Flávio Ribeiro de Souza Júnior

ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM APPLETS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
04/05/2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **64/2018**

Souza Júnior, Flávio Ribeiro de
Ensino de funções trigonométricas com Applets / Flávio Ribeiro de Souza Júnior. – Campos dos Goytacazes, 2018.
[14], 96 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2018.
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 86-89. .

1. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS – ESTUDO E ENSINO 2. APPLETS 3. GEOGEBRA 4. TECNOLOGIA DIGITAL I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 516.24

Flávio Ribeiro de Souza Júnior

ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM APPLETS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
04/05/2018

Flávio Ribeiro de Souza Júnior

ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM APPLETS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 04 de Maio de 2018.

Prof[a]. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFF

Prof[a]. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF

Prof. Geraldo de Oliveira Filho
D.Sc. - UFF

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Em primeiro lugar, dedico a Deus, pois sem Ele jamais teria conseguido chegar até aqui. Sua santa palavra me fortalecia e me levantava nos momentos em que caía e já não tinha mais forças para ir adiante. Agradeço também a minha esposa Genaína, pela paciência e coragem que me dera através de suas palavras e carinhos, aos meus Filhos Henry Pietro, Viktor Angello e Laysa Vithórya, pois indubitavelmente foi por vocês que quis chegar até aqui.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, a toda minha família, aos meus amigos e a todos os professores que já passaram pela minha formação desde a minha infância.

Agradeço a professora Vanice da S. F. Vieira e ao professor Aluísio Lima pelos preciosos ensinamentos e incentivação. Aos meus amigos de trabalho Wellington Dutra, Lucas Maken, Ingrid Carlos etc.

Agradeço em especial às pessoas que passaram muitos fins de semana ao meu lado, grandes amigos e amigas do PROFMAT, que sabem como foi difícil chegar até aqui.

Gostaria de agradecer às pessoas que nos ensinaram a verdadeira extensão da matemática, mostrando-nos que ela vai muito além do que imaginávamos. Obrigado, professores do PROFMAT-UENF, em especial ao meu orientador Oscar.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste Mestrado. Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemaática (SBM) pelo oferecimento deste Curso.

"A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo"
Pitágoras

Resumo

Os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem uma metodologia de ensino-aprendizagem baseada no desenvolvimento de habilidades e competências a serem desenvolvidas a partir da contextualização e interdisciplinaridade dos conteúdos. No entanto, mesmo com esse direcionamento e abordagem do tema nos livros didáticos, muitos alunos continuam por apresentar dificuldades na apropriação e compreensão dos conceitos referentes às Funções Trigonométricas. Este trabalho tem como objetivo apresentar um GeoGebraBook com uma proposta de atividades para o ensino das Funções Trigonométricas por meio da manipulação de tecnologias digitais, mais especificamente, de Applets criados com o auxílio do software GeoGebra. Visa, também, a melhorar a compreensão dos alunos sobre os conceitos trigonométricos contribuindo para a construção e aprendizagem significativas desse conteúdo. A investigação foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa utilizando-se de pesquisa bibliográfica. Considera-se que o uso de tecnologias, em especial do software GeoGebra, é capaz de "trazer a vida"aos conteúdos apresentados de forma estática nos livros didáticos, além de possibilitar uma aprendizagem mais dinâmica e atraente para os alunos.

Palavras-chaves: Funções Trigonométricas, Applets, GeoGebra, Tecnologias Digitais.

Abstract

The National Curricular Parameters propose a teaching-learning methodology based on the development of skills and competences, to be developed based on the contextualization and interdisciplinarity of the contents. However, even with this direction and approach of the subject in the textbooks, many students continue to present difficulties in the appropriation and understanding of the concepts related to the Trigonometric Functions. This work aims to present a proposal of a didactic sequence composed of 13 activities for the teaching of the Trigonometric Functions through the manipulation of digital technologies, more specifically of Applets created with the aid of GeoGebra software. Also, it aims to improve students' understanding of trigonometric concepts by contributing to the meaningful construction and learning of this content. The research was developed trough a qualitative research approach, using bibliographical research. It is considered that the use of technologies, especially the use of GeoGebra software is able to "bring life" to the contents presented in a static way in textbooks, in addition to enabling a more dynamic and attractive learning for students.

Key-words:Trigonometric Functions, Applets, Geogebra, Digital Technologies.

Lista de ilustrações

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

MHS	Movimento Harmônico Simples
a.C	Antes de Cristo
d.C	Depois de Cristo
D(f)	Domínio da Função
Im(f)	Imagem da Função
p	Período da Função
sen	Seno
$\cos$	Cosseno
$\tan$	Tangente
$\cot$	Cotangente
$\sec$	Secante
$\csc$	Cossecante
mm	Milímetro
Hg	Mercúrio
cm	Centímetro
Hz	Hertz
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais para Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação.
FTD	Frère Theophane Durand
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
MEC	Ministério da Educação
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
INEP	Instituto Nacioanal de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
Anresc	Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
ANA	Avaliação Nacional da Alfabetização

Lista de símbolos

α	Letra grega alpha
$\{\}$	Chaves
$\cup$	União
$\mid$	Tal que
$\in$	Pertence
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{R}^*$	Conjunto dos Números Reais Diferentes de Zero.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
π	Constante pi
$\mid\ \mid$	Módulo
$\forall$	Para Todo
$\geq$	Maior ou Igual
$\leq$	Menor ou igual
θ	Letra grega theta

Sumário

Introdução

As experiências vivenciadas na sala de aula do Ensino Médio permitiu a observação das dificuldades que os alunos apresentam na compreensão de conceitos referentes às Funções Trigonométricas. Assimilar propriedades e características desse conteúdo ainda é um desafio para muitos deles. Mediante uma tutoria presencial percebeu-se que essas dificuldades são constatadas também na licenciatura em Matemática, já que que muitos alunos têm concluído o Ensino Médio sem desenvolver as habilidades e competências referentes às Funções Trigonométricas.

Esse tema matemático possui fundamental importância devido à sua interdisciplinaridade e contextualização, já que contribui para o aprofundamento de conceitos geométricos e de funções. Alguns conceitos da Física - como vetores e decomposição de vetores - dão tratamento geométrico à trigonometria enquanto outros - como ondas e movimento harmônico simples (MHS) - abordam conteúdos trigonométricos no universo de uma função.

A não aquisição de conhecimentos referentes às Funções Trigonométricas compromete a evolução do conhecimento não somente no âmbito da Matemática, mas também em outras áreas.

Encontram-se referências ao ensino das Funções Trigonométricas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacando e enfatizando o seu potencial no que tange ao desenvolvimento de habilidades e competências.

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem com o desenvolvimento de habilidades e competências são as Funções Trigonométricas, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações.(BRASIL, 1998, p. 44)

Os PCN fornecem orientações para o Ensino das Funções Trigonométricas, sendo assim pode ser um referencial para autores na elaboração de livros didáticos que contemplem o desenvolvimento de habilidades e competências. Contudo, percebe-se que o conteúdo de Funções Trigonométricas tem sido apresentado nos livros didáticos de forma estática, ou seja, não permitindo visualizar os movimentos das transformações que as funções podem sofrer. Considera-se tal fato um dos motivos que podem gerar dificuldades na aprendizagem das Funções Trigonométricas. Mesmo os livros didáticos apresentando situações interdisciplinares e contextualizadas, acredita-se que, dando vida a essa forma estática, a aprendizagem pode se tornar mais significativa, dinâmica e atraente.

A motivação desse trabalho deve-se à necessidade de contribuir no ensino da trigonometria, permitindo aos alunos uma verdadeira apropriação de conhecimentos aplicáveis das Funções Trigonométricas, seja algebricamente ou geometricamente, utilizando os recursos educacionais digitais, em especial Applets das Funções Trigonométricas criados a partir da interação com o ciclo trigonométrico no software GeoGebra.

Usualmente os alunos utilizam o computador para produzir e apresentar trabalhos escolares, com o auxílio de softwares, editores de textos, Power Point, Excel e até mesmo a internet. Todavia muitos outros recursos podem ser utilizados tanto no ambiente escolar quanto fora dele.

De acordo com Lopes (2004), o uso do computador como recurso didático por meio da implantação da informática na matriz escolar tem por objetivo preparar os estudantes para uma sociedade cada vez mais desenvolvida tecnologicamente. Porém, Bona (2009) afirma que, além de apresentar recursos criativos que incentivem os alunos a se envolverem em situações problemas, é necessária a formalização dos conteúdos. Com isso, surge a preocupação e a necessidade de adequar esses princípios matemáticos à nova era científica e tecnológica em que vivemos, principalmente no ambiente escolar o qual hoje é muito diferente de algumas décadas atrás.

Dentro dessa perspectiva, Bona (2009) relata a existência de vários softwares educativos que podem ser utilizados nas aulas de Matemática, de forma a torná-las mais atrativas e dinâmicas. No entanto, é necessário cuidado e estudo para saber qual software é o mais adequado para as habilidades e competências que deseja-se desenvolver em relação ao conteúdo definido.

Em sua dissertação, Salazar (2015) relata que as imagens estáticas que aparecem nos textos didáticos tornam-se dinâmicas através da utilização do GeoGebra, contribuindo para a construção dos conceitos trigonométricos.

Diante do exposto, este trabalho tem por finalidade responder à seguinte questão de pesquisa: Como incorporar o software GeoGebra no ensino das Funções Trigonométricas?

Buscando responder à questão de pesquisa, tem-se como objetivo geral: apresentar um GeoGebraBook com uma proposta de atividades para o ensino das Funções Trigonométricas associadas ao ciclo trigonométrico por meio da manipulação de tecnologias digitais, mais especificamente, de Applets criados com o auxílio do GeoGebra.

Como objetivos específicos de pesquisa, destacam-se:

- Promover estudos sobre o tema trigonometria;
- Contribuir para a melhor compreensão dos conceitos trigonométricos;

• Contribuir para a construção e aprendizagem significativas desse conteúdo;

• Contribuir com a prática docente dos professores.

Essa pesquisa foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa utilizando-se de pesquisa bibliográfica.

Segundo Godoy (1995, p. 62-63), a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental. Para a autora, os pesquisadores qualitativos estão preocupados com o processo e não simplesmente com os resultados ou produto.

Minayo (2001) relata que a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que condiz com aspectos mais relevantes dos processos e dos fenômenos.

Alinhado a esse pensamento, Santos e Gamboa (2007) destacam que esse tipo de abordagem é baseada na compreensão, explanação e especificação de um fenômeno, consolidado em um tipo de investigação fundamentado na experiência individual de situações no processo de construção de significados. E ainda Goldenberg (1999) reitera que também é evidente o valor da pesquisa qualitativa para estudar questões difíceis de quantificar, como sentimentos, motivações, crenças e atitudes individuais.

Para o levantamento dos trabalhos relacionados com objetivo de conhecer o que já se estudou sobre o assunto, realizou-se uma pesquisa bibliográfica. Segundo Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa bibliográfica é realizada a partir da sondagem de referências teóricas já analisadas e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos e páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se pela pesquisa bibliográfica.

Os procedimentos metodológicos fundamentaram-se na elaboração de uma sequência de treze atividades. Para tal foram construídas as Funções Trigonométricas a partir do ciclo trigonométrico. Situou-se o conteúdo no contexto histórico com o intuito de se perceber a evolução do conhecimento matemático da Trigonometria ao longo do tempo.

O trabalho está dividido em 5 capítulos e apresenta a seguinte organização:

O capítulo 1 relata a evolução do conhecimento da Trigonometria através da história, que dará suporte para os subsídios conceituais relativos às Funções Trigonométricas.

O capítulo 2 é dedicado à fundamentação teórica e aplicações da Trigonometria no contexto de uma função, descrevendo os conceitos e propriedades que serão pré-requisitos para as atividades a serem desenvolvidas.

O capítulo 3 apresenta o GeoGebra e o ensino das Funções Trigonométricas, buscando descrever e analisar as pesquisas que abordaram o tema Trigonometria e tecnologias digitais com o uso do GeoGebra. Apresenta também o software GeoGebra, assim como a interface de criação de Applets. Aborda as orientações dos PCNs para o ensino de Funções Trigonométricas e elenca o ciclo trigonométrico como a forma mais simples de se construir os conceitos e desenvolver habilidades e competências necessárias para o ensino desse conteúdo.

O capítulo 4 apresenta o GeoGebraBook com as treze atividades desenvolvidas por meio dos Applets tendo mais um destes que representa todas as Funções Trigonométricas abrangendo todo o eixo Real, estes foram criados com o auxílio do software GeoGebra, descreve-se também os objetivos de cada uma para o desenvolvimento das habilidades e competências que se desejam alçançar. As atividades desenvolvidas estão anexadas à interface de interação de cada Applet.

O trabalho encerra-se com as considerações finais, com contribuições e limitações da investigação, bem como recomendações para futuras investigações.

Capítulo 1

A Trigonometria Através dos Tempos

O uso da História da Matemática como recurso de ensino-aprendizagem é uma das tendências atuais da Educação Matemática. Para DAmbrossio (2012, p. 27), a História da Matemática é um elemento fundamental para perceber como teorias e práticas Matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto em sua época.

Sendo assim, possibilita o aluno a perceber que a Matemática que se tem hoje é fruto da evolução da sociedade e dos conhecimentos desenvolvidos por ela, muitas vezes para atender as suas necessidades.

Os PCN também apontam que a utilização de outros recursos conjuntamente com a História da Matemática podem contribuir com o processo de ensino-aprendizagem tornando-os menos abstrato e mais significativo para o aluno.

> A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. (BRASIL, 1998, p.34)

Para (Baroni, R; Nobre, S., 1999, p.132), além do caráter motivador, a História do conteúdo é essencial para a ligação da temática e sua atividade educacional sendo mais que um elemento motivador, visto que reúne elementos cuja natureza se fortalece quando o professor de Matemática demonstra domínio da História do conteúdo que desenvolve em suas aulas. Sendo assim, julga-se relevante o conhecimento da História da Trigonometria.

1.1 O Início da Trigonometria

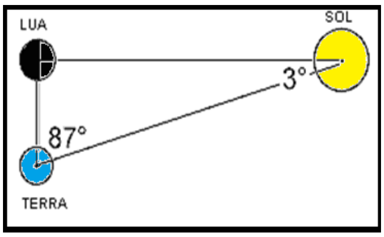
De acordo com Boyer (1996), foram necessários longos períodos no decorrer da história das civilizações para que fosse possível reunir todos os conhecimentos e requisitos necessários na compreensão e estudo das Funções Trigonométricas.

O autor também reitera que a Trigonometria não é feito de um só homem ou nação, seus estudos se iniciaram com os gregos e precisaram ser agrupados e ordenados numa ordem lógica, ordem essa, que permitiu a fundamentação das Funções Trigonométricas elementares.

Segundo o autor, as proposições sobre as razões entre os lados de triângulos semelhantes já eram conhecidas e utilizadas pelos povos egípcios e babilônicos. Durante o período pré-helênico – período clássico da história grega (VI – IV a.C) – ainda não havia a formalização do conceito de ângulo, assim sendo, os estudos realizados nesse período seria melhor denominado como Trilaterometria (estudo das medidas dos polígonos de três lados), do que Trigonometria, a medida de partes do triângulo. O autor também afirma que o estudo analítico de relações entre ângulos num círculo e o comprimento das cordas que o subentendem foi realizado pelos gregos, que também conheciam as propriedades das cordas, como medida dos ângulos centrais ou inscritos em círculos. Provavelmente tais propriedades permitiram a Eudoxo determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua.

Boyer (1996) destaca que progressivamente os astrônomos da idade Alexandrina, como Erastótenes de Cirene (276 -194 a.C) e Aristarco de Samos (310 – 230 a.C) lidavam com problemas que apontavam a necessidade de relações mais estruturadas entre ângulos e cordas. Aristarco em seu tratado Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua – possivelmente escrito em 260 a.C – observou que quando a Lua esta exatamente meio cheia, o ângulo entre as linhas de vista do sol e à Lua difere para menos de um ângulo de 90° por um trinta avos de um quadrante. (O círculo de 360° veio a ser introduzido de forma analítica depois). Em linguagem atual significa que a razão da distância da Lua para a distância do Sol é $sen\ 3°$, (Figura 1).

Figura 1 – Método de Aristarco para medição das distâncias do Sol e da Lua em relação à Terra.



Fonte:Elaboração Própria

O autor relata que as tabelas trigonométricas não haviam ainda sido desenvolvidas, recorrendo então Aristarco a um teorema muito difundido na época, conhecido como teorema geométrico, expresso pelas desigualdades $\frac{sen\alpha}{sen\beta}$ < $\frac{tan\alpha}{tan\beta}$, onde 0°< β < α < 90°, assim sendo, concluiu que $\frac{1}{20}$ < $sen\ 3$° < $\frac{1}{18}$, e daí que o Sol está mais 18 vezes, mais menos de 20, mais longe da Terra que a Lua. O valor encontrado por Aristarco está muito longe do valor moderno, contudo é melhor do que os valores encontrados por Eudoxo e Fídias (Pai de Arquimedes). O resultado encontrado por Aristarco era irrefutável, prejudicado unicamente pelo erro na observação na medição do ângulo formado pela Lua, Terra e Sol com 87° (quando de fato é aproximadamente 89°50').

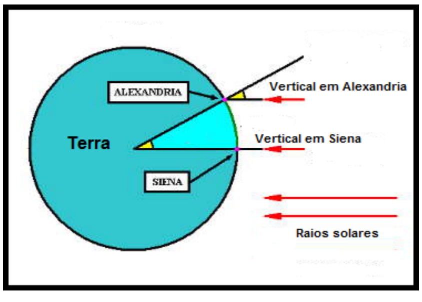
> Tendo determinado as distâncias relativas do Sol e da Lua, Aristarco sabia que seus respectivos tamanhos estavam na mesma razão. Isso decorre de terem o Sol e a Lua aproximadamente o mesmo tamanho aparente - isto é, subentendem um mesmo ângulo ao olho de um observador na Terra.(BOYER, 1996, p.109)

Boyer (1996) afirma que era necessário conhecer o raio da Terra para se chegar a um parecer das dimensões do Sol e da Lua. Aristóteles havia estimado a circunferência da Terra em 60.000 Km, já Arquimedes em seus cálculos concluiu que essa medida era de 45.000 km, foi Eratóstenes de Cirene o responsável pela obtenção do valor que mais se aproximou dos 40.075 km conhecidos hoje, obtendo o valor de 37.000 km. Corroborando com (BOYER, 1996, p.109), (EVES, 2009) ressalta que:

> Eratóstenes, em 240 a.C., efetuou uma medição famosa da circunferência máxima da Terra. Ele observou que em Siena, ao meio dia do solstício de verão, uma vara na vertical não projetava nenhuma sombra, ao passo que em Alexandria (que ele acreditava estar no mesmo meridiano que Siena) os raios do Sol inclinavam-se de $\frac{1}{50}$ de um círculo completo em relação à vertical. Com a distância conhecida de 5000 estádios entre Alexandria e Siena, ele então pode calcular a circunferência da Terra. (EVES, 2009, p.214)

Pelo método desenvolvido por Eratóstenes para estimar a circunferência da Terra, (Figura 2), pode-se perceber que se torna necessária a apropriação prévia de conhecimentos específicos e ordená-los de forma que possam dar origem às Funções Trigonométricas.

Figura 2 – Método de Eratóstenes para medição da circunferência da Terra.

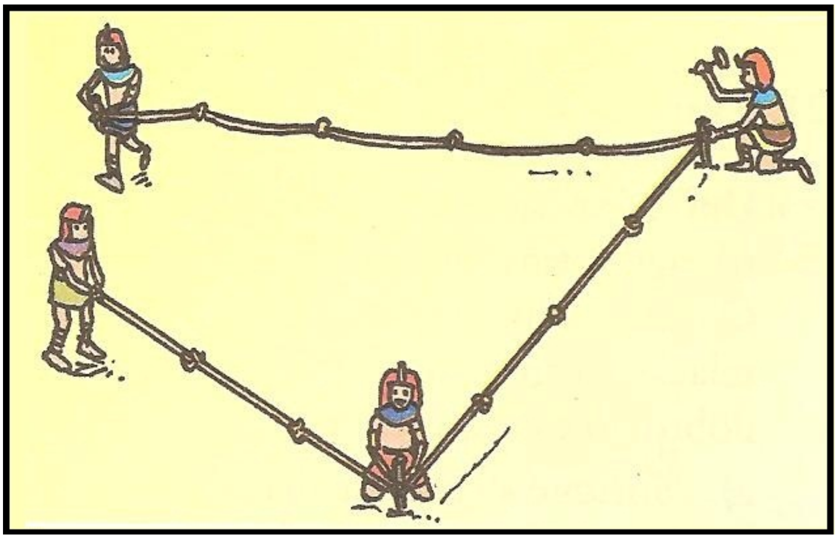


Fonte:Elaboração Própria

1.2 Definição do Triângulo Retângulo

Na vida prática, os triângulos retângulos sempre tiveram aplicação, uma vez que é possível compor uma série de relações entre seus elementos, principalmente lados e ângulos. Daí a sua grande importância no desenvolvimento na história da humanidade. A Astronomia primitiva era baseada no trabalho com triângulos retângulos, utilizados também nas artes e nas construções. Entende-se por Astronomia antiga aquela que data de séculos antes de Cristo. No Egito Antigo, com o progresso da Geometria, um caso particular de triângulo retângulo foi muito utilizado para construir "cantos" retos, ou ângulos retos (Figura 3).

Figura 3 – Os Egípcios e o Triângulo Retângulo.



Fonte:http://gauss-teste.blogspot.com.br/2010/01/importancia-do-triangulo-retangulo.html

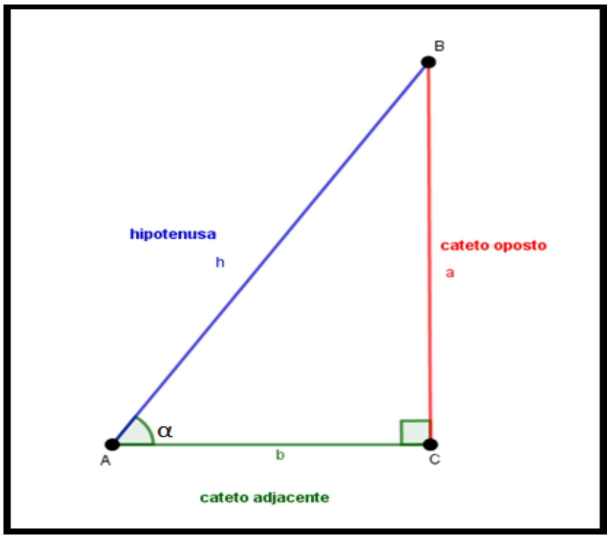
Dispondo uma corda com 12 nós no formato de triângulo retângulo, de modo tal que os lados eram proporcionais a 3, 4 e 5 unidades, assim os egípcios obtinham um ângulo reto.

