

$$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_i^*, a_{i+1}^*, \ldots, a_n^*)$$

e que, conforme o exemplo trabalhado na Tabela 2.9, possa ser reescrito na forma compacta

$$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_i^*, a_{i+1}^*, \ldots, a_n^*) = (a_i^*, a_{-i}^*).$$

Finalmente, imagine que a notação (a_i, a^*_{-i}) represente **algum** resultado obtido ao se fixarem as melhores ações tomadas por todos os jogadores, exceto pelo jogador i. Exemplificando, ainda na Tabela 2.9 se pode perceber que, para o *Jogador 2*, (a_2, a^*_{-2}) poderia ser $(Esquerda, Acima^*)$, ou $(Direita, Acima^*)$. Matematicamente, o resultado (a^*_i, a^*_{-i}) é um *equilíbrio de Nash* se, e somente se, satisfizer

$$u_i(a^*_i, a^*_{-i}) \geq u_i(a_i, a^*_{-i}),$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ e toda ação pura a_i pertencente a A_i (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994).

Ainda na proposta generalizadora do jogo $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$, considere duas possíveis estratégias a serem tomadas pelo jogador i, a_i e $\overline{a}_i$. Equivalentemente, tanto a_i quanto $\overline{a}_i$ pertencem ao conjunto de estratégias puras do jogador i, A_i. Diz-se que a estratégia a_i é estritamente dominada pela estratégia $\overline{a}_i$ sempre que o pagamento ao jogador i, por jogar a ação a_i, for estritamente menor que o pagamento ao mesmo jogador, por jogar $\overline{a}_i$, **independente das estratégias adotadas pelos demais participantes**. Simbolicamente, a_i é estritamente dominada por $\overline{a}_i$ se, e somente se, para qualquer arranjo de estratégias $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ dos demais jogadores for verdadeira a desigualdade estrita

$$u_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) < u_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, \overline{a}_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

(GIBBONS, 1992).

Nota-se que quando existem estratégias estritamente dominadas em um jogo de dois participantes, a determinação de seu equilíbrio é possível. A seção 2.4 incita um contexto um pouco adverso, em que não há tal dominância estrita. Para se analisar essa situação, será necessária a introdução de um novo conceito calcado na *incerteza* sobre as estratégias passíveis de serem tomadas por algum jogador, as chamadas *estratégias mistas*.

2.4 Equilíbrio de Nash em estratégias mistas

A presente seção tem a finalidade de apresentar uma classe mais ampla de estratégias do que a analisada até o momento. Ao seu final, deverá ficar clara a ideia de *equilíbrio de Nash* em estratégias mistas desenvolvida por meio de exemplos contendo gráficos e tabelas. Também deverão ser notadas algumas condições axiomáticas garantindo a devida inclusão de incertezas na contabilização dos pagamentos, nesse caso, conhecidos como *utilidades esperadas*.

CARA OU COROA

O jogo *Cara ou Coroa*, também chamado de *Centavos Combinados*, é formado por apenas uma rodada e por dois jogadores. Cada um deles escolhe cara ou coroa secretamente, revelando sua escolha simultaneamente com o outro jogador, em algum momento previamente determinado. Se as escolhas forem diferentes (um escolheu cara e, o outro, coroa), o *Jogador 1* paga um real ao *Jogador 2*. Caso contrário, (ambos cara ou ambos coroa), o *Jogador 2* paga um real para o *Jogador 1*.

Tabela 2.10: Centavos Combinados

		Jogador 2	
		Cara	Coroa
Jogador 1	Cara	1, -1	-1, 1
	Coroa	-1, 1	1, -1

Fonte: Gibbons (1992)

A Tabela 2.10 ilustra os ganhos de cada jogador. Como nas demais tabelas já abordadas até aqui, o primeiro valor, em cada uma das quatro entradas duplas, representa a recompensa ao *Jogador 1* em cada um dos quatro resultados possíveis. De forma semelhante, o segundo valor em cada entrada é representante do pagamento realizado ao *Jogador 2*, em cada resultado possível.

O objetivo é procurar a existência de algum possível *equilíbrio de Nash*, recorrendo à ideia formada sobre estratégias estritamente dominadas. Analisando, primeiramente, os ganhos do *Jogador 1* para cada estratégia adotada pelo *Jogador 2*, tem-se que, como visto na Seção 2.3:

- caso o *Jogador 2* escolha *Cara*, a melhor resposta para o *Jogador 1* é *Cara*;
- caso o *Jogador 2* escolha *Coroa*, o *Jogador 1* otimiza seu ganho escolhendo *Coroa*.

Tabela 2.11: Preferências do Jogador 1 com ‘underline’

		Jogador 2	
		Cara	Coroa
Jogador 1	Cara	$\underline{1}$, -1	-1, 1
	Coroa	-1, 1	$\underline{1}$, -1

Fonte: Gibbons (1992) - Adaptado.

Analogamente, para o outro jogador, tem-se a seguinte análise:

- caso o *Jogador 1* escolha *Cara*, o *Jogador 2* otimiza seu ganho escolhendo *Coroa*;

- caso o *Jogador 1* escolha *Coroa*, a melhor resposta ao *Jogador 2* é *Cara*.

Tabela 2.12: Preferências do Jogador 2 com 'overline'

		Jogador 2	
		Cara	Coroa
Jogador 1	Cara	$\underline{1}$, -1	-1, $\overline{1}$
	Coroa	-1, $\overline{1}$	$\underline{1}$, -1

Fonte: Gibbons (1992) - Adaptado.

Recordando a noção de equilíbrio apresentada na Seção 2.3 e tendo a ideia clara de que não há algum par de resultados obtidos na Tabela 2.4 satisfazendo tal noção, percebe-se que o jogo aqui apresentado não possui, nessas condições, *equilíbrio de Nash.* E isso faz ser levantada uma questão: sempre existe o equilíbrio? A resposta, a princípio, seria não. Note que esse jogo se enquadra na classificação *"jogos de soma zero"*. Jogos desse tipo, ou ainda de outra forma, jogos em que um jogador deve antecipar ou adivinhar a estratégia adotada pelo outro para que sua ação seja a melhor resposta possível não possuem o equilíbrio da maneira em que foi apresentado.

Isso porque, na hora de se analisarem as ações do *Jogador j* para se determinarem as melhores respostas do *Jogador i*, percebe-se a incerteza sobre a atitude tomada por um jogador interferindo na determinação da melhor resposta para o outro. Na intenção de se estender a definição realizada na Seção 2.3 de forma que essa mão do acaso esteja incluída, o próximo passo deve ser o entendimento sobre uma nova forma de se pensar em estratégias casuais: as estratégias mistas.

ESTRATÉGIAS PURAS *VERSUS* ESTRATÉGIAS MISTAS

Até o presente momento, foram trabalhadas situações envolvendo etapas nas quais estão claras as medidas racionais a serem tomadas e as ações a serem eliminadas, por cada jogador. O exemplo na Tabela 2.13 ilustrou a proposta de estratégias estritamente dominadas quando houve eliminação da estratégia *Direita*. Portanto, não faz sentido pensar em aleatoriedade da escolha de ações pelos jogadores, pois, supondo-os racionais na preferência por resultados individuais ótimos, ambos os participantes têm *certeza* de que essa tática será descartada, por exemplo. Então, cada uma das estratégias *Acima* ou *Abaixo*, do *Jogador 1*, e *Esquerda*, *Meio* ou *Direita*, do *Jogador 2* recebem o nome de *estratégias puras*, não havendo um cenário probabilístico.

Tabela 2.13: Estratégias no Determinismo

		Jogador 2	
		Esquerda	Meio
Jogador 1	Acima	1, 0	1, 2
	Abaixo	0, 3	0, 1

Fonte: Gibbons (1992)

Por outro lado, como mencionado na Tabela 2.14, ao serem analisados os possíveis movimentos do *Jogador 2* pelo *Jogador 1*, por exemplo, surgem indeterminações. Imagina-se que esse jogador considere *provável* que aquele jogador analisado escolha a estratégia *Cara* com uma probabilidade igual 30%, ou $0,3$; e *Coroa* com probabilidade igual ao restante para cem porcento, ou seja $0,7$. Surge, pois, a crença de que o jogador deverá escolher uma ou outra, obedecendo a uma proporção ou probabilidade. Por isso, é esperado que o pagamento a um jogador seja uma ponderação de suas estratégias puras *misturadas*: sobressaltar-se-á aquele pagamento atrelado à ação mais provável de ser escolhida.

De forma mais ampla, o *Jogador 2*, ao analisar os movimentos possíveis do *Jogador 1*, acha provável que esse jogador prefira $Cara$ com probabilidade igual a r e, consequentemente, $Coroa$ com probabilidade igual a $1 - r$. Também supõe-se que o *Jogador 1*, ao analisar seu oponente, acredita que ele escolha $Cara$ com probabilidade q e $Coroa$ com probabilidade $1-q$. Com probabilidade em jogo, as distribuições probabilísticas $(r, 1-r)$ e $(q, 1-q)$ representam as *estratégias mistas* do *Jogador 1* e do *Jogador 2*, nessa ordem. Elas estão relacionadas na Tabela 2.14.

Tabela 2.14: Incertezas em Cara ou Coroa

		Jogador 2	
		Cara (q)	Coroa ($1-q$)
Jogador 1	Cara (r)	1, -1	-1, 1
	Coroa ($1-r$)	-1, 1	1, -1

Fonte: Própria (2018)

Com intenção de se calcularem os pagamentos devidos a cada jogador, tomando as probabilidades como *pesos*, surgem dois conceitos necessários ao prosseguimento desse estudo: *loteria* e *utilidade esperada*.

LOTERIA

Sabe-se que nos *centavos combinados* existem quatro resultados possíveis: *(Cara, Cara)*, *(Cara,Coroa)* etc. Supõe-se que o $(Cara, Cara)$ ocorra com probabilidade de trinta porcento, o $(Cara, Coroa)$ com chances de vinte porcento, e os $(Coroa, Cara)$ e $(Coroa, Coroa)$ com chances iguais a vinte e cinco porcento cada. Tem-se, portanto, a *loteria simples* $L = (0.3, 0.2, 0.25, 0, 25)$. Entretanto, se as probabilidades de ocorrerem os mesmos quatro resultados forem diferentes, como dez, vinte trinta e quarenta porcento, ter-se-ia outra *loteria simples*, $L' = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$.

Nota-se, também, que há muitas (infinitas) loterias desse tipo e que é possível fazer composições com várias delas. Por exemplo, a *loteria composta* $(L, L'; 0.2, 0.8)$ mistura as duas *loterias simples*, L e L', com pesos iguais a vinte e oitenta porcento, respectivamente. Essa *loteria composta* seria equivalente a $0,2L + 0,8L'$:

$$(0.06, 0.04, 0.05, 0.05) + (0.08, 0.16, 0.24, 0.32) = (0.14, 0.2, 0.29, 0.37),$$

ou seja, a ocorrência de $(Cara, Cara)$ com quatorze porcento; $(Cara, Coroa)$, com vinte porcento; $(Coroa, Cara)$ com vinte e nove porcento e $(Coroa, Coroa)$ com trinte e sete porcento. Em outras palavras, a *loteria composta* pelas *loterias simples* L e L', ou seja, a composta $(L, L'; 0.2, 0.8)$ e a simples reduzida $(0.14, 0.2, 0.29, 0.37)$ apresentam as mesmas probabilidades sobre os resultados finais para esse jogo. Feita essa abordagem sobre loterias, é possível definir a *função utilidade esperada* e determinar os pagamentos em estratégias mistas (CUSINATO, 2003).

UTILIDADE ESPERADA

Uma função é dita *utilidade esperada* se satisfaz os quatro axiomas de *von Neumann Morgenstern*: consequencialismo, racionalidade, continuidade e independência. Em um jogo, o axioma do *consequencialismo* diz que o tomador de decisões deve ser indiferente a loterias determinando as mesmas chances de ocorrência dos resultados finais possíveis, que foi exemplificado em $LOTERIA$.

- *Consequencialismo.* Se L é a loteria reduzida da loteria composta $(L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, com $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, então $L \sim (L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. O símbolo $\sim$ representa *similaridade* ou *indiferença* entre as duas loterias.

O axioma da racionalidade diz que, entre duas loterias, uma é preferível (ou pelo menos indiferente) à outra, propriedade conhecida como completude. Além disso, não há preferências circulares, ou seja, vale a transitividade de preferências a loterias.

- *Racionalidade.* Para quaisquer loterias L e L', ou $L \succsim L'$ ou $L' \succsim L$. Além disso, se $L \succsim L'$ e $L' \succsim L''$, então $L \succsim L''$.

O terceiro axioma, o da continuidade arquimediana, defende que uma modificação suficientemente pequena na distribuição das probabilidades não afeta a ordem das preferências.

- *Continuidade Arquimediana.* Dados L, L' e L'' tais que $L \succsim L' \succsim L''$, existem reais entre zero e um, $\alpha, \beta \in (0,1)$ de sorte que seja válida a relação $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim L' \succsim \beta L + (1-\beta)L''$.

O último axioma garante que, caso um jogador prefira uma loteria L a uma outra L', então a mistura de uma terceira loteria L'' com L continuará sendo preferível à mistura de L'' com L', mantendo-se as mesmas chances de cada uma das duas misturas ocorrer.

- *Independência.* Considere as loterias L, L' e L''. Se $L \succsim L'$, então para qualquer $\alpha \in (0,1)$ e qualquer L'', deve valer $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$.

É válido ressaltar a importância da imposição desses axiomas. São eles que garantem duas propriedades bem funcionais de uma função utilidade: a linearidade, em relação às probabilidades, e a separabilidade, em relação aos resultados das ações dos jogadores. Matematicamente, se x_1 e x_2 são possíveis resultados com chances de ocorrência iguais a p_1 e p_2, respectivamente - ou seja, a loteria correspondente é $L = (x_1, x_2; p_1, p_2)$, com $p_1 + p_2 = 1$ - e u_i é a função utilidade esperada do *Jogador i*, então os quatro axiomas de *von Neumann Morgenstern* garantem que:

$$u_i(x_1, x_2; p_1, p_2) = p_1 \cdot u_i(x_1) + p_2 \cdot u_i(x_2).$$

O próximo passo é abordar um contexto mais palpável sobre essas propriedades da utilidade esperada e, por meio delas, traçar caminhos na procura de algum *equilíbrio de Nash.* Voltando ao *Cara ou Coroa* e iniciando uma análise sob a perspectiva de um jogador arbitrário, supõe-se, por praticidade, que o *Jogador 1* acredite que o *Jogador 2* tenha probabilidade igual a q de escolher *Cara* e, consequentemente, probabilidade igual a $1-q$ de escolher *Coroa.*

Em outras palavras, o *Jogador 1* acredita que seu adversário irá jogar a estratégia mista $p_2 = (q, 1-q)$. Então, modelando a situação com uma função utilidade esperada, u_i, é possível contabilizar os pagamentos, por exemplo, ao *Jogador 1*, usando as propriedades de linearidade e separabilidade. Para facilitar a análise dos pagamentos, os resultados genéricos serão repartidos em duas situações complementares.

Na primeira, os cálculos realizados envolvendo incertezas sobre a ação tomada pelo *Jogador 2*, matematicamente representadas pela distribuição p_2 já mencionada, permearão um cenário fictício em que o *Jogador 1* tenha escolhido a ação *Cara*. Em contraposição, na segunda abordagem, o cenário é originado pela ação *Coroa*. Após se realizarem as análises em ambientes separados e através dos olhos do *Jogador 1*, análise semelhante será realizada na perspectiva do *Jogador 2.*

A grande intenção por trás de tudo isso é determinar a melhor resposta de um jogador, em relação ao outro, ambos imersos no acaso representado pelas mistas $p_1 = (r, 1-r)$ e $p_2 = (q, 1-q)$, do *Jogador 1* e do *Jogador 2*, nessa ordem. Portanto, na busca pelo o *equilíbrio de Nash*, os cálculos dos pagamentos ao *Jogador 1*, caso jogue *Cara* ou *Coroa*, usando e abusando das propriedades das utilidades esperadas, poderiam ser:

- $u_1(Cara, Cara; 1, p_2) = u_1(Cara, Cara; 1, q) = u_1(Cara, q \cdot Cara + (1-q) \cdot Coroa) = q \cdot u_1(Cara, Cara) + (1-q) \cdot u_1(Cara, Coroa) = q \cdot 1 + (1-q) \cdot (-1) = 2q - 1$, caso jogue *Cara*. Nessa notação, as quatro entradas da função u_1 podem ser interpretadas como: *Jogador 1* escolhendo *Cara* com 100% de chance (por isso o valor 1 após ponto e vírgula), e o *Jogador 2* escolhendo *Cara* de acordo com a distribuição p_2; isto é, *Cara* com chance de q e *Coroa*, com de $1 - q$;

- $u_1(Coroa, Cara; 1, p_2) = u_1(Coroa, Cara; 1, q) = u_1(Coroa, q \cdot Cara + (1-q) \cdot Coroa) = q \cdot u_1(Coroa, Cara) + (1-q) \cdot u_1(Coroa, Coroa) = q \cdot (-1) + (1-q) \cdot 1 = 1 - 2q$, caso jogue *Coroa*. Aplique argumentação equivalente ao do item anterior, para as quatro entradas da utilidade esperada.

Observa-se que as notações utilizadas na computação dos pagamentos estão dispostas de forma reduzida. Para que isso fique claro, toma-se, como exemplo arbitrário, o pagamento calculado ao *Jogador 1*, sendo que o pagamento previsto ao *Jogador 2* deverá ser interpretado de maneira totalmente semelhante. Entenda-se, com a notação $u_1(Cara, Cara; 1, p_2)$, que se está mensurando o pagamento, ao *Jogador 1*, por jogar *Cara* com toda certeza, enquanto ele acredita que seu oponente jogue *Cara* com distribuição de probabilidade igual a $p_2 = (q, 1-q)$. Isso é equivalente a dizer que o *Jogador 1* acredita que o *Jogador 2* irá escolher *Cara* com chances iguais a q e, consequentemente, *Coroa* com chances iguais a $1 - q$.

Voltando-se à busca pela solução de otimização das utilidades, sabe-se que o pagamento por jogar *Coroa* é maior que aquele decorrente de jogar *Cara* ou, simbolicamente, $1 - 2q > 2q - 1$ se, e somente se, a probabilidade q for menor que meio, ou ainda $q < \frac{1}{2}$. Disso, tem-se que a melhor estratégia pura para o *Jogador 1* deverá ser *Coroa*, caso $q < \frac{1}{2}$, ou *Cara*, caso essa probabilidade seja maior que meio ou, equivalentemente, $q > \frac{1}{2}$.

Observa-se que, caso essa mesma probabilidade q seja de cinquenta porcento, ou $q = \frac{1}{2}$, os pagamentos ao *Jogador 1* são indiferentes tanto para uma ou outra estratégia que venha adotar. Nota-se, também, que esses pagamentos estão atrelados a cada uma das duas estratégias puras disponíveis ao *Jogador 1*. Resta, então, expandir-se o conceito de melhor resposta do *Jogador 1* ao caso em decida por estratégias mistas, visto que as estratégias puras são apenas uma particularização das mistas. Entretanto, é sabido que o resultado será o mesmo.

Para tanto, considera-se que a estratégia mista do *Jogador 1* seja a distribuição $p_1 = (r, 1 - r)$ como já mencionada anteriormente; ou seja, ele deverá jogar *Cara* com probabilidade igual a r. Para cada valor de q entre zero e um, serão computados os valores de $r^*(q)$, do *Jogador 1*, de forma que $(r^*, 1 - r^*)$ seja a melhor resposta, pelo *Jogador 1*, para a estratégia mista $p_2 = (q, 1 - q)$ adotada pelo adversário. Disso, o pagamento esperado pelo *Jogador 1* ao usar a estratégia mista $p_1 = (r, 1 - r)$ quando seu adversário adotar a mista $p_2 = (q, 1 - q)$ deverá ser:

$$u_1(Cara, Cara; p_1, p_2) = u_1(p_1, p_2) = u_1(r \cdot Cara + (1-r) \cdot Coroa, q \cdot Cara + (1-q) \cdot Coroa) =$$

$$u_1(r \cdot Cara + (1 - r) \cdot Coroa, q \cdot Cara) + u_1(r \cdot Cara + (1 - r) \cdot Coroa, (1 - q) \cdot Coroa) =$$

$$u_1(r \cdot Cara, q \cdot Cara) + u_1((1 - r) \cdot Coroa, q \cdot Cara)+$$

$$+u_1(r \cdot Cara, (1 - q) \cdot Coroa) + u_1((1 - r) \cdot Coroa, (1 - q) \cdot Coroa).$$

Desmembrando-se essa estrutura, agora, em relação às probabilidades, obtém-se:

$$u_1(p_1, p_2) = rq \cdot u_1(Cara, Cara) + (1 - r)q \cdot u_1(Coroa, Cara)+$$

$$+r(1 - q) \cdot u_1(Cara, Coroa) + (1 - r)(1 - q) \cdot u_1(Coroa, Coroa).$$

Tabela 2.15: Pagamentos em estratégias mistas

			Jogador 2
		Cara (q)	Coroa ($1 - q$)
Jogador 1	Cara (r)	1, -1	-1, 1
	Coroa ($1 - r$)	-1, 1	1, -1

Fonte: Própria (2018)

Substituindo-se os valores dos pagamentos dispostos na Tabela 2.15, tem-se a seguinte expressão:

$$u_1(p_1, p_2) = rq \cdot 1 + (1 - r)q \cdot (-1) + r(1 - q) \cdot (-1) + (1 - r)(1 - q) \cdot 1.$$

Resolvendo-se toda parte algébrica e colocando a probabilidade r em evidência, o pagamento ou a utilidade esperada ao *Jogador 1* se revela como:

$$u_1(r, q) = (4q - 2)r - 2q + 1.$$

Nota-se que existe equivalência entre as entradas trabalhadas na utilidade. A notação $u_1(Cara, Cara; p_1, p_2)$ foi reduzida para $u_1(p_1, p_2)$ e, posteriormente, para $u_1(r, q)$, mas representam exatamente a mesma ideia: *Jogador 1* escolhe $Cara$ ou $Coroa$ com chances de r e $1 - r$, e o *Jogador 2*, com chances de q e $1 - q$, respectivamente.

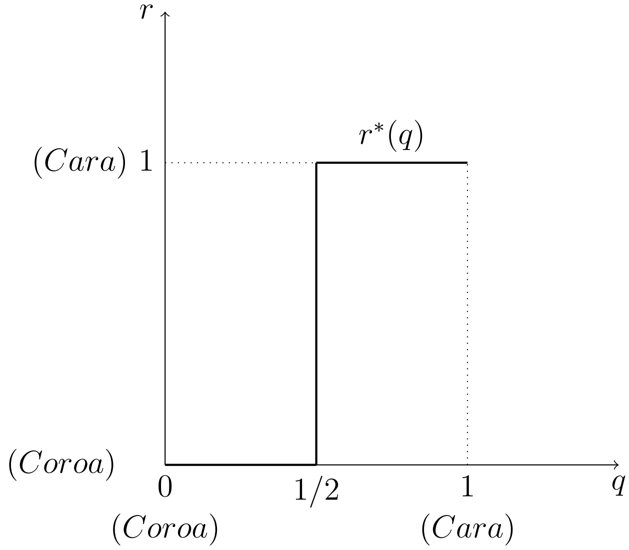
Observa-se, também, que para cada valor de q diferente de meio, a utilidade esperada u_1 pode ser interpretada como uma função afim na variável r. Por isso, observa-se que essa função será crescente caso $4q - 2 > 0$ ou, equivalentemente, $q > \frac{1}{2}$; e decrescente, caso $q < \frac{1}{2}$. Disso, decorre que a melhor resposta $r^*(q)$, dependendo do valor de q, para o *Jogador 1* é:

- $r^*(q) = 1$, caso $q > \frac{1}{2}$ - isto é, *Cara*;
- $r^*(q) = 0$, caso $q < \frac{1}{2}$ - isto é, *Coroa*.

Entretanto, caso o valor de q seja meio, tem-se a igualdade $4q - 2 = 0$, o que acarreta a independência da utilidade esperada em termos das possíveis escolhas de estratégias mistas $(r, 1 - r)$, pois $u_1(r, q) = 0 \cdot r - 2q + 1 = -2q + 1$. De outra forma, se $q = \frac{1}{2}$, então o *Jogador 1* é indiferente em relação às suas estratégias mistas, visto que a utilidade esperada não vai depender de suas escolhas.

Isso significa que qualquer escolha - entre zero e um - para o valor de $q = \frac{1}{2}$ seria uma melhor resposta desse jogador, ou melhor, $r^*\left(\frac{1}{2}\right) = [0, 1]$. Entende-se que, nessa proposta, r não é função de q, apesar do valor de r depender do valor de q. As duas variáveis apenas configuram uma relação - entre as duas grandezas q e r^* - representada graficamente pela linha tracejada da Figura 2.1:

Figura 2.1: A melhor resposta em estratégias mistas - Jogador 1



Fonte: GIBBONS (1992).

Analogamente, mas agora na perspectiva do *Jogador 2*, resta determinar suas melhores respostas q^* dependendo da estratégia $(r, 1-r)$ adotada pelo *Jogador 1.* Voltando ao conceito de utilidade esperada, determina-se essa função ao *Jogador 2* como sendo:

$$u_2(p_1, p_2) = rq \cdot (-1) + (1-r)q \cdot 1 + r(1-q) \cdot 1 + (1-r)(1-q) \cdot (-1),$$

que resulta em

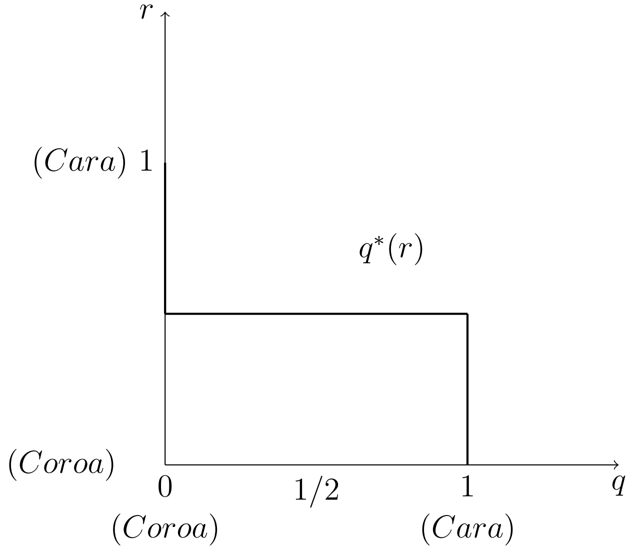
$$u_2(r, q) = (2 - 4r)q + 2r - 1.$$

Fixando-se os valores de r em números entre zero e um, com exceção ao valor meio, u_2 se transforma em uma função afim e, de forma análoga à do outro jogador, podem-se determinar as melhores respostas q^*, do *Jogador 2*, dependendo das estratégias $(r, 1-r)$ adotadas pelo adversário:

- $q^*(r) = 0$, caso $r > \dfrac{1}{2}$ - isto é, *Coroa*;
- $q^*(r) = 1$, caso $r < \dfrac{1}{2}$ - isto é, *Cara*;
- $q^*(r) = [0, 1]$, caso $r = \dfrac{1}{2}$ - isto é, o *Jogador 2* é indiferente a *Cara* ou *Coroa.*

Graficamente, tem-se:

Figura 2.2: A melhor resposta em estratégias mistas - Jogador 2

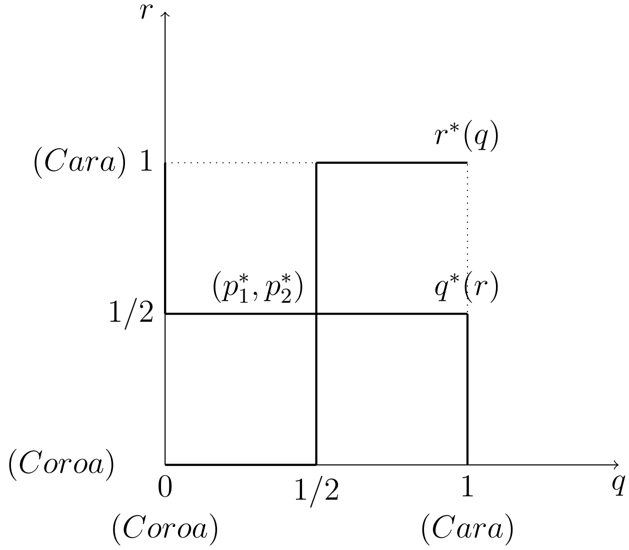


Fonte: GIBBONS (1992).

Juntando-se as melhores respostas em um só gráfico, disposto na Figura 2.3, obtém-se apenas um ponto em comum às melhores estratégias mistas adotadas por ambos os jogadores: o ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, no caso, o equilíbrio (p_1^*, p_2^*) procurado. Ou seja, o melhor a se fazer é jogar $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ou ainda, cada jogador deverá acreditar que seu adversário escolherá *Cara* e *Coroa* com 50% de chances cada uma.

É sabido que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ faz papel de *equilíbrio de Nash* estendido a estratégias mistas, visto que os pagamentos obtidos com essa estratégia particular são maiores do que ou, no mínimo, iguais aos calculados com qualquer outra estratégia mista escolhida pelo *Jogador 1*, fixando-se a melhor resposta $p_2^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ do *Jogador 2*.

Figura 2.3: Equilíbrio em estratégias mistas



Fonte: GIBBONS (1992).

Nota-se que ideia de estratégia mista configurando a melhor resposta do *Jogador 1* (o caso de seu adversário é análogo) foi retirada do problema de maximização exemplificado a seguir. Supõe-se que o conjunto de ações disponíveis ao *Jogador 1* seja $A_1 = \{Cara, Coroa\}$, em que a_{11} e a_{12} sejam suas estratégias puras, *Cara* e *Coroa* nessa ordem. Para cada uma dessas estratégias puras em A_1, seu pagamento por jogar *Cara* só não é menor que o pagamento por jogar *Coroa* caso seu adversário jogue *Cara* com chances iguais a ou maiores que 50%. Simbolicamente,

$$u_1(a_{11}, p_2) = p_{21}u_1(a_{11}, a_{21}) + p_{22}u_1(a_{11}, a_{22}) = 2q - 1$$

só não é menor que

$$u_1(a_{12}, p_2) = p_{21}u_1(a_{12}, a_{21}) + p_{22}u_1(a_{12}, a_{22}) = -2q + 1$$

caso $q \geq \frac{1}{2}$. Resumidamente,

$$\sum_{k=1}^{2} p_{2k}u_1(a_{11}, a_{2k}) \geq \sum_{k=1}^{2} p_{2k}u_1(a_{12}, a_{2k})$$

se, e somente se, a estratégia mista do *Jogador 2* - p_2 - for tal que $q \geq \frac{1}{2}$. Ou seja, para todas essas estratégias mistas do *Jogador 2* satisfazendo $q \geq \frac{1}{2}$, a estratégia pura *Cara* é a melhor resposta para o *Jogador 1*, o que implica colocar probabilidade zero para a outra estratégia, *Coroa*.

Analogamente, para p_2 satisfazendo $q \leq \frac{1}{2}$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{2} p_{2k} u_1(a_{12}, a_{2k}) \geq \sum_{k=1}^{2} p_{2k} u_1(a_{11}, a_{2k}).$$

Ou melhor, para qualquer estratégia mista p_2 do *Jogador 2* satisfazendo $q \leq \frac{1}{2}$, a estratégia pura $Coroa$ por si só, independente de p_1, maximiza o ganho esperado do *Jogador 1*. Isso quer dizer que a melhor resposta p_1 deve valorizar essa estratégia pura maximizadora em detrimento da outra; isto é, *Cara* deverá ter peso ou probabilidade zero. Uma generalização desse problema de maximização para se determinar o *equilíbrio de Nash* de forma mais ampla será abordada nos parágrafos seguintes.

Generalizando os conceitos sobre estratégias mistas para um *Jogador i* participando de um jogo estático $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$, formalmente se diz que uma *estratégia mista* é uma distribuição qualquer de probabilidades sobre o conjunto de estratégias puras A_i. Detalhadamente, supõe-se que o *Jogador i* possua o conjunto de estratégias $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}$, com k estratégias. Daí, uma **estratégia mista** para esse jogador é uma distribuição $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik})$ de probabilidades em que todas elas somam 1 ou, simbolicamente, $p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{ik} = 1$. Em outras palavras, os outros jogadores acreditam que o *Jogador i* tenha um perfil de ações do qual escolha a estratégia genérica a_{ik} com uma chance probabilística igual a p_{ik}.

Reconsiderando os dados detalhados na Tabela 2.16, pode se observar que o *Jogador 2* possui as estratégias puras *Esquerda, Meio* e *Direita.* Uma possível estratégia mista seria a distribuição $(q, r, 1-q-r)$; isto é, q é a probabilidade desse jogador escolher *Esquerda*, r são as chances de ele jogar $Meio$, e $1-q-r$ é a probabilidade de ele jogar *Direita.* Ainda nesse jogo, tomam-se alguns exemplos numéricos para facilitar a compreensão sobre estratégias mistas. A distribuição de probabilidades $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ significa que o jogador analisado joga qualquer uma das três estratégias disponíveis com as mesmas chances. Já uma distribuição diferente, por exemplo, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ indica que esse mesmo jogador nunca escolheria a opção *Direita*, e as outras duas opções de escolha - *Esquerda* ou *Meio* - seriam igualmente prováveis.

Tabela 2.16: Direções e Sentidos em estratégias mistas

		Jogador 2		
		Esquerda (q)	Meio (r)	Direita (1-q-r)
Jogador 1	Acima	1, 0	1, 2	0, 1
	Abaixo	0, 3	0, 1	2, 0

Fonte: Própria (2018).

Nota-se, ainda, que é possível sempre pensar em estratégias puras como sendo casos particulares das mistas. Por exemplo, nesse mesmo jogo, a estratégia mista $(1, 0, 0)$ indica que o jogador irá escolher, com probabilidade igual a 1 ou 100%, a ação *Esquerda*; ou seja, não há mistura de estratégias - há apenas a estratégia pura *Esquerda*. Os casos para as estratégias puras *Meio* e *Direita* são inteiramente semelhantes: a mista $(0, 1, 0)$ representa a pura *Meio*, enquanto a mista $(0, 0, 1)$ representa a pura *Direita*.

Observe o exemplo seguinte, muito semelhante ao jogo *Direções e Sentidos* realizado na seção 2.3. Nesse novo jogo, também há dois jogadores e os perfis de estratégias são: $A_1 = \{A, B, C\}$, para o *Jogador 1*, e $A_2 = \{D, E\}$, para o *Jogador 2*. Na tabela de pagamentos desse jogo, observa-se que estão escritos apenas os pagamentos do *Jogador 1*; isso porque a intenção, nesse momento, é mostrar que uma estratégia pura pode ser estritamente dominada por uma mista, apesar de não o ser por nenhuma outra pura. Isto é, o pensamento em estratégias mistas pode transformar um jogo, inicialmente sem estratégias estritamente dominadas e sem equilíbrio, em um outro jogo com *equilíbrio de Nash*.

Tabela 2.17: Estratégias mistas

		Jogador 2	
		D	E
Jogador 1	A	3,—	0,—
	B	0,—	3,—
	C	1,—	1,—

Fonte: Gibbons (1992)

Nesse jogo, qualquer que seja a crença $(q, 1-q)$ do *Jogador 1* sobre a tática adotada pelo *2*, a melhor resposta para o *Jogador 1* é A, caso $q \geq \frac{1}{2}$, ou jogar B, caso $q \leq \frac{1}{2}$, mas nunca jogar C. Isso porque, jogando a estratégia pura C, o pagamento obtido é igual a 1, ao passo que jogando a mista $p_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, por exemplo, o pagamento seria

$$u_1[(p_1, D)] = \frac{1}{2} \cdot u_1(A, D) + \frac{1}{2} \cdot u_1(B, D) + 0 \cdot u_1(C, D) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = \frac{3}{2},$$

caso o *Jogador 2* optasse pela estratégia D, ou

$$u_1[(p_1, E)] = \frac{1}{2} \cdot u_1(A, E) + \frac{1}{2} \cdot u_1(B, E) + 0 \cdot u_1(C, E) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 + 0 \cdot 1 = \frac{3}{2},$$

caso o 2 jogasse E.

Percebe-se que as probabilidades componentes da estratégia mista funcionam, na prática, como pesos. Isso é natural, tendo em vista que, quanto mais provável de se escolher uma certa estratégia pura, mais próximo o pagamento resultante será do pagamento esperado para aquela estratégia pura. Ou seja, inclusive na determinação do pagamento a um jogador, as estratégias puras seriam um tipo específico de estratégia mista em que todas as entradas - menos uma - são nulas, e a única entrada não nula, referente à estratégia pura adotada, é igual a 1.