Em dias atuais, esse processo de determinação do ângulo reto é utilizado em construções. Certamente que não se usa mais uma corda ou mesmo um triângulo retângulo, porém os profissionais nesta área usam o esquadro, o que não descaracteriza um triângulo retângulo. O esquadro vem em forma de L, dessa forma, não tem o lado que representa a maior dimensão do triângulo.

O papiro de Rhind (Documento egípcio escrito pelo escriba Ahmes em 1650 a.C) é uma fonte que mostra singular interesse por princípios da Trigonometria. Os egípcios utilizavam as razões trigonométricas na construção de pirâmides, uma vez que era imprescindível manter a inclinação das faces constante. É provável que o conceito de cotangente tenha surgido dessa necessidade, para obtenção da inclinação das faces efetuava-se o quociente do afastamento horizontal pelo vertical em relação à face da pirâmide, essa razão era denominada pelos egípcios de $seqto$.

O Triângulo Retângulo, (Figura 4), em Geometria, caracteriza-se por ter um ângulo reto e os outros dois ângulos agudos. Sendo assim, basta que um ângulo seja reto (90°), pois a soma dos três ângulos internos é igual a um ângulo raso (180°). É uma figura geométrica muito usada nas diversas áreas da Matemática.

Figura 4 – O Triângulo Retângulo



Fonte: Elaboração Própria

A fim de definir as razões trigonométricas de um ângulo agudo não nulo α, considera-se um triângulo retângulo que possui um ângulo de medida α. As funções são definidas como:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\text{a}}{\text{h}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\text{b}}{\text{h}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{\text{a}}{\text{b}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida do cateto oposto}} = \frac{\text{b}}{\text{a}}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{\text{h}}{\text{b}}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto oposto}} = \frac{\text{h}}{\text{a}}$$

Deve-se observar que as razões trigonométricas ficam assim definidas, ou seja, a relação entre os lados do triângulo não depende da escolha particular do triângulo, mas apenas dos ângulos deste.

1.3 Evolução da Trigonometria

Foi durante a segunda metade do segundo século antes de Cristo que foi elaborada a primeira tabela trigonométrica. O astronomo Hiparco de Nicea (180 a.C.-125a.C.) é considerado o "pai da trigonometria"pela realização de tal feito.

> No entanto, parece que antes de Hiparco empreender a tarefa ninguém tinha tabulado valores correspondentes do arco e da corda para toda uma série de ângulos. (BOYER, 1996, p.110)

Hiparco nitidamente elaborou as tabelas trigonométricas para serem utilizadas na sua astronomia, contribuindo assim para a elaboração de catálogos estelares, melhoramento de constantes astronômicas e a precedência dos equinócios.

Até então a trigonometria apresentada possibilitava a resolução de problemas utilizando-se das partes angulares dos triângulos, que hoje consideramos como ângulos notáveis, (Quadro 1).

Quadro 1 – Quadro dos Ângulos Notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaboração Própria

É necessário ressaltar que desde Hiparco até os tempos modernos não havia a sistematização das razões trigonométricas, os gregos e depois destes os hindus e os árabes usavam as chamadas linhas trigonométricos que era a representação de cordas num círculo, coube a Ptolomeu associar valores numéricos aproximados para essas cordas. Para tal, primeiro convencionou-se uma metodologia que subdividisse a circunferência de um círculo, em seguida, convencionou-se uma metodologia para subdivisão do diâmetro.Estabelecidas tais convenções e com as necessidades cada vez maiores e mais objetivas, os conceitos de seno, cosseno e tangente tornaram-se mais amplos.

> Não se sabe bem como penetrou na matemática o uso sistemático do círculo de 360°, mas parece dever-se em grande parte a Hiparco através de sua tabela de cordas. É possível que ele a tenha tomado de Hipsicles, que anteriormente tinha dividido o dia em 360 partes, subdivisão que pode ter sido sugerida pela astronomia babilônica.(BOYER, 1996, p.110-111)

A astronomia, sobre tudo corroborou para o desenvolvimento da Trigonometria, que por meio de Ptolomeu tornava mais ampla as noções de seno, cosseno e tangente de um ângulo, tanto para ângulos maiores do 360° quanto para ângulos negativos.

> A divisão de uma circunferência em 360° parece ter estado na Grécia desde os dias de Hiparco, embora não se saiba bem como a convenção surgiu. Não é improvável que a medida de 360° tenha sido tomada da astronomia, onde o zodíaco fora dividido em 12 "signos"ou 36 "decanatos"[...]. Nosso sistema comum de medidas de ângulos pode derivar dessa correspondência [...] Sem dúvida foi o sistema sexagesimal que levou Ptolomeu a subdividir o diâmetro de seu círculo trigonométrico em 120 partes; cada uma dessas ele subdividiu de novo em sessenta minutos e cada minuto de comprimento em sessenta segundos.(BOYER, 1996, p.113)

Inicia-se o trabalho com a trigonometria em circunferências por meio do cálculo de cordas e, consequentemente, os registros dos valores obtidos das razões trigonométricas para os principais ângulos da 1ª Volta, (Figura 5).

Figura 5 – Valores das Razões Trigonométricas para Ângulos da 1ª Volta

Valores das Razões Trigonométricas Para Ângulos da 1ª Volta																	
1º Quadrante					2º Quadrante					3º Quadrante				4º Quadrante			
Grau	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radiano	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∄	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∄	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
Cotangente	∄	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∄	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∄
Secante	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∄	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	∄	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
Cossecante	∄	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∄	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	∄

Fonte: Elaboração Própria

É no início da Idade Moderna que surge a necessidade das Funções Trigonométricas foco deste estudo, que será apresentado no próximo capítulo foi Leonard Euler em 1748 o responsável por conferi-las um tratamento analítico e por introduzir as abreviações quase modernas que são conhecidas por $\mathrm{sen}, \cos, \tan, \cot, \sec$ e $\csc$. (COSTA, 2003, p.60-68)

Capítulo 2

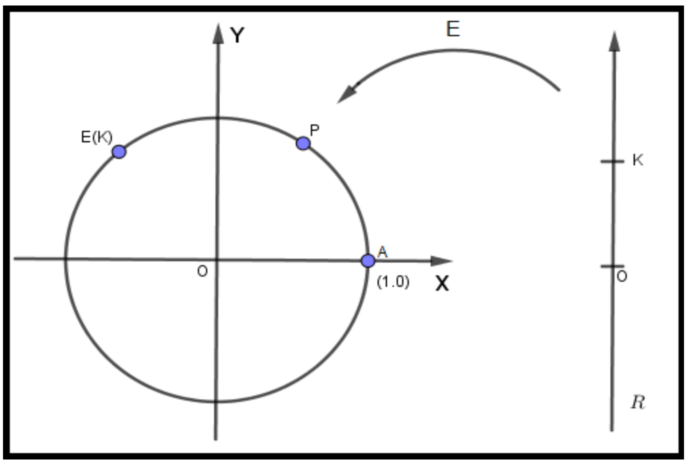
Fundamentação Teórica e Aplicações

Este capítulo é dedicado ao aporte teórico e aplicações da trigonometria de forma interdisciplinar e contextualizada nas situações-problema, descrevendo os conceitos e propriedades que são requisitos para as atividades a serem desenvolvidas por meio do software GeoGebra.

2.1 Funções Trigonométricas

De acordo com (LIMA et al., 2000), uma maneira natural de definir as funções trigonométricas é utilizando a função de Euler que estabelece uma correspondência entre a reta real $\mathbb{R}$ e a circunferência C de raio 1 com centro na origem de coordenadas $(0, 0)$. Como se mostra na Figura 6

Figura 6 – A função de Euler



Fonte: Elaboração Própria

Intuitivamente, fazemos coincidir a origem da reta real com o ponto $(1,0)$ da circunferência C e procedemos a enrolar a reta na circunferência como se fosse um carretel.
A definição formal é dada da seguinte maneira, $E : \mathbb{R} \longrightarrow C$ definida como:

(i) $E(0) = (1,0)$

(ii) Se $t > 0$ então $E(t)$ é definido como o ponto terminal do arco, de comprimento t, que tem ponto inicial em $(1,0)$ e é percorrida em sentido anti-horário.

(iii) Se $t < 0$ então $E(t)$ é definido como o ponto terminal do arco, de comprimento t, que tem ponto inicial em $(1,0)$ e é percorrida em sentido horário.

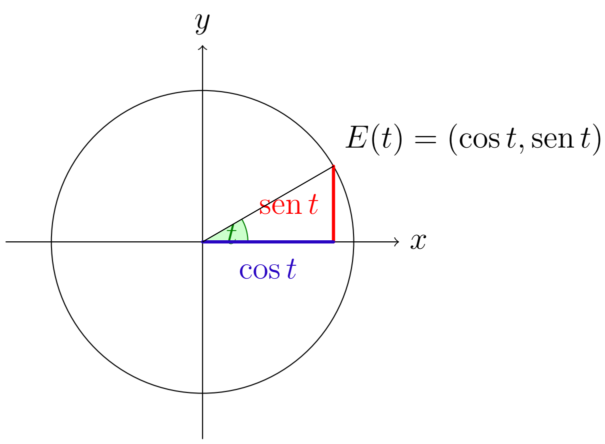
Observação 2.1. *Como a circunferência tem raio 1, logo a circunferência tem comprimento* 2π*. Assim temos que,* $E(t_1) = E(t_2)$ *se, e somente se* $t_2 = t_1 + 2k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$*.*

2.1.1 Funções Seno e Cosseno

Utilizando a função de Euler, (LIMA et al., 2000) definem as funções trigonométricas seno e cosseno da seguinte maneira:

Definição 2.1. *Para* $t \in \mathbb{R}$ *definimos o* $\operatorname{sen} t$ *e* $\cos t$ *como sendo a ordenada e a abcissa do ponto* $E(t)$*, respectivamente. Como mostra a Figura 7*

Figura 7 – Funções seno e cosseno



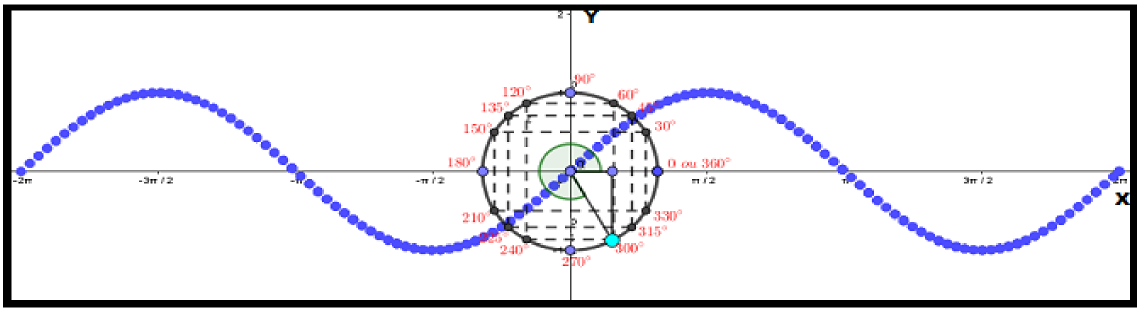
Fonte: Elaboração Própria

O domínio das duas funções é o conjunto dos números reais e têm como imagem o intervalo $[-1,1]$.

Observação 2.2. *Pela observação 2.1 temos que as funções seno e cosseno são funções periódicas de período* 2π*.*

A Figura 8 mostra o gráfico da função seno

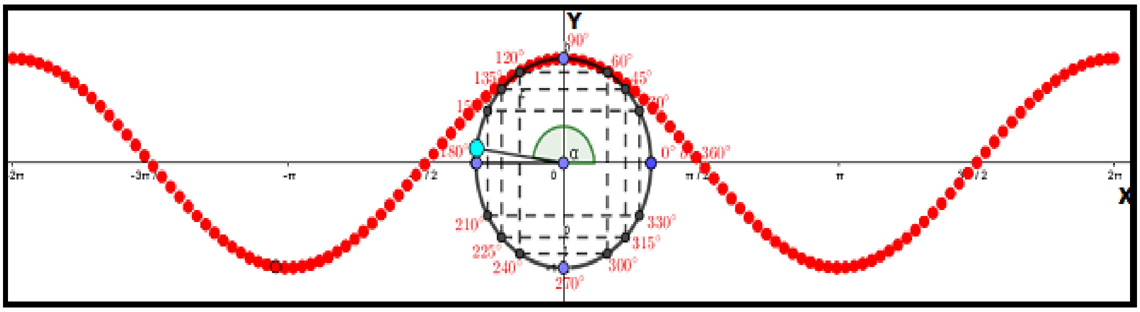
Figura 8 – A Função Seno



Fonte: Elaboração Própria

A Figura 9 mostra o gráfico da funçaõ cosseno

Figura 9 – A Função Cosseno



Fonte:Elaboração Própria

Pela definição de seno e cosseno e pela Figura 7, temos que:

1. O seno é positivo no primeiro e segundo quadrante e negativo no terceiro e quarto quadrantes.

2. O cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes.

2.1.2 Funções que derivam das funções seno e cosseno

Segundo (LIMA et al., 2000) das funções seno e cosseno obtemos outras funções trigonométricas: tangente, cotangente, secante e cossecante. Definidas como

(i) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

(ii) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

(iii) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

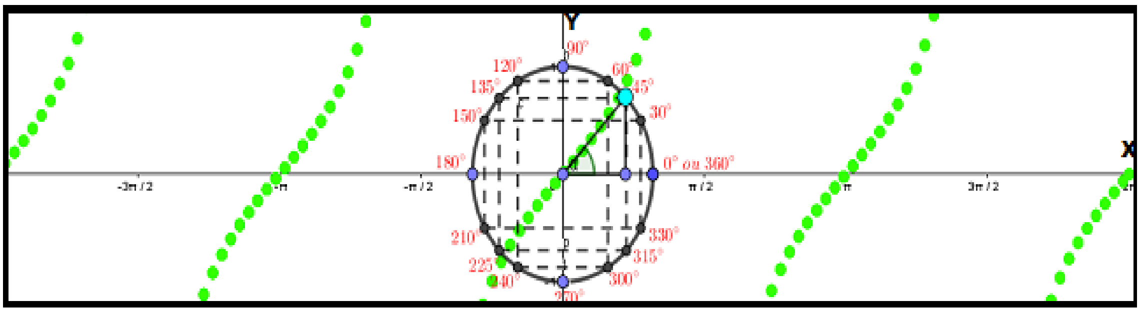
(iv) $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

O domínio destas funções está condicionado ao fato do denominador ser diferente de zero. Por exemplo, a função $\cos x$ se anula quando $x = \dfrac{(2k+1)}{2}\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, o domínio da função $\tan x$ é

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2})$$

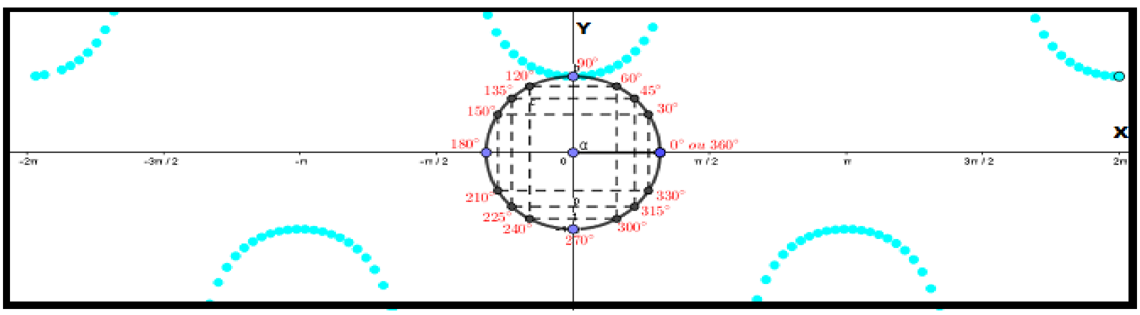
Como a função secante tem o mesmo denominador da tangente, os domínios são iguais. Como se observa nas Figuras 10 e 11

Figura 10 – A Função Tangente



Fonte: Elaboração Própria

Figura 11 – A Função Secante



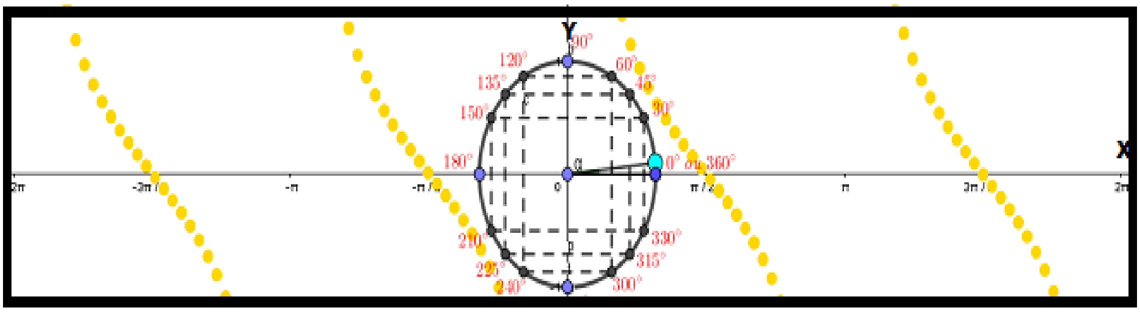
Fonte: Elaboração Própria

Analogamente, a cotangente e cossecante tem o mesmo domínio

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi,\ (k+1)\pi)$$

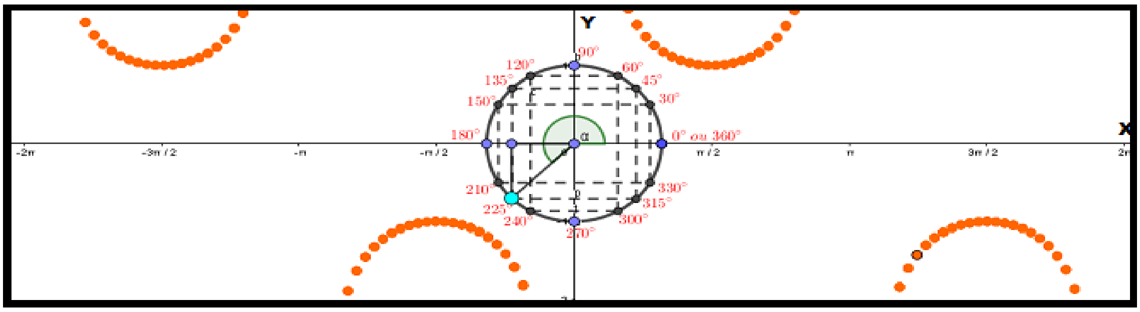
Como pode-se observar nas Figuras 12 e 13

Figura 12 – A Função Cotangente



Fonte: Elaboração Própria

Figura 13 – A Função Cossecante



Fonte: Elaboração Própria

Pela definição de secante e cossecante podemos afirmar que elas tem período 2π, já que dependem exclusivamente das funções cosseno e seno, respectivamente.
No caso da função tangente, utilizaremos o círculo unitário para verificar que é uma função periódica de período π. Raciocínio análogo pode ser utilizado para a função cotangente.
Inicialmente, identificaremos geometricamente a tangente de t para um $t \in \mathbb{R}$. Na Figura 14 os triângulos $\triangle OSP$ e $\triangle OUQ$ são semelhantes, logo

$$\frac{UQ}{SP} = \frac{OU}{OS}$$

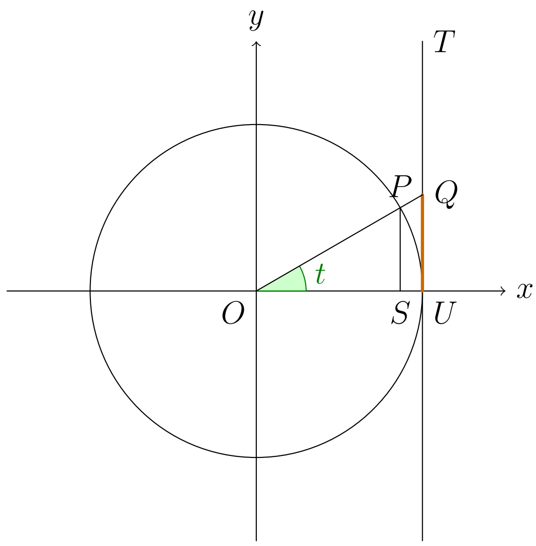
Como $SP = \operatorname{sen} t$, $OS = \cos t$ e $OU = 1$ obtemos

$$\frac{UQ}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\cos t}$$

Portanto, $UQ = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \tan t$. Isto é, identificamos o valor de $\tan t$ com o comprimento do segmento UQ.

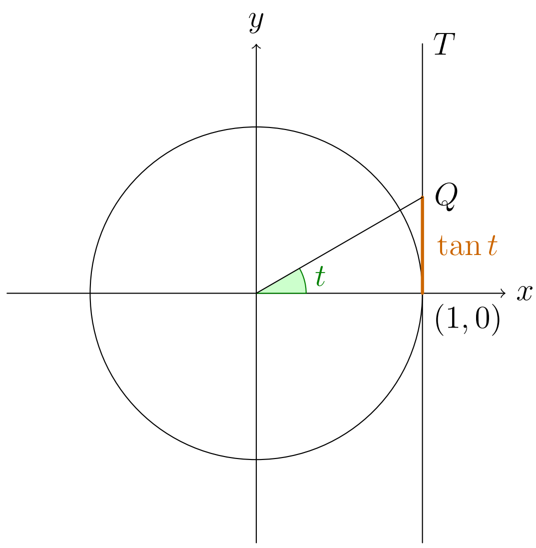
Observação 2.3. *Observe que esta identificação é compatível com a definição da função tangente. Por exemplo, A tangente é positiva no primeiro e terceiro quadrantes e negativa nos outros dois.*

Figura 14 – tangente do ângulo t



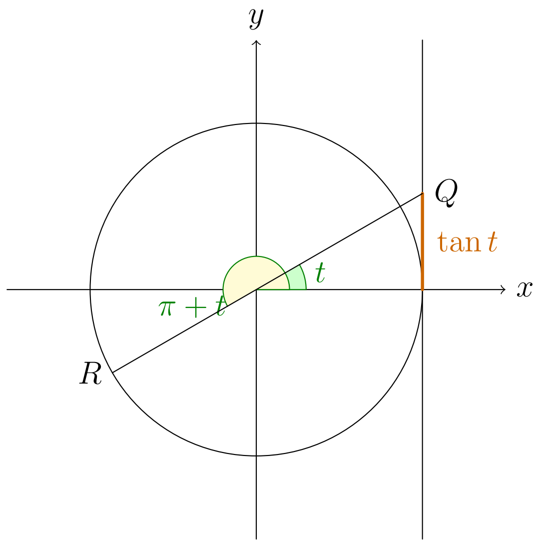
Para um número real t temos que $\tan t$ é o comprimento do segmento, na reta T, de extremidades $(1,0)$ e o ponto Q como se mostra na figura 15

Figura 15 – tangente de t



Observe que só podemos ter o mesmo valor da $\tan t$ se considerarmos o ponto R, oposto a Q, no círculo unitário, como se mostra na Figura 16

Figura 16 – tangente de $\pi + t$



O ponto R é o ponto terminal do arco $E(t+\pi)$. Aliás, temos que $\tan(t) = \tan(t+k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. O menor valor positivo que satisfaz esta igualdade é π. Logo, o período da função tangente é π.