Finalmente, será abordado o *equilíbrio de Nash* em estratégias mistas. De início, recorda-se que, em um jogo estático com n jogadores, o resultado (a_i^*, a_{-i}^*) era um equilíbrio em estratégias puras se, para cada jogador i e para cada estratégia pura a_i pertencente ao perfil A_i, fosse válida a equação

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*).$$

Observa-se que essa noção era equivalente a se determinar as melhores respostas do jogador i às estratégias possíveis de serem tomadas pelos outros jogadores, ou seja, para se determinar o equilíbrio, era necessário resolver o problema de maximização

$$\max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i}^*) = \max_{a_i \in A_i} u_i(a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_i, a_{i+i}^*, \ldots, a_n^*).$$

Então, nesse cenário mais amplo de estratégias mistas, será necessário se fazer uma extensão desse conceito. Isso quer dizer que, a fim de se determinar o equilíbrio em estratégias mistas, será exigido que a estratégia mista de cada jogador seja a melhor resposta às estratégias mistas dos demais. E ainda pensando que cada estratégia pura é um caso particular de estratégia mista, como já exemplificado anteriormente, a ideia estendida de equilíbrio poderá ser limitada à original para estratégias puras, sempre que necessário.

EQUILÍBRIO DE NASH **- FORMALIZAÇÃO**

Imagina-se que dois jogadores, *Jogador 1* e *Jogador 2*, participem de um jogo genérico $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$. Supõe-se que o *Jogador 1* possua J estratégias puras, enquanto o *Jogador 2* possua K estratégias puras. Daí, seus perfis de estratégias podem ser escritos como $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1J}\}$ e $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2K}\}$. Considera-se, também, que o *Jogador 1* decida jogar a estratégia a_{1j}, em que $1 \leq j \leq J$. Então, o pagamento esperado para ele, caso o *Jogador 2* escolha sua estratégia mista $p_2 = (p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2K})$, será:

$$u_1(a_{1j}, p_2) = p_{21} \cdot u_1(a_{1j}, a_{21}) + p_{22} \cdot u_1(a_{1j}, a_{22}) + \ldots + p_{2K} \cdot u_1(a_{1j}, a_{2K}) = \sum_{k=1}^{K} p_{2k} \cdot u_1(a_{1j}, a_{2k}).$$

Portanto, de forma completamente análoga, conclui-se que o pagamento esperado ao

Jogador 1, quando os dois optarem por suas estratégias mistas, p_1 e p_2, será:

$$u_1(p_1, p_2) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} p_{1j} \cdot p_{2k} \cdot u_1(a_{1j}, a_{2k}),$$

em que p_{1j} e p_{2k} representam, nessa ordem, as chances probabilísticas do *Jogador 1* optar pela estratégia a_{1j} e do *Jogador 2* escolher a ação a_{2k}. Em outras palavras, o pagamento esperado ao *Jogador 1* é a soma ponderada:

$$p_{11}[p_{21} \cdot u_1(a_{11}, a_{21}) + p_{22} \cdot u_1(a_{11}, a_{22}) + \ldots + p_{2K} \cdot u_1(a_{11}, a_{2K})]$$

$$+$$

$$p_{12}[p_{21} \cdot u_1(a_{12}, a_{21}) + p_{22} \cdot u_1(a_{12}, a_{22}) + \ldots + p_{2K} \cdot u_1(a_{12}, a_{2K})]$$

$$+$$

$$\vdots$$

$$+$$

$$p_{1J}[p_{21} \cdot u_1(a_{1J}, a_{21}) + p_{22} \cdot u_1(a_{1J}, a_{22}) + \ldots + p_{2K} \cdot u_1(a_{1J}, a_{2K})],$$

sendo que cada linha representa uma parcela com algum dos pesos $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1J}$, contido na estratégia mista $(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1J})$ do *Jogador 1*.

Assim, para que a estratégia mista $p_1 = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1J})$ seja a melhor resposta do *Jogador 1* para a estratégia mista p_2 do outro jogador, deve-se ter a maximização

$$\sum_{k=1}^{K} p_{2k} u_1(a_{1j}, a_{2k}) \geq \sum_{k=1}^{K} p_{2k} u_1(a_{1j'}, a_{2k}),$$

para cada estratégia pura $a_{1j'}$ contida em A_1. Em outras palavras, devem-se considerar as estratégias puras a_{ij} em A_i maximizadoras de $\sum\limits_{k=1}^{K} p_{2k} u_1(a_{1j}, a_{2k})$, e os pesos $(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1J})$ devem valorizá-las, como no exemplo dos *centavos combinados*, em que as piores estratégias recebiam peso nulo.

Semelhantemente, se o *Jogador 2* acredita que seu adversário possua a mista $p_1 = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1J})$, então o pagamento esperado deverá ser

$$u_2(p_1, p_2) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} p_{1j} \cdot p_{2k} \cdot u_2(a_{1j}, a_{2k}).$$

Agora, é possível se estender o conceito de equilíbrio para estratégias mistas em um jogo com dois jogadores: a estratégia mista de cada jogador deve ser a melhor resposta à estratégia mista do oponente. Matematicamente, para que o par de estratégias mistas (p_1^*, p_2^*) seja um *equilíbrio de Nash*, p_1^* deve satisfazer

$$u_1(p_1^*, p_2^*) \geq u_1(p_1, p_2^*),$$

para qualquer distribuição de probabilidades p_1 do *Jogador 1*, assim como p_2^* deva satisfazer

$$u_2(p_1^*, p_2^*) \geq u_2(p_1^*, p_2),$$

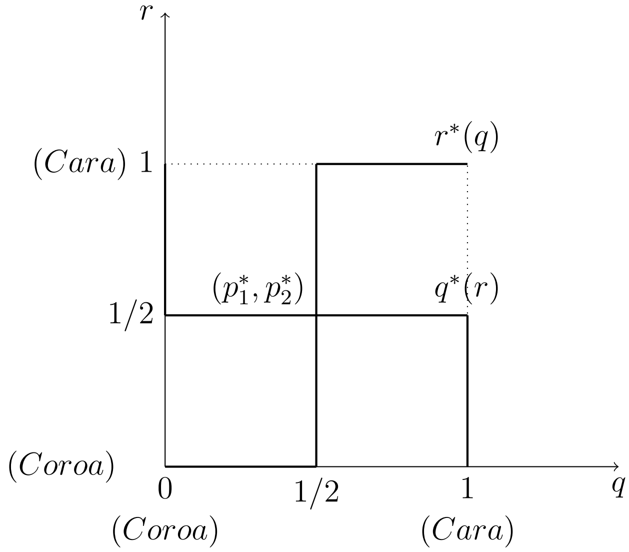
para qualquer estratégia mista p_2 adotada pelo *Jogador 2*.

Finalizando a seção, deve-se observar que essa generalização foi aplicada ao jogo *Cara ou Coroa* em estratégias mistas, representado na Figura 2.4. Observa-se que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é *equilíbrio de Nash* em estratégias mista, pois, analisando-se os pagamentos ao *Jogador 1* e se fixando a melhor resposta $p_2^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ do *Jogador 2*, observa-se que o maior pagamento ao *Jogador 1* acontece caso escolha a mista $p_1^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Simbolicamente,

$$u_1(p_1^*, p_2^*) \geq u_1(p_1, p_2^*),$$

para todo $p_1 = (r, 1 - r)$, com r entre zero e um. A análise para o *Jogador 2* é análoga.

Figura 2.4: Equilíbrio de Nash aplicado ao Cara ou Coroa



Fonte: GIBBONS (1992).

2.5 Jogos cooperativos e solução de Nash

Anteriormente, concluiu-se que podem ser encontradas uma ou mais estratégias capazes de maximizar o resultado individual de cada participante em um jogo não cooperativo. Contudo, a Seção 2.5 deverá ser contemplada com o conceito maximizador dos ganhos individuais na formação de coalizões ou grupos, como na situação descrita em um jogo conhecido por *Jogo do Ultimato*.

O JOGO DO ULTIMATO - MOTIVAÇÃO

Duas pessoas estão negociando sobre como repartir R$ 100,00. O *Jogador 1* decide receber uma quantia mínima u, em reais, enquanto o *Jogador 2* estipula receber um mínimo de v, também em reais. Se a soma das quantias mínimas requeridas exceder o dinheiro a ser repartido, não haverá acordo. Caso contrário, se a soma das quantias requeridas for, no máximo, R$ 100,00, ambos os jogadores recebem exatamente o que requisitaram e ainda repartem igualmente o excedente, se houver.

PROBLEMA COOPERATIVO DE BARGANHA

Um problema cooperativo de barganha $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$ entre dois jogadores é um jogo em que:

- X representa o *conjunto das concordâncias* ou *dos acordos*. Ele pode ser interpretado como o conjunto de todas os resultados possíveis e acordados entre os jogadores envolvidos. Esse conjunto deverá ser *compacto* no *Espaço Euclidiano*, ou seja, *fechado* e *limitado*;

- D, chamado de *resultado de discórdia*, é o evento que ocorre se os participantes discordarem entre si. D deverá ser um elemento de X;

- $\succsim_1$ e $\succsim_2$ são relações contínuas de preferências no conjunto de todas as loterias associando, a cada resultado $X = \{(x_1, x_2)\}$, um vetor de probabilidade $(p, 1-p)$, em que p detonam as chances de ocorrência do resultado x_1 e $1-p$ são as chances de se ocorrer o resultado x_2. Comumente, o conjunto formado por todos esses vetores é escrito na forma $\mathcal{L}(X)$, o *conjunto das loterias de X*. Supõe-se, ainda, que tais preferências atendam aos axiomas de *von Neumann-Morgenstern* propostos na Seção 2.4;

- o conjunto de discórdias D é o menos preferível aos jogadores, ou seja, qualquer outro resultado é preferível. Além disso, existe algum resultado estritamente preferível a

D, ou ainda, melhor e não sendo indiferente a D, para ambos os participantes. Simbolicamente, $x \succsim_i D$ para todo $x \in X$, com $i = 1, 2$, e existe $x \in X$ tal que $x \succ_1 D$ e $x \succ_2 D$;

- *(convexidade)*: independente da obtenção de algum resultado específico aleatório e compondo dois resultados conhecidos, x e y, deverá existir algum outro resultado z no conjunto de resultados X que seja indiferente a essa composição, para ambos os jogadores. Matematicamente. para quaisquer $x \in X$, $y \in X$ e $p \in [0, 1]$, existe $z \in X$ tal que $z \sim_i p \cdot x \oplus (1 - p) \cdot y$, com $i = 1, 2$. *Nota*: $\oplus$ representa *soma direta*;

- *(não-redundância)*: para cada jogador, dois resultados indiferentes são tratados como um só resultado. Em símbolos, se $x \in X$, então não existe $\overline{x} \in X$, com $x \neq \overline{x}$, tal que $x \sim_i \overline{x}$, para $i = 1, 2$;

- *(unicidade do melhor acordo)*: cada jogador tem preferência por pelo menos um acordo que seja o melhor ou o mais preferível por ele mesmo em relação aos outros acordos. Sucintamente, para cada jogador i, existe um único acordo $B_i \in X$ tal que $B_i \succsim_i x$ para todo $x \in X$;

- a discórdia é tão ruim para um jogador quanto quanto o melhor acordo para o outro. Simbolicamente, para dois jogadores i e j, $B_i \sim_j D$ e $B_j \sim_i D$.

As *três primeiras* restrições dessa definição garantem que a relação de preferência definida sobre $\mathcal{L}(X)$ para cada jogador possa ser representada por alguma função contínua definida em X (a função utilidade de von Neumann - Morgenstern para os jogadores). A *quarta* diz que o conjunto de discórdia D é o pior resultado possível e que o problema de barganha é não degenerativo por permitir a existência de um acordo mais atraente do que a discórdia, para ambos os jogadores.

A *convexidade* assegura que o conjunto X seja rico em elementos o suficiente para que sempre exista, para ambos os jogadores, algum acordo determinístico (em X) equivalente a qualquer loteria formada por membros de X. A *não-redundância* é só para não se distinguirem acordos equivalentes; ou seja, ela unifica todos os acordos equivalentes em um só acordo. A *unicidade do melhor acordo* afirma que só existe um acordo que seja o melhor para cada jogador e, ao mesmo tempo, pelo menos indiferente aos demais participantes. A última restrição traz *indiferença*, para cada jogador, entre a *discórdia* D e, segundo sua preferência, o resultado em que o outro jogador obtenha seu *melhor acordo* (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994).

Retomando o exemplo do *Jogo do Ultimato* proposto no início da Seção 2.5, tem-se que o conjunto de todos os acordos possíveis nesse jogo poderia ser representado pelas quantias x e y respeitando o mínimo de dinheiro que cada jogador se sujeita a receber, além de preservar a quantia a ser repartida, R\$ 100,00. Finalmente, caso a soma dessas quantias seja menor que R\$ 100,00 ou igual a R\$ 100,00, então haverá um excedente maior que zero real ou até igual a zero real ($e \geq 0$).

Por outro lado, se a soma das quantias exigidas for maior que R\$ 100,00, haverá desacordo entre os jogadores e ambos ganham zero real. Simbolicamente, deve-se ter $u + v + e = 1000$, com $u, v > 0$. A ideia do jogo é que os participantes lancem suas exigências como quantidades não nulas, que implica a condição $e < 100$. Resumindo, pode-se modelar o problema considerando, como conjunto de todos os acordos possíveis $X = (u, 100 - u - e)$, o primeiro quadrante do plano cartesiano em que $u + v > 100$ representa o conjunto D. Além disso, as relações de preferência podem ser tomadas como o lucro de cada jogador. Matematicamente,

- $u_1(x) = u$, para o *Jogador 1*,
- $u_2(x) = 1000 - u - e$, para o *Jogador 2*.

Antes de ser abordada a *solução de Nash*, deve-se atentar para a noção de *solução de barganha*, necessária ao desenvolvimento do conceito de *solução de Nash*. Em seguida, deverão ser trazidas algumas definições e caracterizações como pré-requisito ao estudo e à aplicação de conceitos envolvendo equilíbrio em jogos cooperativos. Seguindo essa estrutura, o objetivo de uma *solução de barganha* é determinar um acordo entre os jogadores, dependendo do problema de barganha em que estão inseridos. Formalmente, a *solução de barganha* é uma função que associa, a cada *problema de barganha* $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$, um único membro de X.

SOLUÇÃO DE NASH

A fim de resolver o *Jogo do Ultimato* de forma equilibrada, seguindo as regras estabelecidas, será proposta uma maneira de se determinar a melhor resposta individual dos jogadores participantes mediante uma *caracterização* ou determinação. O texto seguinte mostrará apenas o básico em definições, além de apresentar um resultado prático de como determinar a solução. Finalmente, para maiores entendimentos, comentários e demonstrações estão inclusos no Apêndice A.

Pode-se interpretar a *solução de Nash* como a ferramente capaz de sugerir um acordo x^* atendendo a uma condição específica. Caso seja provável o surgimento de um acordo alternativo x preferível a um dos jogadores, com certa probabilidade, então as chances de que o outro jogador ainda prefira o acordo original x^* são as mesmas. Matematicamente, *solução de Nash* é uma *solução de barganha* que associa um *acordo* $x^* \in X$ a um problema de barganha $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$. Esse acordo deve satisfazer a condição:

$$\boxed{\text{se } p \cdot x \succ_i x^* \text{ para algum } p \in [0,1] \text{ e } x \in X, \text{ então } p \cdot x^* \succsim_j x, \text{ com } j \neq i}$$

(OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994).

CARACTERIZAÇÃO

O próximo passo é obter uma ferramenta precisa na determinação da *solução de Nash*. Em seguida, será resolvido o problema *Jogo do Ultimato* proposto. Essa caracterização diz que um acordo $x*$ será o melhor acordo capaz de maximizar os lucros individuais em um problema de barganha quando a *multiplicação* das funções utilidades avaliadas nele obtiver máximo resultado. Matematicamente, o acordo $x^* \in X$ é uma solução de Nash para o problema de barganha $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$ se, e só se,

$$\boxed{u_1(x^*)u_2(x^*) \geq u_1(x)u_2(x)}$$

para todo $x \in X$, com $u_i(x)$ sendo uma função utilidade *von Neumann - Morgenstern* representando as relações de preferência $\succsim_i$ e a condição $u_i(D) = 0$, para $i = 1, 2$ (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994).

Finalizando o Capítulo 2, deve-se propor a solução do problema proposto no *Jogo do Ultimato*, ou seja, devem-se determinar quais seriam as quantidades mínimas requisitadas por cada jogador para que seus lucros individuais sejam máximos naquele jogo. Retomando alguns pontos importantes, deve-se lembrar que as funções utilidades para os jogadores eram:

- $u_1(x) = u$, para o *Jogador 1*,
- $u_2(x) = 100 - u - e$, para o *Jogador 2*.

Por meio da solução obtida e demonstrada no Apêndice A, o melhor resultado pode ser determinado procurando maximizar o produto

$$u_1(x)u_2(x) = u(100 - u - e),$$

que é equivalente a procurar o vértice da parábola representante da função $f(u) = u(100 - u - e)$. Daí, a melhor resposta para o *Jogador 1* é $u^* = 50 - \dfrac{e}{2}$ e, analogamente para o *Jogador 2*, $v^* = 50 - \dfrac{e}{2}$. Além disso, como os resultados em X dependem do valor da sobra e, conclui-se que, quando ela for zero, as utilidades terão seus valores máximos e iguais a 2500, o que implica o acordo propondo metade para cada e que não tenha sobras seja o melhor possível.

O Capítulo 3 surge com situações praticáveis no Ensino Médio, com exemplos resolvidos e referentes ao básico da Teoria dos Jogos. Todos eles são clássicos e possuem características envolvendo conceitos com os quais os alunos deveriam estar familiarizados. Ao final do Capítulo 2, espera-se que esteja clara a disposição de todo arsenal necessário para se introduzirem algumas ideias centrais dessa teoria.

3 Problemas e aplicações didáticas

Nesse capítulo, serão abordadas algumas aplicações da Teoria dos Jogos passíveis de uma orientação voltada para o Ensino Médio. Cada situação será desenvolvida em duas etapas: tradução de um problema ilustrativo para uma representação sistematizada em forma de um jogo e, posteriormente, sua solução por meio do equilíbrio de Nash ou da solução de Nash. Ao seu final, espera-se que o leitor tenha apreendido algumas ferramentas úteis ao desenvolvimento de uma análise crítica permeando situações do dia-a-dia, além de caminhos para motivação profissional dos alunos.

ORIENTAÇÕES GERAIS

Algumas recomendações devem ser direcionadas àqueles que pretendem difundir a Teoria dos Jogos no Ensino Médio. A primeira delas é que o profissional, disposto a realizar a proposta presente neste material, deverá recordar que o currículo atual do ensino de Matemática é extenso. Disso, decorre uma grande dificuldade em se abordarem os diversos tópicos com a mesma ênfase, mas alguns deles devem ser priorizados como pré-requisitos no destaque e na adoção das novas ferramentas de aprendizagem.

Tomam-se os exemplos de aplicação discorridos neste capítulo final. Eles carregam consigo habilidades básicas como leitura de tabelas e um trabalho amplo com funções, gráficos e equações do primeiro e segundo graus, além do desenvolvimento algébrico de desigualdades. Por isso, fica clara a necessidade do profissional difusor da Teoria dos Jogos em executar, paralelamente, outras situações pertinentes e já conhecidas por seu público alvo, para que o aluno possa desenvolver laços significativos com essa teoria.

Feita essa abordagem inicial contendo o universo paralelo das tabelas, dos gráficos e das funções, o professor poderá fazer uma introdução ao novo assunto, resgatando as essências previamente trabalhadas sempre que possível. Isso porque só haverá resultado plausível, decorrente da introdução e do desenvolvimento da Teoria dos Jogos, se os novos caminhos e as novas perspectivas forem apresentadas aos poucos ao iniciante no assunto. Caso o sucesso deste projeto seja logrado, propostas mais ousadas poderiam emergir visando a uma inclusão gradual dessa teoria no currículo oficial de Matemática. Afinal, o conhecimento em se fazerem escolhas racionais, nas diversas situações emergentes no cotidiano, deveria ser priorizado com mais veemência pelo grupo elaborador das diretrizes curriculares.

Finalmente, observa-se que a Seção 3 aborda aplicações numéricas a serem realizadas em sala de aula. Para que essa proposta seja mais eficiente, recomenda-se que o professor a realize em duas etapas, sempre que possível. Na primeira delas, o mediador deverá apresentar o problema e formar equipes, ou trabalhar individualmente, se preferir, na intenção de resolvê-lo. Nesse momento, os alunos poderão tentar solucionar a situação apresentada sem a utilização de ferramentas referentes à Teoria dos Jogos. Na segunda etapa, a resolução obtida deverá ser enraizada nos conceitos dessa teoria e os resultados finais, comparados. Nessa conclusão comparativa, espera-se que os alunos notem a importância da Teoria dos Jogos - e, portanto, da Matemática - na otimização de suas táticas.

3.1 Leilão da moeda de um real - estratégias puras

Esse exemplo surge com uma abordagem comparativa entre cooperação e não cooperação. Para isso, imagina-se que um leilão será realizado, sendo que o objeto a ser leiloado deverá ser uma moeda de um real. Nele, há dois participantes que deverão dar seus lances simultaneamente. O que der o maior lance, ou seja, o primeiro colocado obtém a moeda leiloada em troca da quantia barganhada por ele.

Contudo, o segundo colocado também deverá pagar a quantia referente a seu próprio lance. Exemplificando, se o primeiro e segundo colocados dessem lances iguais a 90 e 85 centavos, respectivamente, o primeiro colocado pagaria os 90 centavos e receberia a moeda de um real como prêmio, fazendo um lucro de 10 centavos. O segundo, entretanto, receberia apenas o prejuízo de 85 centavos, pois deveria pagar seu lance perdedor.

Com a intenção de se obter uma visão um pouco mais detalhada sobre essa situação, supõe-se que esse jogo irá acontecer, como já mencionado, entre duas pessoas a título de simplificação. Nota-se que as moedas fabricadas no Brasil carregam valores múltiplos de cinco centavos e, por isso, todos os lances realizados e lucros obtidos irão ser divisíveis por cinco centavos. Se os jogadores envolvidos forem Jogador 1 e Jogador 2 ("J1" e "J2", respectivamente), podem-se fazer algumas previsões de pagamentos para ambos, como mostra a Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Tabela de payoffs ou pagamentos - situação não cooperativa

J 1 \ J 2	0,00	0,05	0,10	0,15	...	1,00
0,00	X	(0,00;0,95)	(0,00;0,90)	(0,00;0,85)	...	(0,00;0,00)
0,05	(0,95;0,00)	X	(-0,05;0,90)	(-0,05;0,85)	...	(-0,05;0,00)
0,10	(0,90;0,00)	(0,90;-0,05)	X	(-0,10;0,85)	...	(-0,10;0,00)
0,15	(0,85;0,00)	(0,85;-0,05)	(0,85;-0,10)	X	...	(-0,15;0,00)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
1,00	(0,00;0,00)	(0,00;-0,05)	(0,00;-0,10)	(0,00;-0,15)	...	X

Fonte: própria.

Nessa tabela, as bordas trazem os lances de cada jogador: a disposta em linhas, na vertical e à esquerda, traz as possibilidades de lances do Jogador 1, e a disposta em colunas, distribuídas na horizontal e acima, carrega as opções do Jogador 2. Os lances analisados vão até a quantia de um real apenas por praticidade de aplicação, mas os valores superiores a essa barreira podem ser, muitas vezes, atraentes aos jogadores dispostos a minimizarem seus prejuízos.

Cada entrada da Tabela 3.1, ou cruzamento entre linhas e colunas correspondendo a um par de lances dados pelos participantes do jogo, é composto pelos pagamentos realizados a cada jogador. Por exemplo, o ponto situado na linha correspondente ao lance de R\$ 0,15 e na coluna correspondente ao de R\$ 0,10 é formado pelas coordenadas de pagamentos (0,85;-0,10); ou seja, o Jogador 1 deu um lance igual a R\$0,15 e o Jogador 2, igual a R\$ 0,10. Nesse contexto, caso não haja mais lances subsequentes, o Jogador 1 é vencedor do leilão, pega seu prêmio de $R\$1,00$; mas tem que pagar por seu lance de R\$ $0,15$, ficando com R\$ $0,85$. Por outro lado, o Jogador 2 é o perdedor, devendo pagar o lance realizado de R\$ 0,10.

O grande propósito dessa aplicação é tentar mostrar aos alunos como realizar esse jogo de forma inteligente, deixando as emoções pela disputa acirrada em segundo plano. Estimativas sugerem que o vencedor acabe pagando mais de um real pela moeda, pois, após ultrapassar a barreira de um real, cada jogador ficará tentado a minimizar suas perdas. Uma *sugestão* para o professor proceder em sala de aula seria, então, eleger quatro alunos e realizar dois leilões, com dois alunos disputando cada um. No primeiro, dois participantes poderiam ser condicionados a fazerem os lances de acordo com suas vontades, desprovidos de qualquer análise prévia. No segundo, contudo, os jogadores deveriam receber orientações calcadas na função utilidade de cada jogador e, evidentemente, no *equilíbrio* exemplificado na Tabela 3.2 e na Tabela 3.3.

Após a execução do primeiro leilão, mas antes de iniciar o segundo, caberia, ao professor, realizar uma análise um pouco mais detalhada no intuito de modelar esse jogo com alguma função utilidade. Sendo o *Jogador* i e o *Jogador* j os dois envolvidos no processo, observa-se que a Tabela 3.1 pode ser dividida em duas metades, de acordo com a diagonal marcada pelos "X". Nesse caso, a função utilidade do *Jogador* i poderia ser $u_i(l) = 1 - l$, caso a dupla de lances esteja situada abaixo dessa diagonal ou, matematicamente, $i > j$; a variável l representa o valor do lance realizado por esse jogador. Por outro lado, se o resultado do jogo estiver na metade acima dessa diagonal, a função utilidade do *Jogador* i pode ser representada por $u_i(l) = -l$. Nota-se que a diagonal marcada pelos "X", ou ainda $i = j$ simbolicamente, representa o contexto em que os lances dos jogadores são iguais, o que não traz ganhador ou perdedor e, por esse motivo, não será discutido.

Tabela 3.2: Otimização da utilidade para o Jogador 1

Jogador 1
$u_1(0,05; 0,00) = 0,95 \geq u_1(0,10; 0,00) = 0,90$
$u_1(0,05; 0,00) = 0,95 \geq u_1(0,15; 0,00) = 0,85$
$u_1(0,05; 0,00) = 0,95 \geq u_1(0,20; 0,00) = 0,80$
$\vdots$
$u_1(0,05; 0,00) = 0,95 \geq u_1(1,00; 0,00) = 0,00$

Fonte: própria.

Tabela 3.3: Otimização da utilidade para o Jogador 2

Jogador 2
$u_2(0,00; 0,05) = 0,95 \geq u_2(0,00; 0,10) = 0,90$
$u_2(0,00; 0,05) = 0,95 \geq u_2(0,00; 0,15) = 0,85$
$u_2(0,00; 0,05) = 0,95 \geq u_2(0,00; 0,20) = 0,80$
$\vdots$
$u_1(0,00; 0,05) = 0,95 \geq u_1(0,00; 1,00) = 0,00$

Fonte: própria.

Algumas considerações devem ser feitas. A primeira é que a Tabela 3.1 foi desenvolvida de forma incompleta, visto que existem, teoricamente, infinitos lances para cada jogador se eles forem interpretados como números reais, além desses lances poderem ultrapassar o valor do prêmio. A segunda é que, de acordo com a Tabela 3.2 e a Tabela 3.3, percebe-se que $(0,05; 0,00)$ é o perfil otimizador para o Jogador 1, ao passo que o melhor perfil para o Jogador 2 é distinto: $(0,00; 0,05)$. Afinal, o perfil que é o melhor para um jogador não é, necessariamente, também melhor para o outro. Recorda-se que o objetivo primário é encontrar pelo menos um resultado representando o *equilíbrio de Nash* e sendo a melhor alternativa para ambos os jogadores, cada qual ciente da racionalidade do outro.

Então, a fim de encontrar a melhor tática para ambos os jogadores, notando-se que cada um dos participantes será racional ao deduzir que o outro almeja o melhor resultado para si mesmo e constrói uma análise semelhante do mesmo contexto, pode-se iniciar uma busca por melhores respostas, como visto na Seção 2.4. Se a primeira linha da matriz apresentada em 3.1 representa todos os resultados obtidos com o lance igual a R$ 0,00 feito pelo Jogador 1, então, para esse lance específico, o melhor perfil para o Jogador 2 é $(0,00;0,05)$ porque traria R$ 0,95 de lucro, o maior possível.

Tabela 3.4: Melhor resposta do Jogador 2 para o lance de R$ 0,00 do Jogador 1

X	$(0,00;\underline{0,95})$	$(0,00;0,90)$	$(0,00;0,85)$	$\ldots$	$(0,00;0,05)$	$(0,00;0,00)$

Passando para a segunda linha, que representa os resultados obtidos com um lance de R$ 0,05 feito pelo Jogador 1, o melhor perfil para o Jogador 2 seria $(0,05;0,10)$, porque traria R$ 0,90 de lucro para ele. Procedendo dessa maneira em todas as linhas da matriz, encontrar-se-ão todas as melhores respostas para o Jogador 2, uma para cada ação do Jogador 1. Para fins didáticos, recomenda-se sublinhar ou destacar, em cada linha, o maior valor possível para o Jogador 2.

Tabela 3.5: Melhor resposta do Jogador 2 para o lance de R$ 0,05 do Jogador 1

(0,95;0,00)	X	(-0,05;$\underline{0,90}$)	(-0,05;0,85)	...	(-0,05;0,05)	(-0,05;0,00)

Fonte: própria.

Tabela 3.6: As melhores ações para o Jogador 2

J 1 \ J 2	0,00	0,05	0,10	0,15	...	1,00
0,00	X	(0,00;$\underline{0,95}$)	(0,00;0,90)	(0,00;0,85)	...	(0,00;0,00)
0,05	(0,95;0,00)	X	(-0,05;$\underline{0,90}$)	(-0,05;0,85)	...	(-0,05;0,00)
0,10	(0,90;0,00)	(0,90;-0,05)	X	(-0,10;$\underline{0,85}$)	...	(-0,10;0,00)
0,15	(0,85;0,00)	(0,85;-0,05)	(0,85;-0,10)	X	...	(-0,15;0,00)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1,00	(0,00;0,00)	(0,00;-0,05)	(0,00;-0,10)	(0,00;-0,15)	...	X

Fonte: própria.

Procedendo de forma análoga, considera-se a melhor ação possível de ser tomada pelo Jogador 1 para cada uma das ações tomadas pelo Jogador 2. Em outras palavras, faça o mesmo que foi feito acima; a diferença reside no seguinte: para cada coluna fixada e representando um lance específico dado pelo Jogador 2, deverá se sublinhar ou se destacar a melhor ação para o Jogador 1. Ao fim desses processos, a Tabela 3.1 deverá ficar inteira sublinhada.

Tabela 3.7: As melhores ações para os jogadores

J 1 \ J 2	0,00	0,05	0,10	0,15	...	1,00
0,00	X	(0,00;$\underline{0{,}95}$)	(0,00;0,90)	(0,00;0,85)	...	(0,00;0,00)
0,05	($\underline{0{,}95}$;0,00)	X	(-0,05;$\underline{0{,}90}$)	(-0,05;0,85)	...	(-0,05;0,00)
0,10	(0,90;0,00)	($\underline{0{,}90}$;-0,05)	X	(-0,10;$\underline{0{,}85}$)	...	(-0,10;0,00)
0,15	(0,85;0,00)	(0,85;-0,05)	($\underline{0{,}85}$;-0,10)	X	...	(-0,15;0,00)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
1,00	(0,00;0,00)	(0,00;-0,05)	(0,00;-0,10)	(0,00;-0,15)	...	X

Observa-se que não haverá nenhum perfil com as suas duas entradas correspondentes sublinhadas ao mesmo tempo visto que, acima da diagonal contendo os 'X', vão estar todos os perfis com a segunda coordenada sublinhada e, semelhantemente, abaixo dela estarão aqueles com a primeira sublinhada. Como o perfil com as duas coordenadas sublinhadas representaria uma melhor resposta a ambos, a conclusão é que não existe *equilíbrio de Nash* em *estratégias puras* para o Leilão da moeda de um real.

3.2 Leilão da moeda de um real - Solução de Nash

A presente seção deverá mostrar que, em muitas situações, alianças ou cooperações poderão ser formadas em prol de um ganho individual maior. Para isso, lança-se mão do exemplo introduzido na Seção 3.1 em sua íntegra com uma única diferença: os jogadores deverão versar sobre estratégias asseguradoras de um resultado que seja o melhor possível para cada participante. Tem-se, novamente, a mesma moeda de um real sendo leiloada e as mesmas regras básicas: ganha quem der o maior lance, e o perdedor paga seu valor proposto.

Imagina-se que essa aliança seja formada em termos da divisão igualitária dos lucros e dos dividendos. Intitula-se de x_1 o lance feito pelo Jogador 1 e, de x_2, o feito pelo Jogador 2; ou seja, um acordo possível seria $x = (x_1, x_2)$, sendo x um dos resultados contidos no conjunto X de todos os acordos possíveis em um problema de barganha, como visto na Seção 2.5. Supõe-se também, por questões práticas, que o lance vencedor seja do Jogador 1 ou, matematicamente, $x_1 > x_2$. O caso em que o lance vencedor é o do Jogador 2, ou ainda $x_1 < x_2$, é análogo.

Como o lance do Jogador 1 é maior que o do Jogador 2, conclui-se que existe uma diferença entre esses valores. Matematicamente, se $x_1 > x_2$, então a diferença entre x_1 e x_2 é uma constante positiva, ou melhor, $x_1 - x_2 = k$, com $k > 0$. Daí, o total de despesas dessa aliança será $x_1 + x_2 = 2x_1 - k$. Por outro lado, a receita deverá ser o valor da moeda de um real. Logo, cada jogador receberá metade do lucro total, ou ainda, um real menos as despesas totais, dividido em duas partes iguais. Observa-se que é equivalente considerar a utilidade em função do maior lance e da diferença entre os lances, ao invés dessa função depender dos dois lances:

- $u_1(x_1, k) = \dfrac{1 - 2x_1 + k}{2}$ e
- $u_2(x_1, k) = \dfrac{1 - 2x_1 + k}{2}$.

Procurando maximizar o produto das utilidades, como sugere o resultado da Seção 2.5, tem-se

$$u_1 u_2 = \frac{(1 - 2x_1 + k)^2}{4},$$

ou seja, o problema agora é maximizar uma função de segundo grau no parâmetro k. Utilizando as ferramentas disponíveis no Ensino Médio, descobre-se que a função produto das utilidades possui apenas uma raiz, $x_1 = \dfrac{k+1}{2}$. Evidentemente, essa raiz é maior que meio e a solução procurada seria menor que meio, de acordo com a simetria da parábola correspondente à função $u_1 u_2$. O que falta descobrir é se $u_1 u_2$ é realmente maximizada no menor valor possível de x_1, a saber, dez centavos, visto que um lance ganhador igual a zero centavo ou cinco centavos estão fora de questão.

Finalizando o problema, devem-se comparar os valores de $u_1 u_2$ analisados em ambos os extremos de lances factíveis, a saber, dez centavos e um real. De fato,

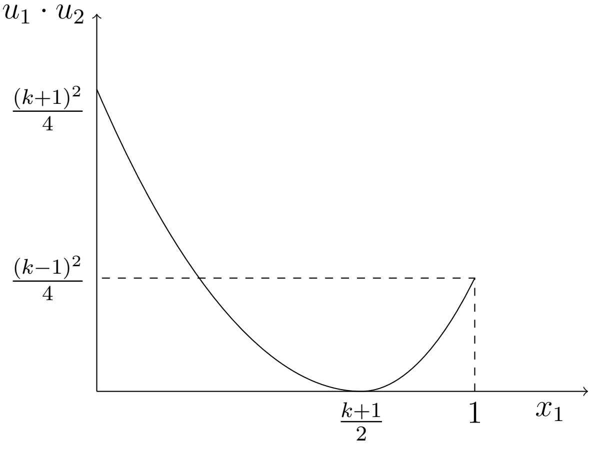
$$u_1(0.1) u_2(0.1) = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{10} + k \right)^2,$$

enquanto a avaliação do produto $u_1 u_2$ para o extremo $x_1 = 1$ resulta em

$$u_1(1) u_2(1) = \frac{1}{4} (k - 1)^2.$$

Como $\dfrac{10k + 8}{10k - 10} > 1$, segue que $\left(\dfrac{8}{10} + k \right)^2 > (k - 1)^2$, provando que o melhor acordo de barganha aos dois jogadores é dez centavos ao Jogador 1 e, consequentemente, cinco ao Jogador 2. Toda essa situação está disposta, graficamente, na Figura 3.1.

Figura 3.1: Solução de barganha ao leilão



3.3 O duopólio de Cournot

Essa aplicação pode ser realizada normalmente em sala de aula, no Ensino Médio, pois envolve conceitos básicos e já estudados como sistema linear de duas equações e duas incógnitas e função do segundo grau, além dos conceitos de Teoria dos Jogos apresentados. Para fins didáticos, os alunos que quiserem participar do experimento podem ser divididos em duas equipes: *equipe 1* e *equipe 2*. Cada equipe representa uma firma ou empresa e as duas empresas fabricam e vendem um produto *homogêneo*; isto é, um comprador não conseguiria diferenciar, a princípio, se o produto foi fabricado por um empresa ou pela outra.