2.2 Funções do Tipo $f(x) = a + b\,g(cx + d)$, onde g é uma Função Trigonométrica

Nesta seção será realizado o estudo de funções do tipo $f(x) = a + bg(cx + d)$, onde a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ com $b \neq o$, $c \neq 0$ e g é uma das funções trigonométricas apresentadas na seção anterior.

2.2.1 Funções do tipo $f(x) = a + b\,\mathrm{sen}(cx + d)$ ou $f(x) = a + b\cos(cx + d)$

As funções do tipo $f(x) = a+b\,\mathrm{sen}(cx+d)$ ou $f(x) = a+b\cos(cx+d)$ estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ e tem período $\dfrac{2\pi}{|c|}$. Nesta subseção mostraremos alguns exemplos de aplicação destes tipos de funções.
O seguinte exemplo foi adaptado do Concurso da Prefeitura de Betânia, PE

Exemplo 2.1. *Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que, em determinada região onde leões são os pedradores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por* $Z(t) = 850 + 400\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)$*, sendo o tempo* t *medido em anos a partir de janeiro de 2000 (*$t = 0$*).*
Pergunta-se:

a. *Qual era a população de zebras em janeiro de 2000?*

b. *Qual era a população de zebras em janeiro de 2004?*

c. *Sabendo que a população máxima de zebras atingida foi 1250, determine a primeira vez em que isso ocorreu.*

Resolução:

$Z(t) = 850 + 400.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right)$

a. *Fazemos* $t = 0$ *na função:*

$$\begin{aligned} Z(0) &= 850 + 400.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(0)}{4}\right) \\ &= 850 + 400.\operatorname{sen} 0 \\ &= 850 \end{aligned}$$

A população de zebras era de 850.

b. *Fazemos* $t = 4$ *na função:*

$$\begin{aligned} Z(4) &= 850 + 400\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(4)}{4}\right) \\ &= 850 + 400.\operatorname{sen}\pi \\ &= 850 \end{aligned}$$

c. *Fazemos* $Z(t) = 1250$*:*

$$\begin{aligned} 1250 &= 850 + 400.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right) \\ 400 &= 400.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right) \\ 1 &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right) \end{aligned}$$

Nesse caso, considerando o primeiro momento em que seno vale 1, temos $\frac{\pi t}{4} = \frac{\pi}{2}$*, logo* $t = 2$*.*
O primeiro momento em que a população foi de 1250 indivíduos foi no ano de 2002.

Exemplo 2.2. *Esboce o gráfico e determine o período, conjunto imagem e domínio da função* $f(x) = 3 + 2.\operatorname{sen}(x - \pi)$.

Resolução:

Pode-se determinar o período, imagem e domínio mesmo sem a construção do gráfico.
A imagem é obtida a partir dos valores máximo e mínimo que podem ser atribuídos à expressão $\operatorname{sen}(x - \pi)$ *que são 1 e -1, respectivamente.*
Logo, $3 + 2.1 = 5$ *e* $3 + 2(-1) = 1$ *então* $Im(f) = [1, 5]$.

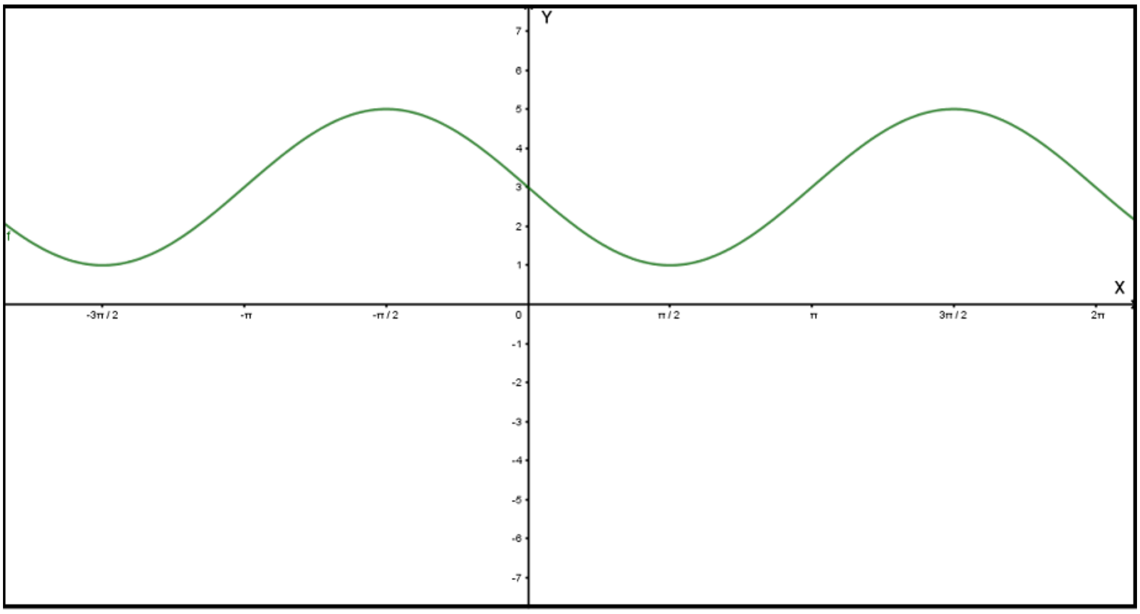
O período $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.
O domínio, como já foi mencionado, corresponde ao conjunto dos números reais.
Para esboçar o gráfico, foram atribuídos valores notáveis à expressão que define a medida do arco, como no (Quadro 2):

Quadro 2 – Quadro de Valores para a função $f(x) = 3 + 2.\operatorname{sen}(x - \pi)$

$(x-\pi)$	$\operatorname{sen}(x-\pi)$	x	$f(x) = 3 + 2\operatorname{sen}(x-\pi)$
0	0	π	3
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{3\pi}{2}$	5
π	0	2π	3
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\frac{5\pi}{2}$	1
2π	0	3π	3

Associando o ciclo trigonométrico ao gráfico da função, (Figura 17), tem-se a curva que representa a lei $f(x) = 3 + 2\operatorname{sen}(x - \pi)$.

Figura 17 – Construção Gráfica da função $f(x) = 3 + 2\operatorname{sen}(x - \pi)$

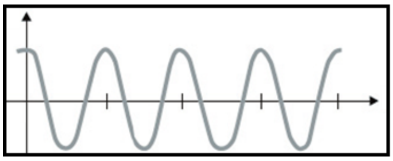


Fonte: Elaboração própria

O seguinte exemplo foi adaptado da VUNESP/FMJ-2012.1

Exemplo 2.3. *A agulha de uma máquina de costura industrial oscila com frequência de* $10Hz$, *ou seja, executa dez oscilações completas a cada segundo. Considerando o ponto mais alto de sua trajetória como início do seu movimento, localizado a* $3cm$ *da mesa da máquina, o gráfico qualitativo que relaciona as posições* p, *em centímetros, ocupadas pela agulha, com o tempo* t, *em segundos, decorrido durante seu movimento, é o mostrado na (Figura 18).*

Figura 18 – Representação Gráfica da Oscilação de uma Agulha.



Fonte: https:http://portalcei.com.br/site/download/3ano/assets/basic-html/page40.html

Determine seu período, o intervalo onde ocorrerá a oscilação e a lei da função.
Resolução:
Dado que a frequência da agulha é $10Hz$, e considerando que a frequência é o inverso do período, sendo x a constante que multiplica a variável t, temos: $\frac{|x|}{2\pi} = 10$. Logo $x = \pm 20\pi$. Considerando o ponto mais alto da sua trajetória como o início de seu movimento, localizado a $3cm$ da mesa da máquina, temos que a oscilação ocorrerá entre $[-3, 3]$. Como para $t = 0$, e $p = 3$, temos que $p = 3\cos(20\pi t)$ Logo, a função é: $p = 3\cos(20.\pi.t)$

Exemplo 2.4. *Esboce o gráfico e determine o período, o conjunto imagem e domínio da função $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$.*
Resolução:
Para esboçar o gráfico, foram atribuídos valores notáveis à expressão que define a medida do arco, como no (Quadro 3): Pode-se determinar o período, a imagem e o domínio mesmo sem a construção do gráfico. A imagem é obtida a partir dos valores máximo e mínimo que podem ser atribuídos à expressão $\cos(2x)$, que são 1 e -1, respectivamente. Logo $1 + 3(-1) = -2$ e $1 + 3.(1) = 4$ então $Im(f) = [-2, 4]$
O período é $p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

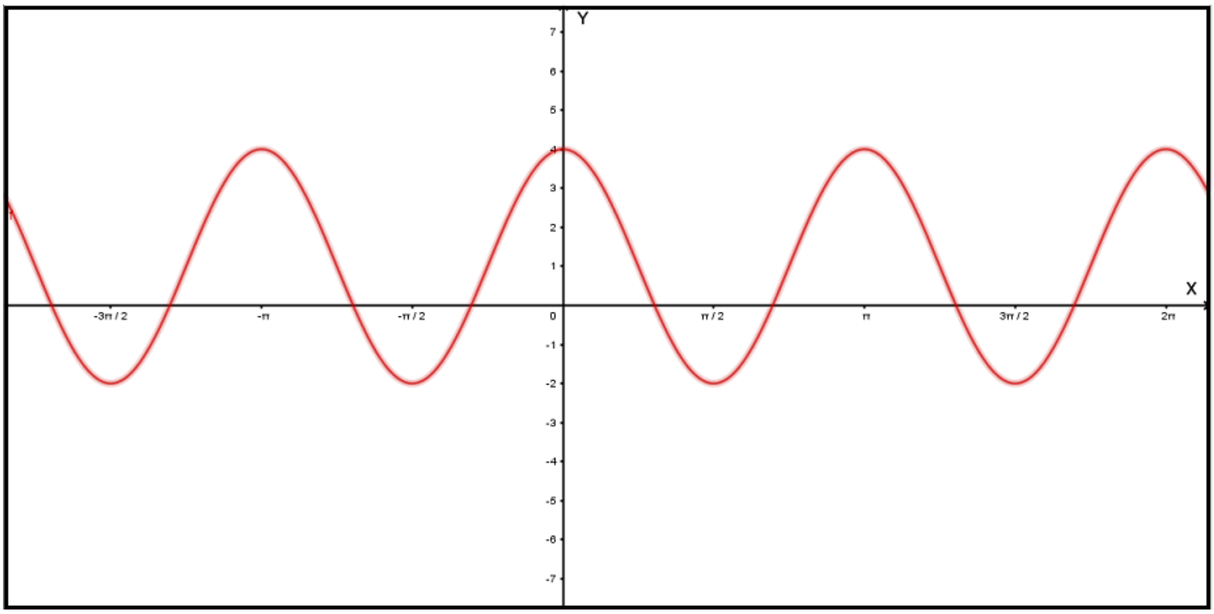
Quadro 3 – Quadro de Valores para a função $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$

$(2x)$	$\cos(2x)$	x	$f(x) = 1 + 3.\cos(2x)$
0	1	0	4
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	1
π	-1	$\frac{\pi}{2}$	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{4}$	1
2π	1	$x = \pi$	4

Fonte: Elaboração Própria

Associando o ciclo trigonométrico ao gráfico da função, (Figura 19), tem-se a curva que representa a lei $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$

Figura 19 – Construção Gráfica da função $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$



Fonte: Elaboração própria

2.2.2 Funções do tipo $f(x) = a + b\tan(cx + d)$

O domínio das funções do tipo $f(x) = a + b\tan(cx + d)$ é o conjunto

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{(2k-1)\pi - 2d}{2c}, \frac{(2k+1)\pi - 2d}{2c} \right)$$

e tem período $\dfrac{\pi}{|c|}$.
O seguinte exemplo foi adaptado da UFG.2010-2

Exemplo 2.5. *O horário do nascer e do pôr do sol depende de diversos fatores, especialmente da latitude do observador e do dia do ano (posição da Terra ao longo de sua órbita em torno do Sol). No início do verão do hemisfério sul, o tempo em horas, T, entre o nascer e o pôr do sol, para latitudes entre zero e 40 graus sul, pode ser calculado aproximadamente, com erro de alguns minutos, pela função $T(\theta) = 12 + 3,31\tan\theta$ em que θ é a latitude do local.*
Tendo em vista essas informações, no dia que marca o início do verão, qual é, aproximadamente, a diferença entre o total de horas de sol na cidade de Porto Alegre, cuja latitude é de 30 graus sul, e na cidade de Macapá, que está sobre a linha do Equador? Para Porto Alegre, temos:

$$\begin{aligned} T &= 12 + 3,31\tan(\frac{\pi}{6}) \\ &= 12 + 3,31.\frac{1,73}{3} \approx 13,90 \end{aligned}$$

Para Macapá:

$$\begin{aligned} T &= 12 + 3,31 \tan 0 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Logo, a diferença é dada por $13,90 - 12 = 1,90$ *horas* $= 1$ *hora e* 54 *minutos.*

2.3 Problematizações com gráficos de Funções

Sejam as Funções Trigonométricas:

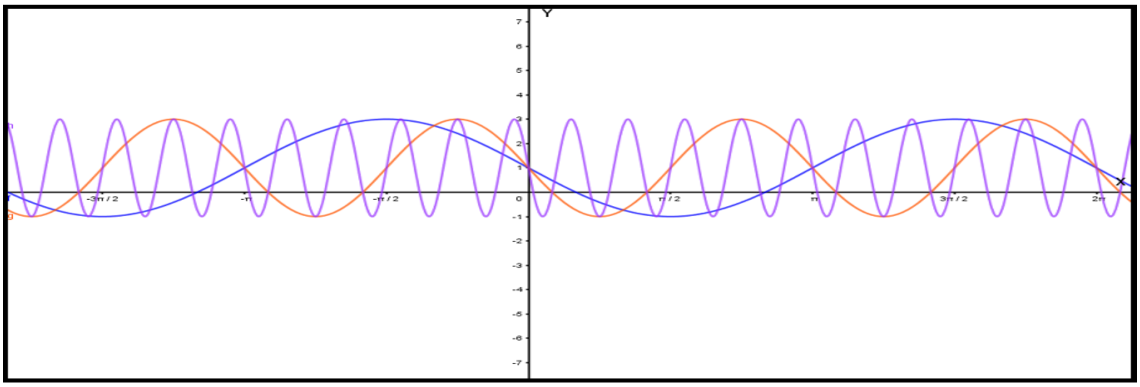
$$\begin{aligned} f(x) &= a + b \operatorname{sen}(cx + d) \\ f(x) &= a + b \cos(cx + d) \\ f(x) &= a + b \tan(cx + d) \\ f(x) &= a + b \cot(cx + d) \\ f(x) &= a + b \sec(cx + d) \\ f(x) &= a + b \csc(cx + d) \end{aligned}$$

em que os coeficientes a, b, c e d são reais b e c são não nulos.
Uma das habilidades necessárias para a resolução e compreensão de situações-problema que envolvem essas funções trigonométricas é a de relacionar a variação dos seus coeficientes com suas transformações gráficas.

1. Toma-se uma família de funções como exemplo: $f(x) = 1 + 2\operatorname{sen}(cx + \pi)$, $c \in \mathbb{R}$. Desse modo, a cada valor que é atribuído ao coeficiente c, tem-se uma função distinta.
Qual transformação gráfica ocorre ao se variar o coeficiente c?
Ficariam alterados o domínio e a imagem das funções?
A seguir alguns gráficos dessas funções, (Figura 20).

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2\operatorname{sen}(x + \pi) \\ g(x) &= 1 + 2\operatorname{sen}(2x + \pi) \\ h(x) &= 1 + 2\operatorname{sen}(10x + \pi) \end{aligned}$$

Figura 20 – Transformações Gráficas pela variação do coeficiente c na família de funções do tipo $f(x)$= $1 + 2\,\text{sen}(cx + \pi)$

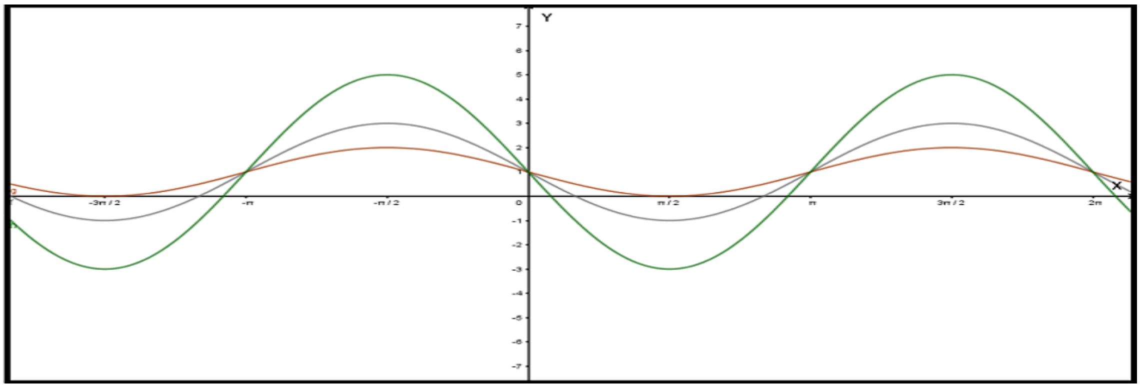


Fonte: Elaboração Própria.

Nota-se que, variando o coeficiente c, temos alterados apenas os períodos das funções. Os conjuntos imagem e domínio permanecem inalterados.

Toma-se agora outra família de funções: $f(x) = 1+b\,\text{sen}(x+\pi)$, $b \in \mathbb{R}^*$. Atribuindo-se distintos valores ao coeficiente b, quais transformações gráficas pode-se esperar? Para cada valor atribuído, tem-se uma função distinta, (Figura 21).

Figura 21 – Transformações Gráficas pela variação do coeficiente b na família de funções do tipo $f(x) = 1 + b\,\text{sen}(x + \pi)$



Fonte: Elaboração Própria.

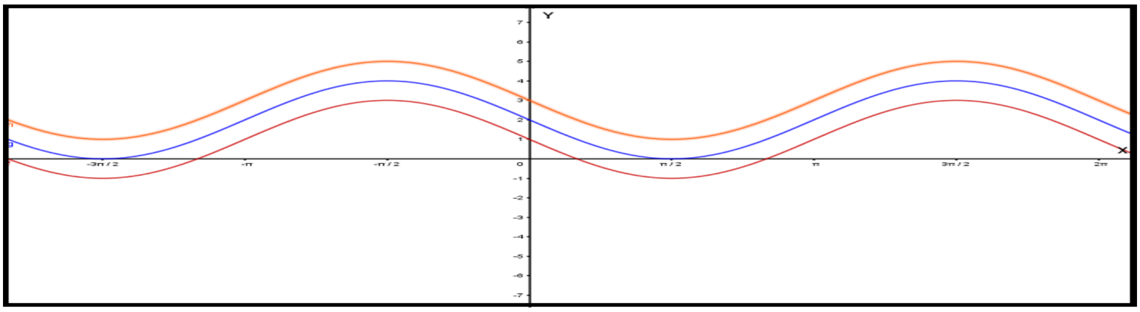
Neste caso, nota-se que os conjuntos imagens são alterados, pois a amplitude *altura* da curva é modificada, enquanto permanecem inalterados os domínios e os períodos.

$$f(x) = 1 + 2\,\text{sen}(x + \pi)$$
$$g(x) = 1 + \text{sen}(x + \pi)$$
$$h(x) = 1 + 4\,\text{sen}(x + \pi)$$

2. Em seguida, variando o coeficiente a de uma família de funções do tipo $f(x) = a + 2\,\text{sen}(x + \pi)$ para cada valor atribuído ao coeficiente, tem-se uma função distinta.

(Figura 22).

Figura 22 – $f(x) = a + 2\,\mathrm{sen}(x + \pi)$



Fonte: Elaboração Própria.

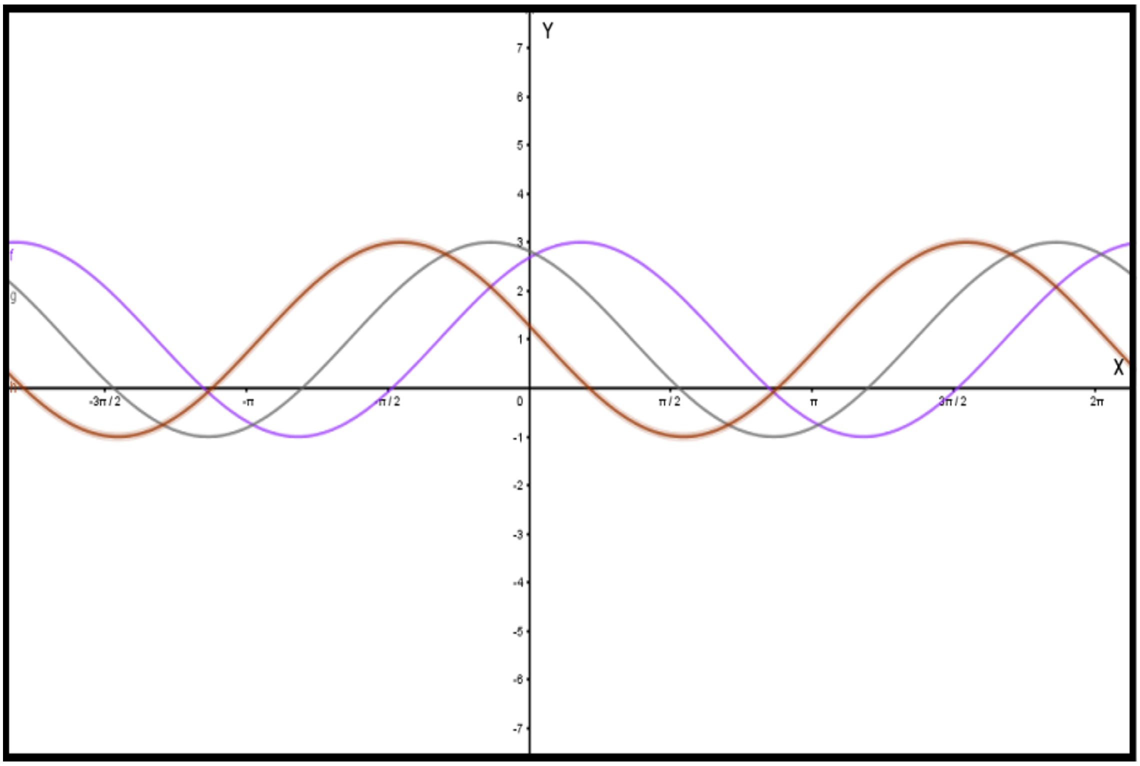
$$f(x) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(x + \pi)$$
$$g(x) = 2 + 2\,\mathrm{sen}(x + \pi)$$
$$h(x) = 3 + 2\,\mathrm{sen}(x + \pi)$$

Pode-se notar que a variação do coeficiente a provoca uma translação vertical, ou seja, um deslocamento da curva no sentido vertical.
O coeficiente a é chamado de valor médio da função, pois é a média aritmética entre o maior e o menor valor assumidos pela função.