A grande proposta desse modelo é chegar a uma situação estratégica em que as duas empresas obtenham o maio lucro individual possível, visto que o produto é ofertado ao mercado consumidor por ambas. Em outras palavras, a presente aplicação tem, como objetivo, usar a Teoria dos Jogos para se determinar a quantidade exata fabricada por cada empresa a fim de maximizar seus lucros, utilizando o tipo de jogo *estático* como modelo.

O francês *Cournot* propôs o seguinte: supõe-se que a *Empresa 1* e a *Empresa 2* fabriquem e vendam, respectivamente, as quantias q_1 e q_2. Ou seja, para $i = 1, 2$, q_i representa a quantia fabricada e vendida pela *Empresa i*. Seja $P(Q) = a - Q$ o preço de equilíbrio de mercado - ponto de intersecção entre *Curva de Demanda* e *Curva de Oferta* - em que Q é a quantidade total ofertada. Isto é, $P(Q)$ é o preço a ser cobrado quando a oferta do produto e sua demanda forem iguais. Aqui, por simplicidade e pensando em uma proposta didática, ambas as curvas podem ser representadas por funções lineares, o que implica a linearidade da função representando o preço de equilíbrio. Nesse caso, ao se escrever $P(Q) = a - Q$, entende-se que o coeficiente angular dessa função seja negativo e igual a menos um (GIBBONS, 1992).

Imagina-se, também, que apenas essas duas empresas façam parte desse mercado; ou seja, tem-se um *duopólio*. Dessa forma, a quantidade total ofertada é exatamente a soma das quantias disponibilizadas pelas duas firmas: $Q = q_1 + q_2$. Nesse contexto, existem duas possibilidades:

- $a \geq Q$; daí o resultado de $P(Q)$ é positivo ou nulo e sua representação é intuitiva: quanto maior a quantia ofertada ao mercado, menor será o resultado $a - Q$ e, consequentemente, menor deverá ser o preço do produto.

- $a < Q$; nesse caso, $P(Q)$ seria negativo. Porém, não há muito sentido prático ao pensar em preço negativo para o produto a ser vendido (a menos que se considere razoável as empresas pagarem os consumidores pela venda do produto, ao invés do contrário). Logo, presume-se que, se a quantia total produzida e vendida for tão grande a ponto de ultrapassar o valor de a, a oferta seria tão maior que a demanda a ponto de o produto ser entregue de graça. Matematicamente, $P(Q) = 0$.

Finalmente, para que toda essa situação se enquadre ao *modelo de duopólio de Cournot*, as duas firmas devem tomar a decisão *simultaneamente* pela quantia a ser vendida, (assim como todo jogo estático). E, se um modelo de lucros vai ser construído, devem ser analisados tanto preço de venda quanto o de custo. Como já foi definido anteriormente, nessa mesma seção, o de venda como sendo $P(Q)$, resta agora definir o de custo. Para tal, imagina-se que cada unidade produzida seja custeada em um preço igual a c. Logo, a *Empresa i* terá custo de produção equivalente a cq_i.

Tem-se, então, um jogo de informação completa e em sua forma normal (estático). Nele, o conjunto de jogadores é N={Empresa 1, Empresa 2}. O conjunto de estratégias ou ações para cada jogador i é formado por todas as quantias possíveis de produção podendo, por questões didáticas, ser devidamente abstraído para o conjunto dos números reais não negativos e menores que a; ou seja, $A_i = [0, a)$. Por último, a função utilidade poderia ser representada pelo lucro de cada empresa; isto é, a diferença entre o preço de venda e o de custo. Detalhando a utilidade da *Empresa i* para se entender como chegar ao *equilíbrio de Nash*, tem-se:

$$u_i(q_i, q_j) = q_i(P(Q) - c) = q_i(a - q_i - q_j - c)$$

.

Recordando o conceito de *equilíbrio de Nash* visto na Seção 2.3, ele deverá ser o par de estratégias (a_1^*, a_2^*) satisfazendo a condição

$$u_i(a_i^*, a_j^*) \geq u_i(a_i, a_j^*)$$

para toda ação possível a_i da *Empresa i*. Equivalente a isso é procurar otimizar a função utilidade do jogador i na variável q_i, deixando q_j^* constante. Chamando essa nova função de $f(q_i)$, pode-se escrever

$$f(q_i) = q_i(a - q_i - q_j^* - c)$$

.

Nota-se que essa função é do segundo grau; além disso, o coeficiente do termo de segundo grau $(-q_i^2)$ é igual a -1. Daí, conclui-se que a função $f(q_i)$ possui quantidade a ser produzida "q_i" que maximiza o valor do lucro, representado por $f(q_i)$. Para se determinar essa solução de otimização, deve-se encontrar o ponto médio entre as duas raízes da equação $q_i(a - q_i - q_j^* - c) = 0$ ou, equivalentemente, a abscissa do vértice da parábola oriunda da função $f(q)$. Mas tal equação possui duas raízes reais: 0 e $a - q_j^* - c$ e, a partir disso, conclui-se que $q_i^* = \dfrac{a - q_j^* - c}{2}$. Lembrando que o conjunto de jogadores possui apenas dois elementos, ou seja, $i = 1, 2$, ter-se-ão duas equações representando o equilíbrio procurado:

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{a - q_2^* - c}{2} \\ q_2^* = \dfrac{a - q_1^* - c}{2}. \end{cases}$$

Para se determinar o equilíbrio (q_1^*, q_2^*), basta resolver esse sistema proposto. Um método de resolução possível é a *substituição*. Através dela, pode-se trabalhar a primeira equação desse sistema substituindo o termo q_2^* pela fração que o representa (na segunda equação), obtendo a equação resultante $q_1^* = \dfrac{a - \frac{a - q_1^* - c}{2} - c}{2}$. Resolvendo-se as partes algébricas e simplificando, obtém-se

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3}.$$

Percebe-se que, assumindo verdadeira a relação $a > c$, q_i^* representa uma quantia positiva (para $i = 1, 2$) e está no intervalo $[0, a)$ considerado, o que era esperado de se acontecer.

Essa situação de equilíbrio pode ser interpretada como se segue. Espera-se que cada uma das duas firmas optasse por monopolizar esse mercado. Nesse contexto monopolista, há uma nova expressão representando o lucro da única firma *Empresa i* existente: $u_i(q_i, 0) = q_i(a - q_i - c)$. Esse novo cenário possui um novo ponto de equilíbrio monopolista, q_m, em que $q_m^* = \dfrac{a - c}{2}$, imprimindo um lucro individualista igual a

$$\frac{a - c}{2}\left(a - \frac{a - c}{2} - c\right) = \frac{(a - c)^2}{4}.$$

Entretanto, há duas firmas na disputa pelo mercado. Espera-se que as quantias produzidas por elas, individualmente, continuem sendo iguais para que seus lucros também os sejam; mas, a princípio, pode-se imaginar que bastaria repartir a quantia q_m^* encontrada no equilíbrio monopolista em duas partes iguais, sendo cada uma delas a exata para se produzir e se obter o maior lucro individual possível. Contudo, esse pensamento não estaria correto basicamente por duas razões complementares:

- Com apenas a quantia q_m^* em jogo, o preço de equilíbrio é maior, visto que $P(Q) = a-q_m^* > a-q_m^*-q_j$; isso acarreta uma tendência de se aumentar a quantia produzida, apesar desse aumento implicar a diminuição do preço de equilíbrio.

- A quantia $\dfrac{q_m^*}{2}$ não é a melhor resposta para a *empresa i* se a *empresa j* também optar pela mesma quantidade. Algebricamente, supõe-se que a *empresa j* opte pelo volume produzido e mencionado. Assim, a expressão representando o lucro da *empresa i* seria

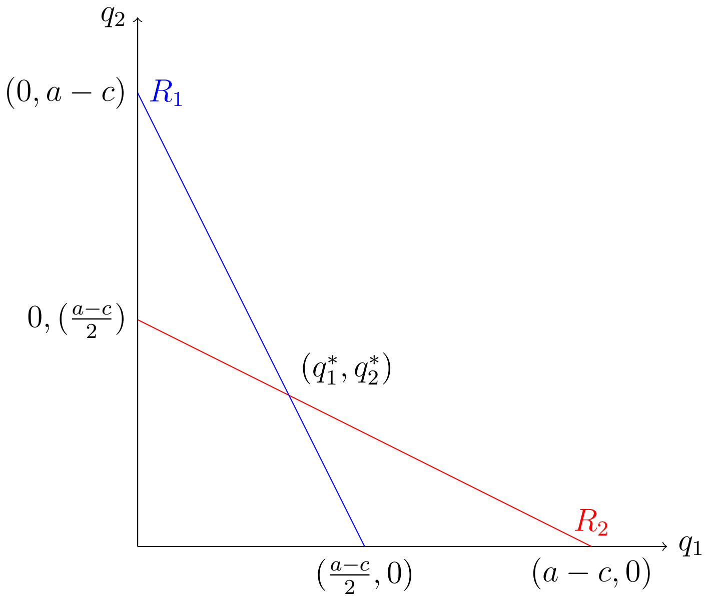
$$u_i\left(q_i, \frac{q_m^*}{2}\right) = q_i\left[a - \left(q_i + \frac{a-c}{4}\right) - c\right] = q_i\left[\frac{3(a-c)}{4} - q_i\right]$$

  que, por sua vez, teria sua melhor resposta para $q_i = \dfrac{3(a-c)}{8}$, e não para $q_i = \dfrac{a-c}{4}$ como imaginado. De fato, como previsto anteriormente, a *Empresa i* gostaria de aumentar sua quantia produzida em cinquenta porcento; basta se comparar o q_i de melhor resposta encontrado com aquele esperado.

Tudo o que foi realizado até o momento remete a uma perspectiva algébrica. Entretanto, é muito importante investir em uma análise gráfica dessa situação duopolista. Para isso, o objetivo agora é se determinar, graficamente, o ponto do plano cartesiano representando o *equilíbrio de Nash*. Inicialmente, é importante perceber como as quantias q_i e q_j se relacionam. É sabido que a equação $q_i = \dfrac{a-q_j-c}{2}$ relaciona uma quantia produzida q_j à sua correspondente e melhor resposta, a q_i

Isto é, em um cenário no qual a *Empresa j* produziu a quantia q_j, a quantidade capaz de maximizar o lucro da *Empresa i* é dada por aquela relação. Exemplificando, supõe-se que a *Empresa 1* tenha produzido a quantidade q_1. Dessa forma, a quantidade que a *Empresa 2* deveria produzir para que seu ganho fosse máximo é $R_2(q_1) = \dfrac{a-q_1-c}{2}$. Segue-se uma representação dessa situação no plano cartesiano:

Figura 3.2: As melhores respostas para quantidades produzidas



Raciocínio análogo pode ser aferido para a relação trazendo lucro máximo à *Empresa 1* após se definir a quantia produzida pela *Empresa 2*: $R_1(q_2) = \dfrac{a - q_2 - c}{2}$. Tem-se, portanto, um par de retas definidas, convenientemente, no primeiro quadrante do plano (pois lucros negativos estão fora de cogitação). Além disso, as duas retas se intersectam no ponto (q_i^*, q_j^*), representando o *equilíbrio de Nash*.

APLICAÇÃO NUMÉRICA

Com a finalidade de trazer esses conceitos ao público alvo - o Ensino Médio - segue um exemplo numérico totalmente tangível aos alunos. Inicialmente, recordam-se as informações mais relevantes para esse problema duopolista:

- a curva de demanda, $P(Q) = a - Q$;
- o custo fixo de produção marginal, c;
- a quantidade do equilíbrio de *Cournot* produzida pela *Empresa i*, $q_i^* = \frac{a-c}{3}$;
- o lucro da *Empresa i*, $u_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c]$.

Atribuindo-se valores às constantes envolvidas, segue:

- $a = 50$;
- $c = 26$.

Aqui se tem um cenário bem concreto. O melhor, para ambas as firmas, seria cada uma produzir um volume equivalente a

$$q_1^* = q_2^* = \frac{(a-c)}{3} = \frac{(50-26)}{3} = 8.$$

Pensando que a moeda corrente é o Real, conclui-se que o preço pelo qual cada unidade deverá ser vendida é igual a R$ 34,00, visto que $P(Q) = 50 - 16 = 34$. Além disso, o custo total de fabricação para cada firma deverá ser igual a R$ 208,00, pois $8c = 8.26 = 208$. Conclui-se, portanto, que o lucro obtido pelo *equilíbrio de Nash* para esse modelo é igual a R$ 64,00, já que $u_i(8,8) = 8(34-26) = 64$.

Espera-se que, ao final dessa seção, alguns objetivos tenham sido alcançados. O primeiro deles é incitar os alunos a terem necessidade de questionarem e modelarem uma situação problema proposta, na intenção de se tirar dela o maior proveito possível. O segundo é elevar a Teoria dos Jogos a uma superfície visível, com significado real. As próximas seções estão providas com os mesmos objetivos, porém com aplicações diversificadas em contextos variados.

3.4 O modelo de duopólio de Bertrand

Em sequência, será abordada uma nova proposta para as mesmas firmas apresentadas na seção 3.3. A única diferença entre os modelos *Cournot* e *Bertrand* é que, ao invés de as firmas optarem pela escolha de quantidades, a opção abrangerá a escolha do *preço* do produto. Nesse caso, quantidade seria apenas uma consequência da escolha de preço. Contudo, os dois modelos continuam sendo classificados em jogos estáticos, ou seja, a decisão de escolha de preços deve proceder da mesma forma: uma única vez e simultaneamente.

Apesar do modelo de *Bertrand* ser praticamente igual ao de *Cournot*, a simples diferença supracitada é capaz de gerar resultados bem diversos; na verdade, trata-se de dois jogos bem distintos. Isso porque as estratégias, a função utilidade e o comportamento das firmas diante do *equilíbrio de Nash* são distintos. Sendo assim, vale a pena considerar essa nova situação desde seu início.

Para isso, supõe-se que as duas firmas, *Empresa 1* e *Empresa 2*, detenham domínio exclusivo sobre a produção de certo produto, bem como no outro modelo. Ainda nesse cenário, é suposto que os produtos fabricados não sejam mais homogêneos e, portanto, sejam diferenciados; isto é, o produto fabricado pela *Empresa 1* não é igual ao fabricado pela *Empresa 2*, na perspectiva do consumidor, apesar de um poder ser substituto do outro.

Tomam-se, como exemplo, fabricantes de carros: o aumento do preço de um modelo mais renomado poderia aumentar a demanda por carros mais populares. Essa dependência sugere uma lei de formação da quantidade de demanda pelo produto da *Empresa* i, representada por q_i, levando em conta o preço individual do produto ser decisivo no aumento ou diminuição de sua própria demanda. Matematicamente,

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j,$$

em que a constante "a" poderia representar um cenário geral de produção, dependendo de diversos outros fatores, e a constante positiva b poderia ser um reflexo da possibilidade de substituição do produto da *Empresa* j pelo da *Empresa* i.

Exemplificando, tomando-se os valores p_i e p_j como preços unitários provenientes da *Empresa* i e da *Empresa* j, respectivamente, quanto maior o valor da constante a, mais favorável estaria o mercado na recepção do produto a ser confeccionado. Por outro lado, quanto maior o valor da constante b, mais favorável seria à *Empresa* i o aumento de preço do produto pela firma rival, tornando aquela uma possível substituta de mercado. Finalmente, quanto maior o preço estipulado pela *Empresa* i, menos o mercado aceitará o produto fabricado por ela.

Deve-se ressaltar que, na prática, essa relação é um pouco mais complexa e engloba mais variáveis, entretanto para se difundirem aplicações da teoria dos jogos no Ensino Médio são necessárias adaptações e simplificações. Por isso, exemplificando, serão descartados custos fixos, sendo então o único custo por unidade produzida igual a c, para ambas as firmas. Finalmente, recorda-se que a decisão pelo preço do produto será tomada pela duas simultaneamente e uma única vez, como já mencionado anteriormente, enquadrando o contexto em um jogo estático.

Como procedido no modelo de *Cournot*, o primeiro passo é transformar essa proposta em um jogo na sua forma normal. Existem, novamente, dois jogadores; porém, nesse modelo, as estratégias possíveis não são as quantias produzidas, mas o preço cobrado pela produção. Por motivos didáticos, é razoável descartar as possibilidades em que os preços cobrados sejam negativos, assim como fazer a extensão dos preços discretos para os contínuos. Isto é, o conjunto de ações puras de cada firma pode ser expandido para o dos números reais não negativos. Simbolicamente,

$$A_i = [O, \infty),$$

para $i = 1, 2$.

Em uma situação como essa, comumente se escolhe o lucro individual de cada firma como função utilidade. Como anteriormente, o lucro da *Empresa* i será a diferença entre receita e despesa atreladas à produção de uma quantia q_i. Lembra-se que a quantia q_i produzida depende do preço determinado por ambas as firmas; como já visto, $q_i = a - p_i + bp_j$. Nota-se, também, que ela gera receita igual a

$$p_i q_i = p_i(a - p_i + bp_j)$$

e custo igual a

$$q_i c.$$

Então, a função utilidade da *Empresa i* pode ser deduzida por

$$u_i(p_i, p_j) = (a - p_i + bp_j)(p_i - c).$$

Definido o *payoff* ou pagamento para ambas as firmas, o próximo passo é a determinação do *equilíbrio de Nash*. Apesar de esse jogo ser diferente daquele proposto no modelo de *Cournot*, na Seção 3.3, a ideia de equilíbrio é a mesma, em sua essência. Matematicamente, para cada *Empresa i*, (p_i^*, p_j^*) é tal equilíbrio se p_i^* maximizar a função quadrática $f(p_i) = (a - p_i + bp_j^*)(p_i - c)$ ou, em outras palavras, se p_i^* for solução de

$$\max_{0 \leq p_i < \infty} (a - p_i + bp_j^*)(p_i - c).$$

Novamente, tem-se um problema de maximização de uma função do segundo grau na variável p_i. Analisando a forma fatorada destacada acima, percebe-se facilmente que as duas raízes de tal função são iguais a $a + bp_j^*$ e c. Dessa maneira, para se encontrar tal p_i^*, que representa a abscissa do vértice da parábola associada à função $f(p)$, pode-se determinar o ponto médio entre aquelas raízes:

$$p^* i = \frac{a + bp_j^* + c}{2}.$$

Na intenção de se desenvolver, novamente, habilidades na resolução de sistemas lineares, faz-se presente a ideia do ponto (p_1^*, p_2^*) ser *equilíbrio de Nash* se for solução do sistema linear

$$\begin{cases} p_1^* = \dfrac{a + bp_2^* + c}{2} \\ p_2^* = \dfrac{a + bp_1^* + c}{2}. \end{cases}$$

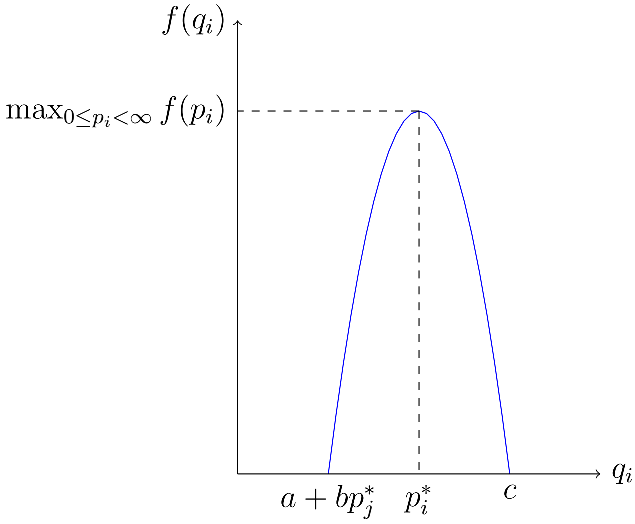
Procedendo de forma análoga ao do modelo de *Cournot*, pode-se determinar a solução desse sistema linear por meio do método de substituição e encontrar, como resultado,

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b}.$$

Ou seja, para que as duas firmas tenham um lucro máximo ao determinar um preço para seus produtos de forma simultânea e única, esse preço deverá ser o mesmo para ambas; além disso, deverá ser igual à solução p_i^* encontrada, com $i = 1, 2$.

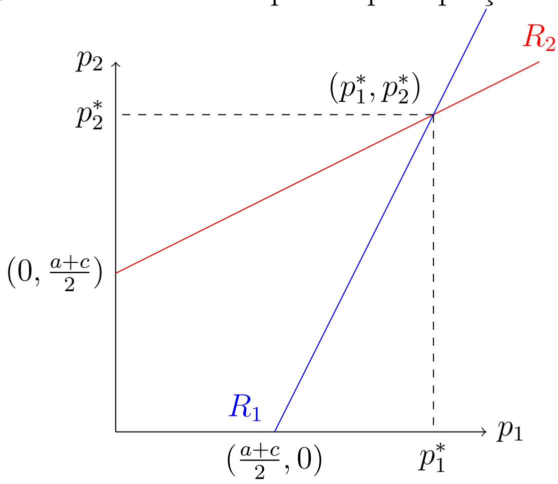
De maneira semelhante àquela vista na seção 3.3, para se determinar o ponto de equilíbrio geometricamente, deve-se proceder como se segue. A princípio, a função quadrática $f(p_i) = (a - p_i + bp_j^*)(p_i - c)$ representando os melhores preços a serem escolhidos pela *Empresa i*, de acordo com a escolha fixa p_j^* da *Empresa j*, será plotada. Recorda-se que suas raízes são $a + bp_j^*$ e c; além disso, a variável independente p_i^2 possui coeficiente negativo, forçando a concavidade da parábola representante dessa função ser para baixo. Por último, observa-se que as duas raízes são positivas e que, sem perda de generalidade, pode-se supor que $a + bp_j^*$ seja menor que c apenas para se desenhar a função no plano cartesiano.

Figura 3.3: Otimização para a *Empresa i*



Assim como na seção 3.3, pode-se determinar o equilíbrio (p_i^*, p_j^*) geometricamente. Como já é sabido, escancararam-se as relações entre os possíveis preços de uma firma e a melhor resposta correspondente da outra. Numericamente, os melhores preços para a *Empresa 1*, de acordo com cada preço fornecido pela firma 2, são dados pela relação $R_1(p_2) = \frac{1}{2}(a + bp_2 + c)$. De forma inteiramente análoga, obtém-se a relação entre cada preço possível p_1 - adotado pela firma 1 - e o melhor preço correspondente para a firma 2: $R_2(p_1) = \frac{1}{2}(a + bp_1 + c)$. Tem-se, portanto, duas retas R_1 e R_2 e, novamente, a intersecção entre ambas fornecerá, geometricamente, o equilíbrio desejado: (p_i^*, p_j^*).

Figura 3.4: As melhores respostas para preços escolhidos



APLICAÇÃO NUMÉRICA

Para fins didáticos e praticáveis no Ensino Médio, recomenda-se, ao profissional difusor das práticas de ensino, a recorrência à exemplificação numérica de conceitos algébricos abstratos sempre que possível. Em outras palavras, o professor interessado em criar um contexto mais palpável para seus alunos poderá, dotado de alguma estratégia, escolher valores convenientes para os parâmetros envolvidos - no caso, os parâmetros a, b e c. Se o professor adotasse, por exemplo, a situação em que $a = 4$, $b = 1$ e $c = 2$, obteria um par de retas bem semelhante ao proposto na presente seção.

Caso esses parâmetros estivessem escritos na unidade "*dezenas de reais*", por exemplo, o preço a ser escolhido, por ambas as firmas, para venderem seus produtos na intenção de maximizarem seus lucros, nesse âmbito duopolista, deveria ser igual a R$ 60,00 (seis dezenas de reais) por unidade. Isso porque, ao se substituírem os parâmetros escolhidos na solução obtida

$$p_i^* = p_j^* = \frac{a+c}{2-b},$$

facilmente se encotraria, como *equilíbrio de Nash*, o valor numérico

$$\frac{4+2}{2-1} = 6.$$

3.5 O modelo de duopólio de Stackelberg

Stackelberg propôs um modelo também muito semelhante ao de *Cournot*; porém, o alemão conseguiu transformar o jogo trazido pelo francês - simétrico e estático - em um jogo assimétrico e dinâmico quando substituiu a *"simultaneidade"* na tomada de decisão das duas firmas pela *"sequência observada"*. A ideia central permanece: duas firmas disputam um mercado duopolista na produção de um bem homogêneo e necessitam decidir pela quantidade produzida, para maximizarem seus lucros individuais.

Nessa nova conjectura, o *modelo de Stackelberg* é diferente dos demais, desenvolvidos nas seções 3.3 e 3.4, sendo composto por duas etapas: em um primeiro momento, apenas uma das duas firmas, chamada de “firma líder”, decidirá a *quantidade* a ser fabricada. Na segunda etapa, após a firma líder ter feito sua escolha e ela ter sido divulgada e reconhecida pela oponente, essa, chamada de “firma seguidora”, fará a sua própria decisão, baseando-se na quantidade escolhida pela líder.

Existem várias razões pelas quais essa decisão ocorre em tempos diferentes, mas não deverão ser discutidas nessa seção. Contudo, as consequências desse atraso na decisão da quantidade a ser fabricada, pela firma seguidora, irão ser analisadas matematicamente. Para se iniciarem os estudos de um duopólio enquadrado nesse modelo, supõe-se que a *Empresa 1* exerça papel de firma líder e escolha uma quantia não negativa a ser produzida, $q_1 \geq 0$; em seguida, a *Empresa 2* observa essa quantidade escolhida e, a partir dela, escolhe sua própria, também não negativa, $q_2 \geq 0$.

Admite-se que a função utilidade da *Empresa i* seja seu lucro, assim como no modelo de *Cournot* visto detalhadamente na Seção 3.3. Novamente, o lucro será a diferença entre receita e despesa. A receita é dada pela quantia produzida multiplicada pelo preço de venda, e o custo total é formado a partir do produto entre a mesma quantia fabricada e o custo individual ou marginal do produto, lembrando que custos mais abrangentes como aluguel fogem do escopo dessas aplicações. Matematicamente, o lucro obtido na elaboração e venda de q_i unidades, pela *Empresa i*, é dado pela equação

$$u_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c].$$

Analogamente aos outros modelos, $P(Q) = a - q_i - q_j$ representa o preço de equilíbrio de mercado, reflexo da quantia acumulada e fabricada por ambas as firmas, e c é o custo marginal de produção.

Inicia-se a busca pela solução matemática representante da melhor decisão possível, a ser tomada pelas duas firmas individualmente. Uma forma de pensar sobre essa situação sequencial é realizando o raciocínio tático inverso. Como a primeira escolha foi feita pela *Empresa 1*, a primeira atitude é a observar a reação da *Empresa 2* àquela decisão. Novamente, surge, nesse contexto, a relação entre uma escolha arbitrária da *Empresa 1* e a melhor resposta que a *Empresa 2* poderia obter a partir disso. Essa relação possui suas origens na solução já conhecida do problema proposto na Seção 3.3 e se resume na procura pela maximização de uma função do segundo grau:

$$\max_{q_2 \geq 0} u_2(q_1, q_2) = \max_{q_2 \geq 0} q_2(a - q_1 - q_2 - c),$$

trazendo, como melhor resposta, $R_2(q_1) = \dfrac{a - q_1 - c}{2}$. Ou seja, partindo-se do pressuposto de que a *Empresa 1* tenha escolhido a quantidade q_1 para sua produção, a melhor resposta para a *Empresa 2* seria igual a $R_2(q_1)$.

Entretanto, percebe-se que essa relação é exatamente a mesma formulada para a *Empresa 2* no modelo de *Cournot*. A diferença crucial é que, naquele modelo, R_2 representa a melhor resposta para uma situação hipotética que ainda nem havia acontecido, visto que lá as decisões são tomadas simultaneamente. Já no modelo presente, R_2 é escolhida na segunda fase do jogo e representa uma reação concreta a uma tomada de decisão já realizada pela *Empresa 1* na primeira fase.

"Eu penso que ele pensa que eu penso": esse é o segredo para se garantirem os melhores resultados no presente jogo. A firma líder sabe que sua seguidora irá optar por produzir a quantia R_2, pois se posiciona no lugar dela e pensa como ela, ou melhor, em maximizar seus lucros. Esse fato dá uma grande vantagem à *Empresa 1*, que já antecipa a jogada da *Empresa 2* logo na primeira fase do jogo e se dispõe a solucionar um novo problema de maximização decorrente da sequencialidade:

$$\max_{q_1 \geq 0} u_1(q_1, R_2(q_1)).$$

Resolver essa maximização é quase o mesmo que resolver R_1 no modelo de *Cournot*. A única diferença é que, no lugar da quantidade hipotética q_2^*, será colocada a quantidade real R_2 obtida nessa seção. Em outras palavras, a firma líder deseja resolver o problema de otimização seguinte:

$$\max_{q_1 \geq 0} q_1[a - q_1 - R_2(q_1) - c] = \max_{q_1 \geq 0} q_1 \frac{a - q_1 - c}{2}.$$

Recorrendo-se, novamente, aos conceitos relacionados às funções quadráticas e seus pontos de máximo, a *Empresa 1* encontra a quantidade $q_1^* = \dfrac{a - c}{2}$ como melhor tomada de decisão no primeiro estágio do jogo. Consequentemente, a *Empresa 2* se vê obrigada, no segundo estágio do jogo, a escolher a quantidade $R_2(q_1^*) = \dfrac{a - c}{4}$ que, no caso, é a melhor resposta real à decisão da líder.

Torna-se extremamente relevante fazer uma análise paralela sobre os diferentes lucros obtidos, em cada um dos dois contextos: o estático modelo de *Cournot*, abordado na Seção 3.3, e o dinâmico, representado pelo modelo de *Stackelberg*. Comparando-se as funções lineares representativas dos preços de equilíbrio dos dois modelos, observa-se que, no duopólio de *Cournot*, a quantia agregada das duas firmas, Q, é igual a $\dfrac{2}{3}(a - c)$; já no modelo presente, a quantia agregada é **maior**: $Q = \dfrac{3}{4}(a - c)$. Isso traz uma consequência notável: o preço de equilíbrio $P(Q) = a - Q$ é **menor** no modelo de *Stackelberg*.

A fim de detalhar essa comparação, chama-se de $P_C(Q)$ e $P_S(Q)$ os preços de equilíbrio apresentados nos modelos de *Cournot* e *Stackelberg*, respectivamente. Mantendo-se fixos e se repetindo os valores a e c em cada curva, tem-se

$$\frac{P_C(Q)}{P_S(Q)} = \frac{a - \frac{2}{3}(a-c)}{a - \frac{3}{4}(a-c)} = \frac{12a - 8(a-c)}{12a - 9(a-c)} = \frac{a-c}{3a+9c} + 1 > 1,$$

isto é, $P_C(Q) > P_S(Q)$, como previsto. É sabido que foi assumida a desigualdade $a > c$ para que as quantias de equilíbrio produzidas fossem positivas.

Para serem abordados os lucros da empresa líder nos dois modelos algebricamente, considera-se, por questões de facilidade, que u_C e u_S sejam, nessa ordem, os lucros da *Empresa 1* nos duopólios de *Cournot* e *Stackelberg*. É esperado, também, que q_C^* e q_S^* correspondam às melhores escolhas para as quantias produzidas nos modelos de *Cournot* e *Stackelberg*, respectivamente. Comparando-se os lucros dos dois modelos, obtém-se:

$$\frac{u_C}{u_S} = \frac{q_C^*[P_C(Q)-c]}{q_S^*[P_S(Q)-c]} = \frac{\dfrac{1}{3}(a-c)[P_C(Q)-c]}{\dfrac{1}{2}(a-c)[P_S(Q)-c]} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{a-c}{3a+8c}\right).$$

Como $a > 0$ e $c > 0$, é fácil perceber que $2a < 3a$ e $-2c < 8c$. Somando-se ambos os membros, obtém-se:

$$2a - 2c < 3a + 8c \Leftrightarrow \frac{2a-2c}{3a+8c} < 1 \Leftrightarrow \frac{2(a-c)}{3a+8c} < 1 \Leftrightarrow \frac{a-c}{3a+8c} < \frac{1}{2}.$$

Disso, segue que

$$1 + \frac{a-c}{3a+8c} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3}.\frac{(a-c)}{3a+8c} < \frac{2}{3}.\frac{3}{2} = 1.$$

Conclui-se, portanto, que o lucro para a firma líder no modelo de *Stackelberg* é maior que o do de *Cournot*.

Por outro lado, no intuito de se confrontarem os lucros obtidos pela firma seguidora nos mesmos dois modelos, procede-se de forma inteiramente análoga à realizada na comparação de lucros da firma líder. Usando-se uma nomenclatura bem semelhante, tem-se a analogia feita entre os lucros da firma seguidora, nos modelos de *Cournot* e *Stackelberg*:

$$\frac{u_C}{u_S} = \frac{q_C^*[P_C(Q)-c]}{q_S^*[P_S(Q)-c]} = \frac{\dfrac{1}{3}(a-c)[P_C(Q)-c]}{\dfrac{1}{4}(a-c)[P_S(Q)-c]} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{a-c}{3a+8c}\right) > 1.$$

Dessa maneira, percebe-se que o lucro da *Empresa 2* é maior no modelo *Cournot*, como previsto.

Nota-se que firma seguidora ter notícia sobre a quantia q_1 escolhida pela firma líder e, com mesma importância, a firma líder saber que sua seguidora tem conhecimento sobre a quantia q_1, é fator determinante no favorecimento de uma das duas firmas. Para melhor compreensão sobre as consequências de se ter ou não informações antecipadas, considera-se um jogo quase idêntico ao de *Stackelberg*, também realizado em dois estágios. No primeiro, a firma líder escolhe q_1; no segundo, a firma seguidora escolhe q_2 mas sem ter a informação da quantia q_1 escolhida no primeiro estágio.

Se a firma seguidora acreditar que a líder tenha escolhido o equilíbrio $q_1^* = \frac{1}{2}(a - c)$ do modelo de *Stackelberg*, então, como visto, a melhor resposta real para a quantia produzida seria $q_2^* = \frac{1}{4}(a - c)$. Porém, se a firma líder tiver motivos suficientes para acreditar que sua seguidora irá optar por essa escolha, ou seja, $\frac{1}{4}(a-c)$, então naturalmente a líder fará outra escolha no primeiro estágio: a melhor resposta à quantia prevista a ser escolhida pela seguidora.

Usando as mesmas ferramentas exploradas na solução de maximização de respostas, obtém-se, para esse novo universo, a melhor quantia a ser escolhida pela empresa líder:

$$R_1(q_2^*) = R_1\left(\frac{a-c}{4}\right) = \frac{3}{8}(a-c),$$

capaz de produzir um lucro ainda maior do que o determinado pelo modelo de *Stackelberg*. A decisão por essa nova quantia, portanto, tende a favorecer a líder em detrimento da seguidora. É sabido que a única diferença entre os modelos de *Cournot* e *Stackelberg* é o acesso à informação da quantidade produzida, decorrente do propósito sequencial do jogo de *Stackelberg*. Matematicamente, acabou de ser provado que esse acesso traz vantagens lucrativas à empresa líder.

APLICAÇÃO NUMÉRICA

Com o intuito de apostar em comparações enriquecedoras, será abordado o mesmo exemplo numérico da seção 3.3. Recordam-se, então, as informações mais relevantes para esse modelo de *Stackelberg*:

- a curva de demanda, $P(Q) = a - Q$;
- o custo fixo de produção marginal, c;
- a quantidade representante do equilíbrio de *Stackelberg* e produzida pela *Empresa 1*, $q_1^* = \dfrac{a-c}{2}$;
- a melhor resposta para a *Empresa 2*, $q_2^* = \dfrac{a-c}{4}$
- o lucro da *Empresa i*, $u_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c]$.

Atribuindo-se os mesmos valores da aplicação numérica da seção 3.3 às constantes envolvidas, seguem:

- $a = 50$;
- $c = 26$.

Novamente, está sendo desenvolvida uma proposta tangível aos alunos. A firma líder deverá produzir 12 unidades, porque

$$q_1^* = \frac{a - c}{2} = \frac{50 - 26}{2} = 12.$$

Entretanto, a firma seguidora se verá na obrigação de fabricar uma quantia

$$q_2^* = \frac{(a - c)}{4} = \frac{(50 - 26)}{4} = 6.$$

Daí, conclui-se que o preço pelo qual cada unidade deverá ser vendida é igual a R$32,00, visto que $P(Q) = 50 - 18 = 32$. Com isso, o lucro individual de cada firma representando suas melhores escolhas, nos moldes de *Stackelberg*, deverá ser:

- $u_1(12, 6) = 12.(32 - 26) = 72$, ou seja, a líder abraçará R$ 72,00;
- $u_2(12, 6) = 6.(32 - 26) = 36$, isto é, a seguidora lucrará a metade do valor lucrado pela líder: R$ 36,00.