3. Para provocar um deslocamento horizontal, deve-se alterar o coeficiente d, como sugerem os exemplos a seguir, relacionados às funções do tipo $f(x) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(x + d)$, (Figura 23).

$$f(x) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(x + 1)$$
$$g(x) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(x + 2)$$
$$h(x) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(x + 3)$$

Figura 23 – Transformações Gráficas pela variação do coeficiente d na família de funções do tipo $f(x) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(x + d)$



Fonte: Elaboração Própria.

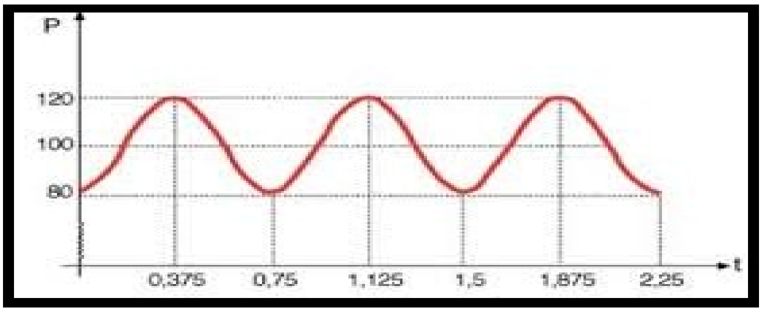
O seguinte exemplo foi adaptado da FUVEST.2007

Exemplo 2.6. *Os batimentos cardíacos num certo intervalo de tempo são um fenômeno com característica periódica e, portanto, podem ser mais bem compreendidos e modelados com a ajuda das funções trigonométricas. Da mesma forma, podemos compreender melhor a pressão arterial, pois ela atinge seu valor máximo quando o coração se contrai para bombear o sangue* (pressão sistólica)*, e atinge o valor mínimo* (pressão diastólica) *quando o coração está em repouso, e tudo isto verificado num intervalo de tempo de um batimento cardíaco.*

Quando uma pressão sanguínea é, por exemplo, $120/80mmHg$*, significa que o primeiro valor se refere à pressão sistólica e o segundo, à pressão diastólica. Popularmente, diz-se que essa pressão é* $12/8$*.*

Se uma pessoa tem um batimento cardíaco a cada $0,75$ *segundo, ou seja,* 80 *batimentos por minuto, e pressão arterial de* $120/80mmHg$*, (Figura 24).*

Figura 24 – Modelagem Gráfica da Pressão Arterial por uma Função Trigonométrica.



Fonte:http://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo0910200706.htm

Controlar a pressão arterial com bons hábitos alimentares, prática esportiva e procurar ter qualidade de vida para diminuir o estresse podem evitar problemas graves de saúde, dentre os quais estão os que mais matam os brasileiros: infarto do miocárdio e acidente vascular cerebral.

O próximo capítulo será dedicado ao relato do software GeoGebra bem como as orientações para o ensino das Funções Trigonométricas pelos PCN e a importância do ciclo trigonométrico na construção dos conhecimentos relativos às Funções Trigonométricas.

Capítulo 3

O GeoGebra e o Ensino das Funções Trigonométricas

Este capítulo foi elaborado baseando-se numa revisão bibliográfica sobre os trabalhos relacionados com esta pesquisa, a utilização dos Applets no ensino e aprendizagem das Funções Trigonométricas.

Sendo assim, com o objetivo de identificar, nas pesquisas acadêmicas as tendências atuais sobre o ensino e aprendizagem das Funções Trigonométricas por meio do software GeoGebra e buscando reconhecer lacunas que pudessem ser investigadas, iniciou-se uma pesquisa no portal da CAPES. Para tal, efetuou-se um levantamento bibliográfico dos resumos das dissertações e teses dos últimos cinco anos. Buscou-se pelo tema "Funções Trigonométricas e GeoGebra", encontrando-se 347 pesquisas. Dessas, foram selecionadas vinte, privilegiando as pesquisas com características próximas ao trabalho desenvolvido.

Em seguida, realizou-se o fichamento de cada uma das pesquisas buscando contemplar informações gerais, como: título, autores, linha de pesquisa, ano e instituição de origem, e, também, informações específicas, tais como: foco temático, objetivos do estudo, referencial teórico, procedimentos metodológicos, resultados obtidos e contribuições para a área, (Apêndice A).

Procurou-se obter todas essas informações junto aos resumos, mas nem todos apresentavam a ideia clara desses dados. Percebeu-se que certos autores não foram cuidadosos na elaboração dos mesmos, pois entende-se que esses deveriam conter elementos considerados essenciais, como: objetivo do estudo, referencial teórico, a metodologia, os resultados e suas possíveis considerações e contribuições. Mediante a esse obstáculo, decidiu-se buscar os trabalhos na íntegra.

Então, foi feito o fichamento a partir das suas leituras integrais. Ainda assim, dois trabalhos foram fichados apenas com base nos resumos, pois não havia texto disponibilizado na Internet. Também notou-se que não havia disponibilidade de acesso aos trabalhos relacionados produzidos nos anos de 2012 e 2017.

A seguir, passa-se a comentar cada uma das pesquisas selecionadas que se assemelham ao trabalho desenvolvido, analisando os aspectos convergentes e divergentes das mesmas com este trabalho.

3.1 Apresentação dos Trabalhos Relacionados

É possível identificar na pesquisa realizada por Silva (2013) que há similaridades com este trabalho na elaboração de material didático para o ensino e aprendizagem das Funções Trigonométricas por meio de tecnologias e também apresenta semelhança na utilização de documentos oficiais na procura por orientações em relação ao tema, contudo pode-se perceber que as atividades que foram propostas não contemplaram a construção dos conceitos referentes às Funções Trigonométricas a partir do ciclo trigonométrico, diferindo-se neste especto deste trabalho.

É possível identificar na pesquisa realizada por Maia (2013) similaridades com o trabalho aqui desenvolvido como a metodologia utilizando-se uma abordagem qualitativa e, ainda, na busca por novas maneiras de se ensinar as Funções Trigonométricas visando amenizar as deficiências ou lacunas no aprendizado deste conteúdo. Uma das divergências com este trabalho é a análise de coleções de livros didáticos que foi realizada, além disso também não é possível analisar todas as divergências uma vez que o resumo não é claro e nem o trabalho foi disponibilizado na íntegra na internet para se tirar essa conclusão.

É possível identificar na dissertação de mestrado de Silva (2013) similaridades com este trabalho na utilização de softwares como instrumentos auxiliadores e facilitadores na aprendizagem das Funções Trigonométricas. Contudo, pode-se perceber que as atividades elaboradas envolviam a manipulação direta do GeoGebra, não privilegiando o ciclo trigonométrico como ponto de partida na construção dos conceitos das Funções Trigonométricas, diferindo-se por tanto nesse ponto, considerado um aspecto essencial na elaboração deste trabalho.

A pesquisa de Junior (2013) converge com o presente trabalho no que se refere ao uso do software GeoGebra na busca de se promover o ensino e aprendizagem das Funções Trigonométricas de forma mais eficiente, e difere nos seguintes aspectos: as atividades elaboradas necessitavam da manipulação de comandos específicos do GeoGebra, assim como da utilização de suas ferramentas, não construindo os conceitos por meio do ciclo trigonométrico, e, nem utilizando-se de Applets que são ferramentas mais práticas e objetivas, distinguindo-se nestes pontos com este trabalho.

A pesquisa de Persicano (2013) assemelha-se com o presente trabalho no que se refere à proposta de atividades que deveriam ser realizadas por meio do software GeoGebra, buscando promover a aprendizagem de conceitos matemáticos, e difere no seguinte tópico: as Funções Trigonométricas foram construídas no software com a utilização de tabelas, assim sendo, não se utilizou o ciclo trigonométrico na construção dos conceitos referentes às Funções Trigonométricas nem se aproveitou o software de uma forma mais dinâmica.

A pesquisa de Lima (2013) converge com o presente trabalho no que se refere à utlização do software GeoGebra para o ensino de uma função e também na elaboração de uma sequência didática a ser realizada por meio de tecnologias, diferenciando-se nas atividades propostas na sequência didática, em que para a realização das mesmas se utilizou a linguagem direta e ferramentas do GeoGebra na construção das funções.

A pesquisa de Teixeira (2013) converge com o presente trabalho no que se refere à aprendizagem Matemática por meio de tecnologias, permitindo aos alunos descobertas e tornando a aprendizagem dinâmica e atrativa. Verifica-se que o trabalho realizado difere-se deste pois as atividades propostas contemplavam o estudo das características das funções quadrática e afim.

A pesquisa de Bruginski (2014) assemelha-se com o presente trabalho na criação de uma ferramenta que auxilie o ensino da trigonometria, em que foram elaborados Applets para o estudo das características e construção dos gráficos das Funções Trigonométricas. Os gráficos das Funções Trigonométricas foram obtidos por meio de Applets mas não privilegiou-se o ciclo trigonométrico em suas construções, distinguindo-se neste ponto deste trabalho.

A pesquisa de Medeiros (2014) assemelha-se com este trabalho no desenvolvimento de uma proposta para o ensino da trigonometria por meio do software de Geometria dinâmica GeoGebra, de forma que o uso dessa tecnologia possa contribuir na apropriação e compreensão de conceitos trigonométricos. Destaca-se que o trabalho realizado difere-se deste nas construções realizadas por meio da manipulação direta de comandos e das ferramentas disponíveis no GeoGebra.

A pesquisa de Souza (2015a) assemelha-se com este trabalho no uso do software GeoGebra como recurso pedagógico para o ensino das Funções Trigonométricas, explorando suas características por meio das ferramentas oferecidas por essa tecnologia. Pode-se perceber também, que as atividades elaboradas privilegiavam - mesmo com a utilização do software - a construção dos gráficos por meio de tabelas, e da utilização das ferramentas do GeoGebra, diferenciando-se nesses aspectos desse trabalho.

A pesquisa de Farias (2016) assemelha-se com este trabalho na elaboração de um roteiro de atividades a serem realizadas por meio do software GeoGebra e tecnologias digitais na aprendizagem das Funções. Destaca-se que o trabalho realizado diferencia-se deste na utilização do GeoGebra para o ensino e aprendizagem de outras funções que não são as Funções Trigonométricas.

A pesquisa de N.V. (2015), converge com o presente trabalho no que se refere à utilização do software GeoGebra como ferramenta que venha enriquecer a compreensão visual do comportamento gráfico das Funções Trigonométricas, de forma a auxiliar à aprendizagem com imagens dinâmicas, diferenciando-se nas atividades que contemplaram a utilização direta do GeoGebra, não construindo os conceitos a partir do ciclo trigonométrico com ênfase para o seu estudo na 1ª volta.

A pesquisa de Santiago (2015) converge com o presente trabalho no que se refere à utilização do software GeoGebra no ensino das funções seno e cosseno por meio de atividades propostas, diferenciando-se por não ter abordado em seu trabalho as demais funções trigonométricas - tangente, cotangente, secante e cossecante - diferenciando-se também no processo metodológico, tendo realizado uma pesquisa quanti-qualitativa e nas atividades que não associavam ao ciclo trigonométrico a construção dos gáficos das funções seno e cosseno.

A pesquisa de Souza (2015b) converge com o presente trabalho no que se refere a apresentação de uma proposta didática para o ensino das Funções Trigonométricas utilizando o GeoGebra com o intuito de tornar os estudos relativos a essas funções mais dinâmicos, com tudo difere-se deste trabalho nas atividades elaboradas em que foram abordadas somente as funções seno, cosseno, arco seno e arco cosseno. Distinguiu-se também deste, por não utilizar o ciclo trigonométrico como o precursor na construção dos gráficos que foram apresentados.

A pesquisa de Silva (2015) converge com o presente trabalho no que se refere à utilização do software GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem nas salas de aula, enriquecendo e auxiliando a compreensão visual de conceitos, também assemelha-se, na elaboração de atividades a serem desenvolvidas por meio do software, no entanto difere deste trabalho na forma como os conceitos foram desenvolvidos nas atividades propostas, estes não se encontravam alinhados a construção dos gráficos das funções, pois não tiveram como referencial principal o ciclo trigonométrico.

A pesquisa de Filho (2015) converge com o presente trabalho no que se refere à criação de uma página na internet que possibilite os estudos das Funções Trigonométricas por meio de atividades propostas a serem executadas pela manipulação e interação propiciadas por recursos tecnológicos contidos nas mesmas. O trabalho difere-se deste no estudo que foi realizado a respeito de outras funções - função afim e função quadrática - e distingui-se também na construção gráfica das Funções Trigonométricas, que mesmo tendo sido feitas com o auxílio da tecnologia não privilegiou o ciclo trigonométrico para a obtenção dos gráficos das mesmas.

A pesquisa de Bitencourt (2015) converge com o presente trabalho no que se refere à elaboração de um roteiro de atividades utilizando recursos computacionais que permitam aos alunos aprenderem enquanto resolvem problemas. contudo, a pesquisa não abordou as Funções Trigonométricas, a proposta de atividades contemplava outros conceitos da trigonometria por meio de situações-problema.

A pesquisa de Mileno (2015) assemelha-se com o presente trabalho no que se refere ao uso do software GeoGebra por intermédio de atividades realizadas com essa ferramenta tecnológica, visando contribuir e favorecer a aprendizagem dos alunos no estudo das Funções Trigonométricas. O trabalho difere deste no aspecto da realização dos estudos somente das funções seno e cosseno - não abrangendo as funções tangente, cotangente secante e cossecante - destaca-se também, que as atividades propostas exigiam a manipulação das ferramentas do GeoGebra, além de não utilizar o ciclo trigonométrico como ponto de partida para construção dos conceitos e dos gráficos, distinguindo-se nesses pontos, que para essa pesquisa são considerados essenciais.

A pesquisa de Ferreira (2016) converge com o presente trabalho no que se refere à proposta de uma sequência didática que propicie a compreensão gráfica das Funções Trigonométricas utilizando os recursos do software GeoGebra, também se assemelha na abordagem do desenvolvimento da trigonometria numa perspectiva histórica. O trabalho difere deste nas atividades elaboradas e que não utilizaram o ciclo trigonométrico como precursor dos conceitos necessários para a construção gráfica das Funções Trigonométricas.

A pesquisa de Melo (2016) assemelha-se com o presente trabalho no que se refere a uma metodologia de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno por meio de atividades onde se utilizou o software GeoGebra, a pesquisa também converge para a compreensão do comportamento das funções seno e cosseno quando se altera cada um dos seus parâmetros, e ainda tabém no tipo de pesquisa realizada, que foi a pesquisa qualitativa. O trabalho difere deste nas atividades propostas que não utilizaram o ciclo trigonométrico como referencial para o desenvolvimento de habilidades e competências na construção gráfica das Funções Trigonométricas seno e cosseno.

A partir da busca realizada no portal da CAPES , pode-se perceber que, mesmo utilizando os filtros disponíveis para o refinamento da pesquisa na busca por "Funções Trigonométricas"e "GeoGebra", apareceram inúmeras pesquisas relacionando o software GeoGebra ao ensino dos mais diversos tipos de Funções. Porém, percebeu-se que, das vinte pesquisas selecionadas, dezesseis relacionavam o software GeoGebra ao ensino e aprendizagem das Funções Trigonométricas.

Os resultados das pesquisas selecionadas indicam que o ensino das Funções Trigonométricas podem possibilitar ao aluno a construção do conhecimento Matemático. Sugerem ainda que a aprendizagem de um novo conceito matemático deve partir da resolução de exercícios propostos e situações-problema por intermédio da interação, visualização e reflexão propiciadas pelo uso dos recursos que essa tecnologia oferece. Ainda indicam uma carência de pesquisas para o ensino e aprendizagem das Funções Trigonométricas - por meio de Applets - e que sejam construídas associadas ao ciclo trigonométrico, com ênfase em seus estudos na 1ª volta.

Sendo assim considera-se que a temática do ensino de Funções Trigonométricas, vinculada à utilização de um GeoGebraBook aliadas aos Applets do software GeoGebra como recurso de ensino e aprendizagem, pode favorecer o aluno no desenvolvimento de habilidades e competências para transformar os conceitos e propriedades matemáticas que se apresentam de forma estática nos livros didáticos em realidade manipulável, dinâmica e entendível, permitindo ao aluno interpretar e resolver problemas Matemáticos, apresentar soluções do mundo real por meio do contato, da observação e da construção do pensamento matemático.

O enfoque nas pesquisas publicadas, embora relevantes quando se trata do ensino e aprendizagem das Funções Trigonométricas, não exploram o ciclo trigonométrico, o que se julga importante por ser uma das formas mais simples de introduzir as Funções Trigonométricas.

Embora as pesquisas levantadas explorem como recursos de ensino e aprendizagem das Funções Trigonométricas o uso de tecnologias, a resolução de problemas, a contextualização e a interdisciplinaridade, nenhuma delas contemplou a aprendizagem das Funções Trigonométricas usando o ciclo trigonométrico como recurso principal.

Assim, a relevância desse trabalho está em desenvolver um GeoGebraBook com uma proposta de atividades que utilize a tecnologia para se construir os conceitos relativos às Funções Trigonométricas sobre o foco que o ciclo trigonométrico é uma das formas mais práticas de se construir esses conceitos.

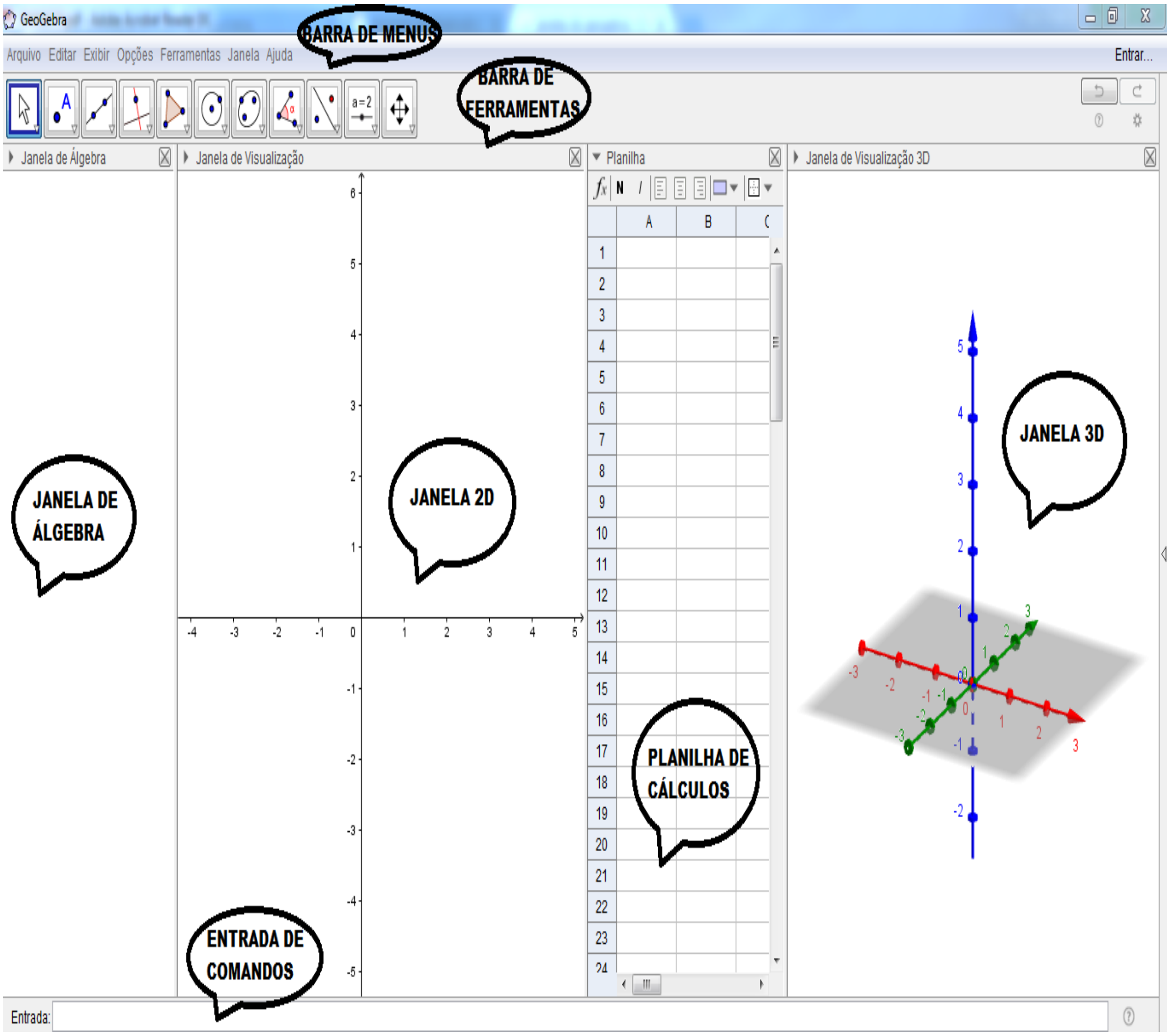
3.2 A Utilização de Applets na Aprendizagem das Funções Trigonométricas

Os softwares educacionais disponibilizam oportunidades de recursos didáticos que não podem ser alcançadas quando se utiliza somente o giz e a lousa para ministrar as aulas. A motivação e apropriação do conteúdo trabalhado em sala de aula são algumas das oportunidades a serem obtidas por meio da utilização das tecnologias por intermédio dos softwares educacionais.(ROMERO, 2006)

O software GeoGebra é um recurso didático voltado para o ensino da Matemática. Foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter, professor e pesquisador, Ph.D. em informática aplicada à Educação Matemática.

O projeto do GeoGebra iniciou-se na Universität Salzburg em 2001 e, desde então, prossegue em desenvolvimento e aprimoramento na Florida Atlantic University. A popularidade desse software aumenta a cada dia desde a sua criação. Iformações disponíveis em GeoGebra.

Figura 25 – Interface do GeoGebra



Fonte: Elaboração Própria

O GeoGebra é um software gratuito e livre. Software livre é uma expressão utilizada para designar qualquer programa de computador que pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários de forma gratuita.

O software possui múltiplas janelas destinadas a todos os níveis de ensino. Sua característica principal é a manipulação, permitindo-se assim uma aprendizagem de forma dinâmica. A interface do GeoGebra, (Figura 25), permite combinações de álgebra, gráficos, geometria e tabelas.

O GeoGebra possui características importantes:

- É um software de código aberto, disponível em **www.geogebra.org**;
- O software funciona em qualquer sistema operacional: Linux, Windows;

☞ Além da Língua Portuguesa, está disponível em vários idiomas;

☞ Sua área de trabalho é de fácil manipulação, oferecendo uma grande variedade de recursos interativos;

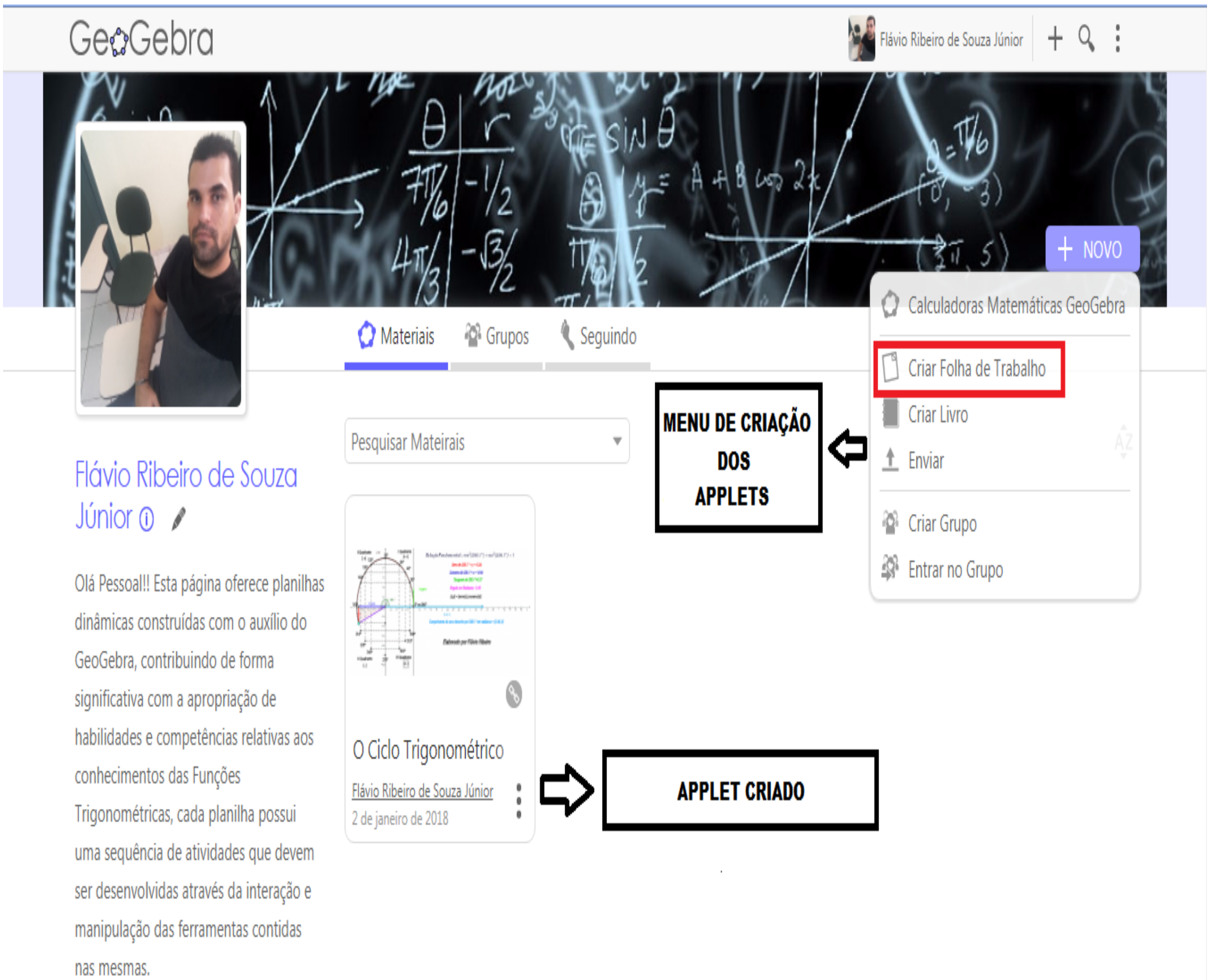
☞ Permite a criação de Applets.

Uma das características mais importantes do GeoGebra é a criação e manipulação de Applets que possibilitam construções matemáticas por meio da exploração interativa do "arraste"do cursor ou pela alteração de parâmetros.

A Interface do ambiente do GeoGebra, além de permitir a criação e manipulação dos Applets, também oferece uma série de outros materiais interativos, ou seja, o ambiente do GeoGebra estimula o aluno a se envolver não somente com um conteúdo específico mas permite a ele explorar novos conhecimentos, contribuindo assim para uma aprendizagem significativa, desenvolvendo habilidades e competências de forma interativa.

Para confecção desse trabalho, utilizou-se a interface do ambiente do GeoGebra, que permitiu a criação e manipulação dos Applets, (Figura 26), com o objetivo de explorar o ensino das Funções Trigonométricas, pois, além das oportunidades didáticas, a experimentação enriquece a construção do saber matemático.

Figura 26 – Criação e Manipulação de Applets



Fonte: Elaboração Própria.

Em sua dissertação de mestrado, Silva (2015) afirma que, com o atual avanço tecnológico, o professor deve se apropriar cada vez mais das tecnologias e introduzi-las no dia a dia da sala de aula. Tal fato valoriza a representação variada e precisa das Funções Trigonométricas, incorporando conhecimentos matemáticos e influenciado o modo como esses conceitos são construídos.

3.3 Orientações Nacionais Para o Ensino das Funções Trigonométricas

Os (PCNEM, 2000, p.43-44) ressaltam a importância da contextualização e da interdisciplinaridade no ensino das Funções Trigonométricas de forma a permitir conexões entre conceitos e formas de pensamento matemático. Também alertam para que o ensino das Funções Trigonométricas não esteja desassociado da realidade, devido ao caráter integrador e exploratório que o tema possui.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN+) (2002), encontram-se orientações pedagógicas complementares aos PCNs para o desenvolvimento de habilidades e competências no ensino das Funções Trigonométricas.

Os (PCN+, 2002) ressaltam a importância de se conectar a utilidade do estudo de funções e suas representações com o desenvolvimento da linguagem Matemática promovendo, além do aprendizado na disciplina, a evolução de uma competência mais geral como desenvolvimento para a vida.

Os (PCN+, 2002) destacam a relevância de se associar o estudo das Funções Trigonométricas ao ciclo trigonométrico, com ênfase ao seu estudo na 1ª volta. Ressaltam também a importância de se evitar o cálculo algébrico excessivo, devendo-se investir mais tempo nas aplicações, assegurando a construção de modelos matemáticos que contribuam para a resolução de problemas.

Outro aspecto importante é fazer a associação com a perspectiva histórica entre as Funções Trigonométricas e a evolução tecnológica em diferentes épocas, o que permite aos alunos perceberem a importância do conhecimento matemático na resolução de problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo.

Corroborando com as orientações dos (PCN+, 2002), Aubyn (2004) afirma que a utilização do ciclo trigonométrico é uma das formas mais elementares de se introduzir os conceitos, as habilidades e as competências referentes às Funções Trigonométricas.

Também são encontradas, no Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro(RIO DE JANEIRO, 2012, p.26), as orientações curriculares quanto ao ensino da trigonometria associada à circunferência trigonométrica, (Figuras 27 e 28) .

Figura 27 – Currículo Mínimo de Matemática, RJ, 1ª Série do Ensino Médio, 3º Bimestre

Campo Geométrico	Trigonometria na circunferência
Habilidades e Competências	-Reconhecer a existência de fenômenos que se repetem de forma periódica. -Identificar o radiano como unidade de medida de arco. -Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.

Fonte: http://www.conexaoescola.rj.gov.br/curriculo-basico/matematica

Figura 28 – Currículo Mínimo de Matemática, RJ, 1ª Série do Ensino Médio, 4º Bimestre

Campo Geométrico	Trigonometria na circunferência
Habilidades e Competências	-Representar o seno, o co-seno e a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico. -Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta. -Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Fonte: http://www.conexaoescola.rj.gov.br/curriculo-basico/matematica

Diante do exposto, considera-se que o ensino das Funções Trigonométricas, quando associado ao ciclo trigonométrico, fundamenta os conceitos necessários para a compreensão de características essenciais à aprendizagem desse conteúdo.

No próximo capítulo serão apresentadas as atividades do GeoGebraBook com uma proposta de atividades que, além de utilizar os recursos dos Applets do GeoGebra para o ensino das Funções Trigonométricas, trará de forma interligada ao ciclo trigonométrico, dada a sua importância em atribuir significado aos conceitos que fundamentam o tema.

Capítulo 4

As Atividades

Neste capítulo, encontram-se relatadas as atividades criadas e alocadas no GeoGebraBook. Descrevem-se também os objetivos de cada atividade que são as habilidades e competências a serem desenvolvidas por meio da manipulação e interação dos Applets.

Com o auxílio do GeoGebra, foram criados treze Applets, todos hospedados no link <www.geogebra.org/m/afF3rGeF>, além dos Apllets das atividades criou-se mais um que constrói todas as Funções Trigonométricas contemplando o eixo real, ficando a critério do professor a sua utilização. Os Applets podem ser acessados por meio do computador, tablet ou celular, permitindo assim, uma aprendizagem não somente no momento do desenvolvimento dos conceitos, mas o acesso ao aprendizado em qualquer lugar. Dessa forma, o aluno pode verificar conceitos, definições e aprimorar as habilidades e competências necessárias para uma conhecimento significativo das Funções Trigonométricas.

As atividades foram programadas para serem realizadas sob a orientação do professor, após introdução dos conceitos desenvolvidos na aula, com o material sugerido por este trabalho no capítulo de Fundamentação Teórica e Aplicações, buscando dessa forma associar a teoria com a prática, por meio da manipulação, interação e visualização desses mesmos conceitos nos Applets.

Mesmo tendo as atividades níveis diferentes de dificuldades, mediante à diversidade de formas de se relacionar o conteúdo à prática, o tempo sugerido para a aplicação de cada uma é de duas aulas de 50 minutos.

Sugere-se o seguinte roteiro:

•Na 1ª aula, os alunos responderão as atividades acessando o GeoGebraBook pelo link <www.geogebra.org/m/afF3rGeF> fornecido pelo professor e como dito poderá ser feito pelo celular, tablet ou computador. O professor orientará os alunos dizendo qual atividade será realizada, pedindo aos mesmos que cliquem nela. Por meio da interação e manipulação dos Applets, serão feitos os registros das conclusões de cada questão em seus cadernos.

É importante ressaltar que, nesse primeiro momento, a presença do professor em sala é somente com o objetivo de orientar os alunos no tocante às atividades a serem desenvolvidas, não respondendo a dúvidas e perguntas que possam ocorrer, visto que essa etapa trata-se de um momento para a autonomia dos alunos em relação aos conceitos desenvolvidos. O professor também poderá desenvolver as atividades a partir de um Applet extra com o nome Funções Trigonométricas. Este permite a visualização das Funções Trigonométricas para mais de uma volta, tanto no sentido horário quanto no anti-horário.

•Na 2ª aula, o professor corrigirá as atividades utilizando, preferencialmente, um computador que esteja conectado a uma TV, de forma que todos os alunos possam visualizar as soluções. Neste momento, o professor responde a cada questão interagindo com os alunos a respeito das soluções encontradas pelos mesmos, tirando dúvidas em relação aos questionamentos eventuais que surgirem, analisando possibilidades e caminhos do referencial teórico desenvolvido durante as aulas, para correção e construção do pensamento matemático que permita aos alunos a compreensão do porquê terem errado uma determinada questão.

O objetivo das atividades não é mensurar acertos ou erros. É permitir a apropriação de habilidades e competências pelos alunos por meio da experimentação e manipulação dos treze Applets, para a construção de conceitos relativos às Funções Trigonométricas a partir do ciclo trigonométrico, após a abordagem Histórica e Teórica sugeridas neste trabalho.

As atividades propostas encontram-se na mesma janela de visualização de cada Applet. Essas são iniciadas com o ciclo trigonométrico por ser a forma mais elementar para a construção dos conceitos associados às Funções Trigonométricas, como afirma Aubyn et al. (2004). Em seguida, as atividades com as principais Funções Trigonométricas $y = sen(x)$, $y = cos(x)$ e $y = tan(x)$, que outrora eram associadas ao triângulo retângulo como razões trigonométricas, agora serão interpretadas como funções. Logo após, serão desenvolvidas as atividades com as Funções Trigonométricas Inversas. As atividades com as principais Funções Trigonométricas e com as Funções Inversas são posteriormente acompanhadas pelos Applets de alteração de parâmetros que permitem modificações no comportamento das funções.

A interação com os Applets nem sempre terá por objetivo a obtenção direta das respostas para as questões apresentadas nas atividades. Dessa forma, é necessário que, em algumas questões, o aluno utilize o Applet como instrumento auxiliar na reflexão e conclusão daquilo que se tem que responder. A interação com os Applets contempla não somente a aquisição e verificação de conceitos, mas também permite e induz o pensamento matemático para construção das respostas.

As atividades desenvolvidas seguem a sequência:

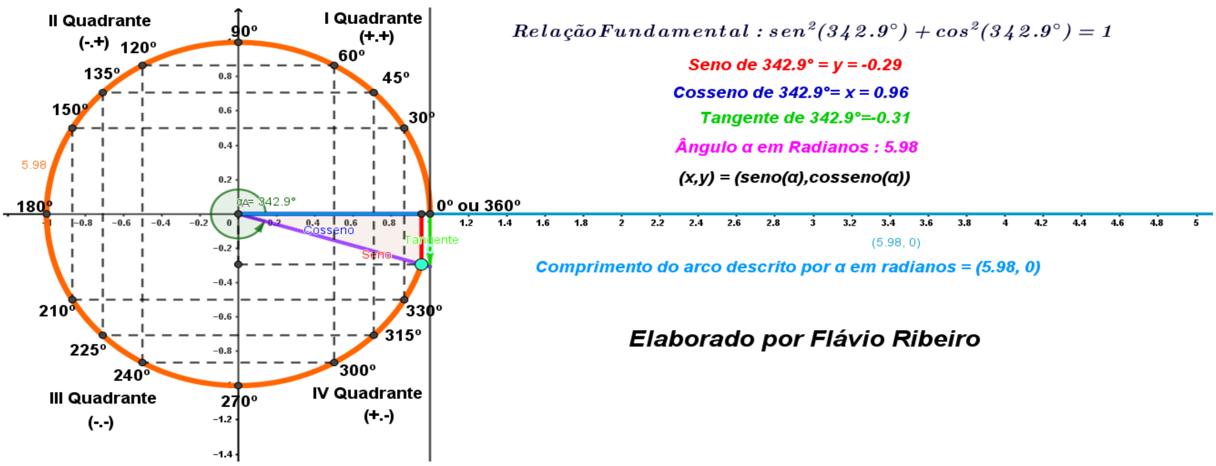
4.1 Atividade 1 - O Ciclo Trigonométrico

As relações trigonométricas seno, cosseno e tangente são conhecidas para os ângulos agudos de um triângulo retângulo. Esta atividade tem por objetivo estender esses conceitos de forma mais ampla, possibilitando obter o seno, cosseno e a tangente de ângulos maiores e também para ângulos negativos que, agora, terão como referencial não mais o triângulo retângulo, mas um círculo, denominado ciclo trigonométrico.

Por meio da interação com o Applet desta atividade (Figura 29), o aluno poderá desenvolver as seguintes habilidades e competências:

1. Reconhecer e obter o seno, cosseno e tangente de um ângulo;
2. Verificar a Relação Fundamental da Trigonometria;
3. Relacionar medidas angulares;
4. Identificar elementos e características do Ciclo Trigonométrico;
5. Reconhecer e relacionar o comprimento de um arco de acordo com um ângulo descrito.

Figura 29 – Applet Atividade 1 - Ciclo Trigonométrico



Fonte: Elaboração Própria.

4.1.1 Proposta Didática da Atividade 1

1) Pode-se afirmar que o raio do Ciclo Trigonométrico é unitário?

2) O Ciclo Trigonométrico é uma Circunferência orientada. Qual é o sentido considerado positivo e o sentido considerado como negativo?

3) Qual é o eixo de representação numérica do seno, cosseno e da tangente?

4) Faça um estudo do sinal para o seno, o cosseno e a tangente em relação a cada quadrante do Ciclo Trigonométrico.

5) Converta os ângulos assinalados no Ciclo Trigonométrico para radianos.

6) O que se pode concluir, quando comparamos as respostas da questão anterior com o comprimento do arco determinado por cada ângulo assinalado?

7) A Relação Fundamental da Trigonometria é válida para todos os ângulos do Ciclo Trigonométrico? (Justifique)

8) Encontre a 1ª determinação positiva e o quadrante para cada arco abaixo:

a) -400º

b) $\frac{9\pi}{2} rad$

9) Escreva a expressão geral dos arcos congruentes a 420°.

10) Determine o valor dos itens abaixo:

a) cos $\frac{5\pi}{4}$

b) tan 315º

c) cos $\frac{2\pi}{3}$

11) A que quadrante pertence o ângulo α?

a) tan α = 3

b) cos α = $-\frac{1}{2}$

12) Determine x em cada caso:

a) $0 \leq x \leq 2\pi$ e $\text{sen}(x) = -\frac{1}{2}$

b) $0^\circ \leq x < 360^\circ$ e $\cos(x) = 1$

13) Qual é maior, cos 4 ou cos 4º? Justifique.

14) Qual é o sinal de tan 13?

15) Determine o valor da expressão: sen(-760º) + cos(-2174º) -tan(1130°)

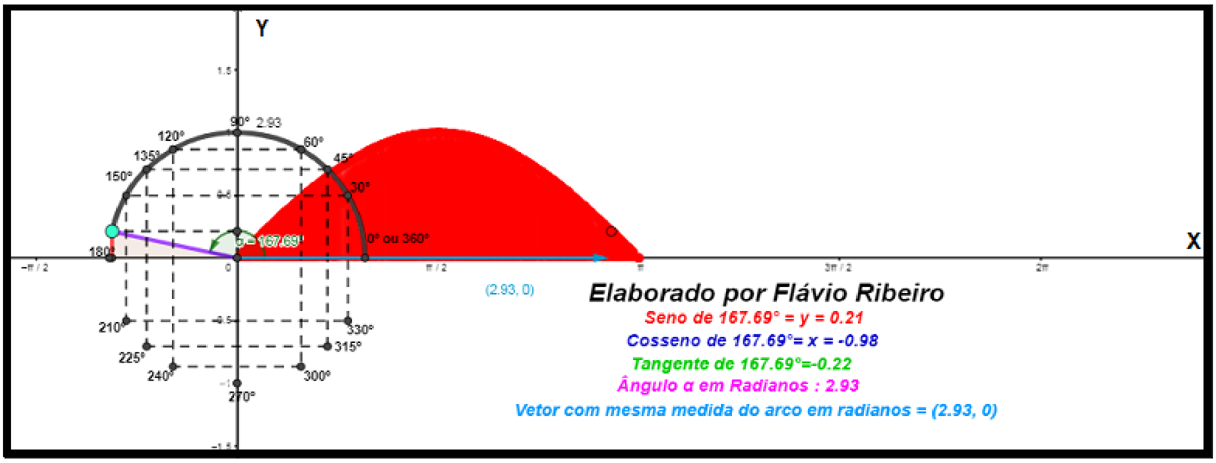
4.2 Atividade 2 - Função Seno

Esta atividade tem por objetivo apresentar a função seno e sua interpretação gráfica. Deseja-se que os alunos possam realizar inferências a partir do gráfico da função e da lei que a define. Dessa forma, poderão apresentar melhores condições para compreender e propor soluções, reconhecendo elementos, como período, conjunto imagem ou domínio e relacioná-los às características da função.

Da interação com o Applet desta atividade (Figura 30), o aluno poderá desenvolver as seguintes habilidades e competências:

1. Identificar o período, domínio e imagem da função;
2. Reconhecer a variação em cada quadrante;
3. Obter os pontos de intersecção com os eixos coordenados;
4. Obter o valor máximo e o valor mínimo;
5. Reconhecer a paridade da função;
6. Classificar a função de acordo com as características da sua imagem.

Figura 30 – Applet Atividade 2 - Função Seno



Fonte: Elaboração Própria

4.2.1 Proposta Didática da Atividade 2

1) Analise e determine os elementos abaixo, relacionados a função y = sen(x).

a) O domínio;

b) A imagem;

c) A periodicidade (Utilize a definição de função periódica e compare com o que é observado no Applet);

d) O sinal em cada quadrante;

e) A variação em cada quadrante;

f) Intersecção com o eixo Y para $0 \leq x \leq 2\pi$;

g) Intersecção com o eixo X para $0 \leq x \leq 2\pi$;

h) O valor máximo;

i) O valor mínimo.

2) Justifique cada afirmação:

a) A função seno não é sobrejetiva.

b) A função seno não é injetiva.