3.6 Batalha dos sexos

Essa aplicação possui um significado bastante abrangente, visto que é uma representação concisa de situações pautadas na divergência corriqueira de opinião entre duas pessoas. Imagina-se um casal, representado por um homem chamado Tarcísio e por uma mulher chamada Marina, tendo que decidir onde deveriam passar uma noite específica de sábado. As duas opções para essa noite são: churrasco caseiro ou rodízio de comida japonesa em um restaurante tradicional. Os dois apreciam os dois tipos de culinária; porém, a esposa tende a participar do rodízio de comida japonesa.

Por outro lado, o marido, Tarcísio, prefere um churrasco caseiro, porque nele é possível comer e beber mais, pelo mesmo preço gasto no rodízio de comida japonesa. Deve-se levar em conta que ambos, marido e mulher, apesar de apreciarem os dois tipos de comida, têm prioridades distintas. Ele prefere o churrasco; ela, o rodízio. Além disso, tanto o homem quanto a mulher preferem não sair sozinhos no sábado noturno.

Chegou a noite esperada e o casal ainda não tomou sua decisão sobre o que fazer: rodízio de comida japonesa ou churrasco? Para se fazer uma análise racional sobre essa conjectura, pode-se montar uma tabela de pagamentos baseando-se em algumas medidas: atribui-se um ponto positivo para cada um dos componentes do casal, tanto à comida preferida quanto à bebida e à economia. Por outro lado, atribui-se zero ponto para ambos, caso saiam sozinhos: ele, em casa no churrasco e ela, no restaurante.

Tabela 3.8: O sábado do casal

		Tarcísio	
		Rodízio	Churrasco
Marina	Rodízio	2, 1	0, 0
	Churrasco	0, 0	3, 3

Como Marina bebe menos que Tarcísio e a cerveja é mais cara no rodízio do que no churrasco caseiro, ela se satisfaz bebendo pouco tanto em uma quanto em outra situação. Isso sugere um pagamento igual a 2 no restaurante (um de comida mais um de bebida) e outro pagamento igual a 3 no churrasco (um de comida, um de bebida e um de economia). Por outro lado, seu marido se satisfaz apenas com a comida no restaurante (pagamento igual a 1), pois sua vontade de beber não é saciada devido aos custos maiores de bebida, quando comparados com os de se beber em casa. Contudo, o casal unido, no churrasco, satisfaz-se com economia, comida e bebida (pagamento igual a 3).

A proposta desse exemplo é, mais uma vez, tentar fazer ambos chegarem a um acordo racional ao se discutir o *equilíbrio de Nash*. Antes da análise, chama-se de R a opção referente ao *restaurante* e de C aquela referente ao *churrasco*. Então, supõe-se que Marina seja o Jogador 1 e que seu marido seja o Jogador 2. Se esses jogadores, nessa ordem, optarem pelas estratégias mistas $p_1 = (r, 1-r)$ e $p_2 = (q, 1-q)$, em que r e q são as chances do Jogador 1 e do Jogador 2 escolherem o restaurante de rodízio japonês, o pagamento esperado ao Jogador 1 deverá ser:

- $u_1(R,R;1,p_2) = u_1(R,R;1,q) = u_1(R, q \cdot R + (1-q) \cdot C) = q \cdot u_1(R,R) + (1-q) \cdot u_1(R,C) = q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = 2q$, caso escolha *Rodízio*;
- $u_1(C,R;1,p_2) = u_1(C,R;1,q) = u_1(C, q \cdot R + (1-q) \cdot C) = q \cdot u_1(C,R) + (1-q) \cdot u_1(C,C) = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 3 = 3(1-q)$, caso opte por *Churrasco*.

Como feito no Capítulo 2, esses pagamentos referentes ao Jogador 1 foram realizados na perspectiva de estratégias puras disponíveis a ele. Observa-se que, no caso de se considerar a estratégia mista $p_2 = (q, 1-q)$, a análise de otimização poderia ser manipulada como segue:

$$u_1(R,R;p_1,p_2) = u_1(p_1,p_2) = u_1(r \cdot R + (1-r) \cdot C, q \cdot R + (1-q) \cdot C) =$$

$$u_1(r \cdot R + (1-r) \cdot C, q \cdot R) + u_1(r \cdot R + (1-r) \cdot C, (1-q) \cdot C) =$$

$$u_1(r \cdot R, q \cdot R) + u_1((1-r) \cdot C, q \cdot R) +$$

$$+u_1(r \cdot R, (1-q) \cdot C) + u_1((1-r) \cdot C, (1-q) \cdot C).$$

Desmembrando a estrutura em relação às probabilidades e substituindo os valores dos pagamentos dispostos na Tabela 3.8, obtém-se:

$$u_1(p_1, p_2) = rq \cdot u_1(R, R) + (1-r)q \cdot u_1(C, R) +$$

$$+r(1-q) \cdot u_1(R, C) + (1-r)(1-q) \cdot u_1(C, C) \Leftrightarrow$$

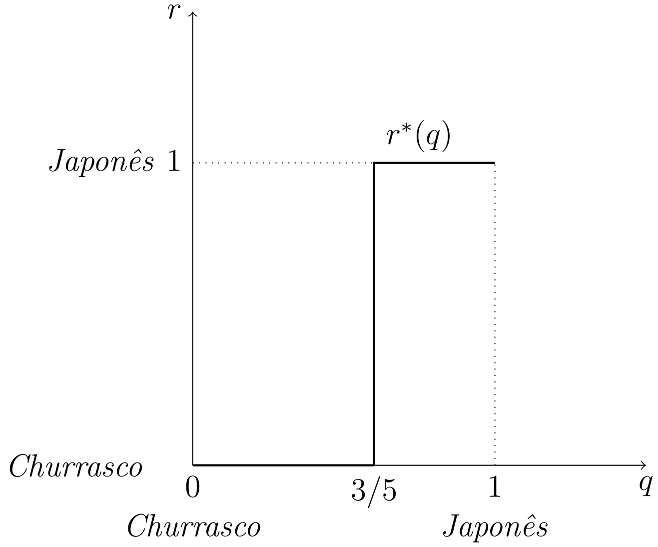
$$u_1(r, q) = rq \cdot 2 + (1-r)q \cdot 0 + r(1-q) \cdot 0 + (1-r)(1-q) \cdot 3 = (5q-3)r + 3(1-q).$$

Fixando-se os valores de q e procurando as melhores respostas de Marina à mista $(q, 1-q)$ de Tarcísio, chega-se à conclusão de que o pagamento esperado por Marina, $u_1(r) = (5q-3)r + 3(1-q)$, é crescente caso $q > \frac{3}{5}$. Resumindo:

- caso $q > 3/5$, Marina deve optar por $r = 1$ para maximizar seu pagamento; equivalentemente, deve escolher rodízio;
- caso $q < \frac{3}{5}$, a melhor escolha para Marina é $r = 0$, correspondendo ao churrasco caseiro;
- caso $q = \frac{3}{5}$, os pagamentos esperados a Marina independem de sua escolha, tornando-a indiferente a rodízio ou churrasco.

A figura seguinte ilustra essa conjectura:

Figura 3.5: As melhores respostas de Marina - Batalha dos Sexos



Agora, para se determinarem os melhores pagamentos $q^*(r)$ ao marido, procede-se de forma inteiramente análoga:

$$u_2(q) = (4r - 3)q + 3(1 - r).$$

Analisando o intervalo de crescimento dessa função, após se fixarem os valores de r, conclui-se que:

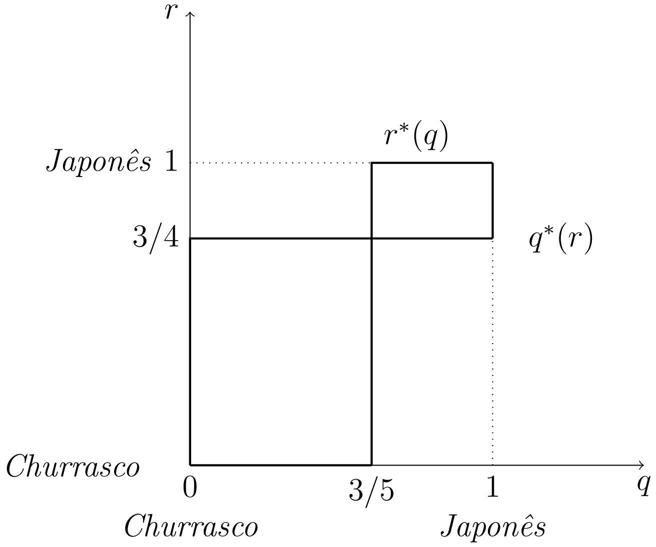
- caso $r > 3/4$, $q = 1$ será a melhor estratégia a Tarcísio, isto é, japonês;
- caso $r < 3/4$, $q = 0$ será o melhor a se fazer, ou seja, churrasco;
- caso $r = 3/4$, tanto faz ao marido: churrasco ou rodízio.

Graficamente, cada intersecção entre as duas linhas poligonais representando as melhores respostas $r^*(q)$ e $q^*(r)$ deverá ser um *equilíbrio de Nash*. São eles: $(0, 0)$, $(3/5, 3/4)$ e $(1, 1)$; detalhando:

- $(0, 0)$ representa $r = 0$ e $q = 0$. Ou seja, churrasco para os dois;
- $(1, 1)$ representa $r = 1$ e $q = 1$. Ou ainda, japonês para os dois;
- $(3/5, 3/4)$ representa $r = 3/4$ e $q = 3/5$. Em outras palavras, Marina deve escolher rodízio de comida japonesa com proporção de 75% e Tarcísio, com proporção de 60%.

Para finalizar, é observado que $u_1(0, 0) = 3$, $u_1(1, 1) = 2$ e $u_1(3/4, 3/5) = 6/5$, ou seja, Marina prefere a estratégia pura em que os dois participam do *Churrasco*. Analogamente, $u_2(0, 0) = 3$, $u_2(1, 1) = 1$ e $u_2(3/4, 3/5) = 3/4$; ou seja, Tarcísio prefere a mesma estratégia pura de Marina. Torna-se, pois, evidente a existência de três equilíbrios: dois em estratégias mistas e um em puras. contudo, o equilíbrio em puras é o melhor do jogo por trazer o maior pagamento individual a ambos.

Figura 3.6: Equilíbrio de Nash - Batalha dos Sexos



3.7 Vaga para emprego

Essa seção é destinada a uma aplicação do uso das estratégias mistas e a consequente determinação do *equilíbrio de Nash* nesse tipo de estratégia. Supõe-se que duas firmas diferentes estão disponibilizando uma vaga para emprego. Imagina-se, também, que os salários oferecidos por cada firma sejam diferentes: a *Firma 1* paga s_1 enquanto a *Firma 2* paga s_2. Por motivos mercantilistas, supõe-se válida a relação

$$\frac{s_1}{2} < s_2 < 2s_1,$$

ou seja, o salário pago pela *Firma 2* é maior que a metade do pago pela concorrente, mas menor que o dobro do pago pela *Firma 1*.

Por outro lado, supõe-se que existam dois trabalhadores aptos e interessados aos cargos, mas que as empregadoras prezem por exclusividade: cada empregado deve trabalhar apenas em uma empresa. Os candidatos devem escolher a empresa pretendida simultaneamente: *Firma 1* ou *Firma 2*. Caso apenas um candidato escolha determinada empresa, ele fica com o serviço. Mas se os dois escolherem a mesma empresa, por motivos éticos, essa empresa escolhe um deles aleatoriamente, deixando o outro desempregado e sem possibilidade de escolher a concorrente, que o considera traidor. A Tabela 3.9 ilustra os pagamentos:

Tabela 3.9: Os salários

		Candidato 2	
		Escolhe Firma 1	Escolhe Firma 2
Candidato 1	Escolhe Firma 1	$\frac{s_1}{2}, \frac{s_1}{2}$	s_1, s_2
	Escolhe Firma 2	s_2, s_1	$\frac{s_2}{2}, \frac{s_2}{2}$

O objetivo é determinar o equilíbrio do jogo. Para isso, supõe-se que $p_1 = (r, 1-r)$ e $p_2 = (q, 1-q)$ sejam as estratégias mistas adotadas pelos candidatos 1 e 2, nessa ordem. O pagamento esperado ao *Candidato 1* será:

$$u_1(p_1, p_2) = rq \cdot \frac{s_1}{2} + (1-r)q \cdot s_2 + r(1-q) \cdot s_1 + (1-r)(1-q) \cdot \frac{s_2}{2}.$$

Aplicando-se as propriedades algébricas básicas, chega-se ao resultado simplificado:

$$u_1(r, q) = \frac{[2s_1 - q(s_1 + s_2) - s_2] \cdot r + (1+q)s_2}{2}.$$

Assim como o jogo dos *centavos combinados*, em que foi determinado o equilíbrio ao se fixarem os valores de q entre zero e um, novamente se entende que u_1 será crescente se, e somente se,

$$q < \frac{2s_1 - s_2}{s_1 + s_2}.$$

Por isso, o *Candidato 1* deverá escolher $r = 1$, ou ainda, a *Firma 1.* Por outro lado, caso

$$q > \frac{2s_1 - s_2}{s_1 + s_2},$$

a melhor escolha pelo *Candidato 1* será $r = 0$, isto é, *Firma 2.*

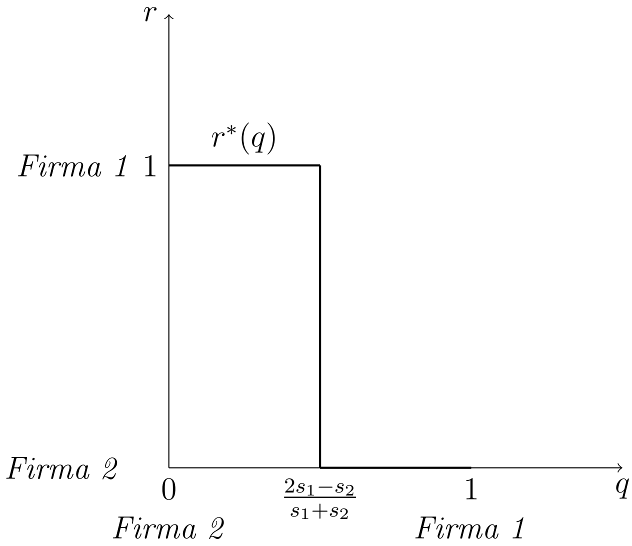
Finalmente, se ao invés de qualquer uma das desigualdades ocorrer a igualdade, então o candidato em questão seria indiferente às estratégias adotadas pelo concorrente, pois seu pagamento esperado $u_1(r, q)$ não dependeria do valor r adotado. Nota-se, ainda, que as restrições adotadas no início dessa seção acerca da relação de ordem entre os valores dos salários s_1 e s_2 garantem que a fração obtida

$$\frac{2s_1 - s_2}{s_1 + s_2}$$

esteja devidamente localizada no intervalo $[0, 1]$. Graficamente, as melhores respostas do *Candidato 1*, $r^*(q)$, seriam bem representadas pela linha poligonal da Figura 3.7:

O cálculo das melhores respostas do *Candidato 2* às estratégias mistas adotadas por seu concorrente são realizados de maneira análoga. Daí, tem-se:

Figura 3.7: Emprego - melhores respostas do *Candidato 1*

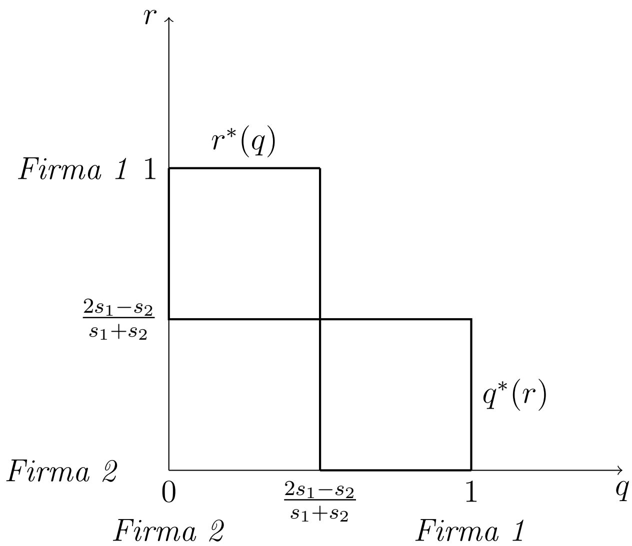


$$u_2(p_1, p_2) = rq \cdot \frac{s_1}{2} + (1-r)q \cdot s_1 + r(1-q) \cdot s_2 + (1-r)(1-q) \cdot \frac{s_2}{2}$$

e, de maneira semelhante à determinação das melhores respostas do *Concorrente 1*, pode-se escrever o pagamento esperado ao *Concorrente 2* convenientemente como:

$$u_2(r, q) = \frac{[2s_1 - r(s_1 + s_2) - s_2] \cdot q + (1+r)s_2}{2}.$$

Figura 3.8: Emprego - os três equilíbrios de Nash



Identicamente ao caso das melhores respostas $r^*(q)$ abordado na Seção 3.8, obtém-se uma representação geométrica (vide Figura 3.8) de todo o processo analisado para ambos os concorrentes. Nela, os *equilíbrios de Nash* são representados pelas intersecções entre as linhas poligonais representando as melhores respostas, $r^*(q)$ e $q^*(r)$. Isto é, os equilíbrios são os pares de estratégias mistas: $(0,1)$, $\left(\frac{2s_1-s_2}{s_1+s_2}, \frac{2s_1-s_2}{s_1+s_2}\right)$ e $(1,0)$. Para se ter mais noção sobre o que esse resultado representa, acompanha-se a seguinte aplicação.

APLICAÇÃO NUMÉRICA

Cabe, ao professor, a atribuição de valores randômicos aos salários pagos pelas duas firmas. Contudo, a relação de ordem imposta no início dessa seção,

$$\frac{s_1}{2} < s_2 < 2s_1,$$

deve ser respeitada. Por exemplo, podem-se fazer as atribuições $s_1 = 1000$ e $s_2 = 1500$; em outras palavras, a Empresa 1 paga R$ 1000,00 e a outra paga R$ 1500,00. Nessas condições, a tabela de pagamentos se transforma em:

Tabela 3.10: Aplicação numérica de estratégias mistas

		Candidato 2	
		Escolhe Empresa 1	Escolhe Empresa 2
Candidato 1	Escolhe Empresa 1	500, 500	1000, 1500
	Escolhe Empresa 2	1500, 1000	750, 750

Então, nesse caso de aplicação numérica, seguem os três equilíbrios:

- $(0,1)$ ou ainda, $q = 0$ e $r = 1$. O *Candidato 1* escolhe a *Firma 1* e seu concorrente, a *Firma 2*.
- $(1,0)$. Em outras palavras, ocorre o oposto.
- $(1/5, 1/5)$. Nesse equilíbrio, o *Candidato 1* deveria escolher a *Empresa 1* em 20% das vezes e a outra empresa em 80% das vezes; o mesmo raciocínio é válido para o *Candidato 2*. Essa polarização de escolhas pode ser justificada, inclusive, pelo salário da *Empresa 2* ser maior que o da outra.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final desse texto, espera-se que o leitor tenha um material motivador em mãos, abrangedor de conceitos teóricos e práticos da Teoria dos Jogos. A maior preocupação em sua elaboração foi tentar fornecer subsídios sólidos para que pelo menos uma fração desse ramo da matemática pudesse ser devidamente apresentada aos alunos do ensino médio. Exemplos clássicos foram abordados, após uma apresentação teórica moldada para facilitar seu acesso e posterior desenvolvimento lúdico.