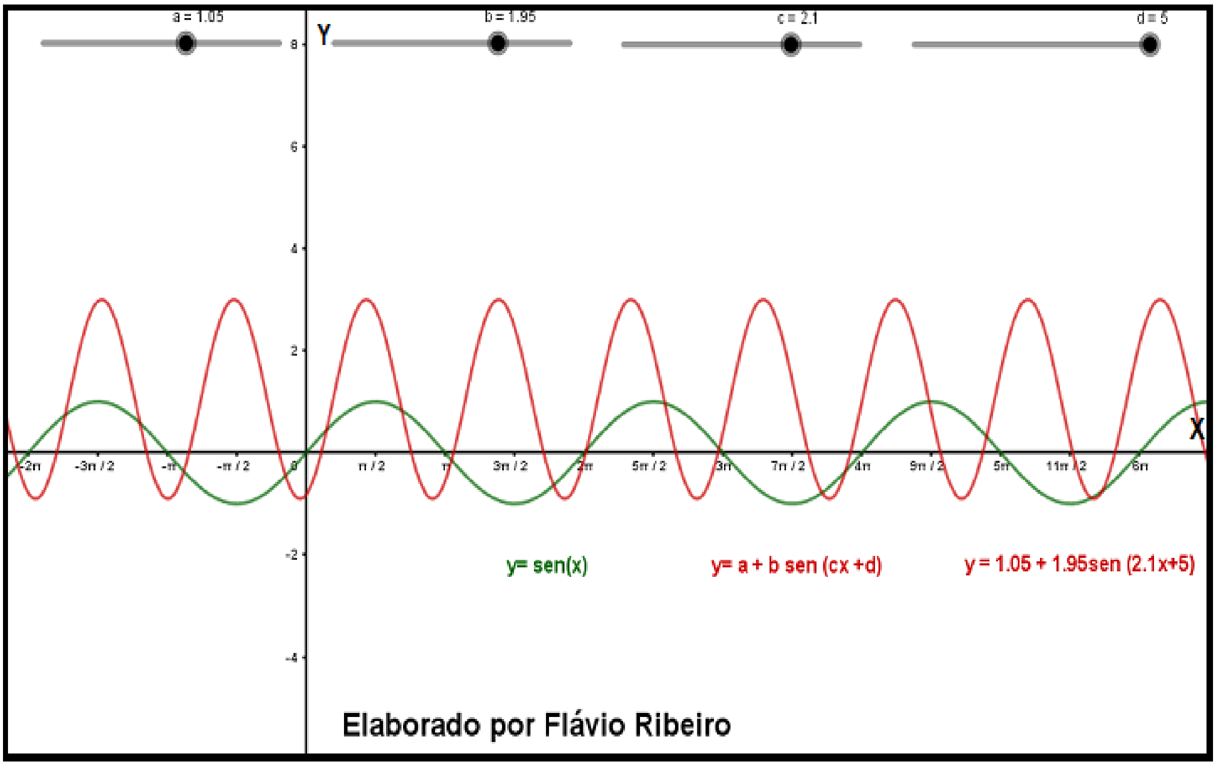
c) A função seno é função ímpar.

4.3 Atividade 3 - Função Seno - Alteração de Parâmetros

Por meio dos controles deslizantes, disponíveis na janela de visualização do Applet desta atividade, os alunos poderão desenvolver as seguintes habilidades e competências a respeito da família de funções $f(x) = a + b\ sen(cx + d)$, (Figura 31):

1. Identificar o período, domínio e imagem da família de funções $f(x) = a+b\ sen(cx+d)$;
2. Obter gráficos através da interação com o Applet;
3. Analisar as modificações geométricas causadas pela alteração dos parâmetros;
4. Relacionar um parâmetro a uma modificação;
5. Reconhecer, comparar e analisar modificações usando como referencial a função $y = sen(x)$.

Figura 31 – Applet Atividade 3 - Função Seno - Alteração de Parâmetros



Fonte: Elaboração Própria.

4.3.1 Proposta Didática da Atividade 3

1) Descreva o tipo de modificação ocorrida pela alteração dos parâmetros a, b, c, e d.

2) Compare as modificações com o gráfico da função y = sen(x).

3) Analise as modificações ocorridas nos gráficos abaixo, comparando-as com a função y = sen(x):

a) $y = 1 + 2sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

b) $y = -3 - 2sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y = 2 + \frac{1}{2}sen\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

4) Construa o gráfico das funções:

a) $y = 2sen\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $y = 2sen(2x)$

c) $y = -3 - 2sen\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

d) $y = -\frac{1}{4} + sen(3x + \pi)$

5) Das funções da questão 4, determine:

a) O domínio;

b) O período;

c) A imagem;

d) O valor Máximo;

e) O valor Mínimo.

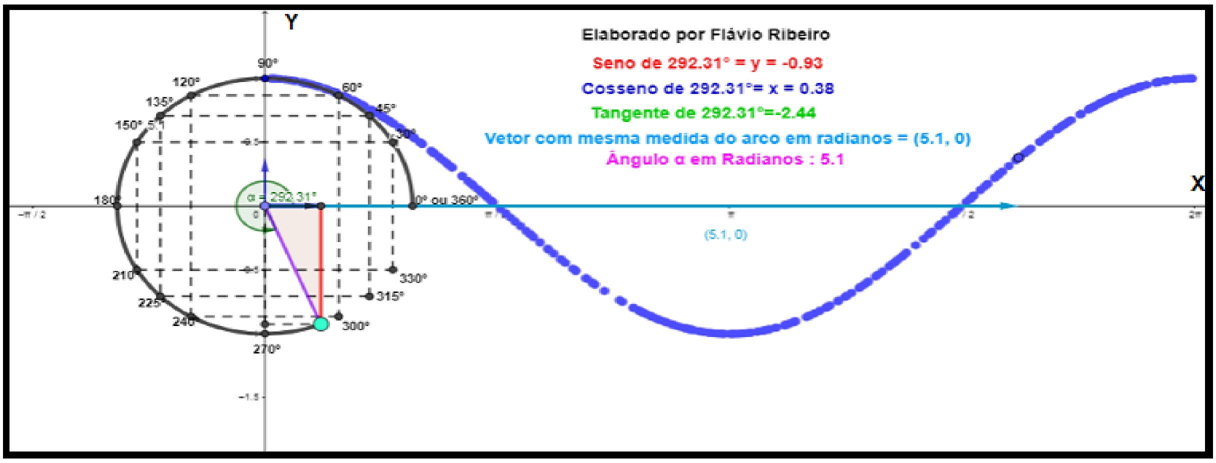
4.4 Atividade 4 - Função Cosseno

Esta atividade tem por objetivo a identificação das principais características da função cosseno, estimulando a compreensão dos conceitos de período, domínio, imagem, máximo e mínimo, assim como a análise do comportamento da função em cada quadrante e no plano cartesiano como um todo.

Por meio da interação com o Applet desta atividade (Figura 32), o aluno poderá desenvolver as seguintes habilidades e competências:

1. Identificar o período, domínio e imagem da função;
2. Reconhecer a variação em cada quadrante;
3. Obter os pontos de intersecção com os eixos coordenados;
4. Obter o valor máximo e o valor mínimo;
5. Reconhecer a paridade da função;
6. Classificar a função de acordo com as características da sua imagem.

Figura 32 – Applet Atividade 4 - Função Cosseno



Fonte: Elaboração Própria.

4.4.1 Proposta Didática da Atividade 4

1) Analise e determine os elementos abaixo, relacionados a função y = cos(x).

a) O domínio;

b) A imagem;

c) A periodicidade (Utilize a definição de função periódica e compare com o que é observado no Applet);

d) O sinal em cada quadrante;

e) A variação em cada quadrante;

f) Intersecção com o eixo Y para $0 \le x \le 2\pi$;

g) Intersecção com o eixo X para $0 \le x \le 2\pi$;

h) O valor máximo;

i) O valor mínimo;

j) O nome da curva que caracteriza a função.

2) Justifique cada afirmação:

a) A função cosseno não é sobrejetiva.

b) A função cosseno não é injetiva.

c) A função cosseno é par.

d) O gráfico da função cosseno é simétrico em relação ao eixo Y.

e) Para cada valor real de x existe sempre um único valor real para cos(x).

4.5 Atividade 5 - Função Cosseno - Alteração de Parâmetros

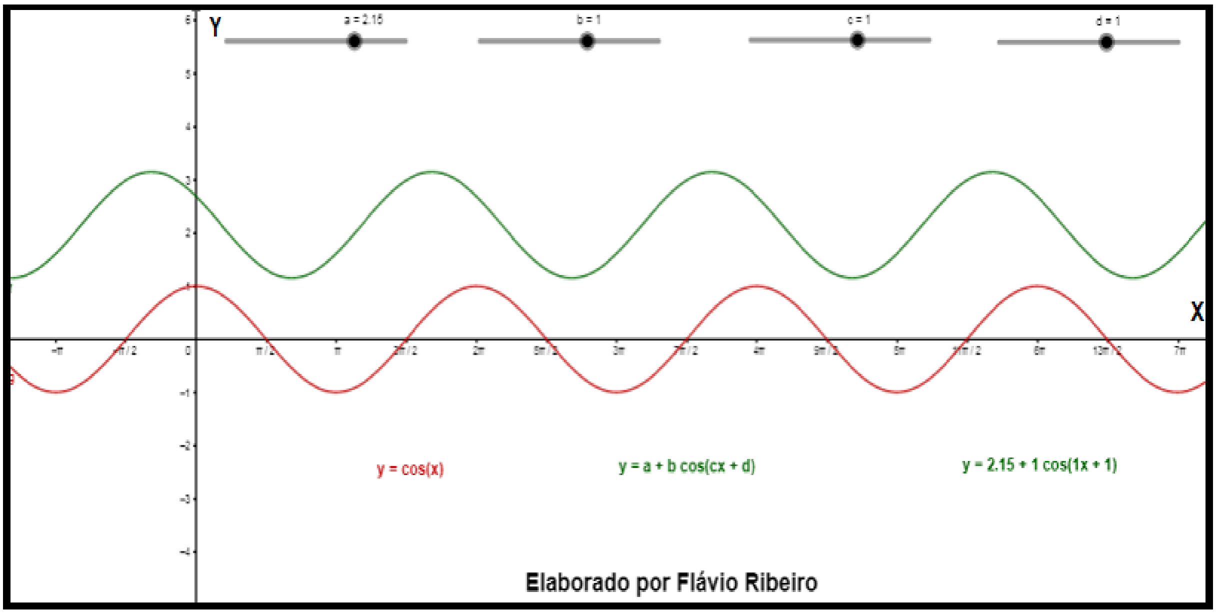
Nesta atividade, espera-se que os alunos desenvolvam habilidades e competências a respeito da família de funções $f(x) = a + b\,cos(cx + d)$, em que determinem características das funções a partir da lei ou, tendo conhecimento do gráfico, inferir sobre a lei de formação da função. Espera-se também que seja uma oportunidade para que os alunos deem significados às modificações provocadas pelas alterações dos parâmetros a, b, c e d por meio dos controles deslizantes.

Considera-se que a simples construção de gráficos e a determinação de conjuntos domínio e imagem podem não ser significativos caso não estejam associados a um contexto que instigue o raciocínio e a interpretação. Com esse intuito, esta atividade possui uma questão que contextualiza o movimento da maré em determinada região através da lei de uma função.

Por meio da interação com o Applet desta atividade (Figura 33), o aluno poderá desenvolver as seguintes habilidades e competências:

1. Identificar modificações geométricas nas funções pela alteração de Parâmetros;
2. Relacionar uma modificação geométrica na função com um Parâmetro específico;
3. Resolver problemas e relacioná-los com as alterações geométricas;
4. Identificar características da família de funções $f(x) = a + b\,cos(cx + d)$.

Figura 33 – Applet Atividade 5 - Função Cosseno - Alteração de Parâmetros



Fonte: Elaboração Própria.

4.5.1 Proposta Didática da Atividade 5

1) Com auxílio do applet, analise o que se pede a respeito da função: $y = 2 + 3\cos(x+4)$

a) Determine o seu domínio;

b) Determine a imagem;

c) Determine o período;

d) O valor máximo;

e) O valor mínimo.

2) Se a função $y = 3+2\cos(x)$ caracteriza o movimento da maré numa determinada região, onde y é a altura em metros e x é o tempo em horas. Determine:

a) A altura máxima atingida pela maré;

b) A altura mínima atingida pela maré.

c) Qual é o intervalo que contém os possíveis valores assumidos pelas alturas?

d) Considerando $x \in [0\ ,\ 4]$, determine os valores de x para os quais a altura foi máxima e os valores de x para os quais se teve altura mínima.

3) Considerando a função $y = \cos(x)$ como referência, determine as leis das funções que possuem as seguintes características:

a) Transladada verticalmente de -2 unidades.

b) Comprimida verticalmente de 0,25 unidades.

c) Comprimida horizontalmente de 3 unidades.

d) Transladada horizontalmente para a direita de +1 unidade.

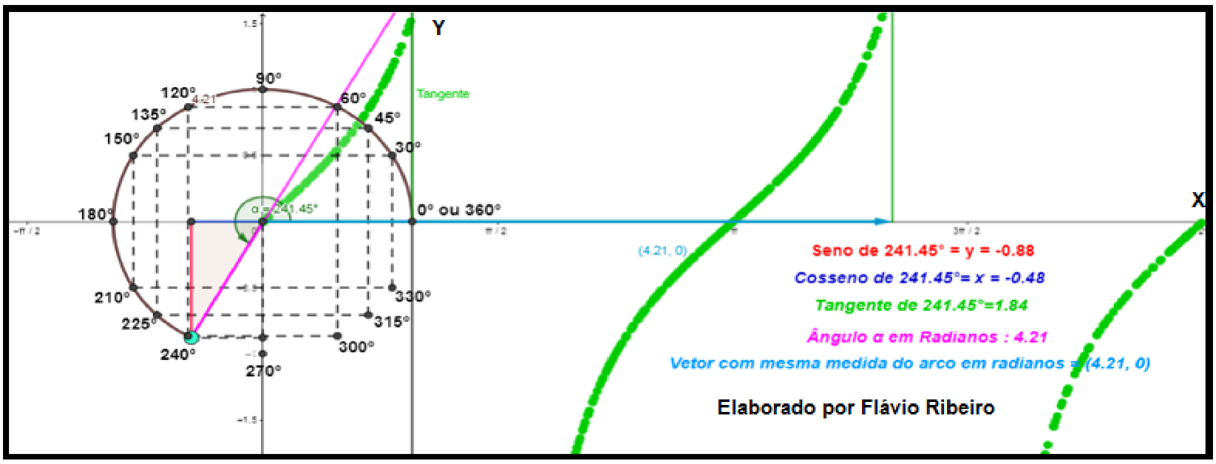
4.6 Atividade 6 - Função Tangente

Nesta atividade, espera-se que os alunos compreendam a variação da função tangente e, consequentemente, as características de seu gráfico cartesiano. A construção dos gráficos pelos alunos não deve ser uma tarefa que privilegie certos procedimentos, mas deve ter uma relação direta com a compreensão da variação da função no ciclo.

Por meio da interação com o Applet desta atividade (Figura 34), o aluno poderá desenvolver as seguintes habilidades e competências:

1. Identificar o período, domínio e imagem da função;
2. Reconhecer a variação em cada quadrante;
3. Analisar se há pontos de intersecção com os eixos coordenados;
4. Analisar se a função admite valor máximo ou mínimo;
5. Reconhecer a paridade da função;
6. Classificar a função de acordo com as características da sua imagem;
7. Analisar o comportamento da função para valores de x da forma: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $K \in \mathbb{Z}$.

Figura 34 – Applet Atividade 6 - Função Tangente



Fonte: Elaboração Própria.

4.6.1 Proposta Didática da Atividade 6

1) Analise e determine os elementos abaixo, relacionados a função y = tan(x).

a) O domínio;

b) A imagem;

c) A periodicidade;

d) O sinal em cada quadrante;

e) A variação em cada quadrante;

f) Intersecção com o eixo Y para uma volta completa;

g) Intersecção com o eixo X para uma volta completa;

h) Há valor máximo ou mínimo?

i) O que ocorre com os valores de y quando x se aproxima de valores da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$?

j) O nome da curva que caracteriza a função tangente.

2) Justifique cada uma das afirmações.

a) A função tangente não é injetiva, mas é sobrejetiva.

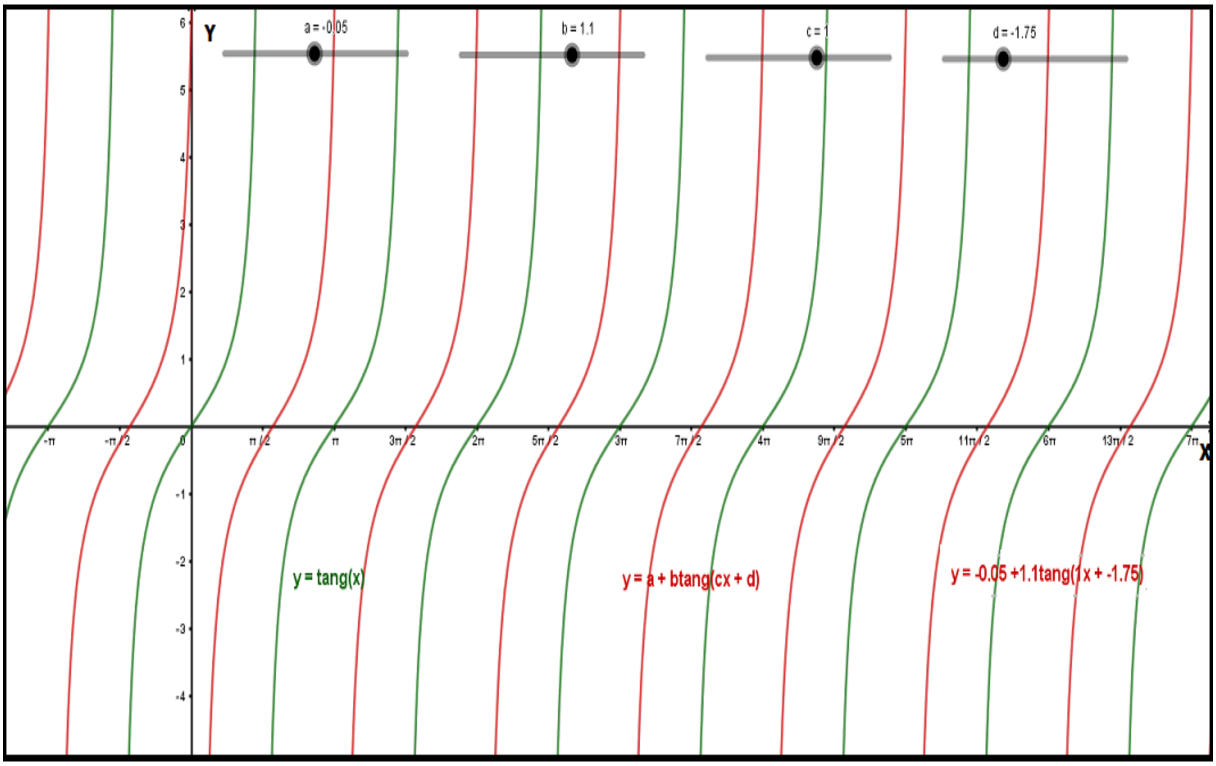
b) A função tangente é função ímpar.

4.7 Atividade 7 - Função Tangente - Alteração de Parâmetros

Esta atividade tem por objetivo o estudo das características da família de funções $f(x) = a + b\,tan(cx + d)$. Pela manipulação dos controles deslizantes no Applet desta atividade (Figura 35), o aluno poderá desenvolver as seguintes habilidades e competências:

1. Identificar modificações geométricas nas funções pela alteração de parâmetros;
2. Relacionar uma modificação geométrica na função com um parâmetro específico;
3. Resolver problemas e relacioná-los com as alterações geométricas;
4. Identificar características da família de funções $f(x) = a + b\,tan(cx + d)$;
5. Obter gráficos pela alteração de parâmetros.

Figura 35 – Applet Atividade 7 - Função Tangente - Alteração de Parâmetros



Fonte: Elaboração Própria.

4.7.1 Proposta Didática da Atividade 7

1) Determine o que se pede a respeito da função $y = 2 - \tan(3x - 1)$.

a) O domínio;

b) A imagem;

c) O período;

d) Há valor máximo ou mínimo?

2) Diga que tipo(s) de transformação(ões) geométrica(s) ocorreu(ram) nas funções abaixo usando como referência a função y=tan(x).

a) y = 1+ tan(x)

b) y =-tan(x)

c) y = tan(3x)

d) y = tan(x-2)

e) y = tan(0,5x-1)

3) Quais devem ser as leis, tendo como referência a função tangente para que a funções possuam as seguintes características:

a) translação horizontal de -2 unidades.

b) translação vertical de uma unidade.

4) Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F) as transformações em $y = a + b\tan(cx + d)$.

a) O parâmetro **d** provoca uma translação horizontal. ( )

b) O parâmetro **c** provoca alteração no período. ( )

c) O parâmetro **b** provoca uma mudança de inclinação. ( )

d) O parâmetro **a** provoca uma translação vertical. ( )

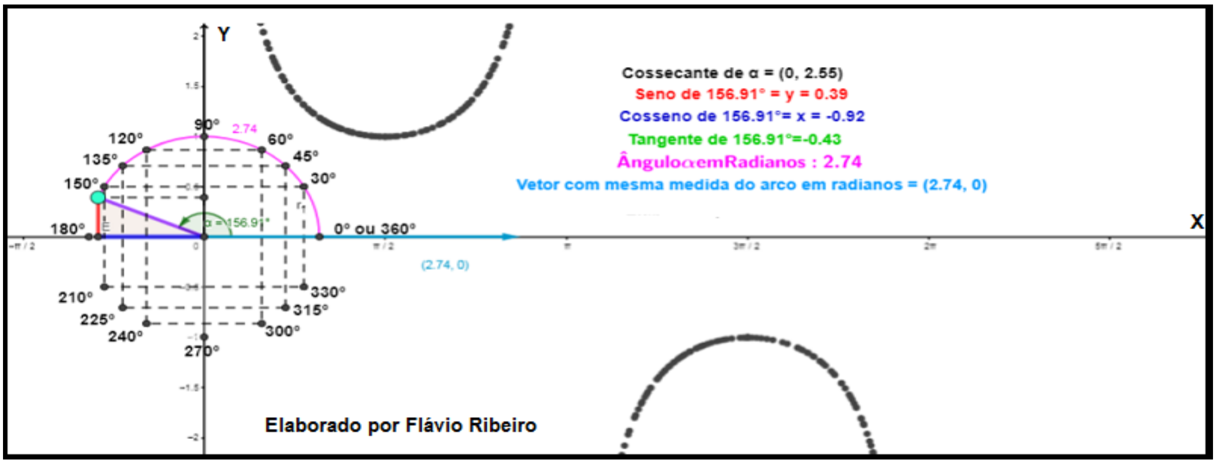
4.8 Atividade 8 - Função Cossecante

Nesta atividade, os alunos poderão identificar os elementos da função Cossecante, como o período, domínio e imagem pela interação direta com o Applet.

A experimentação proporcionada nesta atividade (Figura 36), contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades e competências:

1. Identificar o período, domínio e imagem da função;
2. Interpretar o comportamento da função em cada quadrante;
3. Interpretar a variação dos sinais da função;
4. Analisar a ocorrência de valor máximo ou valor mínimo;
5. Identificar valores de x para os quais a função não está definida.

Figura 36 – Applet Atividade 8 - Função Cossecante



Fonte: Elaboração Própria.

4.8.1 Proposta Didática da Atividade 8

1) Analise e responda o que se pede a respeito da função y=csc(x).

a) O domínio;

b) A imagem;

c) A periodicidade;

d) O sinal em cada quadrante;

e) A variação em cada quadrante;

f) Intersecção com o eixo X na primeira volta;

g) Intersecção com o eixo Y na primeira volta;

h) O valor máximo;

i) O valor mínimo;

j) O que ocorre com o gráfico da função y = csc(x) quando x se aproxima de valores em que csc(x) não existe?

k) Por quais valores de x a função y = csc(x) não passa na 1ª volta?

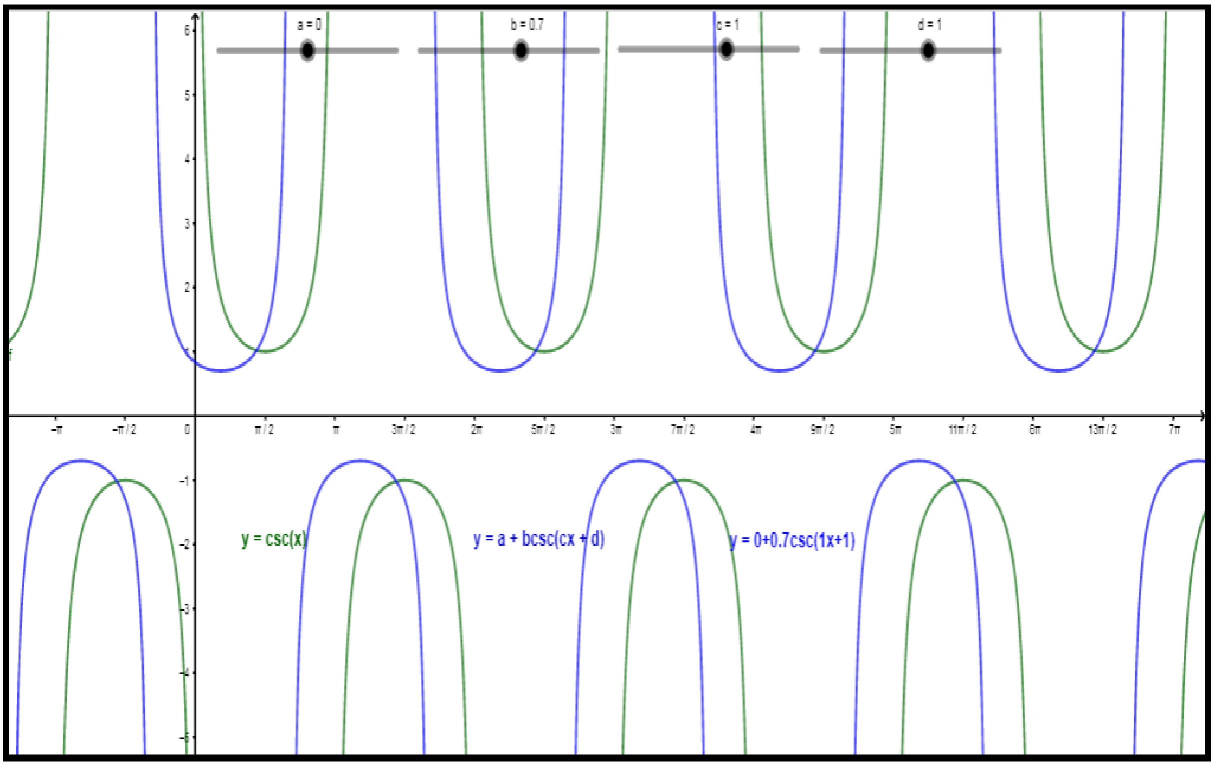
4.9 Atividade 9 - Função Cossecante - Alteração de Parâmetros

Esta atividade tem por finalidade estudar a família de funções do tipo $y = a + bcsc(cx + d)$, analisando suas características e modificações geométricas ocorridas na função de referência $y = csc(x)$ por meio da alteração de parâmetros pelos controles deslizantes.

A experimentação proporcionada pelo Applet (Figura 37), contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades e competências:

1. Identificar o período, domínio e imagem da função;
2. Interpretar o comportamento da função em cada quadrante;
3. Interpretar a variação dos sinais da função;
4. Analisar a ocorrência de valor máximo ou valor mínimo;
5. Identificar valores de x para os quais a função não está definida;
6. Identificar variações gráficas pela alteração de parâmetros específicos.

Figura 37 – Applet Atividade 9 - Função Cossecante - Alteração de Parâmetros



Fonte: Elaboração Própria.

4.9.1 Proposta Didática da Atividade 9

1) Determine o que se pede a respeito da função $y = -3 - 4\csc(x+1)$.

a) O domínio;

b) O período;

c) A imagem;

d) Há valor máximo ou mínimo?

e) O gráfico.

2) Considerando a função $y = \csc(x)$, indique o(s) tipo(s) de transformação(ões) geométrica(s) ocorrida(s) em cada caso:

a) y = csc(0,5x)

b) y = -0,4 -csc(-x)

c) y =2 +4 csc(3x-5)

3) Tendo como referência a função cossecante, determine a lei da função que a desloca de 2 unidades horizontais e -3 unidades verticais.

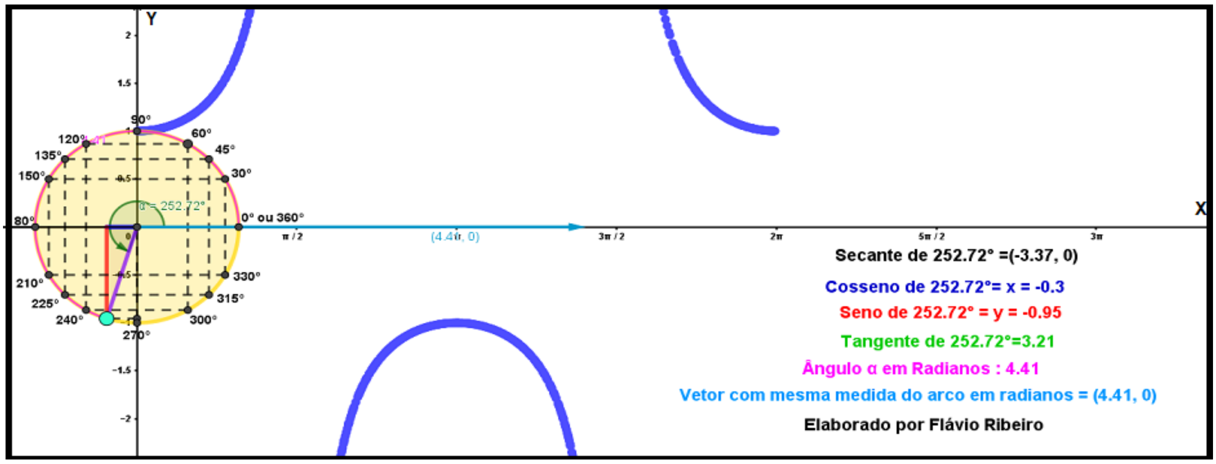
4.10 Atividade 10 - Função Secante

Nesta atividade, os alunos poderão identificar os elementos da função Secante, como o período, domínio e imagem, por meio da interação direta com o Applet.

Com a utilização deste aplicativo (Figura 38), busca-se o desenvolvimento das seguintes habilidades e competências:

1. Identificar o período, domínio e imagem da função;
2. Interpretar o comportamento da função em cada quadrante;
3. Interpretar a variação dos sinais da função;
4. Analisar a ocorrência de valor máximo ou valor mínimo;
5. Identificar valores de x para os quais a função não está definida.

Figura 38 – Applet Atividade 10 - Função Secante



Fonte: Elaboração Própria.

4.10.1 Proposta Didática da Atividade 10

1) Analise e determine os elementos relacionados a função y = sec(x).

a) O domínio;

b) A imagem;

c) A periodicidade;

d) O sinal em cada quadrante;

e) A variação em cada quadrante;

f) Intersecção com o eixo Y na 1ª volta;

g) Intersecção com o eixo X na 1ª volta;

2) Justifique a afirmação: a função secante é par.

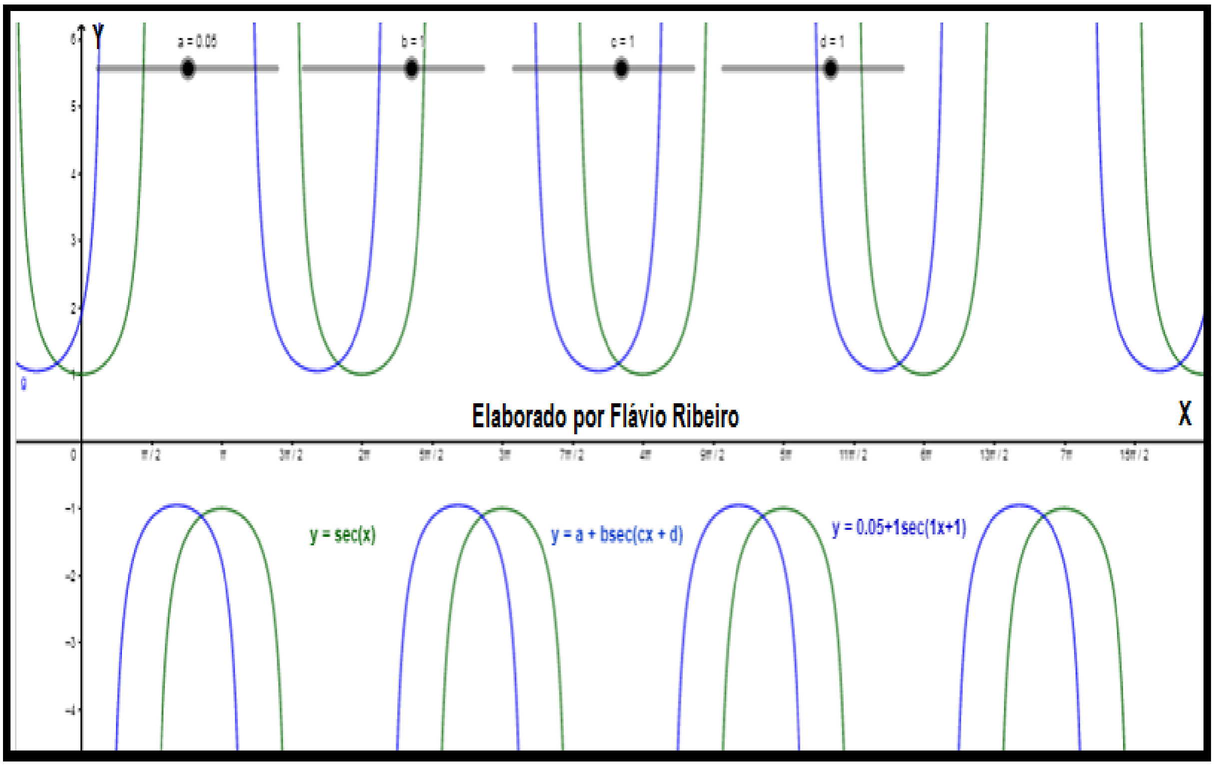
4.11 Atividade 11 - Função Secante - Alteração de Parâmetros

Esta atividade tem por finalidade estudar a família de funções do tipo $y = a + bsec(cx + d)$, analisando suas características e modificações geométricas, ocorridas na função de referência $y = sec(x)$, por meio da alteração de parâmetros pelos controles deslizantes.

A interação propiciada pelo Applet (Figura 39), busca desenvolver as seguintes habilidades e competências:

1. Identificar o período, domínio e imagem das funções do tipo $y = a + bsec(cx + d)$;
2. Interpretar o comportamento da função em cada quadrante;
3. Interpretar a variação dos sinais da função;
4. Analisar a ocorrência de valor máximo ou valor mínimo;
5. Identificar valores de x para os quais a função não está definida;
6. Identificar variações gráficas pela alteração de parâmetros específicos.

Figura 39 – Applet Atividade 10 - Função Secante - Alteração de Parâmetros



Fonte: Elaboração Própria.

4.11.1 Proposta Didática da Atividade 11

1) Determine o que se pede a respeito da função $y = -3 + 2\sec(x+4)$.

a) O domínio;

b) O período;

c) A imagem;

d) Intersecção com os eixos coordenados, caso haja;

e) Há valor máximo ou valor mínimo?

f) Indique cada tipo de transformação geométrica sofrida pela função y= sec(x) para que assumisse a forma $y = -3 + 2\sec(x+4)$.

2) Para quais valores de x a família de funções não está definida?

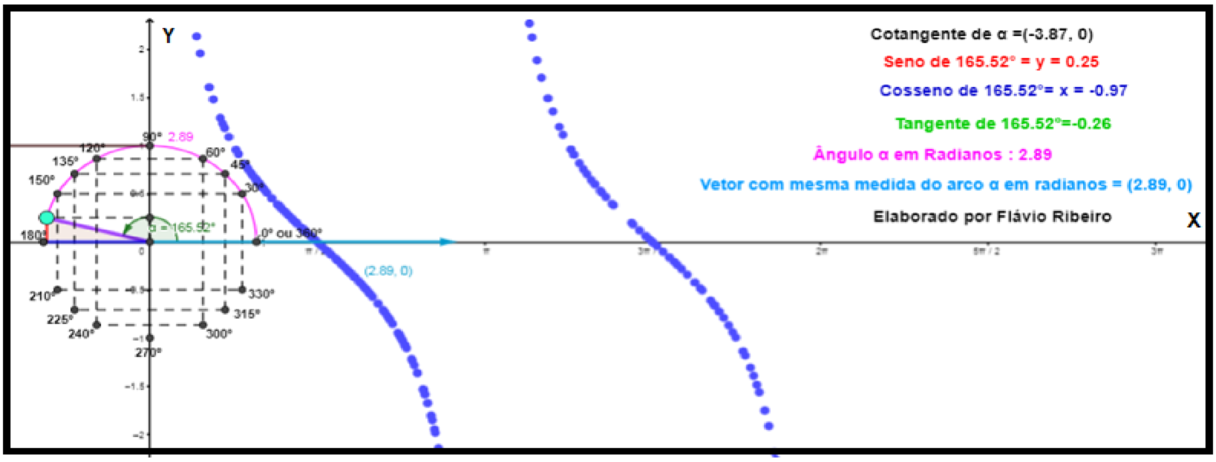
4.12 Atividade 12 - Função Cotangente

Nesta atividade, os alunos terão a oportunidade de identificar os elementos da função Cotangente, como o período, domínio e imagem, pela manipulação do Applet.

A utilização desta ferramenta (Figura 40), tem por objetivo favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades e competências:

1. Identificar o período, domínio e imagem da função;
2. Interpretar o comportamento da função em cada quadrante;
3. Interpretar a variação dos sinais da função;
4. Analisar a ocorrência de valor máximo ou valor mínimo;
5. Identificar valores de x para os quais a função não está definida.

Figura 40 – Applet Atividade 12 - Função Cotangente



Fonte: Elaboração Própria.

4.12.1 Proposta Didática da Atividade 12

1) A respeito da função y = cot(x) responda o que se pede.

a) O domínio;

b) A imagem;

c) O período;

d) O sinal em cada quadrante;

e) A variação em cada quadrante;

f) Intersecção com o eixo X na 1ª volta;

g) Intersecção com o eixo Y na 1ª volta;

h) O valor máximo;

i) O valor mínimo;

j) Para quais valores de x a função não está definida?

2) Justifique a afirmação: a função cotangente é ímpar.

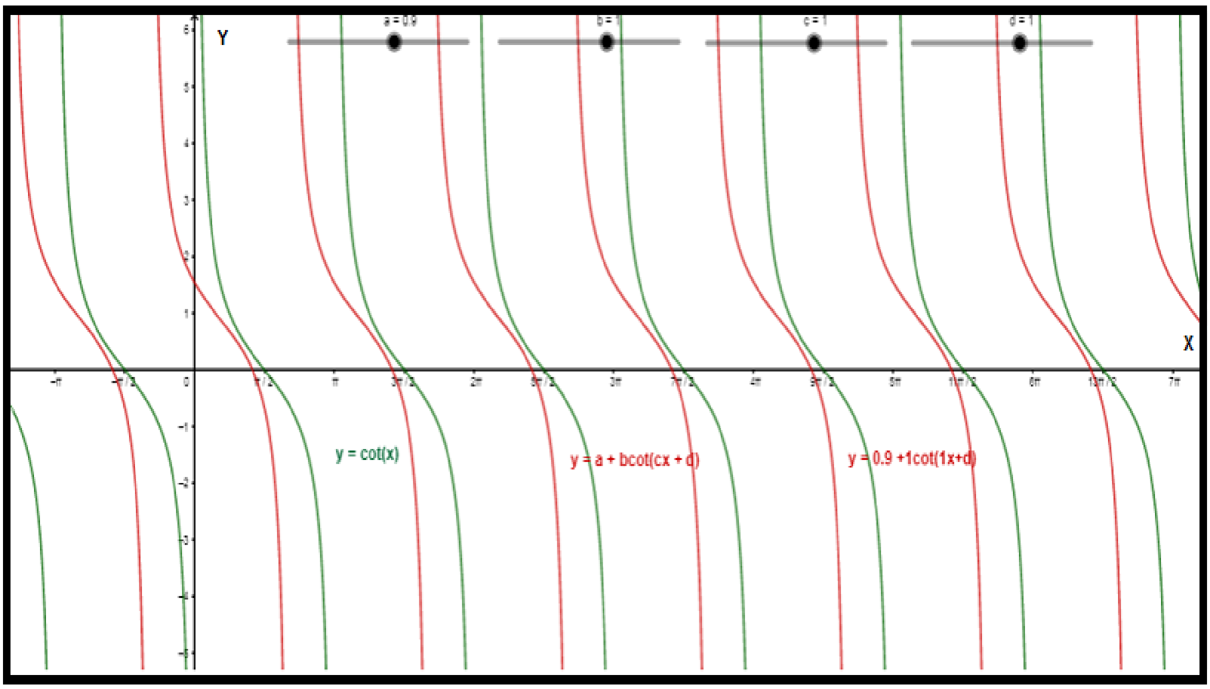
4.13 Atividade 13 - Função Cotangente - Alteração de Parâmetros

Esta atividade tem por finalidade analisar a família de funções do tipo $y = a + bcot(cx + d)$, verificando suas características e modificações geométricas, ocorridas na função de referência $y = cot(x)$, através da manipulação dos parâmetros pelos controles deslizantes.

A interação proporcionada pelo Applet (Figura 41), permite o desenvolvimento das seguintes habilidades e competências:

1. Identificar o período, domínio e imagem das funções do tipo $y = a + bcot(cx + d)$;
2. Interpretar o comportamento da função em cada quadrante;
3. Interpretar a variação dos sinais da função;
4. Analisar a ocorrência de valor máximo ou valor mínimo;
5. Identificar valores de x para os quais a função não está definida;
6. Identificar variações gráficas pela alteração de parâmetros específicos.

Figura 41 – Applet Atividade 13 - Função Cotangente - Alteração de Parâmetros



Fonte: Elaboração Própria.

4.13.1 Proposta Didática da Atividade 13

1) A respeito da função $y = 2 - \cot(3x - \pi)$, responda o que se pede.

a) O domínio;

b) O período;

c) A imagem;

d) Há valor máximo ou valor mínimo?

e) Quais são os valores de x para os quais a função não está definida?

g) Quais alterações geométricas sofreu a função $y = \cot(x)$, para que assumisse a forma $y = 2 - \cot(3x - \pi)$?

2) Indique o parâmetro que deve ser alterado na função $y = a + b\cot(cx + d)$ para que haja as seguintes modificações na função $y = \cot(x)$:

a) Alteração do período;

b) Alteração da imagem;

c) Alteração do domínio;

d) Translação horizontal;

e) Translação vertical;

f) Compressão horizontal;

g) Dilatação vertical.

Buscou-se, com o desenvolvimento das atividades sugeridas neste capítulo, alcançar as habilidades e competências referentes às Funções Trigonométricas, não se utilizando da manipulação direta do GeoGebra por meio de linguagens e comandos específicos. Acredita-se que o desenvolvimento de atividades que demandem do conhecimento de comandos específicos do software pode ser um fator complicador, tanto para a realização das atividades quanto para o alcance dos objetivos delimitados pelas mesmas. A operação do software exige, em determinadas situações, um conhecimento profundo de seus comandos, demandando mais tempo e sendo necessário que o aluno possua entendimento do seu funcionamento, fugindo da proposta apresentada por essa pesquisa em que utiliza-se uma ferramenta já pronta, não sendo necessário que o aluno se envolva diretamente com o GeoGebra.

Capítulo 5

Considerações finais

A realização deste trabalho possibilitou elaborar um GeoGebraBook com uma proposta de atividades para o ensino das Funções Trigonométricas por meio da manipulação de tecnologias digitais, mais especificamente de Applets criados com o auxílio do software GeoGebra.

Buscou-se resposta para a seguinte questão de pesquisa: Como incorporar o software GeoGebra no ensino das Funções Trigonométricas?

Na tentativa de responder ao questionamento mencionado, foram investigados outros trabalhos que usam o software GeoGebra no ensino da trigonometria, bem como softwares educacionais que possibilitassem o desenvolvimento de atividades voltadas para o tema da pesquisa. Buscou-se analisar documentos oficiais no que se refere ao ensino desse conteúdo, assim como uso de livros didáticos como fonte para elaboração das atividades propostas. Também investigou-se metodologias para o ensino da trigonometria.

A pesquisa realizada forneceu elementos indicativos de que é necessária a união dos recursos tecnológicos com a realidade dos alunos, alinhando aos conhecimentos abordados em sala de aula, pois, nos dias atuais, os alunos têm acesso a uma série de recursos tecnológicos, tais como: Internet, jogos eletrônicos, tablets e celulares, que despertam o interesse e os inserem numa sociedade cada vez mais tecnológica, instigados pela curiosidade, fazendo com que agreguem mais conhecimentos na exploração e utilização desses recursos.