Foram descritas algumas classificações de jogos, com ênfase nos mais relevantes, além de se prezar pela boa prática matemática repleta de fundamentação teórica. Acredita-se que qualquer aluno sedento por conhecimento seja capaz de compreender o viés lógico a que o texto presente se propõe, visto que o cunho teórico nele presente não é tão profundo a ponto de afogar boas intenções de aprendizagem.

Evidentemente, há muito o que se desenvolver no ensino da Matemática mas, pela Teoria dos Jogos ser uma fração do universo matemático responsável pelas escolhas e decisões das pessoas, poderia estar presente no currículo do ensino médio. Até que isso ocorra, a proposta a ser deixada é que o básico, apresentado nesse texto, seja difundido pelos profissionais dispostos a proliferarem um ensino alternativo. Enfim, propõe-se a coleta e a organização sistêmica de dados empíricos, nas práticas de jogos com os alunos, para estudos futuros.

Referências Bibliográficas

BAERT, P. Algumas limitações das explicações da escolha racional na ciência política e na sociologia. *Revista Brasileira de Ciências Sociais*, SciELO Brasil, v. 12, n. 35, 1997.

BROM, P. C. Estudo do jogo clássico, o dilema do prisioneiro, por teoria dos jogos, com uso de função polinomial de probabilidade e análise dos pontos críticos. *REVISTA EIXO*, v. 1, n. 2, p. 153–161, 2012.

CUSINATO, R. T. Teoria da decisão sob incerteza e a hipótese da utilidade esperada: conceitos analíticos e paradoxos. 2003.

FELICIANO, L. P. d. S. et al. Teoria dos jogos: uma nova proposta para o ensino médio. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

GIBBONS, R. *A primer in game theory*. [S.l.]: Harvester Wheatsheaf, 1992.

LUCCHESE, F.; RIBEIRO, B. Conceituacao de jogos digitais. *Sao Paulo*, 2009.

NASCIMENTO, T. O. *Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio: Introdução ao equilíbrio de Nash*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2014.

NOBREGA, C.; KALKO, A. Tudo está em jogo. *Revista Superinteressante*, v. 175, p. 68–73, 2002.

OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. *A course in game theory*. [S.l.]: MIT press, 1994.

SARTINI, B. A. et al. Uma introdução à teoria dos jogos. *II Bienal da SBM–Universidade Federal da Bahia*, p. 1–61, 2004.

WEBB, J. N. *Game theory: decisions, interaction and Evolution*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

A Apêndice - Solução de Nash

Neste apêndice, situa-se a demonstração da *solução de Nash* apresentada na Seção 2.5.

A *solução de Nash* é uma *solução de barganha* que associa, a um problema de barganha $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$, um *acordo* $x^* \in X$ satisfazendo:

$$\boxed{\text{se } p \cdot x \succ_i x^* \text{ para algum } p \in [0,1] \text{ e } x \in X, \text{ então } p \cdot x^* \succsim_j x, \text{ com } j \neq i.}$$

Para facilitar o entendimento sobre a ideia central da *solução cooperativa de Nash*, supõe-se que os jogadores i e j tenham chegado a um acordo $x^* \in X$. Daí, o jogador i, por algum motivo plausível, prefira estritamente uma objeção a esse acordo x^*, chamada de x, com $x \in X$. Seja, ainda, $p \in [0,1]$ a probabilidade dessa objeção lograr sucesso; consequentemente, $1-p$ será a probabilidade das negociações entre os dois jogadores não vingarem. Se x^* é a solução procurada, então **o jogador j *prefere* realizar objeções contrárias a *toda e qualquer* objeção feita pelo jogador i a x^* e permanecer, portanto, com o acordo x^*.**

CARACTERIZAÇÃO

Deverá ser provado que a *solução de Nash* é *bem definida* e possui uma característica bem simples: a *solução de Nash* do problema de barganha $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$ é o acordo x^* que *maximiza* o produto $u_1(x)u_2(x)$. Aqui, tem-se que $u_i(x)$ é uma função utilidade esperada de *von Neumann-Morgenstern* representando as relações de preferências $\succsim_i$ para $i = 1, 2$.

Proposição A.0.1. *Solução de Nash*

a. *O acordo $x^* \in X$ é uma solução de Nash para o problema de barganha $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$ se, e só se,*

$$\boxed{u_1(x^*)u_2(x^*) \geq u_1(x)u_2(x)}$$

*para todo $x \in X$, com $u_i(x)$ sendo uma função utilidade de **von Neumann - Morgenstern** representando as relações de preferência $\succsim_i$ e a condição $u_i(D) = 0$, para $i = 1, 2$.*

b. A solução de Nash é bem definida

Prova. Inicialmente, será provado o item *(a)*. ($\Leftarrow$) Supõe-se que, para todo $x \in X$ e para algum $x^* \in X$, com $x^* \neq D$, tenha-se $u_1(x^*)u_2(x^*) \geq u_1(x)u_2(x)$. Daí, observando as condições propostas na Seção 2.5 sobre *problema de barganha*, pode-se afirmar que existe algum acordo $y \in X$ mais atraente para ambos os jogadores do que a discórdia D. Consequentemente, $u_i(y) > u_i(D) = 0$ para $i = 1, 2$. Disso, conclui-se que $u_i(x^*) > 0$ para $i = 1, 2$.

Agora, deverá ser verificado que x^* é *solução de Nash*. Imagina-se que $p \cdot x \succ_i x^*$ para algum $p \in [0, 1]$ e algum $x \in X$, que é equivalente a: $p \cdot x \oplus (1-p) \cdot D \succ_i x^* \Leftrightarrow pu_i(x) + (1-p)u_i(D) > u_i(x^*)$. Nota-se que, como $u_i(D) = 0$, essa última desigualdade pode ser reescrita na forma $pu_i(x) > u_i(x^*)$. Multiplicando-se ambos os membros desta pelo número positivo $u_j(x^*)$, obtém-se $pu_i(x)u_j(x^*) > u_i(x^*)u_j(x^*) \Rightarrow pu_i(x)u_j(x^*) \geq u_i(x^*)u_j(x^*)$. Combinando-se esse resultado com a parte da hipótese envolvendo a desigualdade $u_i(x^*)u_j(x^*) \geq u_i(x)u_j(x)$, conclui-se que $pu_i(x)u_j(x^*) \geq u_i(x)u_j(x)$. Dividindo-se ambos os lados da ultima desigualdade pelo número positivo $u_i(x)$, obtém-se a desigualdade $pu_j(x^*) \geq u_j(x)$; isto é, $p \cdot x^* \succsim_j x$, o que demonstra que x^* é *solução de Nash.*

($\Rightarrow$) A hipótese agora é de que $x^* \in X$ é *solução de Nash* e deve ser provada a veracidade de $u_1(x^*)u_2(x^*) \geq u_1(x)u_2(x)$ para todo $x \in X$. Pois bem, como x^* é *solução de Nash*, tem-se que $p \cdot x \succ_i x^* \Rightarrow p \cdot x^* \succsim_j x$, para algum $p \in [0, 1]$ e $x \in X$. Seja $x \neq D$ *(se $x = D$, o resultado é imediato pois $u_i(D) = 0$, para $i = 1, 2$)*; daí, pode-se afirmar que $u_i(x) > 0$ para $i = 1, 2$, observando-se as características da definição de *problema de barganha* já mencionadas.

Naturalmente, surgem duas possibilidades distintas, dependendo do valor de x: $u_i(x) \leq u_i(x^*)$ ou $u_i(x) > u_i(x^*)$, para $i = 1, 2$. Seja $x \in X$ de sorte que $u_1(x) \leq u_1(x^*)$ e $u_2(x) \leq u_2(x^*)$. Então, multiplicando-se o membro esquerdo de $u_1(x) \leq u_1(x^*)$ por $u_2(x)$ e o direito por $u_2(x^*)$, graças a $u_2(x) \leq u_2(x^*)$, obtém-se $u_1(x)u_2(x) \leq u_1(x^*)u_2(x^*)$. Logo, $u_1(x)u_2(x) \leq u_1(x^*)u_2(x^*)$ para todo $x \in X$, satisfazendo $u_i(x) \leq u_i(x^*)$ para $i = 1, 2$.

Por outro lado, seja agora $x \in X$ satisfazendo $u_i(x) > u_i(x^*)$ para algum $x \in X$ e para *pelo menos* um dos valores de i, diga-se $i = 2$ *(para $i = 1$ a argumentação é análoga)*. Assim, está se supondo que $u_2(x) > u_2(x^*)$. Com isso, nota-se que $\dfrac{u_2(x)}{u_2(x^*)} > 1$, lembrando-se que $u_2(x^*) > 0$. Mas, visto que x^* é *solução de Nash*, é sabido que $pu_1(x) > u_1(x^*) \Rightarrow$

$pu_2(x^*) \geq u_2(x)$, para algum $p \in [0,1]$; ou seja, $p \geq \dfrac{u_2(x)}{u_2(x^*)}$. Comparando-se esse resultado com a suposição inicial $\left(\dfrac{u_2(x)}{u_2(x^*)} > 1\right)$, conclui-se que $p \geq \dfrac{u_2(x)}{u_2(x^*)} > 1$; isto é, $p > 1$, o que é absurdo. Portanto, $u_i(x) \leq u_i(x^*)$ para todo $x \in X$ (com $i = 1, 2$) e, consequentemente, $u_1(x)u_2(x) \leq u_1(x^*)u_2(x^*)$ para todo $x \in X$, como se queria demonstrar.

Feita a prova do item (a), a demonstração do item (b) vem na sequência. Para tal, deve-se mostrar que a solução $x^* \in X$ existe e é única. Primeiramente, prova-se sua existência. Considera-se, então, o conjunto U formado por todos os pontos do plano tais que a abscissa e a ordenada são iguais aos valores assumidos pelas funções utilidades *von Neumann-Morgenstern* dos jogadores 1 e 2, respectivamente, para cada $x \in X$. Matematicamente, $U = \{(u_1(x), u_2(x)) : x \in X\}$.

Seja $F : U \to \mathbb{R}$ definida por $F(v_1, v_2) = v_1v_2$. Pelo item (a), x^* é *solução de Nash* se, e só se, $(v_1, v_2) = (u_1(x^*), u_2(x^*))$ maximiza a função F. Acontece que, se F for contínua em U e esse conjunto for compacto, então $Im(F)$ será compacta e, consequentemente, esse valor máximo existirá como ponto de aderência. Devem ser demonstradas, pois, a continuidade da função e a compacidade do conjunto. Primeiro, nota-se que F é contínua em U pois é uma multiplicação de duas funções contínuas: $u_1(x)$ e $u_2(x)$.

No âmbito da compacidade, percebe-se que U é fechado (todo ponto de aderência a U é ponto de U) e limitado. Primeiramente, por absurdo, supõe-se que existe um ponto de aderência a U, $(u_1(\overline{x}), u_2(\overline{x}))$, mas que não pertence a U. Daí, tem-se que se $(u_1(\overline{x}), u_2(\overline{x}))$ é ponto de aderência a U então existe uma sequencia de pontos $(u_1(x_k), u_2(x_k)) \in U$ convergindo para $(u_1(\overline{x}), u_2(\overline{x}))$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Mas, como X é compacto e $u_i(x)$ é contínua em X para $i = 1, 2$, deve-se ter $\overline{x} \in X$, já que $\overline{x}$ é ponto de aderência a X (existe $x_k \to \overline{x}$ para todo $k \in \mathbb{N}$). E, se $\overline{x} \in X$, então, por definição, $(u_1(\overline{x}), u_2(\overline{x})) \in U$, o que é absurdo. Logo, não existe ponto de aderência a U que não esteja em U; ou seja, U é um conjunto *fechado*. Por outro lado, $U \subseteq Im(u_1) \times Im(u_2)$ e esse cartesiano, por sua vez, é compacto (os conjuntos $Im(u_i)$ para $i = 1, 2$ são ambos compactos). Logo, U também é limitado e, então, compacto. Como F é contínua em U, percebe-se que existe pelo menos um $(u_1(x^*), u_2(x^*)) \in U$ que maximiza F, visto que F será limitada nesse compacto.

Resta mostrar que essa solução $(u_1(x^*), u_2(x^*))$ é única em U. Para isso, admite-se a existência de pelo menos duas soluções distintas em U e a convexidade desse conjunto será útil na prova por absurdo. Mas, antes, demonstra-se que U é convexo. Foi visto que X é convexo; ou seja, para quaisquer $x \in X$, $y \in X$, e $p \in [0,1]$, existe $z \in X$ tal que $z \sim_i p \cdot x \oplus (1-p) \cdot y$, para $i = 1, 2$, $p \in [0,1]$ e, claro, $p \cdot x \oplus (1-p) \cdot y \in \mathcal{L}(X)$, conjunto de todas as loterias associadas a X. Usando-se recursos ofertados pela função utilidade de *von Neumann-Morgenstern*, nota-se que para quaisquer $x \in X$, $y \in X$ e $p \in [0,1]$ existe

$z \in X$ satisfazendo $u_i(z) = pu_i(x) + (1-p)u_i(y)$, com $i = 1, 2$.

Com isso, fica óbvio que, para quaisquer $U(x) = (u_1(x), u_2(x))$ e $U(y) = (u_1(y), u_2(y))$, ambos membros de U, existe $U(z) = (u_1(z), u_2(z)) \in U$ tal que $(u_1(z), u_2(z)) = (pu_1(x) + (1-p)u_1(y), pu_2(x) + (1-p)u_2(y))$, para quaisquer $x, y \in X$, $p \in [0,1]$ e algum $z \in X$. Decompondo-se o último vetor e usando as propriedades de soma entre vetores e multiplicação de vetor por escalar, obtém-se: $(u_1(z), u_2(z)) = p[u_1(x), u_2(x)] + (1-p)[u_1(y), u_2(y)]$. Ou seja, para quaisquer $U(x), U(y) \in U$ e $p \in [0,1]$, existe $U(z) \in U$ satisfazendo $U(z) = pU(x) + (1-p)U(y)$ e implicando a convexidade de U.

Argumentada a convexidade de U, chega-se no absurdo como segue: supõe-se que existam pelo menos dois pontos distintos em U, $(u_1(x^*), u_2(x^*))$ e $(u_1(y^*), u_2(y^*))$, que maximizam F. Seja $M = F(u_1(x^*), u_2(x^*)) = F(u_1(y^*), u_2(y^*))$ esse valor máximo. Nota-se que esses dois pontos pertencem à curva de nível de F dada por $v_2 = \dfrac{M}{v_1}$, com $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Mas, como U é convexo, então se pode afirmar que para qualquer valor de $p \in [0,1]$ existe $(u_1(z), u_2(z)) \in U$ satisfazendo $(u_1(z), u_2(z)) = p(u_1(x^*), u_2(x^*)) + (1-p)(u_1(y^*), u_2(y^*))$. Isto é, $(u_1(z), u_2(z)) = (pu_1(x^*) + (1-p)u_1(y^*), pu_2(x^*) + (1-p)u_2(y^*))$.

Como os pontos $(u_1(x^*), u_2(x^*))$ e $(u_1(y^*), u_2(y^*))$ são, por hipótese, distintos e estão na curva estritamente decrescente $v_2 = \dfrac{M}{v_1}$, pode-se supor, sem perda de generalidade, que $u_1(x^*) > u_1(y^*)$. Daí, considerando $p \in (0,1)$, tem-se $u_1(y^*) < u_1(z) < u_1(x^*)$ e, abusando da característica monotônica de $v_2 = \frac{M}{v_1}$, assegura-se que $u_2(x^*) < u_2(z) < u_2(y^*)$. Disso, segue:

$$u_1(x^*)u_2(y^*) = u_1(y^*)u_2(y^*) + u_1(x^*)u_2(x^*) - u_1(y^*)u_2(x^*) + [u_1(x^*) - u_1(y^*)][u_2(y^*) - u_2(x^*)]$$

$$\Leftrightarrow u_1(x^*)u_2(y^*) + u_1(y^*)u_2(x^*) = 2M + c > 2M,$$

notando-se que $u_1(x^*)u_2(x^*) = u_1(y^*)u_2(y^*) = M$ e $c = [u_1(x^*) - u_1(y^*)][u_2(y^*) - u_2(x^*)] > 0$, ambos resultados decorrentes da hipótese.

Por outro lado, fazendo $u_1(z)u_2(z)$, tem-se:

$$u_1(z)u_2(z) = [pu_1(x^*) + (1-p)u_1(y^*)][pu_2(x^*) + (1-p)u_2(y^*)] \Leftrightarrow$$

$$u_1(z)u_2(z) = p^2 M + p(1-p)[u_1(x^*)u_2(y^*) + u_1(y^*)u_2(x^*)] + (1-p)^2 M.$$

Colocando-se todas as peças juntas, surgem as seguintes equivalências:

$$u_1(x^*)u_2(y^*) + u_1(y^*)u_2(x^*) > 2M \Leftrightarrow$$

$$p(1-p)[u_1(x^*)u_2(y^*) + u_1(y^*)u_2(x^*)] > p(1-p)2M \Leftrightarrow$$

$$[p^2 + (1-p)^2]M + p(1-p)[u_1(x^*)u_2(y^*) + u_1(y^*)u_2(x^*)] > p(1-p)2M + [p^2 + (1-p)^2]M,$$

ou seja, $u_1(z)u_2(z) > M$, o que contraria a ideia do M ser valor máximo atingido por $u_1(x)u_2(x)$, para $x \in X$. Logo, existe apenas um ponto $(u_1(x^*), u_2(x^*)) \in U$ satisfazendo $u_1(x^*)u_2(x^*) > u_1(x)u_2(x)$ para todo $x \in X$, com $x^* \in X$ e $x \neq x^*$; em outras palavras, a solução de Nash, x^*, é bem definida.