Os recursos do GeoGebra permitem a criação dos Applets, que são ferramentas interativas inseridas na realidade tecnológica dos educandos, tornando-se portanto, uma ferramenta de extrema contribuição para a dinamização do ciclo trigonométrico e, consequentemente, otimização do ensino das Funções Trigonométricas. Acredita-se que as ferramentas como controles deslizantes, animações e ferramentas de arraste acabam por dar "vida" à teoria desenvolvida durante as aulas e que, por vezes, não parece fazer nenhum sentido para os alunos.

Considera-se que a utilização de Applets pelos educadores pode ser uma estratégia e oportunidade de atração da atenção dos alunos para o ensino das Funções Trigonométricas, contribuindo para uma aula interativa e dinâmica, além de otimizar o tempo de aula, principalmente no que se diz respeito à construção e análise de gráficos.

Este trabalho segue uma ordem sequencial que inicialmente se preocupou em situar o conteúdo de Funções Trigonométricas no contexto e evolução da história. Logo em seguida, construiu-se toda a base teórica necessária para o aprendizado das Funções Trigonométricas.

A forma como a teoria foi apresentada é apenas uma sugestão para que haja, de fato, e, de verdade, um abrangente desenvolvimento teórico em relação ao tema, o que por sua vez, pode permitir com a utilização dos Applets a constatação e conjecturação de propriedades e características importantes das Funções Trigonométricas, contribuindo assim para um pensamento reflexivo e analítico matemático.

Dessa forma, não se valoriza somente o que a tecnologia, por meio da utilização dos Applets, pode contribuir para uma aprendizagem significativa. Contudo uma série de fatores elencados a ela podem corroborar para a apropriação de conhecimentos e o desenvolvimento de habilidades e competências.

Espera-se que essa dissertação possa contribuir para o ensino das Funções Trigonométricas construídas a partir do ciclo trigonométrico por meio de Applets, fundamentada nos aspectos históricos e teóricos relativos ao tema.

Acredita-se que cabe ao professor buscar a capacitação de novas tecnologias e metodologias que propiciem o ensino e aprendizagem da Matemática. O professor deve se sentir responsável pelo papel que exerce em sala de aula, cabendo a ele uma parcela da mudança que a sociedade necessita.

Assim, como educador, esse trabalho também contribuiu para minha formação profissional e pessoal, visto que teve por objetivo conhecer novas metodologias, softwares e recursos digitais acreditando que o caminho na educação deve ser trilhado de forma continuada, de maneira a proporcionar a ocorrência de uma aprendizagem que seja satisfatória e acessível à compreensão dos alunos.

Sendo assim, acredita-se que esse trabalho possa contribuir de forma efetiva na apropriação de conhecimentos relativos às Funções Trigonométricas pelos alunos, permitindo uma melhor compreensão dos conceitos, pois, por meio das leituras realizadas para a concepção dessa pesquisa, foram reunidos elementos que apontam que a tecnologia possibilita a construção de conhecimentos corroborando para a aprendizagem significativa dos conteúdos.

Na realização deste trabalho, surgiram alguns obstáculos como o desconhecimento e despreparação para operar o software GeoGebra, visto que todo o conhecimento que permitiu a criação dos Applets foi construído ao longo do desenvolvimento das atividades. Uma outra dificuldade foi a pouca disponibilidade de tempo, não permitindo que a sequência didática pudesse ser aplicada, ficando apenas com sua elaboração, tornando-se, portanto, uma proposta didática.

Essa proposta de atividades buscou construir os conhecimentos relativos às Funções Trigonométricas levando-se em consideração o contexto histórico da Trigonometria, assim como suas Aplicações, assemelhando-se, em alguns aspectos, com outros trabalhos, mas destacando-se pelo fato de fundamentar e construir todas as Funções Trigonométricas associadas ao ciclo trigonométrico a partir de Applets dinâmicos que já estão prontos, fazendo, assim, com que os alunos não operem os comandos matemáticos complexos para manipular o GeoGebra na construção dessas ferramentas.

Muito ainda há de ser feito na aprendizagem das Funções Trigonométricas, pois essa proposta não esgota o assunto. A presente pesquisa poderá contribuir para futuras investigações na área de Educação Matemática e ainda servir de inspiração para pesquisas que possam investigar outros aspectos que não foram contemplados neste trabalho. Assim, são sugeridos novos trabalhos a partir da aplicação da sequência didática proposta por meio dos Applets aqui desenvolvidos. Indicam-se, também, pesquisas sobre o uso dessa ferramenta para **n** voltas do ciclo trigonométrico. Sugerem-se, ainda, pesquisas que contemplem a criação e/ou aplicação de novos Applets em outros conteúdos da Matemática.

Por fim, espera-se que este trabalho motive a inserção de novas metodologias e práticas mediadas pelo uso de tecnologias, bem como reflexões e análises que a sala de aula sempre proporciona.

Referências

AUBYN, A.S. et al. *Funções Trigonométricas*. [S.l.], 2004. Disponível em: <https://math.tecnico.ulisboa.pt/textos/ppgmutltrig.pdf>. Citado na página 50.

Baroni, R; Nobre, S. Pesquisa em educação matemática. In: ____. [S.l.]: UNESP, 1999. cap. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a Educação Matemática. Citado na página 18.

BITENCOURT, L.S. *Experimentos no Ensino da Trigonometria e Descrição Dinâmica das Funções seno e cosseno.* Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro., 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1413>. Citado na página 44.

BONA, B.O. Análise de softwares educativos para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. *Experiências em Ensino de Ciências*, v. 4, p. 35–55, 2009. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/eenci/artigos/Artigo_ID71/v4_n1_a2009.pdf>. Citado na página 15.

BOYER, C.B. *História da Matemática.* [S.l.]: Edgard Blücher. São Paulo., 1996. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 23 e 24.

BRASIL, Ministério da Educação do. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, DF: MEC/SE, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.

BRUGINSKI, J. W. *Desenvolvimento de Planilhas Dinâmicas Utilizando o Software GeoGebra para o Ensino de Funções Trigonométricas.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnola Federal do Paraná, Paraná., 2014. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/802/1/CT_PROFMAT_M_Bruginski%2c%20William%20Jos%C3%A9_2014.pdf>. Citado na página 43.

COSTA, N.M. L.A. A história da trigonometria. *Educação Matemática em Revista*, v. 13, p. 60–68, 2003. Citado na página 24.

DAMBROSSIO. *Educação Matemática: da Teoria à Prática*. [S.l.]: Editora Papirus, Campinas, 2012. Citado na página 18.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* [S.l.]: Editora da Unicamp, Campinas., 2009. Citado na página 20.

FARIAS, F.M. *Funções Trigonométricas e geoGebra no Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amapá, Amapá., 2016. Disponível em: <http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/FUN%C3%87%C3%95ES-E-GEOGEBRA-NO-ENSINO-M%C3%89DIO.pdf>. Citado na página 43.

FERREIRA, L.S.A. *Trigonometria e Funções Trigonométricas, uma Abordagem Didático Metodológica.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amapá, Amapá., 2016. Disponível em: <http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/TRIGONOMETRIA-E-FUN%C3%87%C3%95ES-TRIGONOM%C3%89TRICAS-UMA-ABORDAGEM-DID%C3%81TICO-METODOL%C3%93GICA.pdf>. Citado na página 45.

FILHO, A.B.R. *Objetos de Aprendizagem: Estudo de Funções com o Apoio de GeoGebra.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba., 2015. Disponível em: <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Rivaldo.pdf>. Citado na página 44.

GERHARDT, T.E; SILVEIRA, D.T. *Métodos de Pesquisa.* Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Citado na página 16.

GODOY, A.S. Pesquisa qualitativa - tipos fundamentais. *Revista de Administração de Empresas, São Paulo*, v. 35, p. 62–63, 1995. Citado na página 16.

GOLDENBERG, M.A. *A arte de pesquisar: Como fazer Pesquisa Qualitativa em Ciências Sociais*. [S.l.]: Editora Record, Rio de Janeiro., 1999. Citado na página 16.

JUNIOR, Jos Silva Bacelar. *Uso do GeoGebra no Ensino da Trigonometria.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Ceará., 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/5999/1/2013_dis_jsbjunior.pdf>. Citado na página 42.

LIMA, Elon et al. *A Matemática do Ensino Médio*. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 28.

LIMA, O. E. C. *A Utilizaç ão do Software GeoGebra como Ferramenta para o Ensino de Funções.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Ceará., 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/5815/1/2013_dis_ceolima.pdf>. Citado na página 43.

LOPES, J.J. A introdução da informática no ambiente escolar. 2004. Disponível em: <https://clubedoprofessor.com.br/artigos/artigojunio.pdf>. Citado na página 15.

MAIA, J. *O Ensino de Funções Trigonométricas através do Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/18659/1/JoaildoM_DISSERT.pdf>. Citado na página 42.

MEDEIROS, W.C. *Uma Proposta para o Ensino de Trigonometria Utilizando o Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual da Paraíba, 2014. Citado na página 43.

MELO, E.B. *Ensino-Aprendizagem de Funções Trigonométricas através do Software GeoGebra aliado à Modelagem Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br//sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.xhtml?popup=true&id_trabalho=3734133>. Citado na página 45.

MILENO, E. *GeoGebra e as Funções Elementares que são apresentadas no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=78016>. Citado na página 45.

MINAYO, M. C. S. *Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade*. [S.l.]: Vozes, 2001. Citado na página 16.

N.V., Batista. *Uma Proposta Metodológica para o Ensino das Funções Trigonométricas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, São Paulo., 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/7376>. Citado na página 43.

PCN+. *PCN+ Ensino Médio: orientações complementares aos parâmetros curriculares nacionais.* Brasília, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Citado na página 50.

PCNEM. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Citado na página 50.

PERSICANO, H. E. *A importância do uso de Novas Tecnologias no Processo de Ensino e Aprendizagem: Aplicação do Software GeoGebra no Estudo das Funções Trigonométricas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2013. Disponível em: <http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3182>. Citado na página 42.

RIO DE JANEIRO. *Currículo Mínimo-Matemática - Governo do Estado do Rio de Janeiro*. [S.l.], 2012. Disponível em: <http://www.rj.gov.br/c/document_library/get_file?uuid=55442b8d-85cb-47c8-80b4-42846f5c6d99&groupId=91317>. Citado na página 50.

ROMERO, C.S. Recursos tecnológicos nas instituições de ensino: planejar aulas de matemática utilizando softwares educacionais. 2006. Citado na página 46.

SALAZAR, D.M. *GeoGebra e os estudo das funções trigonométricas no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015. Disponível em: <http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/DENISE-SALAZAR-DISSERTA%C3%87%C3%83O1.pdf>. Citado na página 15.

SANTIAGO, E. *Ensino da Trigonometria usando o Software GeoGebra como Ferramenta de Ensino-Aprendizagem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=77024>. Citado na página 44.

SANTOS, J.C; GAMBOA, S.S. *Pesquisa Educacional: quantidade-qualidade*. [S.l.]: Ed. Cortez, 2007. Citado na página 16.

SILVA, Evandro. *O Ensino de Funções Trigonométricas com o Auxílio do GeoGebra.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Vale do São Francisco, Pernambuco., 2013. Disponível em: <http://www.univasf.edu.br/~tcc/000007/0000077f.pdf>. Citado na página 42.

SILVA, Jander Carlos Silva e. *As novas tecnologias no contexto escolar. Uma abordagem sobre aplicações do GeoGebra em Trigonometria*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo., 2015. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-17122015-104430/pt-br.php>. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 50.

SILVA, Sandro. *Desenvolvimento e Material Didático Teórico e Prático de Apoio ao Ensino de Funções Trigonométricas Utilizando o Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Rondônia, 2013. Disponível em: <http://www.profmat.unir.br/menus_arquivos/1819_sandro_ricardo_pinto_da_silva.pdf>. Citado na página 42.

SOUZA, Jakson Idernando Gonzaga de. *Utilização do Software GeoGebra no Ensino das Funções Trigonométricas.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Ceará., 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8953/1/2014_dis_jigsouza.pdf>. Citado na página 43.

SOUZA, Leila Maria Salom ao de. *Uma Proposta de Estudo de Funções Trigonométricas e suas inversas através do Geogebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=83918>. Citado na página 44.

TEIXEIRA, Alexandre de Mattos. *Aprendizagem significativa de Funções através do GeoGebra e de tipos Digitais*. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica-RJ, 2013. Disponível em: <http://dippg.cefet-rj.br/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=1153&Itemid=167>. Citado na página 43.

Apêndices

APÊNDICE A

Trabalhos relacionados

Quadro de Trabalhos Relacionados

Título	**Autor**	**Objetivos**	**Referencial Teórico**	**Processos Metodológicos**	**Resultados**	**Contribuições**
Desenvolvimento e Material Didático Teórico e Prático de Apoio ao Ensino de Funções Trigonométricas Utilizando o Software GeoGebra	Sandro Ricardo Pinto da Silva	Desenvolver um material didático teórico e prático de apoio ao ensino de Matemática.	Matriz do SAEB (BRASIL, 2008) e diretrizes do Ministério da Educação (MEC)	Coleta de dados a respeito do perfil do professor de Matemática, apresentação da teoria de Funções Trigonométricas, apresentação do software GeoGebra.	A pesquisa indica que é necessária a implantação de políticas públicas para capacitação de professores.	As ferramentas fornecidas pelo GeoGebra podem ser utilizadas para o aprendizado de diversos conteúdos do Ensino Básico.
O Ensino de Funções Trigonométricas Através do Software GeoGebra	Joaildo Maia	Suprir Deficiências no Estudo das Funções Trigonométricas	PNLD Livros didáticos da editora FTD	Abordagem qualitativa de contato direto.	Indicaram que a utilização do software GeoGebra contribui para a compreensão de conceitos matemáticos.	Proporcionar uma reflexão para a aprendizagem por meio do software GeoGebra.
O Ensino de Funções Trigonométricas com o Auxílio do GeoGebra.	Evandro Alves da Silva	Uso do Software GeoGebra por meio de Tutoriais em forma de roteiros.	PCNEM	Estudo de Caso	Permitiu expor a experimentação, exploração e análise de propriedades das Funções Trigonométricas por meio da movimentação de um ponto no ciclo trigonométrico.	Vantagens do uso do GeoGebra narepresentação variada e precisa das Funções Trigonométricas.
Uso do GeoGebra no Ensino da Trigonometria	José da Silva Bacelar Júnior	Apresentar um material para aprimoramento dos professores de Matemática do ensino médio.	Não foi encontrado	Proposta de Atividades.	Acredita-se que a utilização do software permite ao aluno ampliar seus conhecimentos por múltiplas metodologias.	Tendências atuais em Educação Matemática por meio de Tecnologias.
A importância do uso de novas Tecnologias no Processo de Ensino e Aprendizagem: Aplicação do Software GeoGebra no Estudo das Funções Trigonométricas	Helio Evangelista Persicano	Promover uma reflexão sobre o uso das novas tecnologias dentro da sala de aula pelos professores.	PCNs LDB 9.394/96	Proposta de Atividades.	Constatou-se que o objetivo de se pensar sobre o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem foi atingido.	A implantação de novas tecnologias e a interdisciplinaridade como ferramentas na aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Quadro de Trabalhos Relacionados

Título	Autor	Objetivos	Referencial Teórico	Processos Metodológicos	Resultados	Contribuições
A utilização do software GeoGebra para o ensino de Funções.	Cícero Erialdo Oliveira Lima	Investigar a utilização do software GeoGebra no ensino de Funções (inclusive Funções Trigonométricas)	PCNEM	Estudo bibliográfico e elaboração de sequência didática.	Acredita-se que o trabalho sirva de apoio para a elaboração de novas sequências didáticas com apoio computacional.	Reflexão da prática docente para professores de Matemática.
Desenvolvimento de Planilhas Dinâmicas utilizando o software GeoGebra para o estudo de Funções Trigonométricas.	William José Bruginski	Criar uma ferramenta que auxilie o ensino da Trigonometria.	Formalização dos conteúdos de Trigonometria, assim como conceitos preliminares.	Desenvolvimento da parte teórica das Funções Trigonométricas, definições, características e construções dos gráficos.	Aponta-se que a utilização de Planilhas Dinâmicas contribui para o ensino das Funções Trigonométricas.	Reflexão de como as Planilhas Dinâmicas contribuem para o ensino das Funções Trigonométricas..
Uma Proposta para o ensino de Trigonometria utilizando o GeoGebra.	Weskley Carneiro de Medeiros	Desenvolver uma proposta para o ensino de Trigonometria a partir do software GeoGebra.	Não foi encontrado.	Indicação de fundamentos e de procedimentos da prática pedagógica em Trigonometria.	Acredita-se que o bom uso da tecnologia possa alcançar os objetivos que não temos conseguido pelos métodos tradicionais.	A utilização do software GeoGebra pode permitir uma maior chance de apropriação e compreensão de conceitos que demandam tempo pelos métodos tradicionais.
Utilização do Software GeoGebra no Ensino das Funções Trigonométricas.	Jakson Idernando Gonzaga de Souza	Explorar o software GeoGebra como recurso pedagógico no ensino das Funções Trigonométricas.	PCNs e pressupostos pedagógicos do construtivismo.	Aula expositiva com utilização do quadro e pincel.	O uso da simulação computacional pode ser um meio eficiente de se promover uma aprendizagem significativa.	Utilização da informática como recurso pedagógico.
Funções Trigonométricas e o GeoGebra no Ensino Médio.	Márcio ferreira Farias	Abordar situações-problema por Modelagem Matemática utilizando as ferramentas do GeoGebra.	História das Funções e tópicos de Modelagem Matemática.	Roteiro de Atividades	É necessário somar as aulas tradicionais a utilização de recursos do software GeoGebra.	Ampliação da utilização de tecnologias digitais na compreensão de objetos de estudo essenciais a todos os níveis de ensino.

Quadro de Trabalhos Relacionados

Título	Autor	Objetivos	Referencial Teórico	Processos Metodológicos	Resultados	Contribuições
Uma Proposta Metodológica para o Ensino das Funções Trigonométricas.	Valéria Nogueira Batista	Promover a aprendizagem das Funções Trigonométricas Seno, Cosseno no contexto de tarefas exploratório-investigativas em aulas de Matemática.	PCNs Currículo do Estado de São Paulo e o PNLD	Trabalho de exploração e investigação incluindo Modelagem Matemática.	As aulas de natureza exploratório-investigativas podem ser grandes aliadas no ensino das Funções Trigonométricas..	Apresentam-se alternativas que visam contribuir para a aplicabilidade prática das Funções Trigonométricas..
O Ensino da Trigonometria utilizando o software GeoGebra como ferramenta de ensino - aprendizagem.	Eilson Santiago	Apresentar alternativas para o ensino das Funções Trigonométricas..	PCNEM e livros didáticos.	Pesquisa de caráter quanti-qualitativo.	Percebeu-se que atividades desenvolvidas por meio do GeoGebra tornam-se facilitadoras do processo de ensino e aprendizagem.	Reflexão do uso de tecnologias no ensino da Matemática.
Uma Proposta de Estudo de Funções Trigonométricas e suas Inversas através do GeoGebra.	Leila Maria Salomão de Souza	Apresentar uma proposta de ensino das Funções Trigonométricas, com o uso de construções dinâmicas.	Orientações Curriculares para o Ensino Médio(2006) LDB(9.394/96) PNLD	Atividades Propostas	De uma forma dinâmica os alunos construíram os conceitos das funções seno, cosseno, arco seno e arco cosseno.	Proposta motivadora no contexto sociocultural, busca da mudança da compreensão dos contextos matemáticos.
As novas Tecnologias no contexto escolar: Uma abordagem sobre aplicações do GeoGebra em Trigonometria.	Jander Carlos Silva e Silva	Nortear professores da Educação Básica para o ensino do tema Trigonometria.	LDB (1996) INEP SAEB	Revisão bibliográfica dos conceitos Trigonométricos.	Acredita-se que o detalhamento das atividades forneçam flexibilidade para alunos e professores na utilização do GeoGebra.	A utilização das imagens no enriquecimento das aulas, auxiliando a compreensão de conceitos da Trigonometria.
Objetos de Aprendizagem: Estudo de Funções com o apoio do GeoGebra.	Rivaldo Bezerra de Aquino Filho	Construir uma página na internet com um conjunto de atividades.	PCNs TIC PNLD BIOE RIVE	Blocos de Atividades Propostas	Acredita-se que os Objetos criados e disponibilizados venham somar ao cotidiano das aulas de Matemática.	Integração do computador a aula por meio da utilização de Objetos de Aprendizagem.
Experimentos no Ensino da Trigonometria e a descrição Dinâmica das Funções seno e cosseno.	Sergio Leandro Bitencourt	Relatar a construção de um material útil no ensino de Trigonometria para professores.	Didática dos Princípios Construtivistas básicos de Piaget.	Roteiro de experimentos	A sequência didática aplicada permitiu ao aluno aprender enquanto resolvia problemas.	Inserção de recursos computacionais como auxílio a problematização no campo da Matemática.

Quadro de Trabalhos Relacionados

Título	Autor	Objetivos	Referencial Teórico	Processos Metodológicos	Resultados	Contribuições
GeoGebra e as Funções Elementares que são Apresentadas no Ensino Médio.	Evandro Mileno	Propor o uso do Software GeoGebra para auxiliar e facilitar a aprendizagem das Funções (inclusive Trigonométricas)	PCNs SAEB Anresc ANA	Utilização de software por meio de atividades	É provável que os alunos resolvam atividades com o auxílio do GeoGebra , mas o principal objetivo é que o aluno seja capaz de desenvolver atividades semelhantes sem o auxílio do software.	A utilização do GeoGebra na aprendizagem de diversos conteúdos no campo da Matemática.
Trigonometria e Funções Trigonométricas, uma Abordagem Didática Metodológica.	André Luiz dos Santos Ferreira.	Propor uma sequência didática que permita a interpretação gráfica das Funções Trigonométricas .	Análise de coleções de livros didáticos.	Elaboração de uma sequência didática	Os resultados a posteriori apontam ser adequado o uso de softwares no processo de aprendizagem.	Utilização de softwares como ferramentas que despertam o interesse dos alunos.
Ensino-Aprendizagem de Funções Trigonométricas através do Software GeoGebra aliado à Modelagem Matemática.	Enaldo Vieira de Melo	Analisar as contribuições do Software GeoGebra aliado à Modelagem Matemática.	Teoria da Aprendizagem significativa de Ausubel e tópicos sobre Modelagem.	Pesquisa qualitativa delineada por um estudo de caso com pesquisa participante .	Os resultados da pesquisa apontam que o uso do software GeoGebra aperfeiçoou a aprendizagem das Funções Trigonométricas .	Conexões realizadas pelos estudantes entre o conteúdo de Funções Trigonométricas .